Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

ŘEŠENÍ MATEMATICKÝCH PROBLÉMŮ JAKO MOTIVACE VE VÝUCE

Diplomová práce

Autor: **Dominik Svoboda**

Studijní program: **N1101 - Matematika**

Studijní obor: **NMATSSK-NSSKIN**
Učitelství matematiky pro střední školy –
Učitelství pro střední školy - informatika

Vedoucí práce: **Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.**

Hradec Králové 2020

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Dominik Svoboda**
Studium:	S17MA018NP
Studijní program:	N1101 Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy, Učitelství pro střední školy - informatika
Název diplomové práce:	**Řešení matematických problémů jako motivace ve výuce**
Název diplomové práce AJ:	Solving of Mathematical Problems as a Motivational Tool in Education

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Diplomová práce se zabývá matematickými úlohami, které svým charakterem přispívají k motivaci při výuce matematiky. Shrnuje vybrané teoretické aspekty motivace ve vyučování a dále mapuje odbornou a učebnicovou literaturu a internetové zdroje obsahující studované matematické problémy. Studie vyústí v tvorbu webových stránek shromažďujících užitečné úlohy k podpoření zájmu o studium matematiky.

This diploma thesis concerned with mathematical problems, which by their character contribute to the motivation in mathematics education. It summarizes the selected theoretical aspects of motivation in teaching and mentions monographs, textbooks and internet resources containing studied mathematical problems. The aim of the work is the creation of website that collects useful exercises for motivating students in mathematics.

Lokša J., Lokšová I., *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Portál, Praha, 1999.

Hošpesová A., Stehlíková N., Tichá M. (eds.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* Kuřina F., *Matematika a řešení úloh.* PedF JČU v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2011.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice:, 2007.

Vybrané odborné články v matematicko-didaktických periodikách.

Vybrané učebnice matematiky a sbírky úloh pro základní a střední školu.

Další literatura bude upřesněna v rámci prvních konzultací.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponent:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 20.8.2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, z kterých jsem vycházel.

V Hradci Králové dne 22. 6. 2020 Jméno a příjmení

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval své rodině za podporu a pomoc při psaní této práce. Zároveň bych chtěl poděkovat Mgr. Lukáši Vízkovi, Ph.D. za vedení práce, podnětné rady a vstřícný přístup. Současně bych rád poděkoval Mgr. Radmile Nováčkové za ochotný souhlas se zpracováním a publikací úloh.

Anotace

SVOBODA, D. *Řešení matematických úloh jako motivace ve výuce*. Hradec Králové, 2020. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí práce Lukáš Vízek. 199 s.

Diplomová práce se zabývá pojmem motivace z psychologického a pedagogického hlediska v sociálním prostředí školy a dále matematickými úlohami, které svým charakterem přispívají k motivaci při výuce matematiky. Studie vyústí v dokument shromažďující užitečné úlohy k podpoření zájmu o studium matematiky.

Klíčová slova

matematická úloha, motivace, potřeba, incentivum, výuka

Annotation

SVOBODA, D*. Solving of Mathematical Problems as a Motivational Tool in Education*. Hradec Králové, 2020. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Lukáš Vízek. 199 p.

This diploma thesis concerned with concept of motivation from a psychological and pedagogical point of view in the social environment of the school and also with mathematical problems, which by their character contribute to the motivation in mathematics education. The aim of the work is the creation of the document that collects useful exercises for motivating students in mathematics.

Keywords

mathematical problem, motivation, need, incentive, education

OBSAH

ÚVOD

Ve své diplomové práci se zabývám problematikou *motivace žáků*, která je dle mého názoru velmi důležitým faktorem ve výuce a osobně mě tato problematika zajímá. Také jsem si přál práci pojmout tak, aby měla i praktické využití a mohla být inspirací pro pedagogy. Tyto dvě mé myšlenky se propojili ve chvíli, kdy jsem se na naší katedře zúčastnil přednášky Mgr. Radmily Nováčkové, učitelky matematiky na Střední odborné škole a Středním odborném učilišti, Vocelova 1338, Hradec Králové, která byla velmi zajímavá a hodně mě oslovila. Zaujal mě především způsob, jakým paní kolegyně využívá různých zajímavých úloh k přiblížení matematiky žákům zábavnou a přitom poučnou formou, která žáky motivuje k učení a výuka je baví. Rozhodl jsem se proto paní kolegyni oslovit s nabídkou zpracování a publikace těchto matematických úloh v rámci mé diplomové práce. Paní kolegyně Nováčková souhlasila se spoluprací a zpracováním i publikací úloh. Mohu tak ve své práci propojit teorii s praxí a poukázat na mnohá zajímavá řešení, která mohou žáky ve výuce matematiky motivovat a pedagogové se mohou jimi inspirovat.

V teoretické části práce se věnuji popisu pojmu motivace z psychologického i pedagogického hlediska, a to v sociálním prostředí školy. Nejprve se zaměřuji na rozdělení motivace z hlediska hlavních psychologických směrů, dále se zabývám rozdělením motivace na vnitřní a vnější, které je velmi podstatné. Důležitým pojmem souvisejícím s vnější motivací je její činitel, *incentivum*. V práci uvádím nejčastější podoby tohoto činitele, které se vyskytují ve školní praxi, a tím jsou odměna a trest. Také zmiňuji způsoby zpětné vazby žáků.

Stejně tak uvádím i činitele motivace vnitřní, kterým je *potřeba*. V práci vymezuji hierarchie potřeb, a dále charakteristické skupiny potřeb z hlediska školní motivace. Jsou jimi poznávací, sociální a výkonové potřeby. Ke každé ze tří uvedených skupin dále doplňuji způsoby jejich rozvoje ve školním prostředí. Incentivum a potřeba působí na dalšího činitele v procesu motivace a tím je *motiv*. Uvádím jeho možná rozdělení. Z hlediska zjišťování úrovně a struktury motivace žáků se zmiňuji v práci také o individuálním pohovoru a dotazníku. Teoretickou část o motivaci uzavírám uvedením motivačních a demotivačních faktorů.

V druhé části práce uvádím již zmiňované úlohy získané od paní kolegyně Nováčkové. Konkrétně se jedná o 276 úloh také spolu s jejich řešením a řazením do kategorií podle metod řešení. Z mého pohledu jsou úlohy sympatické svojí jednoduchostí a důvtipem. Paní kolegyně je sbírá, nebo vytváří, a dále užívá ve svých hodinách matematiky, jako motivaci pro její studenty. Za tímto účelem některé z uvedených úloh převzala z jiných zdrojů. V některých případech se jedná o úlohy historické, které jsou již několik staletí všeobecně známé. Jiné úlohy jsou však vytvořeny přímo paní kolegyní Nováčkovou.

Na konci práce v přílohách uvádím zdroje populárně-naučné literatury a webových stránek, které obsahují podobné úlohy, a v případě zájmu je možné se na těchto místech také inspirovat.

TEORETICKÁ ČÁST

1. MOTIVACE

Slovo motivace má svůj původ v latinském slově **motus**, které by se dalo přeložit jako **pohyb**.

V Pedagogickém slovníku je motivace definována jako: „souhrn vnitřních a vnějších faktorů, které:

1. vzbuzují, aktivizují a dodávají energii lidskému jednání a prožívání;
2. zaměřují toto jednání a prožívání určitým směrem;
3. řídí jeho průběh a způsob dosahování výsledků;
4. ovlivňují též způsob reagování jedince na jeho jednání a prožívání, jeho vztahy k ostatním lidem a ke světu.“ ([1], str. 127)

V knize Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole nalezneme podobnou definici. Motivace je souhrn „činitelů, které podněcují, energizují a řídí průběh chování člověka a jeho chování a prožívání ve vztazích k okolnímu světu a k sobě samotnému.“ ([2], str. 11) Autoři dále uvádějí: „Musíme si … být vědomi toho, že je to jen určitá pomůcka, že na motivaci usuzujeme nepřímo (nikdy ji nevidíme). Pojetí motivace není vůbec jednoznačné.“ ([2], str. 10) Z tohoto důvodu pak „rozvoj motivace v čisté podobě neexistuje – vždy se napojuje na konkrétní činnost (například učební).“ ([2], str. 14)

Jak uvádí [2], v minulém století se spolu s rozvojem psychologie a pedagogiky objevuje také poprvé pojem motivace. Různé psychologické směry popisují (přistupují k) motivaci svým vlastním způsobem. Níže zmíním tři hlavní psychologické směry a jejich přístupy k motivaci.

Behavioralní teorie, chápe motivaci jako snahu o dosažení příjemných důsledků určitého chování, nebo snahu vyhnout se důsledkům nepříjemným. Je zde kladen větší důraz na ovlivnění jedince pomocí odměny či trestu.

Podle humanistické teorie je motivace snahou překročit stav své existence realizováním svých vývojových možností. Větší důraz je kladen na vřelé (svobodné, akceptující, atd.) prostředí, v němž se rozvíjí pozitivní vývoj jedince či skupiny lidí.

V **kognitivní teorii** je motivace chápána jako výsledek poznávacích procesů člověka (biologické a psychické procesy umožňující poznání skutečnosti [6]) Jedná se o zpracování informací a rozhodnutí se. Důraz je kladen na tyto motivační procesy, které mají motivační účinek.

1.1. Vnitřní a vnější motivace

Na člověka působí různé podněty (vlivy) a na základě nich vzniká motivace. Podle podstaty těchto podnětů (vlivů) se pak motivace dělí na *vnitřní a vnější*. (Ve své práci se budu dále věnovat pouze motivaci související s vyučovacím procesem.)

„*Vnitřní motivace* (v angličtině intrinsic motivation) je motivací přicházející z organismu, respektive z jedince. *Vnější motivace* (v angličtině extrinsic motivation) je vyvolaná vnějšími činiteli, podněty z okolí a to za podmínky určitého vnitřního vyladění člověka." ([8], 4. kapitola)

Jsme-li motivováni *vnitřní motivací*, pak nám jde o uskutečnění určité činnosti, bez očekávání nějakého vnějšího podnětu, jako je například známka či pochvala. Danou činnost navíc „děláme plně z vlastní vůle." ([3], str. 17) Tato motivace plyne především z *poznávacích potřeb*.

Jak I. Lokšová a J. Lokša, tak I. Pavelková se shodují, že „vnitřní motivace žáků má pozitivní dopad na jejich úspěšnost a kvalitu učení." Zajímají-li učební činnosti žáka, „pak se v nich více angažují, častěji z nich pociťují vnitřní uspokojení, vykazují vyšší kvalitu porozumění a pochopení souvislostí." Tento druh motivace, jak bylo potvrzeno, má také „pozitivní dopad na paměťové pochody a na koncentraci a menší unavitelnost při učení." Co se týče trvání této motivace, tak „je-li navozena, bývá velice stálá a napomáhá kontinuální motivaci k učení i po skončení povinné školní docházky." Navíc „žáci s rozvinutou vnitřní motivací volí většinou i náročnější vzdělávací dráhu." I. Pavelková ale také zmiňuje, že často se vyskytne situace, jak v životě, tak ve škole, kdy „musíme provádět aktivity (například se učit), které jsou pro jedince či společnost důležité, někdy je provádíme i z vlastní vůle (uvědomujeme si jejich smysl), ale nejsou pro nás osobně zajímavé." (pět výše uvedených citací: [3], str. 17)

V případě *vnější motivace,* je člověk motivován k nějaké činnosti na základě určitého vnějšího podnětu. Z časového hlediska dělíme *vnější motivaci* na krátkodobou (pochvala, odměna, atd.) a dlouhodobou (celoroční hra, dostat se na vysněnou školu, atd.). Tuto motivaci posuzujeme především podle toho, do jaké míry se blíží k *motivaci vnitřní*. Takovéto rozdělení se pak konkrétně odlišuje stupněm zvnitřnění (interiorizace) původní vnější regulace. Neboli „nakolik je činnost spontánní a prováděna z vlastní vůle" ([3], str. 20)

Podle [2], [3] existují níže uvedené druhy vnější motivace.

- **Externí regulace** – v tomto případě jde jen čistě o dosažení vnějšího podnětu. Impulsem bývá jiná osoba, která nabízí odměnu nebo hrozí trestem. Není prostor pro autodeterminaci. Žák domácí úkol píše, protože nechce dostat špatnou známku od učitele.

- **Regulace pasivně převzatá** – v tomto případě jde o určité normy, které jsme na základě vnějšího podnětu do jisté míry přijali, ale vnitřně neakceptovali. Žák si myslí: „To proč se mají dělat domácí úkoly, mě sice nepřesvědčuje (případně to ani nevím), ale vím, že se mají dělat, a proto je dělám, protože kdybych je nedělal, tak bych měl pocit viny (cítil bych se špatně)."
- **Identifikovaná motivace** – představuje určité normy, které jsme na základě vnějšího podnětu přijaly a také vnitřně je akceptujeme. Žák se domnívá: „Důvody, proč se mají dělat domácí úkoly, chápu a uvědomuji si, že je to pro mě důležité, a proto úlohy dělám."
- **Integrovaná regulace** – jedná se o nejvyšší stupeň vnější motivace. Určité normy, které jsme přijali a vnitřně je akceptujeme, slouží zároveň jako motivační činitel našeho chování. Typ této motivace umožňuje podobně jako u motivace vnitřní plnou autodeterminaci, neboť jsou činnosti dělány z vlastního popudu. Na rozdíl od vnitřní motivace však není motivací daná činnost jako taková, nýbrž důležitost dané činnosti a její výsledek. Žák usuzuje: „Domácí úkoly dělám z plného vnitřního přesvědčení, z vlastní vůle."

  (citace charakteristického příkladu postoje žáka uvedená: [3], str. 20-21)

Jak udává I. Pavelková: „poznatky vývojové psychologie naznačují v ontogenezi (v období školní docházky) dřívější nástup vnější motivace a prostřednictvím procesů interiorizace její postupný přechod na vnitřní motivaci." ([3], str. 21)

Stupeň interiorizace (zvnitřnění) vnější regulace, se žáku dostává především od autorit jeho sociálního prostředí (rodič, učitel, atd.). Na základě zkušeností a přehodnocování výhod nebo nevýhod, pak žák vnější regulaci přijímá nebo nepřijímá. Takto u něj postupně může docházet k vyššímu stupni interiorizace vnější regulace. Na jeho dosahování má také vliv pocit „zvládnutí situace, z něj plynoucí sebedůvěra, podněcování úsilí o získání poznatků a přibližování jejich smyslu a významu." ([3], str. 21) Interiorizace vnější regulace je jedním z mnoha faktorů, které ovlivňují velmi složitý proces rozvoje *vnitřní motivace*. Tento proces je složitý právě pro množství faktorů, které na něj působí stejně tak jako s různorodostí rozvoje stupně *interiorizace* u žáků. Dalším z faktorů jsou biologické, psychické a sociopsychické dispozice každého jedince, které jsou dány od narození. U každého žáka je tedy stupeň vnější a rozvoj vnitřní motivace na různé úrovni. V rámci školního prostředí pak „bude z tohoto hlediska sehrávat rozhodující roli způsob a kvalita vedení (řízení) učebních činností učitelem, prostor a podpora k přechodu k sebeřízení, způsoby hodnocení, přiměřený prostor k sebeuplatnění" a další. ([3], str. 21) Možné charakteristiky žáka s dobře rozvinutou vnitřní nebo vyšším stupněm vnější motivace uvádí *tabulka 1.*

Žák s převážnou *vnitřní motivací*	Žák s převážnou *vnější motivací*
Učení motivované zájmem a zvědavostí	Učení motivované snahou získat dobré známky
Snaha pracovat pro svoje vnitřní uspokojení	Snaha pracovat pro uspokojení učitele nebo rodiče
Preference nových a flexibilních činností	Upřednostnění lehkých a jednoduchých činností
Snaha pracovat samostatně a nezávisle	Závislost na pomoci učitele
Preferování vnitřních kritérií úspěchu a neúspěchu v práci	Orientace na vnější kritéria posouzení výsledků

Tabulka 1. Možné charakteristiky žáka s převažující vnitřní nebo vnější motivací ([3], str. 17)

I. Pavelková zároveň poukazuje na nebezpečí zhoršení dobrého výsledného motivačního efektu k učení u žáků s velmi silnou vnitřní motivací, je-li ve větší míře dodávána motivace vnější.

I. Lokšová a J. Lokša poznamenávají: „Učitel by měl používat co nejvíce metod vnitřní motivace a zároveň si být jistý, že ne všichni žáci budou jimi motivováni. V takovém případě je vhodné užít metod vnější motivace, ale jen po dobu přítomnosti a vlivu učitele. Jakmile se žák dostane mimo přímý vliv učitele, vnější motivace přestane působit (pokud nedošlo k zvnitřnění činností a cílů) a žák v nebude v žádoucí činnosti pokračovat.“ ([2], str. 21) Podle I. Pavelkové bývaly v minulosti oba druhy motivace stavěny proti sobě. Důvodem bylo přesvědčení, že *vnější motivace* tlumí *motivaci vnitřní*. Jak ale dále poznamenává: „Konkrétně identifikovaná a integrovaná vnější motivace velice dobře doplňuje vnitřní motivaci zvláště pro situace a náročné dlouhodobé cíle, které jen velmi těžko mohou spadat do oblasti zájmu.“ ([3], str. 21)

2. INCENTIVUM

Vnější faktory (podněty) působící na jednání člověka z vnějšku jsou *incentivy*. Na základě jejich působení se aktualizují (vzbuzují) vnitřní faktory člověka (*potřeby*). Cílem jejich uspokojení pak mohou být právě *incentivy*. Patří mezi ně například: jevy, události, sociální vztahy s druhými (rodič, učitel, spolužáci, atd.), zpravodajství, reklama, předměty, odměny, atd.

Incentivy můžeme dělit podle chování, které v reakci na ně zaujímáme (podle [3]).

- Pozitivní incentivum – vyvolávají chování směrem k nim (jedná se například o chutnou potravu, pochvalu, odměnu atd.);
- Negativní incentivum – vyvolávají chování směrem od nich (jedná se například o hrozbu, výsměch, atd.).

„Negativní incentivy mají také schopnost vyvolat potřebu (například potřebu bezpečí) nejsou však schopny ji uspokojit." Ve většině případů můžeme hovořit o komplexních incentivech protože „nebývají vázány na uspokojení jedné potřeby. " ([3], str. 13)

R. Čapek ve své knize uvádí: „Učitel, jakkoli je přátelský, ve výuce kreativní a férový, stejně potřebuje ve své třídě prostor k práci pro své žáky. Myslím tím pořádek, který má hodně společného s pravidly, slušnou a přátelskou komunikací, korektním chováním všech v třídě. … Já použiju slovo kázeň." ([4], str. 89) A doplňuje: „Naštěstí, jak ukazuje nejen měření klimatu ve třídách, sami žáci nechtějí žádnou anarchii. … oni chtějí pořádek a jasná pravidla, včetně toho, aby učitel jejich dodržování vymáhal." ([4], str. 90) Daná pravidla by měla sloužit (spolu s dalšími složkami) k zajištění dobrých podmínek vyučování. U několika autorů (například [2], [4]) se objevuje myšlenka tvorby pravidel. Učitel se na pravidlech s žáky domluví: žáci a učitel navrhují pravidla, která jsou pro ně důležitá, dále se o nich baví a nakonec je schvalují v určité podobě. Žáci následně cítí větší odpovědnost, protože jsou pravidla společnou dohodou a ne něčím daným z vnějšku. Zároveň jsou pravidla blíže reálným potřebám žáků, neboť je navrhovali a diskutovali o nich. Učitel následná společně schválená pravidla důsledně vyžaduje.

2.1. Odměna

Za dobře vykonanou činnost (úkol, osvojení si učiva, atd.), za správné chování (slušné, nápomocné, dobrovolné, atd.), aktivitu (například nález předmětu, atd.) následuje určitý benefit (odměna). Ve školním prostředí je nejčastější odměnou dobré hodnocení (dobrá známka, pochvala), ale může jít také o oblíbenou aktivitu, hru, celoroční třídní hodnocení atd. Jako příklad bych uvedl řešení drobných matematických úloh (uvedených v praktické části této práce) pro žáky, kteří již zadanou práci splnili.

I. Lokšová a J. Lokša k tomu poznamenávají některé užitečné myšlenky popsané níže.

„Okamžitá odměna je účinná v případě, že chceme posílit nové nebo zlepšené chování žáka. Jestliže je žádoucí chování osvojené, je dobré dát vhodným způsobem najevo, že odměna za výkon nemůže být pravidlem." ([2], str. 19) Pak by mohlo hrozit, že žáku půjde jen o dosažení vnějšího cíle (odměna, pochvala, atd.) namísto požadovaného cíle (osvojení si učiva, žádoucího chování, atd.).

Učitel by neměl posilovat nesprávné chování žáka, zároveň neignorovat chování, které by mohlo být oceněno a „dobré chování … okamžitě posílit."([3], str. 19). Vyučování vyžaduje významnou měrou učitelovu pozornost. Může být tedy někdy obtížné, si všimnout a ocenit určité žádoucí chování u všech žáků. Na druhou stranu se jedná o velmi důležitý krok k posílení žádoucího (slušného, nápomocného, atd.) chování. Možná ještě obtížnější je často rozpoznání tohoto chování od nesprávného. Jedná se o určitý um učitele poznat důvody vedoucí k chování žáka a podle toho k němu přistupovat. Chování je následkem, projevem předcházející zkušenosti, uvažování, emoce, atd. K tomu, aby mohl učitel toto chování dobře odlišit je důležitá: znalost žáka a prostředí, ve kterém žije a dobrá komunikace a osobní vztah s žákem, ve kterém se žák nebojí otevřeně a pravdivě mluvit o důvodech svého jednání.

„Odměny by se neměly aplikovat v případech, kdy je žák vyžaduje nebo si je dopředu objednává, za splnění určitého výkonu." ([2], str. 19) Ale „výsledkem adekvátního odměňování by mělo být postupné upevňování nového, žádoucího chování (například osvojení si učiva) … naproti tomu pokud se žák často setkává s neuznáním svého výkonu nebo nespravedlností při hodnocení, jeho zájem a motivace k učení se ztrácí." ([2], str. 19)

Pokud je žák chválen za dobrý výsledek v činnosti, kterou musel vykovat na učitelův příkaz, může to vést k zvýšení určité závislosti na učiteli (jeho příkazech), na místo snahy o rozvoj samostatnosti.

2.2. Trest

Učitelem (pomocí společných pravidel) by měla být stanovena kritéria, za něž bude určitý trest udělen a následná vhodná forma trestu (přiměřeně intenzivní). V takové případě mohou tresty sloužit jako ukazatel, že „narazil do nějakého mantinelu nebo porušil pravidlo a musí být doprovázen snahou o změnu jeho chování vysvětlením, proč to není vhodné." ([4], str. 93) Podle R. Čapka by měl učitel trestat žáka pouze „milující rukou". A ta „je jedině ta, o které si to myslí žák. Učitel by ho měl vidět v dobrém světle, fandit mu a podporovat ho. Měl by optimisticky pohlížet na jeho progres a přát mu to nejlepší." ([4], str. 92)

Níže uvedu pravidla správného a férového trestání (podle [4]).

- Učitel musí být důsledný – „Jakmile se žáci naučí, že slovo učitele platí, je napůl vyhráno. Ale aby toto slovo platilo, je třeba ho vážit."
- Učitel musí být daný moment ledově klidný – „Nic se nedělá v afektu, hněvu nebo hysterii."
- Tresty mají určitou hierarchii, která by se neměla přeskakovat – „Dobrý učitel nevyhazuje vysoké karty hned na začátku, protože pak by mu nezbyly žádné."
- Pokud je to proveditelné je podnětné použít metodu přirozených následků – „Žák sám zjedná nápravu, omluví se za své chování, nahradí poškozenou věc." Nejedná se ale o trestání žáka prací, to je něco jiného!
- Pravidlo důležité jak pro společný vztahy učitel-žák, tak pro psychiku a nervy učitele – „Žádné porušení pravidel nebo kázně si nebereme osobně!"
- Trest není pomstou, ale prevencí.
- Trest by měl jen mírně znevýhodnit přestupek.
- (Uvedená pravidla spolu s citacemi: [4], str. 93-94)

- Za podnětné lze považovat také níže uvedené dvě pravidla.

- „Učitel … musí stále sledovat aktuální účinek odměn a trestů na žákovu motivaci, a to dlouhodobě." ([2], str. 19) Nejedná se o snadný úkol, ale je velmi důležitý. Každého žáka budou odměna a trest formovat jinak.

- „Když se žák neučí," měly by být „pro něj důsledky dostatečně nepříjemné, aby ho motivovaly." ([5], str. 54) Nicméně je dobré si s žákem také promluvit, proč se nechce učit a co může udělat proto, aby se to změnilo.

2.3. Zpětná vazba

Důležitou informací je pro žáky zpětná vazba. Jednou z jejích forem je hodnocení (viz str. 18). Cílem zpětné vazby by mělo být, „aby se žák dozvěděl, v jakých oblastech je jeho výkon dobrý a kde se mu naopak nedaří." Následně může učitel „žáku zkusit nabídnout možné postupy změny určité žákovy učební metody a společně s žákem mohou vybrat jejich konkrétní aplikování jak ve škole, tak při plnění domácích povinností či studiu." I. Lokšová a J. Lokša uvádějí dva typy zpětné vazby, které mohou zvyšovat vnitřní motivaci k učení. Jedná se o *slovní zpětnou vazbu* a *pozitivní zpětnou vazbu*. Slovní zpětná vazba dává větší prostor k vyjádření potřebných informací žáku. Druhá z uvedených by svým charakterem měla být pozitivní a to i tehdy, že vyjadřuje kritiku. Takovýto způsob zpětné vazby „podporuje rozvoj autonomie a schopností žáka." (tři výše uvedené citace: [2], str. 21) Ve školní praxi může být užitečné oba uvedené typy vhodně kombinovat anebo používat současně jako *pozitivní slovní zpětnou vazbu*.

3. POTŘEBA

Vnitřní faktory, působící uvnitř člověka na jeho jednání, jsou *potřeby*. Ty jsou aktualizovány (vzbuzeny) z vnějšku, působením *incentiv*, nebo zevnitř intenzivním pocitem uspokojit určitý nedostatek (*potřebu*). Následně dochází k formování *motivu* (cíle uspokojení *potřeby*), který vzbuzuje proces k uspokojení dané potřeby (*motivace*). Potřeby „existují ve velmi složitých vazbách a předpokládá se, že jsou hierarchicky uspořádány." ([3], str. 12) Nejznámější popis hierarchie potřeb vytvořil americký psycholog A. H. Maslow [9]. Obsahuje těchto pět oblastí (vzestupně): fyziologické potřeby, potřeba bezpečnosti, společenské potřeby, potřeba uznání a potřeba seberealizace. (V angličtině: physiological needs, safety needs, love and belonging, esteem, self-actualization)

Americký psycholog C. P. Alderfer [2], [10] modifikoval výše uvedenou hierarchii potřeb do tří kategorií. Z anglického: Existence-Relateness-Growth (existence-vztahy-růst) se tato hierarchie nazývá ERG teorie potřeb.

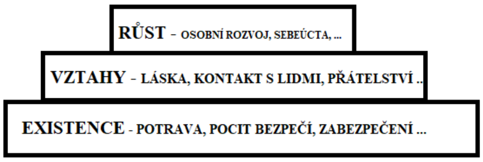


Schéma 1. ERG hierarchie potřeb ([2], str. 14)

Oba zmíněné modely si do určité míry odpovídají. Oblasti existence odpovídají fyziologické potřeby a potřeba bezpečnosti; oblasti vztahy odpovídají společenské potřeby a potřeba uznání; oblasti růstu, pak odpovídá potřeba seberealizace. Vývojový základ tvoří *potřeby primární* (fyziologické), mezi které patří například potravu, zabezpečení, atd. Dále pak *potřeby sekundární* (psychické), patří sem většina *sociálních potřeb* (kontakt a vztahy s lidmi), dále pak *poznávací*, *estetické*, *seberealizační* a další. Charakteristické pro ně je, že „podléhají vlivům učení a jsou sociálně podmíněné." ([3], str. 13) a během života utvářejí.

Z hlediska školní motivace uvádějí [2], [3] trojici potřeb. *Poznávací potřeby,* „protože učební činnosti představují jednu z významných forem poznávací činnosti." *Výkonové potřeby*, jelikož „jsou prostřednictvím úkolových situací kladeny určité požadavky." *Sociální potřeby*, neboť „učební činnosti jsou realizovány především v sociálním kontextu." Jak poukazuje I. Pavelková mezi uvedenými skupinami potřeb může docházet „funkčně i vývojově … k určitému propojení snad i překrytí." Výše uvedené potřeby jsou sekundární, tedy mohou, ale také nemusí u žáka rozvinuty. (všechny výše uvedené citace [3], str. 23)

4. POZNÁVACÍ POTŘEBY

„Jde o sekundární potřeby, a proto se mohou, ale nemusejí u žáka plně rozvinout." ([2], str. 25) „Vlastní poznávací potřeby se rozvíjejí zároveň s vývojem rozumových schopností a na jejich rozvoj má velký vliv výchova a vzdělávání." ([3], str. 24) Z poznávacích potřeb „vychází v rozhodující míře" vnitřní motivace. ([2], str. 25) Podle charakteru činnosti, kterou aktualizují a jíž jsou zároveň uspokojovány, se jedná (podle [2], [3]) o *potřebu vyhledávání a řešení problémů* a *potřebu smysluplného receptivního poznávání* (potřeba získat nové poznatky, informace, uspořádat je a zachovat).

Žák přichází do školy s různě rozvinutými potřebami. Někteří žáci, jsou podle I. Pavelkové orientováni především na sbírání poznatků (chtějí toho hodně vědět) a naopak žáci zaměření především na řešení (vyluštění) některého problému. „Výrazné jednostrannosti … mohou přinášet problémy, které buď v příliš jednostranném sklonu jen přejímat věci již známé (při nedostatku tvořivého zaujetí), nebo naopak v neúměrně vyhrazeném sklonu k originálním postupům (při nechuti přebírat již známé a osvědčené poznatky, zkušenost a metody)." ([3], str. 24) Jiní žáci mohou mít naopak potřeby málo rozvinuty. Stejná autorka uvádí, že období školní docházky je pro rozvoj *poznávacích potřeb* nejpříhodnějším a jsou-li rozvíjeny: „stávají se jedním z trvalých zdrojů rozvoje celé osobnosti žáka a kvalitním motivačním zdrojem jeho učení." ([3], str. 23)

Učitel tyto potřeby může rozvíjet nabídnutou činností při vyučování. Mezi základní znaky situací, které aktualizují poznávací potřeby, patří: novost, problémovost, neurčitost, neobvyklost, vyvolání pochybnosti (rozporuplnost), záhadnost, možnost experimentovat. Mezi nabídnuté činnosti ve vyučování patří (podle [2], [3]) například problémové vyučování.

4.1. Problémové vyučování

Jednou z metod, „jak využívat při vyučování nejlépe k aktivizaci žáků jejich poznávací potřeby, je problémové vyučování." ([2], str. 25) Pojem problémová úloha, bychom neměli zužovat na pojem matematická úloha. Dané problémy totiž mohou využívat i jiné, než matematické vědomosti a dovednosti k jejich vyřešení. Jak už název napoví, je pro tuto metodu charakteristické, že žáci řeší problémy (problémové situace, úlohy). „Vnímáme určitou situaci (počáteční situace) a máme pocit, resp. pociťujeme potřebu ji změnit tak, aby její nový stav byl lepší, žádoucí (cílová situace)." ([11], str. 3) To je určitou definicí problému. Řešení je potom snahou o dosažení žádoucí cílové situace, na základě dostupných prostředků (vědomost, dovednost, nástroj, zkušenost, atd.) Vyřešit problém (objevit, nalézt řešení) by měli být žáci schopni na základě dosavadních vědomostí a dovedností, přiměřené pomoci učitele, pomůcek, atd.

Níže uvedu pravidla pro správnou aplikace této výukové metody (podle [3])

- Žáci musí přesně chápat, co se od nich žádá (co je předmětem jejich objevu).
- Měli by mít (nebo by pro ně měly být dostupné) všechny podstatné znalosti a dovednosti potřebné pro zvládnutí úkolu.
- Ohlídána by měla být též obtížnost úkolu, velká většina (nejlépe všichni) žáci by měli být schopni dosáhnout řešení úkolu.
- Měly by být vyloučena ta témata, kde žáci znají odpověď (řešení) předem.
- Žáci by na řešení úkolu měli mít dostatečný čas.
- Za podnětné považuji zmínit také tato pravidla ([2], str. 25-28).
- Potřebné je úlohu žákovi prezentovat, jako zajímavý problém.
- Po individuálním řešení, následuje společné rozebrání úlohy a následné vytvoření všeobecných metod řešení úloh (a jejich aplikovatelnost).

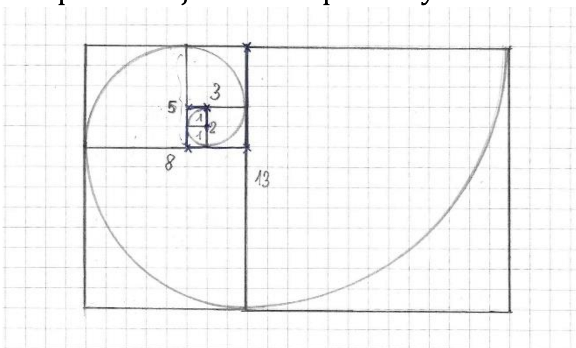
„Kvalita této metody se odvíjí také od správného rozhodnutí, kolik bude žákům poskytnuto pomoci (míry řízení) při řešení problému." ([3], str. 25) Učitel by měl při tom zvážit více faktorů (např. schopnosti svých žáků a míru jejich sebeřízení, průběh práce, časové možnosti atd.)

O motivační přednosti této metody se zmiňuje více autorů (např. [2], [3]). „Je-li takovéto vyučování správně prováděno, přináší z motivačního hlediska vzácný a velice příjemný prožitek ve smyslu, že jsou samotní žáci, kteří sami problémy řeší, sami objevili řešení. …Učební činnost pak může být žáky vnímána jako činnost, kterou konají oni sami, spíše než jako cosi, co na nich provádějí druzí." ([3], str. 25) V [3] je uvedena také kognitivní přednost metody, která: „Vede k jasnému pochopení látky, prostřednictvím dosavadních znalostí a zkušeností, vyžaduje od žáků myšlenkové postupy vyššího řádu (syntézu, hodnocení, analýzu, kritické myšlení atd.)." ([3], str. 25) Mezi určité zápory této metody patří v první řadě časová náročnost a obtížnost (zvláště pro začínající učitele), dále také fakt, že „není-li tato metoda správně užívaná, může způsobit žákům v hlavě velké zmatky a omyly." ([3], str. 25) Podle I. Pavelkové není tato metoda vhodná pro všechny učební témata. Také ji není možné aplikovat samu o sobě nýbrž v souvislosti s jinými metodami výuky a v návaznosti na minulé a budoucí vyučování.

4.2. Záhada

Smyslem vyučování s prvkem záhady je vzbudit v žácích motivaci. Ti pak nemusí vnímat například řešení úlohy, jen jako práci (nutnost), ale například jako snahu o rozřešení dané záhady.

Dále uvedu příklad využití prvku záhady ve vyučování matematiky. Učitel chce s žáky započít nové učivo: posloupnosti. Jako ilustrace může sloužit Fibonacciho posloupnost přirozených čísel. První dva členy této posloupnosti jsou: nula, jedna a každý další člen je roven součtu dvou předcházejících. Takto tedy vypadá několik prvních členů této posloupnosti: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, atd. Na začátku hodiny může například učitel žákům sdělit: „Dnes se budeme snažit přijít na to, co má společného: uspořádání řad semínek v květu slunečnice, ve smrkové šišce, velikost sousedních vrstev zelí, tvar ulity (velikost vnitřních komůrek) u některých plžů atd.“ Je podnětné sdělení podpořit obrazovou prezentací uvedených příkladů. Učitel může pokračovat charakteristikou posloupností a jako příklad uvést právě zmíněnou Fibonacciho posloupnost. Užitečné také může být grafické znázornění *zlaté spirály*. Postup k sestrojení této spirály je následující: například na čtverečkovaný papír vyznačíme první dva čtverečky (velikost strany každého z obou čtverečků je jedna), následující sousední čtverce budou mít stranu rovnu velikosti součtu stran předcházejících dvou čtverců, následně rýsujeme v každém čtverci čtvrtkružnici se středem v jednom z vrcholů a poloměrem rovným velikosti strany daného čtverce, vzniklou křivkou je *zlatá spirála* (viz *obrázek 1.*). Tu můžeme pozorovat v přírodě právě u šišky smrku (uspořádání semen) nebo na ananasu, atd. Dále se může učitel například kladením otázek žáků ptát, na možnou souvislost uvedených příkladů s Fibonacciho posloupností (může využít ale i jiných metod, například skupinová práce atd.). Na konci výuky by mělo být poznané učivo shrnuto. Učitel může žákům říci, že nyní znají tajemství uspořádání mnoha věcí v přírodě a mohou se pokusit zjistit další příklady.



Obrázek 1. Zlatá spirála

4.3. Hádanka

Učitel může zpestřit výuku také zadáváním drobných úloh (hádanek), které žáci řeší. Ty pak mohou být zadány žáků, kteří již splnili zadanou práci, aby se zabavili. Zároveň je možné je čas od času zadat celé třídě tak, aby alespoň větší část žáků měla možnost se dostat ke správnému řešení. Hádanky mohou, ale i nemusí souviset s aktuálně probíranou látkou. Cílem by měl být jak rozvoj logického myšlení, tak možnost dosažení úspěchu (viz *výkonové potřeby*). V praktické části této práce jsou uvedeny úlohy, které mohou být ve výuce zadány jako hádanky.

Na rozvoj *poznávacích potřeb* mají významný vliv také postoje učitele a styl jeho pedagogické práce. Níže proto k tomu uvedu několik užitečných myšlenek (podle [3], [5]).

- Zájem učitele o obor, který vyučuje. G. Petty v této souvislosti učitelům radí: „Buďte pro svůj předmět nadšeni." ([5], str. 48) A přidává: „Snažte se vnímat svůj obor úhlem pohledu těch, kdo jej praktikují nebo jsou jím ovlivňováni." ([5], str. 49) Žákům by se měly (často zajímavé, ale i náročné) poznatky daného oboru předávat pro ně srozumitelnou formou.
- Osobní rozměr, který učitel svému vyučovanému oboru dodává. Tím je „určitý obecný princip či abstraktní idea, jenž je předložený z pohledu jedince, jehož ovlivňují." ([5], str. 49) Příkladem k dané teorii, by tak měly být konkrétní postavy a jejich práci s daným jevem. Může se jednat například o známé sportovce, herce atd. Učitel může ve výuce zmínit své osobní zkušenosti.
- Sdělování smyslu předmětu, pro „život a pro zájmy žáků mimo školu." ([3], str. 25) Žáci by zároveň měli vnímat smysl zařazení určitého tématu učiva do výuky (vztah tématu vůči ostatním tématům). Učitel muže například: nosit do hodin konkrétní předměty z praxe, bavit se s žáky o konkrétní aplikaci učiva, zadávat úlohy týkající se praktického života či jejich budoucího uplatnění, zvát odborníky z oboru, jezdit z žáky na exkurze, atd. Cíl tohoto úsilí formuluje G. Petty: „Žáci musí být v kontaktu se světem mimo školu, jinak nebudou přesvědčeni o smysluplnosti učení." ([5], str. 43) Dále učitelům radí: „Propojujte učení s tím, co žáky zajímá mimo školu" ([5], str. 48) a vytvářejte „souvislosti se zájmy svých žáků." ([5], str. 42) Ať už tak, že se jim budou zadávány „příklady, které se týkají jejich vlastních zkušeností", nebo například formou referátů pro spolužáky o tématu, které je baví. K tomu všemu bude ale také zapotřebí určitá snaha učitele se: „naučit myslet tak, aby to bylo … žákům blízké." ([5], str. 48)

4.4. Obsah vyučování

K aktualizaci poznávacích potřeb u žáka také přispívá celkový obsah vyučování. V České republice jsou Ministerstvem školství vytvořeny Rámcové vzdělávací programy (RVP)[12], které tvoří obecně závazný rámec pro tvorbu vzdělávacích programů škol (ŠVP školní vzdělávací programy). Kromě hlavních vyučovacích předmětů (matematika, anglický jazyk, atd.) jsou zde obsažena průřezová témata rozvíjející prosociálního a ekologické chování, morálně založeného rozhodování a hodnocení. Tato průřezová témata v „repertoáru metod rozvíjení učební motivace žáků aktualizací jejich poznávacích potřeb … nabývají v teoretické orientaci humanistické didaktiky jedinečného významu." ([2], str. 29)

Níže uvedu některé možné cíle, které by tyto předměty mohly naplňovat (podle [2]).

- vzájemné porozumění, respektování a úcta vůči lidem jiného názoru, jiné národnosti či náboženství;
- zájem o řešení ekologických problémů a podpora jednotlivých vlastních praktických činností;
- podpora žáka v uvědomění si: vlastních specifických schopností a dovedností (výkonová motivace, míra tvořivosti, míra zodpovědnosti, míra samostatnosti, schopnost týmové práce, rozhodování se s rozmyslem, atd.);
- snaha získávat pravdivé a ověřené informace z mediálních zdrojů, webových stránek, sociálních sítí atd.
- vědomí možných nástrah na internetu (fakenews, hoax, kyberšikana, atd.)
- přijímání větší odpovědnosti za své zdraví – zvýšení dlouhodobých osobních perspektiv.
- příprava na profesní kariéru, obsahující konkrétní praktické schopnosti a postoje potřebné k adaptaci v rychle se měnící společnosti a úspěšnosti na trhu práce;
- lepší porozumění světu ekonomie a podnikání;

Uvedené cíle je podnětné brát v potaz při vytváření učebních osnov a příprav na výuku. Některé z výše uvedených se mohou prolínat s učivem daného předmětu. Kromě toho se lze občasně některému z témat věnovat ve formě projektu (viz str. 25) či tematických dnů pro žáky.

5. VÝKONOVÉ POTŘEBY

Tyto potřeby „jsou motivačním zdrojem činnosti a chování, které směřuje jednak k osamostatňování, potvrzení a prosazení vlastního JÁ, jednak k jeho obraně, je-li ohroženo.“ ([3], str. 26) Jako sekundární potřeby se „aktualizují v každé situaci, která vyžaduje činnost, jejímž výsledkem je určitý hodnotitelný výkon, bez ohledu na druh činnosti. Hodnocení provádí druhá osoba nebo samotný jedinec.“ ([3], str. 32)

Podle I. Pavelkové se z hlediska vývoje jedince velmi brzy (stádium osamostatňování se kolem třetího roku života) objevuje *potřeba autonomie*. Související a taktéž významná je *potřeba kompetence* (rozumět něčemu, něco umět). Ta se vyvíjí, když „je dítě schopno provádět nějakou cílově zaměřenou činnost, jejíž výsledky jsou hodnoceny okolím.“ U těchto uvedených potřeb „sehrávají významnou roli především mateřské nároky a jejich přiměřenost.“ (obě výše uvedené citace: [3], str. 32) Dále pak povzbuzování k samostatnosti, oceňování výkonu, později pak přiměřené a správné užití odměn a trestů. Zažívá-li dítě při výkonových situacích příjemný prožitek, pak se u něho začne rozvíjet *potřeba úspěšného výkonu*. „Je-li však dítě stále přetěžováno a je-li okolí zaměřeno především na jeho neúspěchy a jejich kritiku,“ pak hrozí, že bude při výkonových situacích selhávat, „což je velmi nepříjemný prožitek, z něhož se snaží uniknout.“ (obě výše uvedené citace: [3], str. 33) Pravděpodobně se u něj začne rozvíjet snaha *vyhnout se neúspěchu*.

Při příchodu do školy má již dítě vyvinuté určité výkonové zaměření. „Ve škole je však vystaveno velkému množství hodnocení nového charakteru. … například srovnávání s ostatními žáky, je vystaveno novým úkolům.“ Na základě zkušeností se školním hodnocením úspěchu a neúspěchu se u žáka vytváří specifické *školní potřeby*, „které nemusejí být zcela v souladu s obecným výkonovým zaměřením žáka“ a můžou být dokonce rozdílné i v různých předmětech. (obě výše uvedené citace: [3], str. 33)

5.1. Výkonová motivace

Aktualizací výkonových potřeb dochází k *výkonové motivaci*. Uvažujeme-li o ní ve vztahu k procesu učení, pak se jedná o *školní výkonovou motivaci*. Ta je jedním z důležitých činitelů „ovlivňujících žákův školní výkon a efektivitu jeho učení.“ [12] Studium výkonové motivace má svoje počátky v padesátých letech minulého století. Za tuto dobu bylo v této oblasti vypracováno množství modelů a teorií. (podle [3]) V publikacích [2], [3] je uvedena teorie výkonové motivace (Need achievement theory) amerického psychologa J. W. Atkinsona ([2], [13], [14], [15], [16], [17]).

Podle této teorie u žáka převládá jedna z následujících potřeb:

- *Potřeba úspěšného výkonu* – tendence vytrvat při řešení problémů a to i přes překážky
- *Potřeba vyhnutí se neúspěchu* – tendence vyhnout se řešení problémů, které by mohly ukázat žákovu neschopnost (strach z neúspěšnosti)

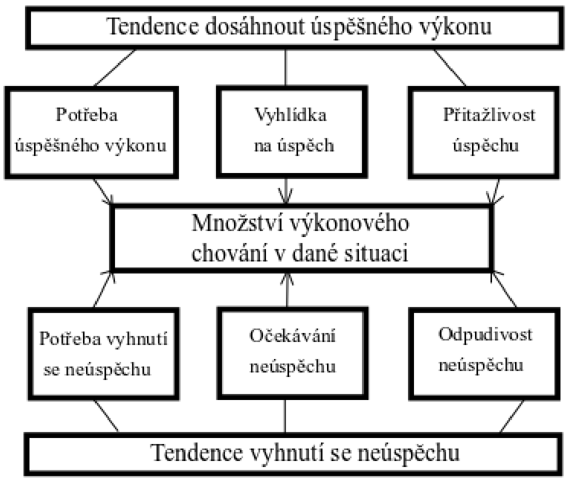


Schéma 2. Ovlivnění výkonového chování na základě tendence úspěšného výkonu a vyhnutí se neúspěchu ([3], str. 28)

Z uvedeného schématu vyplývá, že: „výsledná orientace člověka ve výkonové situaci pak závisí na převaze jedné nebo druhé orientace.“ ([3], str. 27)

Žák s převažující potřebou úspěšného výkonu	Žák s převažující potřebou vyhnutí se neúspěchu
Pracuje plánovitě bez zbytečné úzkosti	Pracuje s úzkostí z možného neúspěchu
Má-li možnost, vybírá si úkoly středně těžké (adekvátní aspirační úrovně)	Volí úkoly buď příliš lehké nebo příliš těžké (neadekvátní aspirační úroveň)
Příliš snadné úkoly pro něj nejsou „zajímavé“	
Rád soutěží s rovnocennými partnery	Nemá rád soutěžení
Úspěch připisuje schopnostem a úsilí	Úspěch připisuje vnějším příčinám (např. náhoda)
Neúspěch připisuje nedostatku úsilí	Neúspěch v těžko změnitelných vnitřních příčinách (např. schopnostech)
Mezi další charakteristiky patří (nejsou k sobě v opozici)	
Je cíleně orientovaný, pracovitý, má tendenci vykonávat práci dobře Má tendenci nevzdat se, vytrvat při řešení úkolů i přes překážky, má tendenci vrátit se k přerušené aktivitě Má tendenci k dynamické časové percepci, bývá orientován na budoucnost Usiluje o úspěch a uznání – neúspěch i úspěch posuzuje především z hlediska informace a jako cennou zkušenost do budoucnosti	Vyhýbá se výkonovým situacím (každá situace, která by mohla odhalit skutečnou úroveň jeho schopností, vyvolává strach ze selhání) Nebo se zvýše uvedených situací snaží uniknout (např. větší tendence podvádět) Hlavním motivem je strach

Tabulka 2. Možné charakteristiky žáka s jednou z převažujících výkonových potřeb ([3], str. 34)

Při práci s žáky s převažující potřebou vyhnutí se neúspěchu, by mělo být cílem „vytvořit žáku reálnou možnost být úspěšný“ a tím u něho „vytvořit pocit vlastní hodnoty.“ ([3], str. 34) G. Petty k tomu dodává: „Nešetřete chválou a jiných forem ocenění, když některý z žáků dosáhne při učení jakéhokoli úspěchu. Chvalte žáky pravidelně za obvyklé úspěchy. Ocenění žáků by mělo následovat co nejdříve po dokončení práce.“ Učitele pak dále nabádá: „Dejte si pozor na nebezpečí, že budete uspokojeni, když zajistíte úspěch většině žáků; úspěch by měli prožívat všichni žáci.“ (obě výše uvedené citace: [5], str. 45) Jedná se pro učitele o velmi náročný úkol. Uvedl bych níže dvě možnosti, které v tom učitelům mohou trochu pomoci.

I. Lokšová a J. Lokša uvádějí myšlenku diferencování úloh. Jedná se o to, že učitel předloží žákům na výběr z řešení různě obtížných úloh. Každý žák si pak může vybrat úlohu, kterou bude řešit a na kterou sám stačí. Žáci mají svobodu si volit úlohy, nezávisle na jejich schopnostech. Učitel může toto diferencování úloh využívat jak při výuce, tak při testování žáků. Klade při tom důraz na to, aby žáci vnímali, že úlohy neřeší kvůli učiteli, nýbrž aby si procvičili, zdokonalili a upevnili dané učivo. Důležité při tom je, aby se správnost řešení všech úloh posléze společně kontrolovala. Postup a řešení všech úloh, by totiž měli pochopit všichni žáci. Prvním krokem k takovému způsobu výuky by mělo být učitelovo rozhodnutí „diferencovat“ úlohy pro žáky, spolu s následným seznámením žáků o její aplikaci v hodinách a testech.

Některé matematické úlohy, kterým se věnuje tato diplomová práce, mohou také vhodně přispívat k uspokojování *potřeby úspěchu*. Díky tomu, že jsou koncipovány s důrazem na logické uvažování (například úlohy z kategorie 4. Logické úlohy) a s potřebou užití matematických poznatků a metod řešení ze základní školy, je vyřešení těchto úloh možné pro větší množství žáků jak na základní, tak na střední škole.

5.2. Hodnocení

Podstatnou roli v souvislosti s výkonovou motivací hraje hodnocení. I. Pavelková uvádí, že v mnoha zemích je považováno, jako „jedna z nejobtížnějších složek pedagogické činnosti.“ ([3], str. 35) Níže zmiňuji hlavní funkce (cíle) hodnocení (podle [3]).

- Má poskytovat **zpětnou vazbu** pro žáky o jejich učení (výkonech), tato zpětná vazba je jednou ze základních podmínek efektivního učení;
- má napomáhat lepšímu chápání významu, smyslu a důležitosti toho, co nás obklopuje a rozvíjí tak **poznávací funkce** (například rozlišování kvality a hodnoty);
- má plnit **motivační funkci**, například zvýšení přitažlivosti určitých cílů, zvýšení aktivity při hrozícím neúspěchu;
- má poskytovat **zpětnou vazbu pro učitele**. Na základě ní mohou zhodnotit, do jaké míry se podařilo dosáhnout zamýšlených výsledků (cílů) a jak by v návaznosti na to měli dále pokračovat;
- má poskytovat **zpětnou vazbu** pro rodiče a okolí žáka;

- podává **informaci o připravenosti žáka**, případné potřebě úpravy či individualizaci vzdělávacích plánů pro žáka;
- slouží jako **doklad** pro diagnostiku žákova dlouhodobého vývoje (pro poradenská zařízení aj.), dále slouží jako důležitý faktor sledovaný v různých výzkumných šetřeních vztahujících se ke škole;
- přináší **doklad** (certifikát), informace o dosažené úrovni (vysvědčení, maturita).

„Hodnocení je dovednost, která může, ale také nemusí být dobře zvládnutá, a to jak žákem, tak učitelem." ([3], str. 36) Důležitý je tedy rozvoj hodnotících dovedností. Podle I. Pavelkové se jedná například o nutnost porozumět hodnocenému, zorientování se, rozhodování se mezi možnostmi, ocenění jednotlivých možností, zaujetí stanoviska.

V současné době se můžeme napříč školskými zařízeními v naší zemi setkat s různými typy hodnocení. Patří mezi ně: průběžné - například: *formativní* („nemělo by se zabývat pouze měřením výkonu žáka, ale mělo by žákům poskytovat zpětnou vazbu a radit jim, jak napravovat chybné učební postupy" [18]); závěrečné, shrnující – například *sumativní* (vysvědčení); vnitřní (sebehodnocení) - „zdrojem hodnocení je žák sám a musí se postupně naučit posuzovat svoji práci." [18]; sociálně normované - porovnání „výkonů hodnoceného žáka s výkony ostatních žáků, je prováděno na základě stejných úloh, které žáci řeší ve stejném časovém období." [18]; individuálně normované - „výkon žáka je porovnáván s jeho předcházejícími výkony, umožňuje učiteli i žákovi sledovat kvalitu dílčích výkonů a zaznamenávat i drobné pokroky k cíli." [19] (například: *diagnostické* – speciálně se zaměřuje na odhalení učebních obtíží a zvláštních vzdělávacích potřeb žáků, *slovní*).

„Žádná podoba školního hodnocení nebývá špatná nebo dobrá sama o sobě, každá má své přednosti a své slabá místa a vyžaduje zvláštní způsob práce i osobitou pozornost." Hodnocení by mělo být „pestré a ve svých projevech dynamické, žáci by jednotlivým formám hodnocení měli dobře rozumět, což považujeme za podmínku interiorizace." Zároveň by měli mít žáci „zkušenost s hodnocením v průběhu procesu učení (*formativní*, *diagnostické hodnocení*) a s hodnocením výsledku (*sumativní*). Jak žák, tak učitel by „měli umět tyto dva druhy hodnocení odlišovat a efektivně využívat." (všechny tři výše uvedené citace: [3], str. 36)

I. Pavelková zmiňuje individuální vztahovou normu. Jedná se o způsob hodnocení, který je charakteristický hodnocením výkonů žáka vzhledem k jeho předcházejícími výsledkům.

Základní doporučení k tomu uvádím níže (podle [3]).

- Při stanovování cílů pro žáka se přihlíží k jeho schopnostem, důraz je přitom kladen na přiměřenost nároků z hlediska žákových předpokladů;
- při hodnocení žáka je bráno v potaz srovnání s předcházejícími výsledky;
- při úspěchu i případném neúspěchu, by měly být zdůrazněny pozitivní prožitky (afekty), uznání a pochvala;
- ukazovat žáku, že příčiny jeho úspěchu a neúspěchu nejsou například jeho nadání, či schopnosti, ale spíše píle, motivace, zájem, obsah vyučování atd.

Tento způsob hodnocení má „příznivý motivační efekt … zvláště u žáků orientovaných na vyhnutí se neúspěchu, ale i u žáků výkonově slabších, kteří mají výkonově adekvátní orientaci.“ ([3], str. 35) Je doporučeno takto hodnotit cizince, kteří mají špatnou nebo žádnou znalost češtiny. [20], [21].

Jak uvádí I. Pavelková žák ve škole stojí před úkoly, které má řešit a které mají různou obtížnost. „Škola bude mít do značné míry vždy výkonový charakter.“ Důležité tedy je, jak škola (konkrétní učitelé) bude žáky vést k zvládnutí, řešení daných úkolů. „Pro kultivaci výkonové motivace je také důležitý rozvoj ostatních potřeb a to především sociálních.“ (obě výše uvedené citace: [3], str. 26) Je tedy velmi dobré vést žáky ke vzájemné kooperaci (spolupráci) před vzájemným soutěžením (rivalitou).

6. SOCIÁLNÍ POTŘEBY

Jak uvádí I. Lokšová a J. Lokša: sociální potřeby jsou „pro rozvíjení motivace k učení … významné především proto, že se žák rozvíjí v interakci s ostatními lidmi. Rovněž samotné poznávání je ve své podstatě sociální, protože komunikace je nejen jedním z prostředků vzniku a odevzdávání poznatků, ale i důležitou složkou poznávací činnosti.“ ([2], str. 32)

Vrozené sociální potřeby, které se projevují v nejranějším období, jsou vázány na blízké osoby. Patří mezi ně *potřeba mateřské lásky*, „její uspokojení je důležité především pro citový vývoj dítěte a pro rozvoj potřeby pozitivních vztahů.“ *Potřeba identifikace*, která umožňuje sociální učení a „prostřednictvím něho také postupné vřazování do mezilidských vztahů.“ Tato potřeba jedince provází po celý život, „v průběhu života se však mění objekt identifikace.“ V nejranějším období vývoje to jsou rodiče, když dítě začne školní docházku, tak se identifikuje se svým učitelem. Postupně dochází k stále většímu vlivu vrstevníků. „Podstatné je, s jakými vzory, nabídkami, možnostmi, ideály se dítě setkává v sociálním prostředí, ve kterém se pohybuje, a jak s tímto prostředím komunikuje, jak ho zpracovává.“ To vše ovlivňuje jeho sociální učení. (tři výše uvedené citace: [3], str. 37)

Po příchodu dítěte do školy se „začíná orientovat ve vztahu s vrstevníky buď více na partnerské, kooperativní vztahy, nebo více na takové vztahy, v nichž je druhé dítě spíše než partnerem předmětem uplatňování sociálního vlivu dítěte.“ ([3], str. 38) U dítěte se v prvním uvedeném případě bude pravděpodobně rozvíjet *potřeba pozitivních vztahů (afiliace)*, v druhém případě se pak bude nejspíše rozvíjet *potřeba sociálního vlivu*, případně *potřeba prestiže*.

Potřeba pozitivních vztahů: „je uspokojována mezilidským kontaktem s jinými lidmi, shodou v mezilidských vztazích (vzájemnou důvěrou, akceptací), vřelými a přátelskými vztahy, nekonfliktní harmonickou atmosférou.“ S touto potřebou souvisí obava z odmítnutí, která je prohlubována špatnou zkušeností s mezilidskými vztahy. Tato obava, ale „většinou nesnižuje úroveň potřeby pozitivních vztahů (afiliace).“ (obě výše uvedené citace [3], str. 38) Jak ukazují *tabulky 3., 4.,* charakteristika žáků se liší vzhledem k úrovni potřeby afiliace a obavy z odmítnutí.

Úroveň afiliace	Úroveň obavy z odmítnutí	Charakteristika žáka	Projevy chování žáka
Vysoká	Nízká	Žák nabízí svým vrstevníkům přátelské vztahy a čeká, že jimi budou vztahy opětovány.	Hodnotí přátelství víc, než úspěch. Učí se pro náklonnost rodičů, učitelů, spolužáků. Nejlepší výsledky podává ve skupinové práci, kde se musí spolupracovat. Je více konformnější (otevření přijetí norem, pravidel, názorů svého okolí) a závislejší na svém okolí.
Nízká	Nízká	Žák vztahy s vrstevníky nevyhledává a ani nečeká, že bude jimi vyhledáván.	Vztahy s vrstevníky vyhledává v případě vlastní potřeby. Skupinovou práci ani nevyhledává ani mu nečiní problém (může se při ní držet stranou a být zdrženlivý). Snaží se být nezávislý na svém okolí a je méně konformní. Může působit sebevědomým dojmem.

Tabulka 3. Charakteristiky žáka s různou úrovní afiliace a obavy z odmítnutí, 1. část, ([3], str. 38 - 39)

Úroveň afiliace	Úroveň obavy z odmítnutí	Charakteristika žáka	Projevy chování žáka
Nízká	Vysoká	Žák vztahy s vrstevníky nevyhledává, protože z nich má obavu.	Žák se drží stranou a do školy nechodí rád. Je pasivní, s vrstevníky i učiteli komunikuje málo, vyhýbá se jakýmkoli aktivitám vedoucím ke komunikaci či interakci s ostatními.
Vysoká	Vysoká	Žák vztahy s vrstevníky vyhledává, ale zároveň z nich má obavu.	V kontaktu s druhými se chová křečovitě, nepřirozeně, úzkostlivě. Snaží se vyhnout negativní zpětné vazbě (mohla by prohloubit jeho obavu z odmítnutí). Ve skupinové práci mívá největší snížení výkonu. Může vyvolávat negativní reakce okolí

Tabulka 4. Charakteristiky žáka s různou úrovní afiliace a obavy z odmítnutí, 2. část ([3], str. 38 - 39)

Pomoci žákům s vysokou úrovní obavy z odmítnutí můžeme, „podaří-li se nám vytvořit prostředí, kde by tito žáci měli naději prožít úspěch v mezilidských vztazích." ([3], str. 39) Tedy dát jim pocítit, že jsou svými vrstevníky přijímání. Pak u nich může docházet ke snížení vnitřní tenze, vlivem obavy ze vztahů. To vede k přirozenějšímu chování ve vztazích a přispívá tak k zlepšení reakce okolí.

Potřeba vlivu (někdy označovaná jako potřeba dominovat nebo potřeba moci) „se projevuje v sociálních situacích tím, že motivuje takové chování jedince, které směřuje k uplatňování vlivu a řízení chování ostatních." ([3], str. 39) Takovýto vliv může mít negativní tvář (jedinec chce druhé řídit, vítězit nad nimi pro své potěšení), nebo tvář pozitivní (jedinec přijímá určitý vliv, pro dosažení společného cíle skupiny). „Je-li aktualizována potřeba vlivu, dává žák tomu, na koho chce vliv uplatnit, najevo, co od něho žádá. Setká-li se žák se souhlasem, pak je jeho potřeba uspokojena, v opačném případě „aktualizuje své zdroje vlivu." ([3], str. 39)

Mezi nimi jsou například možnost odměňovat (získat si druhého odměnou), zákonný vliv (převaha v postavení - např. rodič, učitel), vliv příkladu (vzoru), vliv odborníka (žák nabízí informace, které jsou klíčové pro ostatní). Nemůže-li žák ve fázi získávání vlivu, tuto potřebu uspokojit, pak může u něj docházet k frustraci. „Ve škole můžeme někdy pozorovat, že žáci se chovají jinak, když si vliv teprve získávají, a jinak, když už vliv získali a vůči druhým ho uplatňují." ([3], str. 40) U žáků, kteří mají silnou potřebu vlivu a ve třídě mají již reálný vliv, můžeme pozorovat výše uvedené tváře vlivu. Ti, kteří jsou studijně orientovaní a dobře kooperování se třídou, se stávají tahouny třídy a mohou být oporou učiteli (pozitivní tvář). Žáci mohou mít na třídu ale také opačný vliv, tedy například od učení, k výtržnictví atd. (negativní tvář).

V některých publikacích je uvedena také *morální potřeba*. Jedná se o potřebu naplnění (bránění) správných lidských hodnot. Tato potřeba je ovlivněna výchovou (postoje názory a hodnoty rodičů, okolní společnosti, svého národa, regionu atd.), ale dále se během života rozvíjí. Například ve chvílích, když člověk uvažuje o správnosti (svého) nějakého jednání.

6.1. Osobnost učitele

„Učitel svými výchovnými postupy (organizační formy, volba metod) a stylem vedení ovlivňuje sociální motivace žáků." ([3], str. 40) Zároveň má „na vytváření sociální motivace u žáků má vliv i převažující úroveň sociálních potřeb u učitelů." ([3], str. 41) Stejně tak, jako vztahy mezi učiteli v učitelském sboru, které žáci velmi jistě vnímají. V pedagogické praxi se můžeme setkat s některými charakteristikami učitelů uvedenými níže (podle [3]).

- Učitelé, kteří májí silně rozvinutou potřebu *afiliace*, „svým vřelým, emocionálním zájmem o žáky a poskytováním sociální opory, podmiňují ve třídě ve větší míře pozitivní vztahy, bývá navozeno příjemné klima tolerance, přátelství mezi spolužáky." Je pak velmi pravděpodobné, že se u žáků takových učitelů rozvine potřeba *afiliace.*
- „Pro učitele s vysokou potřebou vlivu, která je však pozitivně sociálně orientovaná (pozitivní tvář vlivu), je charakteristické dosahování kázně a zvýšených výkonů prostřednictvím sociálního tlaku na žáky." K tomu, aby žáci tento tlak vnímali pozitivně, je potřebné, aby byl přiměřený. „Určitým rizikem může být přílišná dominance učitele, která by nedávala prostor pro individuální rozvoj dítěte."
- Uplatňuje-li učitel na žáky osobní vliv pro vlastní uspokojení potřeby vlivu (negativní tvář vlivu), „vyvolá velmi pravděpodobně obranné mechanismy žáků vůči psychickému ohrožení." (všechny výše uvedené citace: [3], str. 41)

6.2. Činnosti ve výuce

Mezi činnosti aktualizující sociální potřeby může patřit například: skupinové nebo projektové vyučování (viz následující oddíl), týmová práce, diskuze, hry. Cílem by vždy mělo být „navození šířeji pojatého kooperativního učení, které může prostupovat nejrůznější (i tradiční) metody, strategie a techniky výuky." ([3], str. 41) Také soutěž „má za následek aktivaci sociálních potřeb." Musí být ale „užívaná rozumně, to znamená, že jsou dodržovány určité podmínky (např. pro všechny žáky existuje možnost úspěchu, soutěžní aktivity se střídají, důraz je kladen spíše na to, aby žák pracoval úspěšně, než na to, aby byl lepší než ostatní, atd.), může pozitivně aktualizovat sociální potřeby." „Pokud nejsou určité podmínky dodržovány, soutěž působí na řadu žáků demotivačně, odrazuje především slabší žáky a vytváří nekooperační atmosféru, která může vést k lhostejnosti nebo dokonce k radosti z neúspěchu druhých." (tři výše uvedené citace: [3], str. 40) Mimo výuku se pak může jednat o činnosti, které mohou napomoci prohlubování vzájemných vztahů ve třídě (např. hry podporující spolupráci, společná diskuze, atd.) Je možné k tomu využít čas mimo vyučování (např. škola v přírodě, lyžařský výcvik, třídnická hodina, atd.)

6.3. Projektové vyučování

Metodou projektového vyučování jsou žáci vedeni k realizaci (řízení, tvorbě) projektů. Mezi jedny z hlavních cílů této metody patří: osvojit si nové poznatky a dovednosti pomocí vlastní žákovské tvorby, rozvoj spolupráce s ostatními, větší samostatnost žáků, přejímání větší míry odpovědnosti za vykonanou práci atd.

J. Coufalová uvádí následující základní rysy, které by měl projekt mít.

- „Projekt vychází z potřeb a zájmů dítěte. Umožňuje uspokojit jeho potřebu získat nové zkušenosti, být odpovědný za svou činnost.
- Projekt vychází z konkrétní a aktuální situace. Neomezuje se na prostor školy, ale mohou se do něho zapojit i rodiče a širší okolí.
- Projekt je interdisciplinární (mezipředmětový).
- Projekt je především podnikem žáka.
- Práce žáků v projektu přinese konkrétní produkt. Pokud je to možné, je průběh a výsledek zdokumentován. Vznikne výstup, kterým se účastníci projektu prezentují ve škole nebo mimo školu.
- Projekt se zpravidla uskutečňuje ve skupině. Sociální psychologie druhé poloviny minulého století poukázala, že učení ve skupině je významné nejen pro rozvoj osobnosti žáka, ale zvyšuje i efektivitu procesu učení.
- Projekt spojuje školu s širším okolím. Umožňuje začlenění školy do života obce nebo širší veřejnosti." ([6], str. 11)

Typy projektů jsou pak dány následujícími faktory: rozsah, účel, organizace, navrhovatel, počet žáků, čas potřebný k vypracování, místo konání, vztah k učivu a vyučovaným předmětům. (Podle [6])

Při projektovém vyučování se mění role učitele, ten se stává partnerem či pomocníkem. Zároveň vede žáky k samostatnosti. „Úkolem učitele je rovněž vytvářet ve třídě bezpečné a klidné prostředí, ve kterém se žáci nebudou bát vyjádřit svoji individualitu." Učitel stojí také před dalším obtížným úkolem: vhodně reagovat na řadu neočekávaných situací, které projekt přináší. „Tyto neplánované situace jsou neopakovatelnými příležitostmi k rozvoji žáků." (obě výše uvedené citace: [6], str. 12)

Níže uvedu některé přednosti této vyučovací metody pro žáky.

- „Projekt by … neměl motivovat žáky jenom atraktivností námětu. Taková vnější motivace zpravidla brzy vyprchá. Projekt však vyžaduje, aby se žák na dané téma a činnosti z něho vyplývající soustředil delší dobu. Snažíme se proto o motivaci žáků probouzením jejich poznávacích, výkonových a sociálních potřeb." Například smysluplností projektu. „Ideální je, když se podaří založit projekt na řešení konkrétního problému, který skutečně potřebují vyřešit žáci, učitel, škola nebo obec." (obě výše uvedené citace: [6], str. 14) Pak může mít projekt motivační sílu.
- Žák získává zušenosti s řízením projektu od jeho počátku až k do konce.
- Žák vnímá učitele jako partnera a pomocníka ve zvládnutí projektu. To může velmi pomoci dobrému a přiroznému vzájemnému vztahu učitel-žák. Vzájemnou spoluprací mezi žáky dochází k rozvoji a prohloubení vzájemných vztahů a rozvoji sociálních potřeb.
- Žák může vnímat odpovědnost za vlastní práci a také možnost přispět v projektu svoji osobní prací, nápady atd.
- Žáci se učí vnímat, že jednotlivé předměty spolu souvisí dokonce se prolínají. „Z analýzy integrace předmětů v zahraničí vyplývá, že některé předměty jsou pro integraci vhodné více, některé méně. I v zemích, kde jsou větší zkušenosti z integrované výuky (Německo, Rakousko) probíhá integrace převážně v rovině přírodovědeckých, technických a společenskovědních předmětů, výuka mateřského jazyka, cizích jazyků a matematiky se odehrává v tradičně předmětovém pojetí." ([6], str. 13)
- Žáci mohou projektem dosáhnout zkušeností, vědomostí a dovedností, které uplatní i v budoucnosti.
- Učitel má možnost pozorovat své žáky, individualitu každého žáka (například úroveň rozvoje poznávacích, výkonových a sociálních potřeb) a pomoci jim v případě neúspěchu nebo jiných těžkostí.

Mezi negativa projektové metody patří časová náročnost. Učitel by si měl před realizací projektu rozumně zvážit, kolik času budou žáci na projekt potřebovat (kalkulovat raději s trochu větší časovou rezervou).

Přesáhne-li realizace projektu původně stanovený čas, může dojít k narušení harmonogramu daného předmětu (předmětů). Učitel může změnit svůj pozitivní přístup k projektu a vnímat ho jako určité ohrožení. Hrozí tak, že projekt nebude dokončen. „Dílčí neúspěch může být impulzem pro další aktivity, ale nedořešení dlouhodobějšího úkolu může žáky výrazně negativně motivovat." ([6], str. 13) Dále také hrozí snížení důvěry žáků v učitele, jako garanta projektu. Je třeba, aby se učitel s žáky domluvil na realizaci projektu jiným způsobem například formou domácí práce, nebo po skončení vyučování.

6.4. Sociální vztahy

„Sociální motivace má svůj zdroj v pozitivních sociálních vztazích." [14] Každý žák žije v sociálních vztazích. Ve škole se jedná zvláště o sociální vztahy s učiteli, spolužáky, (psychologem, pracovníky školy, atd.) Učitel má vliv také na sociální vztahy mezi spolužáky (vytvářením dobré atmosféry, podporou s převažující potřebou vyhnutí se neúspěchu nebo obavou z odmítnutí, atd.). Vzájemné vztahy mezi spolužáky jsou také podmíněny mnoha osobnostními faktory (počet žáků, pohlaví žáků, učební orientace atd.) Sociální vztah jednotlivého žáka ke spolužákům je pak dán jeho osobnostními faktory (úroveň potřeb, povahové rysy, temperament, atd.)

7. MOTIV

Je-li aktualizována (vzbuzena) lidská potřeba, pak dochází k zformování cíle (důvodu jednání, pohnutce, podnětu) vedoucího k uspokojení dané potřeby. Tím je motiv (viz *schéma 3.*), který následně vzbuzuje motivaci (proces, aktivitu, která je řízena se stejným cílem: uspokojit vlastní potřebu.) Rozdíl mezi potřebou a motivem je pak následující: „Člověk … nepociťuje fyziologický stav, který nazýváme potřebou, nýbrž motiv, jenž je mentální reprezentací potřeby.“ [17] Myšlenky v tomto úvodu jsou podle [22]. Níže uvádím možné dělení motivů (podle [2]).

- Vnitřní – chování vedené k uspokojení vnitřní potřeby (např. více poznat či vědět)
- Vnější – chování vedené potřebou uspokojit vnější motiv (Incentivy: dobré známky, potěšit rodiče, atd.)
- Interiorizovaný – chování vedené potřebou být prospěšný společnosti (například vlivem morální potřeby)

Motivy ale můžeme dělit do skupin podle potřeb, které uspokojují (například: primární/sekundární; biologické/sociální/psychické).

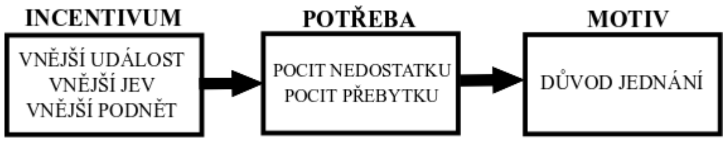


Schéma 3. Vznik motivu (podle [2])

8. NÁSTROJE K ZJIŠTĚNÍ ÚROVNĚ A STRUKTURY MOTIVACE ŽÁKA

Nástrojů, jak může učitel poznat, jaký druh motivace u žáka převažuje, je více. Může se jednat o individuální pohovor učitele s žákem, při kterém se učitel snaží zjistit, jaká by mohla být vnitřní motivace žáka (co žáka baví) a jaký druh motivace u žáka převládá (vnitřní/vnější). Výhodou ústní formy zjištění informací o žáku je ta, že na žáka v danou chvíli nemusí působit okolní vlivy a to zejména vliv spolužáků. Jeho odpovědi tak mohou být tedy věrohodnější. Vztah, ve kterém má žák důvěru v učitele a učitel má chápající postoj vůči žákovi, je klíčovým faktorem, díky němuž má individuální osobní rozhovor učitele s žákem zásadní význam.

Další možností může být forma určitého dotazníku. Jedná se sice o způsob méně osobní, výhodou ale je, že učitel zjistí informace o všech svých žácích v relativně krátkém čase. Pro některé žáky je písemný způsob vyjadřování lepší, než ústní. Zároveň představa o individuálním rozhovoru s učitelem, může u žáka vyvolávat obavu. Tento nástroj může být užitečný v případě, že má učitel zcela novou třídu žáků, nebo si chce upřesnit své dosavadní informace o žácích a to v kratším čase. Dotazník si může vytvořit vlastní, či uplatnit některý z již existujících. Například na stránkách Národního ústavu odborného vzdělávání [23] je volně k dispozici dotazník zkoumající školní výkonovou motivaci žáků (viz Výkonové potřeby žáků). Tento dotazník byl vypracován I. Pavelkovou a V. Hrabalem, z katedry psychologie, Univerzity Karlovy v Praze. Další dotazníky zjišťující motivaci žáka jsou uvedeny například v [2]. Z nich bych zmínil dotazník vytvořený maďarským psychologem B. Kozékim. Zaměřuje se na oblasti: vnější motivace – motivy plynoucí z citového vztahu žáka k rodičům, učiteli a spolužákům; vnitřní motivace – rozvoj vlastní osobnosti, sebezdokonalení, zájmu a aktivity; interiorizace – úcta k sobě, zodpovědnost vůči společnosti, vážnost vůči veřejným hodnotám a normám.

Zná-li učitel individuální úroveň a strukturu motivace každého ze svých žáků, může této znalosti vhodně využít, aby své žáky co nejvíce dokázal motivovat.

9. MOTIVAČNÍ FAKTORY

G. Petty uvádí pětici motivačních faktorů: fantazie, ocenění, cíle, úspěch, smysl, které by měl učitel u svých žáků rozvíjet. Jejich rozvojem dochází k aktualizaci *poznávacích, výkonových a sociálních potřeb*. Mnemotechnickou pomůckou (první písmena faktorů) k tomu může být latinské slovo **focus**, které znamená **ohnisko**. „Má vám připomínat, že uvedené faktory by při přípravě a hodnocení vyučovacích hodin měly být stále v ohnisku vaší pozornosti.“ ([5], str. 54) Uvedu dále několik praktických rad pro učitele, k rozvoji této pětice motivačních faktorů.

9.1. Fantazie

Autor uvádí v anglickém originále název enjoyment, což můžeme přeložit jako radost nebo potěšení A právě radost z daného předmětu může učitel žákům předat, je-li sám pro něj zapálen. To znamená, že je ochoten se ve svém předmětu dále vzdělávat, zajímat se o aktuální nebo nějak zajímavá témata, atd. Tak může prezentovat svůj autentický zájem o předmět. To se pak konkrétně může projevovat předkládáním zajímavých, aktuálních, srozumitelných a spolu souvisejících poznatků svým žákům. Pro žáky je totiž velmi podstatné, aby jim bylo učivo předkládáno srozumitelnou formou a v přiměřené míře, jinak ztrácí motivaci k učení. Pomoci k tomu mohou: vizuální předměty (modely, obrázky, videa, atd.), exkurze, pozvaný odborník, užití osobního rozměru ve výuce (viz str. 12), atd.

9.2. Smysl

Existuje mnoho možností, jak žákům ukázat smysl vyučovaného předmětu. (viz str. 12) Je-li učitel pro předmět zapálený, pak ukazuje osobní příklad smysluplnosti svého předmětu. Při snaze poukazovat na smysluplnost daného předmětu je třeba si při tom uvědomit, že: „smysl nemůže být darován, může být jen objeven.“ ([3], str. 25)

I. Lokšová a J. Lokša poukazují na důležitost aktuálnosti předkládaných témat a problémů žákům. Ty by „měly bezprostředně vycházet ze zkušenosti žáků, z jejich života.“ ([2], str. 45)

9.3. Úspěch

Jak již bylo zmíněno (viz str. 14) u žáka se objevuje *potřeba úspěchu*. Jak ukazuje schéma, žák úspěch pociťuje (vnitřní příjemný prožitek), zároveň je ale klíčová pozitivní reakce učitele (dobrá známka, pochvala, atd.). Pak roste žákova sebedůvěra, motivace, atd.

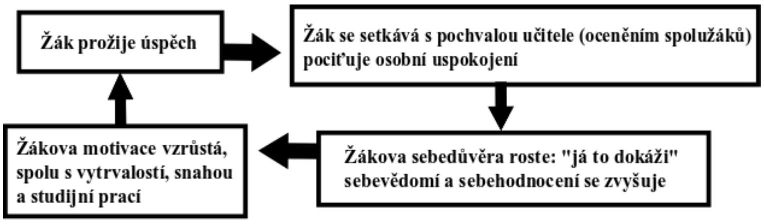


Schéma 4. Cyklus úspěchu ([5], str. 44)

9.4. Ocenění

Ocenění je forma kladného hodnocením v důsledku vykonané činnosti. Můžeme do dosáhnout prostřednictvím druhého člověka nebo vnitřním uvědoměním. Může tedy být jak vnější charakteru (Incentivy – známka, pochvala, medaile, atd.), tak vnitřního (dobrý pocit, radost, atd.). Ocenění není synonymem úspěchu, protože může být uděleno i bez prokazatelného úspěchu jedince (za určitou snahu). Je tedy dobrým nástrojem učitele jak k odměnění, tak k povzbuzení žáka.

9.5. Cíle

Cíle vyučovacího procesu jsou dány jak v RVP, tak v ŠVP (viz str. 12) Každý učitel se snaží o jejich plnění ve výuce s cílem, aby si žák osvojil danou látku. Naplnění cíle učitel zjišťuje osobní či žákovskou (testování, vnímání, dotazování se, atd.) zpětnou vazbou. Žák by za svůj výkon (osvojení si učiva) měl být přiměřeným způsobem oceněn. Což vede k jeho motivaci pro další výkon. (viz str. 16) Určité standardy hodnocení a testování žáka stanovuje učitel (v určitých oblastech po společné diskuzi se svými žáky, viz str. 5). Žáci by měly stanovené standardy pokládat za dosažitelné a měly by mít zároveň touhu jich dosahovat.

G. Petty poukazuje na to, že by žáci měli být testováni pravidelně a učitel by měl dodržovat předem domluvené termíny s žáky. Snahou je, aby se žáci snažili dávat při výuce větší pozor. Zároveň se jedná o jistý způsob zpětné vazby učiteli o tom, jak si žák osvojil danou látku.

Stejný autor poukazuje také na to, že by se měl učitel snažit vést schopnější žáky tak, aby oni sami projevovali zájem o dodatečný osobní rozvoj, stanovili si vlastní cíle a sami řídili a hodnotili své učení.

Jedním z cílů výuky by mělo také být „přenášet odpovědnost za učení na žáky. … Nemálo žáků je ovšem upřímně přesvědčeno, že k tomu, aby se člověk něco naučil, stačí být přítomen na hodinách a více či méně ochotně provádět zadávané činnosti.“ ([5], str. 52) V případě, že má žák jistý díl odpovědnosti za své vzdělávání, pak k němu přistupuje jinak. Více či méně cítí díl odpovědnosti a také může vnímat, že má své vzdělávání alespoň částečně ve svých rukou. Učitel tak například pro své žáky vymyslí činnosti, při nichž si budou práci opravovat a kontrolovat sami. Alespoň některá témata se budou mít žáci naučit sami (z využitím učebnice, literatury, internetu, odborníků, atd.). Žáci budou pracovat na vlastním projektu vztahujícím se k probíranému učivu (individuálně či ve skupině). Mimo vzdělávací proces pak mohou mít žáci odpovědnost za přípravu nebo organizaci například kulturních akcí pro třídu, či školu atd. Americký politik J. W. Gardener k tomuto tématu podotýká: „Konečným cílem vzdělávacího systému je přenést břemeno odpovědnosti vzdělávání jednotlivců na ně samotné.“ ([5], str. 46)

G. Petty připravil v publikaci [5] (a novějších vydáních 2002, 2006, 2008) pro učitele dotazník, ve kterém si mohou sami odpovědět, jak se jim daří uvedené faktory ve výuce naplňovat.

10. DEMOTIVAČNÍ FAKTORY

Níže uvádím faktory, které snižují motivaci k učení (převzato z [5]). Některé z nich může učitel přímo ovlivnit, některé nikoli

10.1. Emocionální faktory

Žák ztrácí motivaci na základě deprese či úzkosti z předchozího neúspěchu. Názorně to ukazuje schéma 3. „Trvalý neúspěch je obrovský demotivační faktor." ([5], str. 47) Je potřeba si s žákem o jeho neúspěchu promluvit. Poukázat na to, kde chyboval,

Schéma 5. Cyklus zažívání neúspěchu ([5], str. 44)

aby věděl, jaké učební strategie má změnit, nebo kde vyvinout větší úsilí. Důležité je, aby si žák nějakým způsobem uvědomil svůj neúspěch a udělal maximum proto, aby v následujících případech mohl dosáhnout úspěchu (forma úspěchu je pak relativní vzhledem k schopnostem a charakteru jednotlivého žáka). Úspěchem tak může být pochopení daného učiva, systematická příprava, změna učební strategie, touha se zlepšit, lepší známka, atd.

10.2. Faktory prostředí

Jsou-li požadavky učitele nepřiměřeně vysoké, učitel upřednostňuje ve vztazích s žáky velmi dominantní vliv na úkor jejich individuálního rozvoje, nejsou-li dobré vztahy učitel-žák, nebo vztahy učitelů mezi sebou atd., pak žák přestává být motivován k učení. Žáci (zvláště ti citlivější) jsou schopni vycítit určitou špatnou atmosféru ve třídě (ve škole, ve vztazích, atd.).

10.3. Faktory fyziologické

Jedná se také o prostředí třídy (školy), ale na rozdíl od předchozího příkladu jde o fyzické prostředí. Patří sem aktivizované potřeby: *potřeba potravy* (hlad), *bezpečí* (chlad, hluk), atd. Nejsou-li tyto potřeby uspokojeny, tak dochází k postupnému snižování motivaci. „Jestliže je prostředí třídy hlučné a rozptylující, může být pro žáky těžké udržet pozornost a jejich snaha a odhodlání opadnou, i když budou mít silnou motivaci." ([5], str. 52) Při přípravě na výuku je užitečné si také představit a naplánovat schéma zamýšleného zápisu na tabuli. Dobře strukturovaný a přehledný zápis na tabuli velmi napomáhá k orientaci v učivu, lepšímu porozumění a větší míře soustředění. Žáci navíc přebírají spolu se zápisy i povědomí o struktuře daného učiva.

10.4. Přílišná přemotivovanost

Jedná se spíše o následek přílišné činnosti v důsledku motivace, než o faktor jako takový. Má-li žák obavu ze zkoušek (testu, určité situace, atd.), pak může dojít vlivem nadměrné přípravy k přepracování a důsledku toho k vyčerpání a zvýšenému stresu. Důsledkem toho motivace žáka klesá stejně jako jeho výkonnost.

PRAKTICKÁ ČÁST

11. MATEMATICKÉ ÚLOHY

Úlohy, které uvádím v této práci, jsem rozdělil do několika kategorií, vzhledem k metodám jejich řešení. V mnoha případech je však možné danou úlohy řešit užitím více metod a tak náleží do více kategorií. Proto jsem vytvořil dvě tabulky, které obsahují zvolené kategorie a názvy jednotlivých úloh. V první tabulce jsou úlohy uvedeny podle pořadí a přísluší jim vždy číslo dané kategorie (viz Číselný seznam kategorií). V druhém případě jsou uvedeny názvy jednotlivých kategorií a úlohy jsou k nim přiřazeny. V obou tabulkách bude po kliknutí na název úlohy (hypertextový odkaz) čtenáři daná úloha zobrazena.

Názvy kategorií jsem volil s inspirací v řadě učebnic: Matematika pro 6. - 9. ročník základní školy, Oldřich Odvárko a Jiří Kadleček, nakladatelství Prometheus; Matematika pro gymnázia, kolektiv autorů, nakladatelství Prometheus.

Některé další kategorie jsem nevytvářel vzhledem k nízkému počtu úloh, které by obsahovaly. Mohlo by se jednat například o kategorie: logaritmické rovnice, Euklidova věta nebo zlomky.

Je pochopitelné, že mnohé z uvedených úloh je možné řešit i dalšími metodami. V souboru je vždy uvedeno pořadové číslo, zadání a pak jedno v některých případech dvě řešení dané úlohy.

11.1. Číselný seznam kategorií úloh

1. **Numerické výpočty** – Daná kategorie obsahuje úlohy, které lze řešit přímým numerickým výpočtem, bez užitím proměnných.
2. **Procenta** – Daná kategorie obsahuje jak numerické, tak slovní úlohy na práci s procenty.
3. **Dělitelnost** – Daná kategorie obsahuje úlohy na určení, zda je dané číslo prvočíslem, dále úlohy rozdělení objektů do skupin beze zbytku s využitím nejmenšího společného násobku daných čísel.
4. **Logické úlohy** – Daná kategorie obsahuje úlohy s matematickými výroky, problémy lze řadit do tzv. důkazových úloh nebo je označit jako matematické hádanky, rébusy či rarity.
5. **Lineární rovnice** – Daná kategorie obsahuje úlohy, které lze efektivně řešit pomocí lineárních rovnic.
6. **Soustavy lineárních rovnic** – Daná kategorie obsahuje úlohy, které lze efektivně řešit pomocí soustavy lineárních rovnic.
7. **Přímá a nepřímá úměrnost** – Daná kategorie obsahuje úlohy založené na přímé a nepřímé úměrnosti. Úlohy vedou k užití trojčlenky nebo lineární rovnice.

8. **Společná práce** – Daná kategorie obsahuje úlohy, ve které určitý počet lidí, zvířat, atd. vykoná určitou činnost za určitý čas a úkolem je určit čas, za který činnost vykonají společně.

9. **Geometrické útvary v rovině** – Daná kategorie obsahuje úlohy na určení počtu geometrických objektů v daném útvaru (například nalezení všech čtverců v poli čtverců připomínající šachovnici).

10. **Obvody a obsahy geometrických obrazců** – Daná kategorie obsahuje úlohy na výpočet obvodů, obsahů geometrických rovinných obrazců a jejich další užití při výpočtech.

11. **Úhly** – Daná kategorie obsahuje úlohy na zjištění velikostí úhlů (například mezi ručičkami hodin).

12. **Pythagorova věta** – Daná kategorie obsahuje úlohy na zjištění velikostí úseček užitím Pythagorovy věty.

13. **Středová a osová souměrnost** – Daná kategorie obsahuje úlohy na užití středové a souměrné souměrnosti (například u číslic digitálních hodin).

14. **Objemy a povrchy geometrických těles** – Daná kategorie obsahuje úlohy na výpočet povrchů a objemů geometrických útvarů a jejich další užití při výpočtech.

15. **Posloupnosti** – Daná kategorie obsahuje úlohy na součet několika čísel, nalezení pořadí nebo určitého čísla v řadě čísel užitím posloupností (aritmetická a geometrická posloupnost).

16. **Kombinatorika** – Daná kategorie obsahuje úlohy na užití kombinatorických pravidel a vzorců.

17. **Úlohy o času** – Daná kategorie obsahuje úlohy na výpočet data nebo času a na převody časových jednotek.

18. **Nezařazené úlohy** – Daná kategorie obsahuje úlohy, které nebyly zařazeny do předchozích kategorií.

11.2. Tabulka I. rozdělení úloh

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
1.	Tři devítky	1
2.	Šest	1
3.	Závorková doplňovačka I.	1
4.	Znaménková doplňovačka II.	1
5.	Pět pětek	1
6.	Jedna a půl	1
7.	Třicet	1
8.	Rozdíl I.	1
9.	Rozdíl II.	1
10.	Rozdíl III.	1
11.	Cifry	1
12.	Čtyřciferná čísla	1
13.	Kráva, vrabec a pavouk	1
14.	Pavučiny	1
15.	Nohy	1
16.	Nejmenší počet mincí	1
17.	Základní škola	1, 4, 17
18.	Zpožděné hodiny	1
19.	Kilometry pásky	1
20.	Pořadí	1, 4, 16
21.	Pra-praprarodiče	1
22.	Papír	1
23.	Tisíc	2
24.	Měsíční plat	2
25.	Třicet procent	2, 17
26.	Červen I.	2, 17
27.	Červen II.	2, 17
28.	Kilometr	2
29.	2168 kilo	2
30.	Brambory I.	2
31.	Brambory II.	1, 2
32.	Sedm zločinců	1, 2
33.	Plýtvat co nejméně	2, 10
34.	Hana a Anna	2
35.	Sušení hub	2, 5
36.	Řezy	3
37.	Prvočíslo I.	3
38.	Prvočíslo II.	3
39.	Děti I.	3
40.	Děti II.	3

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
41.	Ovečky	3
42.	Pomeranče	3
43.	Čtyři piva	4
44.	Pravnuk	4
45.	Trpaslík	4
46.	Dvacet?	4
47.	Třináct?	4
48.	Nepřátelé psů	4
49.	Lhář	4
50.	Zralé jablko	4
51.	Abstinent	4
52.	Menší než	1, 4
53.	Kladné celé číslo	1, 4
54.	Tři po sobě jdoucí	3, 4
55.	Součin	3, 4
56.	Dělitelné patnácti	3, 4
57.	Dělitelné pěti	3, 4
58.	Dvě nuly	3, 4
59.	Odmocnina I.	1, 4
60.	Odmocnina II.	1, 4
61.	Sudá lichá	1, 4
62.	Lámání čokolády	3, 4
63.	Křesla	3, 4
64.	Devět teček	4
65.	Sto let	4, 17
66.	Ciferný součet	4, 17
67.	Záhadné narozeniny	4, 17
68.	Popletené rovnice I.	4
69.	Popletené rovnice II.	4
70.	Husy, krávy a motýli	4
71.	Pětikilové miminko	3, 4, 17
72.	Otcové, synové a vnuci	4
73.	Sedmé patro	4
74.	Dvojčata	3, 4
75.	Chytrá koupě	4
76.	Kulička	4
77.	Přelévání	4
78.	Bezpečně přes řeku	4
79.	Přesýpací hodiny	4
80.	Smažení	4
81.	Číslo	4
82.	Trojky I.	4

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
83.	Trojky II.	4
84.	Chybějící číslo	4
85.	Součtový trojúhelník	4
86.	Číselný kříž	4
87.	Součtový čtverec	4
88.	Součtový kříž I.	4
89.	Součtový kříž II.	4
90.	Součtový kříž III.	4
91.	Součtový pětiúhelník	4
92.	Peníze	5
93.	Neznámé číslo I.	2, 5
94.	Neznámé číslo II.	5
95.	Neznámé číslo III.	5
96.	Neznámé číslo IV.	1, 5
97.	Chléb	2, 5
98.	Štiky, sumci a kapři	2, 5
99.	Mouka	2, 5
100.	Čokoládový dort	2, 5
101.	Od půlnoci do půlnoci	5, 17
102.	Od poledne do půlnoci	5, 17
103.	Kůň a motocykl	5
104.	Dar pro kolegu	5
105.	Pracanti	3, 5
106.	Káva z automatu	5
107.	Míč	5
108.	Šnek	4, 5, 15
109.	Myši	1, 5
110.	Kombajny	5, 7
111.	Kočky, motýli, pavouci a psi	5
112.	Pavlína	5
113.	Kečup a pivo	5
114.	Bochník chleba	5
115.	Oběd	5
116.	Opracovaná součástka	5
117.	Kočky a myši	4, 5
118.	Vyšší produkce	5, 7
119.	Bonbóny	5
120.	Vysoký Čeněk	5
121.	Otec a tři synové	5
122.	Maminka a syn	5
123.	Pavel	5

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
124.	Verunčin věk	5
125.	Neznámá číslo	6
126.	Brigáda	6
127.	Brnění	6
128.	Túra	6
129.	Kachny	6
130.	Tašky	6
131.	Škola	2, 6
132.	Mezinárodní tábor	6
133.	Bonbóny	6
134.	Hrad Karlštejn	6
135.	Eva a maminka	6
136.	Martin a jeho rodiče	6
137.	Tři generace	6
138.	Hoši Čermákovi	6
139.	Pan Bláha	6
140.	Tři synové a otec	6
141.	Švestky a jablka	6
142.	Pomeranč a jablko	6
143.	Pavouci a motýli I.	6
144.	Pavouci a motýli II.	6
145.	Krávy a husy	6
146.	Vrabci, psi, brouci a pavouci	6
147.	Vrabci, kočky a brouci	6
148.	Husy a kočky	6
149.	Brouci a pavouci	6
150.	Daňci a pávi	6
151.	Žirafy, pštrosi a anakondy	6
152.	Tankové lodě	7
153.	Jablka	7
154.	Roury	7, 14
155.	Koně	5, 7
156.	Cihly	1, 7
157.	Nízko kofeinová kola	2, 5, 7
158.	Tři tesaři	5, 8
159.	Natírání plotu	5, 8
160.	Lev, vlk a liška	8
161.	Dělníci	5, 8
162.	Čtverec	9
163.	Skryté čtverce I.	9

Číslo a název úlohy	Číslo kategorie
164. Skryté čtverce II.	9
165. Skryté čtverce III.	9
166. Skryté čtverce IV.	9
167. Skryté čtverce V.	9
168. Skryté čtverce VI.	9
169. Skryté čtverce VII.	9
170. Skryté čtverce VIII.	9
171. Skryté obdélníky I.	9
172. Skryté obdélníky II.	9
173. Skryté obdélníky III.	9
174. Úsečka	9
175. Skryté trojúhelníky I.	9
176. Skryté trojúhelníky II.	9
177. Skryté trojúhelníky III.	9
178. Skryté trojúhelníky IV.	9
179. Skryté trojúhelníky V.	9
180. Hledaný trojúhelník	9
181. Závodní okruh	10
182. Tři kružnice	10
183. Půdorys	10
184. Rychlost ručiček	10
185. Sedm milionů lidí	1, 10, 12
186. Trojúhelník I.	10
187. Trojúhelník II.	10
188. Plocha obrazce I.	10
189. Plocha obrazce II.	2, 10
190. Vlna	10
191. Čtyřlístek	10
192. Stupně	11
193. Úhel	11
194. Čtvrt na čtyři	11
195. Pět minut	11
196. Hledaný čas	11
197. Půl desáté	11
198. Sedm dvacet	11
199. Úhel alfa	11
200. Osmiúhelník	11
201. Čtverec s kružnicí	12
202. Kruhy v čtverci	12
203. Dva čtverce	12
204. Jedním tahem	12

Číslo a název úlohy	Číslo kategorie
205. Kruhy v kruhu	10, 12
206. Úsečka	12
207. Lichoběžník	12
208. Šestiúhelník	12
209. Písmena	13
210. Digitální číslice	13
211. Souměrné letopočty	13, 17
212. Souměrné časy	13, 17
213. Převrácené časy I.	13, 17
214. Převrácené časy II.	13, 17
215. Kvádr I.	14
216. Kvádr II.	14
217. Káča	12, 14
218. Krychle	14
219. Maxi krychle	14
220. Krychličky	14
221. Panáky	14
222. Kostky	14
223. Křídou plná třída I.	14
224. Křídou celá třída II.	14
225. Křídy paní učitelky Nováčkové	14
226. Krychličky I.	14
227. Krychličky II.	14
228. Sto jedna	15
229. Dva lístečky žabince	15
230. Jedna až sto	15
231. Sedmdesáté třetí místo	15
232. Hrušky	1, 16
233. Čtyři židle	16
234. Kód	16
235. Titanik	16
236. Deset přátel	16
237. Třídní sraz	16
238. Body	16
239. Autíčka I.	16
240. Autíčka II.	16
241. Část dne	17
242. Sekundy	17
243. Pořadí	17
244. Vteřiny	17
245. Čtyři sedmičky	3, 17

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
246.	Minuty I.	17
247.	Minuty II.	17
248.	Minuty III.	17
249.	Délka děje	17
250.	Stejná čísla	17
251.	Ciferný součet	17
252.	Druhé čtvrtletí	17
253.	Polovina prázdnin	17
254.	Letní prázdniny I.	17
255.	Matematické prázdniny	17
256.	Letní prázdniny II.	17
257.	Tři prášky	17
258.	Popozítří předevčírem	17
259.	Mezi jednou hodinou	17
260.	Markovy narozeniny	17

Číslo a název úlohy		Číslo kategorie
261.	Stý den	17
262.	Dvoustý den	17
263.	Co za den?	17
264.	Co za den? Podruhé	17
265.	Skrývačka I.	18
266.	Skrývačka II.	18
267.	Dělitelné devíti	18
268.	Kouzlo I.	18
269.	Kouzlo II.	18
270.	Tečky	18
271.	Křížovky	18
272.	Co to je?	18
273.	Honza a Franta	18
274.	Běžecký závod	18
275.	Zajímavé časy	17, 18
276.	Dva tisíce sto	17, 18

11.3. Tabulka II. rozdělení úloh

Numerické výpočty
Tři devítky
Šest
Závorková doplňovačka I.
Znaménková doplňovačka II.
Pět pětek
Jedna a půl
Třicet
Rozdíl I.
Rozdíl II.
Rozdíl III.
Cifry
Čtyřciferná čísla
Kráva, vrabec a pavouk
Pavučiny
Nohy
Nejmenší počet mincí
Základní škola
Zpožděné hodiny
Kilometry pásky
Pořadí
Pra-prapraroditče
Papír
Menší než
Kladné celé číslo
Odmocnina I.
Odmocnina II.
Sudá lichá
Brambory II.
Sedm zločinců
Neznámé číslo IV.
Myši
Cihly
Sedm milionů lidí
Hrušky

Procenta
Tisíc
Měsíční plat
Třicet procent
Červen I.

Červen II.
Kilometr
2168 kilo
Brambory I.
Brambory II.
Sedm zločinců
Plýtvat co nejméně
Hana a Anna
Sušení hub
Chléb
Štiky, sumci a kapři
Neznámé číslo I.
Mouka
Čokoládový dort
Škola
Nízko kofeinová kola
Plocha obrazce II.

Dělitelnost
Řezy
Prvočíslo I.
Prvočíslo II.
Děti I.
Děti II.
Ovečky
Pomeranče
Tři po sobě jdoucí
Součin
Dělitelné patnácti
Dělitelné pěti
Dvě nuly
Dvojčata
Pracanti
Čtyři sedmičky
Pětikilové miminko
Lámání čokolády
Křesla

Logické úlohy
Čtyři piva
Pravnuk
Trpaslík
Dvacet?
Třináct?

Lineární rovnice

Natírání plotu
Lev, vlk a liška
Dělníci

Soustavy lineárních rovnic
Neznámá číslo
Brigáda
Brnění
Túra
Kachny
Tašky
Škola
Mezinárodní tábor
Bonbóny
Hrad Karlštejn
Eva a maminka
Martin a jeho rodiče
Tři generace
Hoši Čermákovi
Pan Bláha
Tři synové a otec
Švestky a jablka
Pomeranč a jablko
Pavouci a motýli I.
Pavouci a motýli II.
Krávy a husy
Vrabci, psi, brouci a pavouci
Vrabci, kočky a brouci
Husy a kočky
Brouci a pavouci
Daňci a pávi
Žirafy, pštrosi a anakondy

Přímá a nepřímá úměrnost
Tankové lodě
Jablka
Roury
Koně
Cihly
Nízko kofeinová kola
Kombajny
Kočky a myši

Společná práce
Tři tesaři
Natírání plotu
Lev, vlk a liška
Dělníci

Geometrické útvary v rovině
Čtverec
Skryté čtverce I.
Skryté čtverce II.
Skryté čtverce III.
Skryté čtverce IV.
Skryté čtverce V.
Skryté čtverce VI.
Skryté čtverce VII.
Skryté čtverce VIII.
Skryté obdélníky I.
Skryté obdélníky II.
Skryté obdélníky III.
Úsečka
Skryté trojúhelníky I.
Skryté trojúhelníky II.
Skryté trojúhelníky III.
Skryté trojúhelníky IV.
Skryté trojúhelníky V.
Hledaný trojúhelník

Obvody a obsahy geometrických obrazců
Závodní okruh
Tři kružnice
Půdorys
Rychlost ručiček
Sedm milionů lidí
Trojúhelník I.
Trojúhelník II.
Plocha obrazce I.
Plocha obrazce II.
Vlna
Čtyřlístek
Plýtvat co nejméně
Kruhy v kruhu

1. Tři devítky

Napište číslo *jedenáct* pomocí tří devítek.

Řešení:

$$11 = \frac{99}{9}$$

2. Šest

Napište číslo *šest*:

a. pomocí tří trojek.

Řešení:

$$6 = (3 \cdot 3) - 3$$

b. pomocí tří pětek.

Řešení:

$$6 = (5 \div 5) + 5$$

c. pomocí tří šestek.

Řešení:

$$6 = (6 \div 6) \cdot 6 = 6 + 6 - 6$$

3. Závorková doplňovačka I.

Doplňte *závorky* tak, aby platilo:

a. $1 + 2 \cdot 3 + 4 = 15$

Řešení:

$$1 + 2 \cdot (3 + 4) = 15$$

b. $1 + 2 \cdot 3 + 4 = 21$

Řešení:

$$(1 + 2) \cdot (3 + 4) = 21$$

c. $25 - 4 \div 2 + 5 = 3$

Řešení:

$$(25 - 4) \div (2 + 5) = 3$$

d. $25 - 4 \div 2 + 5 = 15{,}5$

Řešení:

$$(25 - 4) \div 2 + 5 = 15{,}5$$

4. Znaménková doplňovačka II.

Doplňte na prázdná místa (_) libovolná *znaménka* $+, -, \cdot, \div$ a *závorky* tak, aby platila rovnost: 15_5_3_18_6_4 = 7.

Řešení:

$$(15 \div 5) - 3 + (18 \div 6) + 4 = 7$$

5. Pět pětek

Napište číslo *sto* pomocí pěti pětek a znamének $+, -, \cdot, \div$, případně závorkami.

Řešení:

$$(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$$

6. Jedna a půl

Máme číslo sto, kolik je jedna a půl z jedné jeho třetiny?

Řešení:

$$1{,}5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 = 50$$

7. Třicet

Máme číslo třicet, kolik je jedna polovina ze dvou jeho třetin?

Řešení:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 30 = 10$$

8. Rozdíl I.

Jaká je hodnota rozdílu: 1 000 000 000 − 0,000 111?

Řešení:

$$\left(999\,999\,999{,}999 + 0{,}001\,000\right) - 0{,}000\,111 \quad = 999\,999\,999{,}999\,889$$

9. Rozdíl II.

Jaká je hodnota rozdílu: 11111111 − 0,99999999?

Řešení:

$$11\,111\,111 - 0{,}99999999 = (11\,111\,110 + 1) - 0{,}99999999 =$$
$$= 11\,111\,110{,}00000001$$

10. Rozdíl III.

Jaká je hodnota rozdílu 2 000 000 000 − 0,000 000 222?

Řešení:

$$2\,000\,000\,000 = (1\,999\,999\,999{,}999\,999\,000 + 0{,}000\,001\,000) - 0{,}000\,000\,222 =$$
$$= 1\,999\,999\,999{,}999\,999\,778$$

11. Cifry

Kolik cifer napíšeme při psaní čísel od 1 do 100?

Řešení:

Při psaní čísel od jedné do devíti napíšeme devět cifer; 10 až 19 napíšeme cifer 20, tedy při psaní čísel 10 až 99 napíšeme cifer 180 a číslo 100 má tři cifry. Celkem tedy napíšeme 192 cifer.

12. Čtyřciferná čísla

Kolik existuje čtyřciferných čísel?

Řešení:

Od posledního čtyřciferného čísla odečteme všechna čísla, která nejsou čtyřciferná $9\,999 - 999 = 9\,000$. Všech čtyřciferných čísel je tedy devět tisíc.

13. Kráva, vrabec a pavouk

Kolik krav má stejně nohou jako pět párů vrabců a čtyři páry pavouků?

Řešení:

Vrabec má dvě nohy a pavouk osm. Nesmíme zapomenout, že se počet vrabců a pavouků udává v párech. Tedy $84 \div 4 = 21$ krav.

14. Pavučiny

V každém rohu místnosti kromě jednoho jsou tři pavučiny. V každé pavučině kromě jedné jsou tři pavouci. Každý pavouk kromě jednoho chytil tři mouchy. Kolik chycených much je celkem v místnosti?

Řešení:

$$\{[(3 \cdot 3 - 1) \cdot 3] - 1\} \cdot 3 = 69$$

V místnosti je celkem 69 chycených much.

15. Nohy

V místnosti je šest stolů, u každého stolu pět židlí, na každé židli sedí člověk, kterému sedí na klíně dítě. Každé dítě drží kočku a každá kočka má kotě. Kolik nohou (dřevěné, lidské a kočičí) je v místnosti?

Řešení:

Počty nohou jednotlivých skupin jsou: dřevěné nohy (za předpokladu, že má každý ze stolů čtyři nohy) 144, lidské nohy 120, kočičí nohy 240, celkem je tedy v místnosti 504 nohou.

16. Nejmenší počet mincí

Jakým nejmenším počtem mincí se dá vyplatit částka 138 Kč?

Řešení:

Skládáme mince postupně od nejvyšší hodnoty

$$50 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 138$$

Nejmenším počtem mincí, kterým se dá vyplatit částka 138 Kč, je sedm.

17. Základní škola

Kolikrát jde dítě (přibližně) do základní školy?

Nápověda: Délka školní docházky je devět let, rok má 34 týdnů výuky a každý takový týden má pět dní výuky.

Řešení:

$$9 \cdot 34 \cdot 5 = 1\,530$$

Dítě jde do základní školy přibližně 1 530 krát.

18. Zpožděné hodiny

Hodiny se za dvanáct dnů zpozdí o pět minut. Za kolik dní se zpozdí o hodinu?

Řešení:

$$12 \cdot 12 = 144$$

Hodiny se zpozdí o jednu hodinu za sto čtyřicet čtyři dní.

19. Kilometry pásky

Hokejista Vladimír Zábrodský (HC Sparta Praha) každý týden obmotával svoji hokejku páskou. Za týden vypotřeboval vždy jeden a půl balení. V každém balení je 2,5 m pásky. Rok má 52 týdnů a hokejista hrál celkem 30 let. Kolik kilometrů pásky za tu dobu vypotřeboval?

Řešení:

$$1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 52 \cdot 30 = 3\,900 \text{ m} = 3{,}9 \text{ km}$$

Hokejista Zábrodský po dobu třiceti let celkem vypotřeboval 3, 9 km pásky.

20. Pořadí

Seřaďte tato čísla vzestupně podle velikosti $2^1, 1^2, 2^{-2}, -2^2, (-2)^2, -2^{-2}, \sqrt{2}$.

Řešení:

$$-2^2, -2^{-2}, 2^{-2}, 1^2, \sqrt{2}, 2^1, (-2)^2$$

21. Prapraprarodiče

Kolik praprababiček a prapradědečků dohromady měli všechny naše praprababičky a prapradědečkové?

Řešení:

Počet našich rodičů je $2 = 2^1$, našich prarodičů $4 = 2^2$. Počet našich pra-praprarodičů (praprababiček a prapradědečků) je $16 = 2^4$ a každý z nich měl 2^4 svých praprarodičů. Celkem tedy měli naše prababičky a pradědečkové svých $2^8 = 256$ praprababiček a prapradědečků.

Jiné řešení:

Počet předků v další generaci je vždy dvojnásobný. Naši prapraprarodiče (praprababička a prapradědeček) jsou od nás čtyři generace a jejich pra-praprarodiče jsou od nich též čtyři generace. Našich prapraprarodičů je tedy 16. Každý z nich měl opět šestnáct pra-praprarodičů. Celkem tedy měli naše prababičky a pradědečkové dohromady $16 \cdot 16 = 256$ praprababiček a prapradědečků.

22. Papír

Papír jsme několikrát přeložili na půl a pak jsme do něj udělali díru. Po zpětném rozložení papíru je v něm 32 děr. Kolikrát jsme papír předtím přeložili?

Řešení:

Počet přeložení	Počet děr
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

Tabulka 5. Řešení úlohy 22

Jiné řešení:

Počet přeložení	Počet děr
0	2^0
1	2^1
2	2^2
3	2^3
4	2^4
5	2^5

Tabulka 6. Řešení úlohy 22

Papír jsme přeložili celkem pětkrát.

23. Tisíc

Máme číslo tisíc, kolik je osm procent z jedné jeho pětiny?

Řešení:

$$0{,}08 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1\,000 = 16$$

24. Měsíční plat

Naše hrubá měsíční mzda činí 36 000 Kč. Od této sumy ale ještě náš zaměstnavatel strhne dvacet procent z jedné čtvrtiny této částky. Kolik korun činí náš čistý měsíční plat?

Řešení:

Výše stržené částky představuje

$$0{,}2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 36\,000 = 1\,800 \text{ Kč}.$$

Náš čistý měsíční plat je tedy 34 200 Kč.

25. Třicet procent

Kolik minut je třicet procent dne?

Řešení:

$$24 \cdot 60 \cdot 0{,}3 = 432 \text{ min}$$

26. Červen I.

Kolik minut je třicet sedm procent června?

Řešení:

$$31 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 0{,}37 = 15\,984 \text{ min}$$

27. Červen II.

Kolik hodin je třicet sedm procent června?

Řešení:

$$31 \cdot 24 \cdot 0{,}37 = 266{,}4 \text{ h}$$

28. Kilometr

Máme délku jeden kilometr, kolik centimetrů je pět procent z dvaceti čtyř procent této délky?

Řešení:

$$0{,}05 \cdot 0{,}24 \cdot 1\,000 = 12 \text{ m}$$

29. Dva tisíce sto šedesát kilo

Máme kámen o hmotnosti 2 160 kg, kolik kilogramů je dvacet čtyři procent, ze tří čtvrtin jeho hmotnosti?

Řešení:

$$0{,}24 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\,160 = 388{,}8 \text{ kg}$$

30. Brambory I.

Zemědělci letos vyorali 400 kg brambor, kolik kilogramů je dvacet procent ze čtyřiceti procent jejich celkové váhy?

Řešení:

$$0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 400 = 32 \text{ kg}$$

31. Brambory II.

Čerstvě vyorané brambory obsahují 99 % vody. Když se brambory nechají přes noc na vzduchu, obsahují druhý den 98 % vody. Když vyoráme 100 kg brambor, jakou hmotnost budou mít druhý den?

Řešení:

První den mají brambory hmotnost 100 kg, z toho 1 kg je sušina a 99 kg voda. Druhý den tvoří 1 kg sušiny 2 % celku. Celek má tedy hmotnost 50 kg.

Vyorané brambory budou mít druhý den hmotnost 50 kg.

32. Sedm zločinců

Jestliže ze sto vězňů je sedm zločinců, kolik vězňů nejsou zločinci, když celkový počet vězňů je pět set?

Řešení:

Sedm zločinců ze sta představuje sedm procent. Těch, kteří nejsou zločinci, je tedy devadesát tři procent, což odpovídá počtu 465 vězňů.

Jiné řešení:

Je-li vězňů pět set, pak je jich pětkrát víc, než bylo předtím. Je tedy i pětkrát více zločinců, tedy 35. Z pěti set vězňů pak není zločinců 465.

33. Plýtvat co nejméně

Ze čtverce papíru o straně 12 cm je vystřižen co největší kruh. Kolik procent papíru je odpad?

Řešení:

Poloměr největšího možného kruhu bude $r = 6$ cm, jeho obsah je

$$S_{\text{kruhu}} = 36\pi \text{ cm}^2$$

a obsah daného čtverce

$$S_{\text{čtverce}} = 144 \text{ cm}^2.$$

Pak činí papírový odpad

$$\frac{(S_{\text{čtverce}} - S_{\text{kruhu}})}{S_{\text{čtverce}}} \cdot 100 = 21{,}5\ \%.$$

34. Hana a Anna

Anna měří 160 cm, Hana 172 cm. O kolik procent je Anna menší než Hana? O kolik procent je Hana větší než Anna?

Řešení:

Musíme brát v potaz, koho vůči komu porovnáváme. Údaj, vůči kterému budeme porovnávat, činí základ, sto procent. V prvním případě představuje 160 cm základ a hodnota rozdílu velikostí mezi děvčaty je 6,97 %, v druhém případě je základ rozdíl 7,5 %.

Anna je o 6,97 % menší než Hana a ta je o 7,5 % větší než Anna.

35. Sušení hub

Čerstvé houby obsahují 88 % vody, sušené houby pak 3 % vody. Kolik čerstvých hub musíme nasbírat, abychom z nich získali 2 kg sušených hub?

Řešení:

Váhu potřebných čerstvých hub označme x. Při sušení hub se z nich odpařuje voda a z původních 88 % vody se dostaneme na 3 % vody v celkovém objemu. Množství sušiny v houbě se při sušení nemění. Je tedy stejné jak na začátku (12 % celkového objemu), tak po usušení houby (97 % celkového objemu). Pak platí, že

$$x \cdot 0{,}12 = 2 \cdot 0{,}97,$$

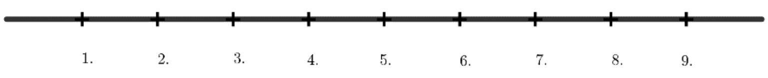
$$x = 16{,}2\ \text{kg}$$

Pro získání 2 kg sušených hub, potřebujeme nasbírat 16,2 kg čerstvých hub.

36. Řezy

Kovový prut je jeden metr dlouhý. Jeho rozříznutí na dvě části stojí 15 Kč. Kolik bude stát nařezání prutu na 10 částí?

Řešení:



Obrázek 2. Řešení úlohy 36

Jedním řezem danou část prutu rozdělíme na dvě části. Potřebných deset částí tedy dostaneme po devíti řezech. Nařezání prutu na deset částí bude stát 135 Kč.

Obecně to lze vyjádřit jako

$$(n-1)\ \text{řezů},$$

kde n je počet částí.

37. Prvočíslo I.

Je číslo 1 007 prvočíslo? Je číslo 1 009 prvočíslo?

Řešení:

K řešení této úlohy využijeme pravidlo, které říká, že číslo n je prvočíslem, pokud není dělitelné prvočísly $2, \dots, p$, kde $p \leq \sqrt{n}$.

$$\sqrt{1007} \doteq 31{,}7$$

Ze všech uvažovaných prvočísel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ je číslo 1007 dělitelné 19 a není tedy prvočíslem.

$$\sqrt{1009} \doteq 31{,}7$$

Ze všech uvažovaných prvočísel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ není číslo 1009 dělitelné žádným z nich. Je tedy prvočíslem.

38. Prvočíslo II.

Napište dvě prvočísla větší než tisíc.

Řešení:

Ze začátku si vypíšeme postupně několik čísel větších než tisíc a vyškrtáme z nich ta, která jsou dělitelná dvěma, třemi, pěti, … (Eratosthenovo síto). Zbydou nám čísla, která by mohla být prvočísly. Dále využijeme pravidla, které říká, že číslo n je prvočíslem, pokud není dělitelné prvočísly $2, \dots, p$, kde $p \leq \sqrt{n}$.

Níže je uvedeno několik příkladů.

$\sqrt{1001} \doteq 31{,}63;\ 1001 \div 7 = 143$, pak není prvočíslem

$\sqrt{1003} \doteq 31{,}67;\ 1003 \div 17 = 59$, pak není prvočíslem

$\sqrt{1009} \doteq 31{,}76;\ 1009$ není dělitelné žádným prvočíslem $p \leq 31{,}76$, pak 1009 je prvočíslem

Několik prvních prvočísel větších než tisíc
1009
1013
1019
1021
1031
1033
1039
1049
1051

Tabulka 7. Řešení úlohy 38

39. Děti I.

Dětí je méně než dvě stě a dají se rozdělit do dvojic, trojic, čtveřic, pětic, šestic a osmic. Kolik je celkem dětí?

Řešení:

Počet dětí bude vyjádřen číslem, jehož dělitelé jsou čísla: 2, 3, 4, 5, 6, 8 a zároveň bude toto číslo menší než 200. Dětí je celkem

$$\mathrm{NSN}(2, 3, 4, 5, 6, 8\ ) = 120.$$

40. Děti II.

Dětí je méně než sto. Když vytvoří skupiny po pěti, jedno dítě zbyde. Také když vytvoří skupiny po čtyřech, třech nebo dvou, vždy zbyde jedno dítě. Kolik je dětí celkem?

Řešení:

Počet dětí označme x. Zbyde-li po vydělení tohoto čísla dvěma, třemi, čtyřmi a pěti vždy číslo jedna, pak to znamená, že číslo $(x-1)$ je dělitelné dvěma, třemi, čtyřmi a pěti. Platí, že

$$(x-1) = \mathrm{NSN}(2, 3, 4, 5).$$

Celkový počet dětí je

$$x = 61.$$

41. Ovečky

Pastýř má méně než 500 ovcí. Když je rozdělí do dvojic, jedna mu bude přebývat. Totéž nastane, rozdělí-li je do skupin po třech, čtyřech, pěti, nebo šesti. Když ovce rozdělí do skupin po sedmi, nezbyde mu žádná ovce. Kolik má pastýř ovcí?

Řešení:

Počet ovcí označíme x. Čísla 2, 3, 4, 5, 6 dělí číslo x se zbytkem jedna a tedy číslo $(x-1)$ dělí beze zbytku, zároveň je x dělitelné číslem 7 beze zbytku a $x < 500$. Platí, že

$$(x-1) = \mathrm{NSN}(2, 3, 4, 5, 6\ ).$$

Protože ale není toto číslo dělitelné sedmi, hledáme jeho násobek tak, aby byly splněny obě podmínky výše. Celkový počet pastýřových ovcí je

$$5 \cdot 61 = 301.$$

42. Pomeranče

Pomerančů je méně než sto. Rozdáváme je dětem. Když je rozdělujeme po pěti, čtyřech, třech či dvou, vždy jeden pomeranč zbyde. Kolik je celkem pomerančů?

Řešení:

Počet pomerančů označme x. Čísla 2, 3, 4, 5 dělí číslo x se zbytkem jedna, pak tedy číslo $(x-1)$ dělí beze zbytku a zároveň je číslo $x < 100$. Platí, že

$$(x-1) = \mathrm{NSN}(2, 3, 4, 5, 6\ ).$$

Pomerančů je celkem

$$x = 61.$$

43. Čtyři piva

Když zaplatíme útratu přes 100 Kč a pili jsme jen pivo, měli jsme právě čtyři piva. Je to vždy pravda?

Řešení:

Mohli jsme si dát méně dražších piv nebo více než čtyři. Možností je tedy více. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

44. Pravnuk

Je pravda, že syn syna mojí dcery je můj prapravnuk?

Řešení:

Syn mé dcery je můj vnuk, jeho syn je můj pravnuk. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

45. Trpaslík

Je pravda, že trpaslík není nevelký?

Řešení:

Označení nevelký znamená, že je malý. Když není nevelký, pak je velký, ale jedná se o trpaslíka, který je vždy malý. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

46. Dvacet?

Není pravda, že $6 + 7 = 20$?

Řešení:

Rovnost $6 + 7 \neq 20$, tedy není pravda, že $6 + 7 = 20$. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

47. Třináct?

Není pravda, že není pravda, že by platil součet $6 + 7 = 13$?

Řešení:

Výrok není pravda, že $6 + 7 = 13$ je nepravdivý. Tedy není pravda, že platí nepravdivý výrok je pravda. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

48. Nepřátelé psů

Je pravda, že nepřítel psů nevyhledává nepřátele nepřátel psů?

Řešení:

Nepřítel nepřátel psů je přítel psů. Nepřítel psů nevyhledává jejich přátele. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

49. Lhář

Není pravda, že lhář lže?

Řešení:

Lhář lže, to je pravda. Není pravda, že platí pravdivý výrok je nepravda. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

50. Zralé jablko

Není pravda, že nezralé jablko je zralé?

Řešení:

Nezralé jablko je zralé, to je nepravdivý výrok. Není pravda, že platí nepravdivý výrok je pravda. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

51. Abstinent

Je pravda, že nebojuji-li proti nepřátelům abstinentů, pak jsem abstinent?

Řešení:

Nebojuji proti nepřátelům abstinentů, pak bojuji s přáteli abstinentů. Tudíž nejsem abstinent. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

52. Menší než

Není pravda, že 6 je menší než 8?

Řešení:

Výrok $6 < 8$ je pravdivý. Není pravda, že platí pravdivý výrok je nepravda. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

53. Kladné celé číslo

Je pravda, že existuje aspoň jedno kladné celé číslo, které je menší než 0,75?

Řešení:

Pro každé kladné celé číslo platí, že je větší nebo rovné jedné. Neexistuje tedy kladné celé číslo, které by bylo menší než jedna. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

54. Tři po sobě jdoucí

Je pravda, že součet tří po sobě jdoucích celých čísel je vždy sudé číslo?

Řešení:

Uvažujeme tři po sobě jdoucí celá čísla $a, a+1, a+2$. Pak jejich součet je

$$a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3.$$

Když

$$3a = 2k, k \in Z,$$

pak

$$(2k + 2) + 1,$$

je liché číslo. Když

$$3a = 2k + 1, k \in Z,$$

pak

$$2(2k + 2)$$

je sudé číslo. Součet tří po sobě jdoucích čísel tedy není vždy sudé číslo. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

55. Součin

Je pravda, že součin lichého záporného čísla a sudého kladného čísla je sudé záporné číslo?

Řešení:

Uvažujeme součin

$$2k \cdot [-(2k + 1)] = -2(2k^2 + k),$$

pro libovolné $k \in Z$, který je sudé záporné číslo. Uvažujeme součin

$$2l \cdot [-(2k + 1)] = -4kl - 2l$$

pro libovolné $k, l \in Z$. Číslo $-4kl$ je sudé záporné a $-2l$ je také sudé záporné. Jejich součet bude sudé záporné číslo. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

56. Dělitelné patnácti

Je pravda, že číslo dělitelné patnácti je vždy dělitelné i pěti?

Řešení:

Uvažujeme celé číslo $a = 15b, b \in Z$. Pak $a = 5(3b)$ a nechť
$3b = c, c \in Z$. Pak $a = 5c$. Což znamená, že je a dělitelné pěti. Daný výrok je tedy PRAVDIVÝ.

57. Dělitelné pěti

Je pravda, že číslo dělitelné pěti je vždy dělitelné i patnácti?

Řešení:

Uvažujeme celé číslo $a, a = 5b, b \in Z$. Toto číslo je dělitelné patnácti pouze tehdy, je-li $b = 3c$, kde c je libovolné celé číslo. Platí to tedy jen pro určité případy, ne vždy. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

58. Dvě nuly

Je pravda, že pokud je číslo dělitelné 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10, musí mít na posledních dvou místech nuly?

Řešení:

Hledáme nejmenší společný násobek

$$NSN(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2\,520,$$

všechna čísla dělitelná uvedenými čísly můžeme napsat ve tvaru $2\,520a, a \in Z$. Na posledních dvou místech budou nuly jen v určitých případech. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

59. Odmocnina I.

Je pravda, že odmocnina z čísla, které má na posledním místě číslici jedna, musí být číslo, které má na posledním místě číslici devět?

Řešení:

Daný výrok je pravdivý například pro číslo 81, ale není pravdivý například pro čísla 1, 11, 21, 71 atd. Daný výrok je tedy NEPRAVDIVÝ.

60. Odmocnina II.

Je pravda, že odmocnina z čísla, které má na posledním místě číslici šest musí být číslo, které má na posledním místě buď číslici čtyři, nebo šest?

Řešení:

Uvažujme několik prvních čísel splňujících zadání $\sqrt{6} = 2{,}4$;
$\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{26} = 5{,}099$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{46} = 6{,}78$. Výrok není pravdivý pro libovolné číslo splňující zadání a je tedy NEPRAVDIVÝ.

61. Sudá lichá

Je možné, aby:

a. součet dvou lichých čísel byl sudé číslo?

Řešení:

Ano, například $1 + 3 = 4$, atd. Obecně vyjádříme součet dvou lichých čísel ve tvaru

$$(2m + 1) + (2n + 1) = 2k,$$

kde celé číslo

$$k = m + n + 1.$$

Součet dvou lichých čísel je tedy číslo sudé.

b. součin dvou lichých čísel byl sudé číslo?

Řešení:

Ne, například $1 \cdot 3 = 3$, atd. Obecně vyjádříme součin dvou lichých čísel ve tvaru

$$(2m + 1) \cdot (2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1 = 2k + 1,$$

kde m, n jsou libovolná celá čísla a celé číslo

$$k = 2mn + m + n.$$

Součin dvou lichých čísel je tedy číslo liché.

c. třetí mocnina sudého čísla byla liché číslo?

Řešení:

Ne, například $2^3 = 8$, atd. Obecně vyjádříme součin dvou sudých čísel ve tvaru

$$2m \cdot 2n = 4mn = 2k,$$

kde m, n jsou libovolná celá čísla a $k = 2mn$. Třetí mocninu sudého čísla můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(2m)^3 = 2m \cdot 2m \cdot 2m = 2l \cdot 2m = 2p,$$

kde m je libovolné celé číslo a celá čísla $l = 4m, p = 4lm$. Pak třetí mocnina sudého čísla je číslo sudé.

d. třetí odmocnina sudého čísla byla liché číslo?

Řešení:

Ne, například $\sqrt[3]{8} = 2$ atd. Obecně vyjádříme třetí odmocninu sudého čísla ve tvaru

$$\sqrt[3]{2n} = (2n)^{\frac{1}{3}}.$$

Zároveň jakékoli sudé číslo lze vyjádřit ve tvaru

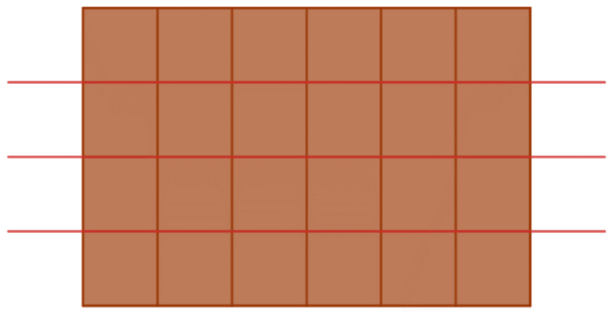
$$2n = (2n)^{\frac{1}{3}} \cdot (2n)^{\frac{1}{3}} \cdot (2n)^{\frac{1}{3}} = \left((2n)^{\frac{1}{3}} \cdot (2n)^{\frac{1}{3}}\right) \cdot (2n)^{\frac{1}{3}},$$

pak podle bodu **c.** je $(2n)^{\frac{1}{3}}$ číslo sudé.

62. Lámání čokolády

Čokoláda obsahuje dvacet čtyři dílků. Kolik zlomů čokolády uděláme, aby se rozdělila na jednotlivé dílky (nelámeme nikdy dvě nebo víc kusů na sobě)?

Řešení:



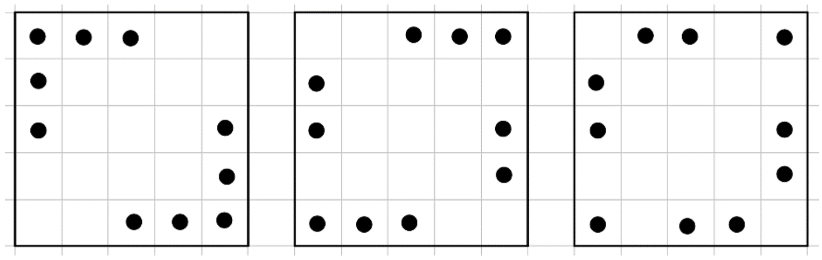
Obrázek 3. Řešení úlohy 62

Jedním zlomem rozdělíme jeden předmět na dvě části. Z obrázku vyplývá, že nejdříve rozdělíme čokoládu třemi zlomy a vzniknou nám tak čtyři stejné části, každá po šesti dílcích. Následně rozdělíme každou ze čtyř vzniklých částí pěti zlomy na jednotlivé dílky. Celkem tedy uděláme 23 zlomů čokolády.

63. Křesla

Rozestavte deset křesel ke stěnám místnosti tak, aby u každé stěny byl stejný počet křesel.

Řešení:

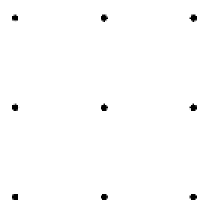


Obrázek 4. Řešení úlohy 63

64. Devět teček

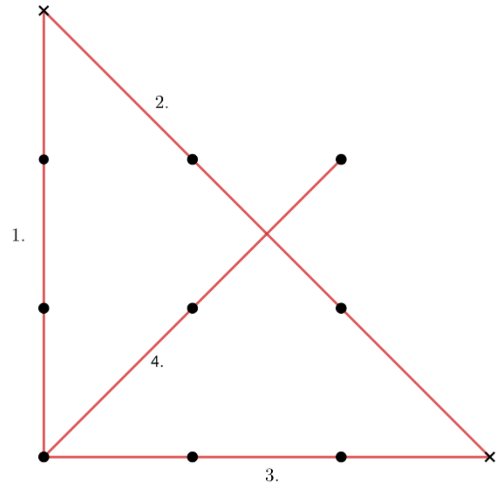
Spojte devět teček jedním tahem, který se skládá ze čtyř úseček.

Nápověda: úsečka může vést i mimo pole devíti teček



Obrázek 5. Zadání úlohy 64

Řešení:



Obrázek 6. Řešení úlohy 64

65. Sto let

Předpokládejme, že se lidé dožívají sta let. Člověk, který slavil v roce 2016 své 58. narozeniny, se narodil v roce 1958. Člověk, narozený v roce 1959 slavil v roce 2016 své 59. narozeniny. Existuje v životě každého člověka rok, ve kterém se ročník narození (poslední dvě cifry) rovná počtu jeho let?

Řešení:

Jedno století obsahuje roky 0 až 99. Věk člověka vůči ročníku jeho narození je pak také v tomto rozmezí. Předpokládáme-li, že se každý člověk dožije sta let, pak v životě každého člověka existuje rok, ve kterém je ročník narození stejný jako počet jeho let. Krajní případy: ročník narození 1999 oslaví 99 narozeniny v roce 2098, ročník narození 2000 má ve stejném roce rovnost počtu let a svého ročníku narození, ročník narození 2001 má tuto rovnost již za rok, v roce 2001, atd.

66. Ciferný součet

Jaký letopočet měl doposud největší ciferný součet?

Řešení:

Největší cifra je 9, musí se tedy jednat o letopočet obsahující nejvíce těchto cifer, to je 29. 9. 1999.

67. Záhadné narozeniny

Dvojčata slaví narozeniny s rozdílem dvou dnů. Jak je to možné?

Řešení:

Jedno z dvojčat se narodilo 28. 2. těsně před půlnocí a druhé 1. 3. těsně po půlnoci v nepřestupný rok. Nyní, kdy uvažujeme jejich narozeniny, je přestupný rok.

68. Popletené rovnice I.

Jaký bude výsledek poslední rovnosti?

$2 + 3 = 10; 7 + 2 = 63; 6 + 5 = 66; 8 + 4 = 96; 9 + 7 = ?$

Řešení:

Výsledkem je vždy součin prvního z čísel a součtu obou čísel, pak
$9 + 7 = 9 \cdot 16 = 144$.

69. Popletené rovnice II.

Jaký bude výsledek poslední rovnosti?

KONIKLEC = 80

SASANKA = 66

LILIE = ?

Řešení:

Každému písmenu abecedy (bez písmen s háčky) odpovídá určitá hodnota, např.
$A = 1$, $C = 3$ atd. a jejich součet je hodnotou daného slova. Řešení je tedy
LILIE $= 12 + 9 + 12 + 9 + 5 = 47$.

70. Husy, krávy a motýli

Husy, krávy a motýli mají dohromady sto čtyřicet šest nohou. Každého druhu je vždy více než deset kusů. Kolik je kterých?

Řešení:

Každého druhu je vždy více než deset kusů. Pak $10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 120$ a zbývá 26. Proměnné h, k, m označující počet zbývajících druhů zvířat volíme tak, aby platila rovnost

$$(10 + h) \cdot 2 + (10 + k) \cdot 4 + (10 + m) \cdot 6 = 146,$$

kde $h, k, m > 0$.

Níže je uvedena tabulka řešení.

Husy	Krávy	Motýli
11	13	12
12	11	13
15	11	12
18	11	11
13	12	12
12	14	11

Tabulka 8. Řešení úlohy 70

71. Pětikilové miminko

Miminko přibývá na váze rovnoměrně. Dne 1. 10. mělo hmotnost 3,4 kg, 8. 10. pak 3,8 kg. Kdy bude vážit 5 kg?

Řešení:

Za sedm dní přibralo miminko 0,4 kg. Platí $5 = 3{,}8 + 3 \cdot 0{,}4$. Miminko tedy bude vážit 5 kg dne 29. 10.

72. Otcové, synové a vnuci

Martinův otec je synem Rudolfa. Karlův otec je synem Tomáše. Rudolfův vnuk je synem Karla. Tomášův vnuk je synem Rudolfa. Jaký příbuzenský vztah mají dědeček Karla a Martin?

Řešení:

Generace v této rodině jdou od nejstaršího takto: Tomáš - Rudolf - Karel - Martin, pak dědeček Karla je Tomáš, který je pradědečkem Martina, a ten je tedy jeho pravnukem.

73. Sedmé patro

Pan Stodůlka vyjde z bytu, nastoupí do výtahu a jede do přízemí, kde si vyzvedne věci ze sklepa. Znovu nastoupí do výtahu, zmáčkne tlačítko 7. patro, vystoupí, vyjde do 9. patra a zajde do svého bytu. Proč pan Stodůlka vyjel do sedmého patra?

Řešení:

Protože je malé postavy a na tlačítko označující 9. patro nedosáhne.

74. Dvojčata

Pán umírá a jeho ženě se má brzo narodit dítě. Pán má 1 200 000 Kč. Diktuje poslední vůli: „Pokud se narodí chlapec, odkazuji dvě třetiny peněz jemu a jednu třetinu manželce. Jestliže se narodí dívka, odkazuji jednu třetinu peněz jí a dvě třetiny manželce.“ Manželce se nakonec narodila dvojčata, chlapec a dívka. Jak se peníze rozdělí, aby bylo splněno pánovo přání?

Řešení:

Danou částku peněz rozdělíme na půl a každou polovinu dále rozdělíme mezi manželku a jedno dítě. Z první půlky majetku má syn $\frac{2}{3}$ a manželka $\frac{1}{3}$, z druhé půlky majetku má dcera $\frac{1}{3}$ a manželka $\frac{2}{3}$. Syn tedy zdědil 400 000 Kč, dcera 200 000 Kč a pánova manželka 600 000 Kč.

75. Chytrá koupě?

Pan Vychytralý koupil auto za 60 000 Kč a prodal ho kamarádovi Láďovi za 80 000 Kč. Po určité době ho od něj zase odkoupil za 100 000 Kč a prodal jinému kamarádovi Emilovi za 120 000 Kč. O kolik korun se pan Vychytralý obohatil?

Řešení:

Při koupi auta do něj pan Vychytralý vložil 60 000 Kč. Prvním prodejem se mu jeho 60 000 Kč vrátilo a ještě 20 000 Kč vydělal. Při odkupu auta zpět musí ke svým 60 000 Kč a 20 000 Kč vydělaným přidat ještě svých 20 000 Kč. Při druhém prodeji auta pan Vychytralý získá částku 100 000 Kč zpět a vydělá navíc 20 000 Kč. Celkem tedy vydělal 40 000 Kč.

76. Kulička

Máme osm vzhledově stejných kuliček, ale jedna je těžší než ostatní. K dispozici máme rovnoramenné váhy, ale kuličky můžeme zvážit jen dvakrát. Jak to provedeme?

Řešení:

Vybereme tři a tři kuličky a zvážíme je:

a. jsou v rovnováze, pak zvážíme zbylé dvě, z nichž se určí ta těžší.

b. nejsou v rovnováze, pak z těžší trojice vybereme dvě kuličky a ty zvážíme:

   i. jsou v rovnováze, pak nejtěžší je zbylá třetí kulička.

   ii. nejsou v rovnováze, pak těžší kulička je onou hledanou nejtěžší.

77. Přelévání

Máme libovolné množství tekoucí vody a dvě nádoby: pětilitrovou a třílitrovou. Jak odměříme čtyři litry vody?

Řešení:

a. Z třílitrové nádoby přelijeme vodu do pětilitrové. Opakujeme tento proces znovu a ve třílitrové nám zbyde $1l$. Pětilitrovou nádobu vyprázdníme a získaný $1l$ vody tam přelijeme. Naplníme znovu třílitrovou nádobu a přelijeme celý její objem do pětilitrové. K $1l$ jsme tedy přidali ještě $3l$, v pětilitrové nádobě tedy dostáváme potřebný objem $4l$.

b. Z pětilitrové nádoby lejeme vodu do třílitrové tak dlouho, až ji naplníme. V pětilitrové nám zbydou $2l$. Celou třílitrovou nádobu vyprázdníme a $2l$ vody tam z pětilitrové nádoby přelijeme. Dále naplníme pětilitrovou až po okraj a začneme z ní přelívat vodu do třílitrové nádoby tak, aby byla plná až po okraj. V třílitrové nádobě chyběl $1l$ vody, který jsme tam nyní přelili. V pětilitrové nádobě tak zůstává potřebný objem vody $4l$.

78. Bezpečně přes řeku

U řeky je loďka, převozník, vlk, koza a zelí. V loďce je vždy potřebná přítomnost převozníka, a pak už se tam vejde pouze jeden další předmět nebo zvíře. V přítomnosti převozníka si nikdo neublíží. Když však zůstane koza sama se zelím, tak ho sežere. A pokud zůstane vlk sám s kozou, tak ji sežere. Jak se dostanou všichni na druhý břeh, aniž by někdo došel k úhoně?

Řešení:

Jako první převozník sveze na druhý břeh kozu, protože by ji jinak vlk sežral. Pak se vrací zpět a tam nabere vlka. Vlka převeze na druhý břeh, tam ho vyloží, nabere kozu a převeze ji zpět. Tam kozu vyloží a nabere zelí, aby ho zatím koza nesežrala. Zelí převeze na druhý břeh, a tam ho vyloží k vlkovi. Nakonec se sám převozník vrací zpět, kde nabere kozu a jako poslední ji převeze na druhý břeh.

79. Přesýpací hodiny

Máme dvojici přesýpacích hodin – na sedm minut a na čtyři minuty. Jak můžeme pomocí nich změřit přesně devět minut?

Řešení:

Oboje hodiny necháme sypat. Jakmile skončí čtyřminutové, znovu je otočíme, tehdy v těch sedmiminutových zbývají tři minuty. Jakmile skončí sedmiminutové, zbývá v těch čtyřminutových poslední minuta. V tuto chvíli začínáme odměřovat devět minut a to tak, že necháme přesypat jednu minutu na čtyřminutových a pak tyto hodiny necháme dvakrát celé přesypat.

80. Smažení

Máme tři plátky masa a jednu pánev, na kterou se vejdou jen dva plátky masa. Maso se smaží z každé strany vždy pět minut. Za jakou nejkratší dobu můžeme usmažit tři plátky masa?

Řešení:

První dvě masa dáme smažit na 5 min. Pak první otočíme, druhé odebereme, přidáme třetí a smažíme obě dalších 5 min. Nakonec hotové první maso odebereme, přidáme druhé maso a třetí otočíme a smažíme posledních 5 min.

Nejkratší doba potřebná k usmažení tří plátků masa je 15 minut.

81. Číslo

Napište číslo „jedenáct tisíc, jedenáct set jedenáct."

Řešení:

$$11\,000 + 1\,100 + 11 = 12\,111$$

82. Trojky I.

Kolik trojek napíšeme při psaní lichých čísel dělitelných třemi od jedné do sta?

Řešení:

Uvažujeme řadu čísel, která splňují zadané podmínky: 3, 9, 15, 21, …, 93, 99. Z této řady obsahují v zápise trojku následující z nich: 3, 33, 39, 63, 93. Trojku tedy napíšeme celkem šestkrát.

83. Trojky II.

Kolik trojek napíšeme při psaní přirozených čísel od jedné do sta?

Řešení:

Uvažujme všechna čísla 1 až 100 mající ve svém zápise číslici tři: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Trojku napíšeme celkem dvacetkrát.

84. Chybějící číslo

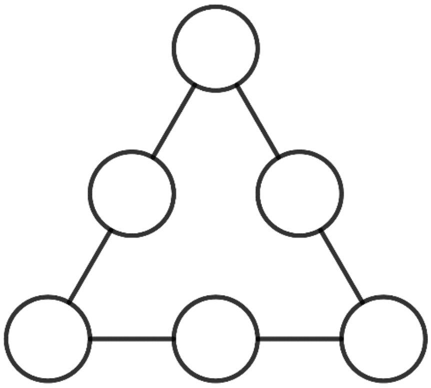
Pěticiferné číslo 2 1_37 je dělitelné dvaceti devíti beze zbytku. Jakou číslici je potřeba dopsat na prázdné místo (_)?

Řešení:

Součin čísel 3, 9 má na konci sedmičku stejně jako dané pěticiferné číslo. Hledáme tedy takové číslo x, které má na místě jednotek číslo 3 a $x \cdot 29 = 2\ 1\_37$. Takovým číslem x je 753 a dané pěticiferné číslo je 2 1837.

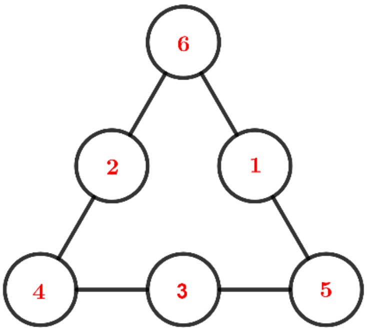
85. Součtový trojúhelník

Doplňte do koleček útvaru čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby součet čísel v každém ze tří ramen útvaru byl dvanáct.



Obrázek 7. Zadání úlohy 85

Řešení:

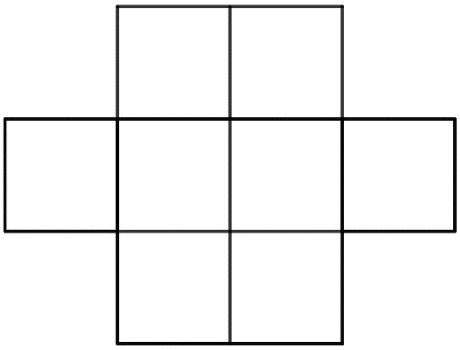


Obrázek 8. Řešení úlohy 85

Více nalezne čtenář na [24].

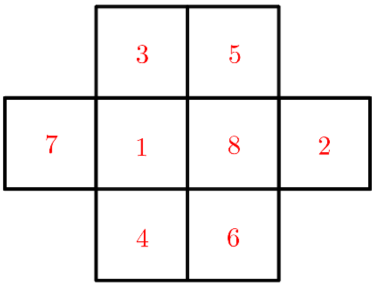
86. Číselný kříž

Do každého z osmi čtverců obrazce doplňte čísla od jedné do osmi tak, aby se strany a rohy čtverců, v nichž jsou čísla po sobě jdoucí, nedotýkaly.



Obrázek 9. Zadání úlohy 86

Řešení:

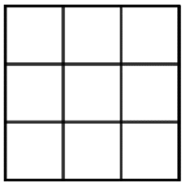


Obrázek 10. Řešení úlohy 86

Více nalezne čtenář na [25].

87. Součtový čtverec

Do čtverce s devíti poli dopište čísla 1 až 9 tak, aby součty čísel v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách byly stejné.



Obrázek 11.
Zadání úlohy 87

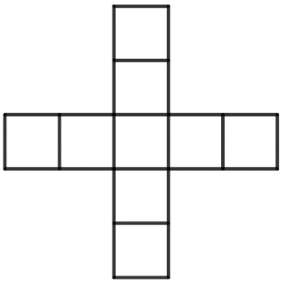
Řešení:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obrázek 12.
Řešení úlohy 87

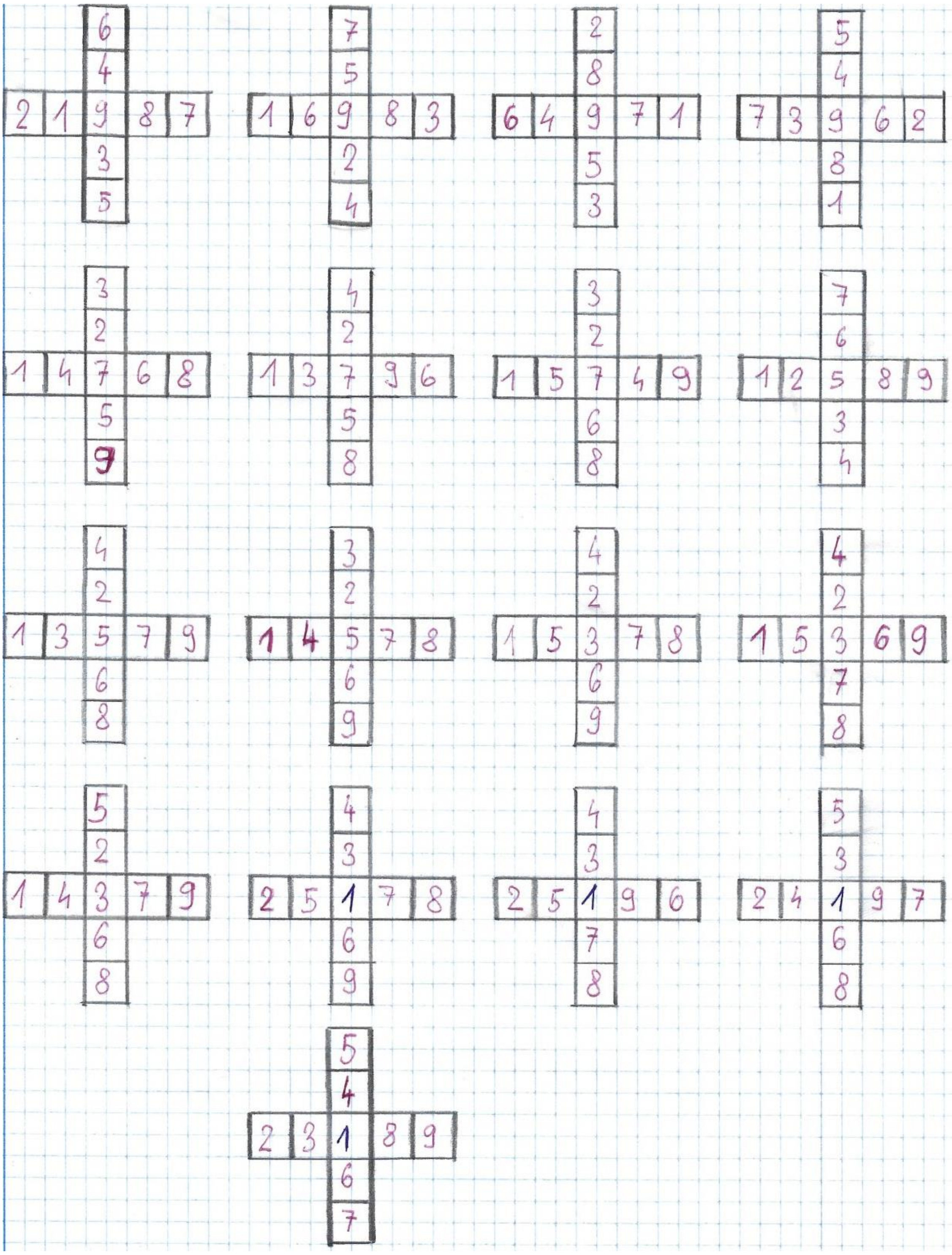
88. Součtový kříž I.

Doplňte do kříže čísla od 1 až do 9 tak, aby součet v obou ramenech kříže byl stejný.



Obrázek 13. Zadání úlohy 88

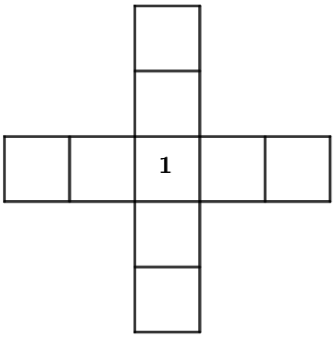
Řešení:



Obrázek 14. Řešení úlohy 88

89. Součtový kříž II.

Máme stejné zadání, jako v předešlé úloze, ale vprostřed musí být číslo jedna.



Obrázek 15. Zadání úlohy 89

Řešení:

Viz řešení předchozí úlohy.

90. Součtový kříž III.

Pro která čísla, pokud je umístíme doprostřed, nebude mít úloha řešení?

Řešení:

Uděláme-li součet všech čísel od 1 do 9, pak je tento součet roven číslu 45. Přičteme-li dále k této hodnotě číslo ze středu kříže (protože se v celkovém součtu vyskytuje dvakrát) pak nám vyjdou následující celkové součty v kříži (viz tabulka níže).

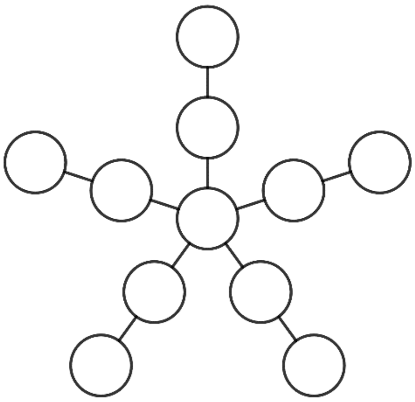
Číslo ve středu kříže	Celkový součet
1	46
2	47
3	48
4	49
5	50
7	52
9	54

Tabulka 9. Řešení úlohy 90

Je třeba, aby byly celkové součty sudé, pak je lze rozdělit na dvě stejné hodnoty odpovídající každému z obou ramen kříže. Tuto podmínku splňují součty čísel: 1, 3, 5, 7, 9, tedy lichých čísel. Z toho plyne, že bude-li uprostřed číslo sudé, pak tato úloha nebude mít řešení. Více podobných úloh nalezne čtenář na [26].

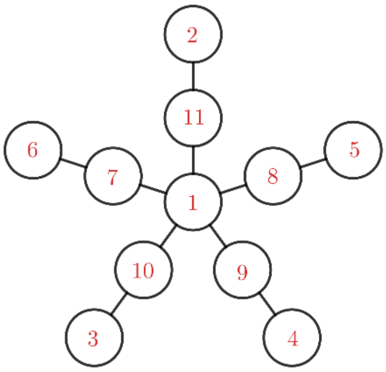
91. Součtový pětiúhelník

Napište do volných kroužků daného útvaru čísla od jedné do jedenácti tak, aby součet jednotlivých větví útvaru byl stejný.

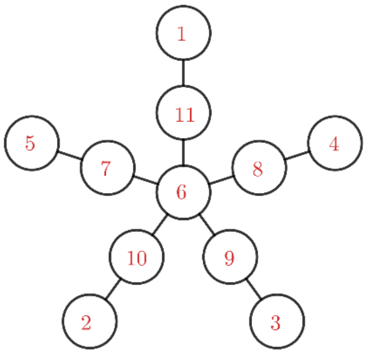


Obrázek 16. Zadání úlohy 91

Řešení:



Obrázek 17. Řešení úlohy 91



Obrázek 18. Řešení úlohy 91

92. Peníze

Rozdělte 2 250 Kč mezi čtyři lidi tak, aby druhý měl dvakrát víc než první, třetí dvakrát víc než druhý a čtvrtý dvakrát víc než třetí.

Řešení:

Množství peněz prvního označíme x Kč. Platí, že

$$2\,250 = x + 2x + 4x + 8x.$$

Tedy

$$x = 150.$$

První má 150 Kč, druhý 300 Kč, třetí 600 Kč a čtvrtý 1 200 Kč.

93. Neznámé číslo I.

Ze kterého čísla se pět procent z pěti procent rovná pěti.

Řešení:

Hledané číslo označme x. Platí, že

$$0{,}05 \cdot 0{,}05 \cdot x = 5.$$

Tedy

$$x = 2\,000.$$

Neznámé číslo je rovno dvěma tisícům.

Jiné řešení:

V této úvaze půjdeme odzadu. Je-li pět procent rovno pěti, pak je sto procent rovno stu. Hodnota sto je pět procent z hledaného čísla, to je tedy rovno $20 \cdot 100 = 2\,000$.

94. Neznámé číslo II.

Ze kterého čísla je součet jeho poloviny, třetiny, čtvrtiny a šestiny rovný číslu 240?

Řešení:

Neznámé číslo označíme x. Platí, že

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 240.$$

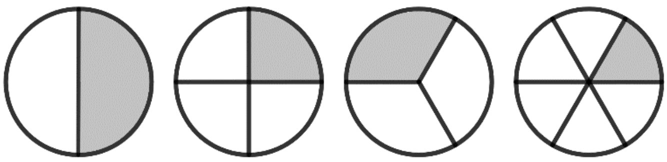
Tedy

$$x = 192.$$

Neznámé číslo je 192.

Jiné řešení:

Z níže uvedeného obrázku je patrné, že jedna šestina spolu s jednou třetinou tvoří dohromady jednu polovinu celku. Sečteme-li všechny čtyři díly k sobě, pak dostáváme



Obrázek 19. Řešení úlohy 94

jeden a čtvrt celku, což je pět čtvrtin. Takto velký celek je roven číslu 240. Po vydělení tohoto čísla pěti dostáváme hodnotu jedné čtvrtiny hledaného čísla. Hodnota hledaného čísla tedy bude $48 \cdot 4 = 192$.

95. Neznámé číslo III.

Ze kterého čísla se součet jeho třetiny, čtvrtiny a šestiny rovná 36?

Řešení:

Neznámé číslo označme x. Platí, že

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 36.$$

Tedy

$$x = 48.$$

Neznámé číslo je 48.

96. Neznámé číslo IV.

Ze kterého čísla se jeho polovina rovná pětinásobku rozdílu čísel 43 a 28?

Řešení:

Neznámé číslo označme x. Platí, že

$$\frac{x}{2} = 30.$$

Tedy

$$x = 150.$$

Neznámé číslo, jehož polovina se rovná pětinásobku rozdílu čísel 43 a 28, je 150.

Jiné řešení:

Pětinásobek rozdílu čísel 43 a 28 je 75 a tato hodnota představuje polovinu neznámého čísla. To má tedy hodnotu 150.

97. Chléb

Tvrdý chléb má hmotnost o 68 procent menší, než čerstvý chléb. Jakou hmotnost měl čerstvý chléb, když po ztvrdnutí měl hmotnost 300 g?

Řešení:

Hmotnost čerstvého chleba označme x. Platí, že

$$0{,}32x = 300.$$

Tedy

$$x = 937{,}5.$$

Čerstvý chléb měl hmotnost 937,5 g.

98. Štiky, sumci a kapři

V rybníce žije 24 štik, 6 sumců a zbylých 40 % jsou kapři. Kolik je celkem v rybníce ryb?

Řešení:

Počet všech ryb v rybníce označme x. Platí, že

$$24 + 6 + 0{,}4x = x.$$

Tedy

$$x = 50.$$

V rybníce žije celkem padesát ryb.

Jiné řešení:

Součet $24 + 6 = 30$ představuje šedesát procent ryb v rybníce. Po vydělení šedesáti dostáváme hodnotu jednoho procenta 0,5, pak sto procent je 50 ryb.

99. Mouka

Hotový chleba má hmotnost o 45 % větší než mouka, ze které je vyroben. Kolik mouky se spotřebuje na výrobu šedesáti dvou kilogramových bochníků?

Řešení:

Hmotnost mouky označme m. Platí, že

$$m + 0{,}45m = 2 \cdot 60.$$

Tedy

$$m = 82{,}8.$$

Na výrobu šedesáti dvou kilových bochníků chleba je potřeba 82,8 kg mouky.

Pozor na možné chybné složení rovnice takto

$$ch - 0{,}45ch = m,$$

kde ch vyjadřuje hmotnost chleba!

100. Čokoládový dort

Anička peče dort. Polovina hmotnosti je mouka, deset procent hmotnosti je mléko, $\frac{1}{20}$ hmotnosti je vejce, patnáct procent hmotnosti tvoří cukr a zbylých 300 g je čokoláda. Kolik kilogramů Aniččin dort váží?

Řešení:

Hmotnost dortu označme x. Platí, že

$$x = \frac{x}{2} + 0{,}1x + \frac{1}{20}x + 0{,}15x + 300.$$

Tedy

$$x = 1500.$$

Aniččin dort váží 1,5 kilogramu.

Jiné řešení:

Vše uvedeme v procentech (ingredience/počet procent): mouka/50 %, mléko/10 %, vejce/5 %, cukr/15 % a 300 g čokolády. Osmdesát procent tvoří ingredience dortu bez čokolády. Ta tedy tvoří dvacet procent hmotnosti dortu, celý dort pak váží 1500 g.

101. Od půlnoci do půlnoci

Kolik je nyní hodin, když čas, který uplyne do půlnoci, tvoří třetinu času, který uplynul od půlnoci?

Řešení:

Aktuální čas označíme x. Platí, že

$$3(24 - x) = x.$$

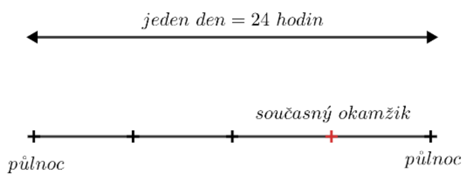
Tedy

$$x = 18.$$

Nyní je osmnáct hodin.

Jiné řešení:

Čas celého dne je tvořen součtem uplynulého času od půlnoci do současného okamžiku a času od současného okamžiku do půlnoci. Tvoří-li druhá zmiňovaná doba jednu třetinu doby první, pak čas celého dne tvoří čtyři části (viz obrázek níže). Tři části tvoří čas již uběhlý a jeden díl čas, který teprve přijde. Jeden tento díl má $\frac{24}{4} = 6$ hodin. Čas, který uplynul od půlnoci je roven osmnácti hodinám.



Obrázek 20. Řešení úlohy 101

102. Od poledne do půlnoci

Kolik je teď hodin, když čas, který uplynul od poledne, tvoří třetinu času, který uplyne do půlnoci?

Řešení:

Současný čas označme t. Platí, že

$$3(t - 12) = 24 - t.$$

Tedy

$$t = 15.$$

Nyní je patnáct hodin.

103. Kůň a motocykl

Jezdec na koni ujel vzdálenost mezi dvěma místy za dvacet hodin. Za kolik hodin ujede sedmkrát větší vzdálenost motocykl, jede-li čtyřikrát rychleji?

Řešení:

Rychlost jezdce označme v, dráhu jezdce označme s, pak rychlost motocyklu je $4v$ a jeho dráha $7s$. Označme t čas motocyklu. Platí, že

$$t = \frac{7s}{4\frac{s}{20}}.$$

Tedy

$$t = 35.$$

Motocykl ujede sedmkrát delší dráhu za 35 hodin.

Jiné řešení:

Jezdec na koni by sedmkrát delší dráhu ujel za 140 hodin. Motocykl je ale čtyřikrát rychlejší (jeho čas tedy musí být čtyřikrát menší). Čas motocyklu je tedy 35 hodin.

104. Dar pro kolegu

Pro koupi daru kolegovi z dílny měl zaplatit každý spolupracovník 150 Kč. Protože v den, kdy se peníze vybíraly, byli čtyři pracovníci nemocní, musel každý z přítomných (mimo oslavence) zaplatit o deset korun více. Kolik pracovníků měla dílna a kolik stál dar?

Řešení:

Označme x počet lidí, kteří pracují v dílně. Platí, že

$$(x-1)\cdot 150 = (x-5)\cdot 160.$$

Tedy

$$x = 65.$$

V dílně pracovalo šedesát pět pracovníků a dar pro kolegu stál 9 600 Kč.

105. Pracanti

Aleš a Bedřich pracovali v součtu třicet pět hodin. Aleš napracoval v první třetině víc hodin, než Bedřich. Kolik hodin odpracoval Aleš?

Řešení:

Počet hodin, které chlapci odpracovali v každé třetině stejně, označme x. Počet hodin, které odpracoval Aleš v první třetině navíc, než Bedřich označme a. Platí, že

$$a + 6x = 35.$$

Dostáváme tabulku řešení.

a	$6x$	Počet hodin odpracovaných Alešem
5	30	20
11	24	23
17	18	26
23	12	29
29	6	32

Tabulka 10. Řešení úlohy 105

106. Káva z automatu

Kelímek s kávou stojí deset korun. Káva je o osm korun dražší než kelímek. Kolik stojí kelímek?

Řešení:

Cenu kelímku označíme x. Platí, že

$$10 = x + (x + 8).$$

Tedy

$$x = 1.$$

Kelímek stojí jednu korunu.

Jiné řešení

Kdyby stál kelímek 2 Kč, pak by káva stála 10 Kč, což nelze. Kelímek tedy musí být levnější. Když bude jeho cena 1 Kč, pak bude stát káva 9 Kč a jejich společná cena bude 10 Kč, což požadujeme.

107. Míč

Shozený míč se odrazí vždy jen do poloviny výšky, ze které byl hozen. Při třetím odrazu od země míč vyskočil do výšky 1 m. Z jaké výšky byl míč shozen?

Řešení:

Prvotní výšku míče označíme x. Platí, že

$$\frac{x}{8} = 1.$$

Tedy

$$x = 8.$$

Míč byl shozen z výšky 8 m.

Jiné řešení:

Výška, do které míč po odražení vystoupá, je zároveň výškou, ze které míč bude následně zase padat dolů. Míč vyskočil při třetím odrazu do výšky jednoho metru, to znamená, že padal z výšky dvou metrů. Při druhém odrazu míč vyskočil do výšky dvou metrů, to znamená, že padal z výšky čtyř metrů. Když byl míč spuštěn, po prvním odrazu vyskočil do výšky čtyř metrů, to znamená, že byl spuštěn z výšky osmi metrů.

108. Šnek

Studna je hluboká třicet metrů a na jejím dně je šnek. Během dne vyleze o tři metry výše, ale v noci o dva metry zase sklouzne. Kolikátý den se objeví nahoře?

Řešení:

Zjišťujeme, za kolik dní šnek vyleze 27 m, zbylé tři metry pak vyleze během následujícího dne. Označme d počet dní, za kterých šnek vyleze do dané výšky. Platí, že

$$3d - 2d = 27.$$

Tedy

$$d = 27.$$

Šnek se tedy objeví nahoře 28. den.

109. Myši

Kdyby bylo myší třikrát víc, než jich je a ještě třicet k tomu, bylo by jich šedesát. Kolik je myší?

Řešení:

Počet myší označme m. Platí, že

$$3m + 30 = 60.$$

Tedy

$$m = 10.$$

Myší je celkem deset.

Jiné řešení:

Šedesát bez třiceti je třicet. Z hoho je myší jedna třetina, tedy deset.

110. Kombajny

Pět kombajnů oseje za dvanáct dní 36 arů pole. Za kolik dní oseje šestnáct kombajnů 48 arů?

Řešení:

Označíme x počet dní potřebných k osetí 48 arů šestnácti kombajny. Platí, že

$$\frac{3}{5} \cdot 16x = 48.$$

Tedy

$$x = 5.$$

Kombajny osejí za pět dní 48 arů pole.

Jiné řešení:

Šestnáct kombajnů oseje za den $\frac{48}{5}$ A, pak za pět dní osejí 48 A.

111. Kočky, motýli, pavouci a psi

Psů, koček, pavouků a motýlů je vždy stejný počet a mají dohromady 620 nohou. Kolik jich je dohromady?

Řešení:

Počet všech zvířat označíme x. Platí, že

$$4x + 4x + 8x + 6x = 620.$$

Tedy

$$x = 128.$$

Zvířat je celkem 128.

112. Pavlína

Anička je vysoká 158 cm, Eliška 164 cm a Maruška 173 cm. Jak vysoká je Pavlína, když víme, že aritmetický průměr výšek všech čtyř dívek je 168 cm?

Řešení:

Výšku Pavlíny označíme x. Platí, že

$$\frac{158 + 164 + 173 + x}{4} = 168.$$

Tedy

$$x = 177 \text{ cm}$$

Pavlína je vysoká 177 cm.

113. Kečup a pivo

Váha je v rovnováze, když jsou na jedné misce vah tři plechovky piva a na druhé misce půl kila kečupu a jedna plechovka piva. Jakou hmotnost má jedna plechovka piva?

Řešení:

Hmotnost jedné plechovky označme p. Platí, že

$$3p = p + \frac{1}{2}.$$

Tedy

$$p = 0{,}25 \text{ kg}.$$

Jedna plechovka od piva váží čtvrt kila.

Jiné řešení:

Dvě plechovky piva odpovídají hmotnosti půl kila kečupu, pak jedna plechovka odpovídá hmotnosti 0,25 kg.

114. Bochník chleba

Na jedné misce vah, které jsou v rovnováze, je bochník chleba, na druhé je tři čtvrtiny bochníku a půlkilové závaží. Jakou hmotnost má bochník?

Řešení:

Hmotnost bochníku označme b. Platí, že

$$b = \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}.$$

Tedy

$$b = 2 \text{ kg}.$$

Bochník chleba má hmotnost dvě kila.

Jiné řešení:

Půlkilové závaží představuje jednu čtvrtinu váhy bochníku. Celý bochník pak má hmotnost $0{,}5 \cdot 4 = 2$ kg.

115. Oběd

Výše ceny oběda je rovna součtu 40 Kč a poloviny ceny oběda. Kolik oběd stojí?

Řešení:

Cenu oběda označme O. Platí, že

$$O = 40 + \frac{1}{2}O.$$

Tedy

$$O = 80.$$

Oběd stojí osmdesát korun.

Jiné řešení:

Je-li cena oběda rovna 40 Kč a poloviny ceny oběda, pak částka 40 Kč představuje hodnotu poloviny oběda. Cena oběda je pak 80 Kč.

116. Opracovaná součástka

Součástka měla před opracováním hmotnost 420 g. Jakou hmotnost má opracovaná součástka, když hmotnost odpadu je dvacetkrát menší než hmotnost opracované součástky?

Řešení:

Hmotnost opracované součástky označme Os. Platí, že

$$420 = Os + \frac{1}{20}Os.$$

Tedy

$$Os = 400.$$

Opracovaná součástka má hmotnost 400 g

117. Kočky a myši

Tři kočky chytí tři myši za tři minuty.

a. Za kolik minut chytí jedna kočka jednu myš?

Řešení:

Označíme k počet minut potřebných k chycení myši, jednou kočkou. Platí, že

$$\frac{t}{3} + \frac{t}{3} + \frac{t}{3} = 3.$$

Tedy

$$t = 3.$$

Jedna kočka chytí myš za 3 minuty.

b. Kolik myší chytí jedna kočka za jednu minutu?

Řešení:

Za tři minuty chytí kočka jednu myš, pak za minutu to bude $\frac{1}{3}$ myši.

c. Kolik koček chytí jednu myš za jednu minutu?

Řešení:

Označme n počet koček. Platí, že

$$k\frac{1}{3} = 1.$$

Tedy

$$k = 3.$$

Za minutu chytí jednu myš tři kočky.

Výše uvedené výpočty můžeme zobecnit takto

$$k\frac{t}{3} = m,$$

kde t je čas potřebný k chycení myši, m je počet chycených myší, k je počet koček.

118. Vyšší produkce

Denní plán výroby byl o jednu pětinu překročen a bylo tak vyrobeno sto dvacet součástek. Kolik součástek bylo v plánu vyrobit?

Řešení:

Původní plán byl vyrobit x součástek. Platí, že

$$x + \frac{x}{5} = 120.$$

Tedy

$$x = 100.$$

V původním plánu bylo vyrobit 100 součástek.

Jiné řešení:

Trojčlenkou

$$1 \text{ celek} \ldots x \text{ součástek}$$
$$\frac{6}{5} \text{celku} \ldots 120 \text{ součástek}$$

Tedy

$$x = 100 \text{ součástek.}$$

119. Bonbóny

V krabici je určitý počet bonbónů. Jedno dítě snědlo třetinu, druhé dítě snědlo třetinu zbytku a třetí zase třetinu, toho co zbylo. V krabici zbyde osm bonbónů. Kolik jich tam bylo původně?

Řešení:

Původní počet bonbónů označme x. Platí, že

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9}x \cdot \frac{1}{3} + 8 = x.$$

Tedy

$$x = 27.$$

V krabici bylo původně 27 bonbónů.

120. Vysoký Čeněk

Čeněk měří 100 cm a ještě polovinu své výšky. Kolik centimetrů měří?

Řešení:

Výšku Čeňka označíme x. Platí, že

$$100 + \frac{x}{2} = x.$$

Tedy

$$x = 200.$$

Čeněk je vysoký 200 cm.

121. Otec a tři synové

Otci je 45 let a jeho synům je 15, 11 a 7 let. Za kolik let se bude součet věků tří synů rovnat věku otce?

Řešení:

Počet let, za kterých se součet věků tří synů rovná věku otce označíme x. Platí, že

$$45 + x = 15 + 11 + 7 + 3x.$$

Tedy

$$x = 6.$$

Za šest let bude věk otce stejný, jako součet věků jeho tří synů.

122. Maminka a syn

Mamince je 57 let, synovi 24 let. Za kolik let bude mamince dvakrát více než synovi?

Řešení:

Počet let, za kterých bude mamince dvakrát více, než synovi označíme x. Platí, že

$$57 + x = 2(x + 24).$$

Tedy

$$x = 9.$$

Mamince bude dvakrát více než synovi za devět let.

123. Pavel

Když bylo Pavlovi osm let, bylo jeho otci třicet jedna let. Nyní je otec dvakrát starší, než jeho syn. Jak je nyní Pavel starý?

Řešení:

Počet let uplynulých od toho, co bylo Pavlovi osm let, označíme x. Platí, že

$$2(8 + x) = 31 + x.$$

Tedy

$$x = 15.$$

Pavlovi je nyní patnáct let.

124. Verunčin věk

Verunka na dotaz, kolik je jí let odpověděla takto: „Za dva roky mi bude dvakrát tolik, kolik mi bylo před pěti lety.“ Určete Verunčin věk.

Řešení:

Verunčin současný věk označme V. Platí, že

$$V + 2 = 2(V - 5).$$

Tedy

$$V = 12.$$

Verunce je dvanáct let

125. Neznámá čísla

Pro která dvě čísla platí, že jejich součet je sto a rozdíl osmdesát?

Řešení:

Jedno z čísel označme A a druhé B. Platí, že

$$A + B = 100,$$

$$A - B = 80.$$

Tedy

$$A = 90,$$
$$B = 10.$$

Jiné řešení:

Jedno číslo je o osmdesát větší než druhé. Jejich součet je sto. Usuzováním například čísla 95 a 5, jejich součet je sice sto, ale rozdíl je devadesát. Další dvojice čísel 85 a 15 také nevyhovuje. Hledaná dvojice čísel leží mezi těmito dvěma uvedenými: dvojice čísel 90 a 10 již zadané podmínky splňuje.

126. Brigáda

Dívka musí vypočítat čtyřicet příkladů. Za jeden správně vypočítaný příklad dostane padesát korun, ale za jeden špatně vypočítaný příklad se jí sto korun odečte. Po vypočítání příkladů dostala dívka 200 Kč. Kolik příkladů vypočítala správně?

Řešení:

Počet správně vypočítaných příkladů označme x a počet špatně vypočítaných příkladů y. Platí, že

$$x + y = 40,$$

$$50x + (-100y) = 200.$$

Tedy

$$x = 28,$$
$$y = 12.$$

Správně vypočítala dívka 28 příkladů.

127. Brnění

Rytíř v brnění má 55 kg. Rytíř má o 50 kg větší hmotnost než brnění. Jakou hmotnost má brnění?

Řešení:

Hmotnost rytíře označíme R a brnění B. Platí, že

$$R + B = 55,$$

$$R = 50 + B.$$

Tedy

$$B = 2{,}5.$$

Brnění váží dva a půl kilogramu.

Jiné řešení:

Rytíř má o 50 kg větší hmotnost než brnění, pak má tedy rytíř hmotnost větší než 50 kg, protože kdyby to bylo větší nebo rovno 50 kg, pak by brnění nevážilo nic (kdyby mělo brnění 5 kg, pak by byl rytíř o 45 kg těžší, musíme tedy snížit váhu brnění a zároveň zvýšit váhu rytíře tak, aby vzájemný rozdíl byl 50 kg). Rozdělíme si zbylých 5 kg na půl, aby stejné části připadly, jak hmotnosti rytíře, tak hmotnosti brnění. Rytíř tedy váží 52,5 kg a brnění má 2,5 kg.

128. Túra

Turista i s batohem má hmotnost 60 kg. Batoh je třikrát lehčí, než turista. Jakou hmotnost má turista bez batohu?

Řešení:

Hmotnost turisty označme t, batohu b. Platí, že

$$t + b = 60,$$

$$t = 3b.$$

Tedy

$$t = 45.$$

Turista váží čtyřicet pět kilogramů.

129. Kachny

Na nebi a na vodě jsou kachny. Kdyby jedna kachna spadla z nebe do vody, byl by na nebi i na vodě stejný počet kachen. Kdyby jedna kachna z vody vyletěla do nebe, bylo by na nebi dvakrát víc kachen než na vodě. Kolik kachen je na nebi a kolik na vodě?

Řešení:

Počet kachen na nebi označme x a jejich počet na vodě y. Platí, že

$$x - 1 = y + 1$$

$$2(y - 1) = x + 1$$

Tedy

$$x = 7,$$
$$y = 5.$$

Na nebi je sedm kachen a na vodě jich je pět.

130. Tašky

Manželé nesou tašky a manželka jich nese více. Kdyby manželka jednu svojí tašku předala manželovi, nesli by oba stejný počet tašek. Kdyby naopak vzala od manžela ještě jednu tašku, nesla by pětkrát víc tašek. Kolik tašek každý z nich nese?

Řešení:

Počet tašek manžela označme x a počet tašek manželky y. Platí, že

$$y - 1 = x + 1,$$
$$y + 1 = 5(x - 1).$$

Tedy

$$x = 2,$$
$$y = 4.$$

Manželka nese čtyři a manžel dvě tašky.

131. Škola

Ve škole je 250 dětí. Každé páté má vyznamenání. Vyznamenání má 18 procent chlapců a 23 procent dívek. Kolik chlapců a dívek je ve škole?

Řešení:

Počet chlapcůoznačíme ch a počet dívek d. Platí, že

$$ch + d = 250$$

$$0{,}18ch + 0{,}23d = 50$$

Tedy

$$ch = 150,$$
$$d = 100.$$

Ve škole je sto padesát chlapců a sto dívek.

132. Mezinárodní tábor

Na mezinárodním táboře bylo 62 dětí. Slováků bylo dvakrát víc než Čechů, Poláků a Čechů bylo dohromady stejně jako Slováků a Slovinců, Slovinců bylo o pět méně než Slováků. Kolik bylo Poláků, Slováků, Čechů a Slovinců?

Řešení:

Počet Slováků označíme SK, Slovinců SL, Čechů CZ a Poláků PL. Platí, že

$$\mathrm{SK} + \mathrm{SL} + \mathrm{CZ} + \mathrm{PL} = 62$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{SK} = \mathrm{CZ}$$

$$\mathrm{CZ} + \mathrm{PL} = \mathrm{SL} + \mathrm{SK}$$

$$\mathrm{SL} = \mathrm{SK} - 5$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{SK} &= 18, \\ \mathrm{SL} &= 13, \\ \mathrm{PL} &= 22, \\ \mathrm{CZ} &= 9. \end{aligned}$$

Složení mezinárodního tábora pro děti tvoří osmnáct Slováků, devět Čechů, třináct Slovinců a dvacet dva Poláků.

Jiné řešení:

Je-li Poláků a Čechů dohromady stejně jako Slováků a Slovinců, tvoří dvě stejně početné skupiny (CZ, PL a SK, SL). Počet dětí v každé skupině je tedy $\frac{62}{2} = 31$. Slovinců je o pět méně než Slováků. Kdybychom přičetli k počtu dětí ve skupině SK, SL pět, pak by tato skupina měla početně stejně dětí jako dvojnásobný počet Slováků. Je-li počet 36 dětí roven dvojnásobnému počtu Slováků, pak je jejich počet 18 dětí. Čechů je tedy 9, Slovinců je 13 a Poláků 22.

133. Bonbóny

Aleš má pět sáčků bonbónů. Celkový součet bonbónů ve čtyřech sáčcích je 84. V pátém je o čtyři bonbóny méně než je průměrný počet bonbónů ve všech pěti sáčcích. Kolik bonbónů je v pátém sáčku?

Řešení:

Počet bonbónů v jednotlivých sáčcích označme: $1., 2., 3., 4., 5.$ Platí, že

$$\frac{1. + 2. + 3. + 4. + 5.}{5} - 4 = 5,$$

$$1. + 2. + 3. + 4. = 84.$$

Tedy

$$5. = 16.$$

Aleš má v pátém sáčku šestnáct bonbónů.

134. Hrad Karlštejn

Na hrad Karlštejn přišlo sto lidí. Dospělí platili vstupné 30 Kč a děti 10 Kč. Kolik bylo dětí a kolik bylo dospělých, když celkem zaplatili 2 300 Kč?

Řešení:

Počet dětí označme d, počet dospělých D. Platí, že

$$d + D = 100$$

$$10d + 30D = 2\,300$$

Tedy

$$D = 65,$$
$$d = 35.$$

Na hrad Karlštejn přišlo šedesát pět dospělých a třicet pět dětí.

Jiné řešení:

Všechny tři hodnoty lze vydělit deseti a uvažovat vstupné 3 Kč, 1 Kč a zaplacených 230 Kč. Následným usuzováním lze hledat počet dospělých a dětí: například $70 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 230$. Ale počet vstupenek je pouze devadesát. Aby se tento počet zvýšil na sto, je nutné, aby se počet tříkorunových vstupenek snížil a jednokorunových zvýšil. Opětným usuzováním
$65 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 230$, po vynásobení rovnosti deseti dostáváme $65 \cdot 30 + 35 \cdot 10 = 2300$. Tedy na hrad Karlštejn přišlo šedesát pět dospělých a třicet pět dětí.

135. Eva a maminka

Letos je Eva pětkrát mladší než její maminka. Za osmnáct let bude maminka dvakrát starší než dcera. Kolik let je oběma dnes?

Řešení:

Aktuální věk Evy označme E, aktuální věk maminky M. Platí, že

$$5E = M,$$

$$2(E + 18) = M + 18.$$

Tedy

$$E = 6,$$
$$M = 30.$$

Mamince je letos třicet let a její dceři Evě šest let.

136. Martin a jeho rodiče

Martin říká: „ Jsem třikrát mladší než táta. Táta je o tři roky starší než máma. Máma je o šest let mladší než součet poloviny, třetiny, pětiny a šestiny jejího věku.“ Kolik je Martinovi let?

Řešení:

Věk Martina označme Mar, táty T a mámy M. Platí, že

$$3Mar = T,$$

$$M + 6 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}M + \frac{1}{5}M + \frac{1}{6}M,$$

$$T = M + 3.$$

Tedy

$$Mar = 11.$$

Martinovi je jedenáct let.

Jiné řešení:

V této úvaze půjdeme odzadu. Věk matky je roven jednomu celku a jedné pětině, tedy šesti pětinám jejího věku. To je sníženo o šest let, tedy

$$\textit{věk matky} = \frac{6}{5}\textit{věk matky} - 6 \text{ let}.$$

Dále z této rovnosti plyne

$$6 \text{ let} = \frac{1}{5}\textit{věk matky},$$

pak

$$30 \text{ let} = \frac{5}{5}\textit{věk matky}.$$

Otec je o tři roky starší než matka, pak

$$\textit{věk otce} = \frac{6}{5}\textit{věk matky} - 3 \text{ roky}.$$

Věk otce je tedy 33 let. Martin je třikrát mladší než otec, jeho věk je jedenáct let.

137. Tři generace

Dědovi, otci a vnukovi je dohromady 136 let. Otci je o třetinu dědova věku méně, než dědovi. Vnukův věk je třetina věku otce. Jak jsou děda, otec a vnuk staří?

Řešení:

Věk dědy označme d, věk otce t a věk vnuka v. Platí, že

$$d + t + v = 136,$$
$$\frac{2}{3}d = t,$$
$$\frac{1}{3}t = v.$$

Tedy

$$d = 72,$$
$$t = 48,$$
$$v = 16.$$

Dědovi je 72 let, otci 48 let a vnukovi 16 let.

138. Hoši Čermákovi

Pan Čermák má pět synů, jsou narozeni vždy po dvou letech. Součet věků všech synů je roven věku pana Čermáka. Pan Čermák je o 24 let starší než jeho nejstarší syn a pětkrát tak starý jako jeho prostřední syn. Kolik let je panu Čermákovi a jeho synům?

Řešení:

Věk pana Čermáka označíme Č a věk jeho nejstaršího syna N. Platí, že

$$\check{C} = N + (N - 2) + (N - 4) + (N - 6) + (N - 8),$$
$$\check{C} = N + 24,$$
$$\check{C} = 5(N - 4).$$

Tedy

$$N = 11,$$
$$\check{C} = 35.$$

Panu Čermákovi je 35 let, věky jeho synů jsou 11, 9, 7, 5 a 3.

Jiné řešení:

Nejstarší syn je o 24 let mladší než jeho otec, druhý o 26 let a prostřední o 28 let. Pan Čermák je zároveň pětkrát starší než prostřední syn. To znamená, že věk prostředního syna tvoří jednu pětinu věku pana Čermáka. Zbylé čtyři pětiny věku pana Čermáka odpovídají 28 letům. Pak věk pana Čermáka je tedy 35 let. Jeho synům je 11, 9, 7, 5, 3.

139. Pan Bláha

Celé rodině Bláhových je dohromady 99 let. Eva je o 6 let mladší, než je polovina počtu let její matky, paní Bláhové. Zdeněk je o 6 let mladší, než je polovina počtu let jeho otce, pana Bláhy. Pan Bláha je o 6 let starší než jeho žena. Jak je pan Bláha starý?

Řešení:

Věk pana Bláhy označme PB, věk paní Bláhové PaB, věk Zdeňka Z a věk Evy E. Platí, že

$$PaB + PB + Z + E = 99,$$

$$E = \frac{1}{2}PaB - 6,$$

$$Z = \frac{1}{2}PB - 6,$$

$$PaB = PB - 6.$$

Tedy

$$PB = 40.$$

Panu Bláhovi je čtyřicet let.

140. Tři synové a otec

Otec má tři syny, kteří jsou staří čtyři, šest a osm let. Věk otce je nyní dvakrát větší než součet věků synů. Za kolik let se součet věků synů bude rovnat věku otce? Kolik je nyní otci let?

Řešení:

Věk otce označíme o a počet let, za kterých bude součet věků synů shodný s věkem otce, označíme x. Platí, že

$$2(4 + 6 + 8) = o,$$

$$4 + x + 6 + x + 8 + x = o + x.$$

Tedy

$$x = 9,$$
$$o = 36.$$

Za devět let bude součet věků synů shodný s věkem otce. Nyní je otci třicet šest let.

141. Švestky a jablka

Tři švestky stojí stejně jako dvě jablka. Kolik jablek má stejnou cenu jako 24 švestek?

Řešení:

Cenu za jablko označme J, za švestku Š, x udává počet jablek. Platí, že

$$3Š = 2J,$$
$$x \cdot J = 24Š.$$

Tedy

$$x = 16.$$

Šestnáct jablek má stejnou cenu jako dvacet čtyři švestek.

Jiné řešení:

Cena za tři švestky je stejná jako za dvě jablka. Vydělíme-li počet 24 švestek třemi, zjistíme, kolik skupin po třech švestkách se do tohoto počtu vejde $24 \div 3 = 8$. Jedna tato skupina odpovídá dvěma jablkům, celkem pak 16 jablkům.

142. Pomeranč a jablko

Pomeranč je dvakrát dražší než jablko. Kolikrát dražší je osmnáct jablek než tři pomeranče?

Řešení:

Cenu za jeden pomeranč označme p, za jedno jablko j. Hodnota x bude určovat kolikrát je osmnáct jablek dražších než tři pomeranče. Platí, že

$$p = 2j.$$

$$3p \cdot x = 18j.$$

Tedy

$$x = 3.$$

Osmnáct jablek je třikrát dražší než tři pomeranče.

Jiné řešení:

Cena za jeden pomeranč odpovídá ceně za dvě jablka. Pak cena za šest pomerančů odpovídá ceně tří pomerančů. Jablek je ale třikrát více a tak bude i jejich cena třikrát vyšší, než je cena tří pomerančů.

143. Pavouci a motýli I.

Pavouci a motýli mají dohromady 430 nohou a 60 hlav. Kolik je pavouků a kolik motýlů?

Řešení:

Počet pavouků označme P, počet motýlů M. Platí, že

$$P + M = 60,$$

$$8P + 6M = 430.$$

Tedy

$$P = 35,$$
$$M = 25.$$

Pavouků je celkem třicet pět a motýlů dvacet pět.

144. Pavouci a motýli II.

Pavouci a motýli mají dohromady 290 nohou a 42 hlav. Kolik je pavouků a motýlů?

Řešení:

Označme počet pavouků p a počet motýlů m. Platí, že

$$8p + 6m = 290,$$

$$p + m = 42.$$

Tedy

$$p = 19,$$
$$m = 23.$$

Pavouků je celkem devatenáct a motýlů dvacet tři.

145. Krávy a husy

Krav a hus je stejný počet a mají dohromady 1 212 nohou. Kolik je krav (hus)?

Řešení:

Počet krav označíme K, hus H. Platí, že

$$K = H,$$

$$4K + 2H = 1\,212.$$

Tedy

$$K = H = 202.$$

Krav i hus je vždy dvě stě dva.

146. Vrabci, psi, brouci a pavouci

Vrabců je o jednoho méně než psů. Psů je o jednoho méně než brouků. Brouků je o jednoho méně než pavouků. Dohromady mají 540 nohou. Kolik je psů?

Řešení:

Počet vrabců označme v, počet psů p, počet brouků b a počet pavouků pa. Platí, že

$$v + 1 = p,$$

$$p + 1 = b,$$

$$b + 1 = pa,$$

$$2v + 4p + 6b + 8pa = 540.$$

Tedy

$$p = 26.$$

Psů je dvacet šest.

147. Vrabci, kočky a brouci

Vrabců je o jednoho víc než koček, koček je o jednu více než brouků. Kolik je vrabců, koček a brouků, když dohromady mají 260 nohou?

Řešení:

Počet vrabců označme V, počet koček K a počet brouků B. Platí, že

$$V = K + 1$$

$$B = K - 1$$

$$2V + 4K + 6B = 260$$

Tedy

$$K = 22,$$
$$V = 23,$$
$$B = 21.$$

Koček je 22, vrabců 23 a brouků 21.

148. Husy a kočky

Kočky a husy mají 154 nohou a 54 hlav. Kolik je koček a kolik je hus?

Řešení:

Počet koček označme K, hus H. Platí, že

$$4K + 2H = 154,$$

$$K + H = 54.$$

Tedy

$$K = 23,$$
$$H = 31.$$

Hus je třicet jedna a koček dvacet tři.

149. Brouci a pavouci

Honza má v krabičce brouky a pavouky, celkem osm kusů. Kolik je kterých, když jeden pavouk přišel někde o jednu nohu a hmyz má dohromady 53 nohou?

Řešení:

Počet pavouků označíme p a počet brouků b. Platí, že

$$p + b = 8,$$

$$(8p - 1) + 6b = 53.$$

Tedy

$$b = 5,$$
$$p = 3.$$

Honza má v krabičce pět brouků a tři pavouky.

150. Daňci a pávi

Ve výběhu jsou daňci a pávi. Dohromady mají třicet očí a čtyřicet čtyři nohou. Kolik jich je ve výběhu?

Řešení:

Označme počet pávů p a počet daňků d. Platí, že

$$p + d = 30$$

$$2p + 4d = 44$$

Tedy

$$p = 8,$$
$$d = 7.$$

Ve výběhu bylo osm pávů a sedm daňků.

151. Žirafy, pštrosi a anakondy

V jedné kleci v ZOO jsou společně žirafy, pštrosi a anakondy. V kleci je celkem jedenáct hlav, dvacet nohou a je tam dvakrát víc zvířat se čtyřma nohama než se dvěma nohama. Kolik je v ZOO anakond?

Řešení:

Počet žiraf označme ž, počet pštrosů p a počet anakond a. Platí, že

$$\check{z} + p + a = 11,$$

$$4\check{z} + 2p = 20,$$

$$\check{z} = 2p.$$

Tedy

$$p = 2,$$
$$\check{z} = 4,$$
$$a = 5.$$

V kleci bylo pět anakond.

152. Tankové lodě

Deset tankových lodí vyprázdní za deset dní deset nádrží. Za kolik dní vyprázdní jedna loď jednu nádrž?

Řešení:

Jestliže deset lodí vyprázdní za deset dní deset nádrží, pak jedna loď za deset dní vyprázdní jednu nádrž.

Jiné řešení:

Obecný vztah pro řešení této úlohy je tento

$$\frac{1}{10}ld = n,$$

kde l je počet lodí, d počet dní a n počet nádrží. Pak jedna loď vyprázdní jednu nádrž za deset dní.

153. Jablka

Šest dětí sní za sedm dní sto šedesát osm jablek. Za kolik dní snědí čtyři děti sto sedmdesát šest jablek?

Řešení:

Šest dětí sní za 7 dní 168 jablek, pak jedno dítě sní za 7 dní 28 jablek, za jeden den to jsou pak čtyři jablka. Čtyři děti snědí za den šestnáct jablek, 176 jablek tedy snědí za 11 dní.

Čtyři děti budou jíst sto sedmdesát šest jablek jedenáct dní.

154. Roury

Bazén o objemu 120 hl naplní čtyři roury za šest hodin. Jak velký objem má bazén, který naplní pět stejně výkonných rour za čtrnáct hodin?

Řešení:

Čtyři roury naplní vodou objem 120 hl za šest hodin, pak jedna roura naplní za hodinu objem 5 hl. Pět rour tedy naplní za čtrnáct hodin množství 350 hl.

155. Koně

Představte si, že vlastníte několik koní a zásobu sena pro ně na dvanáct dní. Váš soused má o polovinu sena více než vy, ale také dvojnásobný počet koní.

a. Na kolik dní by sousedovy zásoby sena vystačily vaším koním?
b. Na kolik dní by vaše zásoby sena vystačily sousedovým koním?

a.

Zásobu vašeho sena označíme s. Sousedovy zásoby sena jsou $\frac{3}{2}s$. Počet dní, na které vystačí sousedova zásoba sena pro vaše koně, označíme x.

Řešení:

Trojčlenkou řešíme přímou úměrnost

$$s \ldots 12 \text{ dní},$$
$$\frac{3}{2}s \ldots x \text{ dní}.$$

Tedy

$$x = 18 \text{ dní}.$$

Jiné řešení:

Platí, že

$$x = \frac{12 \cdot \frac{3}{2}s}{s}.$$

Tedy

$$x = 18.$$

Sousedovy zásoby sena vystačí vaším koním na osmnáct dní.

Jiné řešení:

Počet dní, na které vystačí vaše zásoba sena pro vaše koně je 12 a soused má o polovinu sena více. Jeho zásoba sena by vašim koním vystačila na stejný počet dní, a navíc ještě na jejich polovinu, celkem tedy na 18 dní.

b.

Počet vašich koní označme k, počet sousedových koní je $2k$. Počet dní, na které vystačí sousedova zásoba sena pro naše koně, označme y.

Řešení:

Trojčlenkou řešíme přímou úměrnost

$$k \ldots 12 \text{ dní},$$
$$2k \ldots y \text{ dní}.$$

Tedy

$$y = 6 \text{ dní}.$$

Jiné řešení:

Platí, že

$$y = \frac{12 \cdot k}{2k}.$$

Tedy

$$y = 6.$$

Vaše zásoby sena by sousedovým koním vystačily na šest dní.

Jiné řešení:

Dvojnásobný počet koní spotřebuje seno za poloviční dobu. Tedy za šest dní.

156. Cihly

Pán má malé auto a vozí cihly ze stavebnin. Když pojede třikrát denně, bude mít potřebné množství cihel za dvanáct dní. Kolikrát za den musí jet pán do stavebnin, aby měl potřebné množství cihel již za devět dní?

Řešení:

Trojčlenkou řešíme nepřímou úměrnost

$$12 \text{ dní} \ldots 3 \text{ denní jízdy},$$
$$9 \text{ dní} \ \ldots\ x \text{ denních jízd}.$$

Tedy

$$x = 4 \text{ denní jízdy}.$$

Jiné řešení:

Hledáme celkový počet jízd a ten je roven

$$3 \cdot 12 = 36.$$

Kolikrát musíme vynásobit číslo devět, abychom dostali třicet šest? Bude se tedy jednat o čtyři denní jízdy.

157. Nízko kofeinová kola

Omylem jsme si místo plechovky běžné koly koupili plechovku koly obsahující pouze 5 procent kofeinu jako té běžné koly. Kolik takovýchto plechovek musíme vypít, abychom získali stejné množství kofeinu jako v případě běžné koly?

Řešení:

Označme x množství plechovek potřebných k získání sta procent kofeinu. Platí, že

$$x = \frac{100}{5} = 20.$$

Tedy

$$x = 20.$$

Museli bychom vypít 20 plechovek, abychom dosáhli stejného účinku kofeinu jako u stoprocentní kofein koly.

Jiné řešení:

Z jedné plechovky získáme pět procent původně zamýšleného množství kofeinu, pak z dvaceti to bude sto procent původně zamýšleného množství kofeinu.

158. Tři tesaři

Pět tesařů by udělalo práci za 12 dní. V pěti pracovali tři dny, pak dva museli odejít. Za jak dlouho práci dokončili tři tesaři?

Řešení:

Označme x počet dní za které tři tesaři dokončí práci. Jeden tesař za den udělá $\frac{1}{60}$ práce. Platí, že

$$\frac{3}{12} + x \cdot \frac{1}{20} = 1.$$

Tedy

$$x = 15.$$

Tři tesaři dokončí práci za 15 dní.

Jiné řešení:

Označme x počet dní za které tři tesaři dokončí práci. Za den pět tesařů udělá $\frac{1}{12}$ práce, za tři dny udělají $\frac{1}{4}$ práce. Tři tesaři udělají za den $\frac{1}{20}$ práce. Budou tedy pracovat ještě 15 dní.

159. Natírání plotu

Danovi trvá 3 hodiny natřít plot a Luďkovi by to trvalo 6 hodin. Jak dlouho by natírali plot společně?

Řešení:

Dan natře za jednu hodinu $\frac{1}{3}$ plotu, Luděk $\frac{1}{6}$. Počet hodin, za které natřou plot oba společně, označme x. Platí, že

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 1.$$

Tedy

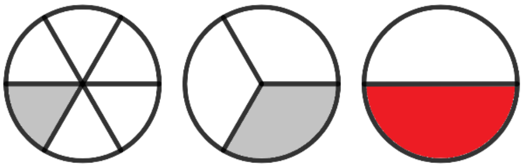
$$x = 2.$$

Danovi a Luďkovi bude natření plotu trvat dvě hodiny.

Jiné řešení:

Trvá-li Danovi natřít plot 3 hodiny, pak za jednu hodinu natře jednu třetinu plotu, podobně Luďkovi trvá natřít plot 6 hodin, za hodinu tedy natře jednu šestinu plotu. Jak může být patrné z obrázku níže

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$



Obrázek 21. Řešení úlohy 159

Oba kluci tedy společně za jednu hodinu natřou polovinu plotu. Celý plot tedy společně natřou za dvě hodiny.

160. Lev, vlk a liška

Lev sežere ovci za čtyři hodiny, vlk za šest hodin a liška za dvanáct hodin. Za jak dlouho by sežrali ovci všichni tři dohromady?

Řešení:

Za jednu hodinu sežere lev $\frac{1}{4}$ ovce, vlk $\frac{1}{6}$ a liška $\frac{1}{12}$. Společně sežerou jednu ovci za x hodin. Platí, že

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}=1.$$

Tedy

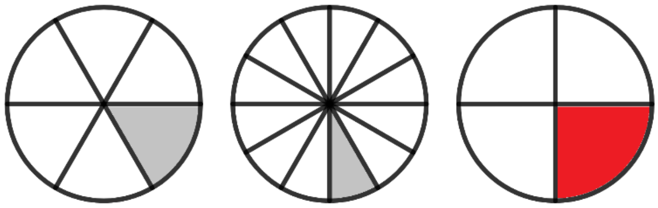
$$x=2.$$

Všichni tři sežerou ovci za dvě hodiny.

Jiné řešení:

Z níže uvedeného obrázku je patrné, že

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$



Obrázek 22. Řešení úlohy 160

Pak za jednu hodinu sežerou všichni tři dohromady polovinu ovce. Celou ovci tak sežerou za dvě hodiny.

161. Dělníci

Osm dělníků by udělalo práci za devět dní. Pracovali čtyři dny a pak jim přišli na pomoc dva stejně výkonní dělníci. Za kolik dní vykonali práci?

Řešení:

Osm dělníků vykoná za den $\frac{1}{9}$ celé práce, jeden dělník tedy vykoná za jeden den $\frac{1}{72}$ celkové práce. Dobu, za kterou pracuje deset dělníků, označme x dní. Platí, že

$$\frac{4}{9}+\frac{10}{72}\cdot x=1.$$

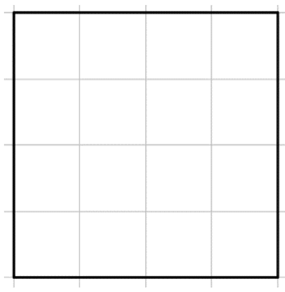
Tedy

$$x=4.$$

Dělníci měli celkovou práci hotovou za osm dní.

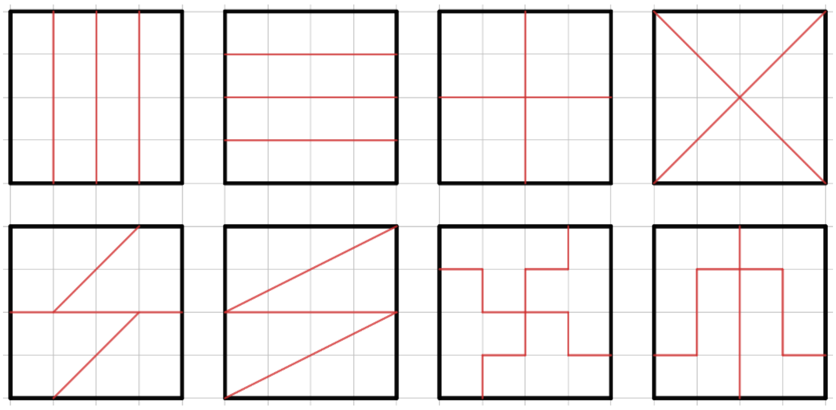
162. Čtverec

Rozdělte čtverec s šestnácti poli na čtyři stejné části, co nejvíce způsoby.



Obrázek 23. Zadání úlohy 162

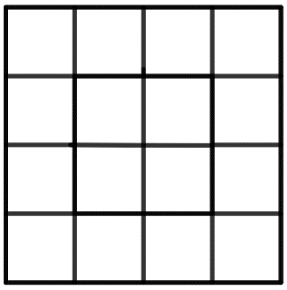
Řešení:



Obrázek 24. Řešení úlohy 162

163. Skryté čtverce I.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 25. Zadání úlohy 163

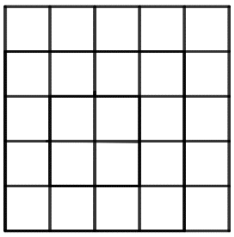
Řešení:

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	16
Čtyři	9
Devět	4
Šestnáct	1
Celkem	30

Tabulka 11. Řešení úlohy 163

164. Skryté čtverce II.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 26. Zadání úlohy 164

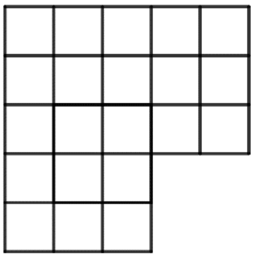
Řešení:

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	25
Čtyři	16
Devět	9
Šestnáct	4
Dvacet pět	1
Celkem	55

Obrázek 27. Řešení úlohy 164

165. Skryté čtverce III.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 28. Zadání úlohy 165

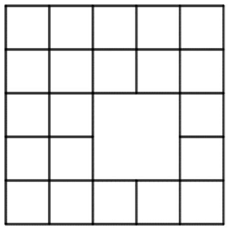
Řešení:

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	21
Čtyři	12
Devět	5
Celkem	38

Tabulka 12. Řešení úlohy 165

166. Skryté čtverce IV.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 29. Zadání úlohy 166

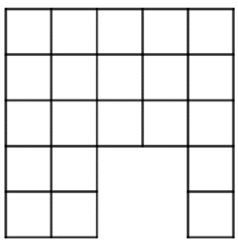
Řešení:

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	21
Čtyři	8
Dvacet pět	1
Celkem	30

Tabulka 13. Řešení úlohy 166

167. Skryté čtverce V.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 30. Zadání úlohy 167

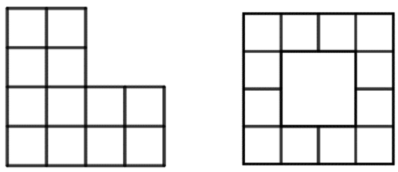
Řešení:

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	21
Čtyři	10
Devět	3
Celkem	34

Tabulka 14. Řešení úlohy 167

168. Skryté čtverce VI.

Kolik čtverců obsahují dané obrazce?



Obrázek 31. Zadání úlohy 168

Řešení:

První obrazec

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	12
Čtyři	5
Celkem	17

Tabulka 15. Řešení úlohy 168

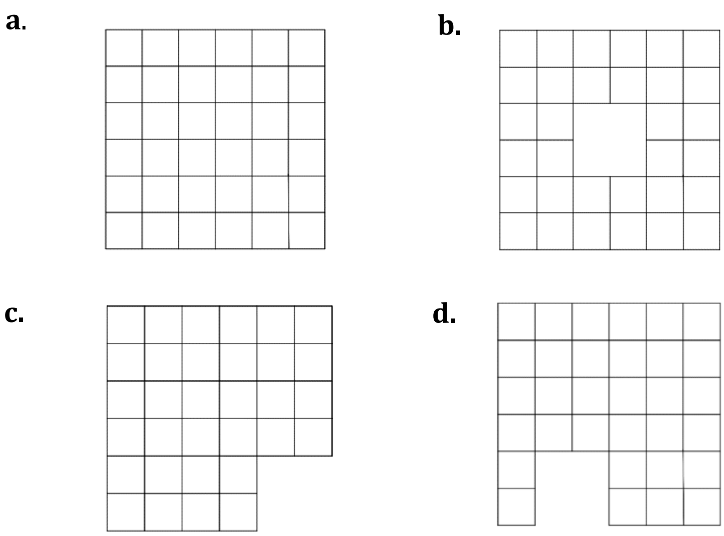
Druhý obrazec

Počet malých čtverečků, které hledaný čtverec obsahuje	Počet daných čtverců
Jeden	12
Čtyři	1
Šestnáct	1
Celkem	14

Tabulka 16. Řešení úlohy 168

169. Skryté čtverce VII.

Kolik čtverců obsahují dané obrazce?



Obrázek 32. Zahání úlohy 169

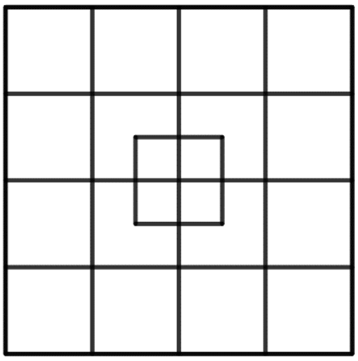
Řešení:

Počet čtverečků, ze kterých je daný čtverec složen	Počet daných čtverců v obrazci			
	a.	b.	c.	d.
Jeden	36	32	32	32
Čtyři	25	17	21	19
Devět	16	7	12	10
Šestnáct	9	6	5	3
Dvacet pět	4	4	0	0
Třicet šest	1	1	0	0
Celkem	91	67	70	64

Tabulka 17. Řešení úlohy 169

170. Skryté čtverce VIII.

Kolik čtverců obsahuje daný obrazec?



Obrázek 33. Zadání úlohy 170

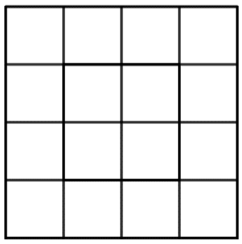
Řešení:

Počet malých čtverečků, ze kterých je hledaný čtverec složen	Počet daných čtverců v obrazci
1	17
4	9
9	4
16	1
malinkaté čtverečky uprostřed	4
Celkem	35

Tabulka 18. Řešení úlohy 170

171. Skryté obdélníky I.

Kolik obdélníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 34. Zadání úlohy 171

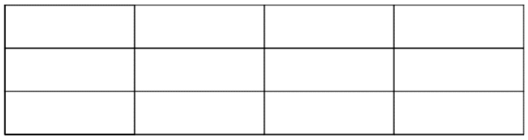
Řešení:

Počet řádků	Počet sloupců	Počet daných obdélníků
1	2	12
2	1	12
1	3	8
3	1	8
1	4	4
4	1	4
2	3	6
3	2	6
2	4	3
4	2	3
3	4	2
4	3	2
Celkem		70

Tabulka 19. Řešení úlohy 171

172. Skryté obdélníky II.

Kolik obdélníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 35. Zadání úlohy 172

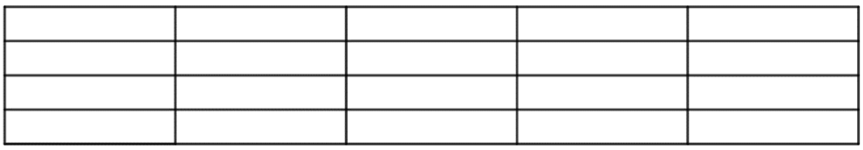
Řešení:

Počet malých obdélníčků v hledaném obdélníku	Počet daných obdélníků v útvaru
Jeden	12
Dva	17
Tři	10
Čtyři	9
Šest	7
Osm	2
Devět	2
Dvanáct	1
Celkem	60

Tabulka 20. Řešení úlohy 172

173. Skryté obdélníky III.

Kolik obdélníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 36. Zadání úlohy 173

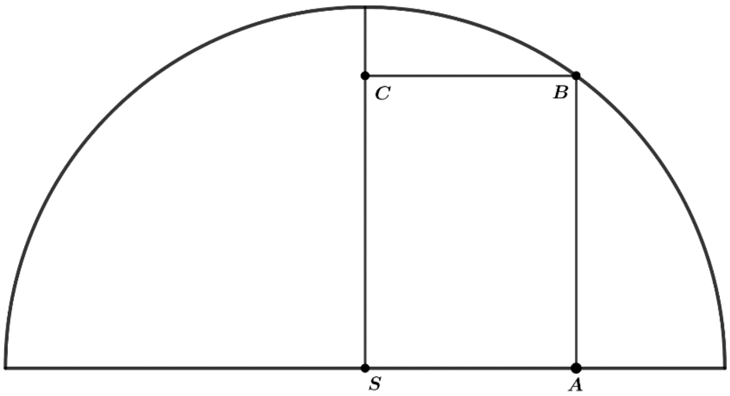
Řešení:

Počet malých obdélníčků v daném obdélníku	Počet daných obdélníků
1	20
2	31
3	22
4	25
5	4
6	17
8	10
9	6
10	3
12	7
15	2
16	2
20	1
Celkem	150

Tabulka 21. Řešení úlohy 173

174. ÚSEČKA

Do polokružnice je vepsán obdélník $SABC$. Velikost úseček: $|SA| = 30$ mm, $|AD| = 20$ mm. Určete velikost úsečky $|AC|$.



Obrázek 37. Zadání úlohy 174

Řešení:

Z pravoúhlého trojúhelníku SAB plyne

$$|SB| = 50 \text{ mm}.$$

Velikost úseček

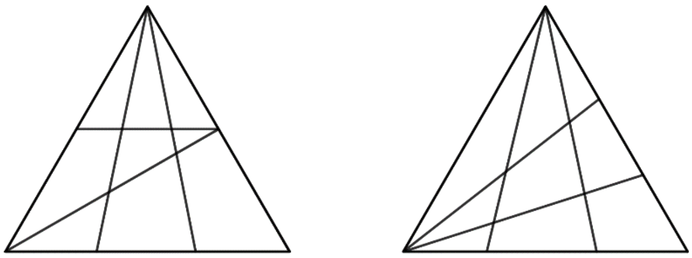
$$|SB| = |AC|,$$

neboť to jsou úhlopříčky v obdélníku $SABC$ a ty jsou shodné. Potom tedy

$$|AC| = 50 \text{ mm}.$$

175. Skryté trojúhelníky I.

Kolik trojúhelníků obsahují dané obrazce?



Obrázek 38. Zadání úlohy 175

Řešení:

První obrazec

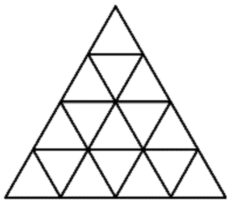
Trojúhelník rozdělíme na dvě části podle střední příčky. První část obsahuje šest trojúhelníků, druhá obsahuje také šest trojúhelníky. Dále obrazec obsahuje ještě šest a šest trojúhelníků, které jsou dány dalšími úsečkami v útvaru. Nakonec zbývá jeden velký trojúhelník. Celkem jich je v obrazci dvacet pět trojúhelníků.

Druhý obrazec

Trojúhelník rozdělíme, podle úseček vycházejících z vrcholu obrazce k jeho podstavě, na tři části. První část obsahuje šest, druhá tři a třetí také tři trojúhelníky. První a druhá část společně obsahují šest trojúhelníků, druhá a třetí část obsahují tři trojúhelníky a všechny tři části společně obsahují šest trojúhelníků. Celkem tedy obrazec obsahuje dvacet sedm trojúhelníků.

176. Skryté trojúhelníky II.

Kolik trojúhelníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 39. Zadání úlohy 176

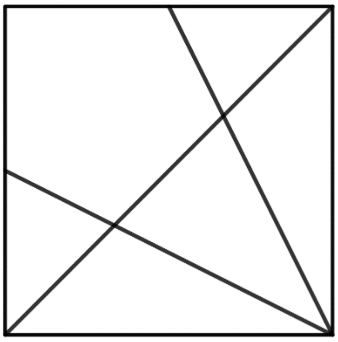
Řešení:

Množství malých trojúhelníčků v daném trojúhelníku	Počet trojúhelníků
Jeden	16
Čtyři	7
Devět	3
Šestnáct	1
Celkem	27

Tabulka 22. Řešení úlohy 176

177. Skryté trojúhelníky III.

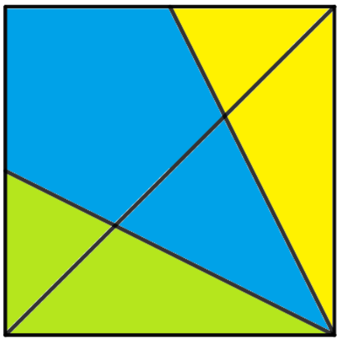
Kolik trojúhelníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 40. Zadání úlohy 177

Řešení:

Daný útvar můžeme vybarvit například takto.



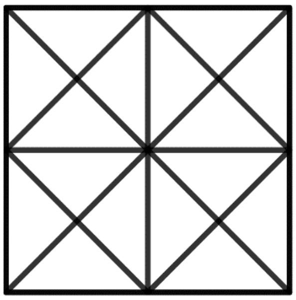
Obrázek 41. Řešení úlohy 177

Barevná část útvaru	Počet trojúhelníků v této části
Zelená	3
Modrá	1
Žlutá	3
Zelená a modrá	1
Modrá a žlutá	1
Všechny tři barvy	2
Celkem	11

Tabulka 23. Řešení úlohy 177

178. Skryté trojúhelníky IV.

Kolik trojúhelníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 42. Zadání úlohy

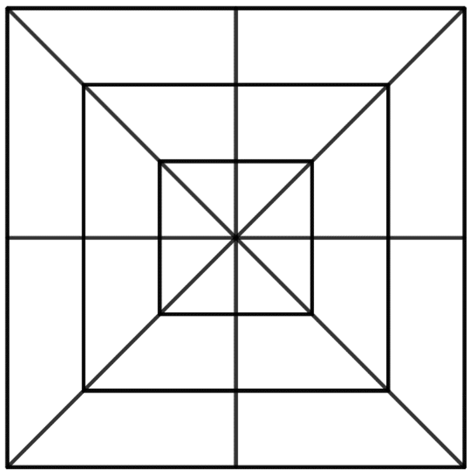
Řešení:

Počet malých trojúhelníčků, ze kterých je hledaný trojúhelník složen	Počet daných trojúhelníků v obrazci
1	16
2	16
4	8
8	4
Celkem	44

Tabulka 24. Řešení úlohy 178

179. Skryté trojúhelníky V.

Kolik trojúhelníků obsahuje daný obrazec?



Obrázek 43. Zadání úlohy 179

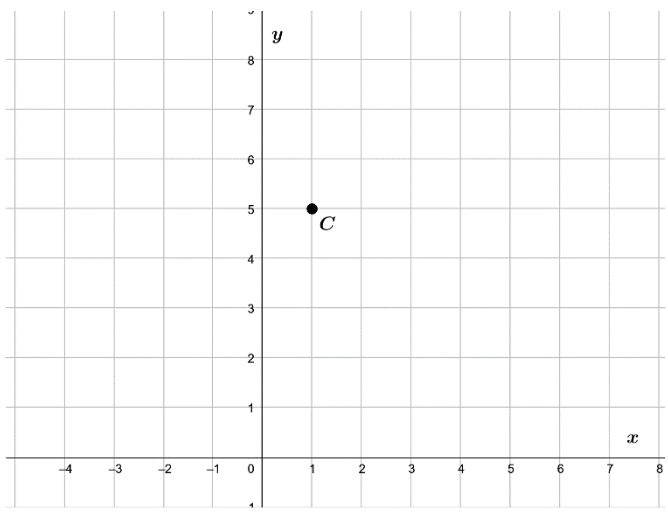
Řešení:

Část obrazce	Počet trojúhelníků
vnitřní čtverec	16
střední čtverec	16
velký čtverec	16
Celkem	48

Tabulka 25. Řešení úlohy 179

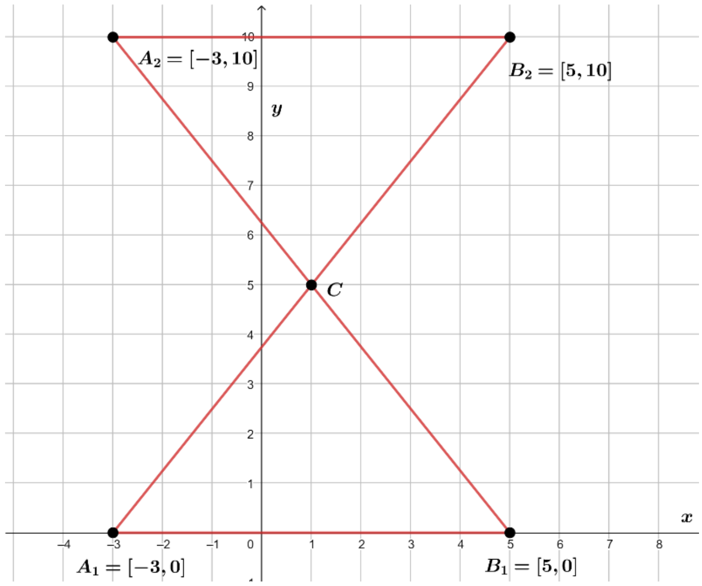
180. Hledaný trojúhelník

Rovnoramenný trojúhelník ABC má velikost výšky 5 a velikost základny 8. Hlavní vrchol je v bodě $C = [1; 5]$. Jaké souřadnice mají zbylé vrcholy A, B?



Obrázek 44. Zadání úlohy 180

Řešení:



Obrázek 45. Řešení úlohy 180

181. Závodní okruh

Jaký průměr má kruhová dráha, kterou musí auto osmkrát projet, aby ujelo vzdálenost 5 km?

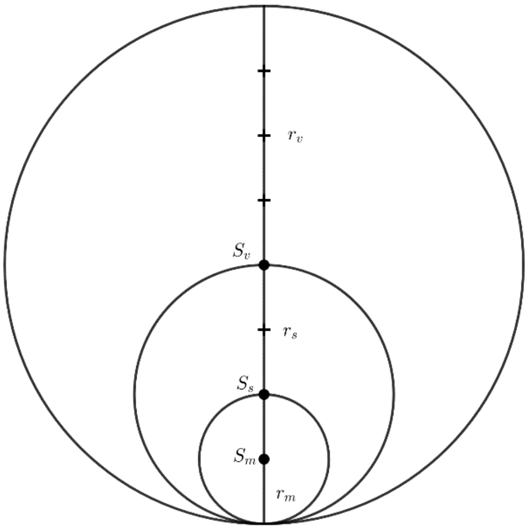
Řešení:

$$d \doteq 200 \text{ m}.$$

Průměr kruhové dráhy je 200 m.

182. Tři kružnice

V největší ze tří kružnic leží střed S na obvodu středně velké kružnice. Její střed S' leží na obvodu malé kružnice. Všechny tři středy kružnic leží na jedné přímce, která též prochází bodem jejich doteku. Obvod malé kružnice je 5 cm. Jaký je obvod největší kružnice?



Obrázek 46. Zadání úlohy 182

Řešení:

Obvod malé kružnice

$$o_m = 2\pi r_m,$$

$$r_m = \frac{5}{2\pi}.$$

Dále platí, že:

$$2r_m = r_{\text{stř}},$$

$$2r_{\text{stř}} = r_v,$$

$$4r_m = r_v.$$

Obvod velké kružnice je pak

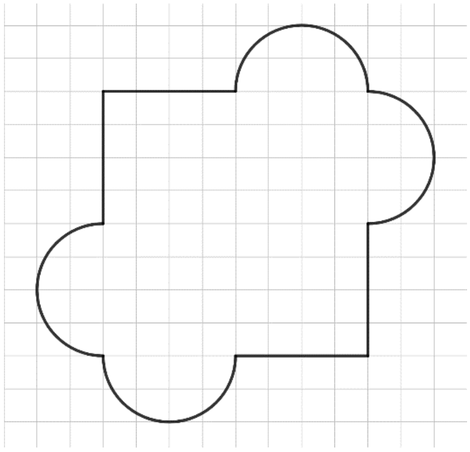
$$o_v = 2\pi r_v,$$

$$o_v = 20.$$

Obvod největší z kružnic činí 20 cm.

183. Půdorys

Architekt nakreslil možný půdorys nové restaurace, který je složený z úseček a půlkružnic. Potřebuje spočítat, jaký půdorys bude mít obvod. Pomozte mu to zjistit, když víte, že jeden čtvereček na obrázku odpovídá jednomu metru ve skutečnosti.



Obrázek 47. Zadání úlohy 183

Řešení:

$$o = 2 \cdot (2\pi \cdot 2) + 16,$$

$$o = 41{,}13.$$

Obvod půdorysu restaurace činí 41,13 m.

184. Rychlost ručiček hodin

Jakou rychlostí (km/h) se pohybuje konec malé hodinové ručičky mající délku 8 cm a konec velké hodinové ručičky mající délku 12 cm?

Řešení:

Malá ručička má poloměr $r_m = 8$ cm $= 0{,}00008$ km. Za hodinu ručička urazí délku o velikosti

$$o = \frac{2\pi r_m}{12},$$

$$o = 0{,}000042.$$

Malá hodinová ručička se pohybuje rychlostí 0,000042 km/h.

Velká ručička má poloměr $r_v = 12$ cm $= 0{,}00012$ km, Za hodinu ručička urazí délku o velikosti

$$o = 2\pi r_v,$$

$$o = 0{,}00075.$$

Velká hodinová ručička se pohybuje rychlostí 0,00075 km/h.

185. **Sedm milionů lidí**

Kdyby sedm milionů lidí stálo u sebe v houfu ve tvaru čtverce, jak dlouhou stranu by daný čtverec měl? Jedna osoba „zabírá“ plochu asi 8 dm^2.

Řešení:

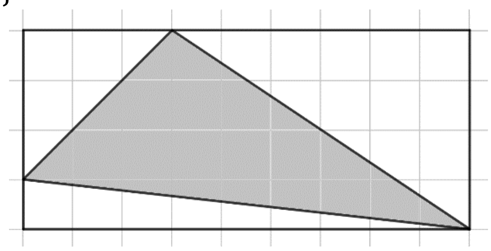
Plocha daného čtverce je $56 \cdot 10^4 \mathrm{m}^2$, strana čtverce má tedy velikost 748 m.

Jiné řešení:

Sedm milionů lidí vytváří obsah čtverce. Na jedné straně čtverce bude stát $\sqrt{7\,000\,000} \doteq 2\,646$ lidí. Pak velikost strany čtverce bude $2\,646 \cdot \sqrt{8} = 748$ cm. Číslo osm musíme odmocnit, protože představuje plochu čtverce odpovídajícího jedné osobě a my stejně jako v případě velkého čtverce chceme znát jeho stranu.

186. Trojúhelník **I.**

Jaký obsah má šedivý trojúhelník?



Obrázek 48. Zadání úlohy 186

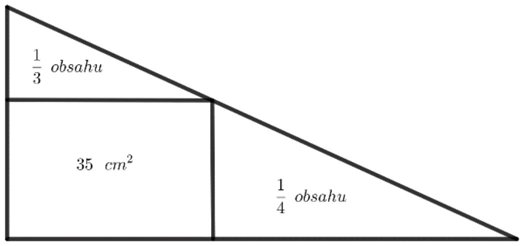
Řešení:

Počítáme v neurčených jednotkách j. Od celkového obsahu obdélníka odečteme součet obsahů tří bílých trojúhelníků, pak

$$S = 15.$$

Velikost obsahu šedivého trojúhelníku je 15 j^2.

187. **Trojúhelník II.**



Obrázek 49. Zadání úlohy 187

Jaký obsah má daný trojúhelník?

Řešení:

Celkový obsah trojúhelníku označíme S.

$$S = \frac{1}{3}S + 35 + \frac{1}{4}S,$$

$$S = 84.$$

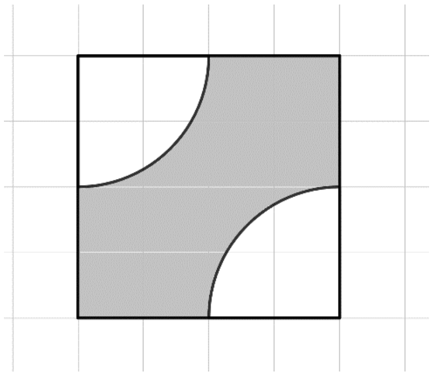
Obsah daného trojúhelníku je 84 cm^2.

Jiné řešení:

Součet jedné třetiny obsahu a jedné čtvrtiny obsahu je $\frac{7}{12}$ obsahu. Z toho plyne, že $\frac{5}{12}$ obsahu je 35 cm^2, celkový obsah je tedy 84 cm^2.

188. Plocha obrazce I.

Je dán čtverec, který obsahuje dvě shodné čtvrtkružnice. Jejich středem jsou dva protilehlé vrcholy čtverce a poloměr je roven polovině velikosti strany čtverce. Velikost strany čtverce jsou čtyři centimetry. Spočítejte obsah šedivé části.



Obrázek 50. Zadání úlohy 188

Řešení:

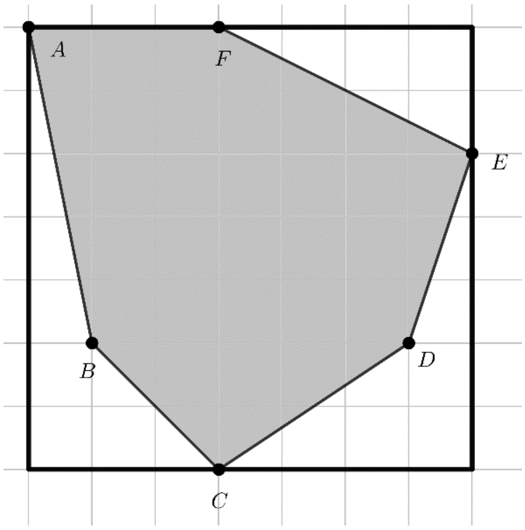
$$S_{\text{obrazce}} = S_{\text{čtverce}} - 2 \cdot S_{\text{čtvrtkružnice}},$$

$$S_{\text{obrazce}} = 9{,}7.$$

Obsah obrazce je 9,7 cm^2.

189. Plocha obrazce II.

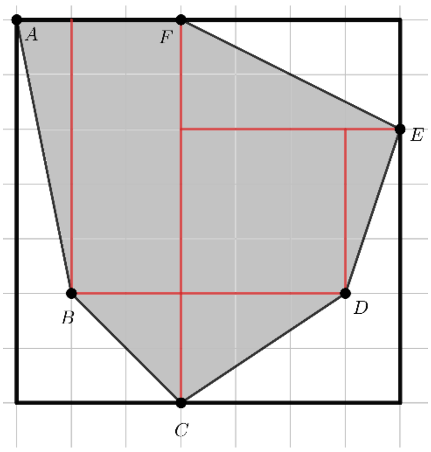
Kolik procent z celkového obsahu čtverce zabírá daný obrazec $ABCDEF$ (šedivá plocha)?



Obrázek 51. Zadání úlohy 189

Řešení:

Obrazec $ABCDEF$ rozdělíme na geometrické útvary, u kterých dokážeme snadno spočítat obsah. Dostaneme tak pět pravoúhlých trojúhelníků, obdélník a čtverec. Součet velikostí obsahů těchto útvarů je 32, což představuje 69,3 % čtverce.

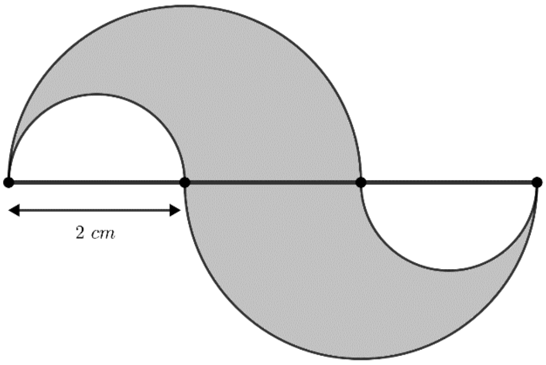


Obrázek 52. Řešení úlohy 189

Můžeme postupovat i tak, že určíme velikost všech bílých částí čtverce a pak tuto hodnotu odečteme od celkového obsahu čtverce.

190. Vlna

Úsečka velikosti $u = 6$ cm je rozdělena na tři stejné části. Vypočítejte obsah útvaru na obrázku, který je ohraničen půlkružnicemi.



Obrázek 53. Zadání úlohy 190

Řešení:

$$r_1 = 2 \text{ cm},$$

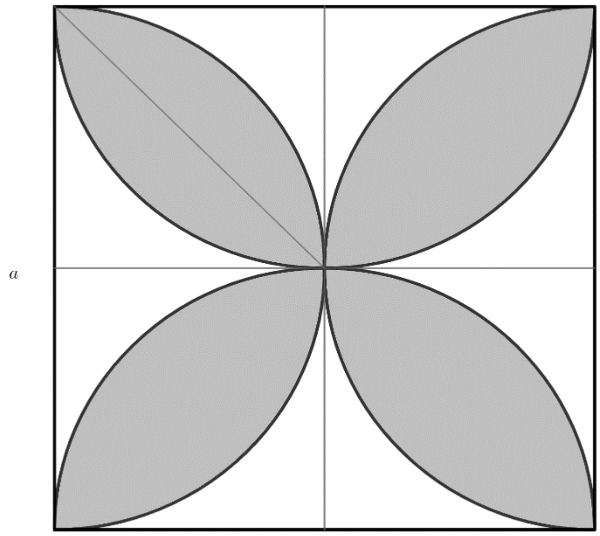
$$r_2 = 1 \text{ cm},$$

$$S_{\text{obrazec}} = 9{,}42.$$

Obsah obrazce připomínající vlnu je 9,42 cm^2.

191. Čtyřlístek

Čtverci o velikosti strany $a = 16$ cm je vepsán útvar připomínající čtyřlístek (šedivá část). Je ohraničen půlkružnicí nad každou stranou čtverce. Vypočítejte obsah tohoto útvaru.



Obrázek 54. Zadání úlohy 191

Řešení:

Daný čtverec rozdělíme na čtyři malé čtverce. Obsah části čtyřlístku nad úhlopříčkou v malém čtverci je

$$S' = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2},$$

$$S' = 18{,}3\ \mathrm{cm}^2.$$

Takovýchto úseků je celkem osm. Celkový obsah čtyřlístku je tedy 146 cm^2.

192. Stupně

Kolik stupňů, minut a sekund je výsledkem rozdílu $100° - 1° - 1' - 1''$?

Řešení:

$$99°59'60'' - 1° - 1' - 1'' = 98°58'59''$$

193. Úhel

O jaký úhel se posune:

c. velká ručička za jednu hodinu?

Řešení:

$$360°$$

d. velká ručička za jednu minutu?

Řešení:

$$\frac{360°}{60} = 6°$$

e. velká ručička za jednu sekundu?

Řešení:

$$\frac{360°}{3600} = 0{,}1°$$

f. malá ručička za jednu hodinu?

Řešení:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

g. malá ručička za jednu minutu?

Řešení:

$$\frac{30°}{60} = 0{,}5°$$

h. malá ručička za jednu sekundu?

Řešení:

$$\frac{0{,}5°}{60} = 0{,}008\overline{3}°$$

194. Čtvrt na čtyři

Jaký úhel svírá malá ručička s bodem, kde je na hodinách číslo 12 v čase čtvrt na čtyři?

Řešení:

Úhel mezi jednotlivými číslicemi hodin je 30°. Malá ručička bude ve čtvrtině úhlu mezi třetí a čtvrtou hodinou. Úhel mezi malou ručičkou a dvanáctou hodinou tedy bude 97°30′.

195. Pět minut

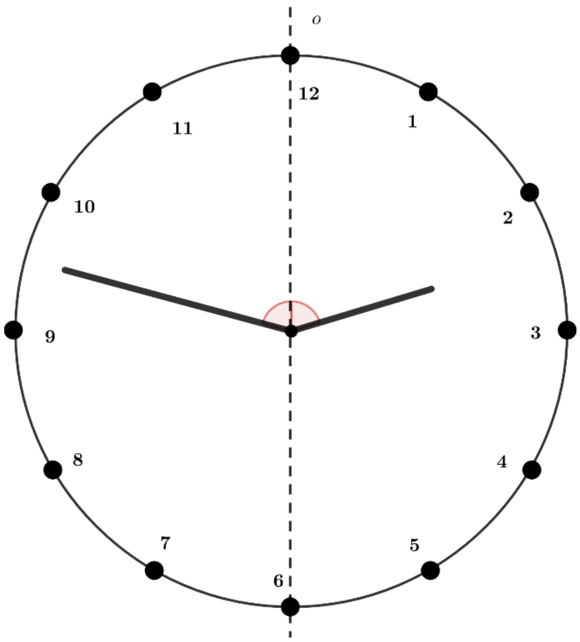
Jak velký je úhel mezi počátečním bodem a bodem, kam dospěje velká ručička hodin za pět minut? Jak velký je úhel, který za stejný čas „vytvoří" malá ručička hodin?

Řešení:

Velká ručička svírá za jednu minutu s počátečním bodem úhel 6°, za pět minut to je 30°. Malá ručička svírá za jednu minutu úhel 0,5° a za pět minut to je 2,5°.

196. Hledaný čas

Kolik je hodin (s přesností na minuty), když nyní hodiny ukazují čas mezi druhou a třetí hodinou a ručičky svírají se svislou osou o procházející dvanáctkou a šestkou stejný úhel α?



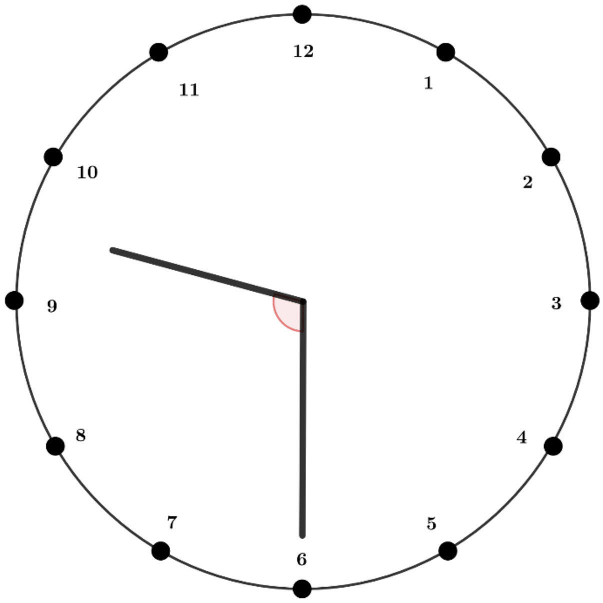
Obrázek 55. Zadání úlohy 196

Řešení:

Malá ručička se bude pohybovat mezi čísly dva a tři, pak se také velká ručička musí nacházet mezi čísly devět a deset, aby svírala stejný úhel od osy o. Velikost úhlu ručičky za jednu minutu je u malé 0,5°, u velké 6°. Začneme v čase 2:45 a zjistíme, jaký úhel ručičky svírají: úhel malé ručičky je $82°30'$, úhel velké ručičky 270° od počátku (číslo dvanáct), pak $360° - 270° = 90°$ od osy o. Úhly ručiček se v daném čase nerovnají, musíme tedy zjistit úhly ručiček v čase 2:46. Malá ručička bude svírat úhel 83°, velká ručička bude svírat úhel 84°. Během následující minuty se již úhly ručiček vyrovnají. Hledaný čas jsou dvě hodiny a čtyřicet šest minut.

197. Půl desáté

Jaký úhel svírají velká a malá ručička hodin, když ukazují čas půl desáté?



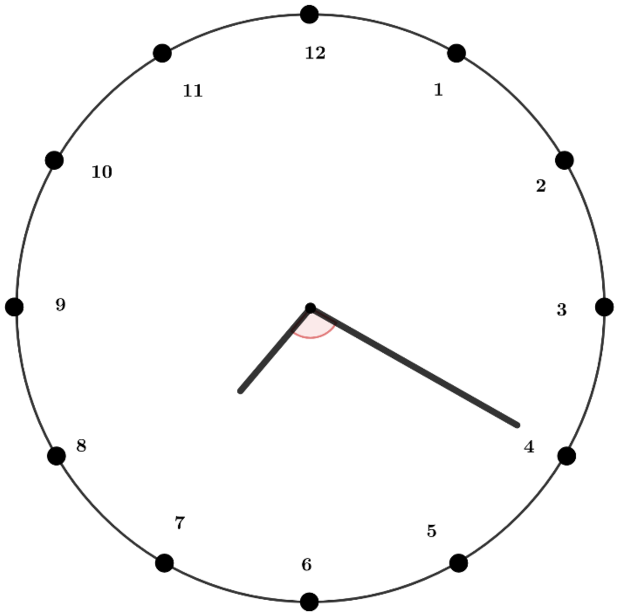
Obrázek 56. Zadání úlohy 197

Řešení:

Úhel mezi jednotlivými číslicemi je 30°. Malá ručička bude v půli úhlu mezi devítkou a desítkou. Úhel mezi velkou a malou ručičkou tedy bude 105°.

198. Sedm dvacet

Jaký úhel svírají ručičky hodin v čase 19:20?



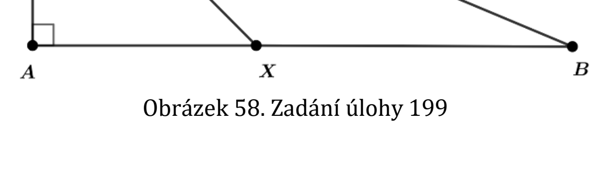
Obrázek 57. Zadání úlohy 198

Řešení:

Malá ručička bude svírat se svislou osou procházející středem hodin a číslem dvanáct 220°. Velká ručička bude se stejnou osou svírat 120°. Úhel mezi ručičkami tedy bude 100°.

199. Úhel alfa

V trojúhelníku jsou vyznačeny dva menší trojúhelníky CXB a pravoúhlý XAC. Oba tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné, protože platí tato rovnost $|AX| = |AC|, |XB| = |XC|$. Jakou velikost má úhel α?



Obrázek 58. Zadání úlohy 199

Řešení:

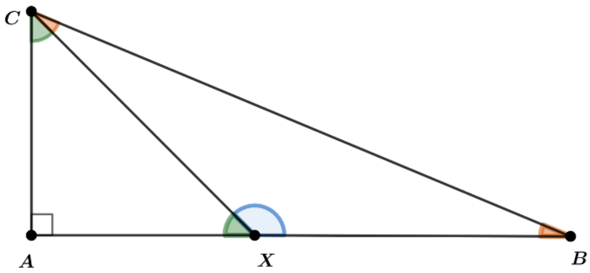
Úhel při vrcholu B označíme β. Pak platí rovnosti

$$\alpha + \beta = 90° \big(\text{plyne z pravoúhlého trojúhelníku } BAC\big),$$
$$2\beta + 180° - (\alpha - \beta) = 180° \ \big(\text{plyne z trojúhelníku } CXB\big),$$

pak

$$\alpha = 67{,}5°.$$

Jiné řešení:



Obrázek 59. Řešení úlohy 199

Úhly $ACX\ a\ AXC$ (zelené) jsou shodné, protože je daný trojúhelník rovnoramenný, pak

$$|ACX| = |AXC| = \frac{90°}{2} = 45°.$$

Velikost (modrého) úhlu

$$|CXB| = 180° - |AXC| = 135°.$$

Úhly XCB a XBC (oranžové) jsou shodné, protože trojúhelník XBC je rovnoramenný, pak

$$|XCB| = |XBC| = \frac{45°}{2} = 22°30'.$$

Pro velikost úhlu alfa platí

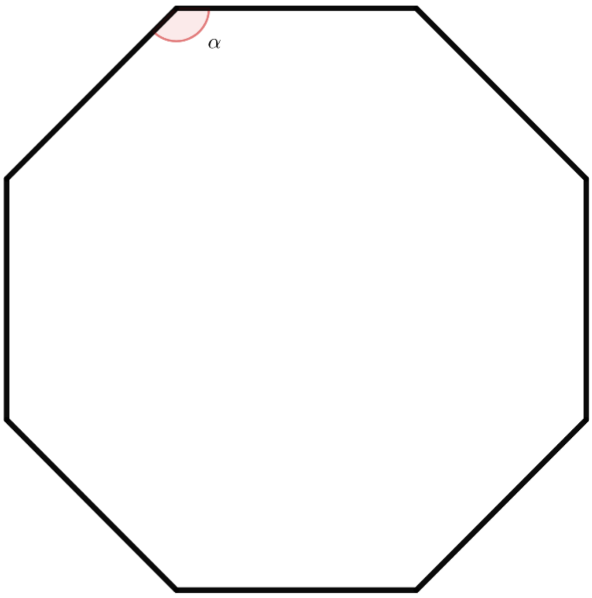
$$|\alpha| = |ACX| + |XCB|,$$

pak

$$|\alpha| = 45° + 22°30' = 67°30'.$$

200. Osmiúhelník

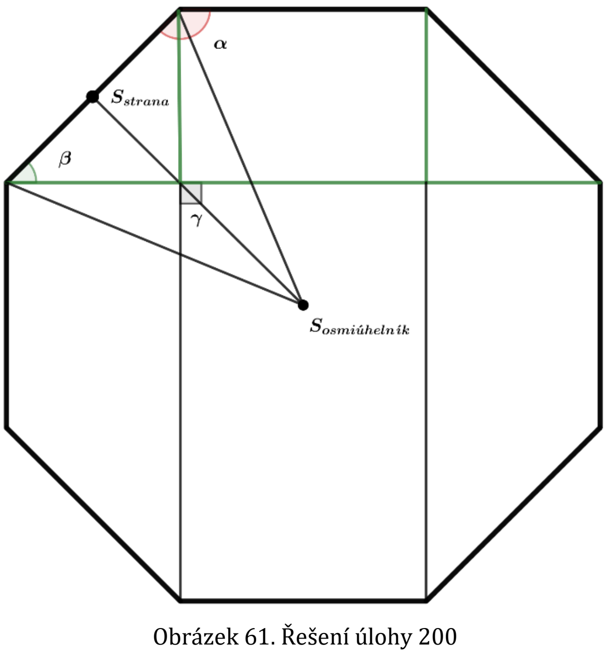
Jak velký je vnitřní úhel pravidelného osmiúhelníku?



Obrázek 60. Zadání úlohy 200

Řešení:

Osmiúhelník rozdělíme například jako na obrázku. Vzniknou nám dva rovnoramenné trojúhelníky a jeden obdélník (v obrázku zeleně). Velikost úhlu $\gamma = 90°$, velikost zbylých dvou úhlů v rovnoramenném trojúhelníku je shodná a je rovna $\beta = 45°$. Velikost hledaného vnitřního úhlu osmiúhelníku α je pak $90° + 45° = 135°$.



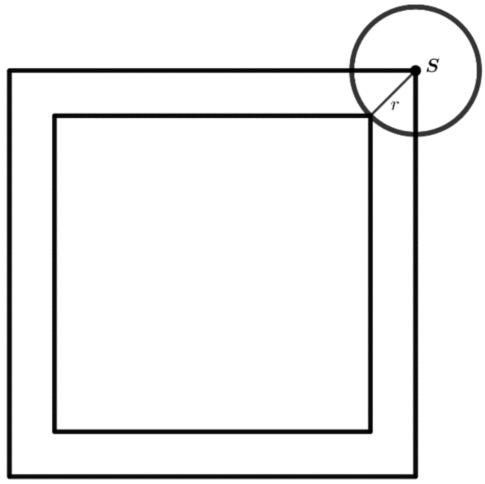
Obrázek 61. Řešení úlohy 200

Jiné řešení:

Plný úhel s vrcholem v bodě $S_{\text{osmiúhelník}}$ má velikost 360°. Vytvoříme-li trojúhelník, jehož podstavou je jedna strana osmiúhelníku a jehož vrchol je v bodě $S_{\text{osmiúhelník}}$, pak je tento trojúhelník rovnoramenný a velikost úhlu při jeho vrcholu $S_{\text{osmiúhelník}}$, je rovna 45° (viz obrázek). Zbylé dva shodné úhly v daném trojúhelníku mají velikost 135°. Strana daného rovnoramenného trojúhelníku je zároveň osou vnitřního úhlu osmiúhelníku. Jeho velikost tedy bude rovna dvojnásobku velikosti úhlu při straně daného rovnoramenného trojúhelníku, to je 135°.

201. Čtverec s kružnicí

Plocha velkého čtverce je 64 cm². Poloměr kruhu je 1 cm. Jakou délku má strana malého čtverce?



Obrázek 62. Zadání úlohy 201

Řešení:

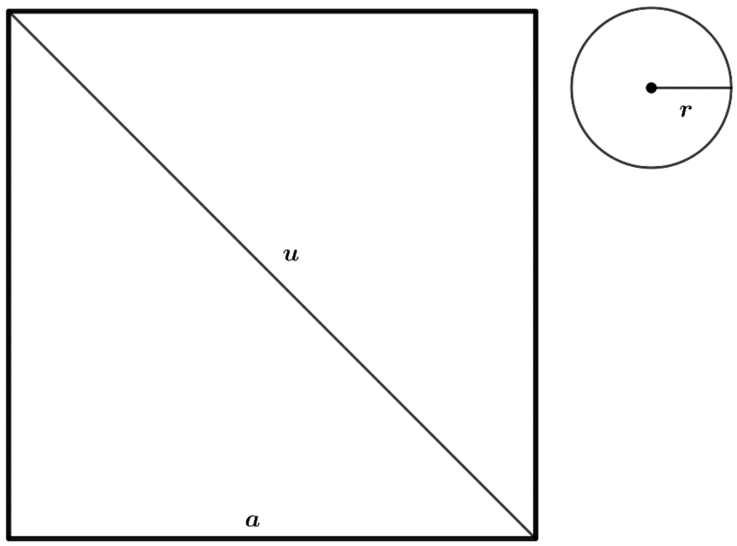
Velikost úhlopříčky velkého čtverce je $8\sqrt{2}$, velikost úhlopříčky malého čtverce bude $8\sqrt{2} - 2$. Označme stranu malého čtverce a. Vyjádříme-li velikost úhlopříčky malého čtverce $\sqrt{2a^2}$, pak musí platit rovnost

$$\sqrt{2a^2} = 8\sqrt{2} - 2,$$

$$a = \sqrt{66 - 16\sqrt{2}} = 6{,}58 \text{ cm}.$$

202. Kruhy ve čtverci

Kolik kruhů o poloměru $r = 4{,}5$ cm se dá vepsat do čtverce s úhlopříčkou u = 42 cm? Kruhy můžou být uspořádány různě, ale nesmějí se překrývat.



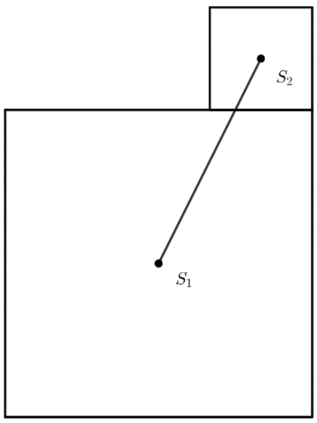
Obrázek 63. Zadání úlohy 202

Řešení:

Pomocí Pythagorovy věty dopočítáme velikost strany daného čtverce $a = 21\sqrt{2} \doteq 29{,}7$. Musí platit: $2r \cdot n \leq a$; kde n udává počet kruhů vedle sebe, odpovídající jedné straně, pak $n = 3$ a celkem lze tedy do daného čtverce vepsat devět kruhů.

203. Dva čtverce

Obvody čtverců na obrázku mají velikosti: $136\text{ cm}, 56\text{ cm}$. Určete velikost spojnice středů obou čtverců.



Obrázek 64. Zadání úlohy 203

Řešení:

Stranu většího čtverce označme a, má velikost $a = 34$ cm. Stranu menšího čtverce označme a′, má velikost $a' = 14$ cm. V pravoúhlém trojúhelníku, jehož strany jsou velikosti

$$\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}, \frac{a}{2} - \frac{a'}{2},$$

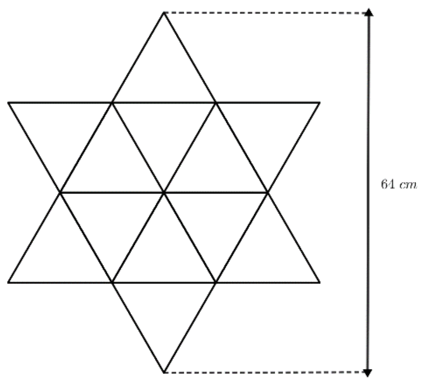
vypočítáme přeponu x, která je zároveň onou hledanou spojnicí obou středů. Dále pak

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right)^2},$$

$$x = 26 \text{ cm}.$$

204. Jedním tahem

Obrazec je složených z dvanácti shodných rovnostranných trojúhelníků. Spočítejte, jak dlouhá by byla čára, kdyby byl tento obrazec nakreslen jedním tahem. Výška obrazce je velikosti 64 cm.



Obrázek 65. Zadání úlohy 204

Řešení:

Výška v malého trojúhelníka je $\frac{64}{4} = 16$ cm. Tato výška vytváří v malém trojúhelníku dva pravoúhlé trojúhelníky, každý s přeponou a. Z Pythagorovy věty plyne

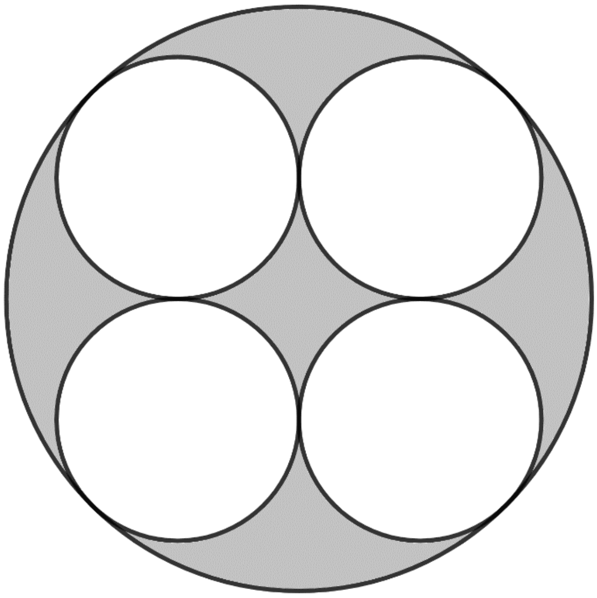
$$16^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Obrazec je nakreslen jedním tahem, takže každou čáru v obrazci můžeme započítat pouze jednou. Velikost čáry je pak 110,9 cm.

205. Kruhy v kruhu

Do velkého kruhu jsou vepsány čtyři shodné malé kruhy, které se vzájemně dotýkají. Průměr malého kruhu je $r_1 = 4$ cm. Určete obsah vyšrafované plochy.



Obrázek 66. Zadání úlohy 205

Řešení:

Z pravoúhlého trojúhelníka, jehož vrcholy jsou středy tří malých kruhů, zjistíme velikost úsečky x spojující středy dvou malých kruhů a procházející středem kruhu velkého

$$x = \sqrt{128} = 11{,}3 \text{ cm}.$$

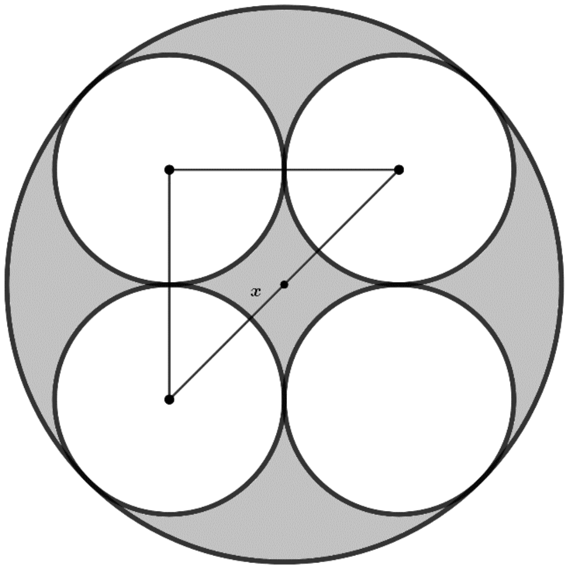
Poloměr velkého kruhu je

$$r_2 = \frac{x}{2} + r_1 = 9{,}65 \text{ cm}.$$

Obsah vyšrafované části potom bude

$$S = S_2 - 4S_1 = 91{,}5 \text{ cm}^2,$$

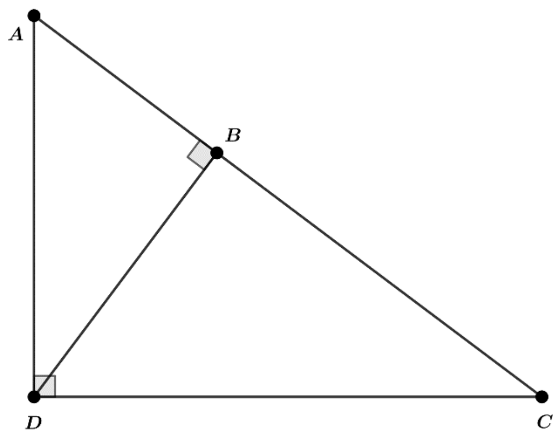
kde S_2 je obsah velkého kruhu, S_1 je obsah malého kruhu.



Obrázek 67. Řešení úlohy 205

206. Úsečka

Určete vzdálenost bodů B, C v pravoúhlém trojúhelníku ACD. Dány jsou velikosti stran: $|DB| = 4{,}6$ cm; $|AD| = 5$ cm; $|AC| = 13$ cm.



Obrázek 68. Zadání úlohy 206

Řešení:

Z pravoúhlého trojúhelníku ABD určíme pomocí Pythagorovy věty velikost strany: $|AB| = \sqrt{|AD|^2 - |DB|^2} = 1{,}96$ cm. Velikost strany $|BC| = |AC| - |AB| = 11{,}04$ cm.

Jiné řešení:

Z Euklidovy věty o výšce plyne

$$|DB|^2 = |AB| \cdot |BC|$$

a zároveň z Euklidovy věty o odvěsně plyne

$$|AD|^2 = |AC| \cdot |AB|,$$

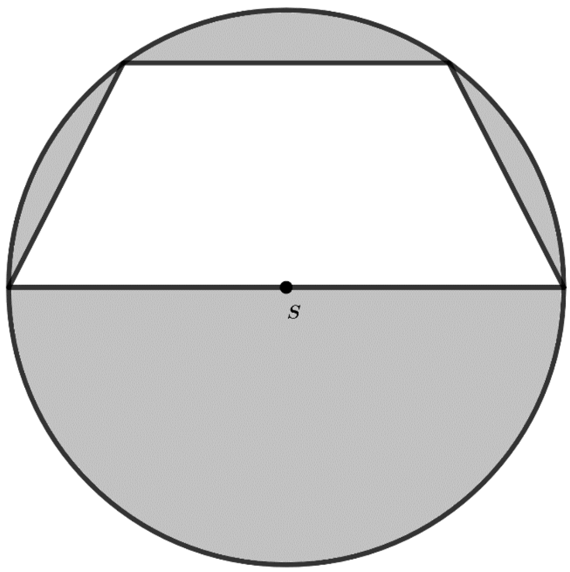
pak

$$|BC| = \frac{|DB|^2 \cdot |AC|}{|AD|^2},$$

$$|BC| = 11{,}0032 \text{ cm}.$$

207. Lichoběžník

Rovnoramenný lichoběžník je vepsán do kružnice o průměru $d = 24$ cm. Delší základna splývá s průměrem kružnice, kratší základna má velikost 16 cm. Vypočítejte obsah šedivé části a obvod lichoběžníku.



Obrázek 69. Zadání úlohy 207

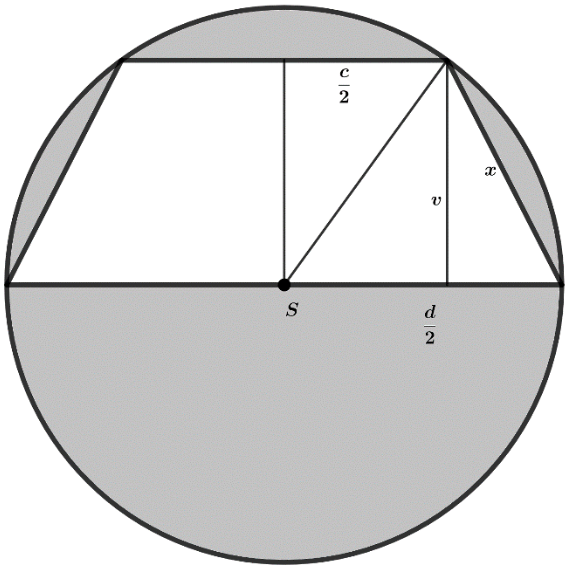
Řešení:

V rovnoramenném lichoběžníku vyznačíme pravoúhlý trojúhelník a obdélník (viz obrázek). Úhlopříčka ve zvoleném obdélníku má velikost $\frac{d}{2}$. Jedna strana tohoto obdélníku má velikost $\frac{c}{2}$, kde c je velikost menší základny lichoběžníku a druhá strana, označme ji v, je zároveň výškou lichoběžníku. Z Pythagorovy věty plyne

$$v = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2},$$

$$v = 8{,}94 \text{ cm}.$$

Obsah vyšrafované části je potom 273,6 cm^2.



Obrázek 70. Řešení úlohy 207

Jeden z pravoúhlých trojúhelníků, nám poslouží k nalezení neznámé strany lichoběžníku. V tomto trojúhelníku známe velikost obou odvěsen a hledáme velikost přepony, označme x. Z Pythagorovi věty plyne

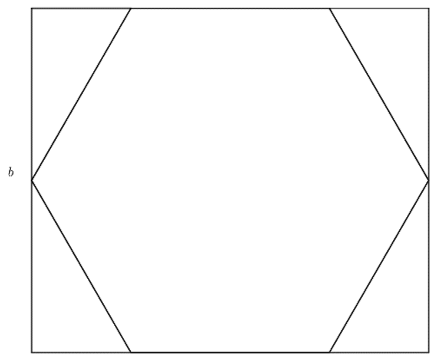
$$x = \sqrt{v^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{c}{2}\right)^2},$$

$$x = 9{,}79 \text{ cm}.$$

Obvod lichoběžníku je potom 59,6 cm.

208. Šestiúhelník

Pravidelný šestiúhelník je přesně vepsán do obdélníku. Kratší strana obdélníku má velikost $b = 20$ cm. Vypočítejte obvod obdélníka.



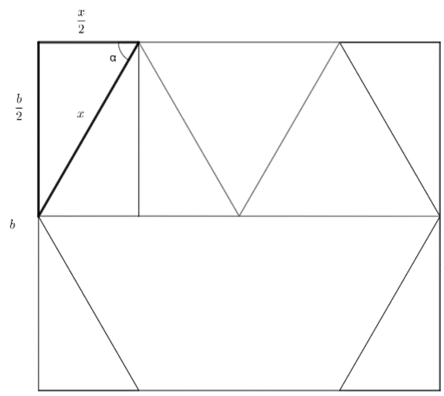
Obrázek 71. Zadání úlohy 208

Řešení:

Při každém vrcholu obdélníka vzniká pravoúhlý trojúhelník (viz obrázek). Velikost úhlu $\alpha = 60°$. Víme také, že velikost jedné odvěsny v tomto trojúhelníku je $\frac{b}{2}$. Velikost druhé odvěsny označme $\frac{x}{2}$ a velikost přepony je pak x. Pomocí goniometrické funkce

$$x = \frac{\frac{b}{2}}{\sin \alpha}.$$

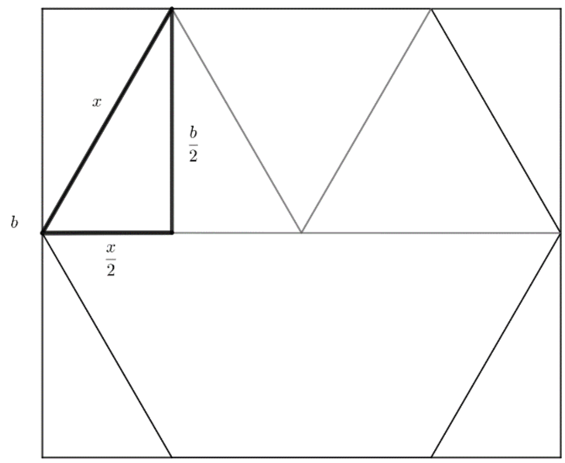
Obvod obdélníka je $o = 86{,}18$ cm.



Obrázek 72. Řešení úlohy 208

Jiné řešení:

Vycházíme z jiného pravoúhlého trojúhelníka, ve kterém je velikost přepony (označení podle předchozí) x, velikost jedné odvěsny $\frac{x}{2}$ a druhé $\frac{b}{2}$. Z Pythagorovy věty plyne, že $x = 11{,}55$ cm. Jelikož velikost delší strany obdélníku je $2x$, pak obvod $o = 86{,}19$ cm.



Obrázek 73. Zadání úlohy 208

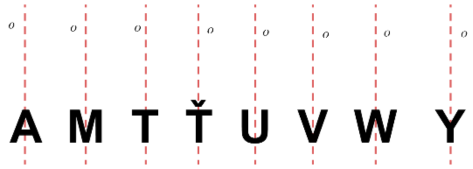
209. Písmena

Kolik velkých tiskacích písmen české abecedy je osově souměrných?

Řešení:

Řešení této úlohy záleží na vybraném fontu písma. V případě zvoleného fontu Sans-Serif je řešení následující.

Osově souměrná písmena se svislou osou.

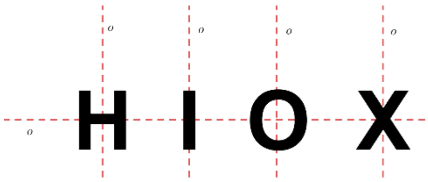


Obrázek 74. Řešení úlohy 209

Osově souměrná písmena se vodorovnou osou.

Obrázek 75. Řešení úlohy 209

Osově souměrná písmena se svislou i vodorovnou osou.



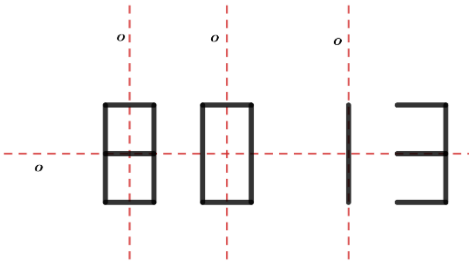
Obrázek 76. Řešení úlohy 209

210. Digitální číslice

Které číslice na displeji digitálních hodin jsou osově souměrné a které jsou středově souměrné?

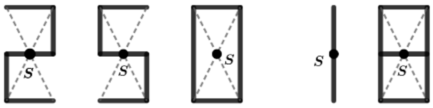
Řešení:

Osově souměrné číslice na displeji digitálních hodin.



Obrázek 77. Řešení úlohy 210

Středově souměrné číslice na displeji digitálních hodin.



Obrázek 78. Řešení úlohy 210

211. Souměrné letopočty

Které letopočty od roku 2 000 do roku 3 000 se čtou zpředu stejně jako zezadu?

Řešení:

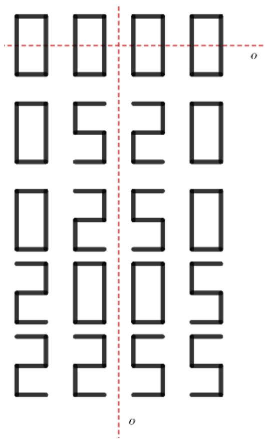
Je-li počáteční číslice 2, pak musí být i koncová číslice 2. Prostřední dvě číslice musí být stejné. Neexistuje takový letopočet s trojkou na počátku, který by byl zároveň menší než 3 000. Dané letopočty jsou

2 002, 2 112, 2 222, 2 332, 2 442, 2 552, 2 662, 2 772, 2 882, 2 992.

212. Souměrné časy

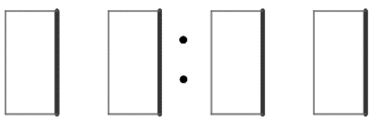
Napište všechny časy, které se mohou objevit na displeji digitálních hodin a jsou osově souměrné.

Řešení:



Obrázek 79. Řešení úlohy 212

Pozor tento čas není osově souměrný!



Obrázek 80. k úloze 210

213. Převrácené časy I.

Která čísla na digitálním displeji od jedné do sta se dají po převrácení číst opět jako čísla?

Řešení:

Číslo	Po převrácení	Číslo	Po převrácení	Číslo	Po převrácení
1	1	20	50	50	20
2	5	21	51	51	21
3	3	22	55	52	25
5	2	23	53	53	23
5	2	25	52	55	22
8	8	28	58	58	28
10	10	30	30	80	80
11	11	31	31	81	81
12	15	32	35	82	85
13	13	33	33	83	83
15	12	35	32	85	82
18	18	38	38	88	88
				100	100

Tabulka 26. Řešení úlohy 213

214. Převrácené časy II.

Která čísla od jedné do sta mají po obrácení vzhůru nohama stejnou hodnotu?

i. Čísla na displeji digitálních hodin.
j. Čísla napsaná rukou na papír.

Řešení:

Čísla na displeji		Čísla napsaná
0	30	0
1	31	3
3	33	8
8	38	30
10	80	38
11	81	80
13	83	83
18	88	

Tabulka 27. Řešení úlohy 214

215. Kvádr **I.**

Jaký povrch má kvádr, jehož objem je 12 dm^3? Velikosti všech stran kvádru jsou přirozená čísla.

Řešení:

Ze vzorce pro objem kvádru vyplývá tabulka řešení.

a	b	c	povrch kvádru (dm^3)
1	2	6	40
3	2	2	32
1	1	12	50

Tabulka 28. Řešení úlohy 215

216. Kvádr II.

Jak by se změnil počet řešení předcházející úlohy, kdyby velikosti všech stran kvádru byly reálná nebo racionální čísla?

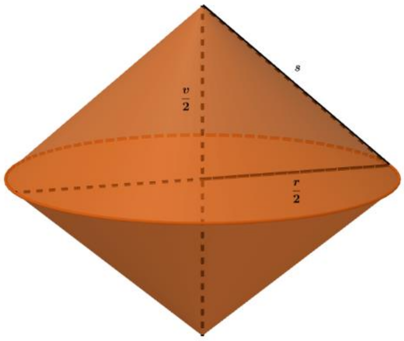
Řešení:

V obou případech existuje celkem nekonečně mnoho způsobů, jak zapsat součin čísel

$$a \cdot b \cdot c = 12.$$

217. Káča

Patrik má káču a chce ji nabarvit na hnědo. Výška i průměr káči mají stejnou velikost 8 cm. Jak velkou plochu káči bude Patrik natírat?



Obrázek 81. Zadání úlohy 217

Řešení:

Káča představuje dva shodné kužely, které mají společnou podstavu. Povrch pláště kuželu se vypočítá ze vztahu

$$S_{\text{plášť}} = \pi r s.$$

Z Pythagorovy věty plyne

$$s = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

$$s = 4\sqrt{2},$$

pak

$$S_{\text{káča}} = 142{,}2 \text{ cm}^2.$$

Při natírání káči musí Patrik natřít plochu o velikosti $142{,}2 \text{ cm}^2$.

218. Krychle

Krychli o hraně jeden metr jsme rozřezali na krychličky o hraně 1 mm. Následně jsme všechny krychličky poskládali do jedné řady. Jak dlouhá řada nám vznikla?

Řešení:

Jestliže $1 \text{ m}^3 = 10^9$ mm, pak je celkem v krychli 10^9 krychliček. Řada z nich složená má délku $10^9\text{mm} = 10^6\text{m} = 1\,000$ km.

219. Maxi krychle

Krychle má hranu jeden kilometr. Jak dlouho z ní bude vytékat voda, jestliže jeden litr vytéká tři sekundy?

Řešení:

Objem dané krychle je

$$V = 1\ km^3 = 10^{12}\ l.$$

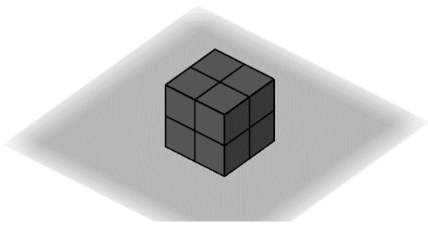
Doba vytékání vody je pak

$$t = 3 \cdot 10^{12} s = 95\ 129 \text{ let}$$

220. Krychličky

Jedna malá krychlička má hranu 2 cm. Jaký objem a povrch mají tělesa poskládaná z osmi krychliček?

a.



Obrázek 82. Zadání úlohy 220

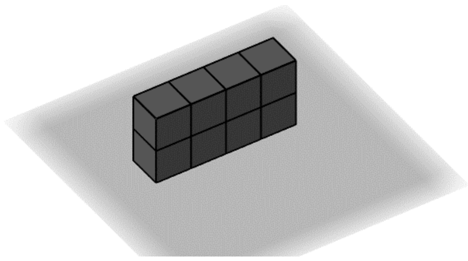
Řešení:

$$S_{\text{podstava}} = 16\ cm^2,$$

$$S = 96\ cm^2,$$

$$V = 64\ cm^3.$$

b.



Obrázek 83. Zadání úlohy 220

Řešení:

$$S_{\text{podstava}} = 16\ cm^2,$$

$$S = 112\ cm^2,$$

$$V = 64\ cm^3.$$

221. Panáky

Kolik panáků o objemu 2cl by se vešlo do třídy? Daná třída má na šířku velikost 6 m, na délku 8,05 m a na výšku 3,2 m.

Řešení:

Objem třídy má velikost

$$V = 154{,}56\ \mathrm{m}^3 = 15456000\ \mathrm{cl}.$$

Do třídy se tedy vejde 7 728 000 panáků.

222. Kostky

Kolik hracích kostek se stranou 1,5 cm se vejde do třídy? Daná třída má na šířku velikost 6,67 m, na délku 8,45 m a na výšku 3,38 m.

Řešení:

Objem jedné kostky je

$$V = 3{,}38\ \mathrm{cm}^3,$$

objem třídy

$$V = 190\ 501\ 870\ \mathrm{cm}^3.$$

Do třídy se vejde celkem 56 361 500 kostek.

223. Křídou plná třída I.

Kolik kusů křídy o rozměrech 1 cm, 1 cm a 10 cm se vejde do třídy, která má na šířku velikost 5 m, na délku 8 m a na výšku 3 m.

Řešení:

Objem dané třídy má velikost

$$V = 120\ 000\ 000\ \mathrm{cm}^3,$$

objem křídy je

$$V_{\mathrm{křída}} = 10\ \mathrm{cm}^3,$$

pak

$$\frac{V_{\mathrm{třída}}}{\mathrm{V}_{\mathrm{křída}}} = 12\ 000\ 000.$$

Do třídy se vejde dvanáct milionů kusů křídy.

224. Křídou plná třída II.

Křída má rozměry 1 cm, 1 cm a 10 cm. Kolik celých (nerozlámaných) křídy se vejde do třídy:

- **a.** na šířku?
- **b.** na délku?
- **c.** na výšku?

Daná třída má na šířku velikost 6,1 m, na délku 8,05 m a na výšku 3,35 m.

Řešení:

Celkový objem třídy je 164 501 750 cm^3. Do třídy umístíme:

- **c.** 16 450 175 křid a křídami vyplníme celý prostor třídy.
- **d.** 16 348 000 křid a z celkového objemu křídami nevyplníme prostor velikosti 1 021 750 cm^3.
- **e.** 16 204 650 křid a z celkového objemu křídami nevyplníme prostor velikosti 2 455 250 cm^3.

225. Křídy paní učitelky Nováčkové

Paní učitelka Nováčková učí matematiku třicet pět let. Rok má třicet čtyři školních týdnů, každý týden pak pět dní výuky, každý takový den průměrně čtyři hodiny matematiky. V každé hodině paní učitelka psaním vypotřebuje polovinu křídy o rozměrech 1 cm, 1 cm a 10 cm. Jaký objem křídy paní učitelka vypotřebovala za celou dobu, co vyučovala?

Řešení:

$$S = 35 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 119\,000\ cm^3 = 119\ dm^3$$

Za celou dobu vyučování paní učitelka celkem vypotřebovala 119 dm^3 křídy.

226. Krychličky **I.**

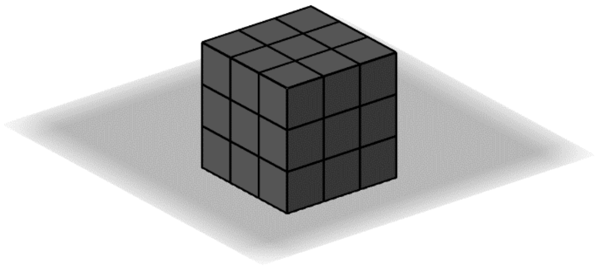
Krychle z polystyrénu se natře na šedo a potom rozřeže na dvacet sedm krychliček. Kolik krychliček:

a. má tři šedé stěny?

b. má dvě šedé stěny?

c. má jednu šedou stěnu?

d. je celých bílých?



Obrázek 84. Zadání úlohy 226

Řešení:

Daná krychle celkem obsahuje 27 krychliček.

a. Krychliček majících tři šedé stěny je 8 (jsou to ty, které obsahují vrcholy dané krychle).

b. Krychliček majících tři šedé stěny je 12 (jsou to zbylé krychličky obsahující hranu dané krychle).

c. Krychliček majících tři šedé stěny je 6 (jsou to krychličky uprostřed každé stěny dané krychle.

d. Celá bílá krychlička je jen 1 (krychlička ve středu dané krychle).

227. Krychličky II.

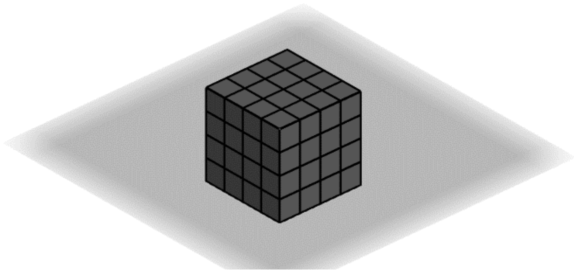
Krychle z polystyrénu se natře na šedo a potom rozřeže na šedesát čtyři krychliček. Kolik krychliček:

e. má jednu šedou stěnu?

f. má dvě šedé stěny?

g. má tři šedé stěny?

h. je celých bílých?



Obrázek 85. Zadání úlohy 227

Řešení:

Daná krychle celkem obsahuje 64 krychliček.

a. Krychliček majících jednu šedou stěnu je 24 (krychličky uprostřed každé stěny dané krychle).

b. Krychliček majících dvě šedé stěny je 24 (zbylé krychličky obsahující hranu dané krychle).

c. Krychliček majících tři šedé stěny je 8 (krychličky obsahující vrcholy dané krychle).

d. Celých bílých krychliček je 8 (krychličky ve středu dané krychle).

Nápomocný model může čtenář nalézt na [27]

228. Sto jedna

Na tabuli bylo napsáno několik těchto prvních členů číselné řady: 8, 11, 14, 17, 20, 23. Na kolikátém místě by bylo napsáno číslo 101, kdyby byla na tabuli napsána i další čísla řady?

Řešení:

$$101 = 8 + (n - 1) \cdot 3,$$
$$n = 32$$

Číslo sto jedna by bylo v pořadí na třicátém druhém místě.

Jiné řešení:

Určíme rozdíl mezi prvním členem řady 8 a členem 101. Daný rozdíl vydělíme třemi, protože to je rozdíl mezi každými dvěma sousedními členy číselné řady. Číslo 101 je od prvního vzdáleno o 31 míst, a je tedy na místě 32.

229. Dva lístečky žabince

Žabinec se rychle množí. Každý následující den je na rybníčku dvakrát víc lístečků. Jestliže hodíme do rybníčku jeden lísteček žabince, pokryje celou hladinu za třicet dní. Za kolik dní pokryje žabinec hladinu rybníčku, jestliže do něj tentokrát hodíme lístečky dva?

Řešení:

Ze vztahu pro výpočet $n-$ tého členu geometrické posloupnosti vyplývá

$$a_{30} = 1 \cdot 2^{29}.$$

Označme x počet dní zaplnění jezírka žabincem při vhození dvou lístečcích na počátku. Potom platí, že

$$a_x = 2 \cdot 2^{(x-1)}.$$

V obou případech se jezírko zaplní, oba vztahy tedy musí být v rovnosti

$$a_{30} = a_x,$$

$$x = 29.$$

Hodíme-li do jezírka dva lístečky, celé se žabincem zaplní za dvacet devět dní.

Jiné řešení:

Vypíšeme-li si počet lístečků žabince v prvním a druhém případě, pak

první: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, atd., druhý: 2, 4, 8, 16, 32, 64, atd. V druhém případě jsou čísla o jedno „napřed“, jedno číslo představuje jeden den. V druhém případě se rybníček naplní o den dříve, tedy za 29 dní.

230. Jedna až sto

Jaký je součet přirozených čísel od jedné do sta?

Řešení:

$$S_{100} = \frac{100(1+100)}{2} = 5\,050$$

Jiné řešení:

Pod sebe vypíšeme čísla

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots\cdots & 48 & 49 & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \ldots & 101 & 101 & 101 \end{array} = 50 \cdot 101 = 5\,050.$$

Právě takto postupoval kdysi malý matematik C. F. Gauss.

231. Sedmdesáté třetí místo

Marek vytvořil dlouhou řadu čísel 11, 13, 15, 17, atd. Potřebuje určit, které číslo bude na sedmdesátém třetím místě, ale nechce se mu čísla odpočítávat postupně až do tohoto místa. Pomozte Markovi najít hodnotu tohoto čísla.

Řešení:

$$a_{73} = 11 + 2 \cdot 72,$$

$$a_{73} = 155$$

Jiné řešení:

Rozdíl mezi jednotlivými čísly je 2. Druhé číslo můžeme napsat jako $11 + 2 \cdot 1$, třetí jako $11 + 2 \cdot 2$ atd. Číslo na 73. místě bude mít hodnotu: $11 + 2 \cdot 72 = 155$.

232. Hrušky

Hrušeň má 24 hlavních větví, každá z nich má dvanáct malých větví a na každé z malých větví je ještě šest větviček. Na každé větvičce je jedna hruška. Kolik hrušek je na stromě?

Řešení:

S využitím kombinatorického pravidla součinu získáváme

$$24 \cdot 12 \cdot 6 = 1\,728 \text{ hrušek.}$$

233. Čtyři židle

Kolika způsoby si mohou sednout čtyři dívky na čtyři židle?

Řešení:

Dvě totožné dívky nemohou sedět vedle sebe a hledáme všechny možnosti usazení dívek. Jedná se tedy o permutace bez opakování

$$P_4 = 4! = 24 \text{ možností usazení dívek.}$$

Jiné řešení:

Dívky můžeme očíslovat, pak počet všech možností je dán například touto tabulkou:

Možnost	Způsob usazení dívek				Možnost	Způsob usazení dívek				Možnost	Způsob usazení dívek			
1.	1	2	3	4	9.	1	4	3	2	17.	3	2	4	1
2.	2	1	3	4	10.	3	4	1	2	18.	3	4	2	1
3.	2	3	1	4	11.	1	4	2	3	19.	4	1	2	3
4.	2	3	4	1	12.	2	1	4	3	20.	4	1	3	2
5.	1	3	2	4	13.	2	4	1	3	21.	4	2	1	3
6.	1	3	4	2	14.	2	4	3	1	22.	4	2	3	1
7.	1	2	4	3	15.	3	1	2	4	23.	4	3	1	2
8.	3	2	1	4	16.	3	1	4	2	24.	4	3	2	1

Tabulka 29. Řešení úlohy 233

234. Kód

Třímístný kód má na prvním místě jedno z písmen A, B, C, D a na dalších dvou místech čísla mezi 10 až 50. Kolik třímístných kódů splňujících tyto podmínky lze sestavit?

Řešení:

Na první místo vybíráme jedno ze čtyř písmen. Pro druhé místo je čtyřicet jedna možností, neboť tolik je čísel od deseti do padesáti. Zároveň pro každé číslo, které je vybráno, jsou čtyři možnosti volby písmene. Možností tedy bude $4 \cdot 41 = 164$.

Jiné řešení:

Nejprve vybereme jedno ze čtyř písmen, a pak vybereme jedno ze čtyřiceti jedna čísel. S využitím kombinačních čísel a kombinatorického pravidla součinu získáme

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{41}{1} = 164 \text{ možností.}$$

235. Titanik

Otec, matka, syn a dcera nastoupí do Titaniku. Kolik je možností, že někdo z rodiny přežil? (např.: jeden, všichni, atd.)

Řešení:

Níže je uvedená tabulka jednotlivých možností pro danou rodinu. Číslo 1 znamená přežití, 0 opak.

otec	matka	syn	dcera
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Tabulka 30. Řešení úlohy 235

Celkem je patnáct možností, že někdo z rodiny přežil.

Jiné řešení:

Ze čtyř členů rodiny vybíráme ty, kteří přežili a získáme tak

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15 \text{ možností přežití někoho z rodiny.}$$

236. Deset přátel

Kolik stisků ruky nastane, když se sejde deset lidí a každý si podá ruku s každým?

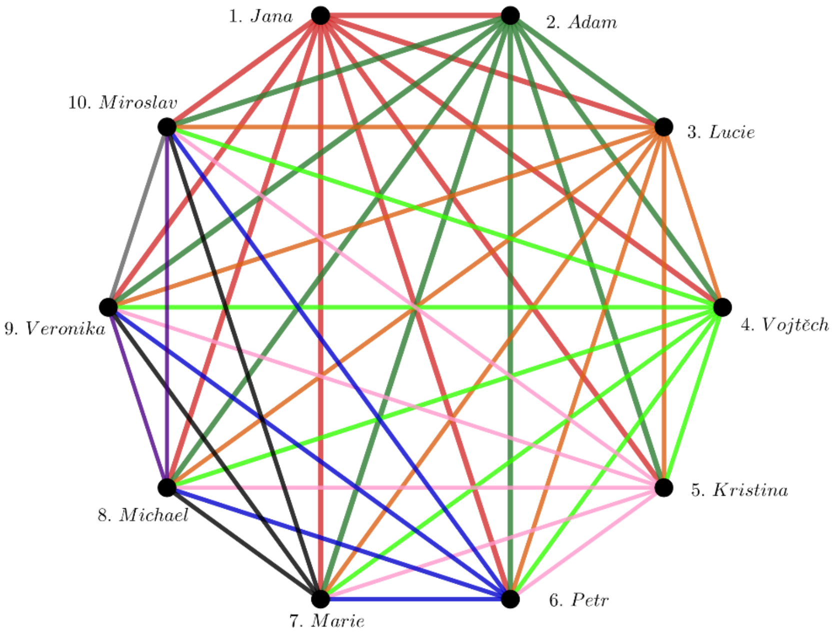
Řešení:

První si podá ruku s ostatními devíti. Druhý už si může podat ruku jen s osmi, protože mu ruku podal ten předcházející. Třetí si podá ruku se sedmi, protože ti předchozí dva mu ji již podali atd. Desátému již všichni ruku podali, takže i on podal ruku jim, přisoudíme mu tedy číslo nula. Tedy celkem získáváme

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45 \text{ podání ruky.}$$

Jiné řešení:

Počet všech podání ruky můžeme ztotožnit s počtem úhlopříček a stran v desetiúhelníku. Proč tomu tak je napoví obrázek.



Obrázek 86. Řešení úlohy 236

Jiné řešení:

Ruku si podají vždy dva lidé, budeme tedy tvořit dvojice ze všech deseti lidí. Dvojice, například Adam-Vojtěch, je totožná s dvojicí Vojtěch-Adam, jedná se tedy o kombinace. Uvažujeme pouze případy, kdy jedinec podá ruku druhému, ne sám sobě, takže půjde o kombinace bez opakování. Celkem je to tedy

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ podání ruky.}$$

237. Třídní sraz

Sedm bývalých spolužáků se po letech sešlo na třídním srazu. Každý drží v ruce půllitr. Kolik bude celkem ťuknutí, když si každý s každým ťukne?

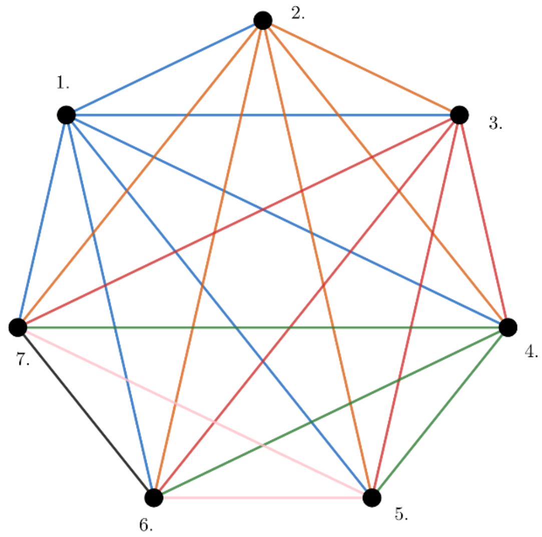
Řešení:

Vzájemně si ťuknou vždy dvojice spolužáků. Nejde o pořadí, tedy jestli je na prvním místě první, nebo druhý spolužák. Každý ze spolužáků se ve dvojici vyskytne pouze jednou. Počet dvojic, které pak vytvoříme ze sedmi lidí je počet všech kombinací bez opakování

$$K(2,7) = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ ťuknutí.}$$

Jiné řešení:

Představme si těchto sedm bodů.



Obrázek 87. Řešení úlohy 237

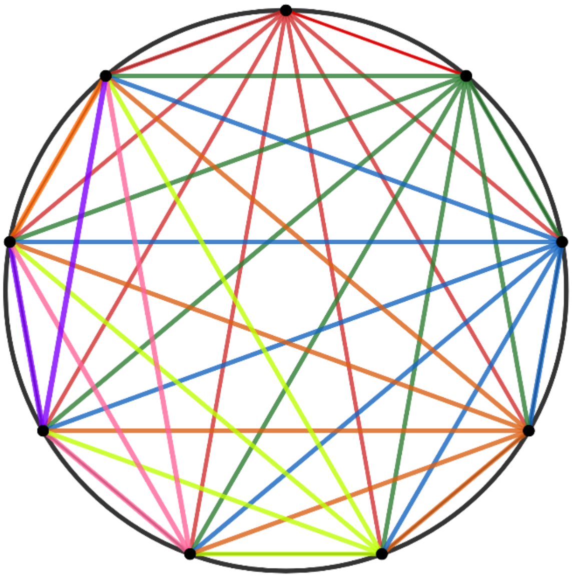
Spojnice z jednoho bodu k dalšímu představuje vzájemné ťuknutí. Počet spojnic vycházejících z jednotlivých bodů je $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 21$. Po vytvoření všech spojnic vzniká pravidelný sedmiúhelník se všemi svými úhlopříčkami. Všechny jeho strany a úhlopříčky představují počet všech ťuknutí, tedy 21.

238. Body

Po obvodu kružnice leží devět bodů. Kolika přímkami je lze pospojovat navzájem tak, aby byl spojen každý s každým.

Řešení:

Z prvního bodu vedeme do zbylých osmi bodů osm přímek (viz obrázek), z druhého bodu vedeme do zbylých sedmi bodů sedm přímek, a tak dále až z devátého bodu již nepovedeme žádnou přímku, protože je se všemi ostatními již spojen. Celkem je pak přímek $8 + 7 + 6 + \cdots + 2 + 1 + 0 = 36$.



Obrázek 88. Řešení úlohy 238

Jiné řešení:

Spojujeme vždy dva body, děláme tedy dvojice. V nich se daný prvek (bod) vyskytne pouze jednou a nezáleží na pořadí prvků v jednotlivých dvojicích. Půjde tedy o kombinace bez opakování a celkový počet je pak

$$K = \frac{9!}{7!\,2!} = \binom{9}{2} = 36 \text{ přímek.}$$

239. Autíčka I.

Kolika způsoby můžeme rozdělit čtyři autíčka mezi tři děti (uvažujeme i případy, že jedno z dětí nedostane žádné a jiné všechny)

Řešení:

první	druhý	třetí
0	0	4
0	4	0
4	0	0
0	1	3
0	3	1
1	0	3
1	3	0
3	0	1
3	1	0
1	1	2
1	2	1
2	1	1
0	2	2
2	0	2
2	2	0

Obrázek 89. Řešení úlohy 239

Třem dětem přiřazujeme autíčka. Na přiřazené množství pohlížíme jako na číslo. Celkem dostáváme 15 možností.

Jiné řešení:

Tuto úlohu můžeme ztotožnit s úlohou *rozdělit čtyři mince do tří šuplíků*. Číslo 0 představuje minci, číslo 1 představuje přepážku mezi šuplíky. Dostáváme tak například 000110. V prvním šuplíku jsou tedy dvě mince, ve druhém není žádná a ve třetím je jedna. Jedná se o kombinace s opakováním, kde číslo 0 se opakuje čtyřikrát a číslo 1 dvakrát. Celkem je tedy

$$K'(2{,}4) = \frac{6!}{4!\,2!} = 15 \text{ možností.}$$

240. Autíčka II.

Zde se jedná o stejné zadání jako v předešlé úloze s tím rozdílem, že se dětem nemusí rozdělit všechna čtyři autíčka (uvažujeme případ, kdy nerozdělíme žádné autíčko nebo jen tři atd.)

Řešení:

Třem dětem přiřazujeme různý počet autíček.

první	druhý	třetí	první	druhý	třetí
0	0	0	0	2	2
1	1	1	2	0	2
0	0	1	2	2	0
0	1	0	0	1	2
1	0	0	0	2	1
0	0	2	1	0	2
0	2	0	1	2	0
2	0	0	2	0	1
0	0	3	2	1	0
0	3	0	0	1	3
3	0	0	0	3	1
0	0	4	1	0	3
0	4	0	1	3	0
4	0	0	3	0	1
0	1	1	3	1	0
1	0	1	1	1	2
1	1	0	1	2	1
			2	1	1

Obrázek 90. Řešení úlohy 240

Celkem 35 možností.

Jiné řešení:

Tuto úlohu můžeme ztotožnit s úlohou *rozdělit čtyři, tři, dva a jednu minci do tří šuplíků*. Jedná se o kombinace s opakováním. Stejně jako v předchozí úloze číslo 0 bude představovat minci, 1 přepážku mezi šuplíky. Mince rozdělíme čtyřikrát, třikrát, dvakrát, jednou či vůbec a přepážky budou vždy dvě. Celkem existuje

$$K'(0,1) = \frac{6!}{4!\,2!} + \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{4!}{2!\,2!} + \frac{3!}{1!\,2!} + \frac{2!}{0!\,2!} = 35 \text{ možností.}$$

241. Část dne

Kolik hodin je $\frac{9}{16}$ dne?

Řešení:

$$24 \cdot \frac{9}{16} = 16{,}5 \text{ hodiny}$$

242. Sekundy

Kolik sekund je 0,36 hodiny?

Řešení:

$$60 \cdot 60 \cdot 0{,}36 = 1\,296 \text{ s}$$

243. Pořadí

Seřaďte sestupně tyto časy: 1/3 dne; 500 min; 28 000 s; 7,9 h.

Řešení:

$$500\text{ min}; \frac{1}{3}\text{ dne}; 7{,}9\text{h};\ 28\,000\text{ s}$$

244. Vteřiny

Kolik vteřin je 3 h 3 min 3 s?

Řešení:

$$3 \cdot 3600 + 3 \cdot 60 + 3 = 10\,983\text{ s.}$$

245. Čtyři sedmičky

Kolik celých hodin, minut a sekund je 7 777 s?

Řešení:

Číslo 7 777 s není dělitelné šesti (šedesáti) a proto ho musíme rozdělit na $(7\,740 + 37)$s. Potom

$$7\,740 \div 60 = 129\text{ min} = 2\text{ h }9\text{ min.}$$

Celkem dostáváme, že 7 777 s jsou 2 h 9 min 37 s.

246. Minuty I.

Kolik minut je rozdíl: 1 rok − 2 měsíce − 3 týdny − 4 dny − 5 h − 6 min? Uvažujeme nepřestupný rok a měsíc mající třicet dní.

Řešení:

$$402\,894\text{ minut}$$

247. Minuty II.

Kolik minut je: 1 den − 1 h − 1 min?

Řešení:

$$24 \cdot 60 - 60 - 1 = 1440 - 61 = 1379\text{ minut}$$

248. Minuty III.

Začátek děje je 20. 6. v 19: 42; konec děje je 21. 6. v 7: 21. Kolik minut trval děj?

Řešení:

Začátek děje je 20. 6. v 19: 42, za dvanáct hodin bude 21. 6. v 7: 42. Děj tedy trval 11 hod 39 min.

249. Délka děje

Děj začal 17. 8. v 9 h 42 min 12 s a skončil 20. 8. v 7 h 38 min 8 s. Kolik **celých** dnů, **celých** hodin, **celých** minut a sekund děj trval?

Řešení:

K časovému údaji 17. 8. 9 h 42 min 12 s přidáme tři dny, tedy 72 hodin. Dostáváme tak časový údaj 20. 8. 9 h 42 min 12 s, což je více než konečný časový údaj. Musíme tedy odečíst přebývající časový údaj

$$9\text{ h }42\text{ min }12\text{ s} - 7\text{ h }38\text{ min }8\text{ s} = 2\text{ h }4\text{ min }4\text{ s}.$$

Tento časový údaj odečteme od původních 72 hodin a získáme délku děje

$$71\text{ h }59\text{ min }60\text{ s} - 2\text{ h }4\text{ min }4\text{ s} = 69\text{h }55\text{ min }56\text{ s} = 2\text{ dny }21\text{ h }55\text{ min }56\text{ s}.$$

250. Stejná čísla

Napište datum, kterého se pravděpodobně dožijete (v období příštích devadesáti let) a ve kterém je:

a. pět stejných číslic.

b. šest stejných číslic.

Řešení:

a. Například: 2. 2. 2022, 20. 2. 2022, 11. 11. 2019 a další

b. V tomto případě se jedná o tyto dvě data: 22. 2. 2022, 22. 12. 2022.

251. Ciferný součet

V kolik hodin je na displeji digitálních hodin největší ciferný součet?

Řešení:

Největší cifrou je 9, dále budeme hledat další nejvyšší možné cifry tak, aby spolu s cifrou 9 udávaly reálný čas. Nejvyšší ciferný součet bude udávat čas **19:59**.

252. Druhé čtvrtletí

Kolik dní má druhé čtvrtletí kalendářního roku?

Řešení:

Druhé čtvrtletí obsahuje měsíce duben, květen, červen, má tedy 91 dní.

253. Polovina prázdnin

Začátek letních prázdnin byl v daném případě 30. 6. v 9:00 hodin a konec prázdnin 1. 9. v 8:00 hodin. Jaký den a v kolik hodin nastane přesně polovina prázdnin?

Řešení:

Celkem měly prázdniny 1511 hodin. Z toho polovina je 755,5 hod, což je 31 dní a 11,5 hodin.

Přesná polovina prázdnin nastane 31. 7. ve 20:30 hodin.

254. Letní prázdniny I.

Kolik minut trvaly letní prázdniny (například v případě trvání prázdnin od 29. 6., 9.00 do 3. 9., 8.00)?

Řešení:

Musíme pamatovat na to, že červenec i srpen mají 31 dní! V červnu se jedná o 2 340 min, v červenci o 44 640 min, v srpnu o stejný počet minut jako v červenci, v září o 3 360 min. Celkem to je pak 94 980 min.

Jiné řešení:

Uvažujeme jeden celý den v červnu, třicet jedna dní v červenci a srpnu a k tomu dva celé dva dny v září. Celkem tedy 65 dní, k tomu zbývá přidat patnáct hodin v červnu a osm hodin v září. Celkový výsledek je pak 94 980 min.

255. Matematické prázdniny

Kolik minut uplynulo od poslední do první hodiny matematiky (například v případě, že poslední hodina matematiky skončila 28. 6. v 8.40 a 6. 9. v 8.00 začala nová hodina)?

Řešení:

V červnu se jedná o 3 800 min, v červenci o 44 640 min, v srpnu o stejný počet minut, jako v červenci, v září se pak o 7 680 min. Celkem to je 100 760 min.

Jiné řešení:

Uvažujeme dva celé dny v červnu, třicet jedna dní v červenci a srpnu a k tomu pět celých dní v září. Celkem tedy 69 dní, k tomu zbývá přidat patnáct hodin a dvacet minut v červnu a osm hodin v září. Celkový výsledek je pak stejný.

256. Letní prázdniny II.

Kolik sekund trvaly letní prázdniny, které začaly 30. 6. v 8:30 a skončily 1. 9. v 8:00?

Řešení:

Měsíc	Počet sekund
červen	55 800
červenec	2 678 400
srpen	2 678 400
září	28 800
Celkem	441 400

Tabulka 31. Řešení úlohy 256

257. Tři prášky

Lékař dal pacientovi tři prášky a řekl mu, aby si vzal jeden prášek každou půlhodinu. Jak dlouho bude pacient prášky užívat?

Řešení:

Pacient užije první prášek, pak půl hodiny počká, užije druhý prášek a opět počká půl hodiny. Prášky bude tedy užívat jednu hodinu.

258. Popozítří předevčírem

Jestliže popozítří bude pátek, který den byl předevčírem?

Řešení:

Pozítří je čtvrtek, zítra středa, tedy dnes je úterý. Včera tedy bylo pondělí a předevčírem neděle.

259. Mezi jednou hodinou

Před dvěma hodinami bylo stejně po třinácté hodině, jako zbývalo do jedné hodiny ráno. Kolik je nyní hodin?

Řešení:

V půli mezi časy 13:00 a 01:00 je čas 19:00, takže nyní je 21 hodin.

260. Markovy narozeniny

Lenka má narozeniny v neděli 9. 6. Marek bude mít narozeniny za 55 dní. Kdy a jaký den bude mít Marek narozeniny?

Řešení:

Měsíc červen má 30 dní, pak do konce měsíce zbývá 21 dní. Červenec má 31 dní, pak tedy zbývají 3 dny z měsíce srpna, hledané datum narozenin je 3. 8.

Pro určení dne v týdnu zjišťujeme zbytek po dělení $55 \div 7$, tento zbytek představuje počet dní uplynulých od počátku (neděle) a zapisujeme to takto: $55 \; mod \; 7$, číslo 49 je v našem případě nejvyšší číslo dělitelné sedmi a dále zbývá šest, tedy $55 \; mod \; 7 = 6$. Narozeniny budou šestý den po neděli, což je sobota.

Marek bude mít narozeniny v sobotu 3. 8.

261. Stý den

Jaké datum má stý den nepřestupného roku?

Řešení:

Měsíc leden má 31 dní, únor 28 dní, březen 31 dní, což je celkem 90 dní, ještě tedy zbývá deset dní. Stý den nepřestupného roku má tedy datum 10. 4. (Je-li rok přestupný, pak se jedná o datum 9. 4.)

262. Dvou stý den

Jaké datum má dvoustý den v nepřestupném roce?

Řešení:

Prvních šest kalendářních měsíců má dohromady 181 dní. Dvoustý den v nepřestupném roce má datum 19. 7.

263. Co za den?

Určité datum například 3. 7. 2013 je čtvrtek; 3. 7. 2014 je pátek; 3.7. 2015 je sobota; Jaký den v týdnu je 3. 7. 2016? Své řešení zdůvodněte.

Řešení:

Přestupný rok, který se opakuje každé čtyři roky má 366 dní, což je 52 týdnů a dva dny. První ze dvou dnů „navíc“ je na konci roku, tedy všechny dny v následujícím roce budou o den posunuty (stejně jako v případě roku nepřestupného). Druhý den „navíc“ je 29. února, tedy všechny dny po tomto datu budou také posunuty o den (to je specifické pouze pro přestupný rok). Datum 3. 7. 2016 tedy bude v pondělí.

264. Co za den? Podruhé

Dne 14. 12. 2020 je pondělí. Který den v týdnu bude 14. 2. 2030?

Řešení:

V nepřestupných letech 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, bude posun o jeden den. V přestupných letech 24, 28, bude posun činit dva dny. Celkem posun činí dvanáct dní, dne 14. 2. 2030 tedy bude sobota.

265. Skrývačka I.

Vymyslete větu, ve které bude ukryto slovo: JEDNA, DVĚ, TŘI, ČTYŘI, PĚT, ŠEST, SEDM, OSM, DĚVĚT, DESET, DVACET, TŘICET, STO a TISÍC.

Například:

Utři to! – v této větě se ukrývá slovo tři.
Los měl krásné parohy. – v této větě se ukrývá slovo osm.
Nenos to tam! – v této větě se ukrývá slovo sto.

266. Skrývačka II.

Vymyslete větu, ve které bude ukryto slovo: PODÍL, SOUČIN, SOUČET, ROZDÍL.

Například:

Jsou činní v Junáku. – v této větě se ukrývá slovo součin.
Ve Francii jsou četníci. – v této větě se ukrývá slovo součet.

267. Dělitelné devíti

Zvolte si jakékoli dvojciferné číslo (je možné mít i dvě stejné cifry). Odečtěte od něj součet jeho cifer. Vždy vyjde číslo dělitelné devíti.

Ukázka:

Uvažujeme dvě libovolná přirozená čísla x, y menší než deset, kde x je některé z čísel 1 až 9, y je některé z čísel 0 až 9. V případě, že

$$x \neq y$$

je

$$x \cdot 10 + y \cdot 1 - (x + y) = x \cdot 9.$$

V případě opačném, tedy

$$x = y$$

je

$$x \cdot 10 + x - 2x = x \cdot 9.$$

V obou případech tedy vychází číslo dělitelné devíti.

268. Kouzlo I.

Zvolte si oblíbené číslo mezi jedničkou a devítkou. Nejdříve ho vynásobte devíti, a pak číslem 12345679. Výsledkem vás jistě překvapí.

Ukázka:

$$9 \cdot 12345679 = 111\,111\,111$$

Zdůvodnění této úlohy je ponecháno na čtenáři.

269. Kouzlo II.

Hodnotu vašeho věku (musí být v rozmezí 10-99 let) vynásobte čísly 259 a 39. Výsledek vás jistě překvapí.

Ukázka:

Součin $259 \cdot 39$ je roven 10 101. Je třeba, aby hodnota věku byla číslem dvojciferným. Kdyby byla číslem jednociferným např. 5, pak by vyšlo 50505. Kdyby šlo o trojciferné číslo, pak by se některé cifry sečetly. Proto je podmínkou věk v rozmezí 10-99 let.

270. Tečky

Kolik teček na obrázku **je**:

a. jen v trojúhelníku.

Řešení: 1

b. jen v obdélníku.

Řešení: 3

c. jen v kruhu.

Řešení: 7

d. v trojúhelníku a současně v obdélníku.

Řešení: 5

e. v trojúhelníku a současně v kruhu.

Řešení: 12

f. v kruhu a současně v obdélníku.

Řešení: 8

g. současně v kruhu, obdélníku a trojúhelníku.

Řešení: 5

Kolik teček na obrázku **není**:

h. v kruhu.

Řešení: 4

i. v kruhu, ale je v trojúhelníku.

Řešení: 1

j. v kruhu, ale je v obdélníku.

Řešení: 3

k. v obdélníku.

Řešení: 15

l. v obdélníku, ale je v kruhu.

Řešení: 14

m. v obdélníku, ale je v trojúhelníku.

Řešení: 8

n. v trojúhelníku.

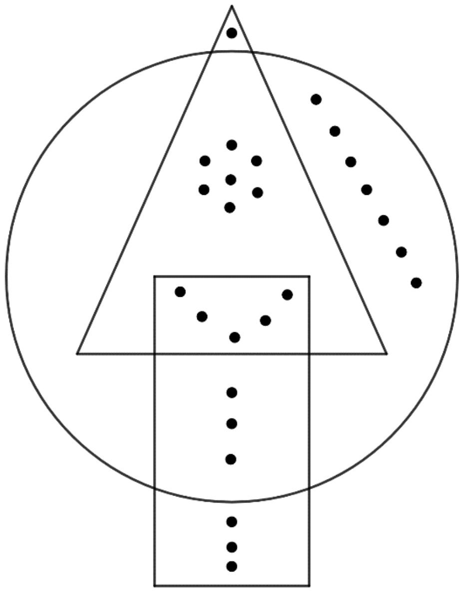
Řešení: 13

o. v trojúhelníku, ale je v kruhu.

Řešení: 10

p. v trojúhelníku, ale je v obdélníku.

Řešení: 6



Obrázek 91. Zadání úlohy 270

271. Křížovka

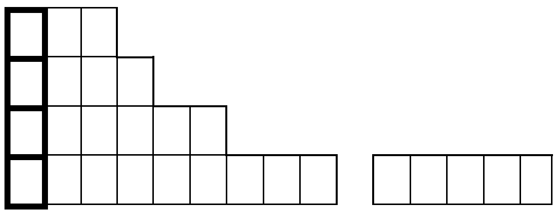
Doplňte křížovku:

2^3

$-3 \cdot 2 + 8 \div 4 + 11 =$

„křivá“ kružnice

π



Tajenka:

OSEL:Osm, Sedm, Elipsa, Ludolfovo číslo;

272. Co to je?

Má to šest nohou, dvě hlavy, čtyři uši a chodí to po čtyřech. Co je to?

Řešení:

jezdec na koni

273. Honza a Franta

Honza měří 160 cm a Franta 180 cm. Chlapci chtějí natrhat jablka, ale nedosáhnou na strom. Honza si tedy sedne Frantovi za krk, ale stále na strom nedosáhnou. Má smysl, aby se prohodili?

Řešení:

Ano, Franta je delší, a tak bude mít nejspíš i delší ruce.

274. Běžecký závod

Kolikátí doběhneme, když během závodu:

a. předběhneme druhého?

   Řešení:

   Doběhneme druzí.

b. předběhneme posledního?

   Řešení:

   Tento případ není možný, neboť nelze předběhnout posledního.

275. Zajímavé časy

Napište některé zajímavé časy, které se mohou objevit na displeji digitálních hodin.

Například:

22:22, 12:34, 23:45, 13:57 (liché cifry), 20:48 (sudé cifry), atd.

276. Dva tisíce sto

Napište zajímavá data do roku 2100. Zajímavostí může být například hodně stejných čísel nebo čísla jdoucí postupně.

Například:

10. 10. 2100, 2. 1. 2100, 5. 5. 2055, 8. 9. 2089, 22. 2. 2022, atd.

Některé odkazy na populárně-naučnou literaturu zabývající podobnými matematickými úlohami

- GARDNER, Martin. *Jakou barvu má medvěd?: nejlepší matematické a logické hádanky*. Praha: Portál, 2017. ISBN 978-802-6211-662.

  Nejlepší matematické úlohy a hádanky, pro žáky ZŠ.

- GARDNER, Martin. *Zábavné matematické hádanky: matematika pro všechny!*. Praha: Dokořán, 2018. Albatros In. ISBN 978-80-7363-884-9.

  Matematické úlohy a hry s celými čísly, o rychlosti, peníze, geometrie v prostoru i v rovině, pro žáky SŠ.

- HEMME, Heinrich. *Kolumbovo vejce a jiné záludné hříčky: matematika pro všechny!*. Praha: Albatros, 2007. Albatros In. ISBN 978-80-00-01821-8.

  Logické hádanky, pro žáky ZŠ i SŠ.

- HEMME, Heinrich. *Heuréka: matematické hádanky s překvapivým řešením*. Praha: Portál, 2019. ISBN 978-80-262-1508-0.

  Zábavné matematické kvízy a hlavolamy, ZŠ i SŠ.

- STROUHAL, Josef. *Hádej,hádej hadači - matematické kratochvíle*. 1966. Praha: SNDK, 1966. ISBN 13-110-66.

  Matematické hádanky pro děti ZŠ.

- VECHETA, Vladimír. *Einsteinovy hádanky a jiné hlavolamy: 111 11 1 zapeklitost pro trénink mozku*. 2. vyd. Brno: BizBooks, 2013. ISBN 978-80-265-0053-7.

  Logické úlohy, žáci ZŠ.

- NIEDERMAN, Derrick. *101 hádanek pro náročné: pro mládež a dospělé*. 2. vyd. Praha: Portál, 2006. ISBN 80-736-7065-8.

  Logické hádanky.

- RUSSELL, Harriet a Georgia AMSON-BRADSHAW. *Matiku mám v malíku!: tvořte, experimentujte, hrajte si : pracovní listy pro vaše nápady*. 2. vyd. Praha: Mladá fronta, 2018. ISBN 978-80-204-4675-6.

  Logické hádanky, šifry, pro mladší žáky ZŠ.

- FOŘTÍK, Václav a Georgia AMSON-BRADSHAW. *Zábavná matematika a logika pro bystré děti: tvořte, experimentujte, hrajte si : pracovní listy pro vaše nápady*. 2. vyd. Praha: Fragment, 2018. ISBN ISBN978-80-253-3877-3.

  Seznámení hravou formou se základy sčítání, odčítání a porovnávání pro předškolní děti.

- HOZOVÁ, Libuše a Georgia AMSON-BRADSHAW. *Matematické pohádky: pro čtenáře od 11 do 111 let : 111 pohádek*. 2. vyd. Praha: HAV, 2006. ISBN 80-903-6253-2.

  Příběhy s logickou zápletkou, pro děti i dospělé.

- BUDÍNOVÁ, Irena a Georgia AMSON-BRADSHAW. *Matematika pro bystré a nadané žáky*. Praha: ekniha EDITKA. ISBN 978-80-266-1019-9

  Pracovní listy nejen pro nadané žáky ZŠ.

- GOLDSMITH, Mike a Georgia AMSON-BRADSHAW. *Od nuly k nekonečnu: matematické vychytávky, které musíš znát*. Praha: Fortuna Libri, c2013. Fortuna Junior. ISBN 978-80-7321-717-4.

  Matematické záhady a vychytávky, pro žáky ZŠ.

Přehled některých webových stránek s matematickými úlohami

- *Matematika hrou, 2018* [online]. [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: http://matematika.hrou.cz/

  Procvičování učiva, pro žáky 1. stupně ZŠ.

- *Matika.in* [online]. [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: https://www.matika.in/cs/

  Procvičování matematiky pro žáky ZŠ.

- *Poki.cz matematika* [online]. [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: https://poki.cz/matematika

  Matematické hry.

- *Matematika s radostí* [online]. [cit. 2020-06-22]. Dostupné z: http://msr.vsb.cz/

  Matematické hry, testy a soutěže pro žáky ZŠ i SŠ.

- *Umíme matiku* [online]. [cit. 2020-06-15]. Dostupné z: https://www.umimematiku.cz/

  Zábavné procvičování učiva pro žáky ZŠ i SŠ.

ZÁVĚR

V teoretické části mojí diplomové práce jsem popsal pojem *motivace* z pedagogického hlediska. Dále jsem uvedl některá doporučení k různým oblastem související s motivací ve vyučování. Uvedená doporučení jsem převzal od autorů literatury, kterou dále zmiňuji. Dále uvedené metody výuky mohou zvyšovat motivaci žáků ve výuce matematiky.

V praktické části mojí práce uvádím seznam odborné a populárně naučné literatury. Do tohoto seznamu zahrnuji také internetové zdroje obsahující úlohy podobné těm, kterými se zabývá tato práce. Důležitou součástí mé diplomové práce je dokument čítající 276 vypracovaných úloh. Jednotlivé úlohy jsem uvedl spolu s jedním nebo více možnými řešeními na základě kategorií, do kterých jsem jednotlivé úlohy rozřadil.

Velmi mě těší, že díky mé diplomové práci vznikl dokument, který mohou využít jak učitelé během hodin výuky, tak i samotní žáci ke své vlastní potřebě. Mám naději, že bude-li tento soubor v budoucnosti hojně využíván, tak přinese své dobré plody ve vztahu k motivaci ve výuce matematiky.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 4., aktualiz. vyd. [i.e. Vyd. 5.]. Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-416-8.

[2] LOKŠOVÁ, Irena a Josef LOKŠA. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8205-X.

[3] PAVELKOVÁ, Isabella. *Motivace žáků k učení: perspektivy orientace žáků a časový faktor v žákovské motivaci*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2002. ISBN 80-729-0092-7.

[4] PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování*. Přeložil Štěpán KOVAŘÍK. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-070-7.

[5] ČAPEK, Robert. *Líný učitel: jak učit dobře a efektivně*. Praha: Raabe, [2017]. Dobrá škola. ISBN 978-80-7496-344-5.

[6] COUFALOVÁ, Jana. *Projektové vyučování pro první stupeň základní školy: náměty pro učitele*. Praha: Fortuna, 2006. ISBN 80-716-8958-0.

[7] Kognitivní učení. *Wikisofia.cz* [online]. [cit. 2020-04-28]. Dostupné z: https://wikisofia.cz/wiki/Kognitivn%C3%AD_u%C4%8Den%C3%AD

[8] SIGMUND, Martin, Jana KVINTOVÁ a Michal ŠAFÁŘ. *Vybrané kapitoly z manažerské psychologie* [online]. Univerzita Palackého v Olomouci, 2014 [cit. 2020-03-23]. ISBN 978-80-244-4372-0. Dostupné z: https://publi.cz/books/171/Cover.html

[9] Maslows hierarchy of needs. *https://www.learning-theories.com* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: https://www.learning-theories.com/maslows-hierarchy-of-needs.html

[10] QUIGLEY, Shawn P. *What is ERG?* [online]. [cit. 2020-03-23]. Dostupné z: https://www.valuetransform.com/existence-relatedness-growth-erg-theory-motivation/

[11] ZIELENIECOVÁ, Pavla. Metoda řešení problémů: Problémové vyučování. *Kdf.mff.cuni.cz* [online]. [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/pedagogika/dopl_texty/Metoda%20%C5%99e%C5%A1en%C3%AD%20probl%C3%A9m%C5%AF.pdf

[12] Rámcové vzdělávací programy [online]. [cit. 2020-03-13]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/trest.

[13] SMOLOVÁ, Alžběta. *Školní výkonová motivace*. Praha, 2011. Dostupné také z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/82887/. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Isabella Pavelková.

[14] NEŠPOR, Zdeněk R. *Teorie výkonové motivace* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: https://encyklopedie.soc.cas.cz/w/Teorie_v%C3%BDkonov%C3%A9_motivace

[15] PAJEROVÁ, Markéta. *Vliv motivace k učení u žáků 8. a 9. tříd v tradičních a alternativních školách na jejich další vzdělávací aspirace*. Brno, 2012. Dostupné také z:

https://is.muni.cz/th/m2y4t/zaverecna_bakalarska_prace.txt.Bakalářská práce. Masarykova univerzita Brno. Vedoucí práce Ivana Poledňová

[16] Theories of motivation. *https://www.open.edu* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: https://www.open.edu/openlearn/health-sports-psychology/motivation-and-factors-affecting-motivation/noctent-section-4

[17] KOZELKA, Pavel. *Výkonová motivace a její zjišťování*. České Budějovice, 2010. Dostupné také z: https://theses.cz/id/1eb38c/downloadPraceContent_adipIdno_14827. Bakalářská práce. Jihočeská univerzita České Budějovice. Vedoucí práce František Man

[18] STARÝ, Karel. Sumativní a formativní hodnocení. *Clanky.rvp.cz* [online]. 2006 [cit. 2020-04-29]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/o/g/992/SUMATIVNI-A-FORMATIVNI-HODNOCENI.html/

[19] FIŠEROVÁ, Hana. Hodnocení žáků. *Wiki.rvp.cz* [online]. 2011 [cit. 2020-04-29]. Dostupné z: https://wiki.rvp.cz/index.php?title=Knihovna/1.Pedagogick%C3%BD_lexikon/H/Hodnocen%C3%AD_%C5%BE%C3%A1k%C5%AF&action=history

[20] Referenční rámec. *Inkluzivniskola.cz* [online]. [cit. 2020-04-29]. Dostupné z: https://www.inkluzivniskola.cz/organizace-integrace-cizincu/referencni-ramec

[21] Jak hodnotit žáky cizince: Za co a jak je hodnotit? Jak vám může pomoci vyrovnávací plán? *Meta-ops.cz* [online]. [cit. 2020-04-29]. Dostupné z: https://www.meta-ops.cz/sites/default/files/skola_pro_vsechny_-_8._jak_hodnotit_zaky_cizince.pdf

[22] Motivace. *Wikisofia.cz* [online]. [cit. 2020-04-30]. Dostupné z: https://wikisofia.cz/wiki/Motivace

[23] PAVELKOVÁ, Isabella a Vladimír HRABAL. Dotazník školní výkonové motivace. *Nuv.cz* [online]. [cit. 2020-03-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/ae/dotaznik-skolni-vykonove-motivace-zaku

[24] *Magic Triangle Math Puzzle (and solution).* Youtube.com [online]. [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=y-83VJ8qWF4,

[25] *Puzzle - Packing Eight Numerals Into Eight Squares.* Youtube.com [online]. [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=QFN5a5tDiwo

[26] STEMSOS Algebra II Pbl Level I Cross Totals. Youtube.com [online]. [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=LJJFSWT_gjk

[27] VÁGOVÁ, Renáta. Cube Layer Problem. Geogebra.org [online]. [cit. 2020-06-21]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/uv3fwxf3

SEZNAM OBRÁZKŮ