

**Univerzita Hradec Králové**

**Přírodovědecká fakulta**

**Katedra fyziky**

Akustika klasicky a s počítačem

Diplomová práce

Autor: Kubová, Kateřina

Studijní program: N1701 – Fyzika

Studijní obor: 1701T053 Fyzikální měření a modelování

Vedoucí práce: doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.

Oponent práce: prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.

Hradec Králové

leden 2021

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne

.....  
Kateřina Kubová

## Poděkování:

Mé poděkování patří doc. RNDr. Josefu Hubeňákovi, CSc., za cenné rady, odborné vedení, ochotu a trpělivost, které mi při vypracování diplomové práce věnoval. Také děkuji za pomoc při realizaci experimentů.

## **Anotace**

KUBOVÁ, K. *Akustika klasicky a s počítačem*. Hradec Králové, 2021. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc. 129 s.

Diplomová práce se zabývá experimenty ve fyzice zaměřené na akustiku. Shrnuje vývoj akustiky a experimentů, které přispěly k poznání vlastností zvuku. V praktické části je představeno a vypracováno několik základních experimentů z akustiky, k vybraným experimentům jsou vytvořeny pracovní listy pro studenty.

### **Klíčová slova**

Akustika, vývoj měření v akustice, měření rychlost zvuku, vlastnosti zvuku

## **Annotation:**

Kubová, K. Acoustics conventionally and with a computer. Hradec Králové, 2021. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc. 129 p.

The diploma thesis deals with experiments in physics focused on acoustics. It summarizes the development of acoustics and experiments that contributed to the knowledge of properties of sound. In the practical part, several basic experiments in acoustics are introduced and elaborated, worksheets for students are created for selected experiments.

### **Keywords**

Acoustics, development of experiments in acoustics, measuring the speed of sound, sound properties

# Obsah

Úvod.....	8
1. Teoretická část.....	9
1.1 Historie.....	9
1.2 Fyzikální vlastnosti zvuku .....	11
Kmitání.....	11
Skládání kmitů stejného směru .....	14
Skládání kmitů stejné frekvence .....	16
Skládání kmitů velmi blízkých frekvencí .....	17
Skládání kmitů s frekvencemi v poměru celých čísel .....	18
Skládání většího počtu kmitů stejného směru – harmonická analýza.....	19
Skládání kmitů různého směru.....	21
Tlumené kmitý.....	21
Vynucené kmitý a rezonance .....	23
Zvukové vlny a jejich šíření .....	25
Odvození vlnové rovnice.....	25
Řešení vlnové rovnice pro rovinnou vlnu .....	31
Postupná rovinná vlna .....	33
Stojatá rovinná vlna .....	35
Kulová vlna ve sférických souřadnicích .....	39
Jevy a vlastnosti zvukových vln.....	40
Huygensův princip.....	41
Zákon odrazu vlnění.....	42
Zákon lomu vlnění.....	43
Interference a ohyb vlnění .....	45
Ohyb vlnění .....	47

Intenzita zvuku, hladina zvuku a hladina hlasitosti.....	48
1.3 Lidské ucho a zpracování zvukové informace .....	55
Stavba lidského ucha .....	55
Princip slyšení a zpracování zvuku.....	57
1.4 Měření rychlosti zvuku.....	59
Stanovení teoretického vzorce.....	60
Měření rychlosti zvuku v kapalinách a pevných látkách.....	65
1.5 Měření a pozorování akustických jevů .....	66
2. Praktická část .....	70
Přímé měření rychlosti zvuku pomocí dvou mikrofonů.....	71
Přímé měření rychlosti zvuku pomocí uzavřené trubice a jednoho mikrofonu..	76
Měření rychlosti zvuku pomocí Kundtovy trubice.....	81
Měření pomocí aplikace v telefonu či hlukoměru – ukázka odrazu, interference vln, stojaté vlnění.....	87
Barva zvuku hudebních nástrojů, analýza v programu Audacity a Phypox.....	93
Porovnání barvy hlasu pomocí programu Audacity.....	99
Ukázka zvukového rozdílu souhlásek a samohlásek.....	102
Záznam zvuku upuštěného gumového míčku (určení vlastností pohybu míčku pomocí zvukového záznamu).....	106
Závěr .....	113
Seznam použité literatury .....	114
Seznam použitých obrázků.....	116

## Úvod

Jedním ze základních smyslů, který se vyvíjí ještě před narozením, je sluch. Provází nás celým životem, a proto je důležité vědět a pochopit, co je zdrojem těchto vjemů, na jakém principu funguje náš sluch a jak se zvuk chová v různých prostředích kolem nás. Věda zabývající se vlastnostmi zvuku se vyvíjela od starověku až do dnes, kdy díky moderním počítačům a měřicím přístrojům dokážeme určit vlastnosti zvuku s velkou přesností.

Akustika je široký obor, který se zabývá vznikem, šířením a také vnímáním zvuku. Můžeme ji rozdělit do několika oborů, z nichž pro tuto práci nejdůležitější je fyzikální akustika. Slovo *akustika* pochází z řeckého slova *akoustikós* (týkající se slyšení). [Akustika [online], poslední aktualizace 30. července 2019 12:36 (cit.15.7.2020), Wikipedie. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Akustika>].

Cílem práce je sestavit pro učitele vhodný přehled historického vývoje akustiky a přehled teorie potřebné ke studiu a pochopení akustických jevů. V praktické části jsou uvedeny vlastní experimenty a měření s využitím aplikací a volně dostupných programů.



# 1 Teoretická část

V této části práce uvedu důležité milníky ve vývoji vědy zabývající se vlastnostmi zvuku, měřením rychlosti zvuku a akustikou. Vysvětlíme si, co je to zvuk, jak vzniká a jak se šíří prostředím. Ukážeme si princip, na němž funguje lidské ucho, které sloužilo jako první pozorovací „přístroj“. Také si rozebereme experimenty, které vedly k určení rychlosti zvuku a jiných jeho vlastností.

## 1.1 Historie

Zvuk je pro člověka velmi významný smyslový vjem. Funguje už tisíce let jako nástroj komunikace. Proto se již ve starověku začala vyvíjet věda, která se zvukem zabývá. [Laue, 1963, s. 28-30] Základy akustiky položil již Pythagoras (570–469 př. n. l.) se svými žáky, kterému již bylo známo, že délky strun naladěných na harmonické intervaly odpovídající poměru malých celých čísel 1:2, 2:3, atp.

K dalšímu vývoji akustiky přispěl Galileo Galilei (1564–1642), který v roce 1638 ve svých „Rozpravách“ určil, že vnímání výšky tónů lze vyjádřit počtem kmitů, stanovil počet kmitů jako měřítko relativní výšky dvou tónů. Dokázal, že počet kmitů struny závisí na její délce, tloušťce a napětí. Zjistil a vysvětlil buzení kmitů rezonancí. Zkoumal vlastnosti stojatého vlnění na povrchu vody v nádobách, které rozechvěl. Jeho žák Martin Mersenne (1588–1648) jako první určil absolutní výšku tónů počtem kmitů za sekundu, také zjistil, že struna společně se základním tónem vydává ještě i jeho vyšší harmonické tóny, a navíc změřil rychlost zvuku ve vzduchu. V jeho práci pokračoval Joseph Sauveur (1653–1716) a našel podstatu chvění a určil polohy kmiten a uzlů na strunách.

Otto v. Guericke pokusem dokázal, že se zvuk, na rozdíl od světla, nešíří prázdným prostředím. Isaac Newton (1643–1727) pak ve svých „Principiích“ vypočítal závislost rychlosti zvuku na hustotě a stlačitelnosti vzduchu. Tato teorie však byla ověřena až pokusem v roce 1826, kdy Laplace nahradil izotermickou stlačitelnost za adiabatickou.

Ernst Friedrich Chladni (1756–1827) přidal roku 1802 k dávno známým příčným kmitům strun a tyčí kmity podélné a torzní, svými zvukovými obrazci zviditelnil na kmitajících deskách uzlové čáry. Měřil rychlost zvuku v různých plynech.

O vedení zvuku v kapalinách se dlouho pochybovalo, až Daniel Calladon (1802–1892) a Jakob Franz Sturm (1803–1855) stanovili rychlost zvuku v Ženevském jezeře.

V průběhu 19. století byla akustika stále více přibližována ostatním fyzikálním oborům. Do akustiky byly přejímány například poznatky z optiky – princip interference, ohybu a rozptylu na překážkách, v roce 1842 byl popsán Dopplerův jev, dokazující změny výšky tónů u pohybujících se zdrojů či pozorovatele. Do akustiky byla aplikována také Fourierova analýza, která se původně zabývala vedením tepla. Tato analýza umožňuje rozklad libovolného kmitočtu na sinusové vlny, což odpovídá sluchovému vnímání, jak dokázal v roce 1843 Simon Ohm (1787–1854).

Akustika se dále rozvíjela díky novým vynálezům, Philipp Reis (1843–1874) v roce 1861 a Alexander Graham Bell (1847–1922) v roce 1875 vynalezli telefon a poté v roce 1878 David Edward Hughes (1831–1900) zdokonalil Reisův mikrofon, což napomohlo dokonalejší reprodukci lidského hlasu a ostatních zvuků. V letech 1914–1918 vznikl nový obor „elektroakustika“, když se zvuk začal přenášet elektrickými vlnami. Dalším významným vynálezem byl v roce 1877 představený fonograf Thomasem Alvou Edisonem (1847–1931).

## 1.2 Fyzikální vlastnosti zvuku

V této části práce si vysvětlíme fyzikální podstatu zvuku, jeho vznik a šíření prostředím. Při šíření zvuku dochází k různým jevům, které si ukážeme.

Za zvuk považujeme kmitavý pohyb částic (hmotných bodů) v prostředí, jehož výsledkem je vyvolání sluchového vjemu. Lidský sluch dokáže zaznamenat zvuk v rozmezí od 16 Hz až po 20 kHz, při čemž horní mez je závislá na kvalitě sluchového ústrojí. Obecně citlivost ucha s věkem klesá, takže se horní mez slyšitelnosti individuálně snižuje. [Srový, 2013, s. 53]

Abychom se mohli dostat k podstatě a zdroji zvuku, potřebujeme si nejdříve vysvětlit základní pojmy, jako jsou kmitání a vlnění. Kmitání částic prostředí způsobuje vznik vlnění, postupující vlnění způsobuje rozechvění předmětů.

**Kmitání** [Podobský, 1999, s. 5-9]

Kmitání je periodický pohyb kolem rovnovážné polohy. Jako jednoduchý model tohoto pohybu se používá například matematické kyvadlo či závaží na pružině. Při této zjednodušené představě by se kmitání týkalo vždy jen jednotlivé částice vibrujícího tělesa, ve skutečnosti se jedná o velmi složité soustavy.

Nejjednodušším kmitavým pohybem je harmonický kmit. Pro představu, jak harmonický kmit vypadá, poslouží zavěšené těleso o hmotnosti  $m$  na pružinu o tuhosti  $k$ . Zapůsobíme-li na těleso silou  $F'$ , pružina se prodlouží o  $y$ , zároveň se bude vratnou silou  $F$  pružina snažit vrátit do původní polohy a platí

$$F = -ky$$

a zároveň platí

$$F = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

pak

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \quad (1)$$

Upravíme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

a dostáváme pohybovou rovnici harmonického kmitu, která má partikulární řešení ve tvaru

$$y = Ke^{\alpha t}$$

Dosadíme a dostaneme

$$\alpha^2 Ke^{\alpha t} + \frac{k}{m}Ke^{\alpha t} = 0$$

a charakteristická rovnice

$$\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$$

vede k řešení

$$\alpha_{1,2} = -\sqrt{\frac{k}{m}}$$

které není z oboru reálných čísel. Musíme proto upravit na tvar

$$\alpha_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kde  $j = \sqrt{-1}$  je imaginární jednotka. Položíme

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \quad (2)$$

pak

$$\alpha_{1,2} = \pm j \omega$$

Úplné řešení rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} \quad (3)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou komplexní čísla, aby bylo řešení rovnice reálné. Položíme

$$C_1 = C e^{j\varphi} \quad \text{a} \quad C_2 = C e^{-j\varphi},$$

kde  $C$  je reálná konstanta, a dosadíme do výrazu pro  $y$ . Dostaneme

$$y = C e^{j(\omega t + \varphi)} + C e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

Vytknutím  $C$  získáme

$$y = C(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}) \quad (4)$$

Pak

$$y = 2C \cosh j(\omega t + \varphi)$$

Pro další úpravu zvolíme  $2C = A$  a dostaneme známý vztah pro harmonický kmit

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

kde  $y$  je okamžitá výchylka,  $A$  je amplituda,  $(\omega t + \varphi)$  fáze kmitu. Pro  $t = 0$  je  $y = A \cos \varphi$ , proto  $\varphi$  představuje fázi kmitu v okamžiku, kdy začínáme kmity počítat, tedy v čase  $t = 0$ . Pokud zvolíme

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

dostaneme známý tvar

$$\begin{aligned} y &= A \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

Pokud uvažujeme  $\alpha = 0$ , pak  $y = A \sin \omega t$  a grafem této periodické funkce je sinusovka s periodou  $T$ .

Funkce sinus se opakuje po  $2\pi$ , proto musí být  $\omega T = 2\pi$ .

Ze vztahu pro frekvenci  $f = \frac{1}{T}$  pak dosazením dostaneme úhlovou frekvenci  $\omega = 2\pi f$ .

Dosadíme a získáme

$$y = A \sin(2\pi f t + \alpha)$$

Rychlost kmitání je dána vztahem

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) = v_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

kde  $v_0 = \omega A$  je amplituda rychlosti. Zrychlení je pak určeno vztahem:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = a_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (7)$$

kde  $a_0 = -\omega^2 A$  je amplituda zrychlení.

Rychlost je oproti výchylce posunuta o čtvrt periody, to znamená, že při maximální výchylce je nulová rychlost a opačně. Zároveň je zrychlení v opačné fázi než výchylka, působí vždy proti výchylce.

Pokud se vrátíme k výrazu (4), uvidíme, že jde o součet dvou komplexních čísel a můžeme psát

$$y = C(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}) = Z_1 + Z_2$$

kde  $Z_1 = C e^{j(\omega t + \varphi)}$  a  $Z_2 = C e^{-j(\omega t + \varphi)}$  a zároveň jsou  $Z_1$  a  $Z_2$  komplexně sdružené s reálným součtem  $y$ . Graficky znázorněná jsou tato dvě časově nezávislá komplexní čísla se stejnou absolutní hodnotou  $C$  rotující po kružnici s poloměrem  $C$  a úhlovou rychlostí  $\omega$ . Číslo  $Z_1$  v kladném smyslu,  $Z_2$  v záporném. Jejich součtem je bod  $y(t)$ , pohybující se po reálné ose kolem bodu 0. Největší odchylky nabývá bod  $y(t)$  pro  $\omega t + \varphi = 0$  a  $\pi$  ( $y = 2C$ ), nejmenší pro  $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$  a  $\frac{3}{2}\pi$  ( $y = 0$ ). Bod  $y$  tedy kmitá na reálné ose kolem rovnovážné polohy 0, s amplitudou  $A = 2C$ .

Harmonickým pohybem je i průmět pohybujícího se bodu po kružnici do jedné z os. Zavádí se pojem fázoru, což je rotující vektor charakterizující kmitavý pohyb. Z hlediska komplexního řešení je tímto fázorem právě jedno z čísel  $Z_1$  a  $Z_2$ . Vyjadřujeme kmitavý pohyb pomocí jednoho rotujícího komplexního čísla

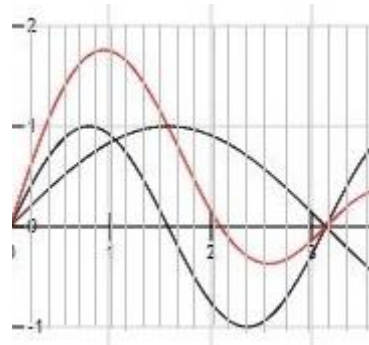
$$y = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (8)$$

jehož průmět do jedné z os je teprve reálným číslem. Tento výraz je pouhou matematickou pomůckou, která je ale velmi užitečná při výpočtech akustických obvodů.

### **Skládání kmitů stejného směru** [Podobský, 1999, s. 9-11]

Skládání kmitů stejného směru má v akustice velký význam. Tento princip vysvětluje chvění těles, kde se skládají postupující vlny s vlnou odraženou. V hudební akustice jde například o tvorbu akordů. Skládání kmitů můžeme provést buď gra-

ficky, nebo matematicky. Grafická metoda je jednoduchá, ale časově náročná – v každém okamžiku se sčítají výchylky obou kmitů, viz obrázek níže.



Obr. 1 Grafické skládání kmitů

Matematický způsob si ukážeme na příkladu. Složíme dva kmity  $y_1$  a  $y_2$ , jejichž matematické vyjádření je:  $y_1 = A_1 e^{j\omega_1 t}$ ,  $y_2 = A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi)}$ ,  $A_1$  a  $A_2$  jsou amplitudy těchto kmitů a  $\omega_1, \omega_2$  jejich kruhové frekvence a  $\varphi$  je fázový posuv mezi oběma kmity. Složený kmit  $y$  bude:

$$y = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi)}$$

Zvolíme:  $A_1 = A_1 + A_2 - A_2$

$$\begin{aligned} y &= (A_1 + A_2 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi)} \\ &= (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi)} \\ &= (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 (e^{j\omega_1 t} + e^{j(\omega_2 t + \varphi)}) \end{aligned}$$

Vytkneme ve druhém členu výraz  $e^{j\omega_1 t}$  a získáme:

$$y = (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_1 t} (1 + e^{j((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi)})$$

Opět v druhém členu vytkneme, tentokrát  $e^{j\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi}{2}}$ :

$$\begin{aligned} y &= (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_1 t} e^{j\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi}{2}} (e^{-j\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi}{2}} + e^{j\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi}{2}}) \\ y &= (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\frac{(\omega_2 + \omega_1)t + \varphi}{2}} \cdot 2 \cosh j \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi}{2} \right) \\ y &= (A_1 - A_2) e^{j\omega_1 t} + 2A_2 \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi}{2} \right) e^{j\frac{(\omega_2 + \omega_1)t + \varphi}{2}} \quad (9) \end{aligned}$$

Výsledkem matematického skládání kmitů je obecně velmi složitý výraz, který opět představuje dva kmity. Jedem kmit má frekvenci  $\omega_1$  a konstantní amplitudu  $A_1 - A_2$ , druhý s frekvencí  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  a časově proměnnou amplitudou s frekvencí  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ . Tuto amplitudu představuje výraz  $2A_2 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi}{2})$ .

Bude-li  $A_1 = A_2$ , první člen vymizí.

Pokud vyjdeme z reálného vyjádření obou kmitů:

$$y_1 = A_1 \sin \omega_1 t \quad \text{a} \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi),$$

dojdeme podobným postupem k výsledku:

$$y = (A_1 - A_2) \sin \omega_1 t + 2A_2 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi}{2}) \sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi}{2}) \quad (10)$$

V praxi sledujeme tři případy skládání kmitů – se stejnou frekvencí, s velmi blízkou frekvencí a s frekvencí v poměru celých čísel.

### **Skládání kmitů stejné frekvence** [Podobský, 1999, s. 12-13]

Pokud mají kmitu stejnou frekvenci, bude  $\omega_1 = \omega_2$ , pak

$$y = (A_1 - A_2)e^{j\omega t} + 2A_2 \cos \frac{\varphi}{2} e^{j(\omega t + \frac{\varphi}{2})}$$

$$y = (A_1 - A_2 + 2A_2 \cos \frac{\varphi}{2} e^{j\frac{\varphi}{2}})e^{j\omega t} = A(\varphi)e^{j\omega t} \quad (11)$$

Výsledkem je tedy kmit stejné frekvence, ale jeho amplituda závisí na amplitudách dílčích kmitů  $A_1$  a  $A_2$  a jejich vzájemném fázovém posuvu  $\varphi$ . Pro  $\varphi = 0$  (kmitu jsou ve fázi) bude:

$$A(0) = A_1 - A_2 + 2A_2 \cos 0 e^{j0} = A_1 - A_2 + 2A_2 = A_1 + A_2$$

Amplitudy obou kmitů se sčítají.

Pro kmitu s opačnou fází, tedy  $\varphi = \pi$  bude:

$$A(\pi) = A_1 - A_2 + 2A_2 \cos \frac{\pi}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} = A_1 - A_2$$

Amplitudy obou kmitů se odečítají. Pokud by se jednalo o kmitu se stejnou amplitudou, tj.  $A_1 = A_2$ , tyto kmitu se vyruší.



Sčítání kmitů stejné frekvence má význam při interferenčních jevech.  $A(\varphi)$  je amplituda v komplexním tvaru, píšeme ji ve tvaru:

$$A(\varphi) = A_1 - A_2 + 2A_2 \cos \frac{\varphi}{2} e^{j\frac{\varphi}{2}}$$

$$A(\varphi) = A_1 - A_2 + 2A_2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + j2A_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Protože platí:  $2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos \varphi + 1$  a  $2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi$

Bude

$$A(\varphi) = A_1 - A_2 + A_2 (\cos \varphi + 1) + jA_2 \sin \varphi$$

$$A(\varphi) = A_1 - A_2 + A_2 \cos \varphi + A_2 + jA_2 \sin \varphi$$

$$A(\varphi) = A_1 + A_2 \cos \varphi + jA_2 \sin \varphi \quad (12)$$

Číslo  $A(\varphi)$  je komplexní číslo, s reálnou a imaginární částí:

$$A(\varphi) = A_r + jA_{im}$$

Pak  $A_r = A_1 + A_2 \cos \varphi$  a  $A_{im} = A_2 \sin \varphi$

Odmocninou součtu druhých mocnin reálné a imaginární části dostaneme velikost amplitudy  $A$ :

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_{im}^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi} \quad (13)$$

Podílem imaginární a reálné části amplitudy dostaneme fázový posuv  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_{im}}{A_r} = \frac{A_2 \sin \varphi}{A_1 + A_2 \cos \varphi} \quad (14)$$

**Skládání kmitů velmi blízkých frekvencí** [Podobský, 1999, s. 13-15]

Pokud bude  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$  velmi malé, bude amplituda druhého členu ve výrazu (9) i (10)

kolísat velmi pomalu. Položíme  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \Omega_2$  a  $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \Omega_1 \doteq \omega_1$

Potom můžeme (10) přepsat do tvaru

$$y = (A_1 - A_2) \sin \omega_1 t + 2A_2 \cos(\Omega_2 t + \frac{\varphi}{2}) \sin(\Omega_1 t + \frac{\varphi}{2}) \quad (15)$$

Rozebereme si druhý člen. Frekvence kmitání je  $\Omega_1 = 2\pi F_1 \doteq 2\pi f_1$ , kmitání se děje přibližně s frekvencí obou kmitů s periodou  $T_1 = \frac{1}{F_1} \doteq \frac{1}{f_1}$ .

Kmitání amplitudy se děje s frekvencí  $F_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \frac{1}{2\pi} = \frac{f_2 - f_1}{2}$  a periodou  $T_2 = \frac{1}{F_2}$ .

Během jednoho kmitu amplitudy se vytvoří dvě záznejová maxima. Záznejje, nebo též rázy jsou důsledkem kolísání amplitudy. Počet rázů za 1 sekundu je:

$$n = 2F_2 = 2 \frac{f_2 - f_1}{2} = f_2 - f_1 \quad (16)$$

Rázy se využívají pro porovnání dvou frekvencí, například při ladění hudebních nástrojů.

**Skládání kmitů s frekvencemi v poměru celých čísel** [Podobský, 1999, s. 15-20]  
Nejdříve budeme uvažovat dva kmity se stejnou amplitudou  $A_1 = A_2$ , takže výraz (15) nebude obsahovat první člen. Obě frekvence budou v poměru celých čísel

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \text{kde } n_1, n_2 \text{ jsou celá čísla}$$

tedy

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2} f_2$$

Opět zavedeme:  $F_1 = \frac{f_1 + f_2}{2}$  a  $F_2 = \frac{f_2 - f_1}{2}$

Pak bude

$$F_1 = \frac{\frac{n_1}{n_2} f_2 + f_2}{2} = \frac{n_1 + n_2}{2n_2} f_2 \quad \text{a} \quad F_2 = \frac{f_2 - \frac{n_1}{n_2} f_2}{2} = \frac{n_2 - n_1}{2n_2} f_2$$

Jejich poměr bude:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{n_1 + n_2}{2n_2} f_2}{\frac{n_2 - n_1}{2n_2} f_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_2 - n_1} = \frac{k_1}{k_2}$$

kde  $k_1 = n_1 + n_2$  a  $k_2 = n_2 - n_1$  jsou opět celá čísla.

Protože  $F_1 = \frac{1}{T_1}$  a  $F_2 = \frac{1}{T_2}$  dostaneme:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 T_1 = k_2 T_2 = T$$

Výsledný děj bude periodický s periodou  $T$ , vypočtená hodnota se může od skutečné periody výsledného složeného kmitu lišit. V mnoha případech je poloviční.

**Skládání většího počtu kmitů stejného směru - harmonická analýza** [Podobský, 1999, s.21-27]

Již při skládání dvou kmitů bude výsledkem velmi složité kmitání, a při větším počtu kmitů bude výsledek zcela nepřehledný. Princip se neliší, pro  $n$  kmitů  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  můžeme výsledný kmit  $y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n$ .

Časovým rozvojem výsledného kmitu bude v obecném případě velmi složitá, neperiodická křivka představující nějaký šum, hluk či jiný nepříjemný zvuk.

Pokud budou  $y_1 = y_1(f), y_2 = y_2(2f), y_3 = y_3(3f), \dots, y_n = y_n(nf)$ , to znamená že frekvence jednotlivých kmitů budou celočíselným násobkem základní frekvence, tj.  $f_n = n f_1$ , takovým frekvencím říkáme harmonické. Výsledný kmit bude sice hodně složitý, ale bude periodický, takže se b časovém rozvoji výsledného kmitu budou určité tvary po určité době  $T$  opakovat. Takový kmit představuje zvuky příjemné pro lidské ucho, u kterých se dá rozeznat výška tónu.

Výsledek složení kmitů s harmonickými frekvencemi je periodický, můžeme tedy ukázat opačně, že každý periodický zvuk je možné rozložit na součet jednoduchých kmitů - harmonických složek s harmonickými frekvencemi. Takovému rozkladu říkáme harmonická analýza. Těchto harmonických složek může být obecně nekonečný počet. Pro periodický kmit  $y(t)$  můžeme psát:

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots \quad (16)$$

Harmonická analýza má význam v radiotechnice či v hudební akustice, pomocí níž charakterizujeme barvu zvuku. Když zobrazíme amplitudy jednotlivých harmonických složek složeného zvuku v závislosti na frekvenci, získáme graf - akustické spektrum. Pokud analyzujeme zvuk periodický, je toto spektrum diskrétní a jed-

notlivé amplitudy jsou umístěné na frekvenční ose v celočíselných násobcích základní složky. Pokud analyzujeme neperiodický zvuk, dostaneme spektrum spojitě, protože tento zvuk obsahuje všechny možné frekvence.

Obecně je možné z časové závislosti  $y = f(t)$  vytvořit frekvenční závislost  $S = S(\omega)$ , tedy frekvenční spektrum dle vztahu, který představuje transformaci časové závislosti na frekvenční závislost:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (17)$$

Opačně podle vztahu

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (18)$$

můžeme z frekvenční závislosti získat závislost časovou. Těmto vztahům říkáme Laplaceova transformace.

Pro periodické děje postupujeme jednodušší cestou. Je-li

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots + y_k(t) + \dots + C_0$$

Kde  $y_k = C_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$  a  $C_0$  je konstanta.

Můžeme psát:  $y_k = C_k (\sin k\omega t \cos \varphi_k + \cos \omega k t \sin \varphi_k)$

$$y_k = C_k \cos \varphi_k \sin k\omega t + C_k \sin \varphi_k \cos \omega k t$$

Položíme-li  $C_k \cos \varphi_k = A_k$  a  $C_k \sin \varphi_k = B_k$

bude

$$f(t) = y(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\omega t + B_2 \cos 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots + \dots + A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t \quad (19)$$

Pro jednotlivé koeficienty pak platí:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt$$

$$B_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt$$

Koeficienty  $C_0, A_k, B_k$  nazýváme Fourierovy koeficienty, tvoří čárové spektrum.

### **Skládání kmitů různého směru** [Podobský, 1999, s. 27-30]

Skládání kmitů různého směru nemá v akustice moc velké využití. Nicméně tento jev slouží k porovnání frekvencí dvou kmitů, například na obrazovce osciloskopu. Pokud budou mít kmity frekvence v poměru celých čísel, na osciloskopu se vytvoří uzavřená křivka. Tvar těchto křivek závisí na tom, v jakém poměru jsou frekvence. Tyto křivky nazýváme Lissajousovy obrazce.

### **Tlumené kmity** [Podobský, 1999, s. 31-32]

Aby byla amplituda kmitu stále stejná, musela by být kmitajícímu tělesu neustále dodávána energie. Když nebude dodávána, kmitání během určité doby zanikne vlivem vnitřního tření či odporu prostředí. Na kmitající těleso působí tlumící síla  $F_t$  vždy proti směru pohybu.

Tlumící síla může být např. odpor prostředí, který je dán Stokesovým vzorcem

$$F_t = 6\pi\eta r v = h v$$

pro kouli o poloměru  $r$ ,  $\eta$  je koeficient dynamické viskozity prostředí a  $v$  je vzájemná rychlost mezi tělesem a prostředím a veličina  $h$  je konstanta úměrnosti mezi silou a rychlostí. Pro pohybující se těleso, které má jiný než kulový tvar, má výraz pro odporovou sílu jiný tvar, síla je ale pro malé rychlosti přímo úměrná rychlosti stejně jako u kulového tělesa. Podobná závislost platí i pro vnitřní tření v materiálu. Vždy budeme považovat rychlosti kmitajících těles za malé, proto můžeme také uvažovat tlumící sílu  $F_t$  úměrnou rychlosti, tedy

$$F_t = h v$$

kde  $h$  je konstanta úměrnosti. Pohybovou rovnici tlumeného kmitu pak můžeme napsat ve tvaru:

$$F = -ky - h v$$

zároveň také

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky + h \frac{dy}{dt} = 0 \quad (20)$$

Rovnici vydělíme  $m$  a položíme

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{a} \quad \frac{h}{m} = 2\delta \quad (21)$$

kde  $\omega_0$  je vlastní frekvence netlumených kmitů a  $\delta$  je konstanta tlumení. Pohybovou rovnici (20) můžeme přepsat do tvaru:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (22)$$

Řešení můžeme psát ve tvaru:  $y = Ke^{\alpha t}$  a po dosazení do (22) dostaneme charakteristickou rovnici:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

která nám dá řešení

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Když bude  $\delta \geq \omega_0$  je řešení reálné a nedochází ke kmitovému pohybu. Pro  $\delta < \omega_0$  dostaneme dva komplexně sdružené kořeny:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (23)$$

je frekvence tlumených kmitů. Úplné řešení rovnice (22) je pak:

$$y = C_1 e^{(-\delta+j\omega)t} + C_2 e^{(-\delta-j\omega)t} = e^{-\delta t} (C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$$

Položíme-li  $C_1 = C e^{j\varphi}$  a  $C_2 = C e^{-j\varphi}$

a dostaneme výraz:

$$y = e^{-\delta t} C (e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)})$$

který nás dovede ke konečnému výsledku:

$$y = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (24)$$

Činitel  $A e^{-\delta t} = U(t)$  představuje ve výrazu (24) amplitudu tlumeného kmitu závislou na čase, s rostoucím časem amplituda klesá. Pro dvě sousedící amplitudy platí:

$$U_i = Ae^{-\delta t}, U_{i+1} = Ae^{-\delta(t+T)}$$

Podíl dvou po sobě jdoucích amplitud je

$$\frac{U_i}{U_{i+1}} = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta t}e^{-\delta T}} = e^{\delta T} = D$$

kde  $D$  je útlum. Přirozený logaritmus útlumu je logaritmický dekret a je dán vztahem:

$$\vartheta = \ln \frac{U_i}{U_{i+1}} = \delta T$$

### Vynucené kmity a rezonance [Podobský, 1999, s. 33-36]

Aby pružné těleso začalo kmitat, musí na něj působit periodická budící síla, která vynucuje kmitání tělesa. Vezmeme v úvahu pružný systém o tuhosti  $k$  a hmotnosti  $m$ , který je tlumený silou  $F_t = -h \frac{dy}{dt}$  a na který působí proměnná síla  $F = F_0 \sin \Omega t$ . Pohybová rovnice takového systému bude:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - h \frac{dy}{dt} + F_0 \sin \Omega t$$

Vydělíme  $m$  a zavedeme veličiny  $\delta$  a  $\omega_0$  analogicky k (21), poté dostaneme pohybovou rovnici vynucených kmitů:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = A_0 \sin \Omega t \quad (25)$$

kde  $2\delta = \frac{h}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $A_0 = \frac{F_0}{m}$

Obecné řešení této rovnice bude:

$$y = Ce^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (26)$$

Člen  $y_1$  představuje tlumený kmit s frekvencí  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  obecně různou od  $\Omega$ :

$$y_1 = Ce^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Když člen  $y_1$  představující tlumený kmit zanikne, zůstane nám tzv. ustálené řešení:

$$y = y_2 = A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (27)$$

Než člen  $y_1$  zanikne, bude výsledný kmit součtem dvou kmitů:  $y = y_1 + y_2$  s různými frekvencemi, a to  $\omega$  a  $\Omega$ . Výsledkem součtu dvou kmitů různé frekvence

je kmit s časově proměnnou amplitudou, což je velmi složité kmitání s rázy, říkáme mu zakmitávání. V akustice zakmitávání ovlivňuje barvu zvuku hudebního nástroje.

Vraťme se ke vztahu (27) a ukažme si závislost amplitudy  $A$  vynucených kmitů na několika parametrech:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (28)$$

a také

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (29)$$

Amplituda  $A$  tedy závisí na budící síle  $F_0$ , hmotnosti kmitajícího systému  $m$ , tlumění systému  $\delta$  a také vlastní frekvenci systému  $\omega_0$  a frekvenci budící síly  $\Omega$ . Pro určitou frekvenci  $\Omega_r$  nastane rezonance, tedy amplituda bude maximální. Této frekvenci říkáme rezonanční. Ze vztahu (28) ujistíme, že maximální amplituda nastane pro minimální výraz

$$f(\Omega) = (\omega_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2$$

Minimum výrazu získáme derivací  $f(\Omega)$ , kterou položíme rovnu nule:

$$\frac{df(\Omega)}{d\Omega} = -2\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta^2 = 0$$

z čehož vyplývá

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (30)$$

Nyní můžeme dosadit rezonanční frekvenci do vztahu pro amplitudu, získáme tak vztah pro rezonanční amplitudu:

$$A_r = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (31)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že rezonanční amplituda závisí nejen na velikosti budící síly  $F_0$ , na hmotnosti dané kmitavé soustavy, ale také na jejím tlumení  $\delta$ . Bude-li tlumení velké, bude rezonanční křivka plochá s malou rezonanční amplitudou,



v opačném případě, při malém tlumení bude rezonanční křivka ostrá s vysokou rezonanční amplitudou.

V praxi má tento jev důležitý důsledek. Předmět s malým tlumením, (např. kovová tyč či struna), se rozkmitá jen frekvencí velmi blízkou rezonanční frekvenci. Naopak předmět s velkým tlumením (např. vzduchový sloupec, dřevěná tyč či deska) je možné rozkmitat i frekvencí značně vzdálenou od rezonanční frekvence. Toho se využívá třeba při konstrukci hudebních nástrojů, kde rezonanční desky přejímají energii strun a tu předávají dále do okolí.

### **Zvukové vlny a jejich šíření** [Podobský, 1999, s. 64-65]

Zvuk, ač ho prostě slyšíme, je poměrně složitý soubor dějů. To, co registruje ucho, jsou periodické tlakové změny atmosférického, nebo hydrostatického tlaku, podle toho, v jakém prostředí zvuk pozorujeme. Tyto změny se nazývají akustický tlak. Zvuk se dá nicméně zachytit i přímým kontaktem s předmětem, kdy se vibrace přenášení přímo do sluchového orgánu. Tím se například vyšetřuje poškození sluchu.

V libovolném prostředí se šíří zvuková vlna, kterou tvoří šířící se tlakové změny, je představována přenosem kmitavého pohybu částíček prostředí. Z tohoto hlediska můžeme vlnění rozdělit na podélné, kdy částice prostředí kmitají v ose šířící se vlny a příčné, kdy částice kmitají kolmo ke směru šíření vlny. V plynech zaznamenáme pouze podélné vlnění, stejně jako uvnitř kapalin. Nicméně na povrchu kapalin pozorujeme příčné vlnění. U pevných těles se vyskytuje jak vlnění příčné, tak podélné, ale i tzv. ohybové vlnění, které je kombinací příčného a podélného.

### **Odvození vlnové rovnice** [Podobský, 1999, s. 65-70]

Pro odvození zvukové vlny šířící se ve vzduchu potřebujeme znát základní vztahy, které popisují plynné prostředí – rovnici kontinuity, Newtonův druhý pohybový zákon a stavová rovnice plynu:

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

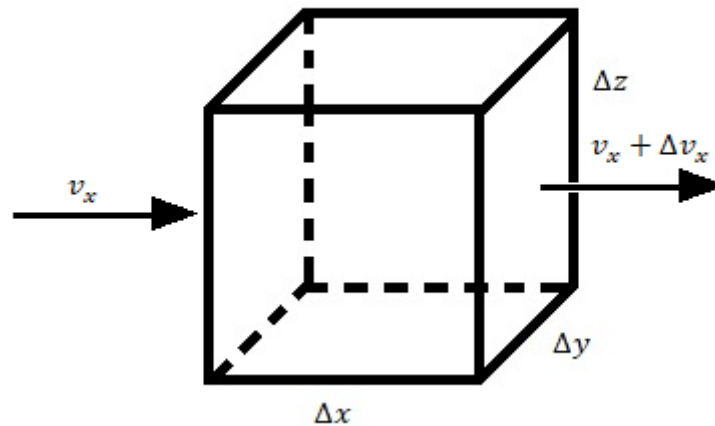
$$\operatorname{grad} p + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (34)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $p$  tlak,  $V$  objem a  $\kappa$  Poissonova konstanta. Předpokládáme, že rychlost kmitání částic prostředí  $\mathbf{v}$  je vektor se složkami  $\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z$  a že při kmitání nedochází k tepelné výměně s okolím, tzn. že se jedná o adiabatický děj.

Nyní si na zjednodušeném modelu ukažme, co výše uvedené vztahy představují.

Uvažujme krychličku s rozměry  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , tak jak ji vidíme na obrázku č. 2.



Obr. 2 Uvažovaná krychle – přírůstek hmoty za jednotku času

Nalevo od krychličky máme prostředí s hustotou  $\rho$  a z tohoto prostředí do krychličky proudí částice za jednotku času plochou  $\Delta y \Delta z$ , rychlostí  $v_x$ , zprava pak vytéká za časovou jednotku množství hmoty s hustotou  $\rho + \Delta\rho$  rychlostí  $v_x + \Delta v_x$ . Vezmeme přírůstek hmoty za jednotku času ve směru osy  $x$  jako rozdíl hmoty, která zleva přiteče a odeče zprava:

$$v_x \rho - ((v_x + \Delta v_x)(\rho + \Delta\rho)) \Delta y \Delta z$$

Vztah upravíme na

$$\rho \left( v_x - (v_x + \Delta v_x) \left( 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \right) \Delta y \Delta z$$

Podíl  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  je oproti jedničce malý, můžeme ho zanedbat, dále pak rozšíříme veličinou  $\Delta x$  a dostaneme:

$$-\rho \Delta v_x \Delta y \Delta z = -\rho \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Podíl  $\frac{\Delta v_x}{\Delta x}$  představuje v limitním případě derivaci x-ové složky rychlosti podle souřadnice  $x$ , můžeme ho tedy přepsat do tvaru  $\frac{\partial v_x}{\partial x}$  a pak je přírůstek hmoty za časovou jednotku v objemu krychličky  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ve směru  $x$  vyjádřen výrazem:

$$-\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Analogicky tak můžeme postupovat i pro osy  $y$  a  $z$ . Dostaneme vztahy:

$$-\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z \quad \text{a} \quad -\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y$$

Abychom získali celkový přírůstek hmoty v krychličce  $\Delta x \Delta y \Delta z$  za jednotku času, tj.  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ , sečteme všechny tři výrazy. Protože  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  i  $\Delta z$  jsou časově nezávislé, bude

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Budeme uvažovat limitní případ  $\Delta t \rightarrow 0$ , proto můžeme přírůstek hmoty za jednotku času psát ve tvaru  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$  a poté přepsat vztah do tvaru:

$$-\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z - \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Po vykrácení veličin  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  dostaneme výraz:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (35)$$

který představuje vztah (32).

Pro výraz (33) použijeme pro představu stejnou krychličku jako výše (obr. 2). Na krychličku bude působit zleva tlak  $p$  a zprava tlak  $p + \Delta p$ , potom rozdíl těchto tlaků násobený plochou  $\Delta y \Delta z$  představuje sílu, která působí na krychličku ve směru osy  $x$ . Tato síla musí být rovna setrvačné síle  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial t}$ , kde  $\frac{\partial v_x}{\partial t}$  je zrychlení ve směru osy  $x$ . Bude tedy platit:

$$(p - (p + \Delta p)) \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Uvažujeme změnu tlaku v ose  $x$ , můžeme tedy psát:  $\Delta p = \frac{\Delta p}{\Delta x} \Delta x$  a opět budeme uvažovat limitní případ pro  $\Delta x \rightarrow 0$ , pak můžeme nahradit  $\frac{\Delta p}{\Delta x}$  za  $\frac{\partial p}{\partial x}$  a dostaneme rovnici:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Vykrátíme a získáme

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (36a)$$

Analogicky se dostaneme ke vztahům

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad (36b)$$

$$\text{a } -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (36c)$$

Výrazy (36a), (36b), (36c) představují složky vektoru síly, pokud jim přiřadíme jednotkové vektory  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ve směru os, sečteme je dostaneme výraz:

$$\begin{aligned} -\left(\mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}\right) &= \rho \left(\mathbf{i} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{j} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial t}\right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i} v_x + \mathbf{j} v_y + \mathbf{k} v_z) \\ -\left(\mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}\right) &= \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (37) \end{aligned}$$

což odpovídá vztahu (33). Z rovnic (36a) a (36c) je zřejmá závislost mezi rychlostí kmitajících částíček vzduchu a tlakem. Ze vztahu (35) je vidět závislost mezi rychlostí a hustotou. Protože existuje závislost mezi hustotou a tlakem, nahradíme si pravou stranu rovnice (35) tlakovou závislostí. K tomu použijeme vztah (34).

Vezmeme v úvahu, že  $m = \rho V$  a hmotnost v daném objemu  $V$  můžeme považovat za konstantní, pak bude

$$pV^\kappa = p \left(\frac{m}{\rho}\right)^\kappa = p \frac{m^\kappa}{\rho^\kappa} = konst.$$

$$p\rho^{-\kappa} = \frac{konst.}{m^\kappa} = konst.$$

Tento výraz budeme derivovat podle času a dostaneme:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \rho^{-\kappa} + p(-\kappa)\rho^{-\kappa-1} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

kde  $p$  je celkový tlak, tzn. barometrický tlak  $p_b$  + střídavá složka akustického tlaku, která je ale vzhledem k atmosférickému tlaku zanedbatelná, takže můžeme psát  $p = p_b$  a pak bude:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\kappa p_b} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (38)$$

Dosazením do (35) dostaneme vztah mezi rychlostí a tlakem:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa p_b} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (39)$$

Pro vhodnější vyjádření vztahu mezi rychlostí a akustickým tlakem zavedeme novou veličinu, tzv. rychlostní potenciál  $\Phi$ , definovaný vztahem:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi \quad (40)$$

Složky rychlosti  $v_x, v_y, v_z$  potom budou:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (41)$$

Vybereme si např. složku  $v_x$  a dosadíme do (36a):

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Integrací podle  $x$  dostaneme:

$$-p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + K$$

$K$  je integrační konstanta a nezávisí na veličině  $x$ , může být ale závislá na jiných veličinách. Protože v klidných prostředích je akustický tlak nulový, a v neproudícím prostředí je i rychlostní potenciál  $\Phi = 0$ , musí být i  $K = 0$ , tedy

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (42)$$

Tento vztah společně se vztahem pro rychlostní potenciál (40) spojují veličiny akustický tlak  $p$  a akustickou rychlost  $\mathbf{v}$  přes rychlostní potenciál  $\Phi$ .

Nyní zderivujeme podle času  $t$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (43)$$

Tento výraz dosadíme do vztahu (39) a za složky rychlosti dosadíme ze (41):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa p_b} \left( -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)$$

Označíme

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_b}{\rho}} \quad (44)$$

Potom můžeme psát:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (45)$$

nebo

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (46)$$

Poslední dvě rovnice (45) a (46) představují vlnovou rovnici pro šíření akustického rozruchu plynným prostředím.

Veličina označená jako  $c$  ve vztahu (44) je rychlost zvuku, tedy rychlost šíření zvukové vlny prostředím. Ze vztahu je zřejmé, že závisí na atmosférickém tlaku a hustotě vzduchu. Obě veličiny spolu souvisí a jsou závislé na teplotě. Podle Gay-Lussacova zákona vyjádříme závislost tlaku na teplotě a dostaneme:

$$p_b = p_0(1 + \gamma t) \quad (47)$$

kde  $p_0$  je atmosférický tlak při  $t = 0^\circ\text{C}$  a  $\gamma = \frac{1}{273} \text{K}^{-1}$  je objemová roztažnost plynu. Dosadíme vztah (47) do (44) a dostaneme

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0(1 + \gamma t)}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \sqrt{(1 + \gamma t)} = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma t\right)$$

kde  $c_0$  je rychlost zvuku,  $p_0$  tlak a  $\rho_0$  hustotu při teplotě  $t = 0^\circ\text{C}$ . Výraz  $\sqrt{(1 + \gamma t)}$  rozvineme v mocninou řadu, z níž uvažujeme pouze první dva členy a získáme  $\sqrt{(1 + \gamma t)} \cong 1 + \frac{1}{2} \gamma t$ .

Z tabulek určíme hodnoty pro  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\rho_0 = 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $\kappa = 1,405$  a pak nám vyjde:  $c_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = 331,8 \text{ ms}^{-1}$

Pro závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě pak vyjde vztah:

$$c = 331,8 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{273} t \right)$$

$$c = 331,8 + 0,61t \quad (48)$$

Pro jiné plyny je situace podobná, vztah (44) platí, nicméně protože je pro stejný tlak u různých plynů různá hustota, jsou pro různé plyny v tomto vztahu i jiné číselné hodnoty.

### Řešení vlnové rovnice pro rovinnou vlnu [Podobský, 1999, s. 70-71]

Obecně pro různé druhy vlnění mohou být i různá řešení rovnice (46). V akustice je velmi významné řešení pro rovinnou vlnu, budeme předpokládat šíření v jednom ze směrů souřadných os soustavy, v našem případě zvolíme osu  $x$ . Potom můžeme psát vlnovou rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} c^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (49)$$

Protože, pokud se vlna šíří pouze ve směru osy  $x$ , jsou rychlosti  $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  i  $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  nulové, zároveň tedy i  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$  a  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ .

Budeme předpokládat, že řešení rovnice (49) bude ve tvaru:

$$\Phi = XT \quad (50)$$

kde  $X$  je funkce pouze proměnné  $x$ :  $X = X(x)$  a  $T$  je funkce pouze proměnné  $t$ :  $T = T(t)$

Dosadíme vztah (50) do (49) a dvakrát zderivujeme, upravíme a dostaneme:

$$\frac{d^2 X}{dX^2} \frac{1}{X} c^2 = \frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T}$$

Protože je každá strana závislá na jiné veličině, bude tato rovnice splněna pouze, pokud budou obě strany na veličinách  $x$  a  $t$  nezávislé, budou tedy vyjádřeny nějakou konstantou  $K$  a můžeme pak psát:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \frac{1}{X} c^2 = \pm K \quad (51)$$

a

$$\frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T} = \pm K \quad (52)$$

Z této rovnice dostaneme:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} \pm KT = 0 \quad (53)$$

Řešení této rovnice můžeme psát ve tvaru  $T = e^{\alpha t}$ , který dosadíme do (53) a získáme charakteristickou rovnici:

$$\alpha^2 = \pm K$$

$$\alpha = \pm \sqrt{\pm K}$$

Aby rovnice představovala periodický kmitavý děj, musí být výraz pod odmocninou záporný, takže:

$$\alpha = \pm j\sqrt{K}$$

Úplné řešení rovnice (53) potom bude:

$$T = T_1 e^{j\sqrt{K}t} + T_2 e^{-j\sqrt{K}t} \quad (54)$$

Analogicky získáme řešení rovnice (51):

$$X = X_1 e^{j\frac{\sqrt{K}}{c}x} + X_2 e^{-j\frac{\sqrt{K}}{c}x} \quad (55)$$

Nyní dosadíme (54) a (55) do (50) a upravíme, abychom získali obecné řešení rovinné vlny ve tvaru:

$$\Phi = C_1 e^{j(\sqrt{K}t + \frac{\sqrt{K}}{c}x)} + C_2 e^{-j(\sqrt{K}t - \frac{\sqrt{K}}{c}x)} + C_3 e^{j(\sqrt{K}t - \frac{\sqrt{K}}{c}x)} + C_4 e^{-j(\sqrt{K}t + \frac{\sqrt{K}}{c}x)} \quad (56)$$

kde  $C_1 = T_1 X_1$ ,  $C_2 = T_2 X_1$ ,  $C_3 = T_1 X_2$  a  $C_4 = T_2 X_2$ . Podle velikosti konstant získáme různé druhy vln.



### Postupná rovinná vlna [Podobský, 1999, s. 71-74]

Vraťme se k rovnici (56) a určíme si např.

$$C_2 = C_3 = \frac{1}{2}D \text{ a } C_1 = C_4 = 0$$

potom

$$\Phi = \frac{1}{2}D \left( e^{j\left(\sqrt{K}t - \frac{\sqrt{K}}{c}x\right)} + e^{-j\left(\sqrt{K}t - \frac{\sqrt{K}}{c}x\right)} \right)$$

a po úpravě

$$\Phi = D \cos\left(\sqrt{K}t - \frac{\sqrt{K}}{c}x\right) \quad (57)$$

Nyní se podívejme na vztah (54) a porovnejme se vztahem (3). Uvidíme, že mají stejný tvar. Výraz (3) představuje časovou závislost harmonického pohybu, který kmitá s kruhovou frekvencí  $\omega$ . Výraz (54) tedy představuje stejnou závislost a můžeme tedy odvodit, že

$$\sqrt{K} = \omega \quad (58)$$

kde  $\omega = 2\pi f$  je kruhová frekvence zvukové vlny. Vztah (58) dosadíme do (57) a vytkneme  $\omega$ . Dostaneme:

$$\Phi = D \cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (59)$$

kde podíl  $\frac{x}{c}$  musí mít význam času, proto píšeme  $\frac{x}{c} = t'$  a zároveň odtud  $c = \frac{x}{t'}$ , kde veličina  $c$  představuje rychlost šíření zvukové vlny, se kterou vlna urazí za dobu  $t'$  vzdálenost  $x$ .

Pro  $x = 0$  dostaneme výraz pro harmonické kmitání:  $\Phi = D \cos \omega t$ . Pro  $x \neq 0$  bude  $\omega \frac{x}{c}$  představovat fázový posuv, proto je v různých místech  $x$  různý stav kmitu. Zároveň  $x$  charakterizuje dobu  $t'$ , takže ukazuje postup zvukového rozruchu z místa  $x = 0$  ve směru osy  $x$  rychlostí  $c$ . Výraz (59) představuje postupnou zvukovou vlnu. Protože je její hodnota ve všech místech  $x$  stejná, jedná se zároveň o rovinnou vlnu.

Pro vlnu šířící se v opačném směru budeme ze vztahu (56) uvažovat:

$$C_2 = C_3 = 0 \quad \text{a} \quad C_1 = C_4 = \frac{1}{2}D$$

a po úpravě získáme vztah:

$$\Phi = D \cos \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \quad (60)$$

V komplexním tvaru můžeme výrazy (56) a (60) psát:

$$\Phi = D e^{j\omega \left( t - \frac{x}{c} \right)} \quad (61)$$

a

$$\Phi = D e^{j\omega \left( t + \frac{x}{c} \right)} \quad (62)$$

Pokud se vrátíme k (59), můžeme se podívat, jak vypadá průběh  $\Phi$  v nějakém čase  $t$ , např.  $t = 0$ , tedy v závislosti pouze na  $x$ :

$$\Phi = D \cos \left( -\omega \frac{x}{c} \right)$$

Nyní se podíváme, kam se dostane zvuková vlna za 1 kmit, tzn. za dobu  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Uvažujme v místě  $x_1$  hodnotu  $\Phi_1 = D \cos \left( -\omega \frac{x_1}{c} \right)$  a místě  $x_2$ , do kterého se dostane vlna za dobu  $T$  hodnotu  $\Phi_2 = D \cos \omega \left( -\frac{x_2}{c} + T \right) = D \cos \omega \left( -\frac{x_2}{c} + \frac{2\pi}{\omega} \right)$

$$\Phi_2 = D \cos \left( -\frac{\omega x_2}{c} + 2\pi \right)$$

Pokud má být průběh funkce  $\Phi$  periodický pro čas  $t$ , musí být periodický i pro souřadnici  $x$ , musí být  $\Phi_1 = \Phi_2$  a tedy

$$-\omega \frac{x_1}{c} = -\frac{\omega x_2}{c} + 2\pi$$

Odtud

$$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\omega} c = Tc$$

Vzdálenost, kterou urazí zvuková vlna za jeden kmit, označíme  $\lambda$  a nazveme ji vlnovou délkou, kterou můžeme definovat, jako vzdálenost dvou sousedních míst, která kmitají se stejnou fází:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{\omega} c \quad (63)$$

Ze vztahů (42) a (61) můžeme vypočítat akustický tlak  $p$ , pro vlnu šířící se ve směru osy  $x$ :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -j\omega\rho D e^{j\omega t} e^{-j\omega \frac{x}{c}}$$

Dále ze vztahu (41) pro složku  $x$  a (61) získáme vztah pro akustickou rychlost, pro vlnu šířící se se ve směru osy  $x$ :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -j \frac{\omega}{c} D e^{j\omega t} e^{-j\omega \frac{x}{c}}$$

Jak vidíme, akustická rychlost a tlak mají společnou fázi a jejich podíl  $z_0$  nazýváme vlnovým odporem prostředí:

$$\frac{p}{v} = \rho c = z_0 \quad (64)$$

Tento podíl je reálný a konstantní, nezávisí ani na amplitudě ani na frekvenci. Vlnový odpor prostředí je v akustice významná veličina.

### **Stojatá rovinná vlna** [Podobský, 1999, s. 74-79]

V praxi se velmi často stává, že se část vlny odrazí a postupuje proti šířící se vlně. Vezmeme si vztahy pro rovinnou vlnu šířící se ve směru osy  $x$  (61) a vlnu postupující v opačném směru (62), tedy vztahy:

$$\Phi_1 = D_1 e^{j\omega(t - \frac{x}{c})}$$

$$\Phi_2 = D_2 e^{j\omega(t + \frac{x}{c})}$$

Amplitudy  $D_1$  a  $D_2$  obecně nemusí být stejné, což je v praxi běžný jev. Výsledný rychlostní potenciál je pak dán součtem dílčích potenciálů:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = D_1 e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} + D_2 e^{j\omega(t + \frac{x}{c})} \quad (65)$$

Nyní tento vztah použijeme pro výpočet akustického tlaku, dosadíme do vztahu (42):

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -j\omega\rho D_1 e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} - j\omega\rho D_2 e^{j\omega(t+\frac{x}{c})} \quad (66)$$

Vyjádříme si  $D_1$  do tvaru  $D_1 = D_1 - D_2 + D_2$ , pak můžeme psát:

$$p = -j\omega\rho(D_1 - D_2)e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} - j\omega\rho D_2(e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} + e^{j\omega(t+\frac{x}{c})})$$

První člen představuje postupnou vlnu v kladném směru osy  $x$  s amplitudou  $D_1 - D_2$ . Druhý člen vlnu složenou z vlny postupující ve směru osy  $x$  a z vlny postupující opačným směrem. Můžeme tedy napsat

$$p = p_1 + p_2$$

kde

$$p_1 = -j\omega\rho(D_1 - D_2)e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} \quad (67)$$

$$p_2 = -j\omega\rho D_2(e^{j\omega t} (e^{-j\omega\frac{x}{c}} + e^{j\omega\frac{x}{c}})) \quad (68)$$

Výraz pro  $p_2$  můžeme psát ve tvaru

$$p_2 = -j\omega\rho D_2 2\cosh\left(j\omega\frac{x}{c}\right) e^{j\omega t}$$

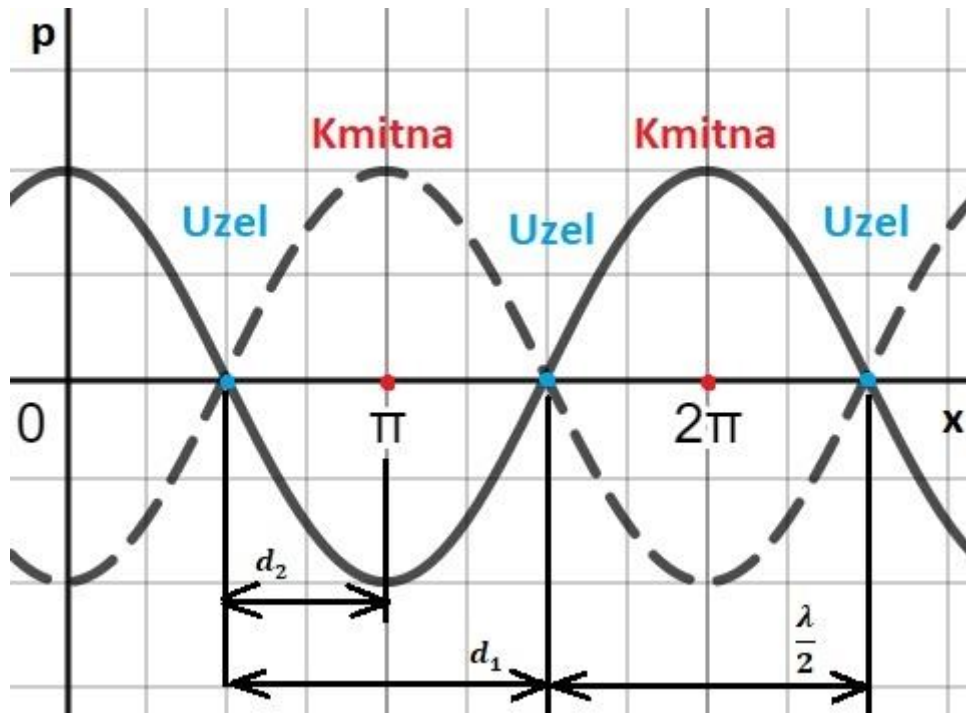
$$p_2 = -j2D_2\omega\rho \cos\left(\omega\frac{x}{c}\right) e^{j\omega t}$$

Protože  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$  můžeme napsat:

$$p_2 = 2D_2\omega\rho \cos\left(\omega\frac{x}{c}\right) e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$p_2 = 2D_2\omega\rho \cos\left(\omega\frac{x}{c}\right) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (69)$$

kde  $\omega$  je frekvence kmitavého procesu,  $2D_2\omega\rho \cos\left(\omega\frac{x}{c}\right)$  můžeme považovat za amplitudu, která je periodicky závislá na souřadnici  $x$ . Pro hodnoty  $\cos\left(\omega\frac{x}{c}\right) = 0$  je nulová a pro  $\cos\left(\omega\frac{x}{c}\right) = 1$  je maximální. V místech s maximální amplitudou nalezneme kmitny, v místech s minimální amplitudou pak budou uzly (obr. 3). Protože se tento stav s časem nemění, říkáme tomuto vlnění stojaté.



Obr. 3 Stojaté vlnění

Nyní si označíme vzdálenost mezi dvěma uzly  $d_1$  a vzdálenost mezi kmitnou a uzlem  $d_2$ .

Pro uzly:

$$\cos\left(\omega \frac{x}{c}\right) = 0 \rightarrow \omega \frac{x}{c} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\omega \frac{x + d_1}{c}\right) = 0 \rightarrow \omega \frac{x + d_1}{c} = (2(k + 1) + 1) \frac{\pi}{2} = k\pi + \pi + \frac{\pi}{2}$$

takže

$$\omega \frac{x + d_1}{c} - \omega \frac{x}{c} = \pi \rightarrow \frac{\omega d_1}{c} = \pi$$

Z toho pak s využitím (63):

$$d_1 = \pi \frac{c}{\omega} = \pi \frac{c}{2\pi f} = \frac{1}{2} \lambda$$

Stejným způsobem bychom ukázali, že vzdálenost dvou kmiten je rovněž  $\frac{1}{2} \lambda$ .

Pro uzel a kmitnu ukážeme analogicky:

$$\cos\left(\omega \frac{x}{c}\right) = 0 \rightarrow \omega \frac{x}{c} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\omega \frac{x + d_2}{c}\right) = 1 \rightarrow \omega \frac{x + d_2}{c} = k\pi$$

Takže

$$\omega \frac{x + d_2}{c} - \omega \frac{x}{c} = \omega \frac{d_2}{c} = \frac{\pi}{2}$$

$$d_2 = \frac{\pi c}{2\omega} = \frac{1}{4}\lambda$$

Vzdálenost mezi uzlem a kmitnou je tedy čtvrtina vlnové délky.

Ze vztahů (41) a (61) můžeme vypočítat složku (ve směru osy  $x$ ) akustické rychlosti:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -j \frac{\omega}{c} D_1 e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} - j \frac{\omega}{c} D_2 e^{j\omega(t+\frac{x}{c})} \quad (70)$$

Upravíme stejným způsobem, jako u akustického tlaku, vyjádříme  $D_1 = D_1 - D_2 + D_2$ :

$$v = -j \frac{\omega}{c} (D_1 - D_2) e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} + j \frac{\omega}{c} D_2 \left( -e^{j\omega(t-\frac{x}{c})} + e^{j\omega(t+\frac{x}{c})} \right) = v_1 + v_2$$

Opět dostaneme postupnou vlnu  $v_1$  a stojatou vlnu  $v_2$ , kterou se budeme dále zabývat.

$$v_2 = j \frac{\omega}{c} D_2 \left( e^{j\omega \frac{x}{c}} - e^{-j\omega \frac{x}{c}} \right)$$

$$v_2 = j \frac{\omega}{c} D_2 2 \sinh\left(j\omega \frac{x}{c}\right) e^{j\omega t}$$

$$v_2 = j \frac{\omega}{c} 2D_2 j \sin\left(\omega \frac{x}{c}\right) e^{j\omega t}$$

$$v_2 = -2D_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\omega \frac{x}{c}\right) e^{j\omega t}$$

Využijeme vztah  $e^{\pm j\pi} = -1$ :

$$v_2 = 2D_2 \frac{\omega}{c} \sin\left(\omega \frac{x}{c}\right) e^{j(\omega t - \pi)} \quad (71)$$

U rychlosti můžeme analogicky jako u tlaku určit vzdálenost mezi sousedními uzly, resp. kmitnami na  $\frac{1}{2}\lambda$ , a vzdálenost mezi kmitnou a uzlem na  $\frac{1}{4}\lambda$ .

Pro stojaté vlnění je podstatné porovnání amplitudy tlaku (69) a amplitudy rychlosti (71) – zatímco je u tlaku činitel  $\cos\left(\omega \frac{x}{c}\right)$ , u rychlosti je  $\sin\left(\omega \frac{x}{c}\right)$ . Z toho plyne, že amplitudy tlaku a rychlosti jsou vůči sobě fázově posunuty o  $\frac{\pi}{2}$  a to znamená, že tam, kde má rychlost uzel, tam má tlak kmitnu a opačně, tedy při maximální rychlosti je tlak minimální.

### **Kulová vlna ve sférických souřadnicích** [Podobský, 1999, s. 79-80]

Řešení vlnové rovnice (46) závisí na mnoha faktorech. Vezmeme v úvahu nejjednodušší a zároveň nejčastější případ – kulovou vlnu, která je vyzařována zářičem nultého řádu (bodovým zářičem). Za kulovou vlnu je považována taková vlna, která má ve vzdálenosti  $r$  od zdroje, tzn. na povrchu koule, všude stejnou amplitudu a fázi.

Vyjádříme si (bez odvození) vlnovou rovnici ve sférických souřadnicích:

$$\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2} \quad (72)$$

a její řešení pro postupnou vlnu je:

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \quad (73)$$

Z něho můžeme vyjádřit výraz pro tlak:

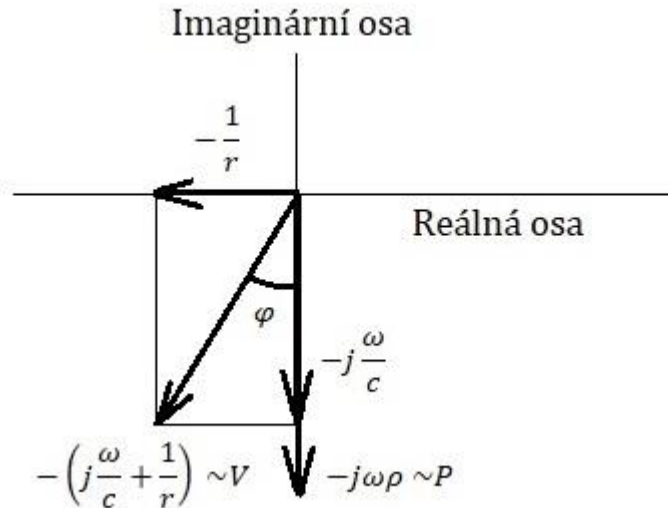
$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -j\omega\rho \frac{A}{r} e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \quad (74)$$

a pro rychlost

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{A}{r} \left( j\frac{\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) e^{j\omega(t - \frac{r}{c})} \quad (75)$$

Z těchto výrazů vidíme, že jsou mezi těmito veličinami pro kulovou vlnu složitější vztahy. U rovinné vlny byla v případě postupné vlny rychlost ve fázi s tlakem. U

stojaté vlny byla amplituda rychlosti fázově posunuta o konstantní hodnotu  $\frac{\pi}{2}$  oproti amplitudě tlaku. U kulové vlny závisí fázový posuv na frekvenci  $\omega$  a na souřadnici  $r$ , jak je vidět na obrázku níže.



Obr. 4 Fázový posuv mezi frekvencí a souřadnicí

Amplituda tlaku  $P$  je imaginární,  $P = -j\omega\rho\frac{A}{r}$ , kdežto amplituda rychlosti  $V$  je komplexní číslo  $V = -\frac{A}{r}\left(j\frac{\omega}{c} + \frac{1}{r}\right)$ . Z obrázku odečteme, že

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{\omega}{c}} = \frac{c}{r\omega} \quad (76)$$

Pro  $r \rightarrow 0$  (tedy v blízkém okolí zdroje)  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$  a je tedy  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , což připomíná stojatou rovinnou vlnu. Pro  $r \rightarrow \infty$  je  $\lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ , tedy stav postupné rovinné vlny. Chování kulové vlny ve velké vzdálenosti od zdroje je jako u rovinné postupné vlny.

### Jevy a vlastnosti zvukových vln [Podobský, 1999, s. 81-83]

Abychom mohli provádět různá pozorování a měření v akustice, musíme znát základní jevy a vlastnosti zvukových vln.

V předchozích kapitolách jsme řešili pouze rovinné vlny. Abychom mohli vysvětlit akustické jevy, musíme zavést tzv. vlnoplochy. Vlnoplochy jsou místa v prostoru, kde všechny sousední body kmitají se stejnou fází, tedy místa, kam se dostane vlna



za nějaký čas  $t$ . Pokud se vlna šíří v homogenním prostředí, šíří se všemi směry stejnou rychlostí a vlnoplocha je kulová plocha. Pokud prostředí, ve kterém se vlna šíří, není homogenní, pak je vlnoplocha různě zakřivená plocha. Speciální případ vlnoplochy je rovinná vlnoplocha, a hovoříme tedy o rovinné vlně.

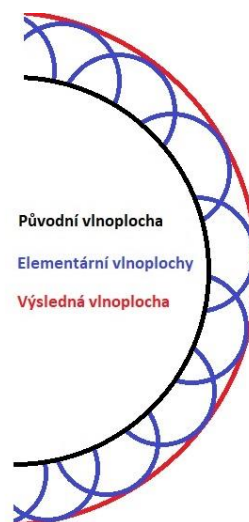
Ještě si zavedeme pojem paprsek vlnění, tedy bodovou řadu ležící ve směru vlnění, kolmou na vlnoplochy. Říkáme, že se prostorové vlnění šíří v paprscích.

### **Huygensův princip** [Podobský, 1999, s. 82-83]

Platnost tohoto principu teoreticky dokázali a doplnili Fresnel a Kirchhoff. Huygensův princip má velký praktický význam, protože nám umožňuje konstrukci vlnoploch při odrazu, lomu nebo i ohybu. Platí pro všechny druhy vlnění, i pro všechny různé tvary vlnoploch v izotropním i anizotropním prostředí.

Podle tohoto principu je každý bod vlnoplochy samostatným zdrojem vlnění, z každého bodu vlnoplochy se šíří kulová elementární vlna. Všechny elementární body kmitají se stejnou fází, proto se spolu skládají a ruší se ve všech směrech mimo vnějšek vlnoplochy ve směru šíření (tzn. na čele vlny).

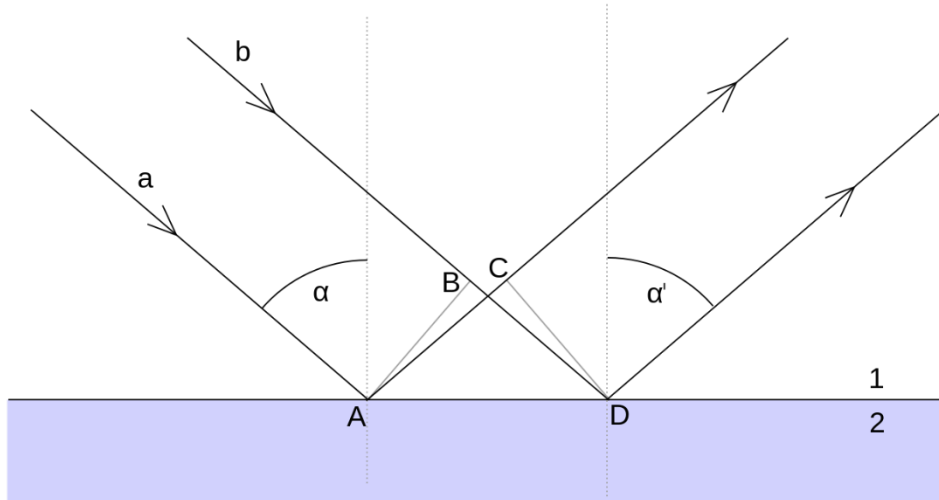
Díky Huygensovu principu můžeme při znalosti tvaru jedné vlnoplochy odvodit tvar další vlnoplochy, či můžeme odvodit princip odrazu či lomu.



Obr. 5 Huygensův princip

### Zákon odrazu vlnění [Podobský, 1999, s. 83 - 86]

Pro názornost si tuto problematiku ukážeme tuto vlastnost (nejen) zvukových vln na rovinné vlně. K těmto jevům dochází na rozhraní dvou prostředí, jak je vidět na obr. 6.



Obr. 6 Odraz vlnění

Rovinná vlna dopadá na rozhraní prostředí 1 a 2. Z rovinné vlny si vybereme dva paprsky  $a$  a  $b$  dopadající na rovinu rozhraní pod úhlem  $\alpha$  a prochází body  $A$  a  $B$ . Než paprsek  $b$  dorazí z místa  $B$  do místa  $D$ , rozšíří se elementární vlna z místa  $A$  (místo dopadu paprsku  $a$  se stalo zdrojem elementární vlnoplochy) do místa  $C$ . Také můžeme považovat všechny body vlnoplochy  $AB$  při postupném dopadu na rovinu  $AD$  za zdroje elementárních vlnoploch, které vytvoří v okamžiku dopadu paprsku  $b$  novou vlnoplochu  $CD$ . Rychlost šíření vlnoploch je stejná, považujeme úsečky  $AC$  a  $BD$  za stejné a platí:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\frac{BD}{AD}}{\frac{AC}{AD}} = \frac{BD}{AC} = 1$$

Z toho

$$\sin \alpha = \sin \alpha'$$

tedy

$$\alpha = \alpha' \quad (77)$$

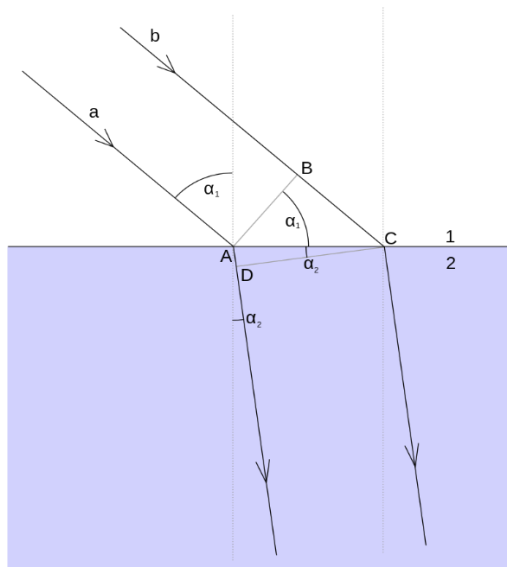
což je zákon odrazu, který nám říká, že vlnění se odráží pod stejným úhlem, pod kterým dopadá. Úhel  $\alpha$  uvažujeme v mezích  $0 - 90^\circ$ .

Zákon odrazu se hojně využívá v akustice, například při konstrukci různých zařízení, zajišťujících například zesilování zvukových signálů, či při úpravách koncertních sálů a poslucháren. Díky odrazu také vzniká chvění akustických útvarů (desky hudebních nástrojů, struny, vzduchové sloupce).

Odraz zvukových vln rovněž způsobuje ozvěnu. Lidské ucho neumí rozlišit odražený zvuk od původního, pokud se zvuk odráží od překážky blízké zdroji. Je-li překážka od zdroje zvuku vzdálenější [Strouhal, 1902, s. 232-], posluchač zaznamená mezi původním zvukem a odraženým opoždění a vzniká tak dozvuk nebo ozvěna. Pokud je zdrojem zvuku například tlesknutí (tj. jeden samostatný zvuk), aby byl zaznamenán rozdíl mezi původním a odraženým zvukem, bude potřeba zpoždění odraženého zvuku minimálně 0,1 s. Za tuto dobu zvuk urazí dráhu 34 m, překážka tedy musí stát minimálně 17 m daleko od zdroje, aby posluchač zaznamenal rozdíl mezi původním a odraženým zvukem. Odraz zvukových vln se řídí stejným principem, jako odraz vln optických, musí se ale vzít v potaz rozdílná délka těchto vln. Zatímco optické vlny jsou krátké, zvukové jsou mnohem delší, a proto potřebují větší plochy pro odraz, a na rozdíl od optických vln nepotřebují pro odraz hladké plochy. Zvuk se odráží například od stěny panelového domu s balkony, zatímco optické vlny se odráží například na zubařském zrcátku.

### **Zákon lomu vlnění** [Podobský, 1999, s. 84-86]

Vlnění, znázorněné paprsky  $a$  a  $b$ , dopadá na rozhraní prostředí 1, ve kterém je rychlost šíření zvuku  $c_1$ , a prostředí 2, ve kterém je rychlost šíření zvuku  $c_2$ , jak vidíme na obrázku č. 7.



Obr. 7 Lom vlnění

Vlna dopadá pod úhlem  $\alpha_1$  a její vlnoplocha prochází body  $AB$ . Než dojde paprsek  $b$  z bodu  $B$  do bodu  $C$ , dostane se elementární vlnoplocha z bodu  $A$  do  $D$ . Na rozhraní obou prostředí dopadá postupně vlnoplocha  $AB$  a vytvářejí se elementární vlnoplochy, které v okamžiku dopadu paprsku  $b$  do bodu  $C$  vytvoří vlnoplochu  $DC$  v druhém prostředí. Pokud jsou rychlosti  $c_1$  a  $c_2$  různé, budou různé i vzdálenosti  $AD$  i  $BC$  a platí:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AD}{AC}} = \frac{BC}{AD}$$

Pokud je doba  $t$ , za kterou se doputuje paprsek  $b$  v prostředí s rychlostí zvuku  $c_1$  z bodu  $B$  do  $C$  a paprsek  $a$  v prostředí s rychlostí zvuku  $c_2$  z bodu  $A$  do  $D$ , pak platí

$$BC = c_1 t \quad \text{a} \quad AD = c_2 t$$

Takže

$$\frac{BC}{AD} = \frac{c_1 t}{c_2 t} = \frac{c_1}{c_2}$$

Z toho dostaneme vztah

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

kterému říkáme zákon lomu a platí stejně, jako zákon odrazu, pro všechny druhy vlnění. Zákon lomu pro zvukové vlny nemá moc velký smysl. Můžeme se podívat na případ, kdy zvukové vlny ze vzduchu dopadají na vodní hladinu. Rychlost zvuku ve vzduchu při 20°C je přibližně  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ve vodě asi  $1445 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{340}{1445} = 0,235$$

$$\sin \alpha = 0,235 \sin \alpha_1$$

Paprsek se láme od kolmice, úhel  $\alpha_1$  musí být větší než  $\alpha$ , zároveň může být maximálně  $\alpha_1 = 90^\circ$ , pak již nastává tzv. totální odraz. V tom případě, když  $\alpha_1 = 90^\circ$  je  $\sin \alpha_1 = 1$ , pak je  $\sin \alpha = 0,235$ , což odpovídá úhlu  $13^\circ 37'$ . Tento výpočet nám ukazuje, že je potřebné, aby zvuková vlna prošla ze vzduchu do vody, aby dopadala pod úhlem menším, než je  $13^\circ 37'$ . Jelikož je tento úhel velmi malý, většina zvukových vln se od vodní hladiny odrazí.

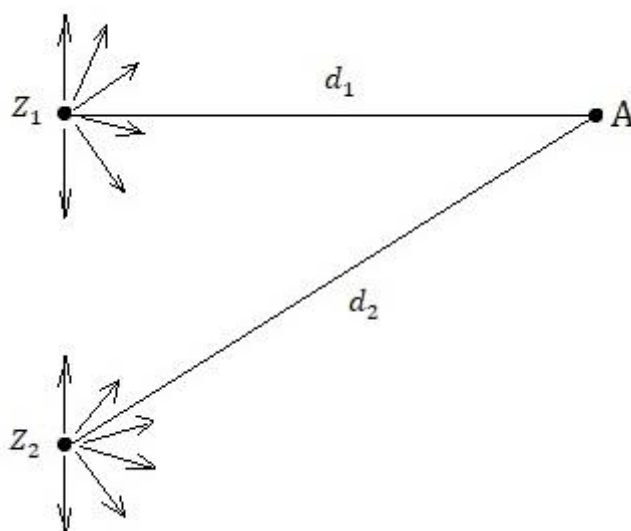
### **Interference a ohyb vlnění** [Podobský, 1999, s. 86-89]

Interference neboli skládání vln nám říká, že pokud se šíří prostorem dvě a více vlnění, skládají se na jedno vlnění. Vlnění v prostoru se mohou šířit různými směry, takže i částice kmitají různými směry, proto je nutno skládat kmitání částic vektorově (pomocí Lissajousových obrazců).

Aby mohlo dojít k interferenci, musí být dodržena podmínka stálosti frekvencí a fázových posuvů jednotlivých vlnění. To je u světelných paprsků zajištěno jen u koherentních paprsků, obecně světelné paprsky z různých zdrojů spolu nemohou interferovat. U zvukových vln je tento problém jednodušší, takže spolu mohou interferovat i vlny z různých zdrojů, pokud jsou splněny podmínky interference. Pro jednoduchou představu například dva reproduktory napájené ze stejného tónového generátoru. Podmínka interference je nejlépe splněna při odrazu zvukové vlny, což nastává prakticky vždy, takže se v akustice s interferencí setkáváme neustále.

Výsledkem dvou proti sobě jdoucích vln je stojatá vlna, interferovat ale mohou i vlny postupující ve stejném směru, v akustice se ale tento případ příliš nevyskytuje. Pro skládání vln, které postupují ve stejném směru, platí stejné podmínky, jako pro skládání kmitů. Pokud jsou u určitém místě vlny se stejnou frekvencí také ve

stejné fázi, pak se jejich amplitudy sčítají. Pokud jsou v opačné fázi, amplitudy se odečítají. Je-li jejich fázový posuv mezi 0 a  $\pi$ , pak je amplituda výsledného vlnění dána vztahem (13).



Obr. 8 Vlnění ze dvou zdrojů

Do místa A přichází dvě vlnění se stejnou frekvencí z různých zdrojů  $Z_1$  a  $Z_2$ , výsledná vlna závisí na fázovém rozdílu obou vln, ale také na fázovém rozdílu, který je dán různou vzdáleností místa A od obou zdrojů a říkáme mu dráhový rozdíl  $\delta$ .

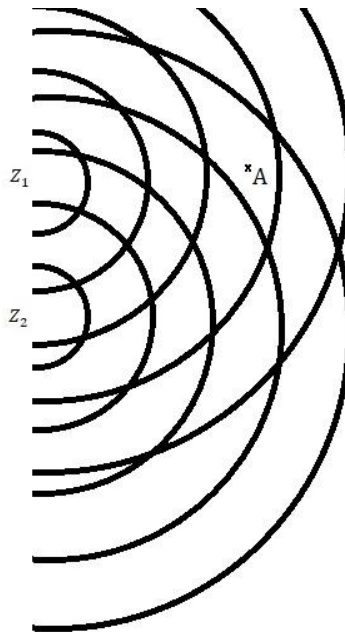
$$\delta = d_2 - d_1$$

Tento dráhový rozdíl určuje fázový rozdíl  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega\tau = \omega \frac{\delta}{c} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (78)$$

kde  $\tau$  je doba, kterou potřebuje zvuková vlna k uražení dráhy  $\delta$ .

Pokud budou oba zdroje kmitat se stejnou fází, pak bude výsledná vlna záviset pouze na dráhovém rozdílu  $\delta$  obou vln. Pro  $\delta = k\lambda$  je  $\varphi = 2k\pi$ , vlny se zesilují, protože se setkávají ve fázi. Pro  $\delta = (k + 1)\frac{\lambda}{2}$  je  $\varphi = (2k + 1)\pi$ , vlny se zeslabují, protože se setkávají v opačné fázi. Zdroje mohou mít obecně různou vzdálenost, ale i kvůli různému směru šíření obou vln se v těchto místech úplně neruší. Graficky můžeme sestavit průběh takových dvou vlnění se stejnou fází, jak vidíme na obrázku níže.



Obr. 9 Interference vlnění z dvou zdrojů

V místech průsečíků kružnic si představíme maxima amplitud složených vln a mezi nimi minima. Takový případ by ale nastal jen ve volném prostoru, pokud by se experiment prováděl v uzavřené místnosti, budou do interference vstupovat i odražená vlnění od stěn. Interferují vlny dopadající na stěny s vlnami odraženými, které jdou v opačném směru. Vznikne tedy velmi složité stojaté vlnění, které způsobuje nerovnoměrnost rozložení zvukové energie v prostoru, vytvoří se tak místa, kde se vlnění zesiluje a naopak místa, kde se vlnění zeslabuje. Tento jev se musí brát v úvahu například při stavbě akustických místností, protože značně ovlivňuje kvalitu zvukové produkce, ovlivňuje také měření prováděná v uzavřených prostorech.

### **Ohyb vlnění** [Podobský, 1999, s. 90-92]

Na rozdíl od optiky nemají ohybové jevy v akustice tak veliký význam, podílejí se převážně na šíření hluku. U optického vlnění, šířícího se přímočaře, za překážkou vzniká stín, kdežto u akustického vlnění vzniká pozvolný přechod a můžeme tak pozorovat i vlnění za překážkou. Mluvíme tedy o ohybu vlnění.

Stručně si vysvětlíme pomocí Huygensova principu, tedy představme si vlnoplochu A procházející do místa B tak, že se každý bod vlnoplochy A stává zdrojem elementárních vlnoploch. Pokud vezmeme v úvahu blízké body, jejich dráhový rozdíl bude

nepatrný, a do místa, kde interferují budou přicházet s nepatrným fázovým rozdílem, takže se jejich účinky budou zesilovat. Pokud vezmeme v úvahu vzdálenější body, jejich elementární vlny budou přicházet značným dráhovým rozdílem  $\delta$ . Pokud  $\delta = \frac{\lambda}{2}$ , budou se jejich účinky odečítat, přičemž nějaké vzdálené body najdeme vždy. Výsledkem je malá část původní vlnoplochy A, která přispívá ke vzniku vlnění na vybraném místě vlnoplochy B. Této malé ploše říkáme účinná část vlnoplochy a její velikost závisí na vlnové délce – čím delší vlnová délka, tím větší účinná část vlnoplochy, její průměr je řádově srovnatelný s vlnovou délkou.

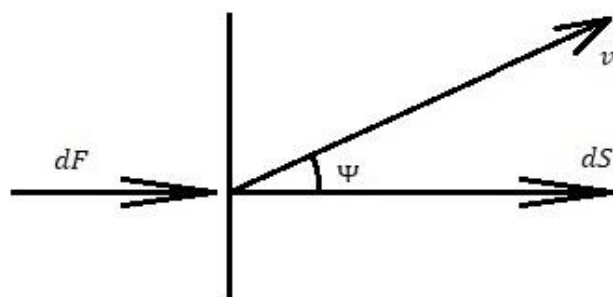
Z toho nám plyne, že postavíme-li zvukové vlně překážku, bude záležet na jejich rozměrech. U malých překážek, srovnatelných s vlnovou délkou, se vlnění dostává i za překážku, ohyb se projeví. U velkých překážek, větších než vlnová délka, se na vzniku vlnoplochy podílí vzdálenější body s  $\delta = \frac{\lambda}{2}$ , jejichž účinky se odečítají, tedy za překážkou se bude vyskytovat vlnění s velmi nízkou energií, vzniká akustický stín.

Pokud si problém vztáhneme na opačnou situaci, kdy vlnění bude procházet otvorem například ve stěně, opět bude záviset na velikosti otvoru. Bude-li velikost otvoru mnohem menší než vlnová délka, bude se za otvorem šířit vlna, nastane ohyb vlnění. Bude-li otvor mnohem větší než vlnová délka, bude se vlnění otvorem šířit jen ve směru pohybu vlny. Na okraji stěny se vytvoří zvukový stín, ohyb se projeví pozvolným přechodem mezi akustickým stínem a místy, kde se vlny šíří.

### **Intenzita zvuku, hladina zvuku a hladina hlasitosti [Podobský, 1999, s. 92-97]**

Intenzita zvuku je definována jako zvukový výkon procházející jednotkovou plochou, kolmou ke směru šíření. Budeme uvažovat podélnou vlnu, takže rychlost kmitání částec má směr šíření zvukové vlny.





Obr. 10 Intenzita zvuku

Normála plochy  $dS$  svírá se směrem šíření úhel  $\Psi$ , jak vidíme na obrázku výše, pak je výkon  $dP$  procházející plochou  $dS$ :

$$dP = \mathbf{v}d\mathbf{F} = vpdS \cos \Psi$$

kde  $v$  je rychlost kmitání částic prostředí,  $d\mathbf{F}$  je síla, kterou působí akustický tlak  $p$  na plochu  $dS$ . Celkový výkon procházející plochou  $S$  pak je:

$$P = \iint pv \cos \Psi dS$$

Pokud bude tlak i rychlost v každém místě plochy konstantní a jestli bude plocha kolmá ke směru šíření, pak bude okamžitý výkon

$$P = pvS \quad (79)$$

A intenzita

$$I = \frac{P}{S} = pv \quad (80)$$

Budeme-li chtít měřit okamžitý výkon, musíme postupovat podobně, jako při měření elektrických veličin. Tam je měřen výkon průměrnou hodnotou během jednoho kmitu pomocí efektivních hodnot elektrických veličin. I v akustice můžeme ukázat, že pokud bude

$$p = p_0 \sin \omega t \quad \text{a} \quad v = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

kde  $p_0$  a  $v_0$  jsou amplitudy obou veličin a  $\varphi$  je fázový posuv mezi nimi. Střední výkon během jedné periody můžeme vypočítat pomocí vztahu:

$$P = \frac{S}{T} \int_0^T p v dt = S \frac{p_0 v_0}{2} \cos \varphi \quad (81)$$

kde  $T$  je doba kmitu. Nyní zavedeme efektivní hodnoty veličin  $p$  a  $v$ :

$$p_{ef} = \frac{p_0}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad v_{ef} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \quad (82)$$

Potom bude

$$P = S p_{ef} v_{ef} \cos \varphi \quad (83)$$

a

$$I = \frac{P}{S} = p_{ef} v_{ef} \cos \varphi \quad (84)$$

U rovinné postupné vlny platí vztah (64), tedy

$$\frac{p}{v} = \rho c$$

Protože je u rovinné postupné vlny  $\varphi = 0$ , platí zároveň

$$\frac{p}{v} = \frac{p_0}{v_0} = \frac{p_{ef}}{v_{ef}} = \rho c \quad (85)$$

a pomocí tohoto vztahu pak bude intenzita rovinné postupné zvukové vlny dána vztahem:

$$I = p_{ef} v_{ef} = \frac{p_{ef}^2}{\rho c} = \rho c v_{ef}^2 \quad (86)$$

Z toho vidíme, že intenzitu můžeme určit změřením efektivní hodnoty rychlosti nebo tlaku pomocí nějakého elektroakustického snímače či mikrofону. Pro jiný typ zvukové vlny je však situace složitější. Ukažme si to na příkladu kulové vlny, kdy opět budeme uvažovat plochu kolmou ke směru šíření, je obecně podle (74) a (75):

$$I = p v = j \omega \rho \frac{A}{r} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \frac{A}{r} \left( j \frac{\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}$$

z čehož lze vidět, že intenzita kulové postupné zvukové vlny je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti:

$$I \sim \frac{1}{r^2} \quad (87)$$

Když si uvědomíme, že vyzařovaný zvukový výkon je konstantní na kulové vlnoploše, která se zvětšuje s druhou mocninou vzdálenosti, musí intenzita, tzn. výkon na jednotce plochy, s druhou mocninou vzdálenosti klesat.

Lidské ucho dokáže vnímat velký rozsah zvukové intenzity, poměr nejhlasitějšího ku nejnižšímu činí asi  $10^{13}$ . Počitek (tzn. subjektivní vjem intenzity) sluchového vjemu není lineárně závislý na intenzitě, podle Weber-Fechnerova zákona roste počitek aritmetickou řadou, při čemž intenzita vjemů roste geometrickou řadou. Bylo stanovena jednotka *1 bel*, která značí přírůstek počitku při desetinásobném zvýšení intenzity. Obecně, pokud se zvýší intenzita  $I_1$   $10^b$ krát na hodnotu  $I_2$  vzroste počitek o  $b$  belů:

$$I_2 = 10^b I_1$$

upravíme a zlogaritmováním dostaneme

$$b = \log \frac{I_2}{I_1}$$

kde  $b$  je zde rozdíl hladin počitků v belech. Protože je 1 bel velká jednotka představující desetinásobný vzrůst intenzity, zavádí se jednotka *decibel*, kterou značíme  $dB$ , je desetkrát menší a lidské ucho je schopné ji rozeznat. Pro jednotku  $dB$  bude vztah pro rozdíl hladin vypadat následovně:

$$b = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \quad (88)$$

Podívejme se, jak vnímá lidské ucho různé zvuky, protože dva zvuky stejných intenzit, ale různých frekvencí vnímá i různě hlasitě. Navíc má ucho i tzv. *práh slyšení*, který odpovídá nejslabšímu zvuku, který je lidské ucho ještě schopné zaregistrovat. Pro každou frekvenci máme jiný práh slyšení. Byla vytvořena stupnice pro vnímání hlasitosti zvuku, pro referenční tón 1000 Hz byla určena minimální hodnota intenzity  $I_0$ , kterou je ještě lidské ucho schopné zachytit:

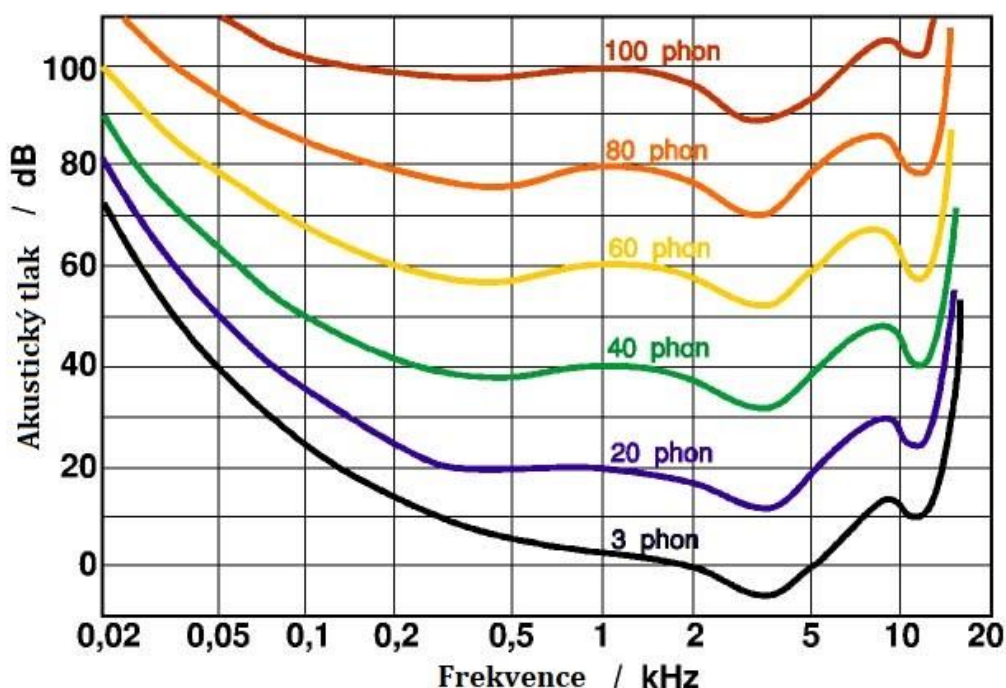
$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

Tato hodnota byla určena statisticky pro 1000 Hz. Pomocí ní byla vytvořena veličina

$$H = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (89),$$

které říkáme hladina hlasitosti, jednotka této veličiny je jeden fon označený *Ph*. Platí pro referenční tón 1000 Hz a s ním spojenou prahovou intenzitou  $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ .

Pokud máme takto určenou stupnici hladiny hlasitosti, můžeme vytvořit stupnici hlasitosti i pro jiné frekvence. Pro každou hladinu hlasitosti se mění frekvence a pro každou frekvenci se mění intenzita zvuku tak, aby byl vjem stejně hlasitý jako u referenčního tónu. Bylo provedeno statistické měření s velkým počtem pozorovatelů a přineslo to výsledek ve formě křivek stejné hlasitosti.



Obr. 11 Izofony

Tyto křivky, tzv. izofony, byly vytvořeny pro jednoduché harmonické tóny, které jsou však v praxi málo časté. Navíc lidské ucho má jinou frekvenční charakteristiku, než mikrofon či jiné akustické přístroje. Z těchto fyzikálních důvodů byla

vytvořena objektivní stupnice zvukových hladin, které vycházejí též ze vztahu (88), nebere ale v úvahu frekvenci. Prahová intenzita má stejnou hodnotu, tedy  $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ . Takto vzniklá objektivní veličina byla pojmenována *hladinou intenzity*, pro odlišení od hladiny hlasitosti je značena  $B$ , jednotkou je také 1 decibel. Hladina hlasitosti a hladina intenzity mají společné vyjádření, ale shodují se pouze při frekvenci 1000 Hz.

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (90)$$

kde  $I$  je intenzita zvuku o libovolné frekvenci  $[I] = \frac{W}{m^2}$ .

Pro rovinnou vlnu, kterou v akustice uvažujeme nejčastěji, platí vztah (86), který dosadíme do (90) a dostaneme:

$$B = 10 \log \frac{v^2}{v_0^2} = 20 \log \frac{v}{v_0} \quad (91)$$

nebo

$$B = 10 \log \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad (92)$$

kde mohou být hodnoty  $v, v_0, p, p_0$  libovolné, ale uvažujeme je vždy efektivní, měřitelné. Akustický tlak  $p$  je nejspodněji měřitelná veličina (stačí mikrofon), proto je vztah (92) velmi důležitý, nazývá se *hladina akustického tlaku*. Prahovou hodnotu  $p_0$  můžeme určit ze vztahu (86):

$$p_0 = \sqrt{I_0 \rho c} = \sqrt{10^{-12} \frac{W}{m^2} \cdot 415 \frac{kg}{m^2 s^{-1}}} = 2,04 \cdot 10^{-5} \frac{N}{m^2}$$

Prahová hodnota akustického tlaku byla stanovena jako  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ .

Křivky stejné hlasitosti jsou užitečné k určování hladin hlasitosti tónů různých frekvencí. Nicméně zvuky v běžném životě většinou nejsou jednoduché, bývají složené z různých frekvencí a pokud chceme zjistit výslednou hlasitost směsi zvuků, křivky nám k tomu neposlouží, protože se hladiny hlasitosti nedají sčítat. Hladiny jsou logaritmickou mírou a sčítání logaritmů představuje násobení intenzit, a to postrádá fyzikální odůvodnění.

Proto byla zavedena nová veličina – *hlasitost* značená  $N$ , která je mírou subjektivního vjemu, který způsobí zvuk v průměrném lidském sluchovém orgánu a byla stanovena statisticky. Pro výslednou hlasitost více tónů vnímaných současně platí rovnost se součtem dílčích hlasitostí, a platí to i pro tóny různých frekvencí. Jednotka hlasitosti je 1 son, což odpovídá hlasitosti referenčního tónu 1000 Hz s hladinou zvuku 40 dB. Vztah mezi hlasitostí  $N$  vyjádřenou v sonech a hladinou hlasitosti  $H$  ve fonech je:

$$N = 2^{\left(\frac{H}{10} - 4\right)} \quad (93)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pokud se hladina hlasitosti  $H$  zvýší o 10 fonů, hlasitost  $N$  se zvýší na dvojnásobek.

### **1.3 Lidské ucho a zpracování zvukové informace**

Zvuk je [Syrový, 2013, s. 46-51] sluchem vnímaný kmitavý pohyb hmoty, která je tvořena nejčastěji částicemi vzduchu v okolí našeho ucha. Vlastnosti tohoto pohybu se přenáší pomocí sluchového orgánu do našeho vědomí a vnímáme je jako sluchový vjem. Vlastnosti sluchového orgánu mají vliv na kvalitu vnímaného signálu, nedají se ale přímo měřit a vyjádřit veličinami, na rozdíl od vlastností zvukového signálu (např. frekvence, akustický tlak), jsou proto popsány jako výsledky experimentů zaměřených na schopnosti sluchového orgánu jedince, kdy se využívají zejména jednoduché (čisté) tóny sinusového průběhu.

#### **Stavba lidského ucha**

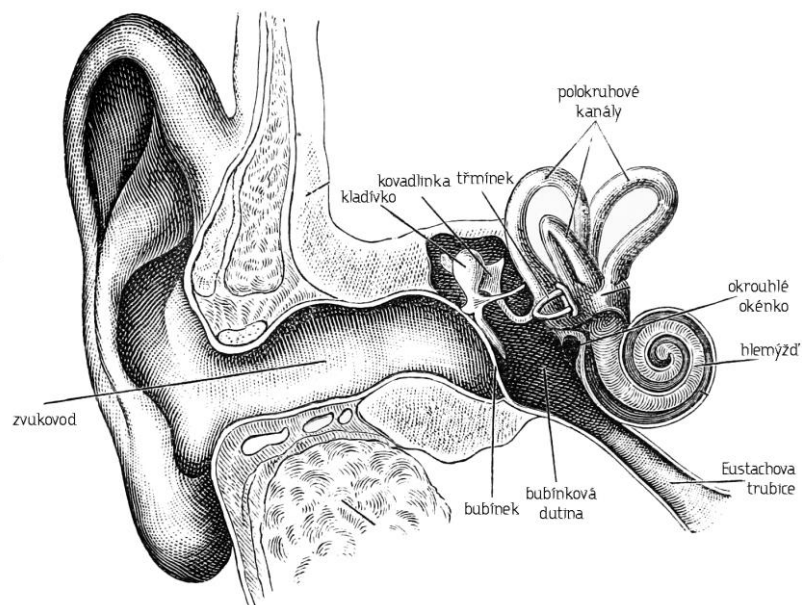
Zvuková informace prochází postupně různými částmi, od vnějšího ucha, které zachytí kmity částic, přes střední ucho, které převádí mechanické vibrace až do kapaliny ve vnitřním uchu, odkud se nervovými vlákny šíří vzruch až do mozkového centra a jeho sluchové kůry.

Vnější ucho má dvě hlavní části – boltec a zvukovod zakončený blanou bubínku. Jednotlivé záhyby boltce mají význam lokalizace zdroje zvuku, jeho vzdálenosti a směru. Zvukovod je tvořen chrupavčitou trubicí eliptického průřezu o celkové délce až 35 mm. Zvukovod chrání další části ucha před poškozením a také ovlivňuje svými vlastnostmi přenos zvukové informace. Vnější ucho pomáhá transformovat vliv rušivého šumu a spolu s hlavou výrazně ovlivňuje přenos akustického vzruchu z okolního prostředí až na bubínek, který většinu energie absorbuje.

Střední ucho je od vnějšího ucha odděleno bubínkem, převodní systém je umístěn v dutině vyplněné vzduchem. Od vnitřního ucha je odděleno kulatým okénkem. Na bubínkovou dutinu navazují ještě další dutiny, které účinně pohlcují zvukovou energii a také velmi důležitá Eustachova trubice ústící do nosohltanu, vyrovnávající při každém polknutí tlak vzduchu s vnějším prostředím. Na bubínek nálevkovitého tvaru s vrcholem dovnitř je přirostlá rukojeť kladívka, jehož druhý konec je spojen kloubem s kovadlinkou, na jejíž výběžek navazuje třmínek, který je srostlý s blankou kulatého okénka. Tyto kůstky tvoří pákový mechanismus, sloužící k převodu kmitů z vnějšího vzdušného prostředí do kapaliny ve vnitřním uchu, aniž by docházelo k velkým ztrátám, ke kterým by docházelo při přímém přechodu

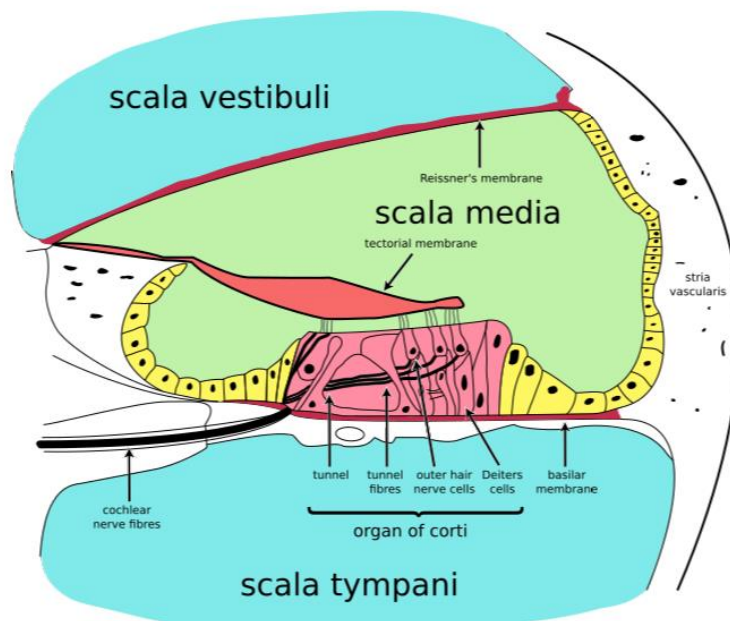
vlnění ze vzduchu do kapaliny. Kmity bubínku o malé síle a velké výchylce se přemění na kmity kruhového okénka o velké síle a malé výchylce, které dokáží uvést do pohybu kapalinu za kruhovým okénkem.

Oválné okénko je začátkem vnitřního ucha, které se skládá z ústrojí rovnováhy a hlemýždě – kostěná trubice stočená do spirály. Trubice je podélně rozdělena kochleární přepážkou, na které je vlastní smyslový orgán – Cortiho ústrojí, a spojena na vrcholu hlemýždě. V kanálku, kde je uloženo Cortiho ústrojí, se nachází bazilární membrána, na které jsou umístěny smyslové vláskové buňky, tektoriální membrána a Reissnerova membrána, kanálek je naplněn endolymfou s vysokým obsahem draslíku, trubice je vyplněna perilymfou s vysokým obsahem sodíku.



Obr. 12 Průřez lidským uchem





Obr. 13 Průřez hlemýžděm

### Princip slyšení a zpracování zvuku

Pro centrální zpracování zvukové informace a její přenos sluchovým nervem jsou kódovány jednotlivé základní charakteristiky – frekvence, intenzita a směr. Frekvenční podnět souvisí s místem podráždění hlemýždě, odkud se příslušnými vlákny sluchového nervu vede informace do centra. K přímému vyhodnocení frekvence při centrálním zpracování dochází pouze v omezeném rozsahu, protože vysílání vzruchu při každé periodě vnímaného podnětu je časově omezené – nervové prvky totiž potřebují minimálně 1msec k restituci po podráždění, proto jsou podněty s frekvencí nad 4kHz vyhodnocovány jen podle místa podráždění hlemýždě.

Intenzita podnětu souvisí s frekvencí akčních potenciálů (frekvence stoupá s rostoucí intenzitou) a s postupnou aktivací sousedních nervových vláken.

Směr, ze kterého přichází zvukový podnět, je určován na základě dvou skutečností. Šikmo dopadající zvuková vlna dopadá na jedno ucho dříve, než na druhé a současně je na druhém uchu vnímána jako slabší. Nižší akustický tlak způsobí opožděné vybavení akčních potenciálů a podráždění dojde do centra se zpožděním.

Obě tato zpoždění se sčítají, čímž se potvrdí směr zdroje. Časové zpoždění mezi ušima s intenzivním rozdílem umožňují určení směru především v horizontální rovině. Pro orientaci v celkovém prostoru je potřeba zapojit ještě pohyb hlavy, vnímání změn barev zvuků a důležitou roli hraje také posluchačova zkušenost.

Akustický tlak vyvolá pohyb bubínku, který se přenáší systémem středního ucha až na oválné okénko, jehož okamžitá výchylka má opačnou fázi než okrouhlé okénko, na které se rozruch šíří perilymfou, v níž umístěné Reissnerova a bazální membrána jsou poddajné a deformují se postupující tlakovou vlnou. Rozruch se přenáší až do endolymfy a působí posun tektoriální membrány vůči bazální membráně, čímž dochází k podráždění vláskových buněk, které prostřednictvím sluchového nervu předávají informaci do mozku.

Rychlost vlny šířící se v hlemýždi je u oválného okénka menší, než rychlost šíření zvuku ve vzduchu a rychlost i vlnová délka postupně klesá. Tento jev je způsoben rozšiřováním bazilární membrány směrem k helikotremě. Vlna šířící se podél Cortiho orgánu má narůstající amplitudu a vysoké frekvence se zatlumí blíže k oválnému okénku, nízké frekvence směrem k helikotremě, při čemž každé frekvenci odpovídá určité místo endolymfatické trubice a tím také místo posuvu tektoriální membrány proti bazilární. Pohyb těchto membrán proti sobě způsobuje ohyb vlásků, který otevírá iontové kanálky a do nitra buňky proudí ionty draslíku, které způsobí depolarizaci buňky a vybuzení akčních potenciálů ve vláčkách sluchového nervu. Na vláskové buňky jsou připojena i eferentní nervová vlákna, která potlačují příjem informací o určitých frekvencích, což pomáhá vysoké citlivosti a rozlišovací schopnosti ucha k různým akustickým podnětům.

Ukončení sluchového nervu je v tzv. kochleárních jádrech v prodloužené míše, odtud vede sluchová dráha do vyšších center ve středním mozku a mezimozku, a nakonec pak do mozkové kůry ve spánkovém laloku velkého mozku. Vzruchy se vedou do center, kde jsou porovnávány se vzruchy z druhého ucha, informace končí v primární sluchové kůře, která je obklopena sekundárními sluchovými oblastmi, které mají za úkol analýzu komplexních zvuků, krátkodobou paměť při porovnávání zvuků, zaměření pozornosti na sluchové podněty atp. Takto zpracovaný sluchový vjem pak přechází do našeho vědomí.

## 1.4 Měření rychlosti zvuku

Na rozdíl od světla, které se šíří i ve vakuu, zvuk pro své šíření potřebuje nějaké prostředí – plynné, kapalně či pevné. Nejčastěji vnímáme šíření zvuku vzduchem, jelikož se v něm běžně nacházíme.

Jak uvádí Č. Strouhal [1902, s. 200], pozornosti žádného člověka neujde, že se zvuk nešíří vzduchem okamžitě, ale v určité době, která závisí na vzdálenosti pozorovatele od zdroje zvuku. *„Když se dá na lokomotivě rychlovlaku signal parní píšťalou, spatříme zdaleka, jak bělavá vodní pára vyrazí do vzduchu, ale zapísknutí slyšíme až později. Podobně hukot hromu následuje po výboji bleskovém v době kratší neb delší dle vzdálenosti mračen.“* Taková pozorování vedla již v nejstarších dobách k přesvědčení, že se zvuk ve vzduchu šíří konečnou rychlostí. Již Titus Lucretius Carus (97 př.n.l.–55 př.n.l.) ve svém díle O přírodě (De rerum natura) píše: *Dříve postřehne blesk vždy naše oko než hřmění k sluchu nám dojde; to z té se příčiny děje, že pozděj dojem proniká v sluch než v oko to co je dráždí...*

V 17. století zkonstruoval Otto von Guericke (1602–1686) vývěvu, pomocí které dokázal rozdílnost v šíření světla a zvuku. Dodnes se experimentem, zapsaným v jeho spise *Experimenta Nova*, ukazuje nemožnost šíření zvuku v prázdném prostředí (ve vakuu). [Strouhal, 1902, s. 201,202] Guericke zavěsil do recipientu hodinový stroj, který každou půl hodinu zazvonil na zvoneček. Při vyčerpávání vzduchu bylo slyšet slábnoucí zvuk zvonečku, až téměř ustal. Kvůli zavěšení zvonku nedojde k úplnému utlumení, protože zvuk se přenáší přes závěs na recipient.



Obr. 14 Zvuk se nešíří ve vakuu

Od kvalitativních pozorování šíření zvuku se v 17. století přešlo k pozorováním kvantitativním. První vyčíslení rychlosti zvuku pochází z roku 1640 od P. Mersena, jeho tehdy ještě odhad činil  $448 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . V tomto období se rychlost zvuku měřila poměrně jednoduchou metodou. Z místa A se ve smluvenou dobu vystřelilo a pozorovatel v místě B určil díky chronometru okamžik, ve kterém uviděl záblesk výstřelu a druhý okamžik, kdy výstřel uslyšel. Díky vysoké rychlosti světla byl záblesk zaznamenán v okamžiku výstřelu. Vzdálenost, mezi místy A a B se volila největší možná, a zároveň se experiment prováděl při co nejklidnějším vzduchu. Známá byla tedy vzdálenost obou míst a opoždění rány, dále se zaznamenávala teplota, vlhkost a tlak vzduchu.

### Stanovení teoretického vzorce

Po prvních pokusech přišlo na řadu stanovení teoretického vzorce, pomocí něhož by se dala rychlost zvuku vyjádřit číselně. [Strouhal, 1902, s. 203-207] Tímto se zabýval *I. Newton* ve spise *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), kde počítá dle svého vzorce hodnotu rychlosti  $c$ , přičemž ale konstatuje neshodu s pozorováním. (Tento postup zde zmiňuji kvůli historické zajímavosti a důležitosti, správný vzorec již známe z teoretické části a historické odvození bude následovat). Newton uvádí v principiích větu, kterou vyjádřil vztahem:

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}$$

kde  $E$  je modul objemové pružnosti a  $S$  značí specifickou hmotu látky.

$$E = \frac{F}{L^2}$$

$$S = \frac{M}{L^3}$$

$$\frac{E}{S} = F \cdot \frac{L}{M} = \frac{LM}{T^2} \frac{L}{M} = \frac{L^2}{T^2} = c^2$$

Modul objemové pružnosti je v tomto případě roven tlaku vzduchu  $p$  vztaheném na jednotku povrchu.

Z Boyle-Mariottova zákona máme dáno:

$$pV = konst.$$

Pokud se tlak změní o  $\Delta p$ , změní se i objem o  $\Delta V$ , pak

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = konst.$$

Vzájemným vydělením předchozích rovnic dostaneme

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-1}$$

Z čehož úpravou dostaneme

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{\Delta V}{V} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 - \dots$$

Relativní objemová změna bývá velmi malá. Roztáhne-li se plyn, je relativní změna tlaku negativní. Je-li  $\frac{\Delta V}{V}$  negativní (plyn se stlačuje), poté při nahrazení  $-\frac{\Delta V}{V}$  za  $+\frac{\Delta V}{V}$  dostaneme:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta V}{V} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \dots$$

Přírůstek  $\frac{\Delta p}{p}$  je téměř shodný s úbytkem  $\frac{\Delta V}{V}$ . Dle definice objemového modulu tedy

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V}$$

potom

$$E = p + p \frac{\Delta V}{V} + \dots$$

Poměr  $\frac{\Delta V}{V}$  můžeme označit jako přírůstek hustoty, při akustických jevech nabývá velmi malých hodnot. Proto získáme vztah

$$E = p$$

Pokud nahradíme specifickou hmotu  $S$  za  $\sigma$  (dnes značíme hustotu  $\rho$ ), dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{p}{\sigma}}$$

Podle tohoto Newtonova vzorce je výpočet jednoduchý, nicméně vypočtená hodnota  $280 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  má velikou odchylku od hodnot získaných pozorováními, které nebývaly menší než  $330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Tato odchylka dala impuls k vypracování nových pozorování. Například kolem roku 1700 *R. Boyle* našel hodnotu  $366 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , nebo pánové *Cassini*, *Huygens*, *Picard* a *Römer* hodnotu  $356 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Později v roce 1708 a 1709 *Flamsteed* a *Halley* zjistili hodnotu rychlosti zvuku  $348 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Z těchto měření bylo například zjištěno, jaký má na měření účinek vítr a pomohlo při dalších pozorováních, která podnikla Pařížská akademie věd v roce 1738, jež dala výslednou hodnotu  $332 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Takováto měření probíhala i na jiných místech. Například v jižní Americe v roce 1740, při velmi nízkém tlaku byla rychlost zvuku určena na  $339 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , v roce 1744 za vysoké teploty byla výsledná rychlost  $357 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Experimenty, které byly provedeny potvrdily některé z Newtonových předpokladů. Po těchto pozorováních bylo jisté, že rychlost zvuku ve vzduchu nezávisí na jeho tlaku, ale závisí na jeho teplotě. Také se potvrdila důležitost směru větru. Nicméně tyto experimenty nedokázaly zatím vysvětlit odchylku výpočtu z Newtonova vzorce oproti pozorováním.

S uspokoivým vysvětlením [Strouhal, 1902, s. 208-214] přišel až *Laplace* v roce 1816, ve svém pojednání „O rychlosti zvuku ve vzduchu a ve vodě“, kde hovořil o efektu oteplení a ochlazení, ke kterému dochází při zředění a zhuštění vrstvy vzduchu díky kmitavému pohybu. Při špatné tepelné vodivosti vzduchu a vysoké frekvenci kmitů se nebude teplo předávat dalším vrstvám. Z toho plyne, že nemůžeme uvažovat Boyle-Mariottův zákon, který se vztahuje na izotermické děje, ale zákon vztahující se na adiabatické děje, Poissonův zákon vyjádřený vztahem

$$pV^k = \text{konst.}$$

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

kde  $C_p$  je tepelná kapacita při konstantním tlaku a  $C_v$  při konstantním objemu. Pokud se tlak změní o  $\Delta p$ , změní se i objem o  $\Delta V$ , pak

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V)^k = \text{konst.}$$

Vzájemným vydělením předchozích rovnic dostaneme

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-k}$$

Z čehož úpravou dostaneme

$$\frac{\Delta p}{p} = -k \frac{\Delta V}{V} + \frac{k(k+1)}{1.2} \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 - \dots$$

Stejnou úvahou jako u izotermického děje, je relativní objemová změna velmi malá. Roztáhne-li se plyn, je relativní změna tlaku negativní. Je-li  $\frac{\Delta V}{V}$  negativní (plyn se stlačuje), poté při nahrazení  $-\frac{\Delta V}{V}$  za  $+\frac{\Delta V}{V}$  dostaneme:

$$\frac{\Delta p}{p} = k \frac{\Delta V}{V} + \frac{k(k+1)}{1.2} \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \dots$$

Analogicky k úpravám výše, a z definice modulu objemové pružnosti

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V}$$

dostaneme

$$E = kp + \frac{k(k+1)}{1.2} p \frac{\Delta V}{V} + \dots$$

Poměr  $\frac{\Delta V}{V}$  můžeme označit jako zhuštění, které při akustických jevech nabývá velmi malých hodnot. Proto můžeme napsat

$$E = kp$$

A z toho pak dostaneme Laplaceův vzorec pro rychlost zvuku

$$c = \sqrt{k \frac{p}{\sigma}}$$

Laplaceův výpočet ze vzorce již dobře souhlasí s pozorováním, přestože v době jeho odvození nebyl tak přesný, protože konstanta  $k$  (dnes *Poissonova* konstanta  $\kappa$ ) měla tehdy jen přibližnou hodnotu. Nicméně platnost vzorce byla ověřena při pozorováních v letech 1822 (výsledná rychlost  $c_0 = 330,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) a 1823 ( $c_0 =$

332,05 m·s<sup>-1</sup>). V tomto období byla také ověřena nezávislost rychlosti zvuku ve vzduchu na jeho tlaku měřeními v horských oblastech ( $c_0 = 332,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Všechny tyto experimenty byly zatíženy poměrně velkou subjektivní chybou [Strouhal, 1902, s. 215-221], jelikož časové měření provádělo na daných pozorovatelných vždy několik osob tak, že každý určil dle chronometru okamžiky, kdy výstřel zahlédl a kdy ho uslyšel. Někdy se hodnoty lišily i o více než půl sekundy, což při několika kilometrové vzdálenosti pozorovatelů způsobilo velkou odchylku. O eliminaci této subjektivní chyby se postaral *Henri Victor Regnault* (1810-1878) důmyslným zařízením, které místo chronografu používalo ladičku písíci na začazený válec. Výstřel byl zaznamenán pomocí elektrického obvodu, který se výstřelem přerušil a tím se vychýlené registrující péro vrátilo do rovnovážné polohy, přičemž zároveň na válci udělalo značku. Jako snímač zvuku sloužila kaučuková membrána, na které byl umístěn platinový plíšek napojený na jeden pól baterie. V blízkosti plíšku byl umístěn platinový hrot, který byl napojen na druhý pól baterie. V momentě, kdy k membráně došla zvuková vlna, membrána se vychýlila a obvod se uzavřel a elektromagnetický registrátor udělal na válci značku.



Obr. 15 Régnaultův chronograf

Podobně také pozoroval šíření zvuku v trubicích. Využil toho, že se v tomto období v Paříži zaváděly nové plynovody a vodovody, přičemž délka plynovodu, který mohl použít k experimentům činila 3,625 km (při tloušťce potrubí 10,8 cm a 21,6 cm), délka vodovodního potrubí činila 4,900 km (při tloušťce potrubí 30 cm a 110 cm). Trubky plynovodu plnil různými plyny, takže mohl určit i rychlost zvuku



v jiných plynech než pouze ve vzduchu. Experiment probíhal tak, že na jeden konec trubice nasadil železný plech s upevněnou izolovanou pistolí, před kterou byl drátek, který se výstřelem přerušil. Na druhém konci trubice byla umístěna svislá kaučuková membrána s plíškem a platinovým hrotem uprostřed. Těmito pokusy změřil zajímavý jev, totiž odraz zvukových vln. Zvuk po výstřelu doputoval na membránu, kde se odrazil, putoval zpět a na železném plechu se opět odrazil a dále se šířil k membráně, která takto zaznamenala zvuk původního výstřelu, ale i několik jeho odrazů.

Régnaultovo bádání můžeme shrnout do několika poznatků. Intenzita zvukové vlny v trubici se s uraženou vzdáleností snižuje, zvuk slábne. V užších trubicích je tento jev výraznější než v těch širších, kde se zvuk šíří do velké dálky při malém zeslabení, také při hladších stěnách trubice se šíří zvuk dále než při stěnách hrubých, což bylo vysvětleno třením. Také zjistil, že při větší intenzitě zvuku je jeho rychlost při šíření v trubici vyšší, s klesající intenzitou klesá i rychlost zvuku až k mezní hranici, která je závislá na průměru trubice. Při velkých průměrech se mezní hranice blíží hodnotě pro volný vzduch, podle Régnaulta tato hodnota odpovídá rychlosti  $330,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### **Měření rychlosti zvuku v kapalinách a pevných látkách**

Rychlost zvuku v kapalinách i pevných látkách se vypočítá podle stejného vzorce, jako při šíření ve vzduchu, musí se ale brát v úvahu závislost na teplotě, která je významnější než při určování rychlosti zvuku ve vzduchu.

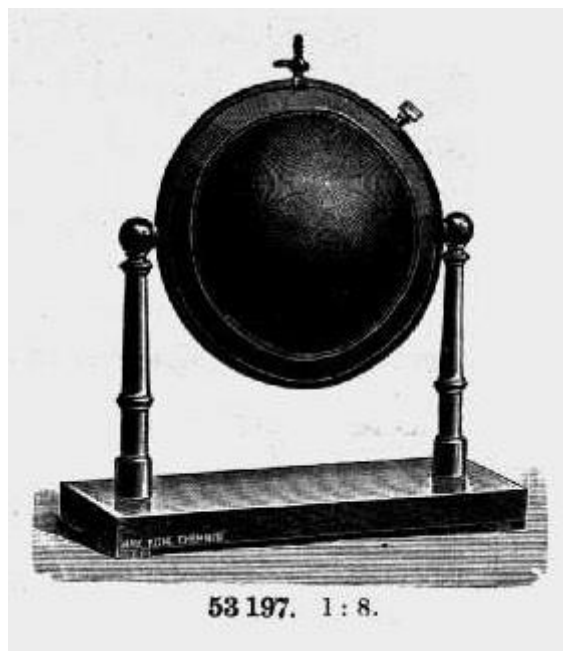
Rychlost zvuku ve vodě poprvé změřil [Strouhal, 1902, s. 229-231] v roce 1827 na Ženevském jezeře *J.D. Colladon* a *Ch. Sturm*. Experiment probíhal na dvou lodích vzdálených od sebe 13,487 km, na první lodi bylo zařízení, které udeřilo kladivem do zvonu, který byl pod vodou a zároveň s úderem se zapálila hromádka prachu, což způsobilo záblesk. Zvuk od zvonu putoval vodou až k membráně na velkém naslouchátku, kterým putoval zvuk až do zvukovodu ucha pozorovatele. I přes subjektivní pozorování záblesku okem a slyšení uchem pozorovatele byla takto určena rychlost zvuku ve vodě ve shodě s výpočtem na  $1435 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . O experimentální určení rychlosti šíření zvuku v pevných látkách se pokoušel například *Wertheim* a *Breguet* v roce 1851 na telegrafních drátech, nicméně výsledky nebyly uspokojivé.

## 1.4 Měření a pozorování akustických jevů

Již dávno před tím, než mohly být vlastnosti zvuku změřeny, byly vnímány lidským uchem. *Jak se do lesa volá, tak se z lesa ozývá.* Toto české přísloví hovoří o odrazu zvukových vln. Tato lidová moudrost pravděpodobně vznikla na základě pozorování daleko dříve, než mohl být jev nějak fyzikálně vysvětlen, nebo změřen. Za povšimnutí také stojí akustika starých budov, zejména chrámů a kostelů, kde se díky jejich konstrukci šíří zvuk pomocí odrazů tak, že v určitých místech je možné slyšet metry vzdáleného řečníka, jako by mluvil přímo vedle posluchače. Nyní si představíme několik historických vynálezů, měřících přístrojů a experimentálních pomůcek, které pomohly k pochopení a objasnění některých akustických jevů.

### Sondhausova čočka

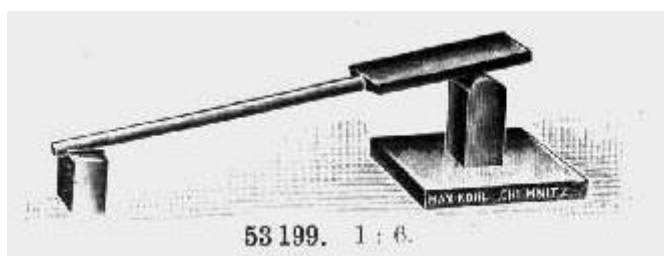
Sondhausova čočka byla vynalezena v roce 1852. Je to přístroj, pomocí něhož se dá dokázat lom zvukových vln. Skládá se ze dvou gumových membrán o průměru 30cm, které jsou připevněné na kovové konstrukci. Uvnitř je kyselina uhličitá. [Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 419]



Obr. 16 Sondhausova čočka

## Trevelyanův přístroj

Jev, na kterém pracuje Trevelyanův přístroj, byl objeven v roce 1805 ve slévárně [Strouhal, 1902, s. 133-134]. Při položení horkého kusu stříbra na železnou kovářinu se stříbro rozezvučelo. Tomuto jevu se věnovalo několik fyziků, mezi nimi i Arthur Trevelyan, který v roce 1829 pozoroval podobný jev při položení horké železné (nebo měděné) tyče na olověný špalek. Tyč se rozezvučí. Jev je možné vysvětlit tak, že horký kov, který jednou hranou leží na olovu, dostane od rozpínajícího se olova náraz, kterým se odstrčí na druhou hranu a tímto způsobem osciluje a vydává zvuk. Olovo je výhodné použít z důvodu velké tepelné roztažnosti a zároveň malé tepelné vodivosti.

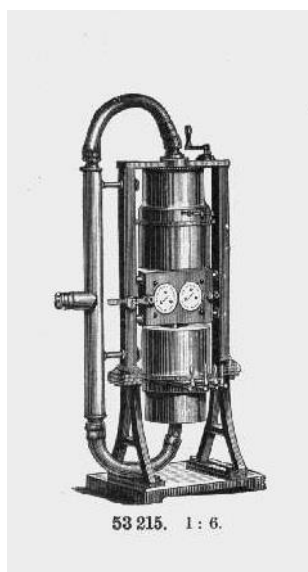


Obr. 17 Trevelyanův přístroj

## Helmholtzova siréna

Hermann von Helmholtz (1821-1894) byl německý lékař, matematik, fyzik, meteorolog a filozof [Hermann von Helmholtz, Wikipedie]. Vystudoval lékařství, nicméně zasáhl do velmi širokého spektra vědeckých odvětví. Ve vztahu k akustice stojí za zmínku kniha vydaná v roce 1863 - Nauka o vnímání zvuků jako fyziologický základ pro teorii hudby. Také vypracoval teorii slyšení, založenou na předpokladu, že ve vnitřním uchu jsou tisíce receptorů citlivých každý na určitou frekvenci, při které daný receptor rezonuje.

Siréna [Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 422] je složená z jednotlivých disků, na kterých jsou rozmístěné otvory odpovídající poměrům tónů  $c : e : g : d$  a v dalším disku odpovídající tónům  $d : g : b : c'$ . Siréna upravená pro potřeby experimentů z hudební teorie pak vydávala různé intervaly – primu, oktávu, kvintu, kvartu, malou i velkou tercii, celé tóny i půltóny.



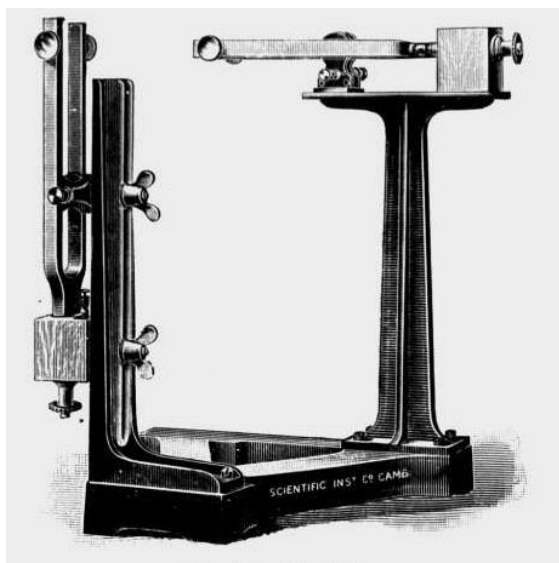
Obr. 18 Helmholtzova siréna

### Harmonograf

Harmonograf je přístroj, který zakresluje křivky složené z pohybu dvou jednoduchých harmonických kmitů [Harmonograph, Wikipedia]. Na přístroji jsou dvě kyvadla, která se pohybují v navzájem různých (ortogonálních) osách. Získané obrazce mohou být elipsy, spirály nebo složitější Lissajousovy obrazce. Dříve se používalo zařízení se dvěma ladičkami uloženými navzájem kolmo, na nichž byla namontována zrcátka. Dnes lze použít osciloskop či počítač k vykreslení Lissajousových obrazců.



Obr. 19 Harmonograf



Obr. 20 Příklad se dvěma ladičkami

### Galtonova píšťala

Tato píšťala vydává zpravidla zvuk v rozmezí 16 kHz – 22 kHz [Galtonova píšťala, Wikipedia]. Využívá se při výcviku zejména psů, kteří vnímají zvuk od 30 Hz do 45 kHz. [Galton whistle, UTSIC] Vynalezl ji sir Francis Galton (1822 – 1911) ke zjištění horního prahu slyšitelnosti, byla také hojně využívána v psychologických laboratořích. Skládá se ze dvou částí, které lze oddálit či přiblížit, čímž se dá upravit frekvence vystupujícího zvuku.



Obr. 21 Galtonova píšťala

## 2 Praktická část

V teoretické části jsou popsány historické experimenty pro měření rychlosti zvuku. Jak plynul čas, vyvíjely se nové modernější pomůcky a metody na detekování a měření vlastností zvuku.

Do této části jsem vybrala z dostupných zdrojů několik měření a ukázek akustických jevů, které se dají jednoduše provést i v učebnách před studenty, a se kterými se mnozí studenti během studia jistě setkali.

## Přímé měření rychlosti zvuku pomocí dvou mikrofonů

### Teorie

U tohoto pokusu vycházíme ze základního vztahu pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s}{t}$$

v našem případě

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

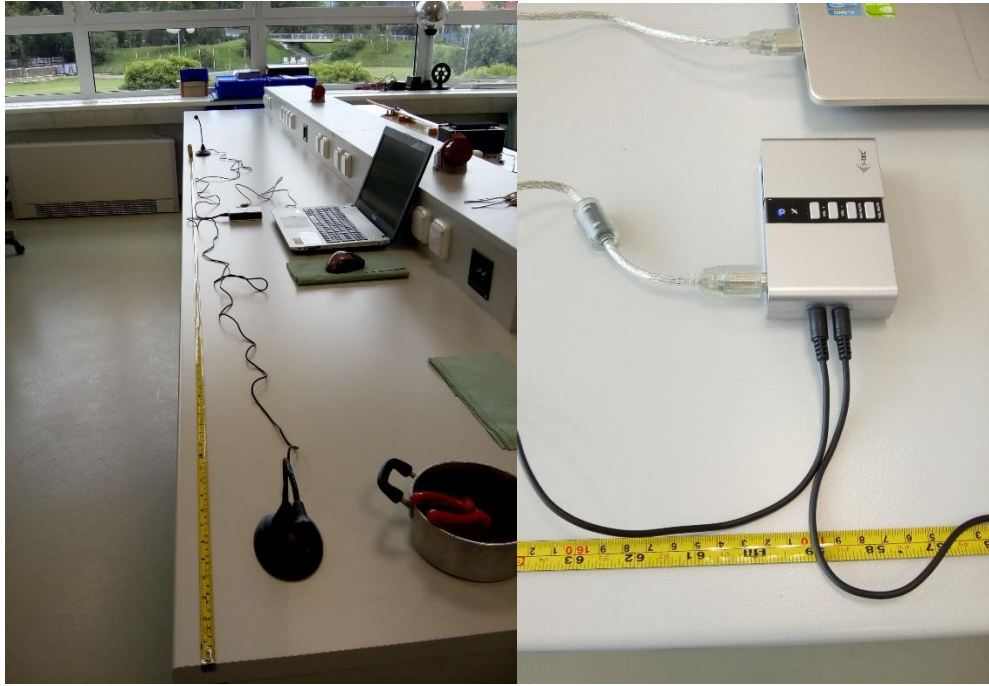
V tomto případě je  $L$  vzdálenost mikrofonů a  $\Delta t$  časový interval, ve kterém zvuk od prvního mikrofonu dorazí ke druhému. Tento interval se musí odečíst správně, jelikož při měření v místnosti na druhý mikrofon nepřichází jen původní zvuk, ale i odražené zvukové vlny, které mohou ztížit odečítání intervalu.

### Pomůcky

Počítač s vhodným softwarem, 2 mikrofony, externí zvukový USB modul, zdroj zvuku – v našem případě porcelánový talířek a lžička, či jiný zdroj ostrého zvuku po úderu

### Postup

Oba mikrofony se zapojí do externího modulu a změří se vzdálenost mezi nimi. Po zapojení mikrofonů se spustí software pro záznam zvuku, v našem případě program Audacity, který je volně dostupný. V případě potřeby proběhne nastavení zvukové karty a programu, aby byl nahráván signál z USB modulu. Po nahrání zvukového signálu se vhodně zvětší stopa tak, aby byl vidět okamžik, kdy přišel signál na každý z obou mikrofonů a odečteme  $\Delta t$  a zaneseme do tabulky. Nakonec porovnáme výslednou rychlost zvuku s tabulkovou hodnotou pro danou teplotu.

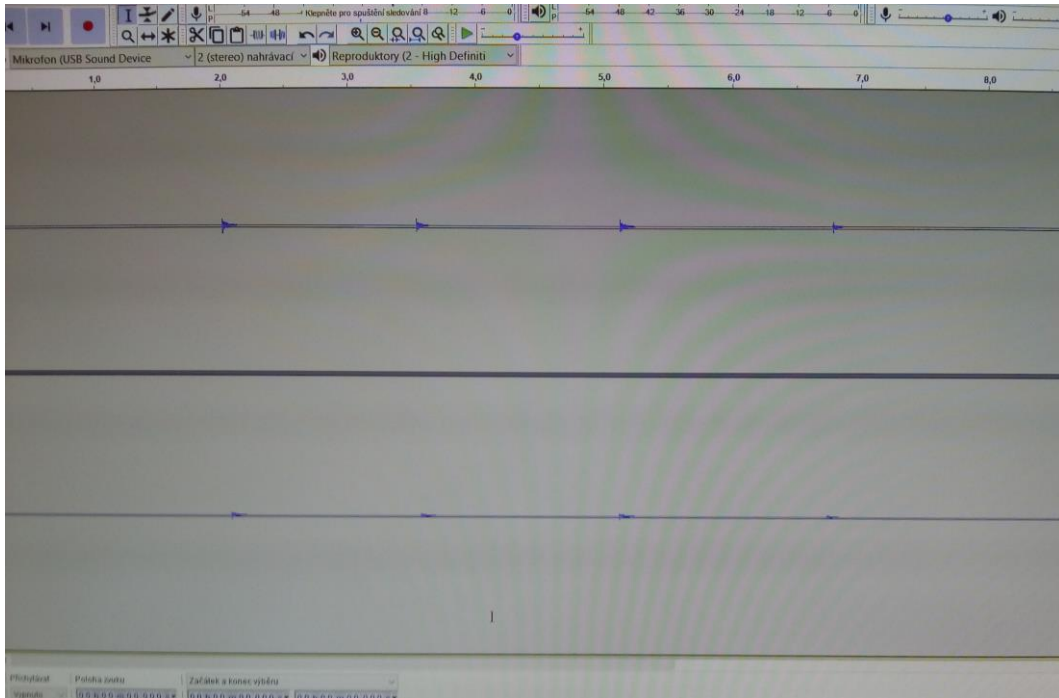


Obr. 22 Zapojení mikrofonů

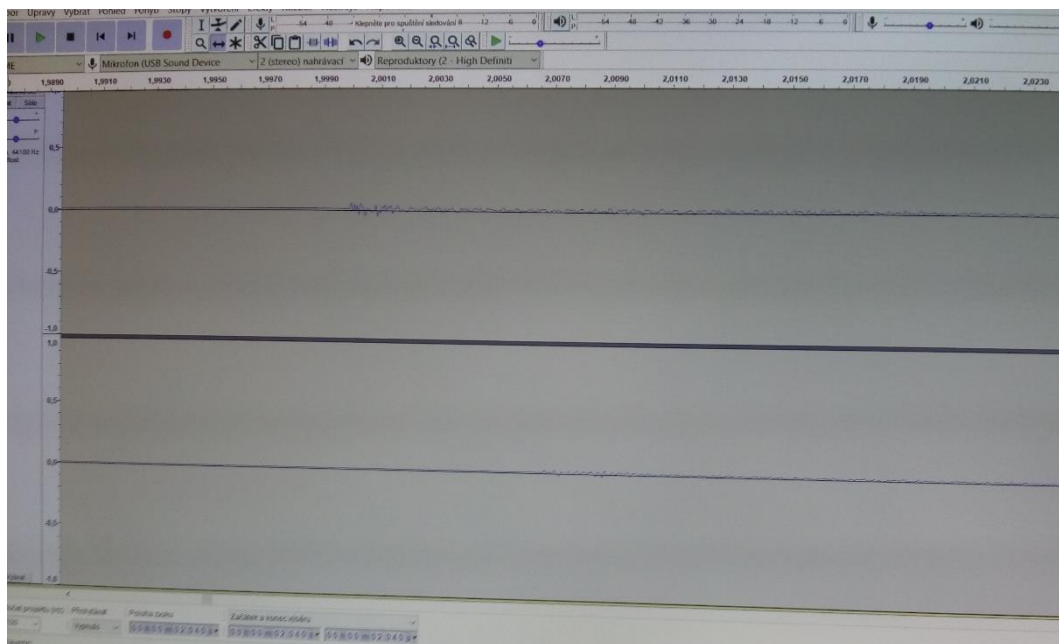


Obr. 23 Měření vzdálenosti mikrofonů





Obr. 24 Záznam zvuku z obou mikrofónů



Obr. 25 Detail záznamu z obou mikrofónů

## Zpracování výsledků

N	$\frac{L}{m}$	$\frac{t_1}{s}$	$\frac{t_2}{s}$	$\frac{\Delta t}{s}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$	$\Delta v = \bar{v} - v$	$\Delta v^2$
1	2,37	2,5160	2,5228	0,0068	348,529412	-3,016259	9,097816
2	2,37	3,9644	3,9713	0,0069	343,478261	2,034892	4,140786
3	2,37	5,4605	5,4673	0,0068	348,529412	-3,016259	9,097816
4	2,37	6,8860	6,8928	0,0068	348,529412	-3,016259	9,097816
5	2,37	11,2253	11,2322	0,0069	343,478261	2,034892	4,140786
6	2,37	12,6686	12,6755	0,0069	343,478261	2,034892	4,140786
7	2,37	0,2186	0,2255	0,0069	343,478261	2,034892	4,140786
8	2,37	1,4288	1,4356	0,0068	348,529412	-3,016259	9,097816
9	2,37	2,7121	2,7189	0,0068	348,529412	-3,016259	9,097816
10	2,37	3,9133	3,9203	0,0070	338,571429	6,941725	48,187539
					$\bar{v} = 345,513153$		$\sum \Delta v^2 = 110,239767$

Tabulka 1 Měření rychlosti zvuku pomocí dvou mikrofonů

Průměrná hodnota rychlosti je:  $\bar{v} = 345,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v^2}{N(N-1)}}$$

$$\sigma = 1,107$$

Naměřená hodnota rychlosti je potom:  $v = (345,51 \pm 1,11) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Hodnota vypočtená pro teplotu 23 °C, při které se měřilo, je 344,96 m · s<sup>-1</sup>.

### Závěr

Pomocí dvou mikrofonů, počítače a vhodného softwaru lze změřit rychlost zvuku s velkou přesností, v tomto případě byla odchylka naměřené hodnoty od vypočtené menší než 1 %, je však důležité správně odečíst časový interval.

### Zdroje

[1] Hubeňák J., Akustika klasicky a s počítačem, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak\\_J.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak_J.pdf)

[2] Dvořák L., Rychlost zvuku stokrát jinak, [online]  
[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_12/12\\_21\\_Dvorak.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_12/12_21_Dvorak.html)

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,  
ISBN 80-86148-28-9

[4] Jerje T., Audacity aneb jak zviditelnit zvuk, [online]  
<https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/17-17-Jerje.html>

## **Přímé měření rychlosti zvuku pomocí uzavřené trubice a jednoho mikrofonu**

### **Teorie**

Mikrofon je umístěn u ústí trubice, opačný konec trubice je zaslepen. Zdroj zvuku je u mikrofonu, na který se zaznamená zvuk, který dále putuje do trubice, na jejímž konci se odrazí a putuje zpět na mikrofon.

U tohoto měření opět vycházíme ze základního vztahu pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s}{t}$$

v našem případě

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

kde  $L$  je dráha, kterou urazí zvuk (tedy délka trubice násobená dvěma) a  $\Delta t$  je časový interval mezi prvotním a odraženým zvukem.

### **Pomůcky**

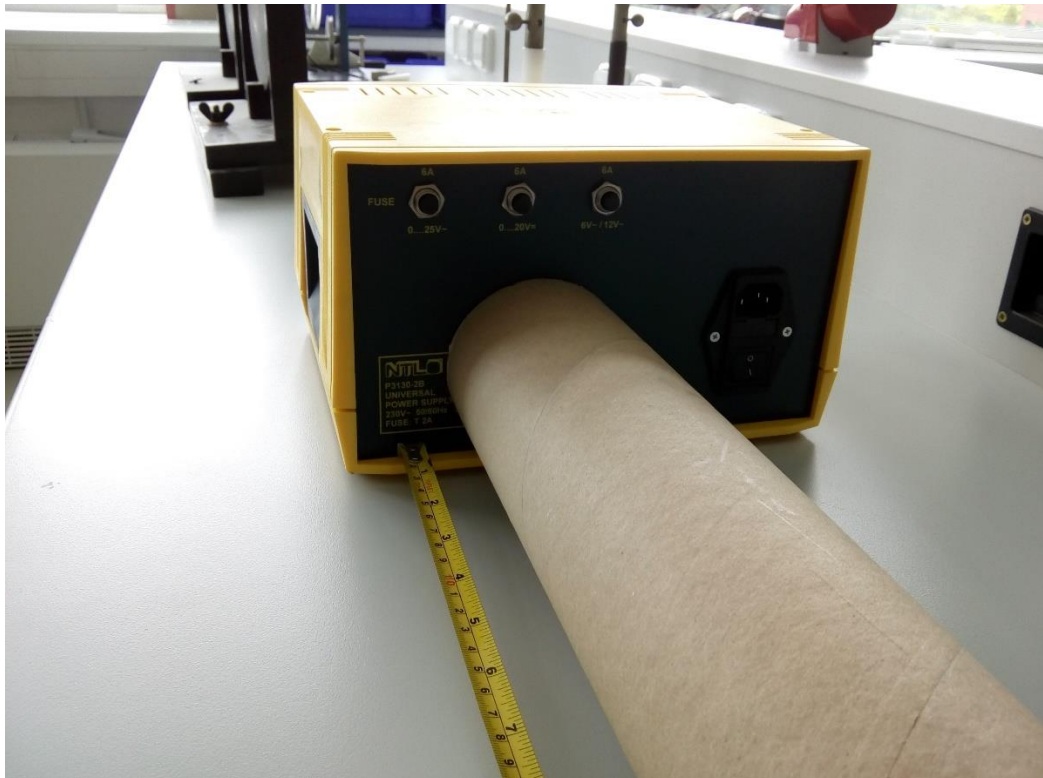
Mikrofon, počítač s vhodným softwarem, trubice, zdroj zvuku – v našem případě 2 čajové lžičky

### **Postup**

Mikrofon dáme k ústí trubice, zkontrolujeme, zda je druhý konec zaslepen, aby mohlo dojít k odrazu zvukových vln. Mikrofon zapojíme do počítače, spustíme v našem případě program Audacity a spustíme nahrávání. Dvěma lžičkami několikrát zacinkáme o sebe u ústí trubice. Ukončíme nahrávání a zvětšíme stopu tak, aby šel odečíst časový interval mezi začátkem zvukového signálu a jeho odrazem. Časové intervaly si zaneseme do tabulky, změříme také délku trubice.



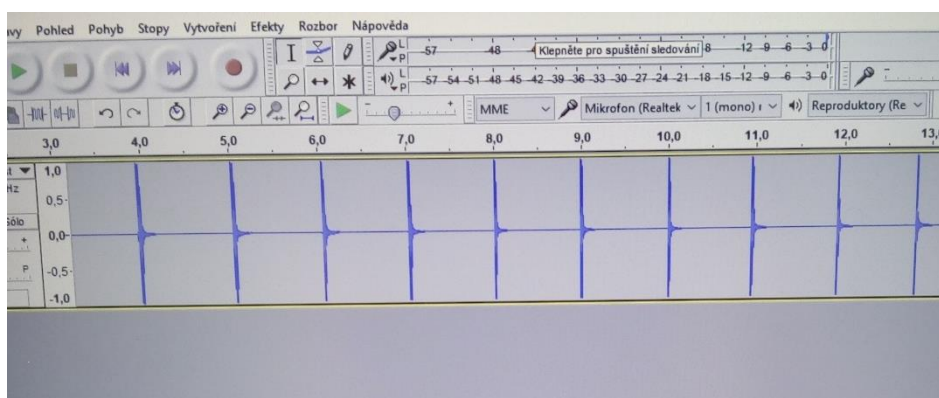
Obr. 26 Měření rychlosti zvuku jedním mikrofonom



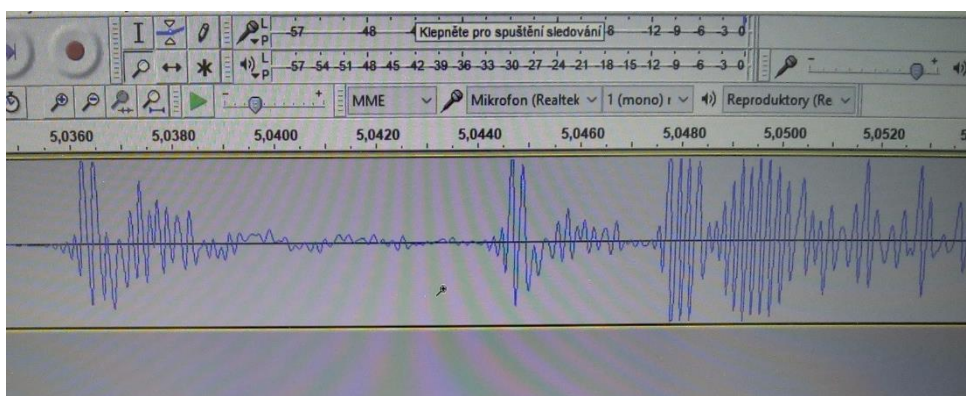
Obr. 27 Zaslepený konec trubky



Obr. 28 Otevřený konec roury



Obr. 29 Záznam zvuku z mikrofону



Obr. 30 Detail záznamu pro odečtení  $\Delta t$



## Zpracování výsledků

N	$\frac{L}{m}$	$\frac{t_1}{s}$	$\frac{t_2}{s}$	$\frac{\Delta t}{s}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$	$\Delta v = \bar{v} - v$	$\Delta v^2$
1	4	5,7100	5,7216	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
2	4	6,9000	6,9116	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
3	4	3,9650	3,9765	0,0115	347,826087	-2,990615	8,943779
4	4	5,0000	5,0116	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
5	4	2,5050	2,5166	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
6	4	6,2100	6,2215	0,0115	347,826087	-2,990615	8,943779
7	4	3,2400	3,2516	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
8	4	5,4850	5,4966	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
9	4	6,3850	6,3966	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
10	4	7,3000	7,3116	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
11	4	8,2700	8,2817	0,0117	341,880342	2,955130	8,732793
12	4	9,2200	9,2317	0,0117	341,880342	2,955130	8,732793
13	4	10,1500	10,1616	0,0116	344,827586	0,007886	0,000062
					$\bar{v} = 344,835472$		$\sum \Delta v^2 = 35,353703$

Tabulka 2 Měření rychlosti zvuku pomocí jednoho mikrofону

Průměrná hodnota rychlosti je:  $\bar{v} = 344,84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v^2}{N(N-1)}}$$

$$\sigma = 0,6268$$

Naměřená hodnota rychlosti je potom:  $v = (344,84 \pm 0,63) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Hodnota vypočtená pro teplotu 23 °C, při které se měřilo, je 344,96 m · s<sup>-1</sup>.

### Závěr

Pomocí jednoho mikrofону, trubice a počítače s vhodným softwarem lze změřit rychlost zvuku s velkou přesností. Odchylka měření od spočítané hodnoty je ještě menší než v případě přímého měření rychlosti zvuku pomocí dvou mikrofónů.

**Zdroje:**

[1] Hubeňák J., Akustika klasicky a s počítačem, [online]

<http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak J.pdf>

[2] Jerje T., Audacity aneb jak zviditelnit zvuk, [online]

<https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/17-17-Jerje.html>

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,  
ISBN 80-86148-28-9

[4] Dvořák L., Rychlost zvuku stokrát jinak, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_12/12\\_21\\_Dvorak.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_12/12_21_Dvorak.html)



## Měření rychlosti zvuku pomocí Kundtovy trubice

### Teorie

Německý fyzik August Kundt se narodil 18. listopadu 1839 a zemřel 21. května 1894. Zabýval se výzkumem zvuku, optiky a elektromagnetismu. V roce 1866 vynalezl Kundtovu trubici, která umožňuje měřit rychlost zvuku ve vzduchu a v plynech.

Kundtova trubice, pomocí které budeme měřit rychlost zvuku, je skleněná trubice, která má na jednom konci zdroj zvukového vlnění a na druhém konci, od něhož se vlnění odráží, je uzavřená pohyblivým pístem. Při vhodné poloze pístu se vlnění odrazí a vrací se zpět s opačnou fází, vzniká pak stojaté vlnění. Pokud se do Kundtovy trubice nasype například korková drť či jiný lehký prášek, můžeme zviditelnit stojaté vlnění. Prášek se v místech, kde jsou kmitny rozkmitá a v místech uzlů zůstává v klidu.

V tomto měření vycházíme ze vztahu

$$v = \lambda \cdot f$$

Frekvence  $f$  je zadána do tónového generátoru.

$$\lambda = 2l$$

kde  $l$  je vzdálenost dvou sousedních kmiten či uzlů.

### Pomůcky

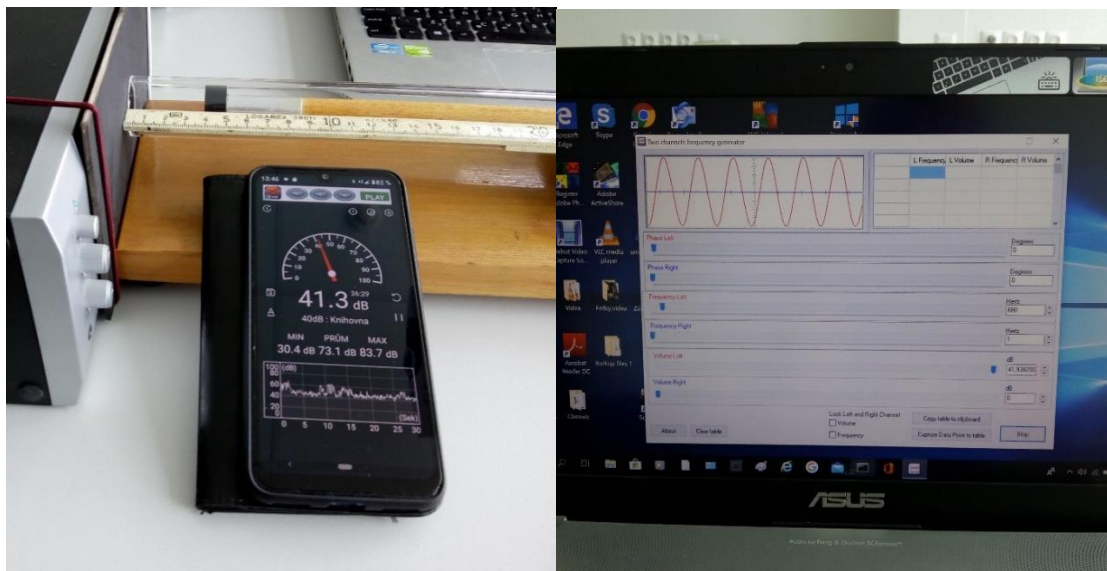
Kundtova trubice, PC s nainstalovaným tónovým generátorem – v našem případě volně dostupný program Two Channels Frequency Generator, reproduktor, telefon se zvukoměrem (například aplikace Zvukoměr, nebo Sound Meter – Decibel).

### Postup 1. úkolu

Po sestavení aparatury zapneme tónový generátor na požadovanou frekvenci. Nastavíme telefon se zvukoměrem k trubici a ověříme, zda funguje. Pohybujeme pístem v Kundtově trubici, existenci minim a maxim (kmiten a uzlů) ověříme nejprve sluchem a poté pístem pohybujeme pomaleji a sledujeme hodnoty na zvukoměru a zapisujeme do tabulky společně s naměřenou vzdáleností  $l$  daného maxima.



Obr. 31 Kundtova trubice s tónovým generátorem



Obr. 32 Spuštěná aplikace Sound Meter – Decibel a Two Channels Frequency Generator

### Zpracování výsledků prvního úkolu

$\frac{f}{\text{Hz}}$	N	$\frac{L_p}{\text{dB}}$	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l = l_N - l_{N-1}}{\text{mm}}$	$\frac{v}{\text{ms}^{-1}}$	$\Delta v = \bar{v} - v$	$\Delta v^2$
1700	1	74,8	55				
	2	75,3	165	110	374,0	-38,6364	1492,769000
	3	75,6	265	100	340,0	-4,6364	21,495870
	4	75,7	355	90	306,0	29,3636	862,223100
	5	73,4	450	95	323,0	12,3636	152,859500
	6	73,6	545	95	323,0	12,3636	152,859500
	7	74,7	645	100	340,0	-4,6364	21,495870
	8	73,3	745	100	340,0	-4,6364	21,495870
	9	73,2	845	100	340,0	-4,6364	21,495870
1360	10	75,2	115				
	11	75,9	245	130	353,6	-18,2364	332,565000
	12	75,4	365	120	326,4	8,9636	80,346780
	13	76,2	490	125	340,0	-4,6364	21,495870
	14	72,4	615	125	340,0	-4,6364	21,495870
	15	75,4	740	125	340,0	-4,6364	21,495870
	16	74,9	855	115	312,8	22,5636	509,117700
1020	17	76,6	35				
	18	76,5	195	160	326,4	8,9636	80,346780
	19	75,5	355	160	326,4	8,9636	80,346780
	20	76,4	525	170	346,8	-11,4364	130,790400
	21	75,3	690	165	336,6	-1,2364	1,528595
	22	74,9	845	155	316,2	19,1636	367,245000
680	23	81,6	90				
	24	81,9	355	265	360,4	-25,0364	626,819500
	25	81,1	595	240	326,4	8,9636	80,346780
	26	82,5	845	250	340,0	-4,6364	21,495870
					$\bar{v} = 335,3636$		$\sum \Delta v^2 = 5122,131$

Tabulka 3 Měření rychlosti zvuku pomocí Kundtovy trubice

Průměrná naměřená rychlost je:  $\bar{v} = 335,3636 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

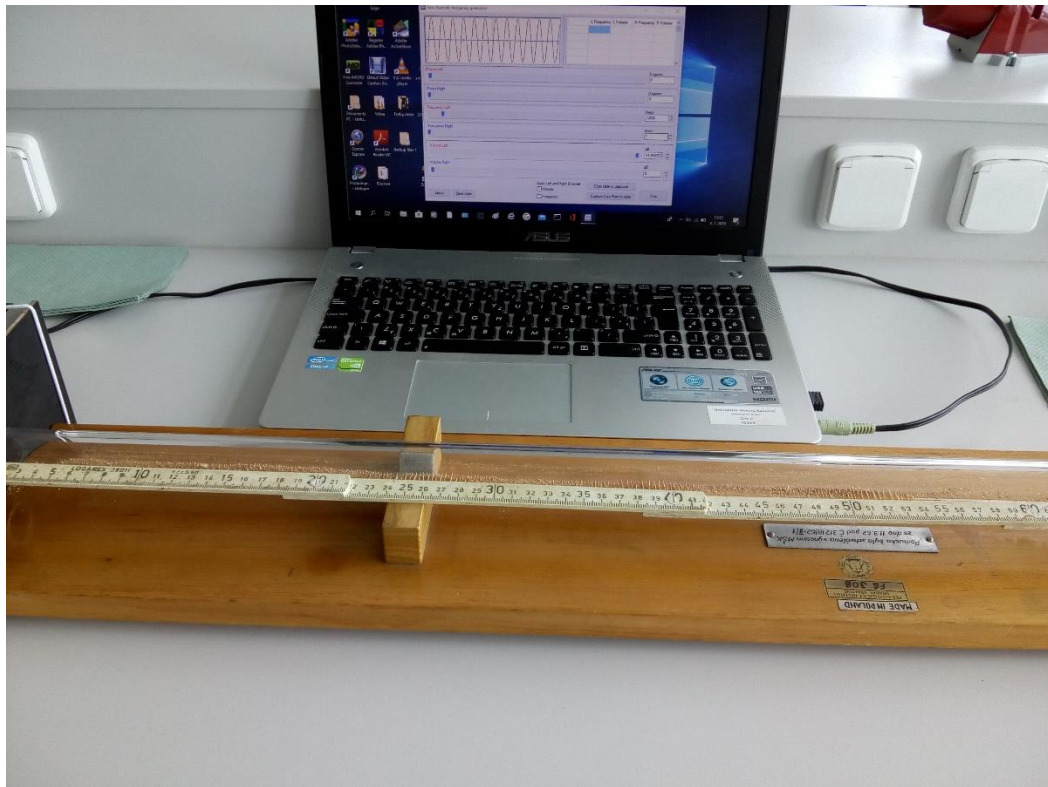
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v^2}{N(N-1)}}$$

$$\sigma = 3,1816$$

Naměřená hodnota rychlosti je potom:  $v = (335,36 \pm 3,18) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Postup 2. úkolu

Tentokrát máme nachystanou Kundtovu trubici s korkovou drtí uvnitř. Zvolíme vhodnou frekvenci na tónovém generátoru. Tentokrát nepohybujeme pístem, ale pouze necháváme znít tón, který rozkmitá prášek uvnitř trubice. Odečteme polohu kmiten a zapíšeme.



Obr. 33 Kundtova trubice s korkovou drtí



Obr. 34 Detail – zviditelněná stojatá vlna

### Zpracování výsledků druhého úkolu

$f$ Hz	N	$l_1$ mm	$l_2$ mm	$\Delta l = l_1 - l_2$ mm	$v$ ms <sup>-1</sup>	$\Delta v = \bar{v} - v$	$\Delta v^2$
1360	1	35	156	121	329,12	15,64	244,6096
	2	156	288	132	359,04	-14,28	203,9184
	3	288	415	127	345,44	-0,68	0,4624
	4	415	542	127	345,44	-0,68	0,4624
					$\bar{v} = 344,76$		$\sum \Delta v^2 = 449,4528$

Tabulka 4 Rychlost zvuku získaná pomocí stojatého vlnění v Kundtově trubici

Průměrná naměřená rychlost je:  $\bar{v} = 344,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v^2}{N(N-1)}}$$

$$\sigma = 6,12$$

Naměřená hodnota rychlosti je potom:  $v = (344,76 \pm 6,12) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Hodnota vypočtená pro rychlost zvuku ve vzduchu při teplotě 24 °C je 346,46 m·s<sup>-1</sup>.

### **Závěr**

Měření touto metodou není tolik přesné, už jen kvůli využitému zvukoměru, který má jistou setrvačnost. Proto polohy kmiten mohly být nepřesně odečteny. V druhém úkolu sice vyšla bližší hodnota rychlosti zvuku, nicméně bych, už jen kvůli vypočtené odchylce, tuto metodu nepovažovala za přesnější. Korkový prášek sice pěkně zviditelní, nicméně odlišení kmitny a uzlu není příliš ostré, proto vzniká poměrně velká odchylka při měření. Také bylo touto metodou provedeno měření jen při jedné frekvenci, k přesnějšimu výsledku by bylo zapotřebí více měření, nicméně, jako ukázka toto stačí.

### **Zdroje**

[1] Tesař J., Klasické a inovované měření rychlosti zvuku [online]

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_08/08\\_16\\_Tesar.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_08/08_16_Tesar.html)

[2] August Kundt [online], poslední aktualizace 5.6.2020 v 15:39 [cit.29.11.2020], Wikipedie. Dostupné z [https://cs.wikipedia.org/wiki/August\\_Kundt](https://cs.wikipedia.org/wiki/August_Kundt)

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999, ISBN 80-86148-28-9



## **Měření pomocí aplikace v telefonu či hlukoměru – ukázka odrazu, interference vln, stojaté vlnění**

### **Teorie**

Podobně, jako v optice, můžeme pozorovat jevy, které souvisejí s vlnovou povahou zvuku. Zatímco v optice je jednoduché ukázat například odraz paprsku, v akustice je tento odraz poměrně složitější. Pro viditelné vlnění stačí k odrazu malé zrcátko, pro akustické vlnění je potřeba daleko větší odrazová plocha. Navíc nám pozorování těchto jevů značně komplikují odrazy vlnění od stěn, pokud experimenty provádíme v uzavřených prostorech.

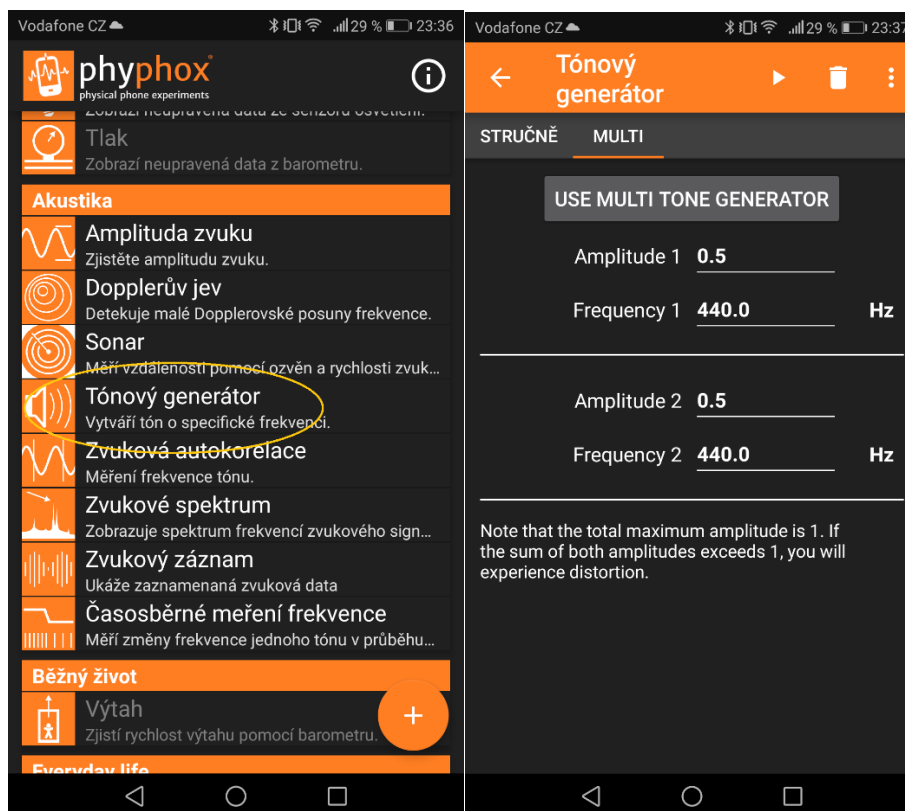
Pro odraz platí stejný zákon, jako v optice, tedy že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu. Navíc odraz můžeme ukázat i pomocí stojatého vlnění. Když se vlna odrazí a postupuje zpět v opačném směru proti původní vlně, vznikne stojaté vlnění, takže zaznameneáme uzly a kmitny. Vzdálenost dvou sousedních kmiten je rovna  $\frac{1}{2}\lambda$ , stejně tak vzdálenost dvou sousedních uzlů. Pokud proti sobě namíříme dva zdroje zvuku (dva reproduktory), zvolíme vzdálenost reproduktorů v násobku  $\lambda$ , získáme rovněž stojaté vlnění, kde bude opět vzdálenost dvou sousedních kmiten, resp. dvou sousedních uzlů  $\frac{1}{2}\lambda$ .

### **Pomůcky**

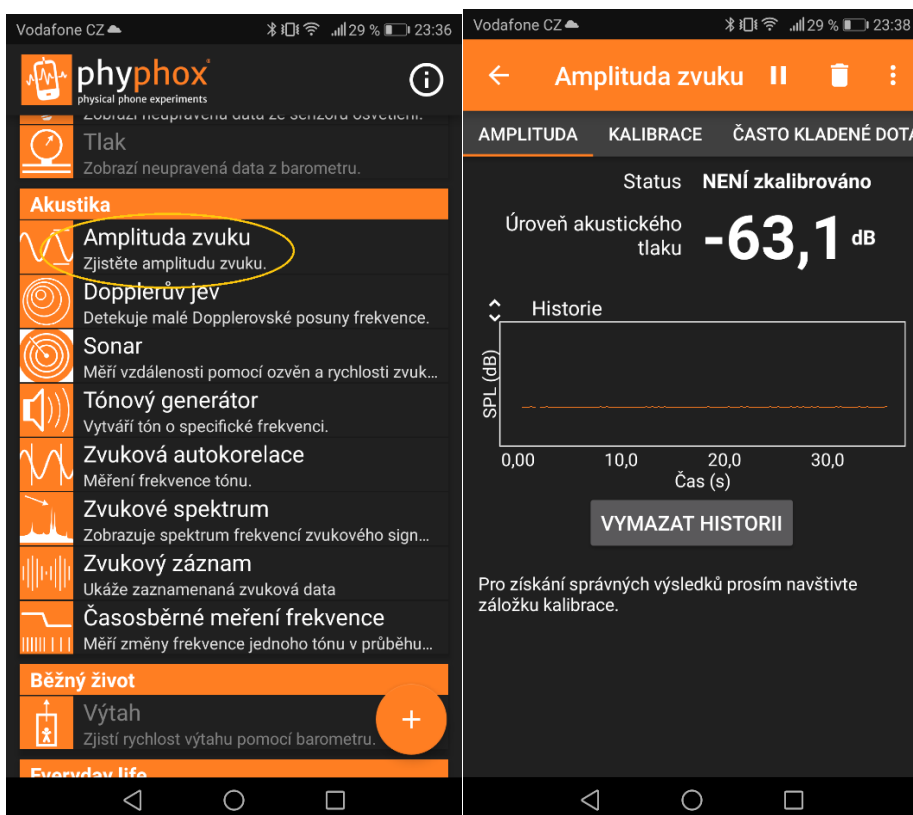
Počítač s vhodným softwarem (např. program Two Channels Frequency Generator), nebo telefon s aplikací Phyphox, 2 reproduktory, telefon se zvukoměrem

### **Postup**

Vypočítáme si vhodnou vlnovou délku vzhledem k velikosti prostoru, ve kterém budeme měření provádět. Vlnovou délku jsem zvolila je 30 cm, takže při teplotě 22 °C bude frekvence 1160 Hz. Zapojíme reproduktory do telefonu, spustíme aplikaci Phyphox, v menu najdeme nástroje pro měření v akustice, konkrétně tónový generátor.



Obr. 35 Aplikace Phypnox – spuštění tónového generátoru



Obr. 36 Aplikace Phypnox – spuštění decibel metru



**Odraz:** Odraz si ukážeme pomocí stojatého vlnění, do vhodné vzdálenosti proti reproduktoru umístíme překážku, od které se odrazí vlnění. Po odrazu vlnění bude putovat zpět proti původní vlně a vznikne tak stojaté vlnění, které budeme detekovat, když telefonem se zapnutým zvukoměrem budeme pohybovat po spojnici mezi reproduktorem a překážkou. Pro toto měření jsem zvolila frekvenci 1160 Hz, vlnová délka je tedy 30 cm. Reproductor je namířený proti zavřeným dveřím, které jsou vzdálené 90 cm od reproduktoru. Decibel metr, kterým budu pohybovat mezi reproduktorem a dveřmi bude ukazovat minima a maxima, ve kterých najdeme uzly a kmitny.

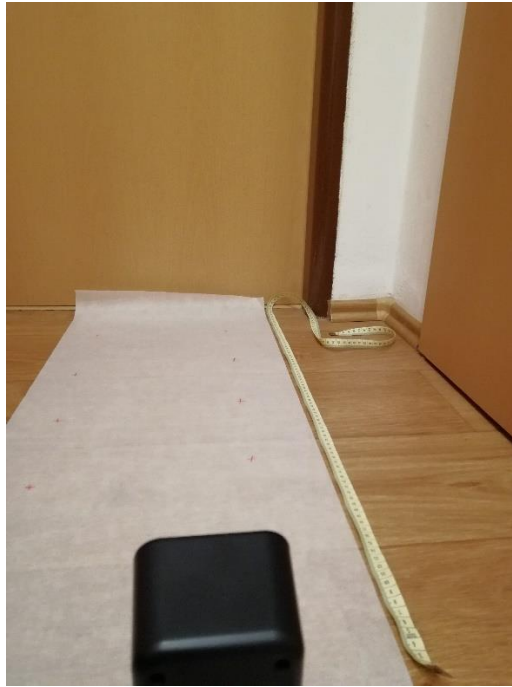
**Stojaté vlnění:** Stojaté vlnění lze ukázat poměrně snadno, reproduktory dáme proti sobě do dostatečné vzdálenosti a pohybem telefonu se zapnutým zvukoměrem mezi reproduktory nacházíme kmitny a uzly dle kolísání akustického tlaku. Pro toto měření jsem opět použila frekvenci 1160 Hz a reproduktory umístila do vzdálenosti 90 cm.

**Interference:** Abychom ukázali interferenci, nastavíme reproduktory stejným směrem, jen jeden z nich posuneme o několik cm dopředu, navíc zadní reproduktor umístím nad úroveň předního. Důvodem je tvar reproduktorů, který směřuje zvukové vlny nevhodným způsobem. Toto měření navíc vyžaduje eliminaci odrazů zvukových vln od stěn (dá se vyřešit otevřením oken, nebo v mém případě zavěšením tkanin ke stěnám). Frekvenci tónového generátoru nastavím opět na 1160 Hz a v aplikaci zapneme zvukoměr a sledujeme, jak na různých místech klesá nebo stoupá akustický tlak.

### **Zpracování výsledků**

Pro záznam polohy naměřených maximálních hodnot jsem zvolila (pečící) papír, na který jsem zanesla polohu, ve které jsem našla maximální hodnotu, resp. kmitnu.

**Odraz:**

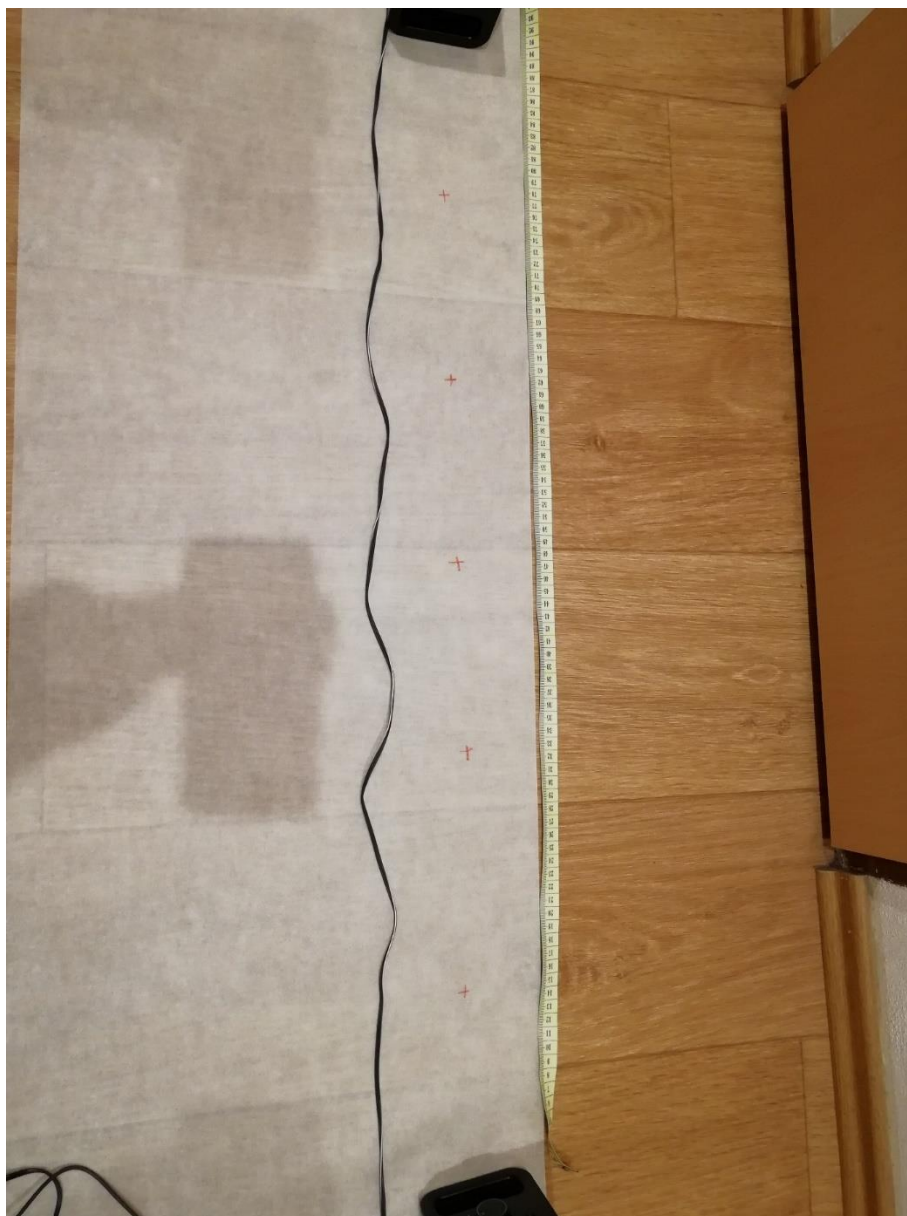


Obr. 37 Nastavení reproduktoru pro odraz



Obr. 38 Zakreslené zjištěné kmitny při odraze

## Stojaté vlnění:



Obr. 39 Stojaté vlnění – nastavení reproduktorů a zakreslené zjištěné kmitny

## Interference:



Obr. 40 Interference – nastavení reproduktorů a zakreslená zjištěná maxima

### Závěr

Z grafického záznamu kmiten lze poznat, že jsou rozmístěné pravidelně a ve vzdálenostech, ve kterých jsme vzhledem ke známé vlnové délce kmitny očekávali. Ověřili jsme jevy jako odraz, vznik stojatého vlnění a interferenci vlnění ze dvou zdrojů.

### Zdroje

[1] Hubeňák J., *Akustika klasicky a s počítačem*, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak\\_J.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak_J.pdf)

[2] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,

ISBN 80-86148-28-9

## Barva zvuku hudebních nástrojů, analýza v programu Audacity a Phyphox

### Teorie

Máme celou škálu hudebních nástrojů. Strunné, dechové, bicí, které se dělí do dalších podskupin, podle toho, jak se na nich tvoří zvuk, či dle materiálu těla nástroje. V našem případě nebudeme zcela zabíhat do teorie, stačí nám pouze vědět, že každý hudební nástroj má specifickou barvu zvuku, příčinou je různý způsob tvorby tónu a rozdílné vlastnosti materiálů, ze kterých jsou tvořeny. Dechové (např. žesťové) nástroje se dají bezpečně pouhým poslechem odlišit například od strunného nástroje, jakým je kytara, nebo klavír. Každý materiál, ze kterého je nástroj vytvořen, totiž zvýrazňuje jinou frekvenci. Tedy, kromě té základní frekvence tónu, kterou hráč na nástroj vytvoří, se ozve ještě několik dalších, pro daný nástroj charakteristických.

Joseph Fourier v roce 1811 popsal způsob, jakým lze obecný signál rozložit do jednoduchých harmonických signálů

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

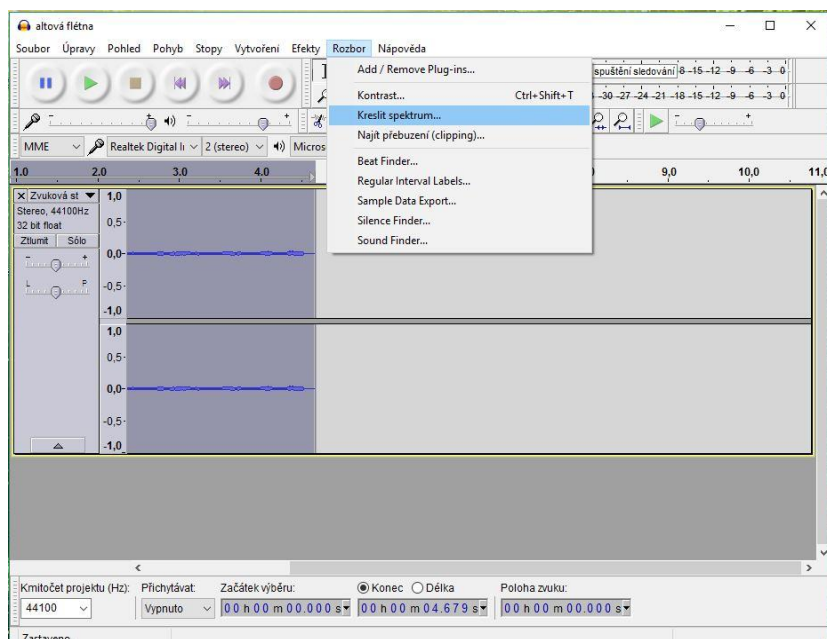
a tato analýza nám pomáhá při popisu barvy zvuku. Naštěstí nemusíme nic počítat, dnes to již umí provést programy počítači, či aplikace v telefonech.

### Pomůcky

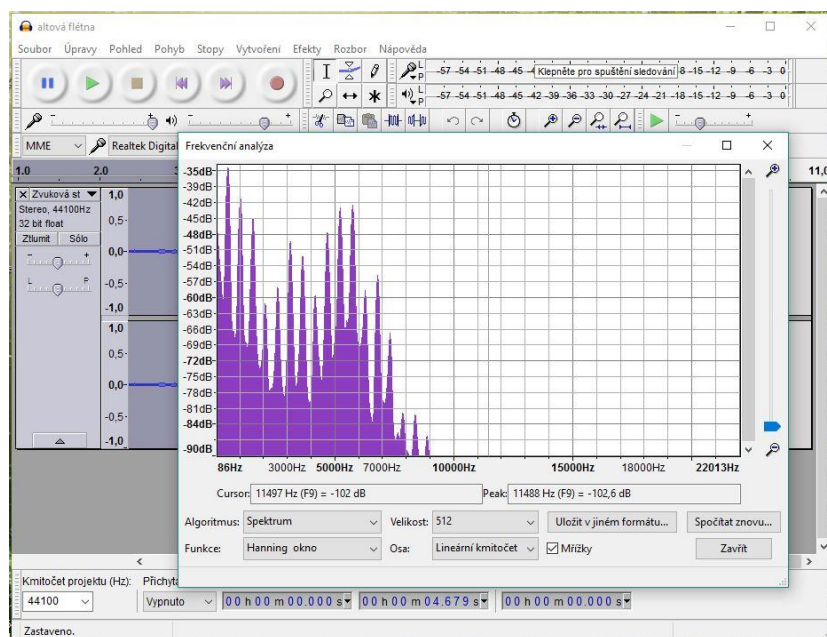
Mikrofon, PC s programem Audacity, telefon s aplikací Phyphox, několik různých hudebních nástrojů

### Postup

Mikrofon zapojíme do zvukové karty PC a spustíme program Audacity. Hudební nástroje naladíme a zvolíme vhodný referenční tón, který najdeme na všech vybraných nástrojích (v našem případě tón c'). Spustíme nahrávání a kousek od mikrofonu zahrajeme na nástroj požadovaný tón. Nahrávání vypneme a necháme program vykreslit spektrum, jak je vidět na obrázcích níže.



Obr. 41 Program Audacity – menu

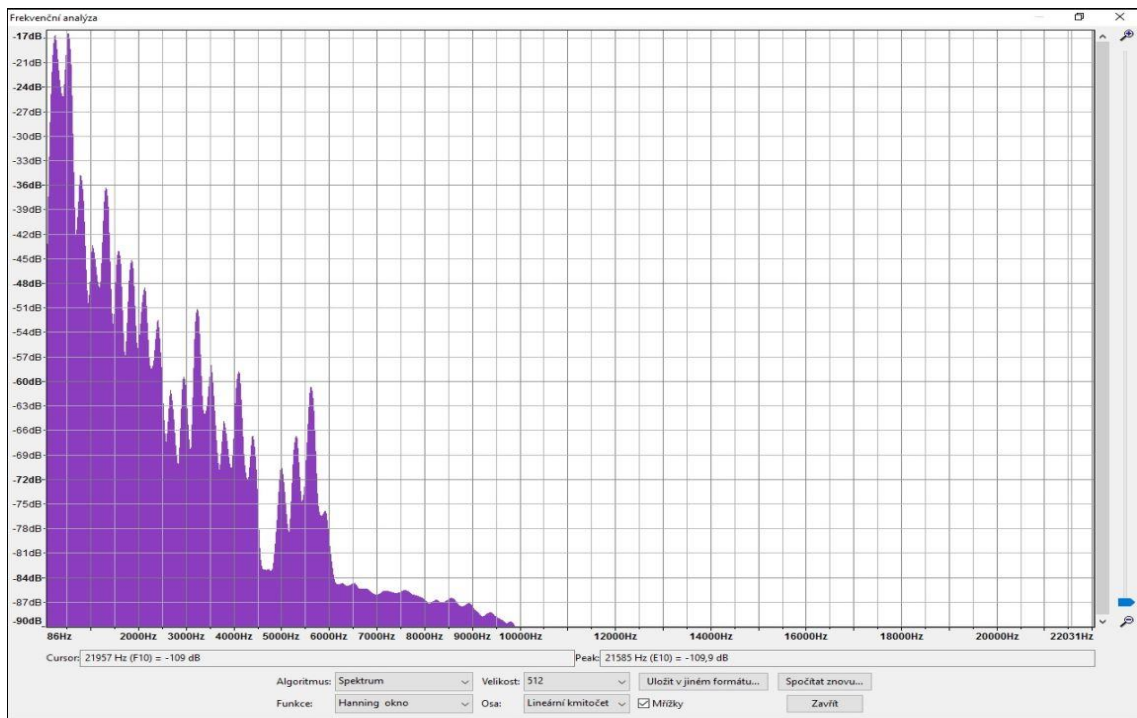


obr. 42 Nastavení okna Audacity

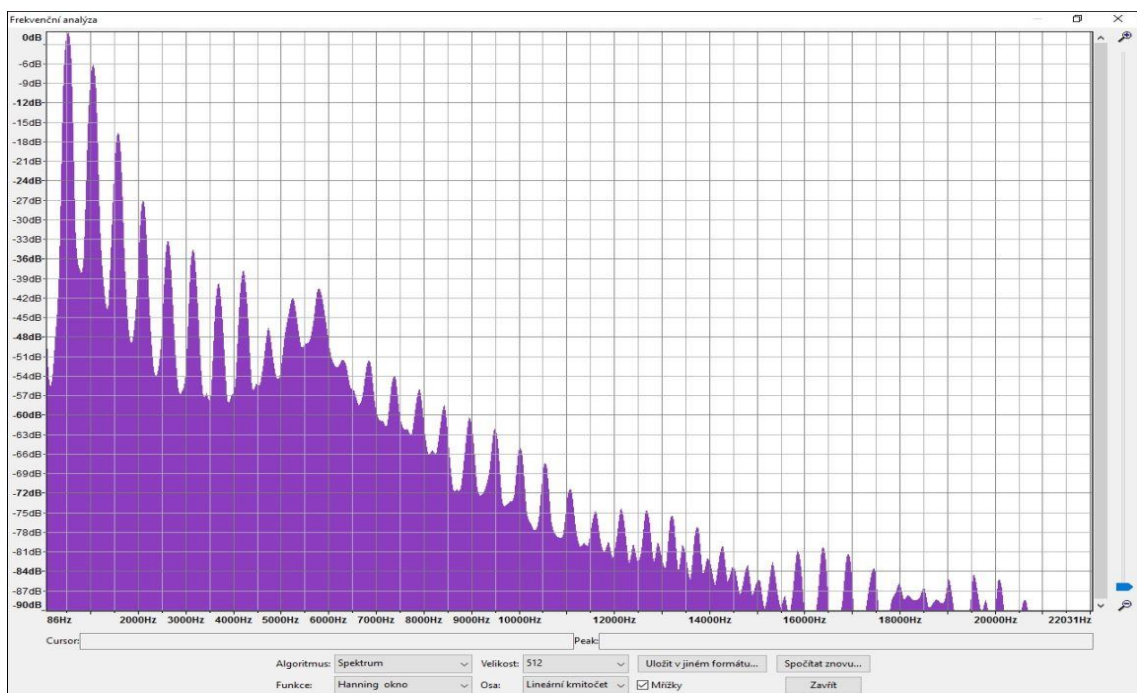
Z této FFT analýzy, která je na obrázku výše, lze již odečíst frekvence, které jsou pro daný nástroj dominantní. Tento postup zopakujeme pro všechny hudební nástroje, které máme po ruce.



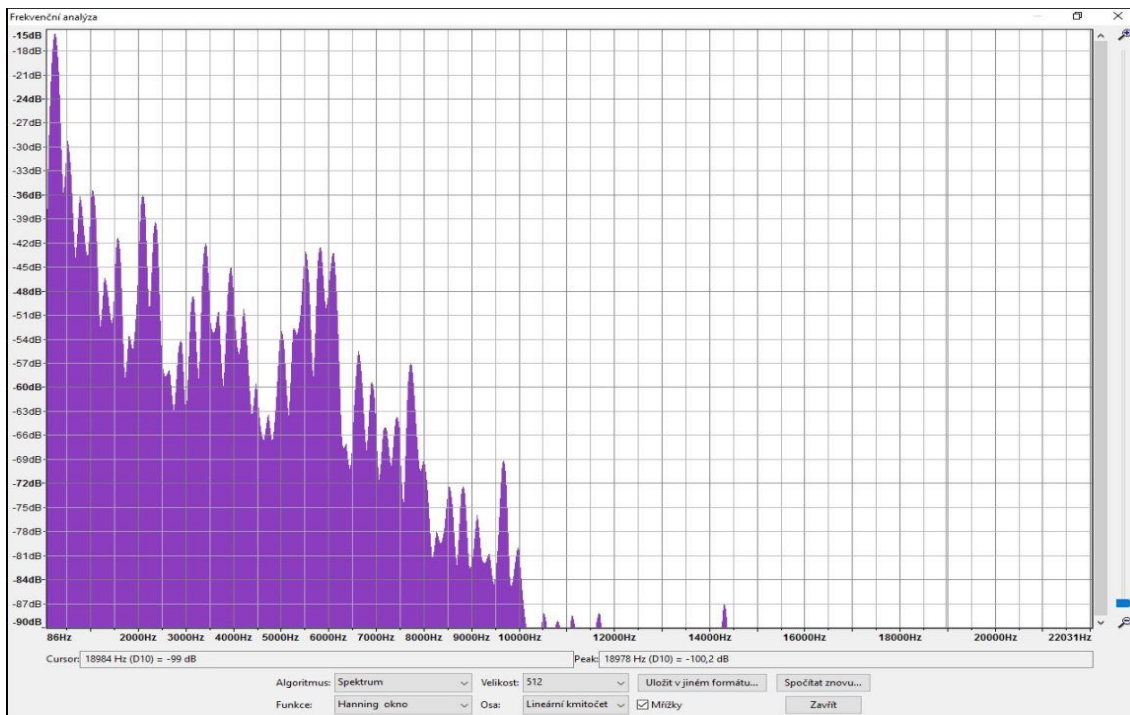
## Zpracování výsledků



Obr. 43 FFT klavír, frekvence: 249 Hz, 532 Hz, 788 Hz

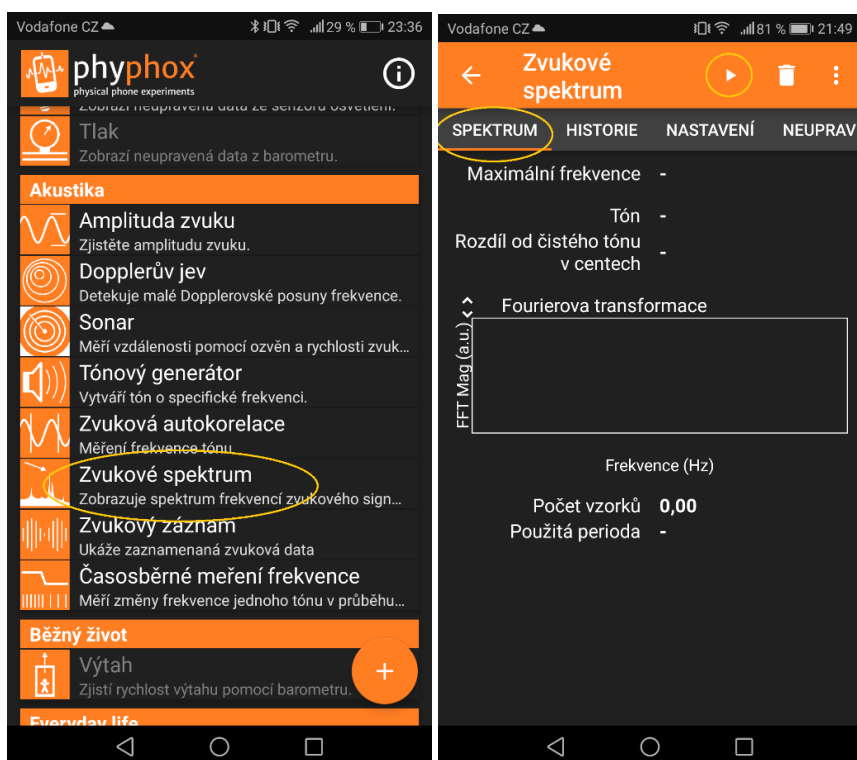


Obr. 44 FFT pozoun, frekvence: 537 Hz, 1058 Hz, 1583 Hz



Obr. 45 FFT kytara, frekvence: 255 Hz, 515 Hz, 774 Hz

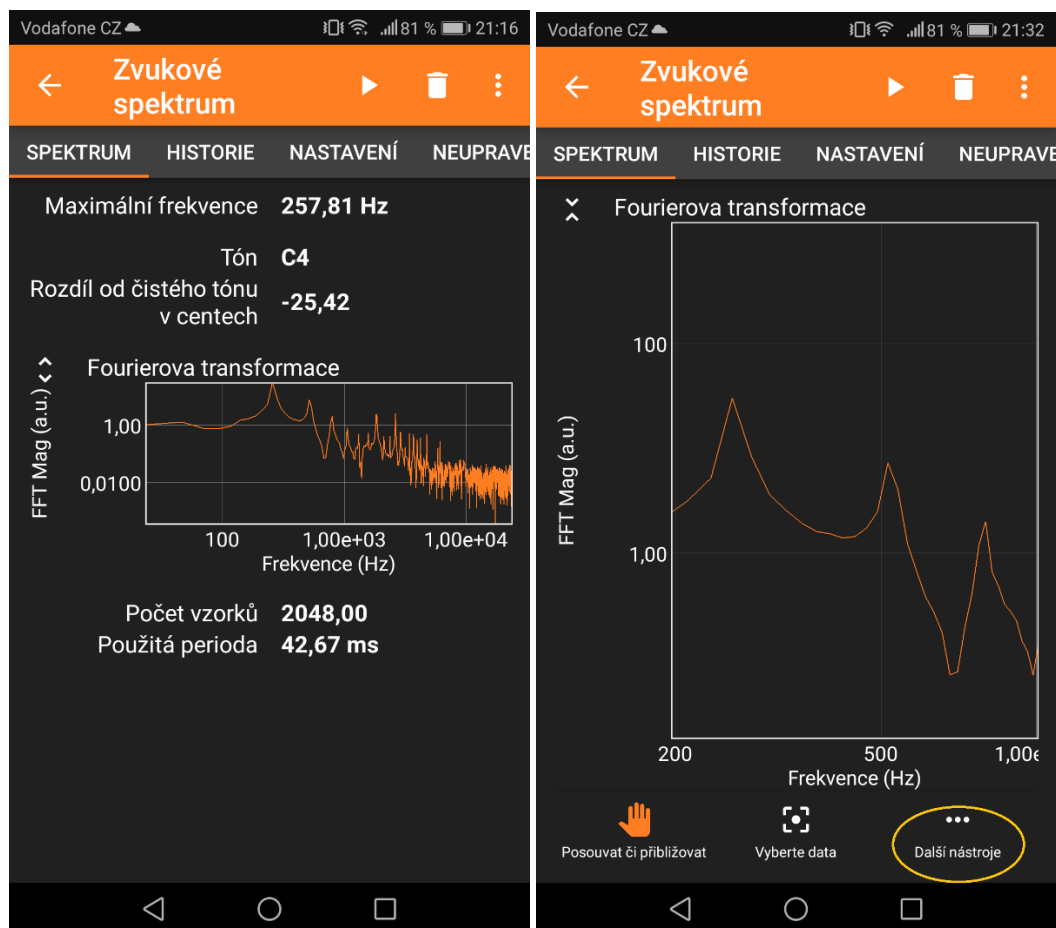
V aplikaci Phyphox lze tato analýza získat také. Po spuštění aplikace zvolíme v části Akustika záložku zvukové spektrum.



Obr. 46 Aplikace Phyphox – spuštění nástroje pro získání FFT

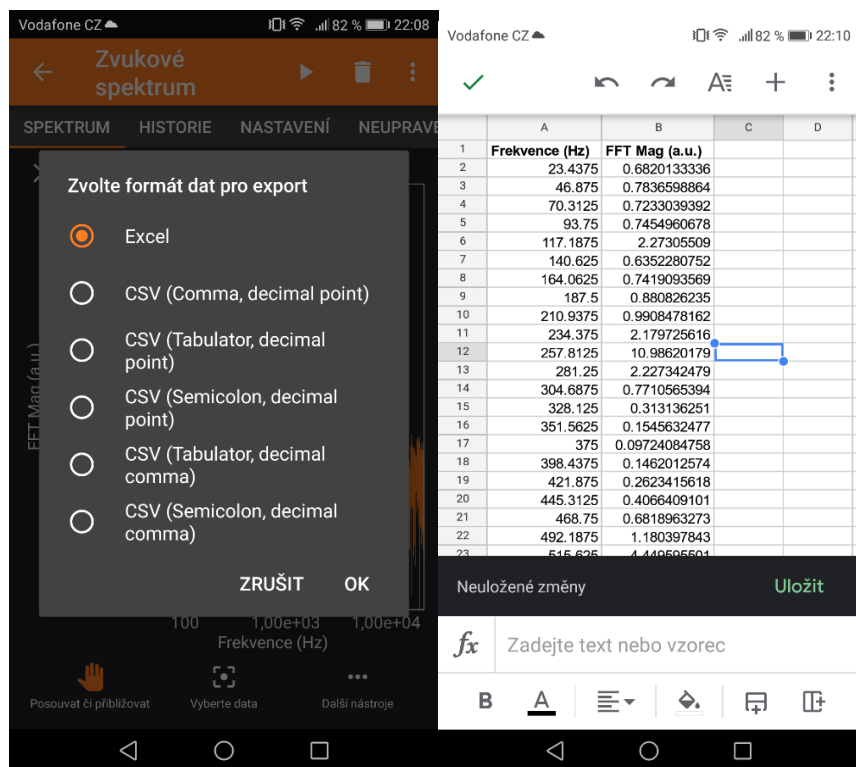


Jakmile spustíme, můžeme zahrát požadovaný tón. Zvolila jsem si kytaru jako nástroj pro porovnání obou programů. Po zahrání tónu c' na kytaru necháme znít několik sekund a vypneme nahrávání. Klikneme do oblasti grafu a vhodně ho zvětšíme, abychom viděli maxima. Dole se objeví nabídka „Další nástroje“, klepneme na ni a objeví se menu, ze kterého vybereme „Exportovat tato data“.



Obr. 47 Aplikace Phyphox – FTT kytary, graf

Po zvolení exportu dat se otevře nabídka k výběru, jakým způsobem chceme data uložit.



Obr. 48 Exportování dat z FFT pro kytaru - 257,81 Hz 515,62 Hz 733,44 Hz

Jak je vidět na obrázku výše, zvolila jsem export do excelu, protože můj telefon rovnou umožní otevření tabulky. Z tabulky musíme vybrat frekvence, pro které jsou největší hodnoty ve druhém sloupečku. V tomto případě jsou maximální hodnoty pro frekvence 257,81 Hz, 515,62 Hz a 733,44 Hz.

### Závěr

Z výše uvedených FFT je vidět, že každý hudební nástroj má v základním tónu c' obsaženy ještě další frekvence, které jsou pro každý nástroj charakteristické. S tím mohou pracovat různé softwarové nástroje, které imitují zvuky hudebních nástrojů. V porovnání obou programů má každý své klady a zápory. Hodnoty získané oběma programy pro daný nástroj jsou srovnatelné, bez větších rozdílů, proto bych programy hodnotila spíše z hlediska uživatelské přívětivosti. Na telefonu se celkově hůře pracuje (odečítání frekvencí je pohodlnější na větším monitoru), nicméně se jedná o kompaktní nástroj na rozdíl od počítače, který potřebuje externí mikrofon pro nahrávání.

### Zdroje

[1] Čapková K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce)

## Porovnání barvy hlasu pomocí programu Audacity

### Teorie

Barva hlasu by se dala označit jako subjektivní vnímání různých zvukových kvalit (v závislosti na technice tvorby a rezonance zvuku) při zpěvu. V podstatě nám pomáhá rozlišit jednotlivé zpěváky od sebe tak, že hlas oblíbeného interpreta rozeznáme i bez znalosti konkrétní písně. Barva hlasu je hodně proměnlivá, dá se s ní pracovat. Při řeči se díky zabarvení hlasu dají rozeznat například emoce, se kterými řečník mluví.

Pokud tuto problematiku zjednodušíme, můžeme pro porovnání barvy hlasu postupovat podobně, jako při zjišťování barvy zvuku hudebního nástroje. Takže předpokládáme, že lze obecný signál rozložit do jednoduchých harmonických signálů pomocí Fourierovy transformace:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

V praxi by se jednalo o velmi složité výpočty, tuto transformaci nám už ale dnes pomohou vypočítat počítačové programy či aplikace. Tento experiment se dá pohodlně provést i v domácích podmínkách.

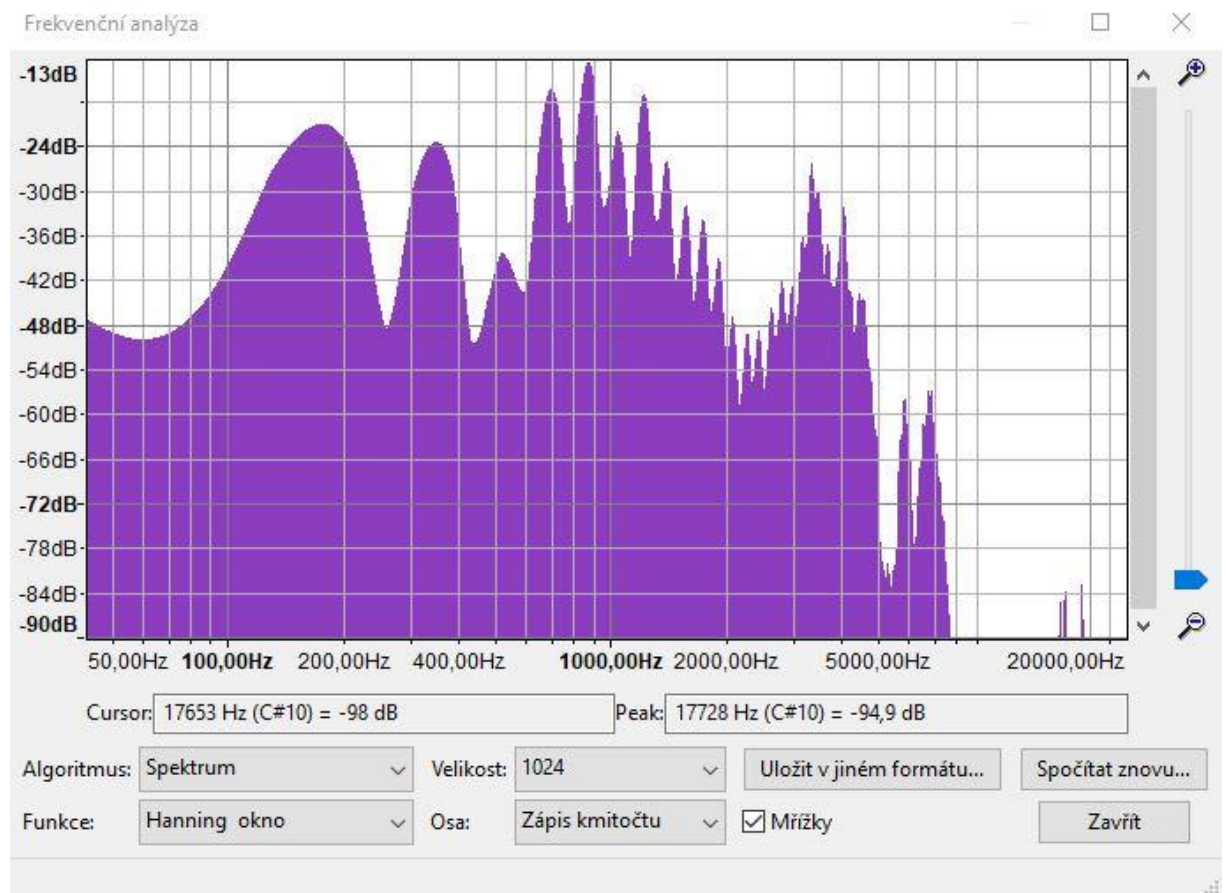
### Pomůcky

Počítač s programem Audacity, mikrofon, dva lidské subjekty se zkoumáním, v tomto případě muž a žena

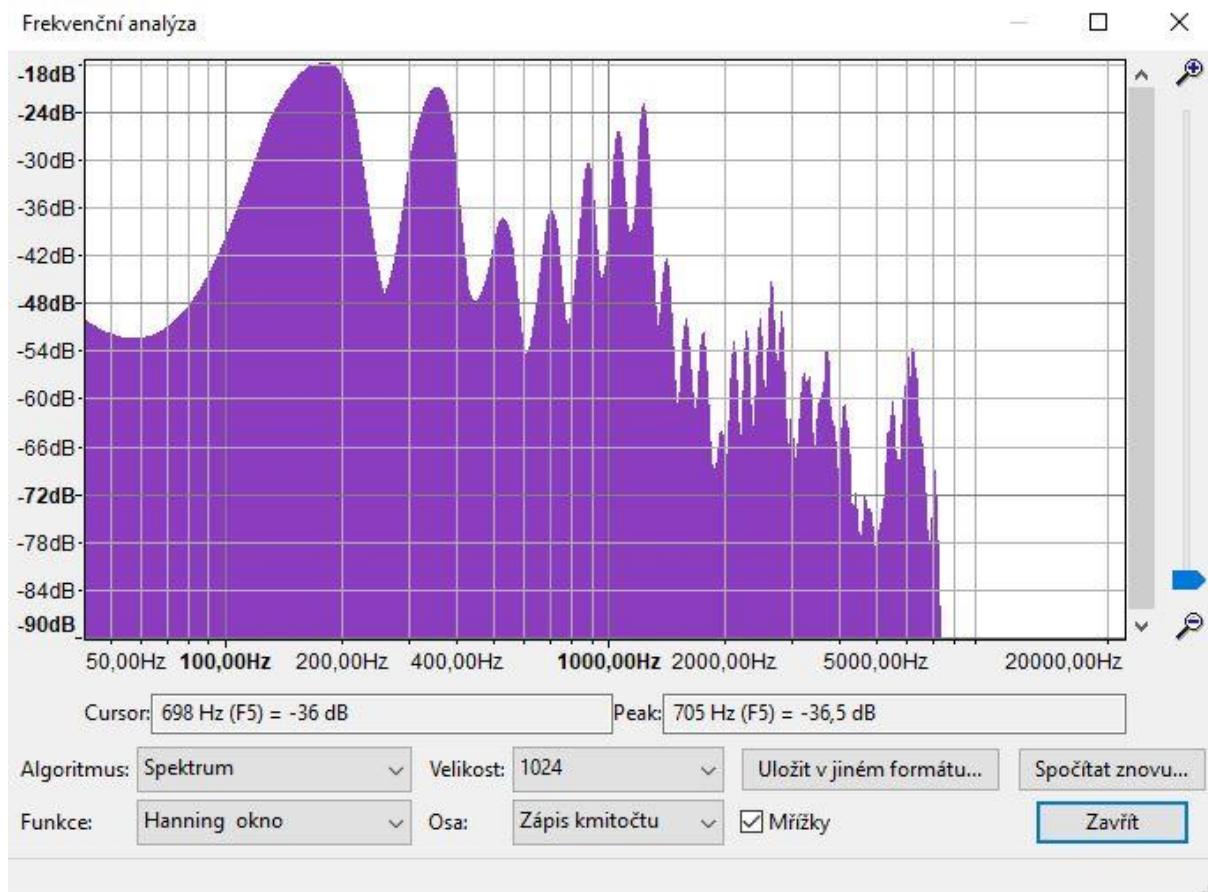
### Postup

Pro zjednodušení zvolí oba subjekty společný tón, který pohodlně zazpívají. V našem případě se jedná o tón f. Spustíme program Audacity a spustíme nahrávání. Stejně jako v předchozím měření, na horní liště najdeme záložku rozbor a zvolíme položku „kreslit spektrum“. Ze získaných grafů odečteme charakteristické frekvence určující barvu hlasu.

## Zpracování výsledků



Obr. 49 FFT ženského hlasu, frekvence: 177 Hz, 350 Hz, 697 Hz, 871 Hz, 1039 Hz



Obr. 50 – FFT mužského hlasu, frekvence: 178 Hz, 355 Hz, 882 Hz, 1054 Hz, 1226 Hz

### Závěr

Pro ženský hlas se nejvýrazněji zaznamenaly frekvence 177 Hz, 350 Hz, 697 Hz, 871 Hz a 1039 Hz, odpovídající tónům  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ ,  $a''$ ,  $c'''$ . Pro mužský hlas se při tónu  $f$  rozezněly nejvíce frekvence 178 Hz, 355 Hz, 882 Hz, 1054 Hz a 1226 Hz, odpovídající tónům  $f$ ,  $f'$ ,  $a''$ ,  $c'''$ ,  $d\#'''$ . Nutno dodat, že subjekty nejsou trénovanými zpěváky, zpívají jen příležitostně. Nicméně i na tomto malém vzorku je vidět, že se na jednoduchém tónu dá rozlišit, že tón vytvořili dva různí lidé.

### Zdroje

[1] Čapková K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce)

[2] Syrový V., *Hudební akustika*, Akademie múzických umění v Praze, Praha 2003, ISBN 978-80-7331-297-8

## Ukázka zvukového rozdílu souhlásek a samohlásek

### Teorie

Schopnost mluvit bereme za samozřejmost, ukažme si tedy jak můžeme rozlišit samohlásky od souhlásek. Samohlásky jsou v naší abecedě sice oproti souhláskám v menšině, ale bez nich bychom těžko něco vyslovili.

Zjednodušeným pohledem se lidské hlasové ústrojí skládá z dýchacího ústrojí, které dodá energii vzduchu, z hlasivek, které jsou oscilátorem a soustavy dutin, v nichž se nachází též nástroje pro artikulaci, a které slouží jako rezonátor. Samohlásky jsou tvořeny tak, že má vycházející vzduch volný průchod, kdežto souhlásky jsou tvořené přes různé překážky (různě nastavené artikulační ústrojí), takže je výsledný zvuk šumového charakteru, jak si ukážeme v tomto experimentu.

### Pomůcky

Hlasové ústrojí, telefon s aplikací Phyphox (nebo počítač s programem Audacity)

### Postup

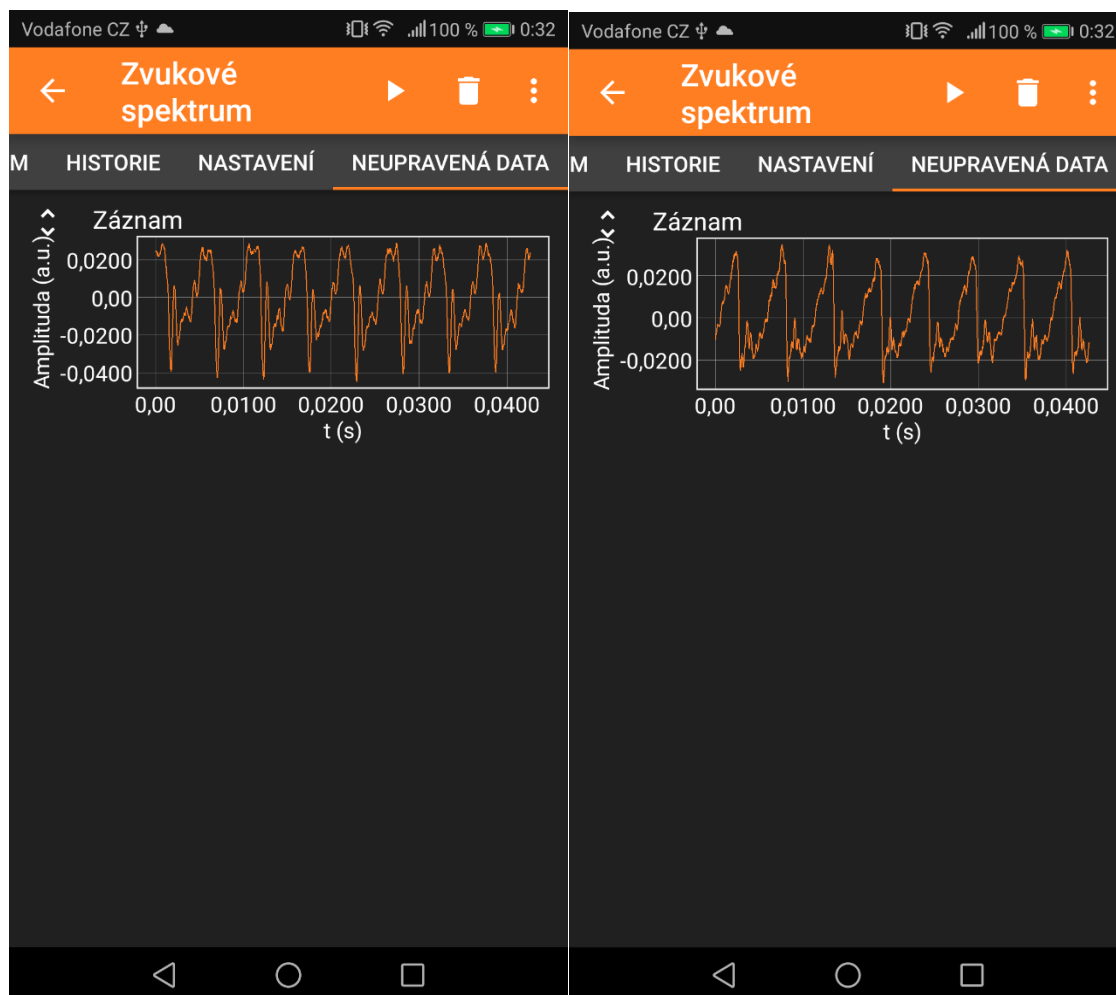
Spustíme aplikaci Phyphox a zvolíme v oddíle Akustika záložku zvukové spektrum.



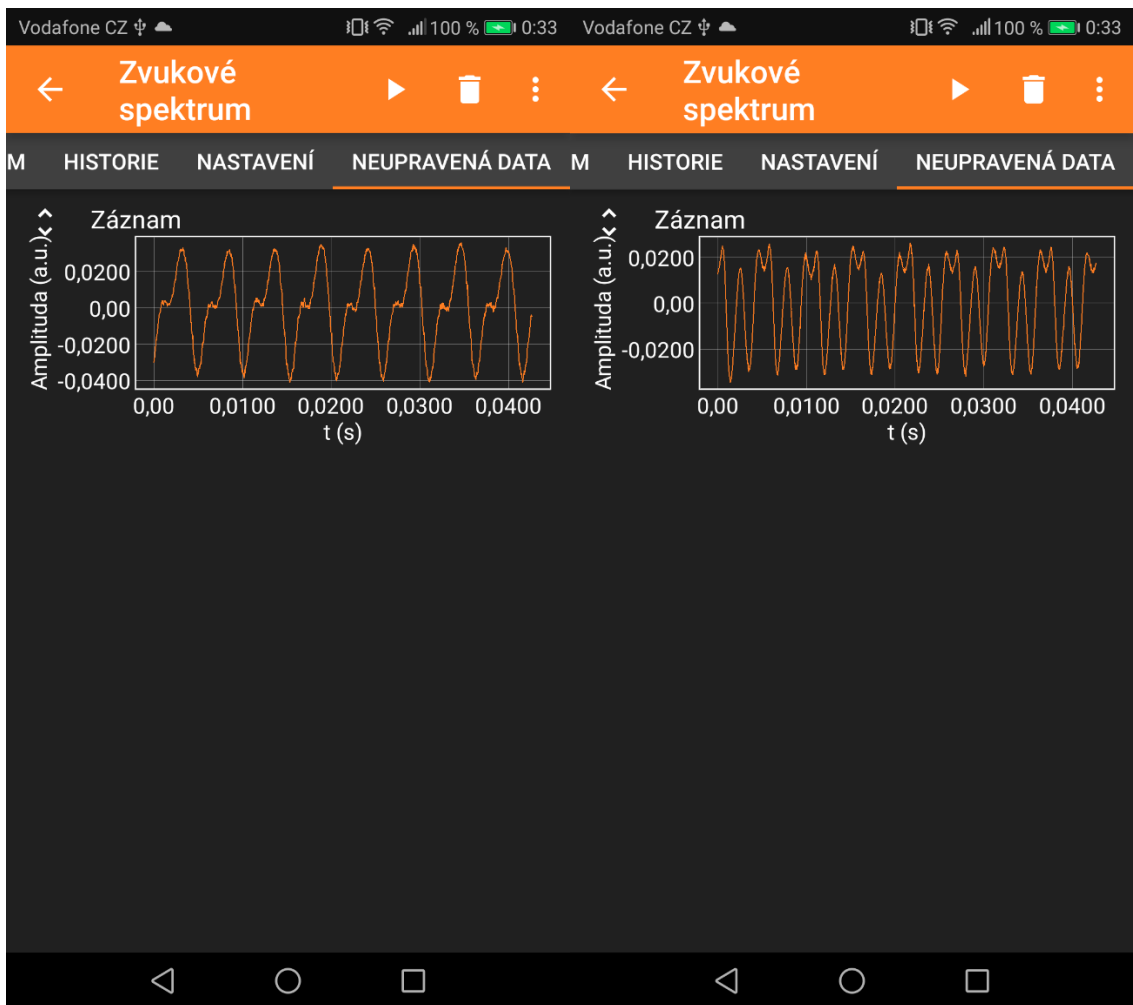
Obr. 51 Aplikace Phyphox – spuštění zvukového spektra

Na horní liště vybereme Neupravená data. Zobrazí nám časový průběh amplitudy. Potom už dlouze řekneme jednotlivé samohlásky a včas pozastavíme, abychom v grafu měli pozastavený průběh dané samohlásky. Poté si můžeme ukázat i některé souhlásky, ty se ale bohužel špatně samostatně vyslovují.

### Zpracování výsledků

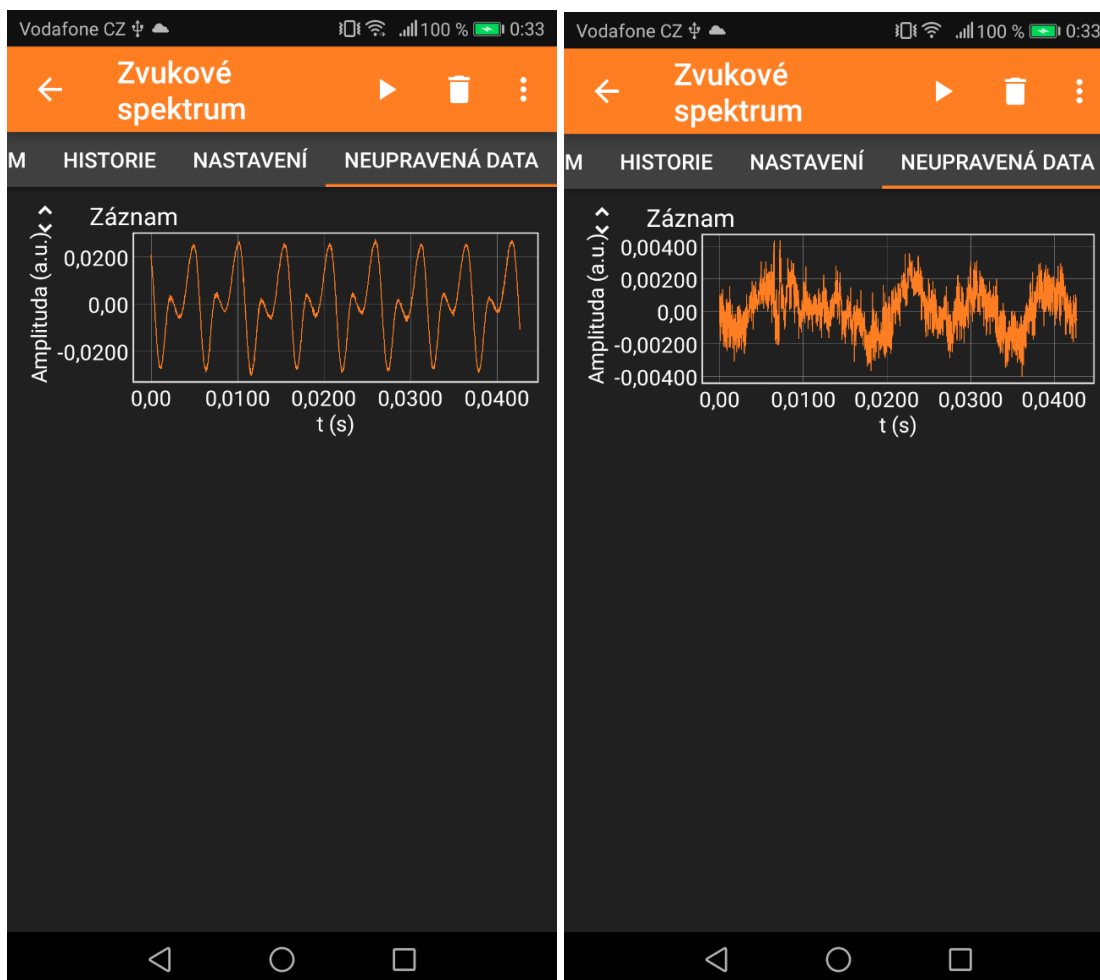


Obr. 52 Aplikace Phyphox – časový průběh samohlásky „a“ a „e“



Obr. 53 Aplikace Phyphox – časový průběh samohlásky „i“ a „o“





Obr. 54 Aplikace Phyphox – časový průběh samohlásky „u“ a souhlásky „s“

### Závěr

Ač je každý člověk vybaven trochu jiným hlasovým ústrojím, časový průběh samohlásek a souhlásek lze snadno odlišit. Ze získaných grafů je vidět, že samohlásky mají opravdu téměř periodický časový průběh. Naproti tomu má souhláska „s“, která se jako jedna z mála souhlásek dá snadno vyslovit samostatně bez spojení se samohláskou, má jasně šumový charakter.

### Zdroje

[1] Syrový V., *Hudební akustika*, Akademie múzických umění v Praze, Praha 2003, ISBN 978-80-7331-297-8

## **Záznam zvuku upuštěného gumového míčku (určení vlastností pohybu míčku pomocí zvukového záznamu)**

### **Teorie**

Při tomto experimentu předpokládáme platnost zákona zachování mechanické energie (ZZME). Míček padá volným pádem z určité výšky, v momentě dopadu má jistou rychlost. Po odrazu od podložky letí míček vzhůru svislým vrhem, ale již nevystoupá do původní výšky, vyletí o něco níže. Z toho by plynula neplatnost ZZME. Tedy část energie se musela přeměnit na vnitřní energii míčku a podložky.

Při srážce dvou těles, v našem případě míčku a podlahy, musíme brát v úvahu míru pružnosti srážky (rázu), tedy součinitel restituace  $k$ , který je dán poměrem rychlosti těles při srážce ku rychlosti, kterou by tato tělesa měla při dokonale pružné srážce.

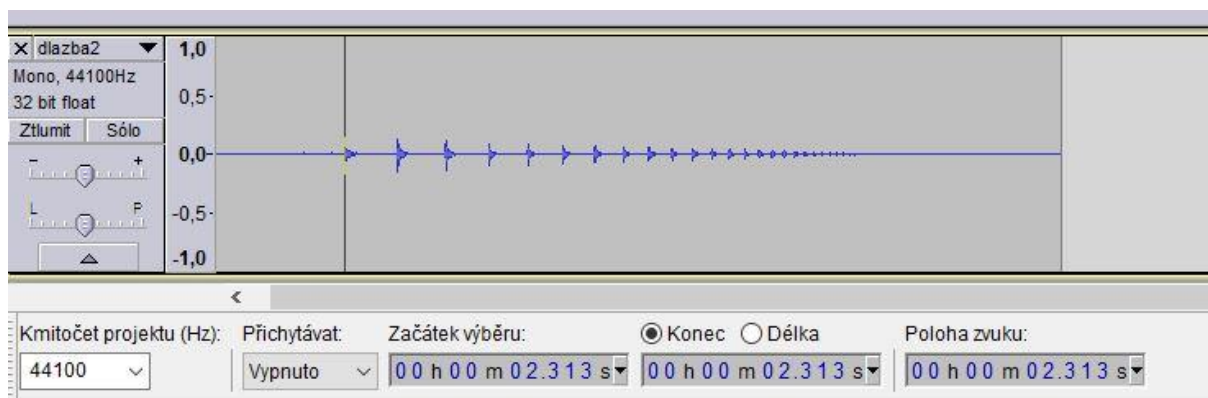
### **Pomůcky**

Počítač s programem Audacity, mikrofon (nebo telefon s aplikací umožňující nahrávání zvuku do formátu wav či mp3), gumový míček – tzv. hopík, metr, podlaha (dlažba, lino a koberec)

### **Postup**

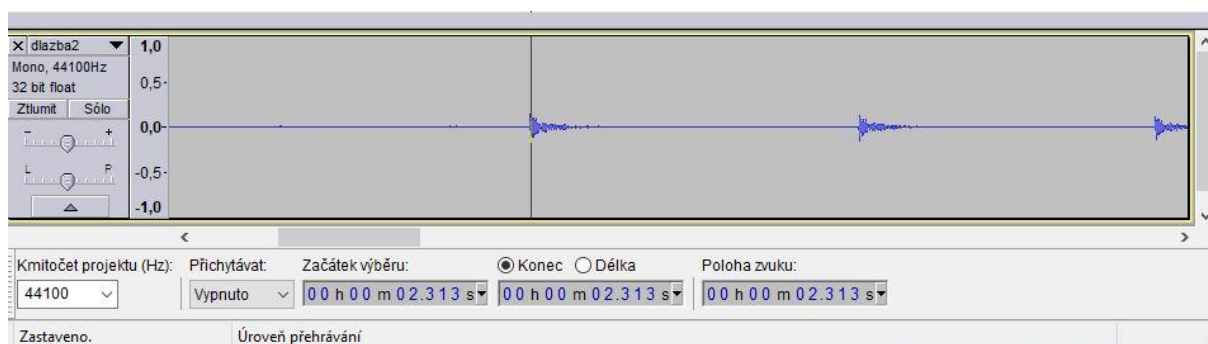
Protože budeme porovnávat vlastnosti 3 podlahových krytin tedy v různých místnostech, pro nahrávání zvuku padajícího míčku zvolím aplikaci v telefonu Hlasový záznamník. Tato aplikace umožňuje ukládání ve formátech wav a mp3, které poté umí otevřít program Audacity. Pomocí metru si najdu požadovanou výšku, ze které upustím míček, v tomto případě 1 m nad podlahou. Spustím nahrávání a míček upustím svislým pádem na zem. Přejdu do místnosti s jinou podlahovou krytinou a zopakuji postup pořízení nahrávky zvuku.

Po pořízení kvalitních nahrávek připojíme telefon k počítači a nahrávky přetáhneme do počítače a otevřeme v programu Audacity. Zvukový záznam vypadá jako na obrázku níže:



Obr. 55 Zvukový záznam padajícího míčku v programu Audacity

Pro přesnější odečet okamžiku nárazu míčku je dobré si přiblížit časovou osu. Při kliknutí na začátek záznamu úderu se v rámečku dole zobrazí časový údaj, který si opíšeme s přesností na tisíciný sekundy do tabulky. Takto postupujeme u zvukových záznamů pro všechny typy zkoumaných podlahových krytin.



Obr. 56 Detail záznamu zvuku a odečtení časového údaje

### Zpracování výsledků

Zjištěné časové údaje z programu Audacity zaneseme do tabulek, z nichž vytvoříme grafy závislosti výšky, do které vystoupá míček na pořadí odrazu od jednotlivých typů podlah. První rychlost vypočítáme pomocí vztahu pro volný pád, další rychlosti již získáme z naměřených časů.

## Koberec

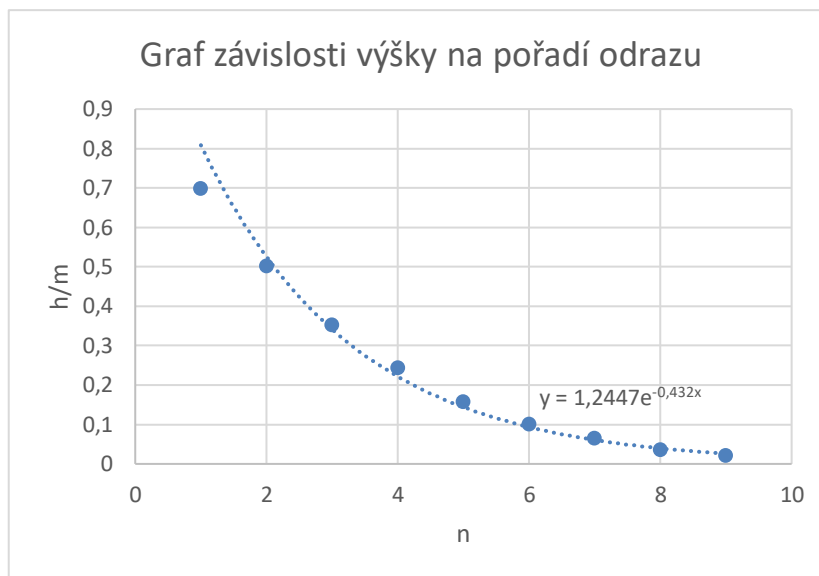
Odraz N	$\frac{t}{s}$	$\frac{\Delta t}{s}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$	$v_k = \frac{v_{N+1}}{v_N}$	$\Delta v_k$	$\frac{h}{m}$
			4,429447	0,836058	-0,027128335	1
1	1,239	0,755	3,703275	0,847682	-0,038752349	0,698993
2	1,994	0,64	3,139200	0,839063	-0,030132729	0,502272
3	2,634	0,537	2,633985	0,83054	-0,021610267	0,353612
4	3,171	0,446	2,187630	0,804933	0,003997035	0,243921
5	3,617	0,359	1,760895	0,805014	0,003915843	0,158040
6	3,976	0,289	1,417545	0,802768	0,006161605	0,102418
7	4,265	0,232	1,137960	0,754310	0,054619426	0,066002
8	4,497	0,175	0,858375	0,760000	0,048929771	0,037554
9	4,672	0,133	0,652365			0,021691
10	4,805					
				$\bar{v}_k = 0,80893$	$\sum \Delta v_k^2 = 0,009059356$	

Tabulka 5 Naměřené odrazy míčku od koberce

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v_k^2}{N(N-1)}} = 0,0112$$

Koeficient restituce je z vypočtených hodnot:  $k = 0,81 \pm 0,01$

s relativní odchylkou  $\xi = \frac{\sigma}{\bar{v}_k} = 0,012 \rightarrow 1,2 \%$



Graf 1 Graf závislosti výšky na pořadí odrazu od koberce

### Lino

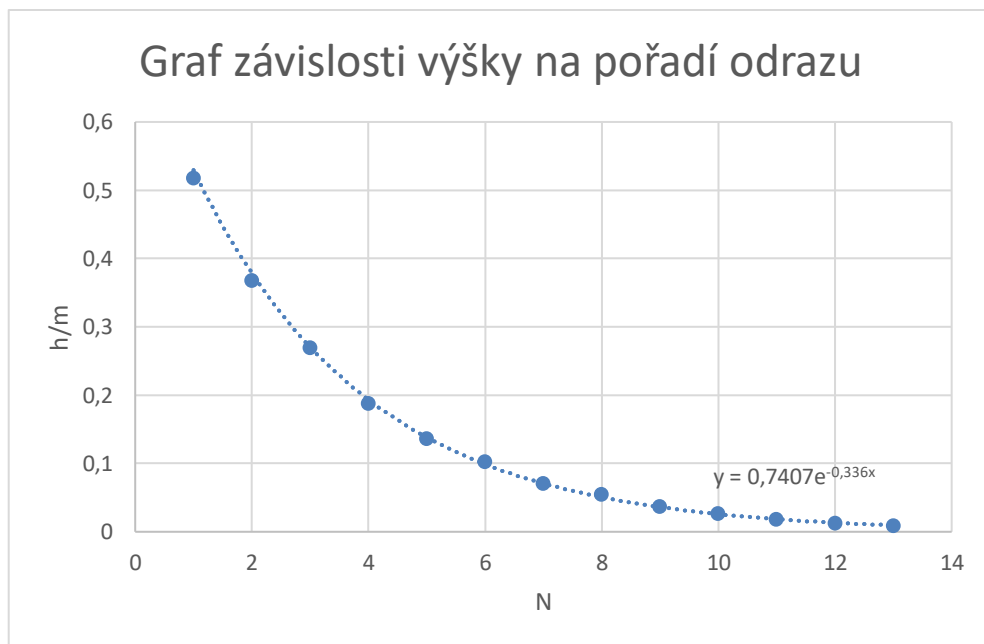
Odraz N	$\frac{t}{s}$	$\frac{\Delta t}{s}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$	$v_k = \frac{v_{N+1}}{v_N}$	$\Delta v_k$	$\frac{h}{m}$
			4,429447	0,719785	0,114148	1
1	1,642	0,65	3,188250	0,843077	-0,009140	0,518091
2	2,292	0,548	2,687940	0,855839	-0,021910	0,368248
3	2,84	0,469	2,300445	0,835821	-0,001890	0,269727
4	3,309	0,392	1,922760	0,852041	-0,018110	0,188843
5	3,701	0,334	1,638270	0,868263	-0,034330	0,136796
6	4,035	0,29	1,422450	0,827586	0,006347	0,103128
7	4,325	0,24	1,177200	0,879167	-0,045230	0,070632
8	4,565	0,211	1,034955	0,824645	0,009289	0,054594
9	4,776	0,174	0,853470	0,856322	-0,022390	0,037126
10	4,95	0,149	0,730845	0,818792	0,015141	0,027224
11	5,099	0,122	0,598410	0,844262	-0,010330	0,018252
12	5,221	0,103	0,505215	0,815534	0,018399	0,013009
13	5,324	0,084	0,412020			0,008652
14	5,408					
				$\overline{v_k} = 0,833933$	$\sum \Delta v_k^2 = 0,018452$	

Tabulka 6 Naměřené odrazy míčku od lina

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v_k^2}{N(N-1)}} = 0,0109$$

Koeficient restituce je z vypočtených hodnot:  $k = 0,83 \pm 0,01$

s relativní odchylkou  $\xi = \frac{\sigma}{\bar{v}_k} = 0,013 \rightarrow 1,3 \%$



Graf 2 Graf závislosti výšky na pořadí odrazu od lina

## Dlažba

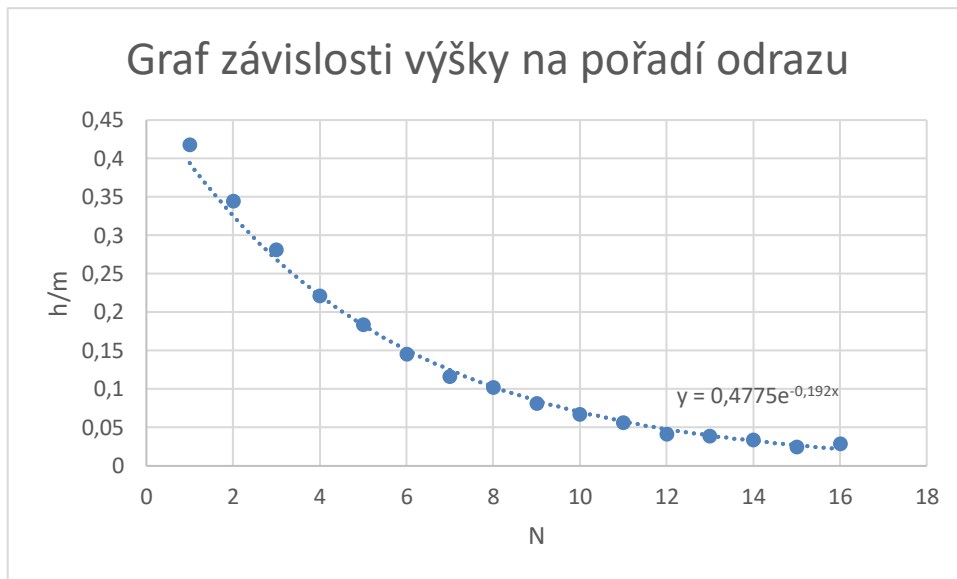
Odraz N	$\frac{t}{s}$	$\frac{\Delta t}{s}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$	$v_k = \frac{v_{N+1}}{v_N}$	$\Delta v_k$	$\frac{h}{m}$
			4,429447	0,646699	0,252364	
1	2,313	0,584	2,86452	0,907534	-0,00847	0,41822
2	2,897	0,53	2,59965	0,903774	-0,00471	0,344454
3	3,427	0,479	2,349495	0,887265	0,011798	0,281352
4	3,906	0,425	2,084625	0,910588	-0,01153	0,221491
5	4,331	0,387	1,898235	0,891473	0,00759	0,183654
6	4,718	0,345	1,692225	0,892754	0,00631	0,145954
7	5,063	0,308	1,51074	0,938312	-0,03925	0,116327
8	5,371	0,289	1,417545	0,892734	0,00633	0,102418
9	5,66	0,258	1,26549	0,906977	-0,00791	0,081624
10	5,918	0,234	1,14777	0,918803	-0,01974	0,067145
11	6,152	0,215	1,054575	0,860465	0,038598	0,056683
12	6,367	0,185	0,907425	0,962162	-0,0631	0,041968
13	6,552	0,178	0,87309	0,932584	-0,03352	0,038853
14	6,73	0,166	0,81423	0,855422	0,043641	0,033791
15	6,896	0,142	0,69651	1,077465	-0,1784	0,024726
16	7,038	0,153	0,750465			0,028705
17	7,191					
				$\bar{v}_k = 0,899063$	$\sum \Delta v_k^2 = 0,10651$	

Tabulka 7 Naměřené odrazy míčku od dlažby

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta v_k^2}{N(N-1)}} = 0,0211$$

Koeficient restituce je z vypočtených hodnot:  $k = 0,89 \pm 0,02$

s relativní odchylkou  $\xi = \frac{\sigma}{\bar{v}_k} = 0,023 \rightarrow 2,3 \%$



Graf 3 Graf závislosti výšky na pořadí odrazu od dlažby

#### Závěr

Z grafu je vidět, že výška, do které míček po odrazu vystoupá, se s dalším odrazem zmenšuje a to exponenciálně. Správně nám vyšlo pro každou podlahovou krytinu jiný koeficient restituce. Nicméně přesnost tohoto měření je do značné míry ovlivněna nerovnostmi na míčku, i na podlaze (spáry v dlažbě, „matná“ protiskluzová úprava dlažby, textura lina či nestejně vysoký „chloupek“ koberce), díky čemuž se část energie změnila na rotační energii.

#### Zdroje

[1] Laboratorní práce z fyziky pro FO kategorie D (č. 63), Hradec Králové 2004



## **Závěr**

V této práci je shrnuta historie akustiky a vývoj experimentů vedoucích k poznání vlastností zvuku. V praktické části je uvedeno několik experimentů, které by bylo možné předvádět studentům na školách, k některým experimentům jsem vyrobila pracovní listy pro studenty. Některé experimenty lze provádět s běžným vybavením i v domácích podmínkách.

# Seznam použité literatury

Laue, Max von. *Dějiny Fyziky*, Praha 1963

Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,  
ISBN 80-86148-28-9

Strouhal Č., *Akustika*, Praha 1902 (dostupné online  
<https://archive.org/details/akustika>)

Syrový V., *Hudební akustika*, Akademie múzických umění v Praze, Praha 2003, ISBN 978-80-7331-297-8

Hrábek M., *Geneze* [online], Vývoj matematiky a fyziky, [cit. 11.1.2021]. Dostupné z:  
[http://www.geneze.info/matfyz/vyvoj\\_matematiky\\_fyziky.htm](http://www.geneze.info/matfyz/vyvoj_matematiky_fyziky.htm)

University of Toronto Scientific Instrumental Collection [online]. Galton Whistle. [cit. 11.1.2021], dostupné z: [https://utsic.utoronto.ca/wpm\\_instrument/galton-whistle/](https://utsic.utoronto.ca/wpm_instrument/galton-whistle/)

Hermann von Helmholtz, [online], poslední aktualizace 19.11.2020, 22:00 [cit. 14.1.2021], Wikipedie, dostupné z:  
[https://cs.wikipedia.org/wiki/Hermann\\_von\\_Helmholtz](https://cs.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz)

Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 422

Harmonograph, [online], poslední aktualizace 7.5.2020 [cit. 14.1.2021], Wikipedie, dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonograph>

Galtonova píšťala, [online], poslední aktualizace 9.7.2020, 17:30 [cit. 14.1.2021], Wikipedie, dostupné z:  
[https://cs.wikipedia.org/wiki/Galtonova\\_p%C3%AD%C5%A1%C5%A5ala](https://cs.wikipedia.org/wiki/Galtonova_p%C3%AD%C5%A1%C5%A5ala)

Galton Whistle, [online], dostupné z: [https://utsic.utoronto.ca/wpm\\_instrument/galton-whistle/](https://utsic.utoronto.ca/wpm_instrument/galton-whistle/)

Hubeňák J., *Akustika klasicky a s počítačem*, [online], dostupné z:  
[http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak\\_J.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak_J.pdf)

Jerje T., Audacity aneb jak zviditelnit zvuk, [online], dostupné z:

<https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/17-17-Jerje.html>

Dvořák L., Rychlost zvuku stokrát jinak, [online], dostupné z:

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_12/12\\_21\\_Dvorak.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_12/12_21_Dvorak.html)

Vícha V., Volf I., Laboratorní práce z fyziky pro FO kategorie D (č. 63), Hradec Králové

2004 dostupné z <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/experim.pdf>

## Seznam použitých obrázků

Obr. 1 grafické skládání kmitů

Obr. 2 – Podobský str 65 obr. 66

Obr. 3 Stojaté vlnění – Podobský str 76 obr. 68

Obr. 4 Fázový posuv mezi frekvencí a souřadnicí – (Podobský, 1999, s. 80, obr. 71)

Obr. 5 Huygensův princip

Obr. 6 Odraz vlnění –

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Odraz\\_vln%C4%9Bn%C3%AD#/media/Soubor:Odraz\\_vlnoplocha\\_rovinna.svg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Odraz_vln%C4%9Bn%C3%AD#/media/Soubor:Odraz_vlnoplocha_rovinna.svg) (Autor: Pajs – Vlastní dílo, Volné dílo,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2189557>)

Obr. 7 Lom vlnění –

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Snell%C5%AFv\\_z%C3%A1kon#/media/Soubor:Lom\\_vlnoplocha\\_rovinna.svg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Snell%C5%AFv_z%C3%A1kon#/media/Soubor:Lom_vlnoplocha_rovinna.svg)

Autor: Pajs – Vlastní dílo, Volné dílo,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2189479>

Obr. 8 Vlnění ze dvou zdrojů – (Podobský, 1999, s. 87, obr. 77)

Obr. 9 Interference vlnění z dvou zdrojů – (Podobský, 1999, s. 88, obr. 78)

Obr. 10 Intenzita zvuku – (Podobský, 1999, s. 92, obr. 85)

Obr. 11 Izofony – upraveno (přeloženo) z:

[https://www.wikiskripta.eu/w/Pr%C3%A1h\\_sluchu\\_a\\_sluchov%C3%A9\\_pole#/media/File:Akustik\\_db2phon.jpg](https://www.wikiskripta.eu/w/Pr%C3%A1h_sluchu_a_sluchov%C3%A9_pole#/media/File:Akustik_db2phon.jpg)

Obr. 12 Průřez lidským uchem – <https://edu.techmania.cz/de/node/1847>

Obr. 13 Průřez hlemýžděm –

<https://www.wikiskripta.eu/w/Ucho#/media/File:Cochlea-crosssection.svg>

Obr. 14 Zvuk se nešíří ve vakuu – Strouhal Č., *Akustika*, Praha 1902 (dostupné online <https://archive.org/details/akustika>), str. 201

Obr. 15 Régnaultův chronograf –

<https://acoustics.mpiwgberlin.mpg.de/instrument/regnault-chronograph>

Obr. 16 Sondhausova čočka – Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 419

Obr. 17 Trevelyanův přístroj – Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 420

Obr. 18 Helmholtzova siréna – Max Kohl A.G. Chemnitz, Physical Apparatus str. 422

Obr. 19 Harmonograf –

<https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonograph#/media/File:Harmon%C3%B3grafo.jpg>

Obr. 20 Přístroj se dvěma ladičkami – The Cambridge Scientific Instrument Company, LTD., Physical and Electrical Instruments, str. 42

Obr. 21 Galtonova píšťala – [https://utsic.utoronto.ca/wpm\\_instrument/galton-whistle/](https://utsic.utoronto.ca/wpm_instrument/galton-whistle/)

Obr. 41 Program Audacity – menu – Kubová (Čapková) K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce), str. 25

obr. 42 Nastavení okna Audacity – Kubová (Čapková) K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce), str. 26

Obr. 43 FFT klavír, frekvence: 249 Hz, 532 Hz, 788 Hz – Kubová (Čapková) K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce), str. 33

Obr. 44 FFT pozoun, frekvence: 537 Hz, 1058 Hz, 1583 Hz – Kubová (Čapková) K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce), str. 35

Obr. 45 FFT kytara, frekvence: 255 Hz, 515 Hz, 774 Hz – Kubová (Čapková) K., Softwarová analýza zvuku hudebních nástrojů (bakalářská práce), str. 33

## Přímé měření rychlosti zvuku pomocí uzavřené trubice a mikrofону

### Teorie

Mikrofon je umístěn u ústí trubice, opačný konec trubice je zaslepen. Zdroj zvuku je u mikrofónu, na který se zaznamená zvuk, který dále putuje do trubice, na jejímž konci se odrazí a putuje zpět na mikrofon.

U tohoto měření opět vycházíme ze základního vztahu pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s}{t}$$

v našem případě

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

kde  $L$  je dráha, kterou urazí zvuk (tedy délka trubice vynásobená dvěma) a  $\Delta t$  je časový interval mezi původním a odraženým zvukem. Při tomto měření potřebujeme zjistit časový rozdíl dvou událostí, musíme tedy přihlídnout k možnostem programu, ve kterém měření provádíme. V programu Audacity můžeme pohodlně odečítat časové intervaly v milisekundách, proto je vhodné zvolit délku trubice okolo 2 metrů.

Dále je třeba znát teplotu, při které se měření provádí. Rychlost zvuku je závislá na teplotě prostředí, ve kterém se šíří. Proto se tabulková hodnota rychlosti zvuku musí přepočítat pomocí vztahu

$$v = v_0 + 0,61 t$$

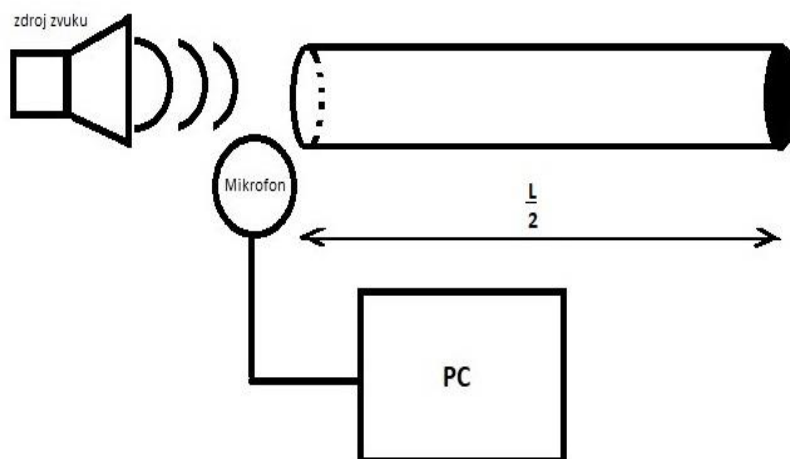
kde  $v_0$  je tabulková hodnota rychlosti zvuku při 0 °C,  $t$  je naměřená teplota ve stupních Celsia. Vypočtená hodnota se na závěr porovná naměřenou rychlosti zvuku při dané teplotě.

### Pomůcky

Mikrofon, počítač s vhodným softwarem (Audacity), trubice zaslepená na jednom konci (zaslepení buď zátkou, nebo čímkoli hladkým, např. opřenou knihou), zdroj zvuku – v našem případě 2 čajové lžičky

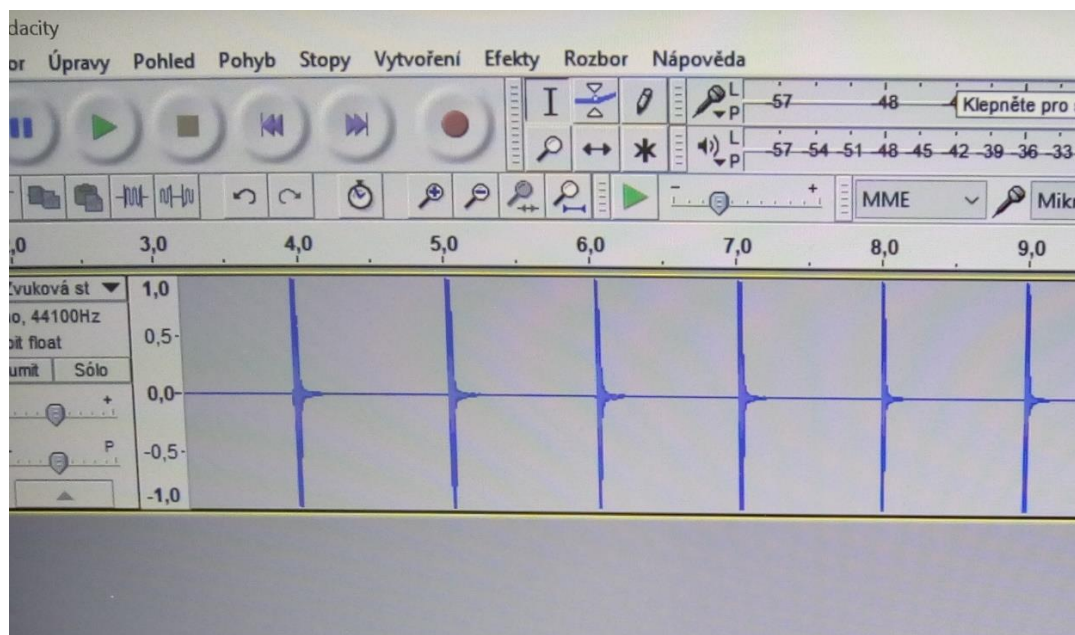
## Postup

Mikrofon dáme k ústí trubice, zkontrolujeme, zda je druhý konec zaslepen, aby mohlo dojít k odrazu zvukových vln. Celé zapojení vidíme na obrázku níže.



obr. 1 - Zapojení měření jedním mikrofonom

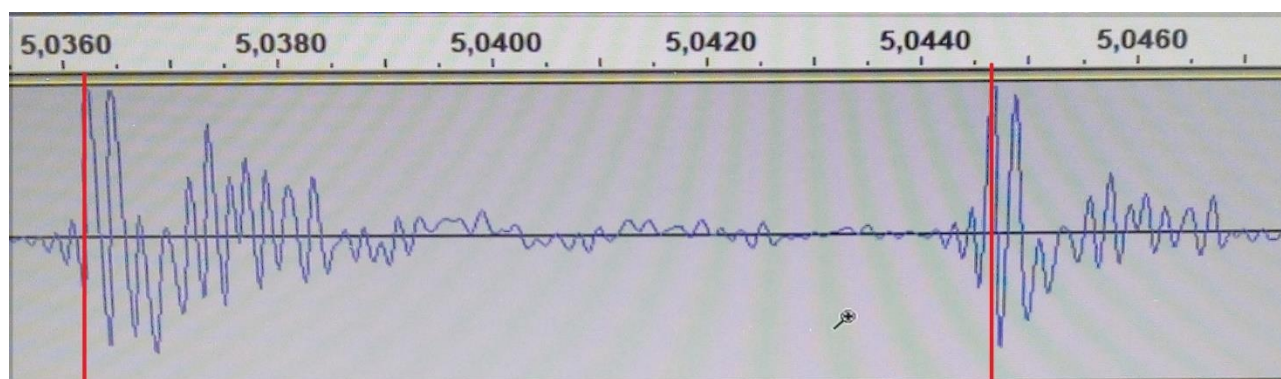
Mikrofon zapojíme do počítače, spustíme v našem případě program Audacity a zapneme nahrávání. Dvěma lžičkami několikrát (více, než desetkrát) zacinkáme o sebe u ústí trubice. Ukončíme nahrávání. Grafický záznam stopy vypadá, jako na obrázku níže.



Obr. 2 – grafický záznam nahrané zvukové stopy

Zvětšíme zobrazení stopy (roztáhneme časovou osu) tak, aby šel odečíst časový interval mezi začátkem zvukového signálu a jeho odrazem. Stejně jako vidíme příklad na obrázku č. 3,

$$\Delta t = 5,0446 - 5,0362 = 0,0084 \text{ s.}$$



Obr. 3– grafický záznam v milisekundách

Časové intervaly zaneseme do tabulky, celkem provedeme 10 měření. Změříme také délku trubice a teplotu v místnosti.

### Zpracování výsledků

Měření	$L$ (m)	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)	$\Delta t = t_2 - t_1$ (s)	$v$ ( $m \cdot s^{-1}$ )
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					



Teplota vzduchu v místnosti:  $t =$

Průměrná hodnota rychlosti:  $\bar{v} =$

Tabulková hodnota rychlosti zvuku pro danou teplotu vzduchu:  $v =$

### **Závěr**

Porovnej vypočtenou rychlost zvuku s tabulkovou hodnotou pro danou teplotu.

Měření rychlosti zvuku touto metodou je poměrně přesné. Jak je vidět výše, tabulková hodnota se od naměřené a přepočtené hodnoty rychlosti zvuku ve vzduchu příliš neliší.

### **Zdroje:**

[1] Hubeňák J., Akustika klasicky a s počítačem, [online]

<http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak J.pdf>

[2] Jerje T., Audacity aneb jak zviditelnit zvuk, [online]

<https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/17-17-Jerje.html>

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,

ISBN 80-86148-28-9

[4] Dvořák L., Rychlost zvuku stokrát jinak, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Velehr 12/12 21 Dvorak.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Velehr 12/12 21 Dvorak.html)

## Přímé měření rychlosti zvuku pomocí dvou mikrofonů

### Teorie

U tohoto pokusu vycházíme ze základního vztahu pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s}{t}$$

v našem případě

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

kde  $L$  je vzdálenost mikrofonů a  $\Delta t$  časový interval, ve kterém zvuk od prvního mikrofonu dorazí ke druhému. Tento interval se musí odečíst správně, jelikož při měření v místnosti na druhý mikrofon nepřichází jen původní zvuk, ale i odražené zvukové vlny, které mohou ztížit odečítání intervalu. Musí se také vzít v úvahu, že se časové intervaly odečítají v měřítku milisekund, takže je vhodné mít vzdálenost mezi mikrofony delší, než 2 metry, aby byl v tomto měřítku patrný časový rozdíl zaznamenání zvuku mezi oběma mikrofony.

Rychlost zvuku je závislá na teplotě prostředí, ve kterém se šíří. Proto se tabulková rychlost zvuku musí přepočítat pomocí vztahu

$$v = v_0 + 0,61 t$$

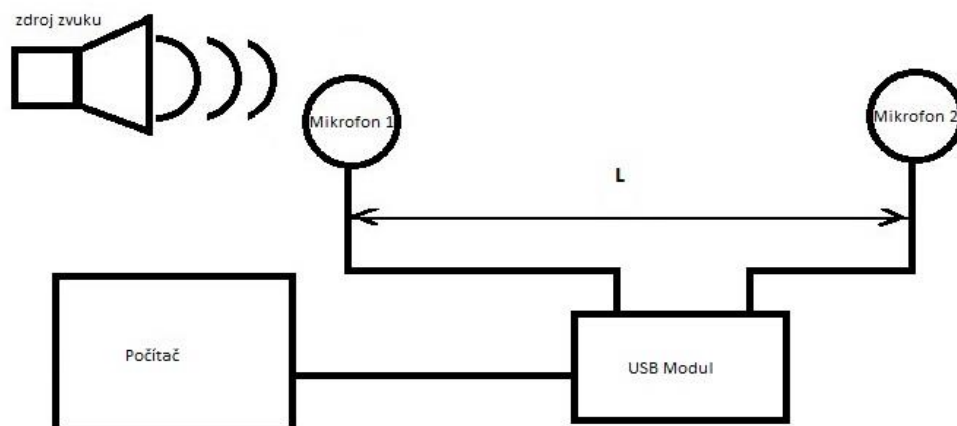
kde  $v_0$  je tabulková hodnota rychlosti zvuku při 0 °C,  $t$  je naměřená teplota ve stupních Celsia. Vypočtená hodnota se na závěr porovná naměřenou rychlosti zvuku při dané teplotě.

### Pomůcky

Počítač s vhodným softwarem (Adacity), 2 mikrofony, externí zvukový USB modul, zdroj zvuku – v našem případě porcelánový talířek a lžička, či jiný zdroj ostrého zvuku, metr, teploměr

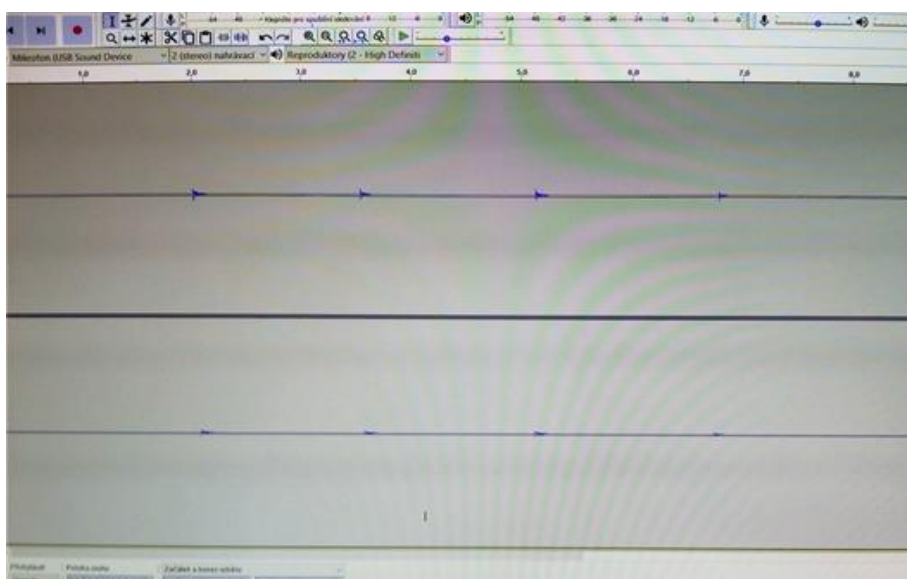
## Postup

Oba mikrofony se zapojí do externího modulu a změří se vzdálenost mezi nimi. Způsob zapojení je na obrázku níže.



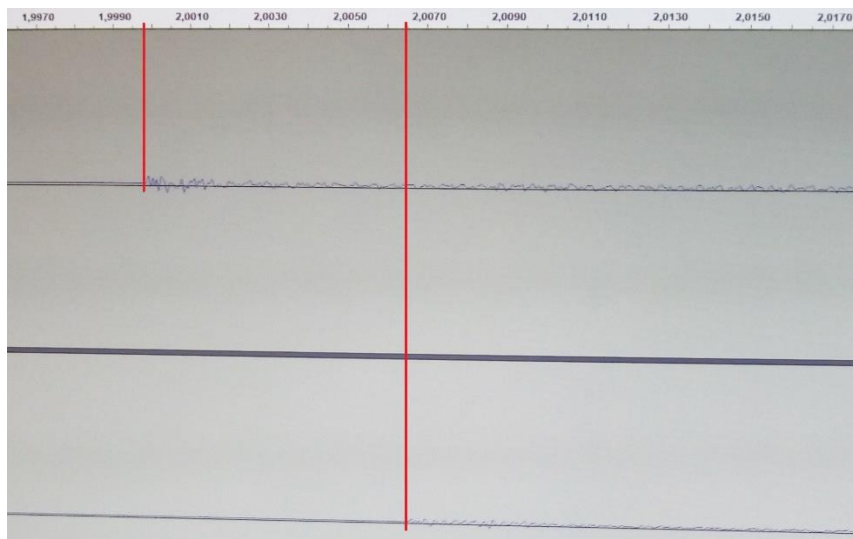
obr. č. 1 – zapojení mikrofونů

Po zapojení mikrofونů se spustí software pro záznam zvuku, v našem případě program Audacity, který je volně dostupný. V případě potřeby proběhne nastavení zvukové karty a programu, aby byl nahráván signál z USB modulu. Zapneme nahrávání. Ťukání opakujeme minimálně desetkrát, s rozstupem přibližně 2 sekund. Grafický záznam pak vypadá, jako na obrázku níže.



Obr. č. 2 – zvukový záznam ze dvou mikrofونů

Po nahrání zvukového signálu se vhodně zvětší záznamová stopa (roztáhne časová osa) tak, aby byl vidět okamžik, kdy přišel signál na každý z obou mikrofonů a odečteme  $\Delta t$  a zaneseme do tabulky. Příklad odečtení intervalu z obrázku níže:  $\Delta t = 2,0065 - 1,9997 = 0,0068 \text{ s}$



Obr. č. 3 – detail záznamu z obou mikrofonů

Časový posun odečteme celkem z deseti záznamů ťuknutí. Vypočítáme průměrnou rychlost zvuku ve vzduchu, kterou přepočítáme v závislosti na teplotě. Nakonec porovnáme výslednou rychlost zvuku s tabulkovou hodnotou pro danou teplotu.

### Zpracování výsledků

Měření	$L \text{ (m)}$	$t_1 \text{ (s)}$	$t_2 \text{ (s)}$	$\Delta t = t_2 - t_1 \text{ (s)}$	$v \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					

Teplota vzduchu v místnosti:  $t =$

Průměrná hodnota rychlosti:  $\bar{v} =$

Tabulková hodnota rychlosti zvuku pro danou teplotu:  $v =$

### **Závěr**

Pomocí dvou mikrofónů, počítače a vhodného softwaru lze změřit rychlost zvuku s velkou přesností, je však důležité správně odečíst časový interval.

### **Zdroje**

[1] Hubeňák J., Akustika klasicky a s počítačem, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak\\_J.pdf](http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/22-09-Hubenak_J.pdf)

[2] Dvořák L., Rychlost zvuku stokrát jinak, [online]

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_12/12\\_21\\_Dvorak.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_12/12_21_Dvorak.html)

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999,  
ISBN 80-86148-28-9

[4] Jerje T., Audacity aneb jak zviditelnit zvuk, [online]

<https://vnuf.cz/sbornik/prispevky/17-17-Jerje.html>

## Měření rychlosti zvuku pomocí Kundtovy trubice

### Teorie

Německý fyzik August Kundt se narodil 18. listopadu 1839 a zemřel 21. května 1894. Zabýval se výzkumem zvuku, optiky a elektromagnetismu. V roce 1866 vynalezl Kundtovu trubici, která umožňuje měřit rychlost zvuku ve vzduchu a v plynech či umožňuje zviditelnit stojaté vlnění.

Kundtova trubice, pomocí které budeme měřit rychlost zvuku, je skleněná trubice, která má na jednom konci zdroj zvukového vlnění. Na druhém konci, od něhož se vlnění odráží, je uzavřená pohyblivým pístem.

V tomto měření vycházíme ze vztahu

$$v = \lambda \cdot f$$

Frekvence  $f$  je zadána do tónového generátoru.

$$\lambda = 2l$$

kde  $l$  je vzdálenost dvou sousedních kmiten či uzlů.

Tabulkovou hodnotu rychlosti zvuku musíme přepočítat pro danou teplotu:

$$v = v_0 + 0,61 t$$

kde  $v_0$  je tabulková hodnota při 0 °C,  $t$  je naměřená teplota ve stupních Celsia.

### Pomůcky

Kundtova trubice, PC s nainstalovaným tónovým generátorem – v našem případě volně dostupný program Two Channels Frequency Generator, reproduktor, telefon se zvukoměrem (například aplikace Zvukoměr, Phyphox, aj.).

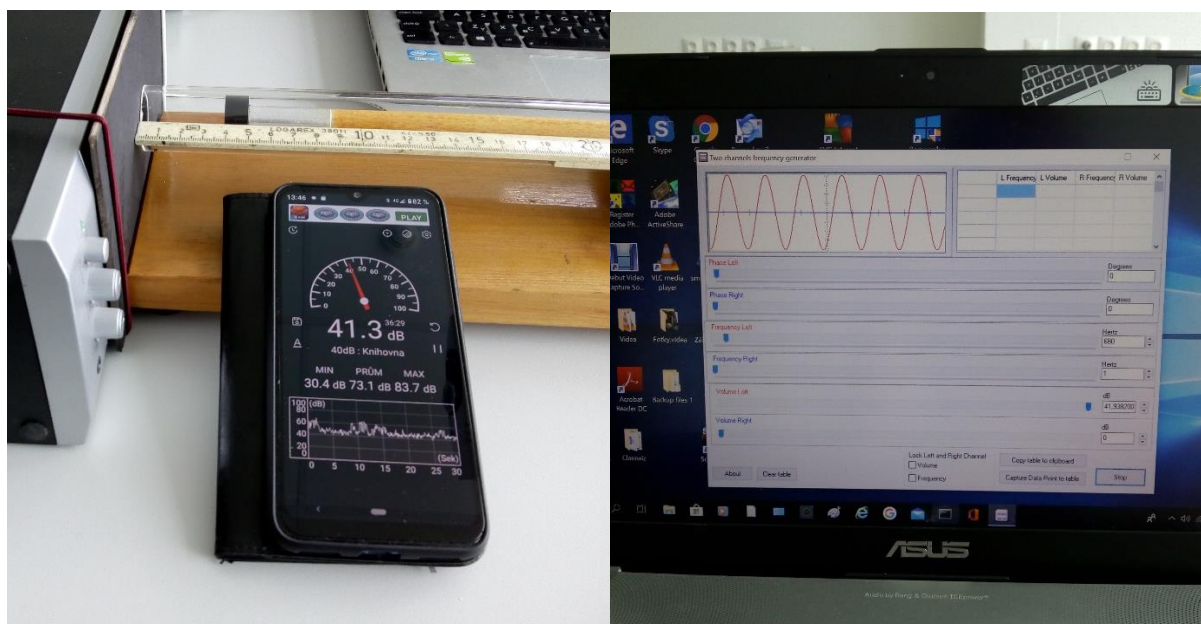
### Postup

Po sestavení aparatury zapneme tónový generátor na požadovanou frekvenci. Nastavíme telefon se zvukoměrem k trubici a ověříme, zda funguje. Pohybujeme pístem v Kundtově trubici, existenci minim a maxim (kmiten a uzlů) ověříme nejprve sluchem a poté pístem pohybujeme pomaleji a sledujeme hodnoty na zvukoměru a zapisujeme do

tabulky společně s naměřenou vzdáleností  $l$  daného maxima. Změříme teplotu vzduchu v učebně.



Obr. č.1 – Kundtova trubice s tónovým generátorem



Obr. č. 2– spuštěná aplikace Sound Meter – Decibel a Two Channels Frequency Generator

**Zpracování**

$f$ (Hz)	Měření	$L_p$ (dB)	$l$ (mm)	$\Delta l$ (mm)	$v$ (ms <sup>-1</sup> )
1700	1.				
	2.				
	3.				
	4.				
	5.				
1360	1.				
	2.				
	3.				
	4.				
	5.				
1020	1.				
	2.				
	3.				
	4.				
	5.				
680	1.				
	2.				
	3.				
	4.				

Teplota vzduchu v místnosti:  $t =$

Průměrná hodnota rychlosti:  $\bar{v} =$

Tabulková hodnota rychlosti zvuku pro danou teplotu:  $v =$



## **Závěr**

Pomocí Kundtovy trubice lze změřit rychlost zvuku ve vzduchu. Při měření jsme ale závislí na přesnosti zvukoměru, který může mít jistou setrvačnost a vznikne tak ve výsledku odchylka od tabulkové hodnoty.

Zde porovnej naměřenou hodnotu rychlosti zvuku s tabulkovou hodnotou pro danou teplotu.

## **Zdroje**

[1] Tesař J., Klasické a inovované měření rychlosti zvuku [online]

[http://vnuf.cz/sbornik\\_old/Veletrh\\_08/08\\_16\\_Tesar.html](http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_08/08_16_Tesar.html)

[2] August Kundt [online], poslední aktualizace 5.6.2020 v 15:39 [cit.29.11.2020], Wikipedie. Dostupné z [https://cs.wikipedia.org/wiki/August\\_Kundt](https://cs.wikipedia.org/wiki/August_Kundt)

[3] Podobský J., *Procházky akustikou*, Gaudeamus, Hradec Králové 1999, ISBN 80-86148-28-9