UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Lenka Grygarová

MATEMATICKÉ SOUTĚŽE V PEDAGOGICKÉ PRAXI

Olomouc 2016 vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedenou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne ________________ ___________________________

Bc. Lenka Grygarová

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a hlavně za trpělivost během vedení mé diplomové práce.

Obsah

Úvod

Nebojím se říci, že s matematikou se setkáváme všichni každý den. Je jedno jestli je člověk na matematiku talentovaný, nebo matematiku ovládá průměrně, nebo dokonce matematice moc nerozumí, ale matematika nás obklopuje ze všech stran a mnozí z nás si toho ani nevšímají.

Má-li člověk ráno vstávat do práce nebo do školy, potřebuje znát číslice, aby byl schopen vstát v čas. Při cestě autobusem, vlakem, nebo jiným dopravním prostředkem jsme opět odkázáni na znalost číslic. Ale nejenom číslice nám postačí, je nutné znát i nejzákladnější početní operace jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení, abychom byli schopni si taky koupit lístek. Dalším příkladem, kdy se bez matematiky neobejdeme, jsou nákupy v obchodech, placení složenek, při vaření, při rekreaci, atd.

Matematickým dovednostem se učíme již od útlého věku, sotva jsme se naučili mluvit, už na nás rodiče začali praktikovat počítání na prstech, později jsme počítali vagóny projíždějícího vlaku, počet aut na parkovišti a spoustu dalších věcí, které nám přišli velice zábavné. Na základní, střední a vysoké škole zjišťujeme, že matematika toho skrývá mnohem více a pro některé z nás se stává i noční můrou. Pro ty, kteří se nezalekli, začaly vznikat matematické soutěže, aby mohli své nabyté vědomosti porovnat i s ostatními jedinci a zjistili, jak na tom s matematikou doopravdy jsou. Tyto soutěže neprobíhaly pouze v rámci třídy nebo školy, ale postupně vznikala okresní, krajská a nakonec i mezinárodní kola, ve kterých se utkávají jen ti nejlepší z nejlepších.

A právě tím se zabývá moje diplomová práce, která je zaměřena na matematické soutěže pro žáky základních škol a studenty středních škol. Obecně lze soutěže rozdělit pro žáky a studenty nadané - matematická olympiáda, žáky a studenty, které matematika baví, nebo je snahou soutěže přilákání řešitelů na zajímavé příklady - Matematický klokan a poslední skupinou jsou soutěže mezi výše uvedenými skupinami – Pythagoriáda.

První část práce popisuje didaktickou stránku matematické úlohy – její definici, vznik a její řešení. Dále jsou v této části popsané didaktické testy – jejich plánování a sestavování.

V praktické části diplomové práci jsem se nejprve zaměřila na řešení různých matematických soutěží (Matematický klokan a Pythagoriáda), kde jsem vypisovala postup mého řešení. V další části jsem se zaměřila na vlastní příklady, které by bylo možné použít v některých matematických soutěžích.

V poslední části jsem sestavila test složený z několika příkladů matematické olympiády pro základní školy a rozdala mezi respondenty, aby jej co nejlépe vyřešili. Vypracované testy jsem opravila a výsledky použila jako podklad pro výzkumnou část diplomové práce.

1 Učební úlohy

Učební úlohy plní nejdůležitější funkci v řízení učení a aktivizaci žáků. Chceme-li, aby žáci byli aktivní v hodinách, aby se učili efektivně a látce porozuměli, musíme jim zadávat určité úlohy. Dále tyto úlohy slouží k ověřování plnění výukových cílů. Učební úlohy jsou všechna učební zadání, která užívají všichni učitelé ve své každodenní práci. Důležité pří řešení učebních úloh je to, aby žáci získali nejen nové vědomosti a dovednosti, ale aby také opakovali a procvičovali probrané učivo z dřívějších hodin. Veškeré učivo by mělo být formulováno ve vědním systému daného předmětu, který bude pro žáky srozumitelný a přístupný. Učební úlohy u žáků mají také rozvíjet schopnost týmové spolupráce, dovednost pracovat s literaturou, volit vhodné metody práce, osvojovat si myšlenkové operace potřebné k řešení problémů a získávat osobní vlastnosti, zvláště cílevědomost, svědomitost, apod. [1]

1.1 Definice učebních úloh ve výuce

Úlohy se obecně definují podle D. Holoušové. Její definice učební úlohy je jako široká škála všech učebních zadání, a to od nejjednodušších úkolů, vyžadující pouhou pamětní reprodukci poznatků, až po složité úkoly, které vyžadují tvořivé myšlení. Tyto úlohy mají být podřízené výukovému cíli, dále z něho mají vycházet a na konci probraného tématu by měly ověřit zpětnou vazbu prostředků a ověřit splnění příslušného výukového cíle.

Podle D. Holoušové a dalších autorů, sehrávají učební úlohy velmi velkou roli ve výuce:

a) Úlohy mají být v celém vyučovacím procesu, nemají se objevovat pouze na začátku a konci vyučovacích hodin (tematického celku), ale mají být používány i ve výkladové části vyučování. Učební úlohy mají jak funkci vzdělávací, tak i formativní.
b) Ve výuce nemají hrát autonomní roli, jsou jednou z jejih složek, mají instrumentální charakter.
c) Úlohy nezadáváme samostatně, ale v celých systémech, při zvyšující náročnosti úloh nesmí být úlohy monotónní, mají vzbuzovat dojem, že vyplynuly ze situace, která se objevila ve výuce.
d) Při vytváření učebních úloh může učitel improvizovat, ale nikdy by neměly být úlohy vytvářeny bezděky. Sbírky učebních úloh by měly být dostatečně velké a otevřené, aby je učitel mohl přizpůsobit konkrétní situaci ve výuce.

e) Aby se správně vytvářely učební úlohy, je důležité umět zformulovat výukové cíle, vzhledem k nim, by měly být učební úlohy přesně definované, aby v daných podmínkách byly splněné stanovené výukové cíle.
f) Při vytváření učebních úloh se projevuje profesionalita učitele. V rámci pregraduální a postgraduální přípravy v těchto dovednostech by se měl učitel stále zdokonalovat. [1]

1.2 Příklady nevhodných formulací

V praxi se ovšem můžeme setkat i s nevhodně formulovanými učebními úlohami, které žákům ani studentům v jejich získávání zkušeností moc nepomáhají. Proto je třeba se zaměřit na tyto nevhodné formulace a snažit se je co nejvíce eliminovat. Mezi nejčastější problémy patří:

1. Často se při formulaci učební úlohy používají uzavřených otázek uvozených tázacími zájmeny:
    - co (co je to, co potom děláme, co je, co tam chybí…)
    - jak (jak dlouho, jak často, jak to uděláme, jak připravíme…)
    - kdy (kdy se stane, kdy to začne…)
    - kde (kde je to, kde to najdete…)
    - proč (proč to uděláte, proč je to, proč to nastává…)

Žáci na takto formulované otázky mohou převážně odpovídat pouze jedním slovem nebo ve formě holé věty, jejich jazykový projev je potom jednoduchý a často jazykově málo kultivovaný. Podněty pro náročnější myšlenkové operace a následně možnost kultivovaně sdělit výsledky činnosti tyto učební úlohy převážně nezaručují.

2. Učební úlohy jsou formulovány příliš obecně (řekni něco o…).
3. Často bývají vyjádřeny oznamovací větou a od žáka se očekává pouhé její doplnění (Třecí síla závisí na…).
4. Učitel zadání úlohy zbytečně komplikuje tím, že hromadí jednu otázku za druhou, a přitom nedovede vyjádřit požadovaný výkon. (Řekněte nám něco o síle, podle kterého vzorce ji vypočítáme, jak je definovaná jednotka pro sílu…). [1]

1.3 Postavení úloh ve výuce matematiky

Vhodně formulovaná úloha, které dokáže studenta zaujmout, přimět jej, aby se zamyslel a pokusil se ji vyřešit, je neocenitelným nástrojem při výuce téměř všech předmětů na základních, středních, ale i vysokých školách. Úlohy a jejich řešení jsou základem ve vyučování.

Nejvíce se s úlohami setkáváme v hodinách matematiky. Jejím úkolem a smyslem je u žáků a studentů vzbudit samostatnost pří řešení úloh. V matematice jsou úlohy nepostradatelné k plnění vzdělávacích i výchovných cílů a k realizaci spojení školy se životem.

V jednotlivých fázích vyučovacího procesu má zařazení úloh různé cíle:

1) Motivaci nového učiva – motivační úlohy
2) Ilustraci výkladu učiva – ilustrující úlohy
3) Získávání nových poznatků – poznávací a rozvíjející úlohy
4) Upevňování poznatků a procvičování učiva – cvičení
5) Prověřování zvládnutí učiva při zkoušení

Při řešení matematických úloh narážíme na různé pojmy jako je: úloha, problém, cvičení a příklad. Mohlo by se zdát, že mezi nimi není žádný rozdíl, ale opak je pravdou.

Úloha

V matematice je určená dvěma významy, kdy při řešení úloh vždy poznáme, zda se jedná o první nebo druhý význam úlohy:

1) Jedná se o obecné označení pro určení neznámých složek problémové situace.
2) Zadání situace doposud typově neřešené, kde vystačíme se známými poznatky a známým aparátem.

Problém

Někdy se také nazývá jako problematická úloha, u které je zapotřebí větší podíl tvořivosti a vynalézavosti.

Cvičení

Má význam první definice úlohy. Slouží k procvičování probrané látky, algoritmů, vzorců, početních nebo i grafických postupů.

Příklad

Za příklad považujeme tzv. vzorový příklad. Jedná se o příklad, který je vyřešený jedním nebo více způsoby. Na tomto příkladu se žáci a studenti seznamují s postupem řešení. Příklad můžeme považovat za druhý význam úlohy.
[1]

1.4 Dělení matematických úloh

1) Existenční úlohy

   V úlohách řešíme, zda výsledkem je prázdná nebo neprázdná množina.

   Příklad: Má rovnice $7x - 12 = 25$ v množině přirozených čísel řešení?

   Má rovnice $5z + 18 = 68$ v množině reálných čísel řešení?

2) Důkazové úlohy

   Řešíme metodami, které mají svůj logický základ. Jedná se o organizaci poznatků a tvrzení v rámci některé deduktivní teorie.

   Příklad: Dokažte, že trojúhelník ABC může mít tyto délky stran: a = 5 cm, b = 8 cm, c = 12 cm.

   Dokažte, že platí $\sqrt{7+\sqrt{7}} \geq 1 + \sqrt{7-\sqrt{7}}$

3) Určovací úlohy

   Jedná se o úlohy, které vyžadují nalezení, výpočet, sestrojení apod. všech matematických objektů daného druhu, které mají požadované vlastnosti. Obecný význam této úlohy je zapotřebí objevovat procesem abstrakce z jednotlivých případů, které jsou v matematické učebnici zastoupené.

   Do matematických určovacích úloh patří: řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav, řešení geometrických konstrukčních úloh, výpočty derivací a limit funkcí, atd.

Patří k nejstarším matematickým úlohám. Při řešení těchto úloh vznikaly nové matematické pojmy, metody, zápisy a algoritmy.

Příklad: Řešte rovnici $x^2 - 5x + 6$ v reálných číslech.
Řešte v R nerovnici $(x-2) \cdot (5-3x) > 0$
Vypočítejte obsah obdélníku se stranami a = 6 cm a b = 1,5 cm.

Mezi všemi třemi typy úloh je úzký vzájemný vztah, např. při řešení určovací úlohy je součástí zkouška, jejímž obsahem je důkaz. Základním typem úloh se obvykle pokládá úloha určovací, na kterou je možné převést ostatní typy matematických úloh. [3][5]

1.5 Tvorba matematické úlohy

Za matematickou úlohu můžeme považovat veškeré problémy, které mají žáci řešit. Jestliže před námi stojí řešení nějaké úlohy, nejprve ji musíme převést do matematického jazyka. Poté o úloze mluvíme jako o matematické úloze. V dnešní době se v hodinách matematiky počítají a řeší úlohy, které už jsou převedené do matematického jazyka, které se takto zformulované v praktickém životě neobjevují. Což představuje problém, protože žáci jsou sice schopni řešit takovéto matematické úlohy, dokonce i složitější, ale nedovedou si poradit s úlohami, které jsou v nematematickém tvaru. Nedovedou zadanou úlohu vytvořit v matematickém jazyce. Úlohy, které nejsou v určitém matematickém jazyce, se nazývají slovní úlohy. Hlavní zásada, která platí pro slovní úlohy je ta, že nelze řešit slovní úlohu, dokud není převedená na matematickou úlohu.

V praxi se nejčastěji matematickou úlohou stává slovní úloha, která je převedena na rovnici, nebo soustavu rovnic, jejichž řešení lze provést pomocí následujících bodů:

1) Prostudovat pořádně podmínky úlohy
2) Vyjasnění vztahů mezi vstupujícími veličinami
3) Kterou veličinu brát jako neznámou
4) Jaké další veličiny je nutné vyjádřit pomocí neznámých
5) V jakém intervalu mohou neznámé nabývat hodnot (určení definičního oboru a oboru hodnot)

Po daných úvahách se můžeme pustit do řešení. Po vyřešení rovnice nebo soustavy rovnic je důležité provést zkoušku, která nám zajistí, že dané úvahy při řešení byly správné.
[1]

1.6 Řešení matematických úloh

Existuje několik možností řešení matematických úloh. První dvě metody řešení jsou algebraický a aritmetický způsob. Algebraický způsob řešení spočívá v tom, že si řešitel sestaví správnou rovnici nebo soustavu rovnic a úlohu vyřeší.
Naproti tomu aritmetický způsob řešení je vyřešení úlohy úsudkem nebo formou „pokus omyl“. Vysvětlení způsobů řešení si ukážeme na příkladu.

Farmář měl na svojí farmě husy a ovce. Při přepočítávání svých stád zjistil, že celkový počet hlav zvířat je 1100 a noh 2400. Vypočítejte, kolik bylo na farmě hus a ovcí?

1.6.1 Algebraický způsob řešení

Sestavíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. Husy nám nahradí neznámá x a ovce neznámá y.

$$x + y = 1100$$
$$2x + 4y = 2400$$

První rovnice nám vyjadřuje celkový počet hlav a druhá rovnice celkový počet noh.
Vyřešíme soustavu rovnic:

$$x + y = 1100 \quad /\cdot 2$$
$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$2x + 2y = 2200 \;/\cdot (-1)$$
$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$-2x - 2y = -2200$$
$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$2y = 200$$
$$\underline{\underline{y = 100}}$$

Do první rovnice dosadíme za neznámou y a dopočítáme neznámou x => $x + 100 = 1100$ =>$x = 1100 - 100$. Neznámá $\underline{\underline{x = 1000}}$.
Na farmě bylo 1000 hus a 100 ovcí.

1.6.2 Aritmetický způsob řešení

Jedná se o úsudkovou metodu. Budeme vycházet z předpokladu, že na farmě jsou jen husy. To by znamenalo, že by tam bylo 1100 hlav a 2200 noh. Na farmě je více noh, protože ovce mají 4 nohy. Pokud jednu husu vyměníme za ovci, zvětší se počet noh o 2. Kolik hus nahradíme, aby se počet noh zvětšil o 2400 – 2200 = 200. V 200 je 2 obsažena 2 krát. To znamená 200 : 2 = 100. Z toho plyne, že ovcí je 100 a hus 1000.[1]

Při řešení jednodušších příkladů může být aritmetický způsob vhodný. Řešitel se logicky nad problémem zamyslí. Využití tohoto řešení při složitějších úlohách je nevhodné. V těchto situacích je lepší pro řešitele užití algebraického způsobu.

Matematické úlohy lze řešit i podle toho, jaký druh myšlení převládá. Patří sem algoritmické (algoritmus) a heuristické metody řešení úloh.

1.6.3 Algoritmický způsob řešení

Řešení úloh je jednoznačně určeno vzorcem nebo pravidlem = algoritmus. Podle algoritmu se v určitém pořadí vykonává soustava elementárních kroků (operací), vedoucích k vyřešení všech úloh určitého typu.

Příklad:

Výpočet obsahu čtverce o straně a = 6 cm.

- velikost strany a = 6 cm
- vzorce pro výpočet obsahu čtverce: $S = a^2$
- správné použití jednotky obsahu: m^2.

Pro algoritmus, jakožto postup řešení úloh, platí základní pravidla:

a) Hromadnost – algoritmus není použitelný jen na jednu konkrétní úlohu, ale na libovolné úlohy, které jsou si podobné.
b) Determinovanost – v každém kroku algoritmu musí být dáno, co přesně dělat.
c) Rezultativnost – proces předepsaný algoritmem je konečný, skončí po konečném počtu kroků.

1.6.4 Heuristický způsob řešení

Jedná se o metodu, kdy je nejdůležitějším faktorem objevování. Tato metoda je využívána jako heuristický dialog. Učitel vede rozhovor se žáky, kterým pomáhá objevovat nové poznatky. Heuristická metoda se používá při řešení úloh, při kterých nestačí známé postupy a algoritmy. Tyto úlohy označujeme jako problémové úlohy. Řešení těchto úloh vyžaduje velké soustředění a čas.

[4] [7]

2 Didaktické testy

S učebními úlohami také souvisí didaktické testy. Jde o specifický nástroj k měření edukačních výsledků žáků. Aby byl test považován za správně sestavený, musí obsahovat náležitosti, jako jsou:

1) Objektivita a srovnatelnost
   - Všem žákům je předložen test se shodnými úlohy a se stejným časovým limitem.
   - Žáci mají stejné podmínky a z toho vyplývá možnost porovnávání výkonů jednotlivých žáků a studentů.
2) Validita
   - Test ověřuje znalosti a dovednosti, které vychází z dříve probíraného učiva.
3) Reliabilita
   - Je míra přesnosti a spolehlivosti testu.
   - Test, který měří přesně a spolehlivě, poskytuje informace o úrovni znalostí a dovedností žáků a studentů.
   - Přesné měření vypovídá o skutečných znalostech a dovednostech žáků.
   - V ideálním případě by měl stejný žák při opakovaném zadání testu dosáhnout shodného výsledku.
4) Citlivost (diskriminace)
   - Vypovídá o schopnosti testu rozlišovat mezi žáky s různými skutečnými znalostmi a dovednostmi.
   - Výsledky žáků by měly být přiměřeně rozprostřeny po celé bodové škále.
5) Praktičnost testu
   - Jednoduchost použití daného testu, snadnost a rychlost opravy výsledků.

[6] - [10]

Didaktické testy můžeme rozdělit na standardizované a nestandardizované. Standardizované testy jsou normativní, jsou zpracovávány odborníky, jsou důkladně ověřeny a stanoveny jejich základní vlastnosti. Při jejich tvoření vzniká i manuál, který určuje vlastnosti testu i jeho správné použití. Tyto testy se využívají pro velký počet respondentů. Mezi tvořitele standardizovaných testů patří CERMAT nebo SCIO. Za nestandardizované testy lze považovat testy, které si vytváří každý učitel sám. Jsou to testy, které má učitel pro vlastní potřebu. Vlastní potřebou se myslí, zjišťování znalostí a dovedností u žáků za nějaký určitý čas (kratší (desetiminutovka, test,…), ale i delší (čtvrtletní písemná práce)). Nestandardizované testy neobsahují žádný manuál. [6][11][12]

2.1 Konstrukce didaktického testu

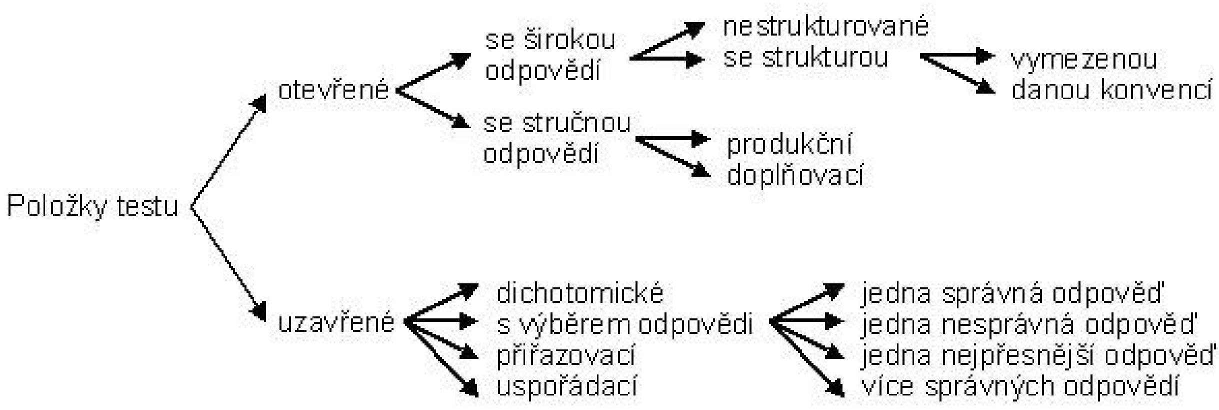
Při tvorbě testu dodržujeme tyto fáze: [13]

2.1.1 Plánování testu

- čemu mají sloužit testové výsledky
- vymezení obsahu testu - jaké učivo má být prostřednictvím testu ověřeno
- upřesnění obsahu testu
    - počet a druh úloh
    - testovací čas
    - forma testu
    - počet variant testu

2.1.2 Sestavování testu

Při tvorbě testů můžeme používat různé druhy otázek. Otázky dělíme na dvě skupiny:



Obrázek 2.1 - struktura testových otázek

1. Otevřené otázky

Na otevřené otázky žáci a studenti odpovídají celými větami.

a) Otevřené otázky se širokou nestrukturovanou odpovědí
   - Popište negativní působení těžkých kovů v životním prostředí

b) Otevřené otázky se širokou odpovědí s vymezenou strukturou
   - Výroba hydroxidu sodného amalgámovým způsobem. (Uveďte hlavní suroviny, způsob čištění, schéma elektrolyzéru, způsob zpracování odpadních produktů, ekologická rizika.)

c) Otevřené otázky se širokou odpovědí se strukturou danou konvencí
   - Popište správný postup řešení slovních úloh

d) Otevřené otázky se stručnou produkční odpovědí
   - Uveďte 4 typy rovnic

e) Otevřené otázky se stručnou doplňovací odpovědí
   - Sveřep... šakal...zav...le v...l... na b...l... Měs...c.

     Při tvoření těchto otázek může nastat situace ta, že co je jasné pro učitele, který doplňovačku vymýšlí, nemusí být jasné žákům a studentům, kteří ji mají doplnit.
   - Nejmenší je .... Skládá se z ....,………. . Ty jsou tvořeny ...., ... a ………… . V .... se nacházejí .... a .... V .... pak ....

2. Uzavřené otázky

Na uzavřené otázky žáci a studenti odpovídají výběrem z možností, kroužkováním,….

a) Otázky uzavřené dichotomické
   - Vybírání, rozhodování se mezi dvěma odpověďmi
   - Do celých čísel patří číslo 2,5   správně – nesprávně
   - Grafem kvadratické rovnice je   parabola – hyperbola

b) Otázky uzavřené s výběrem možnosti
   - Existuje několik tipů:
     - Jedna správná odpověď
     - Jedna nesprávná odpověď
     - Více správných odpovědí
     - Více nesprávných odpovědí

c) Otázky uzavřené přiřazovací

Celé číslo	2i
Reálné číslo	-5
Přirozené číslo	2,5
Komplexní číslo	8

d) Otázky uzavřené uspořádací

- Uspořádejte čísla od nejmenšího po největší

$$2;\ \frac{2}{7};\ 1{,}5;\ \frac{6}{6};\ 3{,}25; 3{,}85;\ \frac{7}{5}$$

2.1.3 Ověřování testu

Při ověřování testu posuzujeme obsahové a konstrukční kvality testu. Zda tento test můžeme zadat žákům nebo studentům. Po té co žáci napíší test, analyzujeme jednotlivé testy žáků a studentů, celkové výsledky třídy, chybné odpovědi, atd. [9]

2.2 Testy používané v matematických soutěží

Jak je řečeno, soutěže matematického charakteru, [15] bývají přesně a důsledně připravované organizátory. Obsahují manuál pro uživatele, což jsou učitelé, kteří např. organizují školní kola soutěží (matematická olympiáda, Pythagoriáda). Připravované testy jsou normativní, to znamená, že obsahují normu pro hodnocení výsledků soutěže, proto se jedná o standardizované testy. Úlohy v testech se nezaměřují jen na konkrétní učivo, ale na průřez žákovými vědomostmi a dovednostmi a na logické myšlení. Soutěžní úkoly jednotlivých kategorií odpovídají do jisté míry znalostem žáka z výuky, ale zároveň se zaměřují i na úroveň obecnějších charakteristik, jako je právě logické uvažování žáka, strategie řešeni úlohy apod.

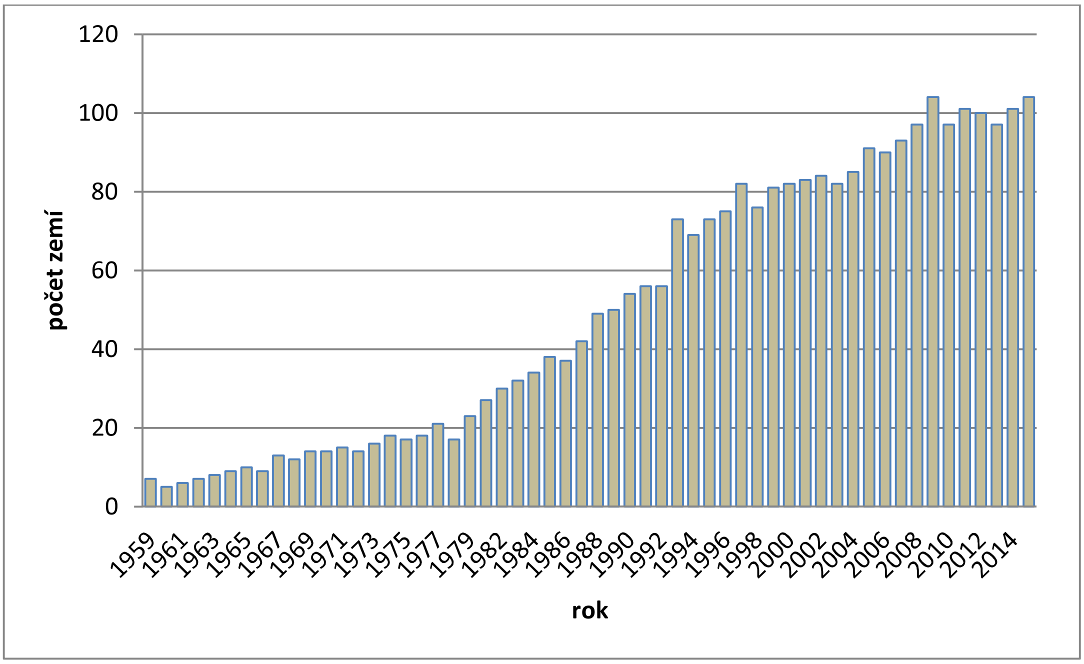
Matematické soutěže bývají tvořené otevřenými testovými úlohami, ve kterých se prokáže schopnost žáka vytvořit řešení úlohy. V soutěžích, jako jsou korespondenční semináře, se vyskytuji otevřené úlohy se širokou odpovědí. V těchto soutěžích se po žácích chce veškeré řešení příkladu, nestačí jen krátká odpověď. Je důležité, aby žák svoje řešení zapsal, protože i za postup řešení získává body.

Oproti tomu, Matematický klokan, je soutěž, která obsahuje uzavřené testové úlohy s výběrem jedné správné odpovědi. To může žáky a jejich postup při řešení takových to příkladů ovlivňovat. Při řešení uzavřených otázek může žák (student) postupovat několika způsoby. Jeden ze způsobů je ten, že příklad vyřeší a označí správnou odpověď, dalším postupem může být metoda „pokus omyl“ a tipne si odpověď, nebo do zadání úlohy dosazuje nabízené možnosti a až natrefí na správnou odpověď, pak ji označí.

3 Mezinárodní matematická olympiáda MMO

3.1 Historie

Mezinárodní matematická olympiáda se poprvé uskutečnila v Rumunsku roku 1959 s účastí 7 zemí a 57 soutěžících. Z počátku byla olympiáda pořádána pro státy východní Evropy, jež byly pod vlivem Sovětského svazu, ale později se rozšířila i do ostatních zemí a kontinentů, jak můžeme vidět na grafu uvedeném níže.



Obrázek 3.1 – rostoucí zájem zemí o MMO v letech 1959-2015

Jejich počet se v dnešní době pohybuje kolem 100. Ani naše země nebyla výjimkou a matematických olympiád se nejen účastnila, ale dokonce je i několikrát pořádala. Bylo to v letech 1962 v Českých Budějovicích, 1971 v Žilině a 1984 v Praze. Podrobný popis zemí pořádajících MMO je uveden viz Příloha 1. Za zmínku stojí, že od roku 1959 se neuskutečnil pouze jeden ročník matematické olympiády, a to roku 1980 kvůli lidovým střetům v Mongolsku. [17][20]

3.2 Výběr soutěžících a průběh olympiády

Nejtěžším úkolem pro každou zemi, která se chce mezinárodní matematické olympiády účastnit, je výběr nejlepších řešitelů, tj. studentů mladších 20 let a nestudující vysokou školu.

Výběr není jednoduchý a trvá několik měsíců. Každá země vybírá podle svých kritérií a možností. Nejčastěji se začíná školním kolem matematické soutěže, kde účastníci řeší sadu úkolů a ti nejlepší postupují do krajského kola. Zde se scházejí nejlepší z kraje, ale i z těchto řešitelů je nutno vybrat pouze hrstku nejlepších, kteří se dostanou do poslední fáze, a tou je celostátní kolo matematické olympiády. Zde se setkávají opravdu ti nejlepší z nejlepších z celého státu a opět zde řeší matematické úkoly a vydávají ze sebe to nejlepší, aby právě oni mohli reprezentovat svoji zemi na tak významné soutěži, jako je mezinárodní matematická olympiáda.

A na základě těchto vyřazovacích soutěží je na konci vybráno max. 6 řešitelů z celé země, kteří se mohou soutěže zúčastnit. Tento maximální počet soutěžících byl určen v roce 1993 a od té doby stále platí.

Na začátcích této soutěže každá země mohla vyslat nejvíce 8 soutěžících. Tito soutěžící řešili sadu 6 úloh, které byly bodovány různými body, ale celkové skóre bylo 40 bodů. V roce 1981 došlo ke standardizaci soutěžních otázek a každá úloha byla bodovaná přesně 7 body, z čehož se zvýšil maximální počet získaných bodů na hodnotu 42. V roce 1982 se experimentovalo s maximálním počtem soutěžících za jednu zemi. Tento počet byl snížen jen na čtyři uchazeče, ale tento pokus dlouho nevydržel.

Mnoho zemí pro své reprezentanty pořádají matematická soustředění, kde se soutěžící připravují a trénují i několik měsíců. V České republice, kvůli nedostatku finančních prostředků, jsou to pouze 2-3 týdny.

Nutno podotknout, že se jedná o soutěž jednotlivců. Takže každý řeší úlohy sám za sebe. Olympiáda trvá dva dny. Každý den dostanou řešitelé 3 úlohy a 4,5 hod. k jejich vyřešení. Za každou úlohu mohou dostat maximálně 7 bodů. Po opravení všech testů jsou sečteny body za jednotlivce a vyhlášeno pořadí.

Při vyhlašování výsledků získá polovina účastníků mezinárodní matematické olympiády medaili. Z této poloviny jich polovina dostane bronzovou, třetina stříbrnou a šestina zlatou. Dalším oceněním je čestné uznání pro soutěžícího, které dostává řešitel, který nedostal medaili, ale byl schopen alespoň jeden příklad vypočítat na plný počet. Další ocenění může řešitel získat za originální vyřešení úlohy. V poslední fázi soutěže se sečtou body v rámci dané země a určí se pořadí jednotlivých zemí. [17][20]

3.3 Účast České republiky

Česká republika se účastní mezinárodní matematické olympiády každoročně od roku 1993 (do té doby jsme se účastnili jako Československá republika). Umístění našich reprezentantů v letech 1959-2015 je uvedeno viz Příloha 2.

Následující tabulka zobrazuje získané medaile a ocenění na MMO. Z tabulky je patrné, že našim reprezentantům se již od začátku daří velmi dobře. Není jediný ročník, kdy by si naši řešitelé neodvezli domů medaili.

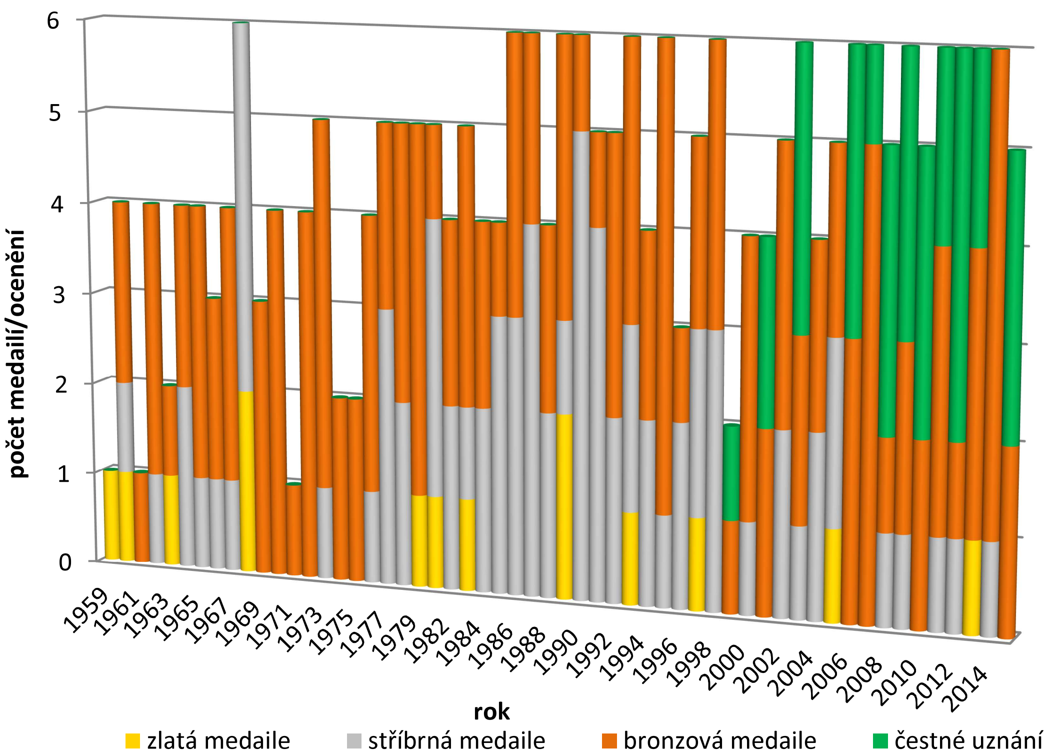
Tabulka 3.1 – přehled získaných ocenění v letech 1959-2015

rok	počet účastníků	získané medaile/ocenění			
		zlatá	stříbrná	bronzová	čestné uznání
2015	6	0	0	2	3
2014	6	0	1	5	0
2013	6	1	0	3	2
2012	6	0	1	1	4
2011	6	0	1	3	2
2010	6	0	0	2	3
2009	6	0	1	2	3
2008	6	0	1	1	3
2007	6	0	0	5	1
2006	6	0	0	3	3
2005	6	1	2	2	0
2004	6	0	2	2	0
2003	6	0	1	2	3
2002	6	0	2	3	0
2001	6	0	0	2	2
2000	6	0	1	3	0
1999	6	0	0	1	1
1998	6	0	3	3	0
1997	6	1	2	2	0
1996	6	0	2	1	0
1995	6	0	1	5	0
1994	6	0	2	2	0
1993	6	1	2	3	0
1992	6	0	2	3	x
1991	6	0	4	1	x
1990	6	0	5	1	x
1989	6	2	1	3	x
1988	6	0	2	2	x
1987	6	0	4	2	x
1986	6	0	3	3	x
1985	6	0	3	1	x
1984	6	0	2	2	x
1983	6	1	1	3	x

1982	4	0	2	2	x
1981	5	1	3	1	x
1979	8	1	0	4	x
1978	8	0	2	3	x
1977	8	0	3	2	x
1976	8	0	1	3	x
1975	8	0	0	2	x
1974	8	0	0	2	x
1973	8	0	1	4	x
1972	8	0	0	4	x
1971	8	0	0	1	x
1970	8	0	0	4	x
1969	8	0	0	3	x
1968	8	2	4	0	x
1967	8	0	1	3	x
1966	8	0	1	2	x
1965	8	0	1	3	x
1964	8	0	2	2	x
1963	8	1	0	1	x
1962	8	0	1	3	x
1961	8	0	0	1	x
1960	8	1	1	2	x
1959	8	1	0	0	x

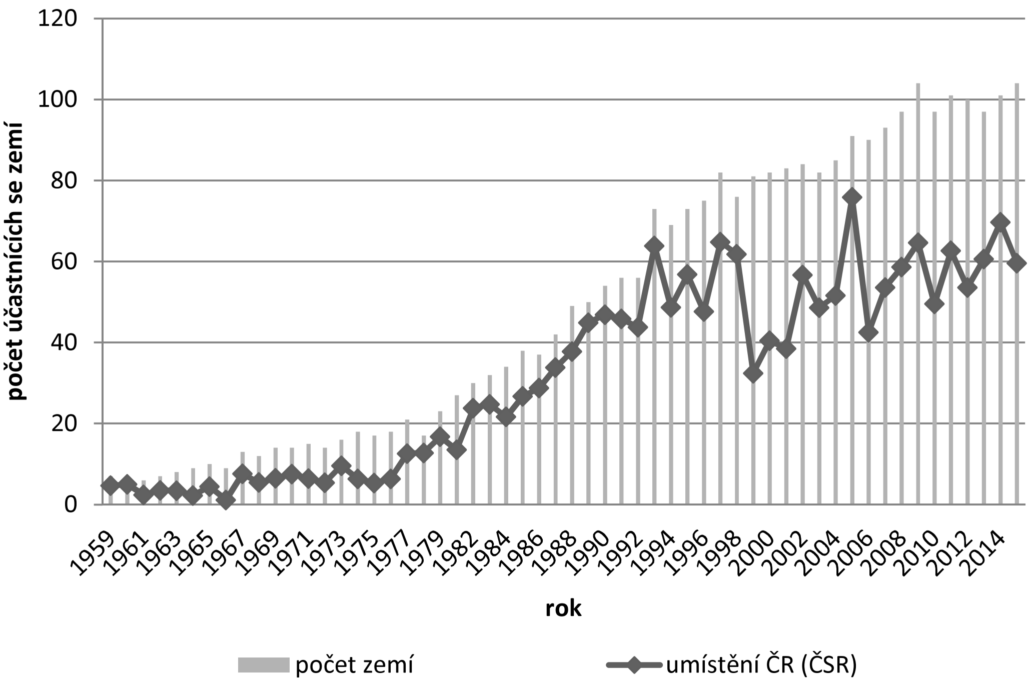
Pozn. „x“ – čestné uznání se na MMO dává až od roku 1993.

Počet získaných medailí a ocenění je pěkně zobrazeno na grafu níže. Jak můžeme vidět, tak nejvíce bylo získáno bronzových medailí, potom stříbrných a nakonec i zlatých.



Obrázek 3.2 - počet medailí a ocenění získaných v letech 1959-2015

Přehled umístění ČR (ČSR) během všech ročníků MMO je znázorněn na následujícím grafu. Mezi nejlepší úspěchy patří první místo z 2. ročníku MMO. Samostatná ČR se nejlépe umístila v roce 1998, kdy obsadila 15. místo. Z grafu také vyplývá, že se naši řešitelé vždy dokázali pomocí svých znalostí a schopností dostat až do horních pozic žebříčku celkového umístění. Během několika let se však zvýšil počet účastníků, a tím se zvýšila i konkurence, a také rostla obtížnost úloh, a tak nebylo snadné přední pozice obsadit. Od roku 1999 došlo k horšímu umístění v mezinárodní konkurenci a od té doby se reprezentanti drží kolem středních pozic.



Obrázek 3.3 - umístění ČR (ČSR) v letech 1959-2015

4 Matematická olympiáda

4.1 Historie

Jedná se o nejstarší a nejznámější matematickou soutěž v naší zemi, která probíhá každý rok. V letošním roce se jedná již o 65. ročník matematické olympiády. Soutěž byla ze začátku určena pouze studentům středních škol, ale v roce 1998 se do olympiády zapojily i školy základní.

4.2 Kategorie

Matematická olympiáda je určena všem žákům a studentům základních a středních škol v České republice a je rozdělena:

- podle tříd na základní škole
  - Z9 – pro žáky 9. ročníků základních škol, 4. ročníků osmiletých gymnázií a 2. ročníků šestiletých gymnázií
  - Z8 – pro žáky 8. ročníků základních škol, 3. ročníků osmiletých gymnázií a 1. ročníků šestiletých gymnázií
  - Z7 – pro žáky 7. ročníků základních škol, 2. ročníků osmiletých gymnázií
  - Z6 – pro žáky 6. ročníků základních škol, 1. ročníků osmiletých gymnázií
  - Z5 – pro žáky 5. ročníků základních škol [22]

- na středních školách
  - kategorie A – pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol, 7. a 8. Ročníků osmiletých gymnázií a 5. a 6. ročníků šestiletých gymnázií
  - kategorie B – pro žáky 2. ročníků středních škol, 6. ročníků osmiletých gymnázií a 4. ročníků šestiletých gymnázií
  - kategorie C – pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých
  - kategorie P – pro všechny žáky středních škol [23]

4.3 Průběh a pravidla soutěže

V následujících tabulkách jsou oznámeny termíny letošní matematické olympiády.

Základní školy

Tabulka 4.1 – termín letošní matematické olympiády ZŠ

kategorie	1. kolo - domácí		2. kolo	3. kolo
	1. trojice úloh	2. trojice úloh	okresní	Krajské
Z5	24. 11. 2015	5. 1. 2016	19. 1. 2016	-
Z6, Z7, Z8	5. 1. 2016	22. 3. 2016	5. 4. 2016	-
Z9	24. 11. 2015	5. 1. 2016	19. 1. 2016	22. 3. 2016

[22]

Střední školy

Tabulka 4.2 – termín letošní matematické olympiády SŠ

kategorie	školní kolo	krajské kolo	ústřední kolo
A	8. 12 2015	12. 1. 2016	3. 4. – 6. 4. 2016
B, C	21. 1. 2016	12. 4. 2016	

[23]

Samotná soutěž je rozdělena na školní, okresní, krajské a ústřední kola. V textu níže jsou popsaná pravidla jednotlivých kol, které jsou sepsány v organizačním řádu soutěže: [25]

4.4 Školní kolo

Ředitel je zodpovědný za uskutečnění soutěže a určuje učitele matematiky, který bude zodpovědný za postup a průběh soutěže. Učitel má za úkol nalákat žáky a studenty k účasti ve školním kole, připravit, koordinovat a vyhodnotit školní kolo, pomáhat zúčastněným žákům a studentům odbornými radami, radit jim s vhodnou literaturou. Na přípravě se mohou dále podílet i ostatní učitelé matematiky.

Pověřený učitel:

a) zajišťuje organizaci a regulérnost průběhu školního kola
b) vyhodnotí protokoly podle autorských řešení
c) soutěžícím oznámí správné autorské řešení úloh a provede rozbor chyb
d) sestaví pořadí soutěžících školního kola podle počtu získaných bodů a vyhlásí výsledky soutěže

Po skončení školního kola (kategorie A, B, C a Z5 až Z9) má pověřený učitel nebo ředitel školy za úkol poslat tajemníkovi příslušné okresní nebo krajské komise matematické olympiády:

- Výsledkovou listinu všech účastníků s počty dosažených bodů, studijním ročníkem a úplnou adresou školy
- Jmenný seznam a opravené protokoly úspěšných řešitelů navržených k postupu do okresního nebo krajského kola
- Ohodnocení školního kola

4.5 Okresní kolo

Za uskutečnění tohoto kola zodpovídá příslušný kraj. Kraj vytvoří okresní komisi matematické olympiády, která je složena z předsedy, místopředsedy, tajemníka a dalších členů. Tuto komisi tvoří učitelé základních a středních škol, popřípadě vysokých škol, nebo zástupci jednoty českých matematiků a fyziků. Členy jmenuje kraj na základě návrhu odstupujících členů komise. Tato komise má funkční období 5 let. Po uplynutí funkční doby mohou být tito členové znovu jmenováni, nebo jsou nahrazeni.

Okresní komise matematické olympiády zajišťuje:

a) koordinaci činnosti pověřených učitelů a poskytuje jim odbornou a metodickou pomoc, je-li to zapotřebí
b) sleduje průběh a zajišťuje regulérnost matematické olympiády v okrese,
c) řídí a hodnotí okresní kolo
d) vybere podle jednotného hodnocení nejúspěšnější řešitele ze školního kola kategorií Z5 až Z9 a pozve je nejméně deset dnů před konáním okresního kola
e) určí pro příslušnou kategorii hodnotící komisi (porotu) a jejího předsedu
f) na základě návrhu poroty vyhlásí výsledky okresního kola

Porota je zodpovědná za:

a) vyhodnocení protokolů soutěžících podle autorského řešení
b) seznámení soutěžící se správným řešením úloh
c) stanovení pořadí soutěžících podle počtu získaných bodů (jiná kritéria nejsou přípustná),
d) navrhnutí nejlepších úspěšných řešitelů v kategorii Z9 k postupu do krajského kola.
e) Každý protokol opravují alespoň dva členové poroty a o nejasnostech rozhoduje předseda poroty

Soutěžící, kteří se zúčastní okresního kola a:

- umístí se na 1. až 3. místě, obdrží diplom s vyznačením umístění a věcný dar
- dosáhnou počtu stanovených bodů v pokynech, obdrží diplom úspěšného řešitele
- ostatní soutěžící obdrží diplom za účast

Když se ukončí okresní kola zašlou tajemníci okresních komisí matematické olympiády tajemníkům příslušných krajských komisí MO:

- výsledkovou listinu všech účastníků s počty dosažených bodů, studijními ročníky a úplnými adresami škol
- jmenný seznam a opravené protokoly úspěšných řešitelů kategorie Z9 navržených k postupu do krajského kola,
- hodnocení okresního kola

4.6 Krajské kolo

Za uskutečnění tohoto kola zodpovídá příslušný kraj. Kraj vytvoří krajskou komisi matematické olympiády, která je složena z předsedy, místopředsedů, tajemníka a dalších členů. Tuto komisi tvoří učitelé základních, středních škol a vysokých škol, nebo zástupci Jednoty českých matematiků a fyziků a jiných institucí. Členy jmenuje kraj na základě návrhu odstupujících členů komise. Tato komise má funkční období také 5 let. Po uplynutí funkční doby mohou být tito členové opět jmenováni, nebo jsou nahrazeni novými členy.

Krajská komise zodpovídá a zajišťuje:

- koordinaci činnosti pověřených učitelů a poskytuje jim je-li potřeba odbornou a metodickou pomoc
- sleduje průběh a zajišťuje regulérnost matematické olympiády v kraji
- řídí a hodnotí krajské kolo
- vybere podle jednotného hodnocení nejúspěšnější soutěžící ze školního kola kategorií A, B, C a P a okresního kola kategorie Z9 a pozve účastníky k účasti nejméně deset dnů před konáním krajského kola
- určí pro kategorie A, B, C a Z9 poroty a jejich předsedy
- na základě návrhu poroty vyhlásí výsledky krajského kola.

Porota je zodpovědná za:

a) vyhodnocení protokolů soutěžících podle autorského řešení
b) seznámení soutěžících se správným řešením úloh
c) stanovení pořadí soutěžících podle počtu získaných bodů (jiná kritéria nejsou přípustná),

Každý protokol opravují alespoň dva členové poroty a o nejasnostech rozhoduje předseda poroty.

Soutěžící, kteří se umístí na 1. až 3. místě, obdrží diplom a věcný dar. Soutěžící, kteří dosáhnou počet bodů stanovený ústřední komisí matematické olympiády z vyhodnocení výsledků ve všech krajích, dostanou diplom úspěšného řešitele. Ostatní soutěžící mají diplom za účast.

Hranice bodů pro úspěšné řešitele krajského kola kategorií A, B, C a P jsou dány tak, že počet úspěšných řešitelů v celé ČR nepřevyšuje polovinu celkového počtu účastníků v dané kategorii.

Po ukončení krajského kola zašlou tajemníci krajských komisí MO členu ústřední komise MO pověřenému:

- vedením před ústředním kolem kategorie A jmenný seznam a opravené protokoly řešitelů této kategorie, kteří dosáhli počtu bodů uvedeného v pokynech
- opravením a vyhodnocením krajského kola kategorie P jmenný seznam a neopravené protokoly všech řešitelů této kategorie

- vyhodnocením výsledků krajských kol kategorií B a C tabulku s počty soutěžících a jejich získanými body
- získáním výsledkových listin všech účastníků kategorií A, B, C a P s počty dosažených bodů, datem narození a úplnými názvy škol s jejich adresami.

Lhůta pro zaslání výsledkové listiny s vyznačením úspěšných řešitelů je 1 měsíc po termínu konání příslušného krajského kola.

4.7 Ústřední kolo

Organizátorem kola kategorií A a P je organizace pověřená ústřední komisí MO - bývá to pobočka JČMF, střední nebo vysoká škola v místě konání akce.

Organizátor ústředního kola získá z ústředí JČMF finanční zálohu na zabezpečení akce z prostředků poskytnutých ministerstvem na příslušný kalendářní rok.

Účastníky ústředního kola vybere ústřední komise MO po hodnocení krajského kola. Nejvýše 50 nejúspěšnějších soutěžících kategorie A a nejvýše 30 nejúspěšnějších soutěžících kategorie P. Organizátor ústředního kola je písemně pozve k účasti nejméně deset dnů před konáním soutěže.

Ústřední komise MO zajistí regulérnost průběhu soutěžního kola a určí pro každou z kategorií A a P porotu, která:

- opraví a vyhodnotí protokoly podle autorských řešení,
- navrhne k mimořádnému ocenění soutěžící, kteří podali originální řešení,
- seznámí soutěžící s autorským řešením úloh a vrátí jim opravené protokoly,
- vytvoří pořadí soutěžících podle získaných bodů (jiná kritéria nejsou přípustná).

Protokoly opravují alespoň dva členové poroty a u nejasných řešení rozhoduje předseda poroty. Ústřední komise MO vyhlásí pořadí stanovené porotou úspěšný řešitelů tak, aby počet nepřevyšoval polovinu všech účastníků ústředního kola. Nejvýše polovina úspěšných řešitelů je zároveň prohlášena za vítěze ústředního kola.

Soutěžící, kteří se umístili na 1. až 3. místě, obdrží věcný dar. Soutěžící, kteří se stali vítězi, dostanou diplom vítěze a soutěžící, kteří se stali úspěšnými řešiteli, obdrží diplom úspěšného řešitele. Ostatní soutěžící mají diplom za účast.

Po skončení ústředního kola zašle organizátor výboru JČMF formální a obsahové vyhodnocení soutěže a finanční vypořádání prostředků v souladu s pravidly stanovenými ministerstvem.

Ústřední komise je řídícím orgánem matematické olympiády. Členy komisí pro tvorbu úloh mohou být i zkušení učitelé a odborníci, kteří nejsou členy ústřední komise MO. Členy jmenuje ministerstvo na základě návrhu vedení JČMF. Délka funkčního období je zpravidla 5 let. Po uplynutí funkčního období mohou být dosavadní členové znovu jmenováni. Tuto komisi tvoří předseda, místopředsedové, vedoucí komisí pro tvorbu úloh a tajemník.

Ústřední komise zajišťuje a dohlíží na:

a) přípravu úloh, jejich autorská řešení pro všechny kategorie a soutěžní kola MO
b) zajistit text letáků MO a jejich distribuci krajským komisím MO,
c) zajistit text úloh školních, okresních a krajských kol a jejich autorských řešení pro všechny kategorie a jejich distribuci krajským komisím MO,
d) zajistit koordinaci oprav protokolů krajského kola kategorie A, opravu protokolů školního a krajského kola kategorie P, vyhodnotit výsledky krajských kol kategorií B a C a stanovit bodové hranice pro úspěšné řešitele krajských kol kategorií A, B, C a P
e) zabezpečit odborný průběh a řídit ústřední kolo soutěže ve spolupráci s pověřeným organizátorem
f) organizačně a programově zabezpečit výběrová a přípravná soustředění MO
g) zpracovat podklady pro přehled soutěží a přehlídek, vyhlašovaných ministerstvem pro následující školní rok, a to do 31. března příslušného roku
h) na závěr celého ročníku MO s využitím podkladů uvedených vyhodnotit jeho průběh a zpracovat hodnotící zprávu, obsahující mj. i celkové údaje o počtech soutěžících v jednotlivých kategoriích a soutěžních kolech MO,
i) zaslat hodnotící zprávu uplynulého ročníku soutěže JČMF a ministerstvu
j) spolupracovat s vysokými školami matematicko-fyzikálního, přírodovědného a pedagogického zaměření, zejména při přípravě programu odborných seminářů a soustředění.

4.8 Soustředění účastníků MO

Pro soutěžící, kteří byli nejúspěšnější, v ústředním kole kategorie A, pořádá ústřední komise mezinárodní olympiády každý rok výběrové soustředění před mezinárodní matematickou olympiádou a přípravné soustředění pro další ročník mezinárodní olympiády. Maximální počet účastníků výběrového soustředění je 12, ale mezinárodní matematické olympiády se může účastnit jen 6 soutěžících. Přípravného soustředění se zúčastňuje nejvýše 30 účastníků. Přípravu k IMO (mezinárodní matematická olympiáda), stejně jako přípravu k IOI (mezinárodní olympiáda v informatice) a CEOI (středo-evropská olympiáda v informatice), ukončují dvě každoroční soutěžní setkání družstev České republiky, Polska a Slovenska, pořádaná střídavě na územích těchto tří států řídícími orgány národních olympiád.

Pro nejlepší soutěžící z krajských kol kategorií B a C z celé České republiky pořádá ústřední komise matematické olympiády odborné soustředění. Toto soustředění je dáno do systému soutěže tak, že končí příslušný ročník matematické olympiády a je přípravou soutěžících na ročník následující. Soustředění se koná po dobu dvou týdnů a organizaci zajišťuje některá pobočka JČMF, střední nebo vysoká škola. Pro soutěžící ze školních, okresních a krajských kol mohou okresní komise a krajské komise matematické olympiády pořádat odborné přednášky, semináře a odborná soustředění.

4.9 Příklady použité v posledním pořádaném ročníku

Vybrané příklady, které zmiňuji, jsou z domácích kol pro základní školy a pro střední školy. Matematické úlohy jsem vyhledala ve zdroji [60] pro základní školy a v [61] pro střední školy.

Veškeré příklady pro kategorie Z5, Z6, Z7,Z8 a Z9 jsou vzorově vyřešeny v [60]

4.9.1 Příklady pro kategorii Z5

1) *Marta nesla své nemocné kamarádce Marušce 7 jablek, 6 hrušek a 3 pomeranče. Cestou ale dva kusy ovoce snědla. Určete, která z následujících situací mohla nastat a jaké dva kusy ovoce by Marta v takovém případě musela sníst:*
   a) *Maruška nedostala žádný pomeranč.*
   b) *Maruška dostala méně hrušek než pomerančů.*
   c) *Maruška dostala stejný počet jablek, hrušek i pomerančů.*
   d) *Maruška dostala stejný počet kusů ovoce dvojího druhu.*
   e) *Maruška dostala více jablek než zbývajících kusů ovoce dohromady.*

2) *Když pan Beran zakládal chov, měl bílých ovcí o 8 více než černých. V současnosti má bílých ovcí čtyřikrát více než na začátku a černých třikrát více než na začátku. Bílých ovcí je teď o 42 více než černých. Kolik nyní pan Beran chová bílých a černých ovcí dohromady?*

4.9.2 Příklady pro kategorii Z6

1) *Jiřík šel do služby k čarodějovi. Ten měl v prvním sklepě víc much než pavouků, v druhém naopak. V každém sklepě měli mouchy a pavouci dohromady 100 nohou. Určete, kolik mohlo být much a pavouků v prvním a kolik ve druhém sklepě.*

2) *Pan Cuketa měl obdélníkovou zahradu, jejíž obvod byl 28 metrů. Obsah celé zahrady vyplnily právě čtyři čtvercové záhony, jejichž rozměry v metrech byly vyjádřeny celými čísly. Určete, jaké rozměry mohla mít zahrada. Najděte všechny možnosti.*

4.9.3 Příklady pro kategorii Z7

1) *Vlčkovi mají 4 děti. Ondra je o 3 roky starší než Matěj a Kuba o 5 let starší než nejmladší Jana. Víme, že je jim dohromady 30 let a před 3 lety jim bylo dohromady 19 let. Určete, jak jsou děti staré.*

2) *V kocourkovské škole používají zvláštní číselnou osu. Vzdálenost mezi čísly 1 a 2 je 1 cm, vzdálenost mezi čísly 2 a 3 je 3 cm, mezi čísly 3 a 4 je 5 cm a tak dále: vzdálenost mezi každou následující dvojicí přirozených čísel se vždy zvětší o 2 cm. Mezi kterými dvěma přirozenými čísly je na kocourkovské číselné ose vzdálenost 39 cm? Najděte všechny možnosti.*

4.9.4 Příklady pro kategorii Z8

1) *Na louce se pasou koně, krávy a ovce, dohromady jich je méně než 200. Kdyby bylo krav 45krát víc, koní 60krát víc a ovcí 35krát víc, než kolik jich je nyní, jejich počty by se rovnaly. Kolik se na louce pase koní, krav a ovcí dohromady?*

2) *V komoře, kde se rozbilo světlo a vše z ní musíme brát poslepu, máme ponožky čtyř různých barev. Chceme-li si být jisti, že vytáhneme alespoň dvě bílé ponožky, musíme jich z komory přinést 28. Abychom měli takovou jistotu pro šedé ponožky, musíme jich přinést také 28, pro černé ponožky stačí 26 a pro modré ponožky 34. Kolik je celkem v komoře ponožek?*

4.9.5 Příklady pro kategorii Z9

1) *Objem vody v městském bazénu s obdélníkovým dnem je 6 998,4 hektolitrů. Propagační leták uvádí, že kdybychom chtěli všechnu vodu z bazénu přelít do pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou rovnající se průměrné hloubce bazénu, musel by být hranol vysoký jako blízký televizní vysílač a pak by byl naplněný až po okraj. Dodáváme, že kdybychom chtěli uplavat vzdálenost stejnou, jako je výška vysílače, museli bychom přeplavat buď osm délek, nebo patnáct šířek bazénu. Jak vysoký je vysílač?*

2) *Úžasným číslem nazveme takové sudé číslo, jehož rozklad na součin prvočísel má právě tři ne nutně různé činitele a součet všech jeho dělitelů je roven dvojnásobku tohoto čísla. Najděte všechna úžasná čísla.*

4.9.6 Příklady pro kategorii A

1) *Nela s Janou zvolí přirozené číslo k, a následně hrají hru s tabulkou o rozměrech 9 x 9. Začínající Nela pokaždé svým tahem vybere jedno prázdné políčko a vepíše do něj nulu. Zato Jana ve svém tahu do nějakého prázdného políčka napíše jedničku. Navíc po každém tahu Nely následuje k tahů Jany. Pokud se kdykoli během hry stane, že součet čísel v každém řádku i v každém sloupci je lichý, vítězí Jana. Pokud dívky vyplní celou tabulku, aniž by se tak stalo, vítězí Nela. Nalezněte nejmenší hodnotu k, pro niž má Jana vítěznou strategii.*

2) *Na tabuli je napsán součin* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. *Pro která přirozená čísla* $n \geq 2$ *je možno za některé z činitelů dopsat vykřičník, a nahradit je tak jejich faktoriály, aby výsledný součin byl roven druhé mocnině přirozeného čísla?*

Pozn.: Správná řešení příkladů jsou k nalezení ve zdroji [62]

4.9.7 Příklady pro kategorii B

1) *Počet všech sudých dělitelů některého přirozeného čísla je o 3 větší než počet všech jeho lichých dělitelů. Jaký je podíl součtu všech jeho sudých dělitelů a součtu všech jeho lichých dělitelů? Najděte všechny možné odpovědi.*

2) *Do čtvercové tabulky 11 x 11 jsme vepsali přirozená čísla 1, 2, 3, …, 121 postupně po řádcích zleva doprava a shora dolů. Čtvercovou destičkou 4 x 4 jsme všemi možnými způsoby zakryli právě 16 políček. Kolikrát byl součet zakrytých 16 čísel druhou mocninou celého čísla?*

Pozn.: Správná řešení příkladů jsou k nalezení ve zdroji [63]

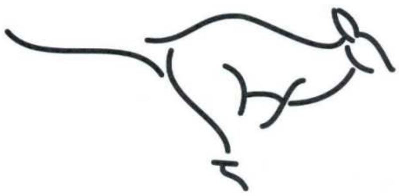
4.9.8 Příklady pro kategorii C

1) *Najděte všechny možné hodnoty součinu prvočísel p, q, r, pro která platí* $p^2 - (q + r)^2 = 637$.

2) *Určete, kolika způsoby lze k jednotlivým vrcholům krychle ABCDEFGH připsat čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, tak, aby součin čísel připsaných libovolným třem vrcholům každé ze stěn krychle byl sudý.*

Pozn.: Správná řešení příkladů jsou k nalezení ve zdroji [64]

5 Matematický klokan



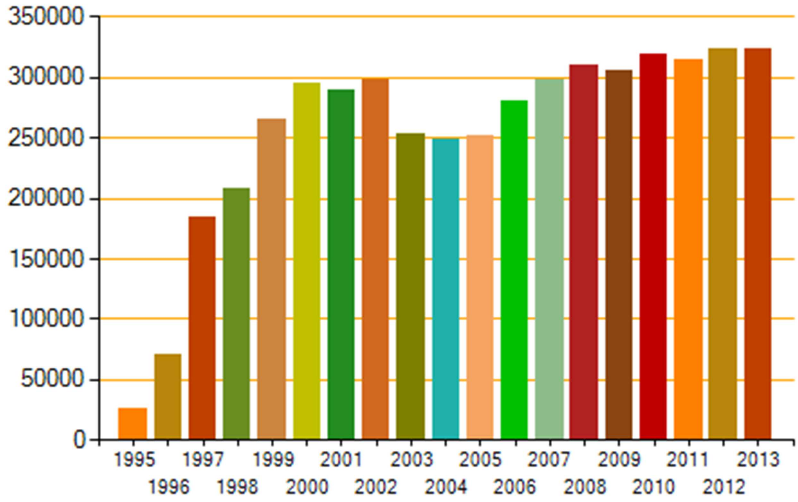
5.1 Historie a účast řešitelů v České republice

Tato soutěž má své kořeny v Austrálii. Vznikla asi v roce 1980. Za jejího zakladatele je považován Peter O'Halloran. Do Evropy se tato soutěž dostala poprvé v roce 1991 a to do Francie. O rok později se Matematický klokan dostal do Polska. V České republice se této soutěže mohou žáci a studenti účastnit od roku 1995(v roce 1994 se tato soutěž konala jen v regionech severní Moravy). [28]

V roce 1993 vznikla Mezinárodní asociace Klokan bez hranic. Tato asociace má sídlo v Paříži. V této asociaci je zapojeno 71 zemí. Prezidentem asociace je Gregor Dolinar (Slovinsko), viceprezidentem jsou Meike Akveld (Švýcarsko), Andriy Dobosevych (Ukrajina) a Susanne Gennow (Švédsko). Cílem této asociace jsou střetnutí, na kterých se domlouvá další kolo a průběh Matematického klokana, protože se ve všech zemí pořádá ve stejný den a stejnou hodinu. [34]

V České republice se o pořádání Matematického klokana stará Jednota českých matematiků a fyziků ve spolupráci s pedagogickou fakultou (s katedrou matematiky) a přírodovědeckou fakultou (s katedrou algebry a geometrie) v Olomouci. Matematický klokan je zařazen mezi soutěže, které jsou plně hrazené z Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy. [37]

Účast řešitelů v České republice každým rokem stoupá. Nárůst účastníků je uveden v obrázku do roku 2013:



Obrázek 5.1 – účast českých řešitelů

5.2 Výběr soutěžních příkladů

Soutěžní příklady jsou připravovány na mezinárodních pracovních seminářích. Tyto semináře se uskutečňují na podzim. Na těchto seminářích se setkají zástupci pořadatelských zemí. Jedná se o skupinu asi padesáti profesorů z více než 20 zemí. Každý zástupce předloží své příklady, které navrhuje do soutěže. Tato skupina vybere soutěžní příklady z předložených příkladů. Každá země má právo změnit maximálně 5 soutěžních příkladů, ve svém konečném zadaní, které se dostane do rukou soutěžícím, ze společně vybraných, protože v různých zemích se určitému učebnímu tématu věnují učitelé různou dobu. Proto je povolena tato výměna příkladů. Příklady, které jsou používány v Matematickém klokanu, jsou uzavřené otázky s možností výběru z 5 nabízených odpovědí. [32]

5.3 Průběh a pravidla soutěže

Matematický klokan je určen pro žáky a studenty od 10 až 19 let. Jedná se o jednorázovou a individuální soutěž. Soutěž probíhá ve všech zemích zpravidla koncem měsíce března ve stejný den a hodinu. O datu konání se diskutuje na výše uvedených setkáních asociace.

[28][30]

Matematický klokan je soutěž určená pro všechny žáky. Vznikla právě proto, aby se žákům a studentům ukázalo, jak může být matematika zajímavá. V soutěži se volí netradiční a zajímavé příklady, které podporují logické myšlení, tvořivost,…. Oproti tomu je právě matematická olympiáda, která se soustředí na nadané žáky a studenty.

Matematický klokan je rozdělen do několika kategorií. Tato soutěž obsahuje tři kategorie příkladů o různých obtížích. Příklady jsou bodované 3, 4 a 5 body. Na začátku řešení má každý uchazeč určitý počet bodů, aby při opravování nezískal záporné body. Při řešení za správou odpověď získává řešitel 3, 4 nebo 5 bodů, podle toho do jaké obtížnosti příklad spadá. Při špatné odpovědi se odčítá pouze 1 bod, ať už je příklad v kterékoliv obtížnosti. Jestliže řešitel nezodpoví (nezaškrtne) žádnou odpověď nezískává, ani neztrácí bod. Své odpovědi řešitelé zaškrtávají na kartu odpovědí, viz obrázek.[28][29][32][37]

KARTA ODPOVĚDÍ

3 body

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

4 body

	A	B	C	D	E
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					

5 bodů

	A	B	C	D	E
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

Kategorie: ________________________________

Jméno: ___________________________________

Příjmení:__________________________________

Třída: _____________

Získal(a) celkem ________ **bodů.**

Obrázek 5.2 – karta odpovědí Matematického klokana

Po ukončení soutěže učitelé opraví a vyhodnotí v každé kategorii nejúspěšnější řešitele. Poté se dané výsledky odesílají do olomouckého centra a zde se vyhodnocují statistické výsledky za celou Českou republiku.

Nejlepší řešitelé v jednotlivých kategoriích jsou odměněni diplomy a knižními odměnami. Každý účastník obdrží osvědčení o účasti:

Obrázek 5.3 - osvědčení pro účastníka

Statistické výsledky spolu se zadáním soutěžních úloh a správnými odpověďmi jsou uveřejněny ve sborníku každého ročníku, který vydává JČMF a bývá rozesílán jednotlivým oblastním důvěrníkům této soutěže.[37]

5.4 Jednotlivé kategorie Matematického klokana

Matematický klokan se dělí do 6 kategorií:

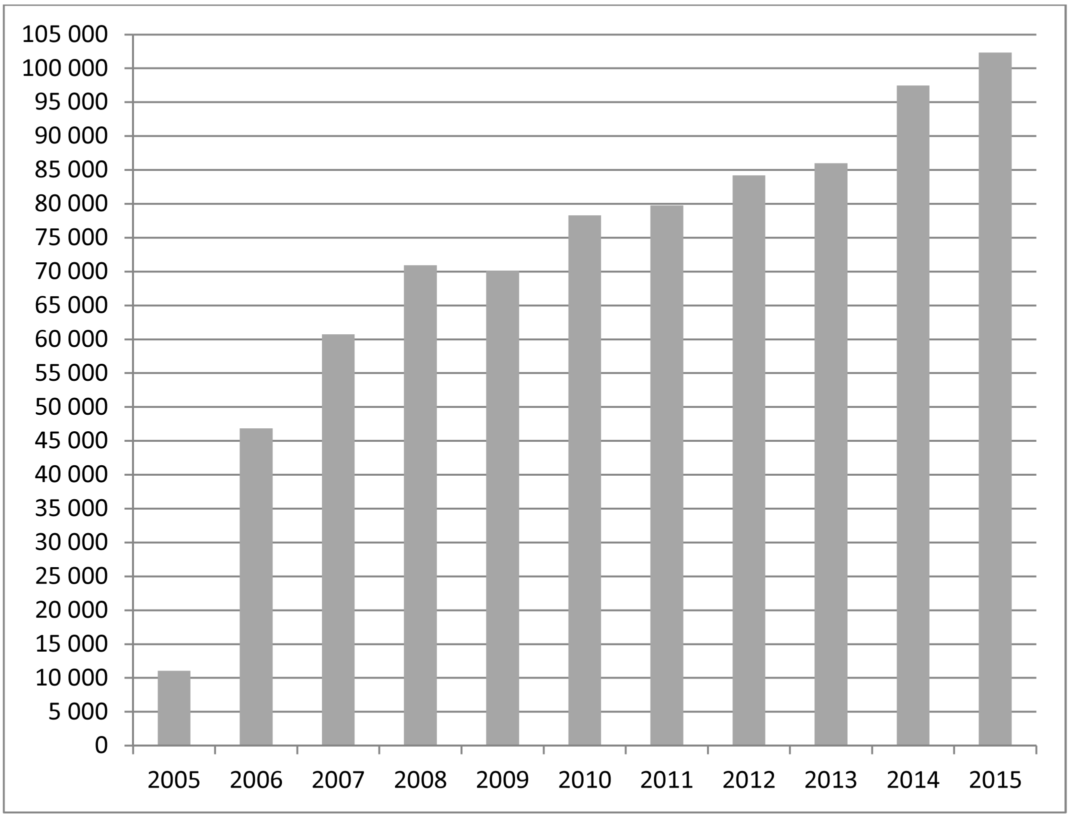
1) Cvrček – 2. a 3. ročník ZŠ
2) Klokánek – 4. a 5. ročník ZŠ
3) Benjamin - 6. a 7. ročník ZŠ a studenti primy a sekundy osmiletých gymnázií
4) Kadet - 8. a 9. ročník ZŠ a studenti tercie a kvarty osmiletých gymnázií
5) Junior - 1. a 2. ročník SŠ a studenti kvinty a sexty osmiletých gymnázií
6) Student - 3. a 4. ročník SŠ a studenti septimy a oktávy osmiletých gymnázií

Pravidla pro jednotlivé kategorie:

1) Cvrček

- Kategorie cvrček se do Matematického klokana zařadila až v roce 2005
- Soutěžní test má 18 příkladů, celkový čas na vyřešení je 60 minut
- Příklady jsou rozděleny podle obtížnosti
    - příklad je za 3 body
    - 12. příklad je za 4 body
    - 13. – 18. příklad je za 5 bodů
- Za každou správnou odpověď získá řešitel příslušný počet bodů podle obtížnosti, za nezodpovězený příklad nezískává, ani neztrácí žádný bod a za každou nesprávnou odpověď se jeden bod odčítá.
- Žák vybírá z 5 možných odpovědí, kdy je vždy jen jedna odpověď správná, řešitelé této kategorie své odpovědi zaznamenávají přímo do testu, který dostanou.
- Každý řešitel vstupuje do řešení příkladů s 18 body
- Maximální počet, který řešitelé mohou získat je 90 bodů [38]

Počet účastníků kategorie Cvrček je znázorněn grafem:

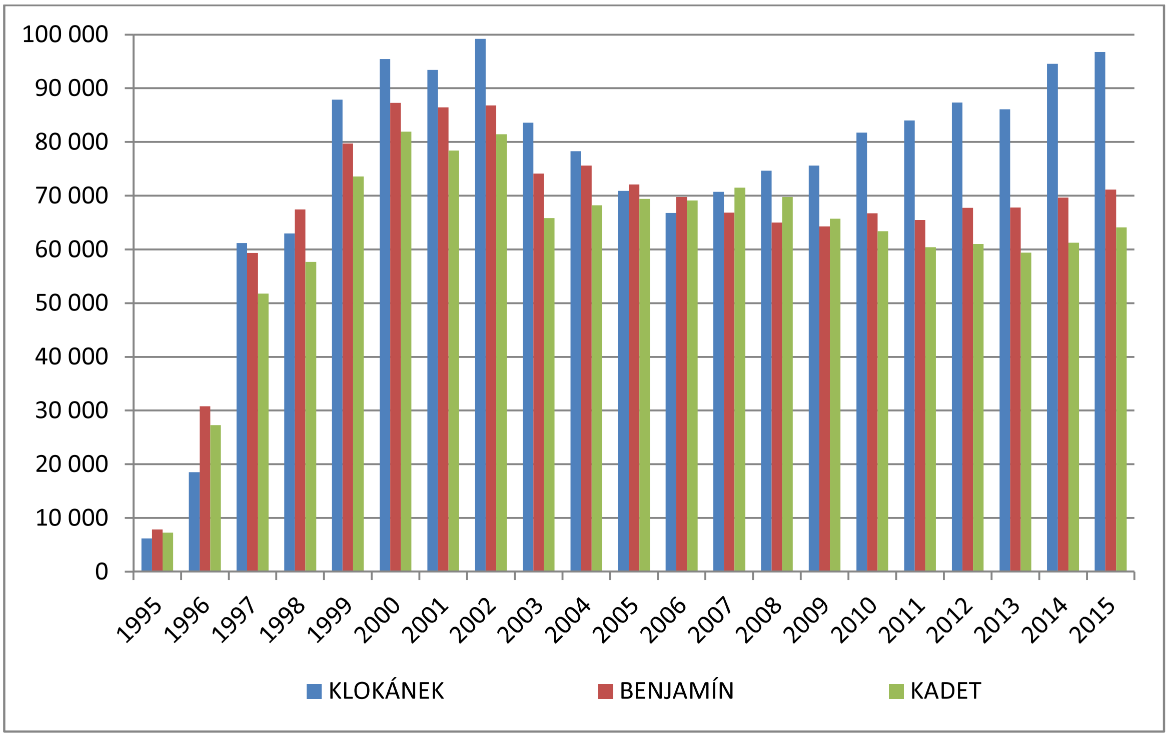


Obrázek 5.4 - Počet účastníků v kategorii Cvrček od roku 2005 do 2015

2) Klokánek, Benjamín a Kadet

- Soutěžní test má 24 příkladů, celkový čas na vyřešení je 60 minut + 15 minut organizační práce
- Příklady jsou rozděleny podle obtížnosti
  - 1. – 8. příklad je za 3 body
  - 9. – 16. příklad je za 4 body
  - 17. – 24. příklad je za 5 bodů
- Za každou správnou odpověď získá řešitel příslušný počet bodů podle obtížnosti, za nezodpovězený příklad nezískává, ani neztrácí žádný bod a za každou nesprávnou odpověď se jeden bod odčítá.
- Řešitelé zaznamenávají odpovědi do tzv. karty odpovědí, a to tak, že zatrhnou jedno z nabízených řešení. Tyto karty odpovědí po uběhnutí stanoveného času odevzdávají řešitelé příslušnému učiteli. Příklady se zadáním si řešitelé mohou ponechat
- Každý řešitel vstupuje do soutěže s 24 body
- Maximální počet, který řešitelé mohou získat je 120 bodů
- Při řešení není dovoleno používání tabulek, kalkulačky ani jiné literatury [39]

Počet účastníků kategorie Klokánek, Benjamín a Kadet je znázorněn grafem:

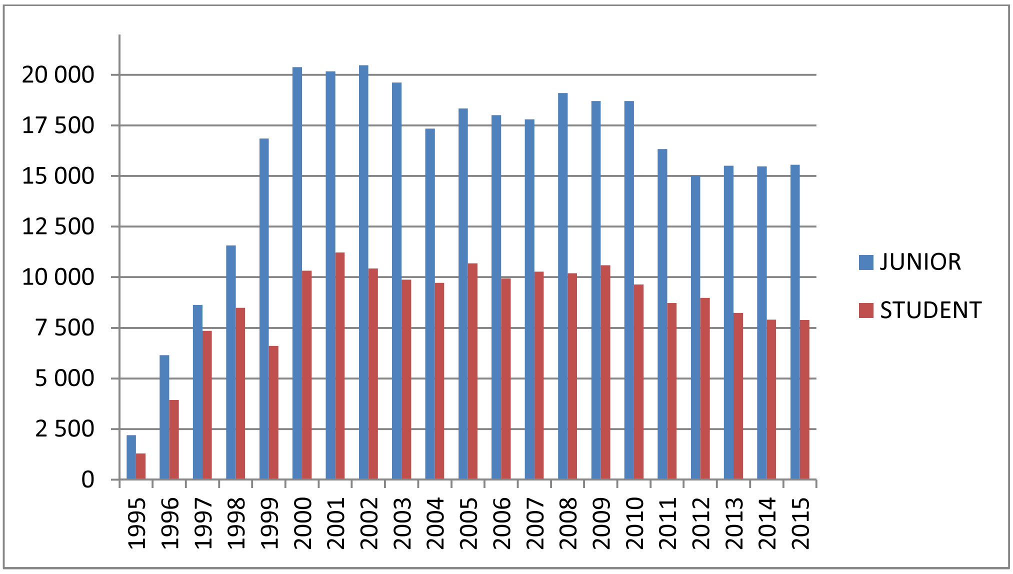


Obrázek 5.5 - Počet účastníků v kategorii Klokánek, Benjamín a Kadet 1995 – 2015

3) Junior a Student

- Soutěžní test má 24 příkladů, celkový čas na vyřešení je 75 minut + 15 minut organizační práce
- Příklady jsou rozděleny podle obtížnosti
    - 1. – 8. příklad je za 3 body
    - 9. – 16. příklad je za 4 body
    - 17. – 24. příklad je za 5 bodů
- Za každou správnou odpověď získá řešitel příslušný počet bodů podle obtížnosti, za nezodpovězený příklad nezískává, ani neztrácí žádný bod a za každou nesprávnou odpověď se jeden bod odčítá.
- Řešitelé zaznamenávají odpovědi do tzv. karty odpovědí, a to tak, že zatrhnou jedno z nabízených řešení. Tyto karty odpovědí po uběhnutí stanoveného času odevzdávají řešitelé příslušnému učiteli. Příklady se zadáním si řešitelé mohou ponechat
- Každý řešitel vstupuje do soutěže s 24 body
- Maximální počet, který řešitelé mohou získat je 120 bodů
- Při řešení není dovoleno používání tabulek, kalkulačky ani jiné literatury
- Tyto kategorie jsou zařazeny do programu Excelence středních škol. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy chce vytvářet pořadí bez dělených míst (nemůže být více řešitelů např. na prvním místě), proto mají při bodové shodě přednost mladší soutěžící. [40]

Počet účastníků kategorie Junior a Student je znázorněn grafem:



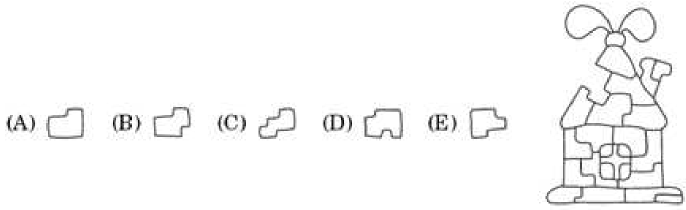
Obrázek 5.6 - Počet účastníků v kategorii Junior a Student od roku 1995 do 2015

5.5 Příklady používané v Matematickém klokanovi za rok 2015

Na ukázku jsem vybírala vždy tři příklady, které byly rozděleny podle obtížnosti do skupin po 3, 4 a 5 bodech.

5.5.1 Kategorie Cvrček

1) *Najdi chybějící dílek domu.*



2) *Marek má 9 bonbónů a Dan má 17 bonbónů. Kolik bonbónů má dát Dan Markovi, aby měli stejně?*

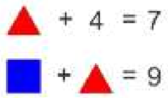
(A) 2 *(B) 3* *(C) 4* *(D) 5* *(E) 6*

3) *V tělocvičně stáli chlapci seřazeni podle výšky. Patrik stál uprostřed a od začátku byl osmý. Kolik chlapců stálo v řadě?*

(A) 7 *(B) 8* *(C) 12* *(D) 15* *(E) 1 6*

5.5.2 Kategorie Klokánek

1) *Které číslo je zakryto čtvercem?*



(A) 2 *(B) 3* *(C) 4* *(D) 5* *(E) 6*

2) *Leoš měl 7 jablek a 2 banány. Dal 2 jablka Janě. Ta mu na oplátku dala několik banánů. Leoš měl potom stejně jablek jako banánů. Kolik banánů dala Jana Leošovi?*

(A) 2 *(B) 3* *(C) 4* *(D) 5* *(E) 7*

3) *Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?*

(A) Alenka *(B) Bohunka* *(C) Šárka* *(D) David* *(E) Eliška*

5.5.3 Kategorie Benjamín

1) *Každá rostlina na Honzově zahrádce má buď pět listů a žádný květ, nebo dva listy a jeden květ. Celkem můžeme na Honzově zahrádce napočítat 6 květů a 32 listů. Kolik rostlin tam Honza má?*

(A) 10 *(B) 12* *(C) 13* *(D) 15* *(E) 16*

2) *Honza má v batohu jablka a hrušky. V batohu jsou 3 zelená jablka, 5 žlutých jablek, 7 zelených hrušek a 2 žluté hrušky. Honza z batohu vytahuje náhodně jeden kus ovoce za druhým. Určete nejmenší možný počet kusů ovoce, který Honza musí z batohu vyndat, aby mezi nimi existovalo jablko i hruška stejné barvy.*

(A) 9 *(B) 10* *(C) 11* *(D) 12* *(E) 13*

3) *Jana si v obchodě koupila 3 různé čokoládové tyčinky. Za první z nich zaplatila polovinu svých peněz a 1 Kč k tomu. Za druhou tyčinku zaplatil a polovinu zbývajících peněz a 2 Kč k tomu. Za třetí zaplatila polovinu zbývajících peněz a 3 Kč. Žádné peníze jí nezbyly. Kolik korun Jana zaplatila celkem?*

(A) 28 Kč *(B) 32 Kč* *(C) 34 Kč* *(D) 36 Kč* *(E) 45 Kč*

5.5.4 Kategorie Kadet

1) *Je dán trojúhelník se stranami délek 6 cm, 10 cm a 11 cm a rovnostranný trojúhelník, jehož obvod je roven obvodu prvního trojúhelníku. Určete délku strany tohoto rovnostranného trojúhelníku.*

(A) 18 cm *(B) 11 cm* *(C) 10 cm* *(D) 9 cm* *(E) 6 cm*

2) *Paní učitelka se zeptala pěti svých žáků, kolik z nich se předcházející den učilo. Cyril odpověděl, že nikdo, Anežka řekla, že pouze jeden, Eliška tvrdila, že pouze 2, Gita sdělila, že pouze 3 a Libor pravil, že pouze 4 žáci. Paní učitelka zjistila, že ti, kteří se neučili, neřekli pravdu a naopak ti, kteří se učili, pravdu řekli. Kolik z těchto žáků se předcházející den učilo?*

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3) *Na přímce leží pět bodů. Alex změřil vzdálenosti mezi každou dvojicí bodů a seřadil je vzestupně: 2 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm, 9 cm, k cm, 15 cm, 17 cm, 20 cm a 22 cm. Určete k.*

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

5.5.5 Kategorie Junior

1) *Maminka vyprala a pověsila trička na šňůru. Poté děti pověsily vždy mezi každá dvě trička jednu ponožku. Na šňůře visí 29 kusů oblečení. Kolik z nich je triček?*

(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

2) *Dnes mají otec i syn narozeniny. Součin věku otce a věku syna je 2015. Jaký je rozdíl jejich věků?*

(A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

3) *Ferda Mravenec stojí na vrcholu drátěného modelu krychle s hranou délky 1. Chce projít všechny hrany krychle a vrátit se na původní vrchol. Najdi nejkratší délku takové cesty.*

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20

5.5.6 Kategorie Student

1) *Kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice* $2^{2x} = 4^{x+1}$ *?*

(A) 0 *(B) 1* *(C) 2* *(D) 3* *(E) nekonečně mnoho*

2) *Autosalon koupil dvě auta. První poté prodal se ziskem 40 % a druhé se ziskem 60 %. Jeho celkový zisk z prodeje těchto dvou aut byl 54 %. Určete poměr mezi nákupními cenami obou vozů*

(A) 10 : 13 *(B) 20 : 27* *(C) 7 : 12* *(D) 2 : 3* *(E) 3 : 7*

3) *Kolik trojmístných čísel můžeme vyjádřit jako součet právě devíti různých nezáporných celých mocnin čísla 2.*

(A) 1 *(B) 2* *(C) 3* *(D) 4* *(E) 5*

5.6 Akce s Klokanem

5.6.1 Přírodovědný Klokan

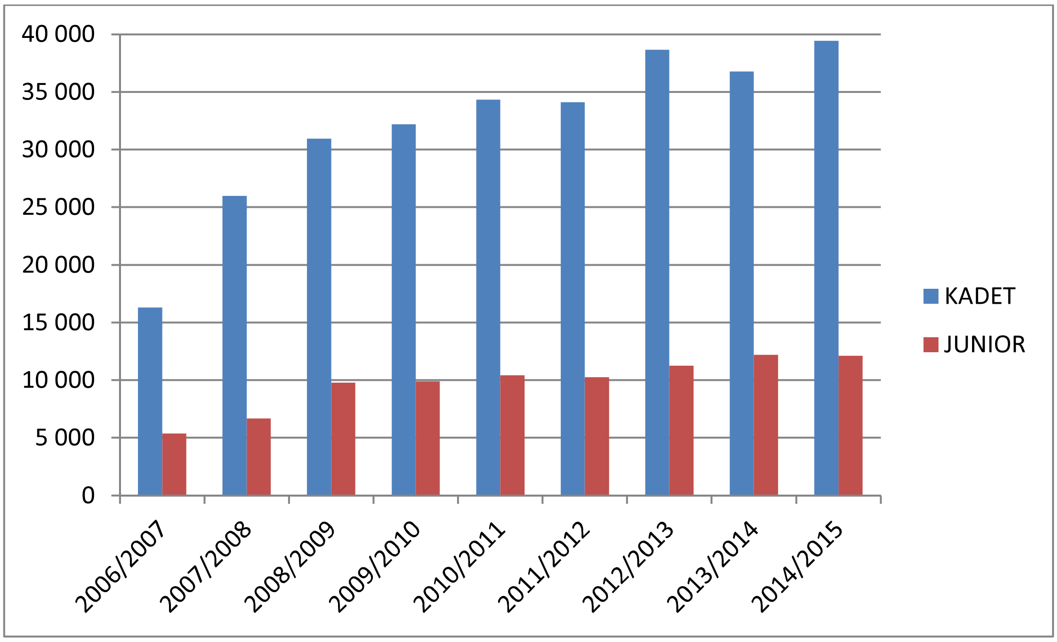
Přírodovědný klokan vznikl v roce 2006. Pořadateli jsou Přírodovědecká a Pedagogická fakulta UP v Olomouci. Přírodovědný klokan spadá do seznamu soutěží spoluvyhlašovaných Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Přírodovědný klokan má podobný průběh jako Matematický klokan. Jedná se také o jednorázovou soutěž (není rozdělena na více kol). Tato soutěž obsahuje otázky z matematiky, fyziky, chemie, biologie a zeměpisu. Kategorie, ve kterých mohou soutěžící řešit příklady jsou dvě Kadet - 8.-9. třída ZŠ a studenti tercie a kvarty osmiletých gymnázií a Junior 1.-2. ročník SŠ a studenti kvinty a sexty osmiletých gymnázií. [30]

Pravidla a průběh samotné soutěže:

- test má 24 příkladů, celkový čas na vyřešení je 40 minut + 10 minut organizační práce
- Příklady jsou rozděleny podle obtížnosti
    - 1. – 8. příklad je za 3 body
    - 9. – 16. příklad je za 4 body
    - 17. – 24. příklad je za 5 bodů
- Za každou správnou odpověď získá řešitel příslušný počet bodů podle obtížnosti, za nezodpovězený příklad nezískává, ani neztrácí žádný bod a za každou nesprávnou odpověď se jeden bod odčítá.
- Řešitelé zaznamenávají odpovědi do tzv. karty odpovědí, a to tak, že zatrhnou jedno z nabízených řešení. Tyto karty odpovědí po uběhnutí stanoveného času odevzdávají řešitelé příslušnému učiteli. Příklady se zadáním si řešitelé mohou ponechat
- Každý řešitel vstupuje do soutěže s 24 body
- Není možné získat 119 ani 118 bodů
- Při řešení není dovoleno používání tabulek, kalkulačky ani jiné literatury [41]

Počet účastníků kategorie Kadet a Junior je znázorněn grafem:



Obrázek 5.7 - Počet účastníků v kategorii Kadet a Junior od roku 2006/2007 do 2014/2015

5.6.2 Běh s klokanem

Jedná se o propagaci přírodních věd pomocí sportovních aktivit. Akci pořádá Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci ve spolupráci s Centrem grafických papírů v Olomouci. Běh s klokanem se skládá z přespolního běhu, skákání v pytlích a skládání hlavolamů.[33]

6 Pythagoriáda

6.1 Historie

Pythagoriáda se zrodila na Slovensku v době, kdy se ještě nevědělo o Matematickém klokanovi. Jedná se matematickou soutěž, která se snaží nalákat žáky základních škol a ukázat jim zábavnou a zajímavou stránku matematiky. Tato soutěž je jako Matematický klokan určená pro všechny žáky, ne jen pro nadané. Soutěžní příklady jsou tvořené tak, aby soutěžící vytvářel odpovědi. Obtížnost Pythagoriády je mezi matematickou olympiádou (pro nadané žáky) a Matematickým klokanem (pro všechny žáky a studenty).[45]

Od roku 1978 byla soutěž připravována ve Výzkumném ústavu pedagogickém v Praze. Později, to je v roce 2009, se garantem stal Národní institut dětí a mládeže Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, zařízením pro další vzdělávání pedagogických pracovníků a školským zařízením pro zájmovou činnost (NIDM MŠMT). Od roku 2014 je garantem Národní institut pro další vzdělávání (zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků)(NIDV). Došlo ke sloučení NIDM a NIDV.[42][43]

6.2 Průběh a pravidla soutěže

Pythagoriáda je soutěž určená pro žáky 5., 6., 7, a 8. tříd základních škol a také pro primu, sekundu a tercii víceletých gymnáziích.

Soutěž probíhá ve dvou kolech. První kolo je školní a druhé okresní.

Pravidla Pythagoriády:

- Každý žák se soutěže účastní dobrovolně, může se zúčastnit každý žák, který spadá do příslušného ročníku, ale také i žák nižšího ročníku (žák 4. ročníku bude soutěžit s žáky 5. ročníku)
- Má-li žák zájem soutěžit, nahlásí se učiteli, kterého touto soutěží pověří vedení školy.
- Soutěžící řeší 15 příkladů, časový limit mají 60 minut a není povoleno používat tabulky ani kalkulačky
- Za správnou odpověď získává soutěžící 1 bod
- Příklady vytváří kolektiv, který tvoří pedagogové ze základních škol a víceletých gymnázií [44]

6.2.1 Školní kolo:

- Pověřený učitel vyhodnotí řešení úloh školního kola a pošle výsledkovou listinu zúčastněných žáků organizátorovi okresního kola (předseda okresní komise Pythagoriády)
- Žák, který získá 10 a více bodů je považován za úspěšného řešitele a posupuje do okresního kola

6.2.2 Okresní kolo:

- Okresní komise Pythagoriády zodpovídá za výběr a pozvání soutěžících do okresního kola a za jeho řádný průběh.
- Každý soutěžící, který získá 10 a více bodů je úspěšným řešitelem okresního kola
- Po ukončení okresního kola posílá okresní komise výsledkové listiny s celkovým počtem zúčastněných žáků v jednotlivých kategoriích na odbor školství krajského úřadu - pracovníkovi zodpovědnému za soutěže [42]

Krajští koordinátoři zpracovávají statistické údaje za školní a okresní kolo a výsledky za daný kraj odešlou NIDV (Národní institut pro další vzdělávání)

6.3 Příklady použité v posledním pořádaném ročníku

Do své diplomové práce jsem zařadila ukázky příkladů, které se vyskytly ve školních kolech v roce 2015 [66]:

6.3.1 5. Ročník

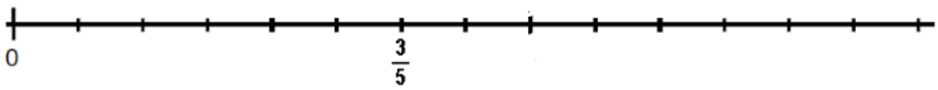
1) *Vyškrtněte ze sedmiciferného čísla 4713268 tři číslice tak, abyste dostali co největší číslo.*
2) *Vypočtěte obvod obdélníku o obsahu 27 cm^2, jehož jedna strana je třikrát delší než druhá.*
3) *Určete tři po sobě jdoucí přirozená čísla, jejichž součet je 120.*

6.3.2 6. Ročník

1) *Dvě auta vyjela z jednoho místa opačným směrem. Jedno auto ujelo 900 m za minutu, druhé jelo rychlostí* $60\ km \cdot h^{-1}$. *Jak daleko budou obě auta od sebe vzdálena za 10 minut po startu, jestliže se jejich rychlost nezměnila?*
2) *V hotelu je 157 pokojů a jejich dveře jsou očíslovány od 1 do 157. Kolikrát se na dveřích všech pokojů objevuje číslice 5?*
3) *Součin dvou činitelů, z nichž je jeden dvakrát větší než druhý, je 72. Určete oba činitele.*

6.3.3 7. Ročník

1) *Adéla prodává natrhané borůvky za 50 Kč/1 l, Zdeněk prodává 1 kg borůvek za 75 Kč. Kdo z nich prodává dráž, jestliže 1 l borůvek má hmotnost 650 g?*
2) *Jsou dány tři shodné čtverce. Pokud je spojíme za sebou do řady, vznikne obdélník, jehož obsah je 243 cm*^{2}. *Jaký je obvod jednoho čtverce?*
3) *Znázorněte na číselné ose* $\frac{1}{2}$.



6.3.4 8. Ročník

1) *Maskoty letošního mistrovství jsou králíci Bob a Bobek, loni v Bělorusku to byl zubr Volat. Zatímco běžný králík váží 4 500 gramů, samec zubra může vážit až 0,9 tuny. Určete poměr vah těchto dvou zvířat v základním tvaru.*
2) *Na loňském mistrovství světa byl věkový rozdíl mezi nejmladším hráčem a kapitánem našeho národního týmu 13 let. Kolik bylo každému z nich, jestliže dohromady jim bylo 55 let?*
3) *Hokej se objevuje v mnoha filmech. Ve filmu Ledové ostří, se kvůli úrazu stane ze známého hokejisty krasobruslař. Mimo jiné, se naučí skákat tzv. trojitý axel, což je skok, při kterém se sportovec ve vzduchu otočí třiapůlkrát kolem své osy. O kolik stupňů se otočí?*

7 Matematické korespondenční semináře

7.1 Historie

Soutěž nejprve vznikla na Slovensku roku 1980 v Košicích a byla určena pro studenty středních škol. O rok později v Bratislavě vytvořili i matematický seminář pro 9. třídy základních škol, který měl název PIKOMAT (Pionýrský korespondenční matematický seminář.). Později došlo i k vytváření seminářů pro žáky 5. tříd a přibývaly i další semináře pro ostatní třídy. Nejprve se jednalo jen o oblastní soutěž, ale časem si získala tak velkou popularitu a můžeme ji zařadit mezi celorepublikové soutěže. Po rozdělení Československa se semináře dále udržují jak na Slovensku tak i u nás v České republice.[45]

7.2 Průběh soutěže

Průběh soutěží je ve všech seminářích podobný. Jedná se o celoroční soutěž, která probíhá od října do května a je určená pro různé druhy a stupně škol. Příklady, které bývají v soutěži používány, vytvářejí učitelé a studenti bakalářských a magisterských oborů na vysokých školách.

Organizátoři připraví série úloh, každý seminář má jiný počet sérií i úloh, které zašlou na školy. Zájemci o semináře vyřeší zadané příklady. Vyřešené příklady zašlou na určenou adresu. Organizátoři příklady opraví a ohodnotí. Tyto vyhodnocené příklady zašlou zpět řešiteli opravené i s přiloženým řešením.[45] [49][51]

7.3 Jednotlivé matematické korespondenční semináře v ČR

7.3.1 Pikomat MFF UK

Pikomat MFF UK patří pod záštitu Matematicko-fyzikální fakulty univerzity Karlovy v Praze. V letošním roce se jedná o 31. ročník tohoto semináře. Tento seminář je určen pro žáky 2. stupně ZŠ a studentům odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Chce-li se žák účastnit, musí se elektronicky zaregistrovat na internetových stránkách Pikomatu (*http://pikomat.mff.cuni.cz/sosna/solver/new*). Příklady, které se řeší v tomto semináři, jsou propojené příběhem. Od 19. ročníku je seminář rozdělen do 6 sérii a každá série obsahuje 7 příkladů. Od 1. do 19. ročníku se střídalo rozdělení do 4 a 5 sérii.

Po vyřešení příkladů řešitel zašle své vyřešené úlohy na určenou adresu. Organizátoři opraví příklady a se správným řešením a další sérií příkladů zašlou zpět řešiteli.

Každý příklad je bodovaný 5 body. Při řešení nestačí jen výsledek, důležitý je i postup, který je bodovaný. [46][55]

Akce Pikomatu MFF UK

Mezi akce Pikomatu patří pořádání letních táborů. Tyto tábory jsou pro řešitele, ale také nové děti se zájmem o matematiku. Na táborech probíhají dopoledne přednášky z matematiky a přírodních věd a po obědě se hrají hry. [56]

Soustředění pořádané Pikomatem MFF UK

Toto soustředění je organizováno pro 20 – 25 nejúspěšnějších řešitelů. Tato soustředění trvají týden. Dopoledne probíhají přednášky z matematiky, odpoledne se hrají hry a navečer připravují organizátoři semináře, které řešitelé navštěvují pravidelně po celou dobu soustředění. [57]

Setkání Pikomatu

V poslední akci organizátoři nezapomínají na bývalé řešitele Pikomatu. Organizátoři pořádají vánoční besídky v Praze, na které zvou součastné řešitele, ale také i bývalé řešitele Pikomatu. [58]

7.3.2 KOKOS

Jedná se o KOperníkův KOrespondenční Seminář. Jedná se o celonárodní matematický seminář. Tento seminář je určen pro žáky 6. - 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Pořadateli a organizátory jsou studenti Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci za podpory této školy. Seminář je rozdělen do 5 sérií po 6 příkladech. Chce-li se žák účastnit, musí se elektronicky přihlásit do soutěže přes elektronickou přihlášku (*http://kokos.gmk.cz/prihlaska*). Po vyřešení každé série řešitel pošle své výsledky na adresu. Jestliže řešitel nebude přihlášen, organizátoři se opravou jeho příkladů nebudou vůbec zabývat. Nejdůležitější při řešení není výsledek, ale postup. Bodování příkladů je různé. V letáku, u příkladů, které mají řešitelé vyřešit, jsou vždy napsané body, které lze získat. Maximální počet bodů za 1 sérii příkladů je 40 bodů. Výsledné listiny jsou rozděleny podle ročníků, aby žáci z nižších ročníků nebyli znevýhodněni. Řešitel, který získá alespoň ve třech sériích 20 bodů je brán jako úspěšný řešitel. [49]

Další akce KOKOSu jsou jarní a podzimní soustředění. Tato soustředění jsou určena jak pro řešitele KOKOSu, tak i pro ostatní žáky základních škol a k nim příslušných tříd osmiletých gymnázií. Tato soustředění trvají 6 dnů a je nutné elektronické přihlášení.[59]

Poslední akcí, kterou organizátoři pořádají je Koperníkův Matboj (KOMA). Jedná se o soutěž družstev. Počet družstev je omezen, proto je důležitá registrace týmů v čas. Soutěž se koná v prostorech Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci. Soutěžní družstva mohou mít nejvíce 5 členů. Z jedné školy lze poskládat maximálně 2 družstva. Něco k pravidlům soutěže. Každý člen týmu obdrží na začátku soutěže jednu úlohu. Jestliže ji soutěžící vyřeší, jde tuto úlohu odevzdat opravovateli. Pokud je úloha správně vyřešena, získává tým body a novou úlohu k řešení. Všechny týmy řeší stejné úlohy a nové úlohy získávají ve stejném pořadí. Náročnost úloh postupně roste. Pokud je výsledek špatně, potom tým nezískává (ani neztrácí) body a může úlohu řešit dále. Počet bodovaných pokusů je omezen. Za každý nový pokus tým získává méně bodů (5-3-1-0-0...). Soutěžící ze stejného týmu se mohou radit. Mohou si vyměňovat své úlohy. Pokud tým dostane úlohu a není ji nikdo z týmu schopen vyřešit, má jednu úlohu zablokovanou. Čas určený pro řešení je stanoven na 120 minut nebo po vyčerpání zásoby příkladů. Vyhlášení výsledků je ve stejný den. V soutěži není dovoleno používání kalkulátorů ani literatury. [50]

7.3.3 BRKOS

Jedná se o BRněnský KOrespondenční Seminář, který je organizován Ústavem matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy Univerzity. Seminář je určený pro všechny studenty středních škol. Tento seminář je rozdělen do 6 sérií po 8 příkladech (1 z nich je bonusový, který moc s matematikou nesouvisí). Za vyřešený příklad může řešitel získat až 4 body, za bonusový příklad je to 1 bod. Není bodován jen správný výsledek, ale také postup řešení. Po vyřešení série odešle student své řešení na určenou adresu. Organizátoři opraví příklady a společně se správným řešením a další sérií příkladů pošlou nazpět k adresátovi. Po odevzdání všech sérií má možnost 16 nejlepších řešitelů se zúčastnit soustředění. Soustředění trvá týden, kde je plno zábavy, her a matematiky.[47]

Mezi další akce BRKOSu patří MathRace. Jedná se o týmovou soutěž, která bývá pořádána v listopadu. Studenti soutěží v družstvech po dvou až čtyřech členech. V dnešní době je registrováno 62 týmů. Průběh soutěže je přes internetové stránky (*http://brkos.math.muni.cz/mathrace/index.php*)[48] . V určený den a čas se na stránkách objeví 3 sady po 15 příkladech. Na vyřešení každé sady mají družstva 1 hodinu. O pořadí rozhoduje hlavně počet správně vyřešených příkladů, ale také celkový čas strávený nad jejich řešením. Za každou chybu v příkladu se připočítává 20 minut k celkovému času a po dobu 40 s nelze označit jiné odpovědi. Nejúspěšnější tři družstva jsou ohodnoceny hmotnými cenami (Krocení nekonečna, Příběh matematiky od prvních čísel k teorii chaosu – Stewart Ian, Krycí jména, Malé velké Galaxie, Malá velká království, Matematika, 50 myšlenek, které musíte znát, Sto důležitých věcí, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte), Matematika všedního dne,…).

7.3.4 PRaSE

Jedná se o matematický korespondenční seminář PRaSE (Pražský SEminář).[51] Tento seminář je určen pro studenty středních škol. Je to opět celoroční soutěž, kterou organizují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Seminář je rozdělen na 2 části (podzimní a jarní). Celkový počet sérií je 8. Prvních 7 sérií obsahuje 8 příkladů, které jsou poskládány podle obtížnosti. Soutěžící opět vyřešené příklady odesílají na určenou adresu, organizátoři příklady opraví a pošlou řešiteli zpět i se správným řešením a novou sérií příkladů. Za první tři příklady může řešitel získat 3 body, za dalších pět příkladů lze získat 5 bodů. Z každé série je vybráno 5 příkladů, které řešitel vyřešil s největším počtem bodů, a tyto body se počítají do výsledného hodnocení. Osmá série obsahuje 7 příkladů, které jsou rozdělené na 2 části. Za první část může řešitel získat 2 body a z druhé části může získat 3 body. V této sérii se sčítají body ze všech příkladů. Při bodování je opět důležitý i postup. Za správně zvolený postup, přehlednost,… může řešitel získat body navíc, ale může i body ztratit.

Akce pořádané PRaSEm jsou jarní a podzimní soustředění. Tato soustředění trvají 8 dní a konají se na různých místech České republiky. Maximální počet účastníků je 24. Tito účastníci jsou zváni na tyto semináře organizátory. Ne všichni se seminářů chtějí účastnit, proto je možné, že i řešitelé, kteří se umístili hůře, mohou dostat šanci jet na tato soustředění.

Řešitelé, kteří získají za celý rok více jak polovinu bodů, získají osvědčení úspěšného řešitele korespondenčního semináře. Potom uchazeč o bakalářské studium na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze může požádat, na základě tohoto osvědčení, o prominutí odborné přijímací zkoušky.

Další akce se nazývá NÁBOJ. [52] Jedná se o mezinárodní matematickou soutěž, která je organizována pro pětičlenné nebo čtyřčlenné družstva středoškoláků, kteří jsou z jedné školy. Družstva se do soutěže registrují přes internetové stránky. Při přihlašování si tým vybere místo, kde se soutěže zúčastní. Tým si musí vybrat místo v zemi, ze které pochází. V zahraničí není dovoleno soutěžit. Mezi všechna pořádající místa patří Praha, Opava, Bratislava, Košice, Pasov, Linec, Krakov, Vratislav, Varšava, Gdyně, Budapešť a Veszprém. Soutěžící od organizátorů dostanou obálku, ve které je 6 příkladů. Po odstartování soutěže mohou řešitelé řešit libovolné příklady ze zadání. Jestliže si tým bude jistý se správností příkladu, vyšle zástupce týmu za opravovatelem. Opravitel zkontroluje, zda je výsledek správný. Je-li výsledek správný, opravovatel zřetelně označí zadání úlohy svojí značkou. Bude-li výsledek špatně, vrátí se vyslanec ke svému týmu a zkusí vyřešit příklad znovu. Na řešení příkladu není určený počet pokusů, ale po třetím nezdařeném pokusu o správný výsledek, může opravovatel požádat družstvo i o postup řešení daného příkladu. Správně vyřešený příklad se předkládá tzv. měniči, který správně vyřešenou úlohu vymění za nový příklad. Takto měnič může měnit, dokud nevyčerpá veškeré příklady. Časový limit je stanoven na 120 minut. V každém místě konání se stává vítězem to družstvo, které vyřešilo největší počet úloh. Jedná-li se o shodu, rozhoduje o vítězi nejvyšší číslo vyřešené úlohy. Pomůcky, které jsou povoleny, jsou psací a rýsovací potřeby. Po ukončení soutěže se vyhodnotí a vytvoří celostátní i mezinárodní výsledková listina. Nejúspěšnější týmy jsou odměněny diplomy, tričky a věcnými cenami (elektronika, matematická literatura, deskové hry,…).

7.3.5 Seminář M&M

Jedná se o mezioborový seminář určený pro studenty středních škol. Seminář je zaměřený na matematiku, fyziku a informatiku. Tento seminář opět organizují hlavně studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Hlavním rozdílem mezi tímto seminářem a semináři popisovaných výše je ten, že organizátoři tohoto semináře vydávají časopis. Tento časopis obsahuje témata k bádání, doplněné o příklady k řešení a také články. Soutěž v tomto semináři spočívá v tom, že zájemce o soutěž odebírá časopis a vyjadřuje se k tématům, řeší příklady. Za tyto činnosti získává soutěžící body. Celkový počet těchto časopisů je 7. V prvních 6 číslech se nachází příklady, které soutěžící řeší. Počet bodů, které soutěžící může získat je napsán u příkladu. Po vyřešení soutěžící odešle na uvedenou adresu své řešení. Toto řešení organizátoři opraví, zhodnotí a pošlou nazpět k řešiteli. Na uvedenou adresu také organizátoři odešlou další číslo časopisu.

Po skončení soutěže se vyhodnotí nejlepší řešitelé. Tito řešitelé jsou pozváni na soustředění, která se konají na podzim a na jaře a v délce trvání jednoho týdne. Maximální počet účastníků je mezi 20 až 25 studenty. Tato soustředění se konají nejčastěji v krásné přírodě. Řešitelé, kteří za celý rok dosáhnou nejméně 65 bodů, obdrží osvědčení úspěšného řešitele, kterého potom mohou využít při přijímacích zkouškách na Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy a přijímací zkoušky těmto studentům budou odpuštěny. [53]

7.3.6 Matematický orienťák

Poslední seminář, který jsem si vybrala je matematický orienťák pořádaný Gymnáziem J. K. Tyla v Hradci Králové. Jedná se o soutěžní klání v matematice, které je určeno pro žáky základních škol a odpovídajících tříd osmiletých gymnázií. Soutěží dvoučlenná družstva a za každou školu je možné vyslat jen dva týmy z důvodu maximální kapacity, která je 30 týmů. Soutěž probíhá v prostorách budovy Gymnázia J. K. Tyla na Tylově nábřeží a v Jiráskových sadech. Soutěž je složena z několika stanovišť (v několika ročnících se jednalo o 14 stanovišť). Na těchto stanovištích soutěžící řeší dvojici úloh. Vítězem se stává ta dvojce, která bude v cíli co nejrychleji a s největším počtem správně vyřešených úloh. [54]

Existuje mnohem více matematických korespondenčních seminářů, soutěží a her, které pořádají školy pro ostatní žáky a studenty z jiných škol.

Semináře, se kterými jsem Vás ve své diplomové práci seznámila, podporuje Jednota českých matematiků a fyziků. Jedná se o sdružení vědců, pedagogů, i příznivců matematiky a fyziky. Toto společenství se začalo formulovat už v roce 1862. Cílem sdružení je podpora rozvoje matematiky a fyziky, péče o nadané žáky a studenty. Tato péče je zajištěna právě pořádáním soutěží a matematických seminářů.

8 Praktické řešení matematických soutěží

Cílem této části práce je vlastní řešení soutěžních příkladů. Z matematických soutěží, které jsem si vybrala pro řešení, jsou Matematický klokan a matematická Pythagoriáda. Obě tyto soutěže jsou zaměřeny spíše na širší část žáků a studentů. V těchto soutěží jde hlavně o nalákání a ukázání, že matematika může být zábavná i poučná zároveň. Tuto kapitolu zařazuji do své práce, abych se inspirovala příklady, které se objevují v matematických soutěžích.

Z Matematického klokana, který obsahuje 24 otázek, jsem vybrala 2 ročníky, ze kterých vyberu pár příkladů na propočítání. První ročník je rok 2004 a druhý ročník je loňský ročník 2015. V Matematickém klokanovi jsem se zaměřila na kategorii Junior. Jedná se o kategorii pro 1. – 2. ročník SŠ.

Druhou soutěží je Pythagoriáda. V Pythagoriádě je obsaženo 15 úloh k řešení. V této soutěži jsem si vybrala kategorii pro 8. ročník základních škol a opět jsem propočítala z ročníků pár příkladů na ukázku.

8.1 Matematický klokan – Junior – 2004

1. *Martin má celkem 2 004 kuliček. Polovina z nich je modrých, čtvrtina červených a šestina černých. Kolik kuliček má jinou barvu než modrou, červenou nebo černou?*

   (A) 167 *(B) 334* *(C) 501* *(D) 1002* *(E) 1837*

Řešení:
Celkový počet kuliček 2004
$\frac{1}{2}$ modrá ....2004 : 2 = 1002
$\frac{1}{4}$ červená ....2004 : 4 = 501
$\frac{1}{6}$ černá..2004 : 6 = 334
Jiná barva……… x

Dopočítáme x. Od celkového počtu odečteme modré, červené a černé kuličky a získáme počet kuliček jiné barvy.

$$x = 2004 - (m + červ + čern) = 2004 - (1002 + 501 + 334)$$

$$x = 167$$

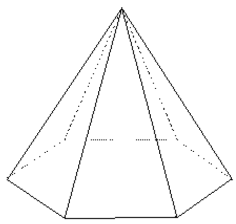
Kuliček jiné barvy je 167.

2. *Jehlan má 7 stěn. Jaký je počet jeho hran?*

(A) 8 *(B) 9* *(C) 12* *(D) 18* *(E) 21*

Řešení:

Při řešení tohoto příkladu si načrtneme jehlan a určíme počet stran.



Počet hran je 12.

3. *Půdorys budovy má tvar obdélníku o stranách 40 m a 60 m. Na jednom z plánků má budova obvod 100 cm. V jakém měřítku je plánek vytvořen?*

(A) 1 : 50 *(B) 1 : 100* *(C) 1 : 150* *(D) 1 : 200* *(E) 1 : 400*

Řešení:

Nejprve si určíme obvod budovy.

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$o = 2 \cdot (40 + 60)$$

$$o = 200 \text{ m}$$

Pro zjištění měřítka musíme mít stejné jednotky, proto převedeme skutečný obvod budovy v metrech na centimetry: $200 \text{ m} = 20\,000 \text{ cm}$

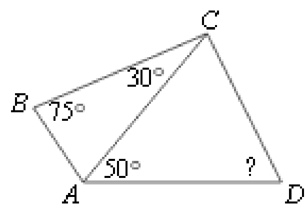
Nyní můžeme vypočítat měřítko:

Obvod plánku: obvod ve skutečnosti => 100 : 20 000 - zkrátíme 100 a získáme hledané měřítko.

$$1 : 200$$

Plánek je vytvořen v měřítku 1 : 200.

4. *Ve čtyřúhelníku ABCD na obrázku platí* $|AD| = |BC|$. *Velikost úhlu ADC je pak rovna*



(A) 50° *(B) 55°* *(C) 60°* *(D) 65°* *(E) 70°*

Řešení:

Při řešení vycházíme z obrázku. Dopočítáme velikost úhlu BAC $\alpha = 180° - 75° - 30° = 75°$ => trojúhelník ABC je rovnoramenný. Tím že platí $|AD| = |BC|$ tak také musí platit, že $|AC| = |AD|$ => trojúhelník ACD je také rovnoramenný, proto pro neznámý úhel δ (?) platí:

$$\delta = \frac{180° - 50°}{2}$$

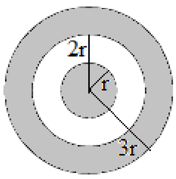
$$\delta = \frac{130°}{2} = 65°$$

Velikost úhlu ADC je *65°*.

5. *Terč na obrázku se skládá z vnitřního kruhu a dvou vnějších prstenců kolem něj. Šířka každého vnějšího prstence je rovna poloměru vnitřního kruhu. Kolikrát je větší obsah černého prstence než obsah černého vnitřního kruhu?*

(A) dvakrát *(B) třikrát* *(C) čtyřikrát* *(D) pětkrát* *(E) obsahy jsou stejné*

Řešení:



Vycházíme ze vzorce pro obsah kruhu $S = \pi r^2$

Obsah vnitřního kruhu je $S_1 = \pi r^2$.

Obsah prstence určíme jako rozdíl vnějšího celého černého kruhu a celého bílého kruhu $S_2 = \pi(3r)^2 - \pi(2r)^2$.

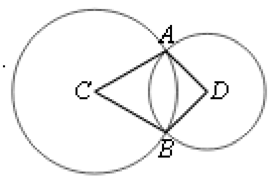
Pro určení poměru obsahů platí $\frac{S_2}{S_1}$:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi(3r)^2 - \pi(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi(9r^2 - 4r^2)}{\pi r^2} = \frac{9r^2 - 4r^2}{r^2} = \frac{r^2(9-4)}{r^2} = 5$$

Pozn.: Při počítání výrazu, v druhém kroku jsme zkrátili π a ve čtvrtém kroku jsme zkrátili r^2.

Obsah černého prstence je 5 krát větší, než obsah vnitřního kruhu.

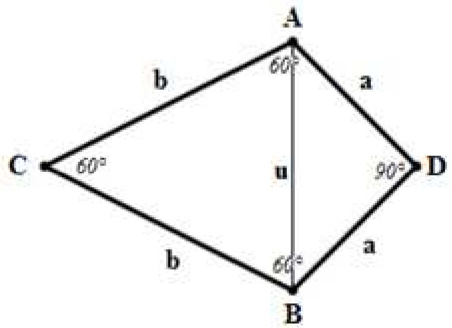
6. *Dvě kružnice se středy v bodech C a D se protínají v bodech A a B. Velikost úhlu ACB je 60° a velikost úhlu ADB je 90°, jaký je poměr poloměrů větší a menší kružnice?*



(A) 4 : 3 *(B)* $\sqrt{2}$ *: 1* *(C) 3 : 2* *(D)* $\sqrt{3}$ *: 1* *(E) 2 : 1*

Řešení:

Při řešení využijeme náčrt obrázkem.



Z náčrtku jsme si určili *u* (úhlopříčka čtverce), který je naznačený stranou AD a DC a úhlem *90°*. Úhlopříčka ve čtverci se vypočítá podle vzorce u = $\sqrt{2}$ a.

V trojúhelníku ABC tedy známe stranu AC. Tím, že strany AB a AC se rovnají a také tím, že známe úhel ABC, můžeme určit velikost strany *b* a zbývající dva úhly. Součet vnitřních úhlů je roven 180°. Jestliže od 180° odečteme 60°, dostaneme zbytek 120°. Z obrázku je patrné, že všechny úhly budou tedy stejné => trojúhelník ABC je rovnostranný a platí tedy:

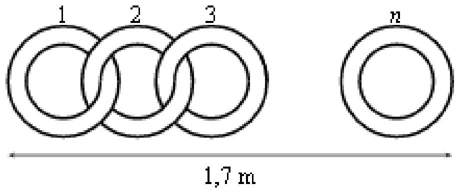
u = b = $\sqrt{2}$ a.

Posledním bodem řešení je určení poměru poloměrů.

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Poměr poloměrů je $\sqrt{2} : 1$.

7. *Prstence s vnitřním průměrem 4 cm a vnějším průměrem 6 cm jsou spolu propojeny stejně jako na obrázku. Kolik prstenců potřebujeme, abychom dostali řetěz dlouhý 1, 7 m?*



(A) 17 *(B) 21* *(C) 30* *(D) 42* *(E) 85*

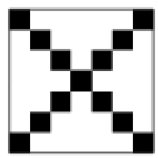
Řešení:

Přidáním dalšího kroužku se délka řetízku prodlouží o 4 cm. Abychom vypočítali, kolik oček bude potřeba, vydělíme výslednou délku v centimetrech prodloužením.

$$170 : 4 \doteq 42,5$$

Bude potřeba 42 prstenců.

8. *Ve čtverci se stranou 2003 jsou všechny čtverečky o straně 1 na diagonálách obarveny. (Na obrázku je situace znázorněna pro čtverec o straně 7). Jaký je obsah neobarvené části?*



(A) 2002·2003 *(B)* 2002^2 *(C)2001·2002* *(D)* 2001^2 *(E) 2000·2001*

Řešení:

Pro čtverec o 7 čtverečkách platí ta samá pravidla jako pro velký čtverec. V malém čtverci je 13 čtverečků černých, z toho vyplývá, že pro obsah čtverce ze 7 kostek by platilo:

$$S = a^2 - 13$$

$$S = 7^2 - 13$$

$$S = 49 - 13 = 36$$

Z výpočtu plyne, že se z každé strany oddělá jeden čtvereček => strana čtverce bude 6.

Proto pro stranu velkého čtverce bude platit 2003 – 1 a obsah bude tedy $S = 2002^2$.

9. *Kolika způsoby můžeme doplnit tabulku tak, aby v každém řádku a v každém sloupci byly v nějakém pořadí zapsány číslice 1, 2, 3 a 4?*

1			
2	1		
	3		
	4		

(A) 1 *(B) 2* *(C) 4* *(D) 16* *(E) 128*

Řešení:

Řešení příkladu jsme vypsali do tabulek:

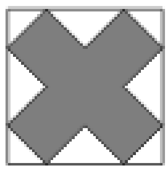
1	**2**	**3**	**4**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**2**	**1**
3	**4**	**1**	**2**

1	**2**	**4**	**3**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**1**	**2**
3	**4**	**2**	**1**

1	**2**	**3**	**4**
2	**1**	**4**	**3**
4	**3**	**1**	**2**
3	**4**	**2**	**1**

1	**2**	**4**	**3**
2	**1**	**3**	**4**
4	**3**	**2**	**1**
3	**4**	**1**	**2**

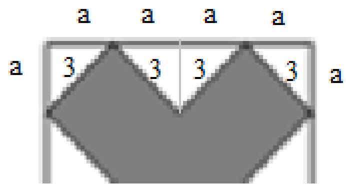
10. *Na obrázku je do čtverce vepsán pravoúhlý dvanáctiúhelník, jehož strany mají stejnou délku. Jestliže je obvod dvanáctiúhelníku roven 36 cm, jaký je obsah celého čtverce?*



(A) 36 cm² *(B) 48 cm²* *(C) 72 cm²* *(D) 108 cm²* *(E) 144 cm²*

Řešení:

Obvod dvanáctiúhelníku je 36 cm => délka jedné strany je *36 : 12 = 3*. Z obrázku jsme určili, že velikost strany dvanáctiúhelníku je úhlopříčkou naznačeného čtverce.



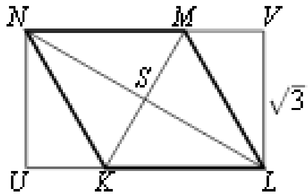
Ze vzorce pro délku úhlopříčky čtverce vypočítáme stranu *a*.

$$u = \sqrt{2}\,a$$
$$3 = \sqrt{2}\,a$$
$$a = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Strana velkého čtverce je $4a$. => $4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$.

Obsah velkého čtverce je tedy $S = (6\sqrt{2})^2 = 72$ cm^2.

11. Kosočtverec KLMN je vepsán do obdélníku ULVN, jehož kratší strana je rovna $\sqrt{3}$. Určete obsah kosočtverce, víte-li, že čtyřúhelník UKSN je deltoid.



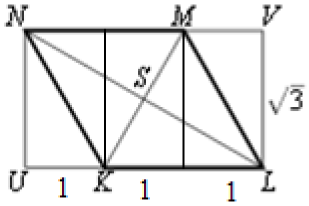
(A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $4\sqrt{3}$

Řešení:

V obdélníku ULVN jsme si určili délku druhé strany. Tuto délku vypočítáme přes vzorec pro výpočet úhlopříčky v obdélníku. Poznámkou, že čtyřúhelník UKSN je deltoid, je patrné, že strana $|NS| = |NU| = \sqrt{3}$ => úhlopříčka obdélníku má velikost $u = 2\sqrt{3}$.

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$u^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = u^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{u^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}$$
$$a = 3$$

Rozdělením obdélníku na 3 stejné obdélníky jsme zjistili velikost strany kosočtverce.

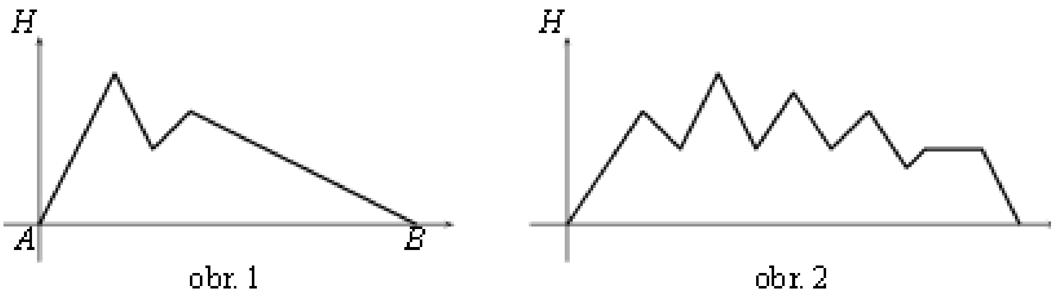


Velikost strany kosočtverce $a = |KL| = 2$.
Pro výpočet obsahu kosočtverce jsme použili vzorec $S = a \cdot v_a$, kde $v_a = b = \sqrt{3}$.

$$S = 2 \cdot \sqrt{3}$$
$$S = 2\sqrt{3}\, j^2$$

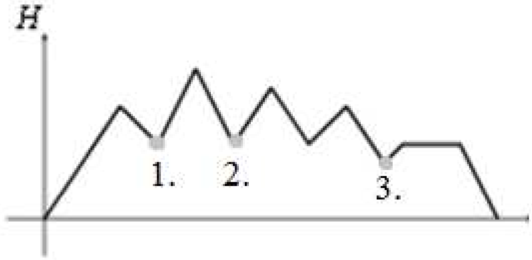
Obsah kosočtverce KLMN je $2\sqrt{3}$ j^2.

12. Nešikovný horolezec se potřebuje dostat z bodu A do B po trase, která je vyznačena na obr. 1 (závislost výšky H na vzdálenosti mezi body A a B). Během svého přesunu však několikrát upustil batoh, pro který se musel spustit dolů a opět se s ním vrátit na místo, kde mu upadl. Závislost výšky H na čase t jeho přesunu je zaznamenána na obr. 2. Kolikrát mu během přesunu upadl batoh?



(A) jednou (B) dvakrát (C) třikrát (D) čtyřikrát (E) pětkrát

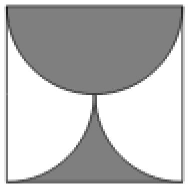
Řešení:



Body označují pády batohu. Horolezci batoh upadl 3krát.

8.2 Matematický klokan – Junior – 2015

1. *Obarvená část čtverce o straně **a** je ohraničena polokružnicí a dvěma čtvrtkružnicemi. Jaká je plocha obarvené části?*



(A) $\frac{1}{8}\pi a^2$ *(B)* $\frac{1}{2}\pi a^2$ *(C)* $\frac{1}{4}a^2$ *(D)* $\frac{1}{4}\pi a^2$ *(E)* $\frac{1}{2}a^2$

Řešení:

Z obrázku je vidět, že poloměr $r = \frac{a}{2}$. Nejprve jsme si určili obsah půlkružnice a potom vypočítali obsah výseče, který je roven rozdílu obsahu čtverce a čtvrtkružnic.

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \frac{a^2}{4}}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$S_2 = \frac{a^2 - \frac{\pi r^2}{2}}{2} = \frac{a^2 - \pi \frac{a^2}{4}}{2} = \frac{4a^2 - \pi a^2}{8}$$

Konečný obsah obarvené části je

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{4a^2 - \pi a^2}{8} = \frac{4a^2}{8} = \frac{a^2}{2}$$

Plocha obarvené části je $\frac{a^2}{2} j^2$.

2. *Tři sestry Anna, Julie a Lucie si koupily balení 30 sušenek, každá si jich vzala 10. Anna však zaplatila 80 centů, Julie 50 a Lucie 20. Kdyby si sušenky rozdělily poměrově podle peněz, které zaplatily, kolik sušenek by měla Anna ještě dostat?*

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Řešení:

Nejprve jsme si sestavili rovnici pro výpočet ceny, kterou každá sestra zaplatila. Kdyby si sušenky rozdělovaly podle poměru, kolik která zaplatila, vypadalo by to následovně

$$80x + 50x + 20x = 30$$
$$150x = 30$$

$$x = 0{,}2$$

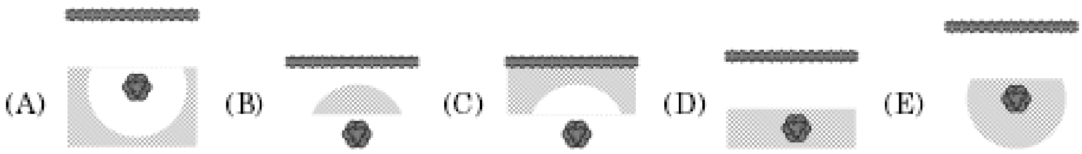
Anna by dostala $80 \cdot 0{,}2 = 16$ sušenek

Julie by dostala $50 \cdot 0{,}2 = 10$ sušenek

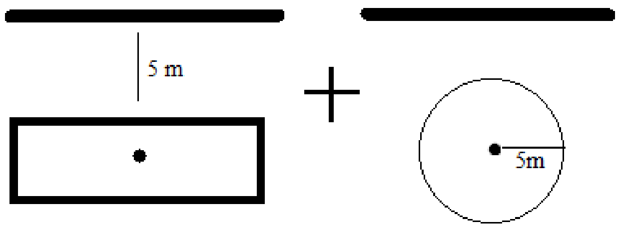
Lucie by dostala $20 \cdot 0{,}2 = 4$ sušenky

Anna by měla ještě dostat 6 sušenek.

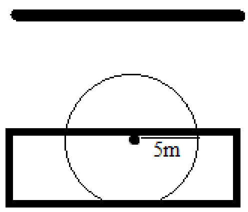
3. *Pan Hide chce vykopat poklad, který kdysi zakopal na své zahradě. Pamatuje si však pouze, že poklad zakopal alespoň 5 m od plotu a nejvýše 5 m od staré hrušně. Na kterém z následujících obrázků je vyšrafována oblast, v níž by měl pan Hide hledat poklad?*

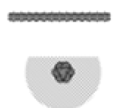


Řešení:



Při řešení tohoto příkladu si pomůžeme náčrtkem. Průnikem těchto obrázků získáme polohu, kde by pan Hide měl hledat.



Společné mají část kruhu, takže správná odpověď je 

4. *Urči poslední číslici součtu* $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$.

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

Řešení:

Při řešení tohoto příkladu využijeme znalostí pro počítání s exponenciálními čísly. Jestliže máme stejné základy, tak základ opíšeme a exponenty sečteme. Jakékoliv číslo, které je na nultou je rovno 1.

$$2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5 = 2015^2 + 1 + 2015^1 + 2015^5 = 2015^{2+1+5} + 1$$
$$= 2015^8 + 1 = 390626$$

Poslední číslice součtu je 6.

5. *Pan Svíce si koupil 100 svíček. Každý den zapálí jednu a její nevyhořelý zbytek si schová. Z každých sedmi zbytků si vyrobí jednu novou svíčku. Kolik dní mu svíčky vydrží?*

(A) 112 (B) 114 (C) 115 (D) 116 (E) 117

Řešení:

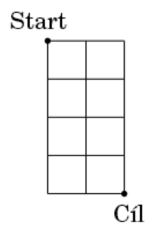
Nejprve jsme si určili, kolik vytvoří ze 100 zbytků nových svíček.

$$100:7 = \frac{100}{7} \text{ nových svíček } \doteq 14 \text{ nových svíček}$$

Ze 14 zbytků vytvoří ještě 2 nové svíčky => celkový počet dní je 100 + 14 + 2 = 116

Svíčky mu vydrží 116 dní.

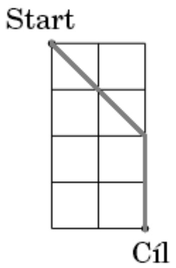
6. *Délka strany jednoho čtverečku je 1 (viz obr.). Urči délku nejkratší cesty ze startu do cíle, pokud se můžeš pohybovat pouze po stranách či úhlopříčkách jednotlivých čtverečků.*



(A) $2\sqrt{5}$ *(B)* $10\sqrt{2} + \sqrt{2}$ *(C)* $4\sqrt{2}$ *(D) 6* *(E) 2+*$2\sqrt{2}$

Řešení:

Nejkratší cestu jsme vyznačili v obrázku a dopočítali přes vzorec pro úhlopříčku ve čtverci $u = \sqrt{2}\, a$, velikost strany je 1 proto $u = \sqrt{2}$.



$$d = u + u + a + a$$

$$d = 2u + 2a$$

$$d = 2\sqrt{2} + 2$$

Nejkratší cesta je $2\sqrt{2} + 2$.

7. *Dnes mají otec a syn narozeniny. Součin věku otce a syna je 2015. Jaký je rozdíl jejich věků?*

   (A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

Řešení:

Číslo 2015 rozdělíme na rozklad => 2015 = 5 · 13 · 31

Vynásobením 5 · 13 získáme otcův věk, což je 65 a synovi je 31. Rozdíl jejich věků je 65 – 31 = 34.

Rozdíl věku otce a syna je 34 let.

8. *Každý obyvatel Wingrovy planety má alespoň 2 uši. Tři obyvatelé Imi, Dimi a Trimi se sešli v jednom z kráterů. Imi řekl: „Vidím 8 uší.“Dimi: „Vidím 7 uší.“Trimi:„To je divné já vidím jen 5 uší.“ Nikdo z nich si nevidí vlastní uši. Kolik uší má Trimi?*

   (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Řešení:

Vytvořili jsme rovnice, které vycházejí ze zadání a určili výpočtem počet uší Trimiho.

$$D + T = 8$$

$$I + T = 7$$

$$I + D = 5 \ \ => I = 5 - D$$

Vyjádřené I z třetí rovnice dosadíme do druhé rovnice a tu s první rovnicí sečteme a získáme počet uší Trimiho.

$$D + T = 8$$

$$5 - D + T = 7$$

$$2T = 10$$

$$T = 5$$

Trimi má 5 uší.

9. *Jestliže jsou řešením rovnice* $x^2 - 85x + c = 0$ *dvě různá prvočísla, urči ciferný součet čísla c.*

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 17 (E) 21

Řešení:

Při řešení využijeme vietových vztahů $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ a $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x^2 - 85x + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = 85 \Rightarrow \ x_1 = 85 - x_2$$

$$x_1 = 85 - 1 = 84 \Rightarrow \textit{není prvočíslo}$$

$$x_1 = 85 - 2 = 83 \Rightarrow \textit{je prvočíslo}$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$2 \cdot 83 = 166$$

$$1 + 6 + 6 = 13$$

Ciferný součet *c* je 13.

10. Petra má na poličce tři různé slovníky a dva různé romány. Kolika způsoby může knihy seřadit tak, aby všechny slovníky byly vedle sebe a oba romány také?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

Řešení:

Nejprve si spočítáme, kolikrát můžu mezi sebou prohodit jen slovníky

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Potom kolikrát můžeme prohodit jen romány.

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

A potom tedy celkové prohozeni knížek je: prohozeni jen slovníků vynásobeno počtem prohození jen románů a nakonec vynásobení 2, protože slovníky můžeme prohodit s romány.

$$6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

Knihy můžeme seřadit 24 způsoby.

8.3 Matematická Pythagoriáda 2005 / 2006

1. *Jedna dortová svíčka hoří 15 minut. Jak dlouho bude hořet 13 svíček na dortu, když byly zapáleny současně?*

Řešení:

Tím, že svíčky byly zapáleny současně a jsou stejné, proto čas hoření svíček bude stejný jako u jedné svíčky. Proto je správná odpověď 15 minut.

Třináct svíček bude hořet 15 minut.

2. *Kolik procent jsou tři osminy ze dvou pětin?*

Řešení:

Řešili jsme pomocí přímé úměrnosti:

$\frac{2}{5} \dots \dots \dots 100\ \%$

$\frac{3}{8} \dots \dots \dots x\ \%$

$x = \frac{\frac{3}{8} \cdot 100}{\frac{2}{5}} = \frac{300}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{375}{4} = 93{,}75\ \%$

Tři osminy ze dvou pětin je 93, 75 %.

3. *V jednom království zemřel král a v závěti odkázal polovinu království královně, princovi dvě třetiny zbytku a princezně zbytek. Zanedlouho zemřela i královna, a ta svůj díl království rozdělila mezi prince a princeznu stejným dílem. Jak bylo království po smrti královny rozděleno mezi princeznu a prince?*

Řešení:

Nejprve vyřešíme, jak dědictví dopadlo po králově smrti.

Královna získala ……… $\frac{1}{2}$ dědictví

Princ získal ………$\frac{2}{3}\ z\ \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ dědictví

Princezna získala …… $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ dědictví

Po smrti královny, se k podílu prince i princezny přičetla $\frac{1}{4}$. Konečný zisk dědictví prince a princezny byl:

Princ: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$ dědictví

Princezna: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2+3}{12}=\frac{5}{12}$ dědictví

Po smrti krále a královny bylo princovo dědictví $\frac{7}{12}$ a princezna zdědila $\frac{5}{12}$.

4. *Rozděl číslo 87 na tři části x, y, z tak, aby platilo: x:y=3:4 a zároveň, číslo z je o 10 větší než y.*

Řešení:

Nejprve si zapíšeme informace, které jsme se ze zadání dozvěděli:

$$x+y+z=87$$

$$x:y=3:4 => \frac{x}{y}=\frac{3}{4} => 4x=3y$$

$$x=\frac{3}{4}y$$

$$z=y+10$$

Do první rovnice dosadíme *x* a *z* a dopočítáme *y.* A potom získáme *x* a *z.*

$$x+y+z=87$$

$$\frac{3}{4}y+y+y+10=87$$

$$\frac{3}{4}y+2y+10=87$$

$$3y+8y+40=348$$

$$11y=308$$

$$y=28$$

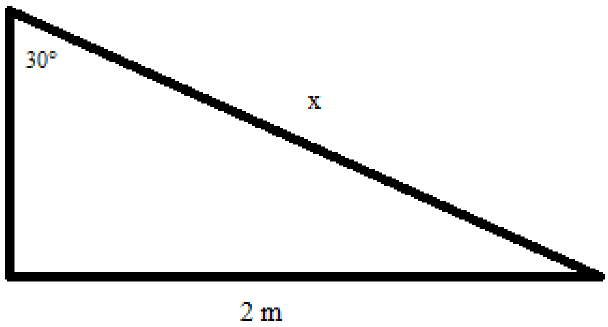
$x = \frac{3}{4}y \Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot 28$ $\quad$ $z = y + 10 \Rightarrow z = 28 + 10$

$x = 21$ $\quad$ $z = 38$

Číslo 87 rozdělíme na 21, 28 a 38.

5. *Jak dlouhý je žebřík opřený o zeď, jestliže s ní svírá úhel 30° a jeho pata je od zdi vzdálena 2 m?*

Řešení:



Při řešení jsme využili funkci sinus, která je definovaná jako protilehlá ku přeponě:

$$\sin(\alpha) = \frac{protilehlá}{přeponě}$$

$$\sin(30°) = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2}{\sin(30°)}$$

$$x = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m}$$

Žebřík je dlouhý 4 m.

6. *Na královském tržišti bylo možno nakupovat ve třech měnách – tolarech, groších a dukátech. Kolik tolaru je 12 dukátů, jestliže 100 tolarů je totéž co 8 grošů a 8 dukátů se rovná 20 grošům?*

Řešení:

Zapsali jsme si, co vychází ze zadání:

$x\,t = 12\,d \qquad 100\,t = 8\,g \qquad 8\,d = 20\,g$

$$g = \frac{100}{8}t \qquad d = \frac{20}{8}g$$

Do první rovnice dosadíme za $d = \frac{20}{8}g$.

$$x\,t = 12 \cdot \frac{20}{8}g$$

A za *g* jsme dosadili $g = \frac{100}{8}t$

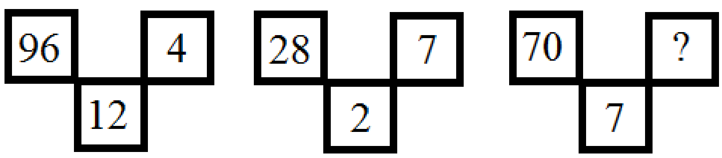
$$x\,t = 12 \cdot \frac{20}{8} \cdot \frac{100}{8}t$$

$$x\,t = \frac{24000}{64}t$$

$$x = 375$$

Dvanáct dukátů je 375 tolarů.

7. Které číslo chybí na místě otazníku?



Řešení:

Princip řešení je takový, že číslo v prvním čtverečku vydělíme číslem ve druhém čtverečku a abychom dostali číslo z třetího čtverečku, musíme výsledek po dělení vydělit číslem 2.

a) $96 : 12 = 8 \Rightarrow 8 : 2 = 4$
b) $28 : 2 = 14 \Rightarrow 14 : 2 = 7$
c) $70 : 7 = 10 \Rightarrow 10 : 2 = 5$

Hledané číslo je 5.

8.4 Matematická Pythagoriáda 2008 / 2009

1. *Na obrázku je částečně vyplněný magický čtverec se zlomky, pro něž platí: Součet v každém řádku, sloupci a v každé úhlopříčce se rovná 1. Doplňte prázdná políčka.*

4/9		
	1/3	
1/2		

Řešení:

První číslo, které si do tabulky doplníme, je v dolním rohu vpravo, potom doplníme spodní řádek, v prvním řádku jsme si doplnili prostřední číslo a v rohu a nakonec jsem doplnili prostřední řádek. Řešení jsme znázornili v tabulkách.

4/9		
	1/3	
1/2		2/9

4/9		
	1/3	
1/2	5/18	2/9

4/9	7/18	
	1/3	
1/2	5/18	2/9

4/9	7/18	1/6
	1/3	
1/2	5/18	2/9

4/9	7/18	1/6
	1/3	11/18
1/2	5/18	2/9

4/9	7/18	1/6
1/18	1/3	11/18
1/2	5/18	2/9

2. *Šest rohlíků stojí stejně jako pět housek. Rohlík je o padesát haléřů levnější než houska. Kolik korun postačí na nákup deseti rohlíků a pěti housek?*

Řešení:

$6r = 5h$

$r = h - 0{,}50$

Do rovnice za *r* dosadíme $h - 0{,}50$ a zjistíme cenu jedné housky, z toho potom dopočítáme cenu jednoho rohlíku a nakonec spočítáme cenu za 10 rohlíků a 5 housek.

$$6(h - 0{,}50\ ) = 5h$$

$$6h - 3 = 5h$$

$$h = 3$$

Jedna houska stojí 3 Kč => jeden rohlík stojí: $r = h - 0{,}50 = 3 - 0{,}50 = 2{,}50$ Kč.

Na nákup deseti rohlíků a pěti housek budeme potřebovat $10r + 5h = 10 \cdot 2{,}50 + 5 \cdot 3 = 25 + 15 = 40$.

Na nákup postačí 40 Kč.

3. *Čtvercová parcela má plochu 6400m^2. Do rohů parcely a pak každých 5 metrů potřebujeme betonový sloupek pro budoucí oplocení. Kolik sloupků je třeba objednat?*

Řešení:

Nejprve jsme určili délku strany čtverce z obsahu.

$$S = a^2$$

$$6400 = a^2$$

$$a = 80 \text{ m}$$

Strana jednoho čtverce je tedy 80 m. Dále ze zadání vyplývá, že po 5 metrech budou sloupky. Spočítáme, kolik sloupků bude na jedné straně a výsledek vynásobíme čtyřmi, protože čtverec má všechny čtyři strany stejně dlouhé.

$$80 : 5 = 16$$

Na každé straně bude 16 sloupků => $16 \cdot 4 = 64$.

Bude potřeba objednat 64 sloupků.

4. *V sadě je o 14 jabloní více než hrušní. Součin počtu jabloní a hrušní se rovná 3 315. Kolik je v sadě jabloní a kolik hrušní?*

Řešení:

Začali jsme zápisem co známe:

$j \cdot h = 3315$

$h = j - 14$

Druhou rovnici jsme dosadili do první rovnice a dopočítali jsme počet jabloní.

$$j \cdot h = 3315$$

$$j \cdot (j - 14) = 3315$$

$$j^2 - 14j = 3315$$

$$j^2 - 14j - 3315 = 0$$

Z kvadratické rovnice vypočítáme diskriminant ze vzorce $D = b^2 - 4ac$. A potom dopočítáme kořeny kvadratické rovnice ze vzorce $j_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Pro tento případ příkladu, kdy máme určit počet stromů, získáme jen jeden výsledek. Bude to kladný kořen rovnice, proto můžeme vzorec upravit $j = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

$$j^2 - 14j - 3315 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot (-3315)$$

$$D = 13\,456$$

$$j = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$j = \frac{14 + \sqrt{13\,456}}{2}$$

$$j = 65$$

Hrušní je o 14 méně než jabloní => 65 – 14 = 51.

V sadě je 65 jabloní a 51 hrušní.

5. *Vítězi závodu na 5 km naměřili v cíli čas 15 minut. Průměrná rychlost posledního závodníka byla o 2 km/h menší než vítěze. Za jak dlouho proběhl trať poslední závodník? Výsledek vyjádři v minutách a sekundách.*

Řešení:

$s = 5\ \text{km} = 5\,000\ \text{m}$

$t_1 = 15\ \text{min} = 900\ \text{s}$

$\Delta v = 2\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{5}{9}\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 0{,}56\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_2 = v_1 - \Delta v$

$t_2 = \qquad s$

V prvním kroku jsme vypočítali průměrnou rychlost vítěze ze vzorce $v_1 = \frac{s}{t_1}$. Od této rychlosti jsme odečetli rozdílnou rychlost a nakonec dopočítali rychlost posledního závodníka.

$$v_1 = \frac{s}{t_1}$$

$$v_1 = \frac{5\,000\ \mathrm{m}}{900\ \mathrm{s}} = \frac{50}{9}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 5{,}56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v_2 = v_1 - \Delta v$$

$$v_2 = \frac{50}{9} - \frac{5}{9} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$t_2 = \frac{s}{v_2}$$

$$t_2 = \frac{5\,000\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 1000\ \mathrm{s}$$

Poslední závodník doběhne v čase 1000 s, což je 16 minut a 40 sekund.

6. *Z 30 žáků 8. třídy jsou 2/5 chlapců a z nich se 1/4 učí hrát na hudební nástroj. Hře na hudební nástroj se věnuje též 6 dívek této třídy. Kolik procent žáků této třídy nehraje na žádný hudební nástroj?*

Řešení:

Z 30 jsou $\frac{2}{5}$ chlapci => ve třídě je 12 chlapců a dopočítáním zjistíme, že dívek je 18. Z 12 je $\frac{1}{4}$ hrajících na nástroj => 3 chlapci hrají na nástroj. Celkový počet žáků hrajících na hudební nástroj je 9. Ve třídě je 21 žáků, kteří nehrají na žádný hudební nástroj a využitím přímé úměrnosti jsme spočítali kolik je to procent.

30……… 100%

21……… x

$x = \frac{21 \cdot 100}{30}\ \% = 70\ \%$

Z třídy na žádný hudební nástroj nehraje 70 % žáků.

7. *Které z čísel 16^4 a 4^{16} je větší? Kolikrát?*

Řešení:

Nejprve si převedeme čísla na stejný základ. Při umocňování se exponenty násobí.

$$16^4 = 4^{2\cdot 4} = 4^8 = 2^{2\cdot 8} = 2^{16}$$

$$4^{16} = 2^{2\cdot 16} = 2^{32}$$

Abychom zjistili kolikrát je číslo4^{16} větší, vydělili jsme tyto čísla mezi sebou. Při dělení se stejným základem se základ opíše a exponenty se odečtou.

$$2^{32} : 2^{16} = 2^{32-16} = 2^{16}$$

Číslo 4^{16} je větší a je větší o 2^{16}.

8.5 Matematická Pythagoriáda 2010 / 2011

1. *Z kartiček, na kterých jsou čísla: 2, 2, 0, 0, 3, 4, 5, 8, 9, poskládej největší osmiciferné číslo dělitelné třemi.*

Řešení:

Aby číslo bylo dělitelné třemi, musí být ciferný součet dělitelný třemi. Tuto podmínku splňují čísla 2, 2, 0, 3, 4, 5, 8, 9.

Největší číslo poskládané z těchto čísel je 98 543 220.

2. *V osmilitrovém hrnci, který má výšku 60 cm, je 5 litrů vody. Do jaké výšky v decimetrech sahá voda?*

Řešení:

$V_1 = 8\ l = 8\ \mathrm{dm}^3$

$h_1 = 60\ \mathrm{cm} = 6\ \mathrm{dm}$

$V_2 = 5\ l = 5\ \mathrm{dm}^3$

$h_2 = \quad \mathrm{dm}$

Při řešení příkladu využijeme vzorce pro výpočet objemu $V = S \cdot h$, kde S je obsah plochy a *h* je výška.

Jako první jsme si určili obsah plochy hrnce a potom dopočítali výšku, kam sahá voda o objemu 5 l.

$$V_1 = S \cdot h_1$$

$$S = \frac{V_1}{h_1}$$

$$S = \frac{8\ \mathrm{dm}^3}{6\ \mathrm{m}} = \frac{8}{6}\mathrm{dm}^2$$

$$h_2 = \frac{V_2}{S}$$

$$h_2 = \frac{5\ \mathrm{dm}^3}{\frac{8}{6}\mathrm{dm}^2} = \frac{5}{1} \cdot \frac{6}{8}\ dm = \frac{30}{8}\mathrm{dm} = 3{,}75\ \mathrm{dm}$$

Voda o objemu 5 litrů sahá do výšky 3, 75 dm.

3. *Dva a půl kilogramu jablek stojí 60 korun. Kolik stojí tři a čtvrt kilogramu jablek?*

Řešení:

Ze zadání jsme vytvořili rovnici a určili jsme, kolik stojí jeden kilogram jablek. Po zjištění ceny za jeden kilogram jsme dopočítali cenu za tři a čtvrt kilogramu.

$$2{,}5\ x = 60$$

$$x = 24$$

Jeden kilogram jablek stojí 24 Kč => $3{,}25 \cdot 24 = 78$ Kč. Tři a čtvrt kilogramu jablek stojí 78 korun.

4. *Auto stálo 650 000 korun. Po namontování klimatizace se zdražilo o 10 %. Při koupi zákazník zjistil, že je auto poškrábané a vymohl na prodejci desetiprocentní slevu. Kolik korun zákazník za auto zaplatil?*

Řešení:

Jedná se o příklad, kdy se nejprve musí určit cena po zdražení a z nové ceny vypočítat slevu. Obě ceny získáme přes přímou úměru.

650 000 Kč………100 %

x ……… 110 %

$x = \frac{110 \cdot 650000}{100} = 715\ 000$ Kč

715 000 ……… 100 %

x……… 90 %

$x = \frac{90 \cdot 715000}{100} = 643\ 500$ Kč

Zákazník zaplatí 643 500 Kč.

5. *Myslím si dvě čísla. Když je vynásobím, dostanu číslo – 15. Když je sečtu, dostanu číslo 2. Napiš největší z myšlených čísel.*

Řešení:

Sestavíme si rovnice a vyřešíme je.

$$x \cdot y = -15$$

$$x + y = 2 => x = 2 - y$$

Vyjádřenou neznámou *x* dosadíme do první rovnice a dopočítáme neznámou *y*

$$(2 - y) \cdot y = -15$$

$$2y - y^2 = -15$$

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

Z kvadratické rovnice vypočítáme diskriminant ze vzorce $D = b^2 - 4ac$. A potom dopočítáme kořeny kvadratické rovnice ze vzorce $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-15)$$

$$D = 64$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$y_1 = 5$ $\quad$ $x_1 = 2 - 5 = -3$

$y_2 = -3$ $\quad$ $x_2 = 2 + 3 = 5$

Větší z myšleného čísla je číslo 5.

6. *Napište součet všech prvočísel větších než 5 a menších než 15.*

Řešení:

Hledanými prvočísly jsou 7, 11 a 13. Jejich součet je $7 + 11 + 13 = 31$.

Hledaný součet je 31.

7. *Mercedes Benz 124 má spotřebu 10 litrů na 100 kilometrů, Volvo 850 má spotřebu 135 mililitrů na 1500 metrů. Napište, které auto spotřebuje při ujetí 100 km méně benzínu a o kolik litrů.*

Řešení:

Mercedes 10 l …… 100 km

Volvo 135 ml……. 1500 m

U Volva jsme zjistili spotřebu na 100 km = 100000 m.

135 ml ………1500 m

x ………. 100 000 m

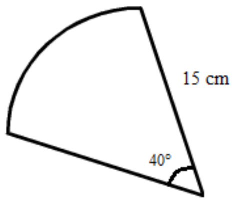
$x = \frac{135 \cdot 100\,000}{1500} = 9000$ ml = 9 l

Volvo spotřebuje 9 l na 100 km, což je o 1 litr méně než Mercedes.

9 Tvorba příkladů do matematických soutěží

Tato část mé práce obsahuje příklady, které by se daly použít v některých matematických soutěžích. Příklady jsem volila tak, že si je každý žák i student může během řešení představit. Příklady nejsou pro žáky a studenty abstraktními pojmy. Při řešení příkladů je velmi důležitá pochopitelnost a představivost řešitele. Existuje mnoho příkladů, které jsou využívané v matematických soutěžích, proto se může stát, že některé příklady mohou být podobné příkladům už vzniklým.

1) Vojtěch slavil narozeniny a dostal narozeninový dort. Po sfouknutí svíček došlo na krájení dortu. Při krájení dortu byly všechny kusy stejné. Tvar vykrojeného dortu je znázorněn na obrázku. Určete obvod vykrojené části.



Možné řešení:

Nejprve si musíme uvědomit, jaký tvar má dort. Z obrázku vidíme, že se jedná o výseč kružnice. Z toho to zjištění budeme vycházet. Nejprve si určíme obvod celé kružnice. V obrázku vidíme velikost poloměru a velikost úhlu. Velikost úhlu nám udává, z kolika kusů výsečí se dort skládá. Součet všech vnitřních úhlů kružnice je roven 360°. Jeden kus má velikost úhlu 40° a z toho vychází, že dort se skládá z 9 kusů => 360 : 40 = 9. Nyní určíme celkový obvod dortu a ten vydělíme počtem kusů, ze kterých se skládá, a získáme obvod jedné části dortu.

Zápis:

$r = 15$ cm

$\alpha = 40°$

$o_{výseče} = \ldots$ cm

$o_{celého} = 2 \cdot \pi \cdot r$ $\qquad$ $o_{výseče} = \frac{o_{celého}}{9}$

$o_{celého} = 2 \cdot \pi \cdot 15$ cm $\qquad$ $o_{výseče} = \frac{30\pi}{9}$ cm

$o_{celého} = 30\pi \doteq 94{,}25$ cm $\qquad$ $o_{výseče} \doteq 10{,}47$ cm

Obvod vykrojené části dortu je 10, 47 cm.

2) Řidič jede z Prahy do Brna stálou rychlostí. Cesta mu má trvat 1 h 53 min a vzdálenost měst je 206 km. Zdrží-li se na stodvacátém kilometru 25 minut, jakou stálou rychlostí by musel řidič jet, aby dorazil do Brna ve stejnou dobu jako vždy?

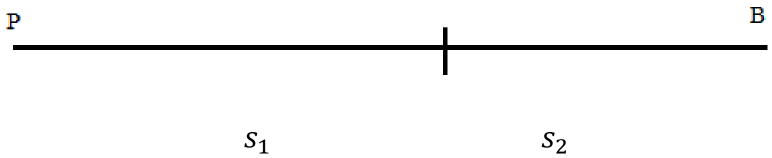
Zápis:

t = 1 h 53 min = 6780 s

s = 206 km = 206 000 m

$s_1 = 120$ km = 120 000 m

t_z = 25 min = 1500 s



Možné řešení:

1. Nejprve si vypočítáme průměrnou rychlost na celé trase. Vycházíme ze vzorce pro výpočet rychlosti z rovnoměrného pohybu.

$$v = \frac{s}{t}$$

Dosadíme hodnoty a získáme průměrnou rychlost.

$$v = \frac{206000\ m}{6780\ s} = 30,38\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 109,4\ \text{hm} \cdot \text{h}^{-1}$$

2. Vypočítáme dobu t_1, kterou řidič urazil na dráze dlouhé 120 km, než došlo ke zdržení.

$$t_1 = \frac{s_1}{v}$$

$$t_1 = \frac{120000\ \text{m}}{30,38\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} \doteq 3950\ \text{s}$$

3. Určíme čas, který řidič strávil na cestě i se zdržením

$$t_2 = t_1 + t_z$$

$$t_2 = 3950 + 1500 = 5450\ \text{s}$$

4. Určíme čas na dojetí do Brna vůči počáteční doby

$$t_{dojetí} = t - t_2$$

$$t_{dojetí} = 6780 - 5450 = 1330\ \text{s}$$

Vypočítáme rychlost, kterou by řidič musel jet, aby do Brna dojel jako vždy.

Víme, že do cíle řidiči zbývá 86 km.

$$v_{dojetí} = \frac{s_{dojeti}}{t_{dojetí}}$$

$$v_{dojetí} = \frac{86000 \text{ m}}{1330 \text{ s}} \doteq 64,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 233 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Aby řidič do Brna dorazil v určitý čas, musel by jet rychlostí 233 km · h^{-1}.

3) Na zahradě je celkem 17 keřů - červený rybíz, černý rybíz a angrešt. Určete počet jednotlivých keřů, jestliže víte, že červeného rybízu je třikrát méně než černého rybízu a sečteme-li keře červeného rybízu a angreštu, budeme mít o jeden keř méně, než je počet keřů černého rybízu.

Zápis:

Červený rybíz ……… x

Černý rybíz ……… y

Angrešt ………z

Možné řešení:

Nejprve si sestavíme rovnice, které nám vycházejí ze zadání:

$$x + y + z = 17$$

$$x = \frac{y}{3}$$

$$x + z = y - 1$$

Z první rovnice si vyjádříme *z* => *z = 17 – x – y* a dosadíme do třetí rovnice.

$$x + z = y - 1$$

$$x + (17 - x - y) = y - 1$$

$$17 - y = y - 1$$

$$2y = 18$$

$$y = 9$$

Hodnotu *y* dosadíme do druhé rovnice a získáme hodnotu *x*

$$x = \frac{y}{3}$$

$$x = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

A poslední hodnotu *z,* získáme z první rovnice

$$x + y + z = 17$$

$$z = 17 - x - y$$

$$z = 17 - 3 - 9$$

$$z = 5$$

Na zahradě jsou 3 keře červeného rybízu, 9 keřů černého rybízu a 5 keřů angreštu.

4) Určete číslo x, které bude následovat: 1, 5, 13, 29, 61, x, 253

Řešení:

Při řešení těchto příkladů je důležité přijít na to, jaké pravidlo platí mezi čísly jsoucí po sobě.

Mezi 1 a 5 máme číslo 4, mezi 5 a 13 máme 8, mezi 13 a 29 máme 16, atd.

Vztah mezi čísly v řadě je následující.

$$(1 \cdot 2) + 3 = 5$$

$$(5 \cdot 2) + 3 = 13$$

$$(13 \cdot 2) + 3 = 29$$

Obecně platí:

$$(x \cdot 2) + 3 = 5$$

Pro *x* bude platit:

$$(61 \cdot 2) + 3 = 125$$

Za *x* dosadíme hodnotu 125.

5) ***Paní Nováková šla kolem textilního obchodu. Ve výloze zahlédla kozačky, které byly zlevněny o 15 %. O týden později byly kozačky opět zlevněny z nové ceny o 5 %. Cena po slevách byla 1999 Kč. Určete původní cenu kozaček před slevami.***

Možné řešení:

Největší chybou, které se může řešitel dopustit je ta, že obě slevy sečte a určí si výslednou cenu. Na ukázku uvedu i špatné řešení

Nejprve ale vyřeším příklad správně.

Zápis:

1. sleva ……… 15 %
2. sleva ……… 5 %

konečná cena …… 1999 Kč

nejprve si určíme cenu před druhou slevou. Při počítání využijeme přímé úměrnosti.

1999…….. 100 %

$\underline{x \ldots\ldots\ldots\ldots 105\ \%}$

$x = \frac{105 \cdot 1999}{100} \doteq 2099\ \text{Kč}$

Cena před druhou slevou byla 2099 Kč. V dalším kroku si uvedeme původní cenu.

2099…….. 100 %

$\underline{x \ldots\ldots\ldots\ldots 115\ \%}$

$x = \frac{115 \cdot 2099}{100} \doteq 2414\ \text{Kč}$

Původní cena kozaček byla 2414 Kč.

Kdyby řešitel sečetl rovnou obě slevy => 15 % + 5 % = 20 %, došel by k špatnému výsledku.

1999…….. 100 %

$\underline{x \ldots\ldots\ldots\ldots 120\ \%}$

$x = \frac{120 \cdot 1999}{100} \doteq 2399\ \text{Kč}$

Potom by jeho výsledek byl 2399 Kč.

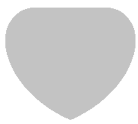
Pozn.: Při řešení takových typů příkladů si musí řešitel uvědomit, z jakého základu byla jaká sleva určena. Nelze sečíst všechny slevy a vycházet jen z konečné ceny. Řešitel se k ceně musí dostat postupným počítáním cen.

6) Určete, který obrazec nelze vytvořit skládáním a překládáním vzorových tvarů.

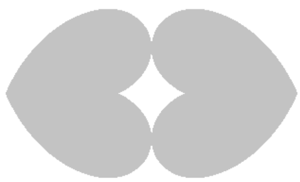
A. B. C. D. E.

Možné řešení:

Při pozorném zkoumání si můžeme všimnout, že obrazec, který nelze vytvořit je pod písmenem C. v tomto případě došlo k zaplnění vrchní části útvaru tj.



Proto nelze vytvořit ze zadaných tvarů tvar C. Pro úplnost si ukážeme, jak by vypadal vytvořený útvar pod písmenem C ze zadaných tvarů.



7) ***Nádoba má objem 0,002 m^3. Voda vyplňuje $\frac{3}{4}$ objemu nádoby. Kolik vody zbude v nádobě, jestliže otec odlije $\frac{2}{5}$ a matka 450 ml?***

Možné řešení:

Nejprve je důležité uvědomit si, jaké vztahy platí při převodu jednotek

$$1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{dm}^3$$

$$1\ \mathrm{l} = 1\ 000\ \mathrm{ml}$$

Potom ze zadání můžeme určit objem

$$0{,}002\ \mathrm{m}^3 = 2\ \mathrm{dm}^3 = 2\ \mathrm{l} = 2\ 000\mathrm{ml}$$

Určíme si kolik vody je v nádobě, z tohoto objemu odečteme odlití otce a matky a získáme zbytek vody v nádobě.

$$\frac{3}{4} z\ 2000 = 1500\ \mathrm{ml}$$

$$\frac{2}{5} z\ 1500 = 600\ \mathrm{ml}$$

V nádobě zůstane $1500 - 600 - 450 = 450$ ml.

Zbude 450 ml vody.

8) ***Čtyři kamarádi si koupili ohňostroj na Silvestra v hodnotě 750 Kč. První zaplatil 22 % z ceny, druhý zaplatil 56 % z poloviny ceny a čtvrtý se podílel hodnotou 200 Kč. Kolik korun zaplatil třetí kamarád?***

Možná řešení:

Příklad řešíme pomocí přímé úměry.

První

750 Kč……… 100%

x ……… 22 %

$x = \frac{22 \cdot 750}{100} = 165$ Kč

Druhý

375 Kč ………100 %

x……… 56 %

$x = \frac{56 \cdot 375}{100} = 210$ Kč

Třetí zaplatí: $750 - 165 - 210 - 200 = 175$ Kč

Třetí kamarád zaplatí 175 Kč.

9) Myslím si kladné číslo. Vynásobím-li toto číslo dvěma, přičtu druhou mocninu myšleného čísla a nakonec odečtu pětinásobek čísla, výsledek bude 18. Jaké číslo si myslím?

Možné řešení:

Při řešení tohoto příkladu si vytvoříme rovnici a určíme její kořeny:

$$2x + x^2 - 5x = 18$$

Získali jsme kvadratickou rovnici. Z kvadratické rovnice vypočítáme diskriminant ze vzorce $D = b^2 - 4ac$. A dopočítáme kořeny kvadratické rovnice ze vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

$$2x + x^2 - 5x = 18$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-18)$$

$$D = 9 + 72 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

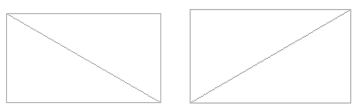
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{81}}{2} = 6$$

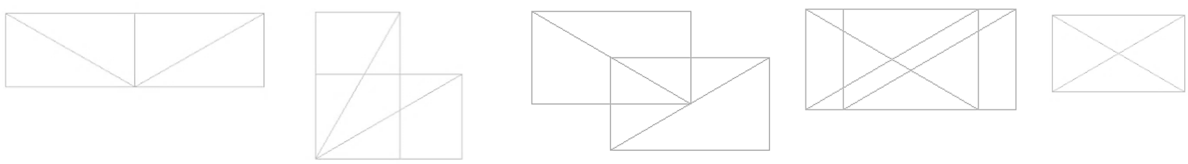
$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{81}}{2} = -3$$

Číslo, které si myslíme je číslo 6.

10) Který útvar nemůže vzniknout posouváním, překládáním a otočením o 90° vzorových tvarů.

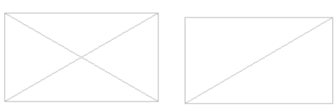


A. B. C. D. E.

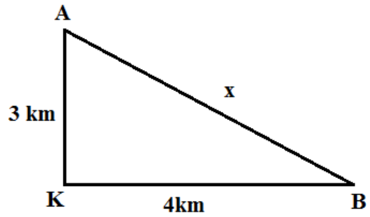


Možné řešení:

Obrazec, který nelze vytvořit ze zadaných útvarů je pod písmenem D, ten je složen z těchto útvarů.



11) Dvě silnice svírají pravý úhel, viz obr. Křižovatka je od místa A vzdálená 3 km a od místa B 4 km. Místa A a B jsou spojena cyklistickou stezkou. První cyklista jede po křižovatce rovnoměrným pohybem a jeho průměrná rychlost je 18 km · h^{-1}. Určete průměrnou rychlost druhého cyklisty, který jede po cyklostezce také rovnoměrným pohybem, tak, aby do bodu B dorazili současně.



Řešení:

První cyklista ……… $18\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Dráha prvního cyklisty ……… $3\ \mathrm{km} + 4\ \mathrm{km} = 7\ \mathrm{km} = 7\,000\ \mathrm{m}$

Druhý cyklista ……… ? $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$

Při řešení musíme nejprve převést hodnoty na základní jednotky. Ze zadání víme, že obě rychlosti jsou průměrné a konané pohyby jsou rovnoměrné, proto využíváme vzorce pro výpočet rovnoměrného pohybu.

Nejprve si určíme vzdálenost cyklostezky z bodu A do bodu B pomocí Pythagorovy věty, poté určíme čas, za který urazí první cyklista dráhu, a nakonec dopočítáme průměrnou rychlost druhého cyklisty.

$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ \mathrm{km} = 5\,000\ \mathrm{m}$$

Nyní si určíme čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{7\,000\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 1\,400\ \mathrm{s} = 23\ \mathrm{min}\ 20\ \mathrm{s}$$

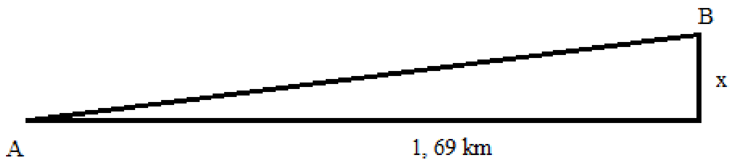
Rychlost druhého cyklisty tedy je

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5\,000\ \mathrm{m}}{1\,400\ \mathrm{s}} = \frac{25}{7}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \doteq 3{,}57\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \doteq 13\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$$

Aby oba cyklisté dorazili součastně do bodu B, musela by být rychlost druhého cyklisty přibližně $13\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

12) Mezi vesnicemi A a B je vzdušná vzdálenost 1, 69 km. Silnice z vesnice A má stoupání 12 %. Vypočítejte rozdíl nadmořských výšek vesnic A a B.

Možné řešení:



Příklad řešíme pomocí přímé úměrnosti a to následovně:

100 % ………… 1,69 km

12% ………… x

$x = \frac{12 \cdot 1{,}69}{100} \doteq 0{,}203$ km

Rozdíl mezi nadmořskými výškami mezi vesnicemi je 0, 203 km. Po převedení na základní jednotky je rozdíl mezi nadmořskými výškami 203 m.

13) 7 lahví bílého vína a 6 lahví červeného vína stálo 2216 Kč. Určete cenu jedné láhve bílého vína a cenu jedné láhve červeného vína, když za 2 láhve bílého a 2 láhve červeného zaplatíme 678 Kč.

Řešení:

Příklad se opět řeší pomocí sestavených rovnic. Tyto rovnice si sestavíme z informací, které jsou v zadání.

$$7x + 6y = 2216$$

$$2x + 2y = 678 \quad /(-3)$$

$$7x + 6y = 2216$$

$$-6x - 6y = 2034$$

$$x = 182 \text{ Kč}$$

Nyní dopočítáme cenu červeného vína$y = \frac{678-2x}{2} = 157$ Kč

Cena jedné láhve bílého vína je 182 Kč a cena jedné láhve červeného vína je 157 Kč.

14) ***Na euro paletu o rozměrech 120 cm x 80 cm, výrobce skládá plechovky kompotů. Plechovky mají průměr 8 cm a výšku 10 cm a jsou poskládané v řadách. Plechovky skládají do výšky 80 cm. Určete, o kolik procent, množství kompotu by se na paletu vlezlo, kdyby plechovky byly tvaru kvádru o rozměrech 8 cm x 8cm x 10 cm. Tloušťku plechovek zanedbejte.***

Řešení:

1. Určíme si počet plechovek, které se vejdou na jednu paletu, a poté určíme objem plechovky a ten vynásobíme počtem plechovek => zjistíme objem na paletě.

Na šířku palety, která má 80 cm se vleze 10 kusů plechovek, na délku 120 cm se vleze 15 plechovek. První vrstvu plechovek tvoří 10 · 15 =150 plechovek. Ze zadání víme, že plechovky skládají do výšky 80 cm => na sebe se vleze 8 plechovek => 150 · 8 = 1200 plechovek.

Pro výpočet objemu jedné plechovky využijeme vzorec pro výpočet objemu válce:

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

$$V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 10$$

$$V_1 = 502{,}65 \text{ cm}^3$$

Objem všech plechovek na paletě je

$$V_{1200} = 1200 \cdot V_1 = 603\,186 \text{ cm}^3 \doteq 603{,}2 \text{ dm}^3 = 603{,}2 \text{ l}$$

2. Určíme si počet plechovek tvaru kvádru, které se vejdou na jednu paletu, a poté určíme objem plechovky a ten vynásobíme počtem plechovek => zjistíme objem na paletě.

Na šířku palety se opět vleze 10 kusů plechovek, na délku opět 15 plechovek. První vrstvu plechovek tvoří 10 · 15 =150 plechovek. Celkový počet kvádrových plechovek by byl

=> 150 · 8 = 1200 plechovek.

Pro výpočet objemu jedné plechovky využijeme vzorec pro výpočet objemu kvádru:

$$V_1 = a \cdot b \cdot c$$

$$V_1 = 8 \cdot 8 \cdot 10$$

$$V_1 = 640 \text{ cm}^3$$

Objem všech plechovek na paletě je

$$V_{1200} = 1200 \cdot V_1 = 768\,000 \text{ cm}^3 \doteq 768 \text{ dm}^3 = 768 \text{ l}$$

3. V posledním kroku určíme, o kolik procent by se na paletu vlezlo více množství kompotu, kdyby plechovky měli tvar kvádru.

$603{,}2$ l ………100 %

768 l ……… x

$$x = \frac{768 \cdot 100}{603{,}2} = 127{,}32 \text{ \%}$$

Kdyby plechovky měli tvar kvádru, na paletu by se vlezlo o 27, 32 % více množství kompotu.

15) Určete kolik % je $\frac{5}{7}$ z 35 % nejmenšího, trojciferného čísla.

Řešení:

Nejmenší trojciferné číslo je 100.

Určíme si 35 % z 100 což je:

$$100 \ldots\ldots\ldots 100 \text{ \%}$$

$$x \ldots\ldots\ldots 35 \text{ \%}$$

$$x = \frac{35 \cdot 100}{100} = 35$$

Nyní si určíme $\frac{5}{7}$ z 35 => $\frac{35 \cdot 5}{7} = 25$

Jako poslední krok určíme, kolik je to procent.

35……… 100 %

25 ……… x

$$x = \frac{25 \cdot 100}{35} = \frac{500}{7} \doteq 71{,}43 \text{ \%}$$

$\frac{5}{7}$ z 35 % nejmenšího, trojciferného čísla je 25 a je to 71, 43 %.

10 Výzkumná část

V poslední části diplomové práce jsem se rozhodla provést vlastní průzkum toho, jak si studenti stojí v řešení matematických úloh a jaký mají zájem o matematiku. Vytvořila jsem test, který obsahuje 4 příklady ze soutěže matematické olympiády pro 8. a 9. ročník základní školy. I když matematická olympiáda je spíše orientovaná na nadané žáky, zařadila jsem tyto příklady do výzkumu pro zjištění, jak si s příklady poradí studenti středních a vysokých škol. Volila jsem příklady pro základní školu a na výpočet časově moc nenáročné.

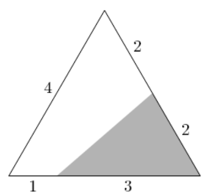
10.1 Struktura testu

Věk:
Pohlaví:
Obor (třída):

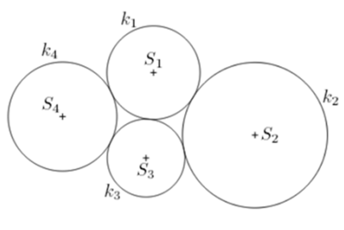
1) Nahraďte hvězdičky v čísle 683*** vhodnými číslicemi tak, aby výsledné šestimístné číslo bylo dělitelné 7, 8 a 9.

2) Průměrný věk rodiny Kebulových, kterou tvoří otec, matka a několik dětí, je 18 let. Přitom průměrný věk rodiny bez tatínka, kterému je 38 let, je 14 let. Kolik dětí mají Kebulovi?

3) Je dán rovnostranný trojúhelník o straně 4 cm (viz obr.). Určete obsah tmavé části a také, kolik procent plochy původního trojúhelníku zaujímá tmavá část?



4) Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 se středy S_1, S_2, S_3, S_4. Kružnice k_1 a k_3 se vně dotýkají všech ostatních kružnic, poloměr kružnice k_1 je 5 cm, vzdálenost středů S_2 a S_4 je 24 cm a čtyřúhelník S_1, S_2, S_3, S_4 je kosočtverec. Určete poloměry kružnic k_2, k_3, k_4. Pozn. Obrázek je pouze ilustrativní.

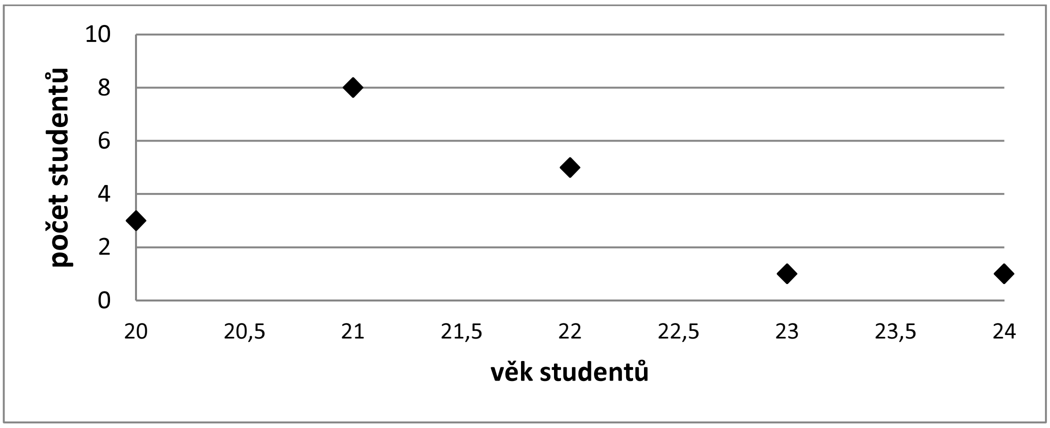


10.2 Sběr a analýza dat

Nejtěžším úkolem bylo připravené testy předat respondentům a poprosit je o jejich vyplnění. Ze začátku jsem testy vytiskla a rozdala několika studentům fakulty. Ale pořád to nestačilo k nějaké hlubší analýze. V druhém kroku jsem využila počítačové sítě a příklady rozeslala přes internet. I tak nebyl zájem o vypracování velký a v konečném důsledku se mi podařilo získat pouze 30 vypracovaných testů, pomocí kterých jsem analyzovala výsledky. Respondenty jsem rozdělila do dvou skupin. Na studenty fakulty a ostatní účastníky výzkumu.

10.2.1 Studenti fakulty

První skupinu respondentů tvoří studenti fakulty – 2 chlapci a 16 dívek ve věku 20 – 24 let. Těmto studentům jsem testy rozdala osobně a byla jsem přítomna u jejich vyplňování. Při testu studenti měli povolenou jen kalkulačku. Přístup na internet jsem nedovolila, protože příklady z Matematické olympiády se dají dohledat vyřešené.



Obrázek 10.1 - Věk studentů

Při vyhodnocování testu skupiny jsem zvolila následovné hodnocení.

- Správně vyřešený příklad podle tvůrců řešení
- Správně vyřešený příklad podle svého řešení
- Správné řešení podle tipování (bez řešení)
- Špatné řešení
- Nevyřešený příklad

První vyhodnocení jsem brala po jednotlivých příkladech, jak byli studenti úspěšní, a druhé hodnocení bylo celkové, kolik se studentům podařilo celkově vyřešit příkladů.

První příklad

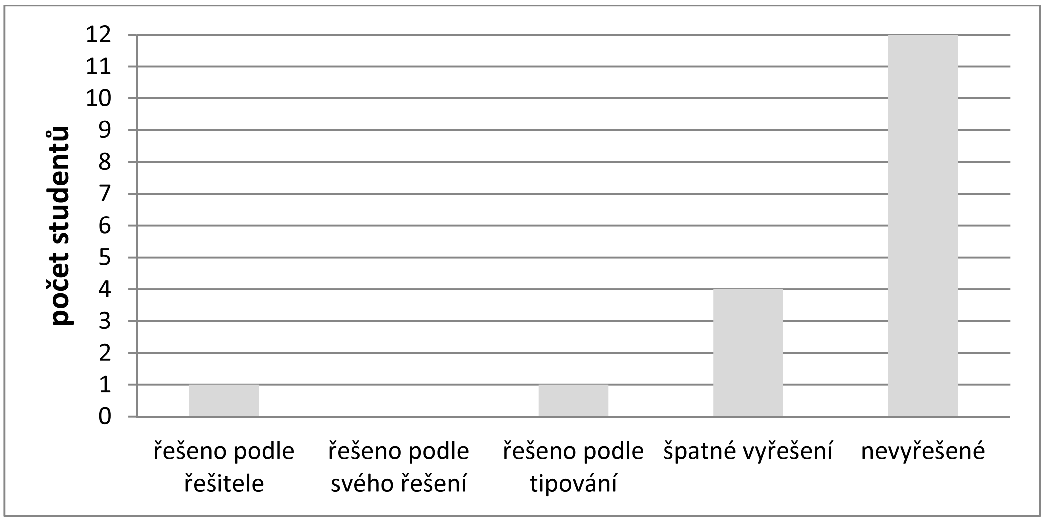
Řešení podle zadavatelů je následující:

Má-li být číslo dělitelné 8, 9 a zároveň 7, musí být dělitelné i nejmenším společným násobkem těchto čísel

$$n(7, 8, 9) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504.$$

Hledaný násobek čísla 504 musí ležet v intervalu $\langle 683\,000, 683\,999 \rangle$ *. Po vydělení 683 000 číslem 504 získáme neúplný podíl 1 355 a zbytek 80. Odtud dostáváme, že nejmenší násobek v tomto intervalu bude 1 356 · 504 =683 424, další násobek 683 424 + 504 = 683 928. Úloha má 2 řešení: 424 a 928.*

Příklad vyřešili 2 studenti, oba studenti uvedli alespoň 1 řešení, 4 studenti vyřešili špatně a 12 neuvedlo řešení.



Obrázek 10.2 - Vyhodnocení příkladu 1 - studenti

Druhý příklad

Řešení podle zadavatelů:

Počet členů této rodiny označíme n. součet věků všech členů je roven součinu průměrného věku rodiny a počtu členů, tedy 18 · n. rodina bez tatínka má n – 1 členů a součet věků těchto členů je 14 · (n – 1). Víme, že tento součet je o 38 menší než součet věků všech členů. Docházíme tedy k rovnici

$$18 \cdot n = 14 \cdot (n - 1) + 38$$

Po úpravě dostaneme

$$4n = 24$$

$$n = 6$$

Celá rodina má 6 členů, Kebulovi mají 4 děti.

Při vyhodnocování testu jsem narazila u studenta na jiný postup při řešení, který mohl být použitý.

Řešení použité studentem vypadalo následovně

$$\frac{M + O + D}{2 + x} = 18$$

$$\frac{M + D}{1 + x} = 14$$

Po úpravě rovnic došel student k výsledku

$$M + O + D = 18 \cdot (2 + x)$$

$$M + D = 14 \cdot (1 + x)$$

$$M + 38 + D = 36 + 18x$$

$$M + D = 14 + 14x$$

$$M + D = 18x - 2$$

$$M + D = 14 + 14x$$

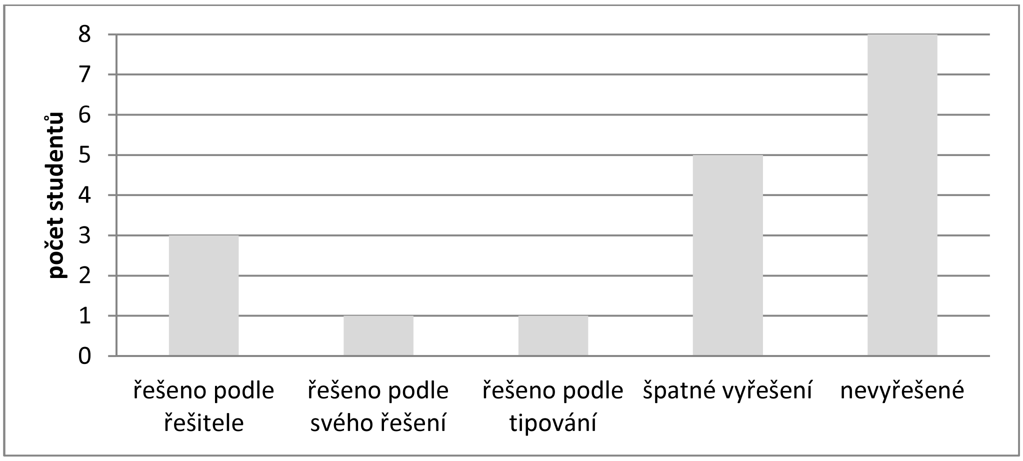
$$0 = 4x - 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

Rodina má 4 děti.

Příklad vyřešilo 5 studentů, špatně odpovědělo 5 studentů a otázku nezodpovědělo 8 studentů.

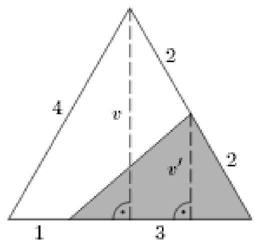


Obrázek 10.3 - Vyhodnocení příkladu 2 - studenti

Třetí příklad

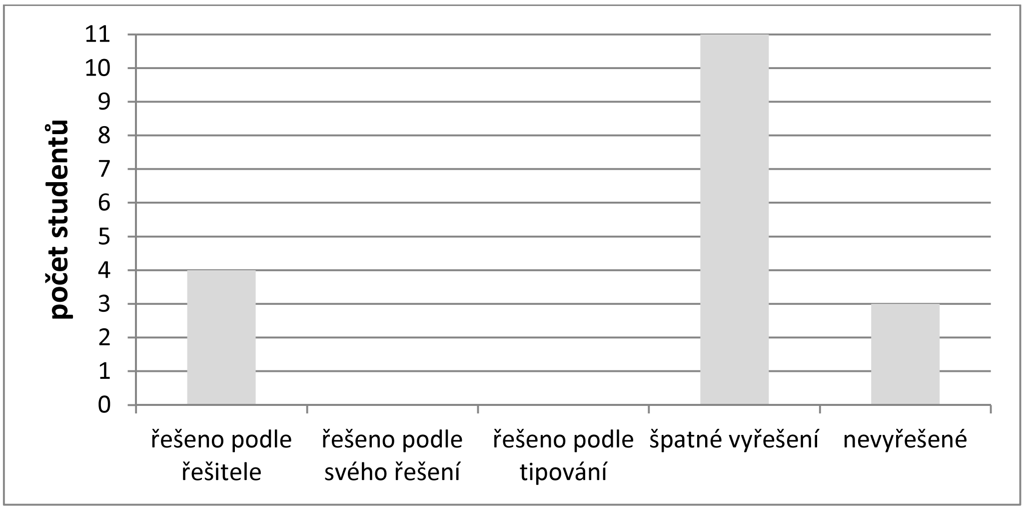
Řešení podle zadavatelů:

Označme v, jako výšku daného trojúhelníka.



Platí: $v = 2\sqrt{3}\,cm$, *tedy obsah rovnostranného trojúhelníku je* $S = 4\sqrt{3}\,cm^2$. *Vzhledem k tomu, že základna tmavého trojúhelníku má délku* $\frac{3}{4}$ *délky základny velkého trojúhelníku a výška* v' *tmavého trojúhelníku je polovinou výšky velkého trojúhelníku, tvoří obsah tmavého trojúhelníku* $\frac{3}{8}$ *obsahu celého trojúhelníku, tj.37, 5 %. Obsah tmavého trojúhelníku* $\frac{3}{8}4\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}cm^2$.

Příklad vyřešili 4 studenti (1 vyřešil část příkladu), 11 zodpovědělo špatně a 3 nezodpověděli.



Obrázek 10.4 - Vyhodnocení příkladu 3 - studenti

Příklad 4

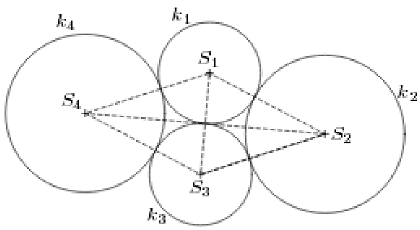
Řešení podle zadavatelů:

Na obrázku je znázorněno jediné možné uspořádání kružnic, které vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Protože se kružnice dotýkají, jsou délky stran čtyřúhelníku $S_1S_2S_3S_4$ *rovny součtům poloměrům příslušných kružnic. Protože je čtyřúhelník kosočtvercem, jsou všechny jeho strany shodné. Tedy*

$$s = r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_4 = r_4 + r_1,$$

kde r_1, r_2, r_3, r_4 *jsou velikosti poloměrů odpovídajících kružnic a* s *je velikost strany kosočtverce. Odtud vyplývá, že protilehlé kružnice jsou navzájem shodné, tedy* $r_1 = r_3$ *a* $r_2 = r_4$. *Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí. Proto jsou trojúhelníky vymezené stranami a úhlopříčkami kosočtverce pravoúhlé a navzájem shodné.*



Odvěsny mají podle zadání velikosti $r_1 = r_3 = 5\ cm$ *a* $\frac{1}{2}|S_2S_4| = 12\ cm$. *Velikost přepony, tj. velikost strany kosočtverce, je podle Pythagorovy věty rovna*

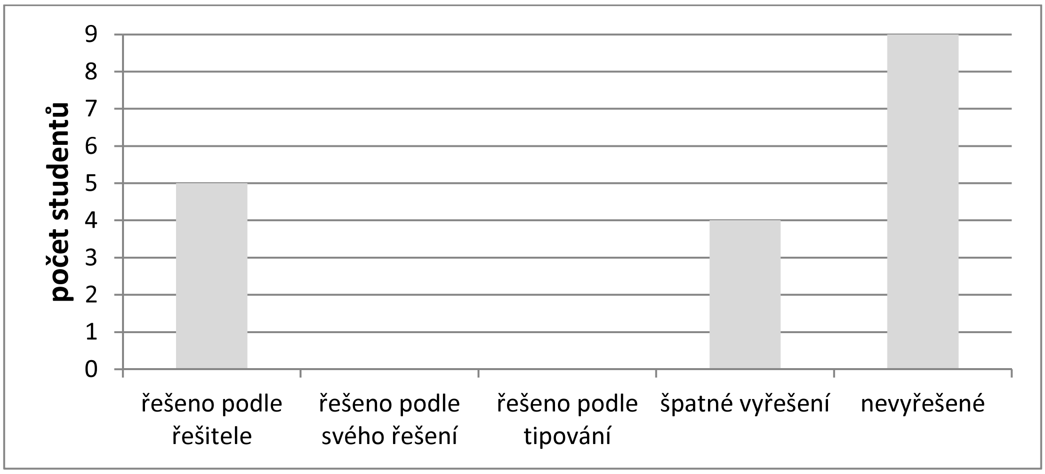
$$s = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\ cm.$$

Odtud vyplývá, že

$$r_2 = r_4 = 13 - 5 = 8\ cm.$$

Poloměry kružnic k_1 *a* k_3 *jsou 5 cm, poloměry* k_2 *a* k_4 *jsou 8 cm.*

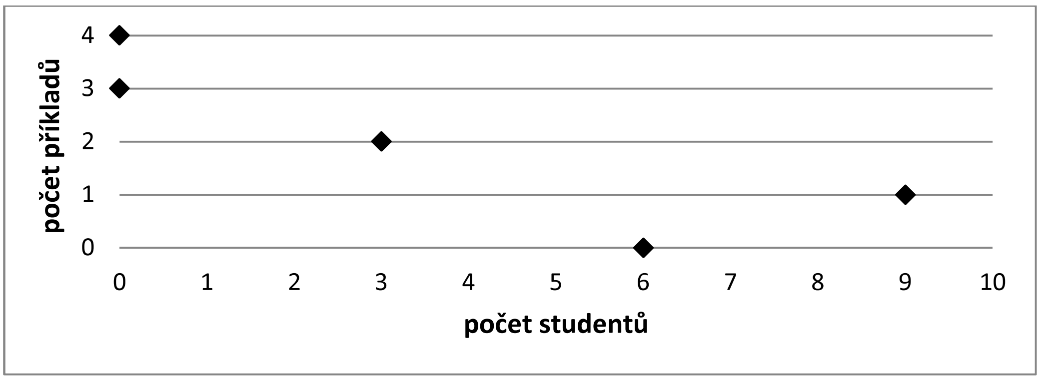
Příklad vyřešilo 5 studentů, 4 odpověděli špatně a 9 nezodpovědělo vůbec.



Obrázek 10.5 - Vyhodnocení příkladu 4 - studenti

Celkové vyhodnocení příkladů

Žádnému studentovi se nepodařilo vypočítat všechny příklady nebo aspoň tři příklady, dva příklady vyřešili 3 studenti, alespoň jeden příklad 9 studentů a žádný příklad nevypočítalo 6 studentů.

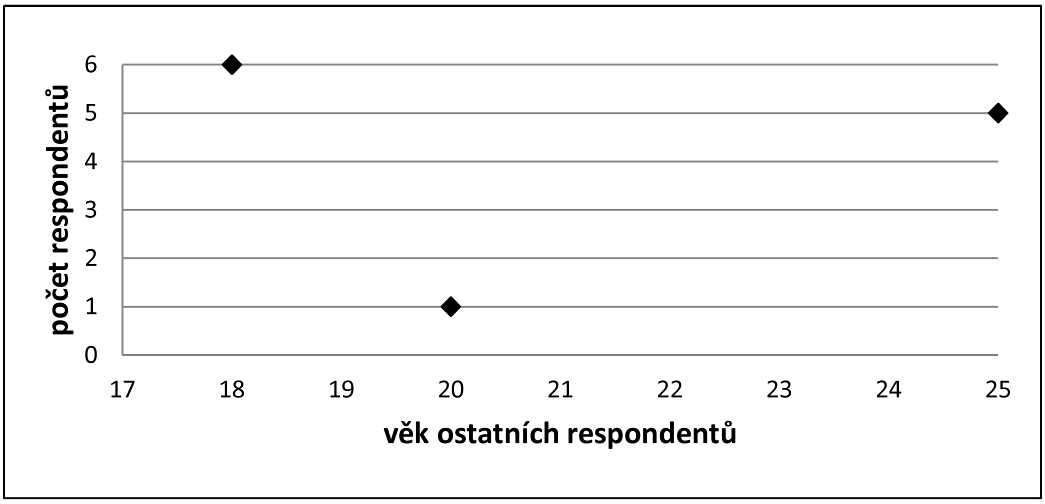


Obrázek 10.6 - Vyhodnocení úspěšnosti řešení všech příkladů - studenti

10.2.2 Ostatní řešitelé

Do druhé skupiny jsem zařadila ostatní řešitele. Jednalo se o studenty gymnázia a moje spolužáky z oboru matematiky. Těmto řešitelům jsem testy nepředávala osobně, ani jsem neměla možnost je ohlídat, takže výsledky mohou být více odlišné od první skupiny.

Druhou skupinu tvořilo 12 respondentů, ve složení 5 chlapců a 7 dívek ve věku 18 - 25 let.



Obrázek 10.7 - Věk ostatních respondentů

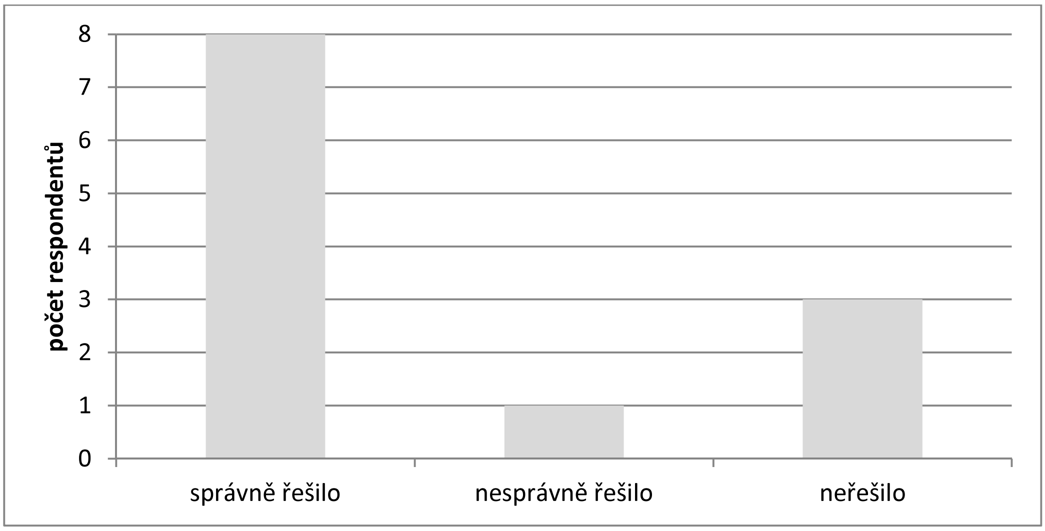
Proto jsem hodnocení těchto výsledků rozdělila jen na:

- Správně vyřešený příklad
- Špatné řešení příkladu
- Nevyřešený příklad

Hodnocení probíhalo naprosto stejně jako u první skupiny, to znamená, nejprve jsem vyhodnotila každý příklad zvlášť a nakonec provedla celkové řešení příkladů.

První příklad

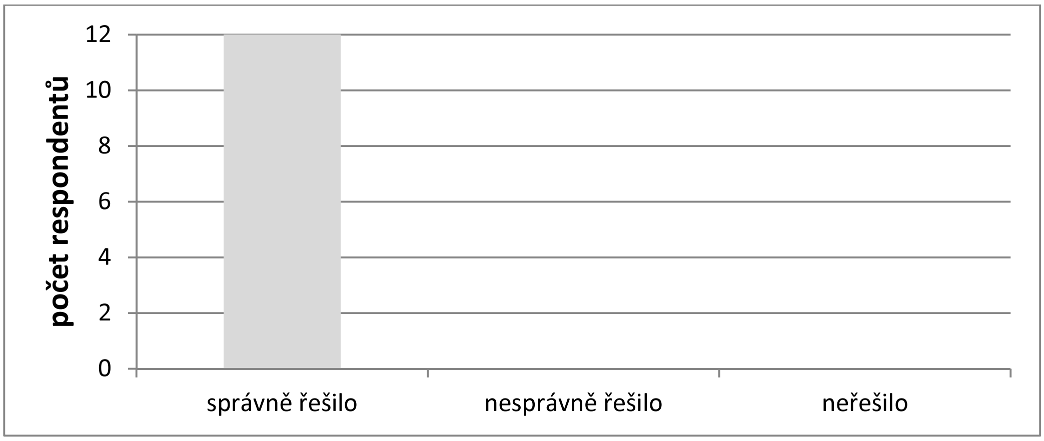
První příklad vyřešilo 8 respondentů, ale 5 z nich přišlo jen na 1 řešení, jeden vyřešil špatně a 3 respondenti neřešili.



Obrázek 10.8 - Vyhodnocení příkladu 1 - ostatní

Druhý příklad

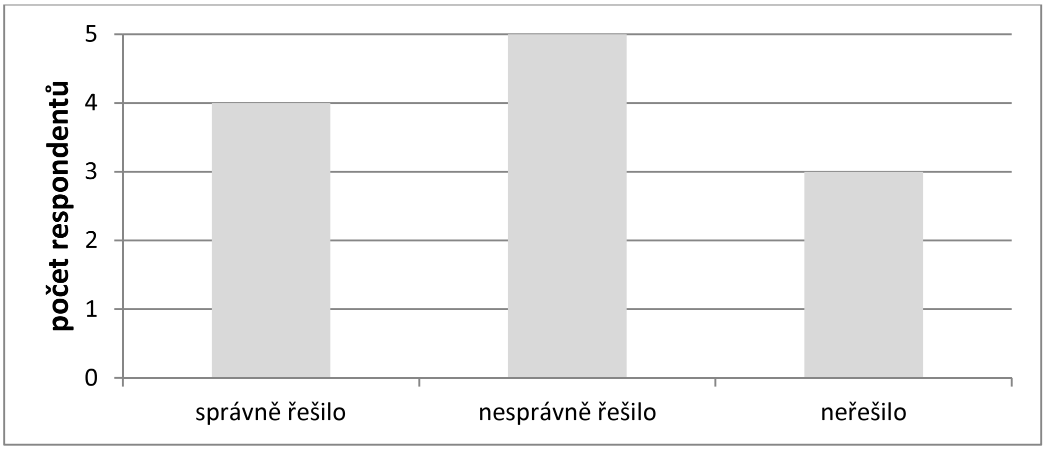
Druhý příklad vyřešilo všech 12 respondentů.



Obrázek 10.9 - Vyhodnocení příkladu 2 - ostatní

Třetí příklad

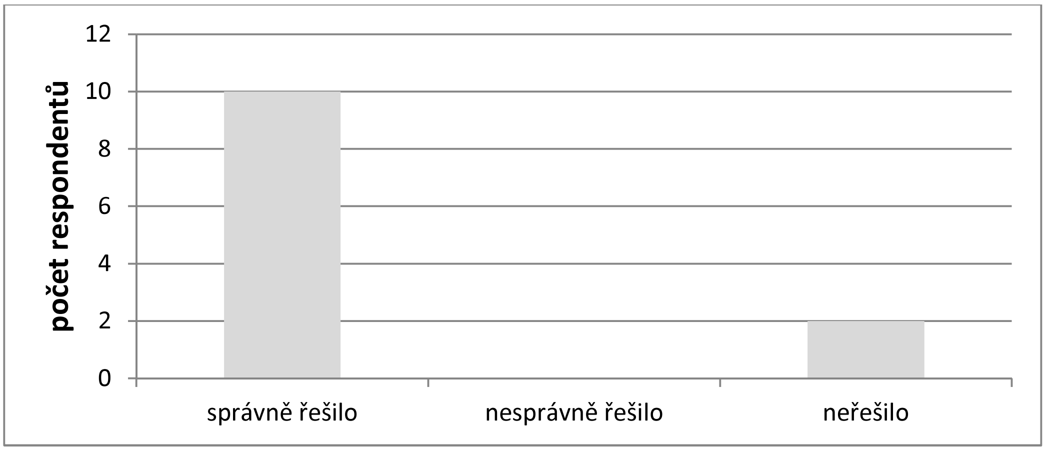
Třetí příklad správně vyřešili 4 respondenti, nesprávně vyřešilo 5 respondentů a 3 neřešili.



Obrázek 10.10 - Vyhodnocení příkladu 3 - ostatní

Čtvrtý příklad

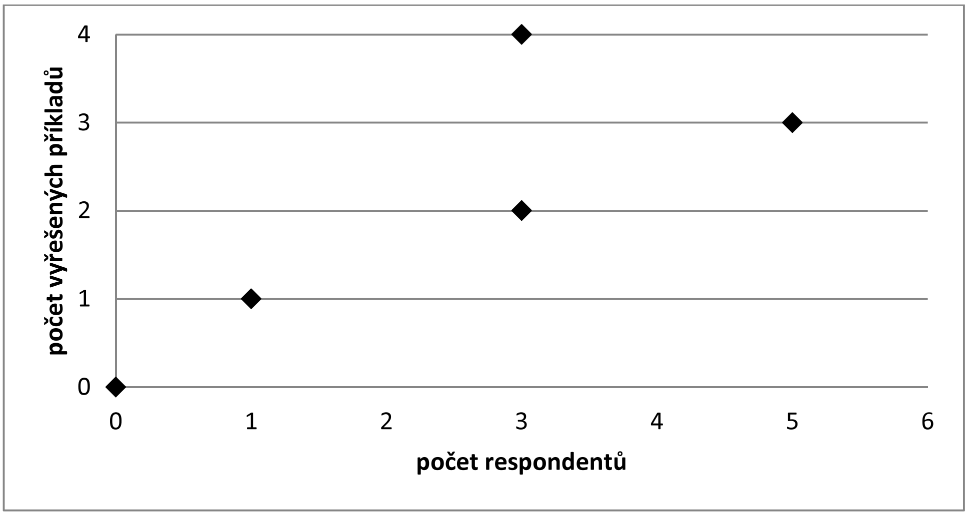
Čtvrtý příklad vyřešilo 10 respondentů a nevyřešili jej 2 respondenti.



Obrázek 10.11 - Vyhodnocení příkladu 4 - ostatní

Celkové vyhodnocení příkladů

Všem respondentům se podařilo vyřešit alespoň jeden příklad. Třem respondentům se podařilo vypočítat všechny příklady, tři příklady vyřešilo 5 respondentů, dva příklady vyřešili 3 respondenti a 1 příklad vyřešil jeden respondent.



Obrázek 10.12 - Vyhodnocení úspěšnosti řešení všech příkladů - ostatní

10.3 Dotazník

Při vyhodnocování výzkumu mě výsledky velmi překvapily. Příklady jsem volila nenáročné a na počítání snadnější. Předpokládala jsem tedy, že výsledky budou mnohem lepší. Myslím, že velkou roli sehrála neochota některých respondentů spolupracovat. Nenechal jsem se tím odradit a po vyhodnocení testů se odhodlala ještě k dalšímu průzkumu, ve kterém jsem vytvořila dotazník. Dotazník obsahuje 2 otázky:

1. **Co je podle Vás hlavní příčinou špatných výsledků při řešení matematických úloh?**

Otázka obsahovala výběr odpovědí z 6 nabízených. Šestá možnost byla volba jiná a dotazovaný doplnil svoji odpověď:

- Nezájem studentů o daný předmět
- Špatně zvládnuté matematické návyky
- Nedostatek hodinové dotace na školách
- Schopnost studenta porozumět textu
- Jiná

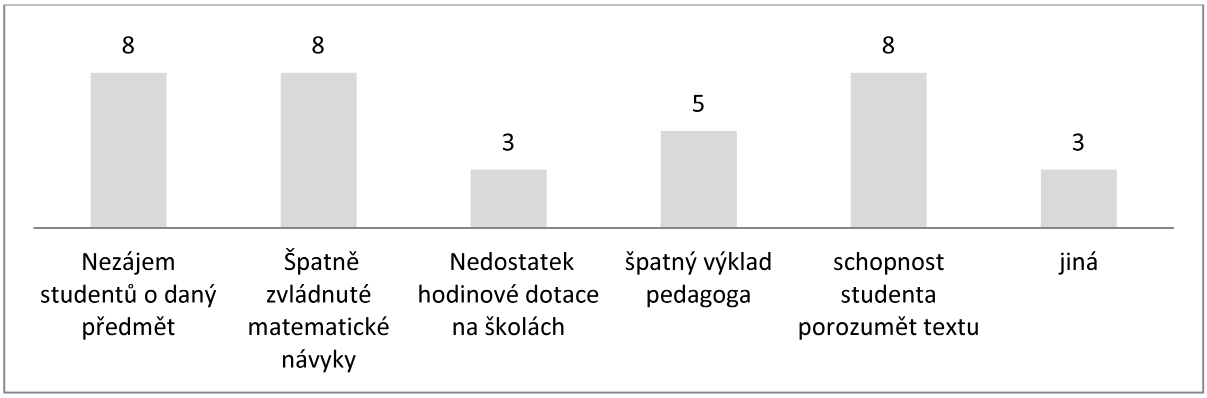
2. **Jak byste dané nedostatky při řešení úloh napravil/-a, jaké opatření byste provedl/-a za účelem zlepšení matematických dovedností?**

Tato otázka byla položena jako otevřená a každý dotazovaný napsal odpověď.

Dotazník vyplnilo 18 dotázaných. Jednalo se o část respondentů, kteří vyplňovali test, ale také mě zajímal názor nepedagogických pracovníků a studentů matematiky, proto jsem dotazník nechala přístupný i ostatním lidem. Ale i přes prosby o vyplnění se bohužel našlo jen malá hrstka vyplňujících. K studentům gymnázia se tento dotazník nedostal z důvodu špatné komunikace.

Vyhodnocení otázek

Z grafu vidíme, jak dotazovaní odpovídali na první otázku.



Obrázek 10.13 - Odpovědi na 1. otázku dotazníku

Na první otázku tři respondenti odpověděli jiná a zde jsou jejich odpovědi. Podle těchto dotázaných je hlavní příčinou špatných výsledků při řešení matematických úloh:

1) *neschopnost a nechuť studentů se soustředit a "tvrdě" pracovat/studovat*
2) *neschopnost propojit si učivo, velký počet žáků ve třídách*
3) *Malá úroveň logického myšlení*

Druhá otázka byla otevřená a níže jsou doloženy odpovědi dotazovaných:

1) *Řada žáků si vůbec nepropojuje učivo. Učí se o zlomcích a až dojdou k výrazům, připadá jim, že se učí úplně něco jiného. Je určitě na místě žákům ukazovat, že učivo na sebe navazuje a pořád se proplétá. Objevují se problémy s pochopením zadání. To se dá ale zvládnout pouze nacvičením na více příkladech. Myslím, že spousta učitelů i díky dotaci hodin a tím že nestíhají, tyto úlohy raději přeskočí a nebo žákům úlohy již před řeší. Dalším problémem bývá velký počet žáků ve třídách. Když se vám objeví ve třídě velmi odlišní žáci, třeba moc chytří a pak žáci bez matematického talentu, je problém věnovat se všem když jste ve skupině 30 žáků, než když jich ve třídě máte jen 18.*
2) *vhodná motivace, přístup učitele v hodinách matematiky, rozhovor s rodiči*
3) *Najít příklady podobného charakteru a vice počítat slovní úlohy.*
4) *výměna učitele - více praktických příkladů ze života, aby si danou problematiku mohl student snadněji představit - pomůcky při výkladu problematiky - modely, prezentace, animace aj.*
5) *více hodin matematiky a více procvičování slovních úloh*
6) *Více hodin matematiky na základní škole, větší důraz na zvládnutí základních dovedností, na středních školách snaha, aby alespoň základní principy a využití dané látky pochopili opravdu všichni*
7) *Zaměřit výuku na školách na zlepšení matematické a čtenářské gramotnosti*

8) *Zvýšit počet hodin matematiky, především na učilištích a odborných školách.*
9) *Potřeba je změnit myšlení společnosti, která chce všechno mít hned a snadno*
10) *Je nutné žáky zaujmout a motivovat, použít zajímavé formy výuky ke zlepšení matematických dovedností, prakticky interpretovat probírané učivo, využívat multimediální techniku a rozvíjet u žáků zejména kompetenci k učení a k řešení problému.*
11) *Speciální semináře pro řešitele, ve kterých učitel spolupracuje i s pracovníky univerzit.*
12) *Myslím si, že vše začíná přístupem žáků k matematice, většina jich matiku nemá moc rádo a myslím si, že to vzniká s ohledem na přístup učitele již v brzkém věku. Pak se s tím nese i jeho nezájem a tím špatně zvládá návyky. Chtělo by to změnit přístup a zaujmout žáky pro matematiku.*
13) *Kvalitní výklad učitele již od začátků (od nižších tříd), zadávání komplexních (slovních) úloh a trénování porozumění textu ne jen strohému řešení numerických příkladů jako podle šablony. Důsledné vyžadování využívání správných matemat. návyků (zápis, rozbor) Žáci mají mít doma sbírku, případně nějakou učebnici ze které si mohou počítat (vymlouvají se, že doma žádné sbírky nemají, tak nemůžou cvičit počítání)*
14) *Začínat vždy od nejjednoduššího příkladu, na kterém se dá ukázat vše. Neustále zdůrazňovat provázanost již s probraným učivem. Opakovat (i učivo z nižších ročníků), mnemotechnické pomůcky*
15) *Donutit žáky více počítat.*
16) *Více hodin matematiky*
17) *Zadávat úlohy častěji, řešit tyto úlohy společně se třídou. Postupně by si žáci pak osvojovali, jak postupovat při řešení obdobných příkladů.*
18) *Navýšení hodinové dotace matematiky, vysvětlení látky zajímavou formou např. pomocí her*

Závěr dotazníku

Ve většině odpovědí zaznívají názory, že studenti (žáci) nemají zájem o učivo, že na školách je malá hodinová dotace matematiky a například, že matematika by měla být vyučována zajímavým způsobem. Řešení by dotazovaní viděli v navýšení hodinových dotací matematiky, také poukazují na výklad učitele a s tím souvisí zajímavě pojaté vysvětlení látky tak, aby studenty (žáky) matematika bavila.

Největší problémy shledávám v malé hodinové dotaci, nepochopení látky a hlavně ve velkém počtu studentů (žáků) ve třídě. Když je ve třídě méně studentů (žáků), lépe se učiteli s nimi pracuje.

Závěr

Diplomová práce je zaměřena na různé typy matematických soutěží pro žáky základních a studenty středních škol.

V první části jsem provedla studium odborné literatury týkající se matematických úloh z didaktického hlediska. Seznámila jsem se s důležitými body, které je nutné dodržet při vytváření matematických úloh a jakým chybám je nutné se naopak vyvarovat.

Své znalosti jsem rozšířila o informace o dělení matematických úloh podle jejich vytvoření a podle možností jejich řešení.

Při literární studii jsem se nejvíce zaměřila na matematické úlohy a jejich využití v matematických soutěžích konaných nejen v České republice, ale i v jiných zemích.

Nejvýznamnější soutěží, které se řešitel může účastnit, je bezesporu Mezinárodní matematická olympiáda (MMO), které se účastní maximálně šest soutěžících z jedné země. Je jasné, že se jedná o velmi prestižní olympiádu, kde se opravdu setkávají jen ti nejnadanější matematikové za všech koutů světa, kteří museli absolvovat školská, okresní, krajská a ústřední kola olympiády.

Mezi soutěže, které jsou pořádané na našem území, patří Matematická olympiáda, která se specifikuje na nadané žáky. Soutěže, které se snaží nalákat širší publikum žáků a studentů na krásu, zajímavost a poučnost matematiky, jsou Matematický klokan, Pythagoriáda a matematické semináře. Tyto soutěže jsem ve své práci popsala a uvedla několik příkladů vyskytujících se v nich.

Praktickou část diplomové práce jsem věnovala vlastnímu řešení některých matematických úloh, které se vyskytly v různých letech Matematického klokana a Pythagoriády. Snahou bylo co nejlépe a nejsrozumitelněji prezentovat jednotlivé postupy k dosažení správných výsledků. Řešení různých druhů příkladů mě inspirovalo při tvorbě vlastních soutěžních matematických úloh, které by se daly použít v některých matematických soutěžích.

V poslední části své diplomové práci jsem se zabývala výzkumem a problematikou při počítání matematických příkladů. Vytvořila jsem jednoduchý a časově nenáročný test, který obsahoval 4 příklady z matematické olympiády pro žáky z 8. a 9. ročníků a nechala vypracovat několika respondenty ze středních a vysokých škol.

Na základě výsledků testů jsem se nakonec rozhodla ještě výzkum rozšířit o krátký dotazník, ve kterém se dotazující měli vyjádřit, co je hlavní příčinou špatných výsledků při řešení matematických příkladů, a jak by se tyto nedostatky daly napravit.

Z výsledků dotazníků jsem došla k závěrům, že dotazovaným nejvíce vadí malá hodinová dotace matematiky na školách, špatný přístup žáka nebo studenta k učení matematiky, ale také podání učiva učitelem, které nebývá prezentováno zábavnou nebo jinou zajímavou formou.

Seznam použité literatury

[1] KALHOUS, Z. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002, 448 s. ISBN 80-717-8253-X.

[2] KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1982, 242 s.- Květoň 1982

[3] ODVÁRKO, Oldřich, Jaroslav ŠEDIVÝ a Emil CALDA. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-042-0434-1. - Odvárko a spol 1990

[4] NOVÁK, B.: Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Olomouc, PdF, 2003.

[5] NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993. ISBN 80-706-7294-3. - Novák stopenová 1993

[6] MUSILOVÁ, Marcela. *Pedagogická diagnostika: cvičebnice*. 2. Olomouc, 2015, 56 s. - Musilová 2015

[7] *Algoritmus.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.programovanie.kromsat.sk/prog-b/s15.htm

[8] *Didaktické testy.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/pedagogika/dopl_texty/Didakticke%20testy.pdf

[9] *Didaktické testy.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.cermat.cz/didakticke-testy-1404034141.html

[10] *Vlastnosti didaktických testů.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://cvicebnice.ujep.cz/cvicebnice/FRVS1973F5d/data/Snimek36_text.html

[11] *Metodologie vytváření testu.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://fim.uhk.cz/oliva/tvorba_vedeni/REKAP-www/M1.pdf

[12] *Druhy didaktických testů.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://fim.uhk.cz/oliva/tvorba_vedeni/rekap-www/modul1/02-01-2.html

[13] *Zásady správné tvorby, použití a hodnocení didaktických testů v přípravě budoucích učitelů.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.pf.ujep.cz/obecna-didaktika/pdf/Didakticke_testy.pdf

[14] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3168-0. - CHRÁSKA, M. Didaktické testy. Praha: Paido, 1999.

[15] *Hry a soutěže v matematice na 1.stupni ZŠ.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/72156/pedf_m/Hry_a_souteze_v_matematice_na_1_stupni_ZS.pdf

[16] *Mezinárodní matematická olympiáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD_matematick%C3%A1_olympi%C3%A1da#Historie

[17] *History.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://imof.co/about-imo/history/

[18] *Inernational Mathematical Olympiad .* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.imo-official.org/organizers.aspx?column=number&order=desc

[19] *Mezinárodní matematická olympiáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.jcmf.cz/?q=cz/node/616

[20] *Mezinárodní matematická olympiáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.kdejinde.cz/cs/videogalerie/31.html
[21] *Zprávy.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/24/2405/mfi_2405_391_393.pdf
[22] *Olympiáda pro ZŠ.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly
[23] *Olympiáda pro SŠ.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly
[24] *Krajská komise MO-Olomouc.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.kag.upol.cz/mo/
[25] *Organizační řád Matematické olympiády.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/65913/organiza_n____d_matematick__olympi_dy_2014.doc
[26] *Matematický klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.gbn.cz/matematicky-klokan
[27] *Matematický klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematikahb.unas.cz/klokan.html
[28] *Matematický klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematika.webz.cz/ostatni/?s=klokan
[29] *Matematický klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.glouny.cz/klokan/
[30] *Přírodovědný klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.kag.upol.cz/prirodovednyklokan/info.html
[31] *Our History.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.mathkangaroo.org/mk/history.html
[32] *Matematický klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.suma.jcmf.cz/souteze/matematicky-klokan/
[33] *Běh s klokanem.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://www.jcmf.cz/?q=cz/node/1033
[34] *A story of „Kangaroo of Mathematics“.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.aksf.org/history.xhtml
[35] *Countries.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.aksf.org/countries.xhtml
[36] *Kangourou sans Frontières Board Members (2015).* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.aksf.org/board.xhtml
[37] *Informace o soutěži.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/info.php
[38] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Cvrček.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Cvrcek.pdf
[39] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Klokánek, Benjamín, Kadet.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Klokanek-Benjamin-Kadet.pdf

[40] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Junior a Student.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Junior-Student.pdf
[41] *Informace k soutěži Přírodovědný klokan.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.kag.upol.cz/prirodovednyklokan/info_pravidla.pdf
[42] *Pythagoriáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.talentovani.cz/pythagoriada
[43] *Pythagoriáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://znv.nidv.cz/talentcentrum/souteze/pythagoriada
[44] *Pythagoriáda.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.zstrhovystepanov.cz/word/2016/pp.pdf
[45] *Péče o matematické talenty v České republice.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://esfmoduly.upol.cz/texty/pece_o_m_tal.pdf
[46] *Vznik Pikomatu.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://pikomat.mff.cuni.cz/onas/historie
[47] *Úvodní informace.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://brkos.math.muni.cz/index.php?s=info
[48] *MathRace.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://brkos.math.muni.cz/mathrace/index.php
[49] *Pravidla.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://kokos.gmk.cz/o-kokosu/pravidla
[50] *Pravidla koma.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://kokos.gmk.cz/o-kokosu/koma-pravidla
[51] *Matematický korespondenční seminář.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/info/info.php
[52] *Náboj.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://math.naboj.org/rules.php
[53] *Korespondenční seminář a časopis MFF UK.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mam.mff.cuni.cz/co-je-MaM/uvod/
[54] *Matematický orienťák.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mks.gjkt.cz/matematicky-orientak/
[55] *Archív.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://pikomat.mff.cuni.cz/archiv
[56] *Tábory Pikomatu MFF UK.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor
[57] *Soustředění Pikomatu MFF UK.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://pikomat.mff.cuni.cz/soustredeni
[58] *Setkání Pikomatu.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://pikomat.mff.cuni.cz/setkani
[59] *Akce.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://kokos.gmk.cz/akce
[60] *65. ročník matematické olympiády* . [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2603411/z65i.pdf

[61] *Úlohy domácí části 1. kola 65. ročníku matematické olympiády pro žáky středních škol.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1760677/abc65i.pdf
[62] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie A.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2046298/a65i.pdf
[63] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie B.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2602803/b65i.pdf
[64] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie C.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2602804/c65i.pdf
[65] *Matematický klokan 2015.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf
[66] *Pythagoriáda 38.ročník.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.zshorakhk.cz/files/tinymce/matematika/souteze/14_15/Pythagoriada_2015_skolni_kola.pdf

Seznam obrázků

ANOTACE/ ANNOTATION

Jméno a příjmení:	Bc. Lenka Grygarová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2016

Název práce:	Matematické soutěže v pedagogické praxi
Název v angličtině:	Mathematical competitions in educational practice
Anotace práce:	Obsahem diplomové práce je řešení různých matematických soutěží a vytvoření příkladů, které jsou vhodné na použití do matematických soutěží
Klíčová slova:	Matematický klokan, Pythagoriáda, Matematická olympiáda, tvorba matematické úlohy
Anotace v angličtině:	The thesis contains a solution of various mathematical competitions and creating examples which are suitable for use in mathematical competitions
Klíčová slova v angličtině:	Math Kangaroo, Pythagoriada, Mathematical Olympiad, creating math problems
Přílohy vázané v práci:	9 stran
Rozsah práce:	127 stran
Jazyk práce:	Český jazyk

Příloha 1

Seznam zemí pořádajících MMO v letech 1959-2019

ročník	rok	země	město	datum	počet zemí	soutěžící		
						všichni	muži	ženy
60	2019	United Kingdom						
59	2018	Romania						
58	2017	Brazil						
57	2016	Hong Kong	Hong Kong	6.7. - 16.7.				
56	2015	Thailand	Chiang Mai	4.7. - 16.7.	104	577	525	52
55	2014	South Africa	Cape Town	3.7. - 13.7.	101	560	504	56
54	2013	Colombia	Santa Marta	18.7. - 28.7.	97	527	475	52
53	2012	Argentina	Mar del Plata	4.7. - 16.7.	100	548	497	51
52	2011	Netherlands	Amsterdam	12.7. - 24.7.	101	564	507	57
51	2010	Kazakhstan	Astana	2.7. - 14.7.	97	523	470	47
50	2009	Germany	Bremen	10.7. - 22.7.	104	565	506	59
49	2008	Spain	Madrid	10.7. - 22.7.	97	535	480	55
48	2007	Vietnam	Hanoi	19.7. - 31.7.	93	520	471	49
47	2006	Slovenia	Ljubljana	6.7. - 18.7.	90	498	460	38
46	2005	Mexico	Mérida	8.7. - 19.7.	91	513	470	43
45	2004	Greece	Athens	6.7. - 18.7.	85	486	351	37
44	2003	Japan	Tokyo	7.7. - 19.7.	82	457	331	29
43	2002	United Kingdom	Glasgow	19.7. - 30.7.	84	479	336	37
42	2001	United States of	Washington	1.7. - 14.7.	83	473	440	33
41	2000	Republic of Korea	Taejon	13.7. - 25.7.	82	461	336	31
40	1999	Romania	Bucharest	10.7. - 22.7.	81	450	316	37
39	1998	Taiwan	Taipeh	10.7. - 21.7.	76	419	297	30
38	1997	Argentina	Mar del Plata	18.7. - 31.7.	82	460	315	28
37	1996	India	Mumbai	5.7. - 17.7.	75	424	309	25
36	1995	Canada	Toronto	13.7. - 25.7.	73	412	300	26
35	1994	Hong Kong	Hong Kong	8.7. - 20.7.	69	385	280	25
34	1993	Turkey	Istanbul	13.7. - 24.7.	73	413	293	33
33	1992	Russian Federation	Moscow	10.7. - 21.7.	56	322	271	14
32	1991	Sweden	Sigtuna	12.7. - 23.7.	56	318	271	17
31	1990	People's Republic	Beijing	8.7. - 19.7.	54	308	237	12
30	1989	Germany	Braunschweig	13.7. - 24.7.	50	291	211	13
29	1988	Australia	Canberra	9.7. - 21.7.	49	268	251	17
28	1987	Cuba	Havanna	5.7. - 16.7.	42	237	160	7
27	1986	Poland	Warsaw	4.7. - 15.7.	37	210	145	7
26	1985	Finland	Joutsa	29.6. - 11.7.	38	209	151	7

25	**1984**	**Czechoslovakia**	**Prague**	**29.6. - 10.7.**	**34**	**192**	**132**	**3**
24	1983	France	Paris	1.7. - 12.7.	32	186	178	8
23	1982	Hungary	Budapest	5.7. - 14.7.	30	119	87	3
22	1981	United States of	Washington	8.7. - 20.7.	27	185	155	9
21	1979	United Kingdom	London	30.6. - 9.7.	23	166	116	1
20	1978	Romania	Bucharest	3.7. - 10.7.	17	132	112	3
19	1977	Yugoslavia	Belgrade	1.7. - 13.7.	21	155	132	2
18	1976	Austria	Lienz	7.7. - 21.7.	18	139	117	4
17	1975	Bulgaria	Burgas	3.7. - 16.7.	17	135	99	2
16	1974	German Democratic	Erfurt	4.7. - 17.7.	18	140	124	2
15	1973	Union of Soviet	Moscow	5.7. - 16.7.	16	125	115	2
14	1972	Poland	Toruń	5.7. - 17.7.	14	107	90	2
13	**1971**	**Czechoslovakia**	**Žilina**	**10.7. - 21.7.**	**15**	**115**	**89**	**3**
12	1970	Hungary	Keszthely	8.7. - 22.7.	14	112	94	5
11	1969	Romania	Bucharest	5.7. - 20.7.	14	112	95	6
10	1968	Union of Soviet	Moscow	5.7. - 18.7.	12	96	88	8
9	1967	Yugoslavia	Cetinje	2.7. - 13.7.	13	99	82	1
8	1966	Bulgaria	Sofia	1.7. - 14.7.	9	72	59	1
7	1965	German Democratic	Berlin	3.7. - 13.7.	10	80	63	9
6	1964	Union of Soviet	Moscow	30.6. - 10.7.	9	72	54	4
5	1963	Poland	Wrocław	5.7. - 13.7.	8	64	53	2
4	**1962**	**Czechoslovakia**	**České**	**7.7. - 15.7.**	**7**	**56**	**48**	**4**
3	1961	Hungary	Veszprém	6.7. - 16.7.	6	48	34	5
2	1960	Romania	Sinaia	18.7. - 26.7.	5	39	32	1
1	1959	Romania	Braşov	21.7. - 31.7.	7	52	41	6

Příloha 2

Seznam účastníku v MMO v letech 1959-2015

rok	soutěžící	bodů za příklad						celkem	pořadí	cena
		1	2	3	4	5	6			
2015	Vojtěch Dvořák	7	1	0	0	0	0	8	394	čestné uznání
2015	Matěj Konečný	7	1	0	2	1	0	11	322	čestné uznání
2015	Marian Poljak	6	0	0	7	1	0	14	257	bronzová medaile
2015	Jan Soukup	7	0	0	1	1	0	9	365	čestné uznání
2015	Radovan Švarc	4	1	0	7	3	0	15	217	bronzová medaile
2015	Pavel Turek	7	2	0	7	1	0	17	160	bronzová medaile
2014	Filip Bialas	7	7	0	7	0	0	21	163	bronzová medaile
2014	Martin Hora	7	4	0	7	0	0	18	238	bronzová medaile
2014	Viktor Němeček	3	4	0	7	7	0	21	163	bronzová medaile
2014	Tomáš Novotný	6	7	0	7	4	0	24	102	stříbrná medaile
2014	Radovan Švarc	7	6	0	7	0	0	20	200	bronzová medaile
2014	Pavel Turek	7	6	0	7	0	0	20	200	bronzová medaile
2013	Michal Buráň	7	0	0	7	6	0	20	180	bronzová medaile
2013	David Hruška	1	0	0	7	0	0	8	355	čestné uznání
2013	Mark Karpilovskij	7	3	0	7	1	0	18	196	bronzová medaile
2013	Štěpán Šimsa	7	7	3	7	7	0	31	34	zlatá medaile
2013	Radovan Švarc	6	4	0	7	0	0	17	211	bronzová medaile
2013	Josef Svoboda	1	6	0	7	0	0	14	279	čestné uznání
2012	Michal Buráň	7	0	0	3	0	0	10	351	čestné uznání
2012	Michal Kopf	7	0	0	1	0	0	8	399	čestné uznání
2012	Anh Dung Le	7	7	0	6	3	0	23	85	stříbrná medaile
2012	Jan Stopka	7	3	0	2	0	0	12	303	čestné uznání
2012	Josef Svoboda	5	7	0	2	3	0	17	183	bronzová medaile
2012	Martin Töpfer	7	0	0	3	0	0	10	351	čestné uznání
2011	Michael Bílý	7	1	0	6	4	0	18	202	bronzová medaile
2011	Miroslav Koblížek	7	0	0	7	1	0	15	282	čestné uznání
2011	Anh Dung Le	5	0	7	7	4	0	23	83	stříbrná medaile
2011	Daniel Šafka	7	0	0	1	0	0	8	403	čestné uznání
2011	Štěpán Šimsa	7	0	0	7	7	0	21	145	bronzová medaile
2011	Tomáš Zeman	7	0	0	7	2	0	16	253	bronzová medaile
2010	David Klaška	7	1	0	3	7	0	18	175	bronzová medaile
2010	Radek Marciňa	7	0	0	7	0	0	14	267	čestné uznání
2010	Miroslav Olšák	7	2	0	2	7	0	18	175	bronzová medaile
2010	Petr Ryšavý	6	0	0	0	0	0	6	446	
2010	Jáchym Sýkora	7	0	0	7	0	0	14	267	čestné uznání
2010	Tomáš Zeman	7	0	0	7	0	0	14	267	čestné uznání
2009	David Klaška	7	1	0	0	4	0	12	296	čestné uznání
2009	Jan Matějka	6	6	1	0	2	0	15	249	bronzová medaile
2009	Josef Ondřej	7	3	0	0	0	0	10	335	čestné uznání
2009	Samuel Říha	7	3	0	1	0	0	11	314	čestné uznání
2009	Josef Tkadlec	7	7	1	7	3	0	25	117	stříbrná medaile
2009	Jan Vaňhara	6	0	1	0	7	0	14	264	bronzová medaile
2008	Tomáš Hřebejk	1	0	0	4	0	0	5	424	
2008	Miroslav Klimoš	7	7	0	7	7	0	28	64	stříbrná medaile
2008	Jan Matějka	7	2	0	4	1	0	14	268	čestné uznání
2008	Samuel Říha	7	0	0	1	0	0	8	368	čestné uznání
2008	Josef Tkadlec	7	1	0	6	1	1	16	212	bronzová medaile
2008	Jakub Töpfer	7	0	0	7	0	0	14	268	čestné uznání
2007	Miroslav Klimoš	7	0	0	6	2	0	15	197	bronzová medaile
2007	Zbyněk Konečný	7	0	0	7	2	0	16	171	bronzová medaile
2007	Jiří Řihák	7	0	0	7	0	0	14	226	bronzová medaile
2007	Michal Rolínek	7	0	0	6	1	0	14	226	bronzová medaile
2007	Lenka Slavíková	6	0	0	7	2	0	15	197	bronzová medaile

2007	Hana Šormová	0	1	0	7	0	0	8	365	čestné uznání
2006	Jaroslav Hančl	7	1	0	7	0	0	15	189	bronzová medaile
2006	Zbyněk Konečný	7	1	0	7	1	0	16	161	bronzová medaile
2006	Jakub Opršal	7	1	0	2	0	0	10	335	čestné uznání
2006	Vojtěch Říha	7	1	0	3	0	0	11	319	čestné uznání
2006	Pavel Šalom	7	1	0	7	1	0	16	161	bronzová medaile
2006	Jan Uhlík	7	0	1	1	0	0	9	364	čestné uznání
2005	Jaroslav Hančl	2	0	0	1	2	0	5	341	
2005	Pavel Kocourek	7	7	0	7	7	0	28	72	stříbrná medaile
2005	František Konopecký	7	7	7	7	7	1	36	29	zlatá medaile
2005	Jaromír Kuben	7	7	0	7	7	2	30	57	stříbrná medaile
2005	Jakub Opršal	7	7	0	2	2	0	18	156	bronzová medaile
2005	Marek Pechal	7	7	0	1	7	0	22	122	bronzová medaile
2004	Vítězslav Kala	6	6	0	6	3	1	22	143	bronzová medaile
2004	Alexandr Kazda	0	5	0	3	0	0	8	351	
2004	František Konopecký	7	2	1	7	7	2	26	93	stříbrná medaile
2004	Jaromír Kuben	6	3	0	7	7	0	23	124	bronzová medaile
2004	Jan Moláček	7	3	0	7	6	1	24	113	stříbrná medaile
2004	Marek Pechal	2	2	0	0	2	0	6	382	
2003	Pavel Čížek	7	1	0	0	1	0	9	269	čestné uznání
2003	Vítězslav Kala	7	0	0	3	1	0	11	231	čestné uznání
2003	Pavel Kocourek	0	7	0	7	0	0	14	179	bronzová medaile
2003	Marek Krčál	7	0	0	2	0	0	9	269	čestné uznání
2003	Jaromír Kuben	7	1	0	7	1	0	16	138	bronzová medaile
2003	Jan Moláček	5	7	0	7	1	0	20	93	stříbrná medaile
2002	Josef Cibulka	6	6	0	3	7	1	23	99	stříbrná medaile
2002	Jaroslav Hájek	7	7	1	7	2	0	24	86	stříbrná medaile
2002	Vítězslav Kala	6	0	0	6	1	0	13	233	
2002	Jan Moláček	7	7	0	4	2	0	20	145	bronzová medaile
2002	Tomáš Protivínský	7	0	0	7	2	0	16	191	bronzová medaile
2002	Martin Tancer	3	7	1	7	1	0	19	160	bronzová medaile
2001	Jaroslav Hájek	7	0	0	3	0	0	10	243	čestné uznání
2001	Jan Herman	2	0	0	2	1	0	5	327	
2001	Jan Kynčl	7	0	0	2	7	0	16	148	bronzová medaile
2001	Tomáš Protivínský	0	7	0	1	2	0	10	243	čestné uznání
2001	Ondřej Suchý	0	0	0	0	2	0	2	398	
2001	Martin Tancer	3	0	7	2	2	0	14	181	bronzová medaile
2000	Jaroslav Hájek	0	0	0	2	0	0	2	416	
2000	Jan Herman	7	2	0	2	0	0	11	213	bronzová medaile
2000	Jan Houštěk	7	2	1	7	4	0	21	100	stříbrná medaile
2000	Jan Kynčl	7	1	4	2	0	2	16	149	bronzová medaile
2000	Rudolf Stolař	0	1	0	3	0	0	4	368	
2000	Ondřej Suchý	7	0	0	2	0	2	11	213	bronzová medaile
1999	Luboš Dostál	1	1	2	4	0	1	9	270	
1999	Zdeněk Dvořák	3	0	0	4	0	4	11	227	
1999	David Holec	1	0	1	2	1	0	5	371	
1999	Pavel Moravec	2	0	1	3	0	0	6	344	
1999	Martin Viščor	7	1	0	1	1	0	10	248	čestné uznání
1999	Lukáš Vokřínek	6	0	4	2	1	1	14	159	bronzová medaile
1998	Libor Barto	0	7	6	6	7	0	26	73	stříbrná medaile
1998	Tomáš Hanžl	3	0	7	7	0	3	20	134	bronzová medaile
1998	Pavel Podbrdský	7	7	7	7	0	1	29	49	stříbrná medaile
1998	Jan Šťovíček	2	7	2	6	2	0	19	145	bronzová medaile
1998	Martin Viščor	7	0	1	0	7	0	15	183	bronzová medaile
1998	Lukáš Vokřínek	4	7	1	7	7	0	26	73	stříbrná medaile
1997	Libor Barto	5	7	7	7	4	0	30	60	stříbrná medaile
1997	Pavel Podbrdský	7	7	7	7	7	0	35	32	zlatá medaile
1997	Jan Spěvák	1	1	0	3	4	0	9	299	
1997	Lukáš Vokřínek	4	0	0	7	7	0	18	177	bronzová medaile
1997	Jan Vybíral	7	7	0	6	7	0	27	86	stříbrná medaile
1997	Petr Zíma	1	7	1	7	4	0	20	155	bronzová medaile

1996	Tomáš Bárta	7	1	6	0	0	7	21	82	stříbrná medaile
1996	Michal Beneš	7	1	6	0	0	7	21	82	stříbrná medaile
1996	Daniel Král'	4	2	1	0	0	1	8	236	
1996	David Opěla	4	1	7	0	0	6	18	111	bronzová medaile
1996	Robert Špalek	1	0	5	3	0	1	10	216	
1996	Jan Spěvák	2	1	1	1	0	0	5	290	
1995	Petr Kaňovský	7	7	7	7	0	2	30	82	stříbrná medaile
1995	Filip Krška	7	0	7	7	7	0	28	102	bronzová medaile
1995	Libor Mašíček	6	0	7	7	7	1	28	102	bronzová medaile
1995	Martin Nečesal	7	0	6	4	3	0	20	182	bronzová medaile
1995	David Pavlica	7	0	7	7	2	0	23	153	bronzová medaile
1995	Robert Šámal	6	0	7	5	7	0	25	137	bronzová medaile
1994	Petr Kaňovský	7	7	7	7	0	3	31	78	stříbrná medaile
1994	Filip Krška	0	7	6	2	3	0	18	193	čestné uznání
1994	Jan Mach	0	7	5	2	3	0	17	205	čestné uznání
1994	Libor Mašíček	0	7	7	7	4	0	25	126	bronzová medaile
1994	David Pavlica	0	7	7	7	2	5	28	102	bronzová medaile
1994	Robert Šámal	0	7	7	7	7	7	35	49	stříbrná medaile
1993	Michal Brodský	2	2	1	7	4	3	19	102	bronzová medaile
1993	Marcela Hlawiczková	1	7	0	0	7	0	15	143	bronzová medaile
1993	Ondřej Klíma	1	0	4	7	1	4	17	122	bronzová medaile
1993	Vít Novák	7	0	4	5	3	6	25	52	stříbrná medaile
1993	Robert Šámal	7	2	0	7	5	3	24	59	stříbrná medaile
1993	Jana Syrovátková	7	2	7	4	7	5	32	19	zlatá medaile
1992	Michal Kubeček	7	7	7	1	0	6	28	48	stříbrná medaile
1992	Luboš Motl	5	2	1	7	0	6	21	96	bronzová medaile
1992	Martin Niepel	7	3	1	5	0	6	22	88	bronzová medaile
1992	Pavel Růžička	5	0	1	2	7	4	19	113	bronzová medaile
1992	Daniel Štefankovič	5	4	0	0	0	4	13	171	
1992	Michal Stehlík	7	3	7	2	7	5	31	27	stříbrná medaile
1991	Viliam Búr	0	3	4	0	7	3	17	162	čestné uznání
1991	Štěpán Kasal	0	2	3	7	7	7	26	96	bronzová medaile
1991	Richard Kollár	7	7	3	7	7	2	33	58	stříbrná medaile
1991	Michal Konečný	7	7	5	7	4	7	37	34	stříbrná medaile
1991	Michal Kubeček	7	4	3	7	7	7	35	47	stříbrná medaile
1991	Michal Stehlík	7	7	3	7	7	7	38	21	stříbrná medaile
1990	Martin Dindoš	0	7	2	2	3	2	16	139	bronzová medaile
1990	Petr Hliněný	7	7	2	7	7	3	33	24	stříbrná medaile
1990	Štěpán Kasal	7	7	1	1	7	7	30	35	stříbrná medaile
1990	Michal Konečný	0	7	0	7	7	3	24	63	stříbrná medaile
1990	Pavol Severa	0	7	2	7	7	1	24	63	stříbrná medaile
1990	Ondrej Šuch	3	3	3	7	7	3	26	50	stříbrná medaile
1989	Tomáš Brodský	1	7	0	7	7	7	29	76	bronzová medaile
1989	Petr Čížek	7	7	7	7	7	7	42	1	zlatá medaile
1989	Petr Hliněný	7	7	1	7	7	7	36	28	stříbrná medaile
1989	Vladimír Komár	7	7	0	0	7	6	27	88	bronzová medaile
1989	Ondrej Šuch	7	7	7	7	7	6	41	11	zlatá medaile
1989	Marek Velešík	6	0	0	7	7	7	27	88	bronzová medaile
1988	Petr Čížek	7	7	7	1	5	1	28	38	stříbrná medaile
1988	Pavol Gvozdjak	4	7	7	3	0	0	21	73	bronzová medaile
1988	Petr Hliněný	6	0	1	2	1	0	10	166	
1988	Stanislav Krajči	7	7	2	2	3	0	21	73	bronzová medaile
1988	Ilja Martišovitš	7	7	7	0	7	0	28	38	stříbrná medaile
1988	Ondrej Šuch	4	0	7	1	0	0	12	140	čestné uznání
1987	Robert Babilon	7	3	7	7	1	7	32	59	stříbrná medaile
1987	Petr Čížek	7	7	7	7	7	0	35	45	stříbrná medaile
1987	Pavol Gvozdjak	7	7	7	7	7	3	38	36	stříbrná medaile
1987	Vladan Majerech	7	7	7	7	7	2	37	40	stříbrná medaile
1987	Marcel Polakovič	7	0	0	7	7	0	21	101	bronzová medaile
1987	Roman Soták	7	3	0	7	7	5	29	72	bronzová medaile
1986	Petr Hájek	0	7	0	7	7	7	28	45	stříbrná medaile

1986	Vladimír Kordula	2	7	0	7	7	7	30	30	stříbrná medaile
1986	Marcel Polakovič	7	7	0	7	6	0	27	51	stříbrná medaile
1986	Petr Šleich	2	0	0	3	6	7	18	94	bronzová medaile
1986	Roman Soták	3	7	0	0	6	5	21	73	bronzová medaile
1986	Adam Zach	0	7	1	7	3	7	25	60	bronzová medaile
1985	Radek Adamec	0	7	0	0	0	0	7	156	
1985	Petr Hájek	0	0	0	0	6	5	11	118	
1985	Adam Obdržálek	1	7	1	7	0	6	22	47	stříbrná medaile
1985	Marcel Polakovič	7	7	0	4	0	7	25	38	stříbrná medaile
1985	Jarmila Ranošová	7	3	0	3	7	3	23	44	stříbrná medaile
1985	Ján Šefčík	7	7	0	1	1	1	17	75	bronzová medaile
1984	Juraj Balász	7	7	0	7	4	1	26	47	stříbrná medaile
1984	Martin Grajcar	6	7	0	7	4	1	25	50	bronzová medaile
1984	Pavel Krtouš	0	1	0	6	3	1	11	123	
1984	Adam Obdržálek	3	1	0	4	1	0	9	139	
1984	Ján Šefčík	7	7	0	6	0	0	20	76	bronzová medaile
1984	Jiří Witzany	7	1	7	6	7	6	34	25	stříbrná medaile
1983	Vladimír Dančík	7	7	4	7	0	0	25	37	bronzová medaile
1983	Xaver Gubáš	3	2	4	0	7	0	16	83	bronzová medaile
1983	Igor Kříž	7	7	7	7	7	1	36	10	stříbrná medaile
1983	Marián Neamţu	1	2	0	7	0	0	10	111	
1983	Jiří Sgall	7	6	7	7	7	4	38	7	zlatá medaile
1983	Jiří Witzany	3	0	7	7	0	0	17	78	bronzová medaile
1982	Petr Couf	7	0	2	7	6	7	29	31	bronzová medaile
1982	Miroslav Engliš	7	0	7	0	7	0	21	59	bronzová medaile
1982	Igor Kříž	7	1	7	7	7	2	31	24	stříbrná medaile
1982	Jiří Sgall	6	0	7	7	7	7	34	16	stříbrná medaile
1981	Jozef Bednárik	7	7	7	7	3	7	38	43	stříbrná medaile
1981	Petr Couf	7	7	3	7	7	7	38	43	stříbrná medaile
1981	Igor Kříž	7	7	7	6	6	7	40	37	stříbrná medaile
1981	Jan Nekovář	7	7	7	7	7	7	42	1	zlatá medaile
1981	Jiří Sgall	0	7	7	7	5	6	32	79	bronzová medaile
1979	Miroslav Chlebík	6	0	6	1	5	2	20	77	bronzová medaile
1979	Jaroslav Hančl	1	0	0	6	2	7	16	101	
1979	Jozef Jirásek	0	7	7	6	4	0	24	52	bronzová medaile
1979	Ladislav Kubini	0	0	6	6	1	4	17	93	
1979	Radan Kučera	0	7	7	1	1	7	23	57	bronzová medaile
1979	Jan Nekovář	6	7	7	6	7	7	40	1	zlatá medaile
1979	Otto Ritter	0	2	0	6	1	3	12	123	
1979	Josef Tkadlec	1	4	7	6	1	7	26	48	bronzová medaile
1978	Peter Filakovszký	3	6	2	5	6	0	22	56	bronzová medaile
1978	Zdeněk Kalousek	6	0	4	5	6	0	21	64	
1978	Jan Kratochvíl	6	7	7	5	6	1	32	10	stříbrná medaile
1978	Mirko Navara	2	5	1	5	6	1	20	78	
1978	Jan Nekovář	6	5	8	5	6	4	34	6	stříbrná medaile
1978	Ilja Turek	6	4	0	5	3	1	19	81	
1978	Zdeněk Vavřín	6	6	0	5	6	1	24	35	bronzová medaile
1978	Milan Veščičík	6	4	2	5	6	0	23	47	bronzová medaile
1977	Martin Čadek	5	6	0	6	2	0	19	65	bronzová medaile
1977	Zdeněk Kalousek	6	6	6	0	7	3	28	25	stříbrná medaile
1977	Jan Kratochvíl	6	1	6	1	1	1	16	78	
1977	Jiří Navrátil	6	0	7	6	6	8	33	14	stříbrná medaile
1977	Pavol Quittner	6	4	0	1	7	8	26	29	stříbrná medaile
1977	Peter Takáč	3	0	0	0	0	0	3	145	
1977	Josef Tkadlec	6	6	0	2	0	1	15	85	
1977	Ilja Turek	6	3	0	6	6	0	21	50	bronzová medaile
1976	Jan Bázler	1	0	0	3	0	1	5	124	
1976	Jiří Kolafa	0	1	3	3	0	7	14	83	
1976	Jan Kratochvíl	5	3	3	6	0	7	24	28	stříbrná medaile
1976	Jiří Navrátil	5	0	2	5	0	7	19	55	bronzová medaile
1976	Pavol Quittner	1	0	1	6	0	0	8	113	

1976	Miroslav Šedivý	5	0	2	1	7	7	22	38	bronzová medaile
1976	Peter Takáč	0	6	1	6	0	4	17	69	bronzová medaile
1976	Vladimír Technovský	5	1	1	0	0	0	7	115	
1975	Martin Baumann	6	0	7	4	0	1	18	83	
1975	Vlastimil Klíma	2	0	7	3	0	1	13	101	
1975	Jan Kratochvíl	6	7	1	0	0	2	16	92	
1975	Jan Malý	6	7	0	3	0	2	18	83	
1975	Jiří Navrátil	6	7	0	0	6	8	27	48	bronzová medaile
1975	Ján Slodička	6	7	0	0	6	1	20	73	
1975	Michael Valášek	6	5	7	0	6	6	30	34	bronzová medaile
1975	Josef Voldřich	6	7	1	2	2	2	20	73	
1974	Lubomír Balanda	5	4	0	6	1	0	16	99	
1974	Pavel Kindlmann	5	6	3	6	2	1	23	63	bronzová medaile
1974	Jiří Navrátil	5	6	0	2	5	0	18	88	
1974	Jozef Širáň	5	6	1	6	4	0	22	72	
1974	Jan Trlifaj	5	6	0	6	0	1	18	88	
1974	Michael Valášek	5	1	1	6	0	1	14	108	
1974	Alena Vencovská	5	4	1	6	5	8	29	35	bronzová medaile
1974	Josef Voldřich	5	6	0	6	0	1	18	88	
1973	Tomáš Chrz	3	5	8	4	1	0	21	43	bronzová medaile
1973	Pavel Ferst	1	6	8	1	6	7	29	15	stříbrná medaile
1973	Karel Horák	0	0	6	4	1	0	11	89	
1973	Pavel Kindlmann	2	0	7	6	6	0	21	43	bronzová medaile
1973	Miroslav Kmošek	6	0	8	3	6	0	23	34	bronzová medaile
1973	Jaromír Šimša	0	0	8	4	6	0	18	62	bronzová medaile
1973	Petr Slačálek	2	0	4	5	1	0	12	84	
1973	Imrich Vrťo	2	0	8	4	0	0	14	76	
1972	Jan Brychta	?	?	?	?	?	?	26	32	bronzová medaile
1972	Pavel Ferst	?	?	?	?	?	?	18	55	
1972	Jan Frynta	?	?	?	?	?	?	11	71	
1972	Karel Horák	?	?	?	?	?	?	10	76	
1972	Miroslav Kmošek	?	?	?	?	?	?	19	48	bronzová medaile
1972	Jaromír Šimša	?	?	?	?	?	?	20	45	bronzová medaile
1972	Petr Slačálek	?	?	?	?	?	?	5	89	
1972	Imrich Vrťo	?	?	?	?	?	?	21	42	bronzová medaile
1971	Jan Brychta	4	3	0	3	0	1	11	45	bronzová medaile
1971	Anton Černý	3	0	0	4	1	0	8	59	
1971	Jan Franců	3	1	0	5	0	0	9	54	
1971	Karel Horák	4	0	0	2	0	0	6	69	
1971	Helena Husová	2	1	0	0	1	0	4	82	
1971	Miroslav Kmošek	2	0	0	5	0	0	7	64	
1971	Štefan Sakáloš	2	0	0	6	0	0	8	59	
1971	Imrich Vrťo	1	0	0	0	1	0	2	100	
1970	Anton Černý	5	7	0	6	0	0	18	59	
1970	Miroslav Hradil	0	7	0	5	6	0	18	59	
1970	Helena Husová	1	7	0	4	4	5	21	44	bronzová medaile
1970	Pavel Pudlák	0	3	0	1	5	1	10	94	
1970	Štefan Sakáloš	5	7	0	4	6	0	22	41	bronzová medaile
1970	Rudolf Švarc	5	7	0	6	2	0	20	51	bronzová medaile
1970	Jiří Tůma	5	7	0	5	6	0	23	37	bronzová medaile
1970	Belo Zorkovský	5	3	0	5	0	0	13	80	
1969	Pavol Černek	2	4	2	3	2	0	13	80	
1969	Petr Hadrava	2	5	4	6	7	1	25	34	bronzová medaile
1969	Tomáš Mašek	5	7	7	1	7	1	28	25	bronzová medaile
1969	Štefan Sakáloš	0	7	6	1	0	0	14	77	
1969	Bohuslav Sivák	5	7	7	0	0	1	20	58	
1969	Rudolf Švarc	5	5	4	2	0	4	20	58	
1969	Jiří Vinárek	5	2	1	6	6	8	28	25	bronzová medaile
1969	Miloš Zahradník	0	5	4	4	6	3	22	46	
1968	Martin Bukovčan	3	4	1	0	0	8	16	79	
1968	Michal Kaukič	4	7	4	0	0	1	16	79	

1968	Tomáš Mašek	6	7	7	5	7	8	40	1	zlatá medaile
1968	Vladimír Müller	6	7	2	5	7	8	35	33	stříbrná medaile
1968	Libor Polák	5	7	1	5	7	8	33	43	stříbrná medaile
1968	Pavel Polcar	5	7	7	0	7	8	34	38	stříbrná medaile
1968	Bohuslav Sivák	6	7	7	5	7	8	40	1	zlatá medaile
1968	Jiří Vinárek	6	7	1	5	7	8	34	38	stříbrná medaile
1967	Radovan Gregor	3	7	8	3	2	6	29	26	bronzová medaile
1967	Jan Kastl	1	7	0	0	1	2	11	76	
1967	Petr Kůrka	3	0	0	5	0	8	16	65	
1967	Martin Macháček	1	4	0	5	1	2	13	70	
1967	Tomáš Mašek	5	7	0	3	1	8	24	40	bronzová medaile
1967	Pavel Polcar	5	0	8	3	7	4	27	33	bronzová medaile
1967	Bohuslav Sivák	5	5	8	4	5	3	30	24	stříbrná medaile
1967	Erich Wiszt	1	2	0	5	1	0	9	83	
1966	Miroslav Kosina	4	7	0	5	0	4	20	61	
1966	Petr Kůrka	0	7	4	5	7	8	31	39	bronzová medaile
1966	Peter Mederly	6	7	3	5	3	8	32	35	bronzová medaile
1966	Petr Němec	6	0	1	4	1	4	16	63	
1966	Jiří Rott	6	0	4	4	2	6	22	59	
1966	Bohuslav Sivák	6	7	5	5	7	8	38	14	stříbrná medaile
1966	Jiří Šmerk	6	7	2	4	2	8	29	43	
1966	Pavel Vejvoda	6	1	3	5	7	5	27	50	
1965	Jan Brodský	0	0	4	4	2	1	11	58	
1965	Jura Charvát	4	4	1	3	2	2	16	45	
1965	Tamara Marcisová	4	0	8	6	7	4	29	21	bronzová medaile
1965	Pavel Novotný	4	1	0	6	3	3	17	44	
1965	David Preiss	4	6	8	5	5	4	32	12	stříbrná medaile
1965	Miroslav Řezníček	4	1	8	6	1	0	20	37	bronzová medaile
1965	Bohuslav Sivák	4	5	0	6	6	1	22	32	bronzová medaile
1965	Milan Štědrý	4	0	0	1	7	0	12	54	
1964	?	5	1	5	0	2	0	13	68	
1964	?	6	0	0	0	2	6	14	66	
1964	?	4	0	6	0	2	6	18	58	
1964	?	7	0	5	0	1	6	19	57	
1964	Pavel Bureš	7	7	6	6	4	6	36	8	stříbrná medaile
1964	Tamara Marcisová	7	7	6	6	4	6	36	8	stříbrná medaile
1964	Jaroslav Zemánek	7	5	6	0	4	6	28	29	bronzová medaile
1964	Miloslav Znojil	6	0	5	6	7	6	30	17	bronzová medaile
1963	?	3	7	1	0	5	4	20	36	
1963	?	2	5	0	1	0	6	14	53	
1963	?	2	4	0	2	0	6	14	53	
1963	?	4	5	0	3	0	3	15	49	
1963	?	4	3	0	1	0	7	15	49	
1963	?	2	3	2	2	1	5	15	49	
1963	Josef Daneš	6	7	5	5	6	6	35	6	zlatá medaile
1963	Jaroslav Zemánek	5	5	5	0	1	7	23	26	bronzová medaile
1962	Josef Daneš	6	6	8	4	0	0	30	27	bronzová medaile
1962	Svatopluk Fučík	6	5	3	1	4	0	19	46	
1962	Peter Hatala	6	6	8	4	7	4	35	14	stříbrná medaile
1962	Jaroslav Ježek	6	6	8	5	4	4	33	17	bronzová medaile
1962	Marián Mešina	1	4	6	4	5	0	20	44	
1962	Jan Novotný	6	4	7	2	4	0	23	36	
1962	Karel Veselý	2	6	7	5	6	2	29	31	bronzová medaile
1962	Pavol Voda	5	5	8	5	0	0	23	36	
1961	?	?	?	?	?	?	?	21	28	čestné uznání
1961	?	?	?	?	?	?	?	24	22	čestné uznání
1961	?	?	?	?	?	?	?	25	21	čestné uznání
1961	?	?	?	?	?	?	?	12	43	
1961	?	?	?	?	?	?	?	13	40	
1961	?	?	?	?	?	?	?	15	34	
1961	?	?	?	?	?	?	?	16	32	

1961	Tomáš Jech	?	?	?	?	?	?	33	8	bronzová medaile
1960	?	?	?	?	?	?	?	22	25	
1960	?	?	?	?	?	?	?	24	23	
1960	Ladislav Baran	?	?	?	?	?	?	32	13	čestné uznání
1960	Ivan Korec	?	?	?	?	?	?	43	1	zlatá medaile
1960	Pavel Nosek	?	?	?	?	?	?	32	13	čestné uznání
1960	Jiří Souček	?	?	?	?	?	?	37	7	stříbrná medaile
1960	Petr Tomšů	?	?	?	?	?	?	34	10	bronzová medaile
1960	Jan Veselý	?	?	?	?	?	?	33	12	bronzová medaile
1959	?	?	?	?	?	?	?	9	40	
1959	?	?	?	?	?	?	?	12	36	
1959	?	?	?	?	?	?	?	21	25	
1959	Bohuslav Diviš	5	8	7	5	8	7	40	1	zlatá medaile
1959	Zdislav Kovářík	?	?	?	?	?	?	25	20	čestné uznání
1959	Jiří Moudrý	?	?	?	?	?	?	28	17	čestné uznání
1959	Karel Šmuk	?	?	?	?	?	?	29	16	čestné uznání
1959	Jiří Votava	?	?	?	?	?	?	28	17	čestné uznání

Pozn. ? – informace nebyla dohledatelná