

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Různé druhy integrálů a jejich aplikace
- sbírka řešených příkladů



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.
Rok odevzdání: 2012

Vypracoval:
Veronika Skýpalová
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení RNDr. Rostislava Vodáka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 20. dubna 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Rostislavu Vodákovi, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém $\text{\TeX}$, kterým je práce vysázena.

Obsah

Úvod	5
Úvod do integrálního počtu	6
A Neurčitý integrál - Primitivní funkce	7
1 Pojem primitivní funkce	7
1.1 Základní vzorce pro primitivní funkce	8
1.2 Základní vlastnosti primitivní funkce	8
2 Integrace metodou per partes (po částech)	9
3 Integrace substituční metodou	12
4 Integrace racionální funkce	14
4.1 Pojem racionální funkce	14
4.2 Rozklad na parciální zlomky	14
4.3 Ostrogradského metoda	17
5 Integrace iracionální funkce	19
5.1 Substituce $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$	19
5.2 Eulerovy substituce	20
5.2.1 Eulerova substituce prvního typu	21
5.2.2 Eulerova substituce druhého typu	21
5.2.3 Eulerova substituce třetího typu	21
5.3 Goniometrické a hyperbolické substituce	25
6 Integrace goniometrické funkce	27
6.1 Univerzální substituce	27
7 Integrace hyperbolické funkce	29
7.1 Univerzální substituce	29
8 Integrace exponenciální funkce	32
8.1 Substituce	32
B Určitý integrál	34
1 O jedné úloze vedoucí k pojmu určitého integrálu	34
2 Definice určitého integrálu	36

3	Podmínky integrovatelnosti	37
	Věta 1. (Nutná a postačující podmínka)	37
	Věta 2.	37
	Věta 3.	37
	Věta 4.	37
	Věta 5.	37
4	Vlastnosti Riemannova integrálu	37
5	Výpočet Riemannova integrálu	38
	5.1 Newton - Leibnitzův vzorec	38
	5.2 Metoda per partes	40
	5.3 Substituční metoda	41
C	Aplikace integrálního počtu	43
1	Výpočet obsahu rovinného útvaru	43
2	Výpočet objemu u rotačního tělesa	44
3	Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa	46
4	Výpočet délky křivky	47
5	Užití integrálu ve fyzice	49
6	Diferenciální rovnice	51
7	Užití integrálů ve statistice	53
8	Užití integrálů ve finanční matematice	55
	Závěr	57
	Literatura	58

Úvod

Cílem této bakalářské práce je seznámit čtenáře s problematikou integrálního počtu. Tato problematika je velice rozsáhlá a zajímavá. Dalo by se říci, že se s ním setkal téměř každý student vysoké školy nebo gymnázia. Integrální počet se vyskytuje v mnoha vědních disciplínách, jako je matematika, statistika, ekonomie, fyzika

V této práci se podrobně seznámíme s integrály, různými metodami jejich řešení a ukážeme si výpočet integrálů na příkladech. Po přečtení této bakalářské práce by měl být čtenář schopen podle typu integrálu rozpoznat, která z metod výpočtu povede k co nejjednoduššímu vyřešení daného integrálu.

Dříve než přejdeme k popisování obsahu této bakalářské práce, bylo by dobré vědět, co to integrál je. Integrál je jeden z ústředních pojmů matematické analýzy a matematiky vůbec. Vznikl na základě dvou úloh :

1. určení funkce na základě znalosti její derivace
2. výpočet plochy, která je vymezena grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a osou nezávisle proměnné x .

Tyto dvě úlohy vedou k pojmu neurčitého a určitého integrálu. Vyšetřování vlastností a výpočet těchto spolu souvisejících podob integrálu je obsahem integrálního počtu ([9]).

V prvním oddílu se tedy budeme zabývat neurčitým integrálem, uvedeme si zde řadu definic a matematických vět, které budeme aplikovat na příkladech. Druhý oddíl je věnovaný určitému integrálu. Ukážeme si různé vlastnosti a metody výpočtu určitého integrálu. Ve třetím oddílu budeme aplikovat integrální počet nejen v matematice, ale i ve fyzice, statistice a finanční matematice.

Doufám, že čtenář si po přečtení této práce udělá představu o tom, co to je integrální počet, zjistí, že existuje celá řada různých integrálů a metod jejich řešení.

Úvod do integrálního počtu

”Není objevu, který by způsobil v matematických vědách převrat takový šťastný a takový úplný jako infinitezimální počet, který by poskytl badatelům prostředky takové jednoduché, pestré a účinné při poznávání fyzikálních zákonů.”

- Lazare Nicolas Carnot : *Reflexions sur la méthaphysique du calcul infinitesimal* (1796).

První zkušenosti a pochybnosti s infinitezimálními myšlenkami začal mít člověk tehdy, když chtěl přenést poznatky z rovných čar, útvarů či těles na oblé křivky, útvary nebo tělesa. Prvním objektem, kterým se začal zabývat, byl kruh. S velkou pravděpodobností jedna z prvních úloh infinitezimálního počtu byla úloha určit obsah kruhu. Touto problematikou se pravděpodobně jako první zabýval Hippokrates z Chia (přibližně 440 let př.n.l., tzv. Hippokratovy měsíčky). Přibližně v této době přichází také Zenon z Eleje se svým paradoxem Achilla a želvy. Přesný důkaz Hippokratovy úlohy našel Eudoxos (asi 408 až 355 př.n.l.). Eudoxův důkaz se stal základem první teoretické koncepce infinitezimálního počtu, koncepcí, kterou k vrcholu přivedl Archimédes.

Ve vývoji každé teorie vzniká okamžik, kdy se shromážděné poznatky začínají posuzovat z nového, abstraktně vyššího bodu. Těžištěm výzkumu přestávají být jednotlivé úlohy a přechází se na hledání metod jejich řešení. Je to vlastně přechod k univerzálním modelům a poznatkům ([7]).

Infinitezimální počet je diferenciální a integrální počet dohromady. Počátky diferenciálního počtu můžeme vystopovat již v prvních pracích G.W. von Leibnize (1646 - 1716). Například v jeho díle *Rozprava o umění kombinatoriky*. Toto pojednání sepsal ve svých 20-ti letech. Touto problematikou se samozřejmě nezabýval jen Leibnitz. Téměř současně a naprosto nezávisle na něm vytvořil teorii diferenciálního a integrálního počtu také I. Newton (1643-1727) ([8]).

V 17.století byla představa o řešení úloh integrací méně jasná. Vědělo se však, že jsou to problémy často velmi složité. K jejich řešení se často používalo nahrazení funkce polynomem. Takto získané výsledky byly alespoň zčásti vyhovující.

Intuitivně se tušilo, že získané výsledky budou tím přesnější, čím bude stupeň polynomu, kterým aproximujeme danou funkci, vyšší. Dnes už víme, že takovou aproximaci je možno provést pomocí tzv. Taylorova rozvoje ([7]).

Dalším velmi významným matematikem 18.století byl L.Euler(1707-1783). Ten byl u zrodu dalších dvou v té době nových oborů matematiky, variančního počtu a diferenciální geometrie. Historie funkcionální analýzy a integrálního počtu jde dále přes takové velikány dějin matematiky, jakými byli J.L.Lagrange, P.S.Laplace, J.B.J.Fourier, G.F.B.Riemann, K.F.J.Gauss a mnoho mnoho dalších ([8]).

A Neurčitý integrál - Primitivní funkce

Nejdříve se budeme zabývat neurčitým integrálem. Pojem neurčitého integrálu stojí na primitivní funkci. Při výpočtu určitého integrálu lze využít znalosti primitivní funkce, proto by bylo dobré se nejdříve seznámit s problematikou neurčitého integrálu.

1 Pojem primitivní funkce

Začneme jednoduchou definicí, která bude tvořit základ celé kapitoly.

Definice 1. ([3], strana 253) *Funkce $F : J \rightarrow \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval, se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu J , právě když pro všechna $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$. (V krajních bodech intervalu J , pokud k němu patří, jde o derivace jednostranné.)*

Pro označení neurčitého integrálu se používá symbol $\int f(x) dx$ a dále platí $\int f(x) dx = F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta. Neurčitý integrál je množina všech primitivních funkcí. Určování primitivní funkce říkáme integrování.

1.1 Základní vzorce pro primitivní funkce

Dá se říct, že integrování je opačný postup derivování, ale integrování je podstatně složitější než derivování, ne vždy dokážeme neurčitý integrál najít. K nalezení primitivní funkce nám poslouží tyto základní vzorce, (viz [11]) :

a) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R}^+$

b) $\int a dx = ax + C, a, x \in \mathbb{R}$

c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $\int e^x dx = e^x + C$

e) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

f) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

g) $\int \cos x dx = \sin x + C$

h) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

i) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$

j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

k) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

l) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

1.2 Základní vlastnosti primitivní funkce

Dříve než přejdeme k výpočtu neurčitého integrálu, uvedeme si některé základní vlastnosti primitivní funkce.

Věta 1. ([3], strana 256) *Nechť funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu J spojitá. Potom k ní existuje primitivní funkce $F : J \rightarrow \mathbb{R}$.*

Věta 2.(věta o linearitě primitivní funkce) ([3] strana 256) *Existují-li na intervalu J primitivní funkce k funkcím f a g a jsou-li a, b reálné konstanty, z nichž aspoň jedna je různá od nuly, pak existuje též primitivní funkce k funkci $af + bg$ na intervalu J a platí $\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$.*

Nyní již máme všechny potřebné informace a můžeme přejít k výpočtu primitivní funkce.

Příklad 1.

Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \int (1 + \sin x + \cos x) dx$.

Řešení: Primitivní funkce k funkci $f(x) = \int (1 + \sin x + \cos x) dx$ je funkce $F(x) = x - \cos x + \sin x + C$, to zjistíme pomocí základních vzorců pro primitivní funkce, protože $\int 1 dx = x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$ a zbytek plyne z Věty 2.

2 Integrace metodou per partes (po částech)

Další způsob výpočtu primitivní funkce je výpočet pomocí integračních metod. Jednou z nejpoužívanějších metod je metoda per partes. V překladu per partes znamená po částech. Tato metoda vychází z derivace součinu a následné integrace. Při odvozování metody per partes vycházíme tedy z pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Metodu per partes shrnuje následující věta :

Věta 3. ([6], strana 154) *Mají-li funkce u, v v intervalu (a, b) spojitě derivace, pak v (a, b) platí $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$.*

Úspěch metody per partes závisí na tom, jak si zvolíme $u(x)$ a $v'(x)$ ve vzorci. Volba závisí na nás, ale ne vždy je naše volba správná a vede k výpočtu integrálu. Někdy se nám může stát, že se dostaneme do horší situace, než ve které jsme byli na začátku. Bohužel neexistuje žádný návod jak uvedené funkce volit, je třeba se to naučit z praxe, čili z počítání příkladů. Abychom si udělali představu o této metodě, ukážeme si její aplikaci na příkladech.

Příklad 2.

Použitím metody per partes najděte primitivní funkci k funkci $\int \ln^2 x \, dx$.

Řešení: $I = \int \ln^2 x \, dx = *$

Volba součinu $1 \cdot \ln^2 x$ je nevhodnější, protože umíme vypočítat derivaci $\ln^2 x$ a současně známe integrál 1. Např. volba součinu $\ln x \cdot \ln x$ nepřichází v úvahu :

$$\int \ln x \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} \text{Per partes} \\ u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \ln x & v = ? \end{array} \right|$$

Vidíme, že tato volba je nevhodná, protože $\int \ln x \, dx$ si opět musíme rozložit na součin, tedy $1 \cdot \ln x$ a znovu použít metodu per partes, což se mi nezdá hned v úvodu příkladu příliš šťastné. Navíc ve výsledném integrálu vznikne součin $\frac{1}{x} \cdot$ primitivní funkce k $\ln x$. Proto raději volíme součin $1 \cdot \ln^2 x$, což je součin dvou funkcí odlišného charakteru.

$$* = \left| \begin{array}{ll} \text{Per partes} \\ u = \ln^2 x & u' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \cdot \frac{1}{x} x \, dx = x \cdot \ln^2 x -$$

$$- 2 \int \ln x \, dx = *$$

V tomto případě zde máme součin dvou funkcí $1 \cdot \ln x$, a proto můžeme položit $u = \ln x$ a $v' = 1$. Známe totiž integrál 1 a umíme určit derivaci $\ln x$. Opačná volba není možná, protože opět neznáme integrál $\ln x$. Aplikujeme metodu per partes, která vede k vyřešení příkladu.

$$* = \left| \begin{array}{ll} \text{Per partes} \\ u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln^2 x - 2 [x \cdot \ln x - \int 1 \, dx] = x \cdot \ln^2 x -$$

$$- 2 [x \cdot \ln x - x] = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x = x (\ln^2 x - 2 \cdot \ln x + 2) + C$$

Nyní si ukážeme další zajímavou aplikaci metody per partes.

Příklad 3.

Použitím metody per partes najděte primitivní funkci k funkci $\int x \cdot \sin^2 x \, dx$.

Řešení: $I = \int x \cdot \sin^2 x \, dx = *$

Vidíme, že zde máme součin $x \cdot \sin^2 x$. Aplikujeme metodu per partes, protože se jedná o součin dvou funkcí odlišného charakteru. Nejdříve si spočítáme $\int \sin^2 x \, dx$, kde se objevuje součin, a to $\sin x \cdot \sin x^a$, z toho plyne, že bude vhodné použít metodu per partes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_I &= \left| \begin{array}{l} \text{Per partes} \\ u = \sin x \quad u' = \cos x \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin x \cos x + x - \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_I \end{aligned}$$

Při výpočtu $\int \sin^2 x \, dx$ metodou per partes jsme dostali výsledek, ve kterém se nám objevuje opět $\int \sin^2 x \, dx$, proto si tyto integrály převedeme na jednu stranu rovnice, což povede k výsledku.

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x$$

a tedy

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (-\sin x \cos x + x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

Nyní můžeme pokračovat ve výpočtu původního integrálu :

$$* = \left| \begin{array}{l} \text{Per partes} \\ u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin^2 x \quad v = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \end{array} \right| = x \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) - \int \frac{x}{2} dx + \int \frac{\sin 2x}{4} dx = *$$

Dostaneme výraz $\int \frac{\sin 2x}{4} dx$, zde se nám opět objevuje součin $\sin x \cdot \cos x$ ^{b)}, neboť $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ a tedy do třetice použijeme metodu per partes.

$$\text{b) } \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Per partes} \\ u = \cos x \quad u' = -\sin x \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx$$

$$2 \int \sin x \cos x dx = -\cos^2 x$$

a tedy

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{2}$$

Dále víme, že

$$\int \frac{\sin 2x}{4} dx = \frac{1}{2} \int \sin x \cdot \cos x dx = -\frac{\cos^2 x}{4}$$

Nyní můžeme pokračovat ve výpočtu původního integrálu :

$$* = \frac{x^2}{2} - \frac{x \cdot \sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos^2 x}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \cdot \sin 2x - \frac{\cos^2 x}{4} + C$$

3 Integrace substituční metodou

Substituční metoda nám umožňuje zavedení nové proměnné, převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze integrovat snadněji. Tato metoda je založena na následující větě.

Věta 4. ([6], strana 157) *Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$*

v intervalu (α, β) . Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu (a, b) . Pro každé $x \in (a, b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu (α, β) . Pak v intervalu (a, b) je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj. $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$.

Tento výsledek je zvykem v integrálním počtu zapisovat takto: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C$, kde $t = g(x)$ a $dt = g'(x) dx$.

Často metodu per partes a substituční metodu při výpočtu primitivní funkce kombinujeme.

Dále si vyzkoušíme aplikaci substituční metody na následujícím příkladě.

Příklad 4.

Použitím substituční metody najděte primitivní funkci k funkci $\int x (1 - x)^{10} dx$.

Řešení: $I = \int x (1 - x)^{10} dx = *$

Máme zde součin $x \cdot (1 - x)^{10}$. Když se na tento součin podíváme, první nás napadne, že by bylo dost složité určit integrál $(1 - x)^{10}$, protože musíme umocnit daný výraz na desátou. Proto si zavedeme substituci, kde za t dosadíme výraz $1 - x$, jelikož integrál t^{10} umíme snadno určit, protože patří mezi tabulkové integrály. Dále se nám v původním integrálu objevuje také x . To vypočítáme z výrazu $t = 1 - x$. Z toho plyne, že $x = 1 - t$. Při použití substituční metody musíme určit i dt . Vycházíme ze zvolené substituce, čili $t = 1 - x$. Danou rovnici zderivujeme $\Rightarrow dt = -dx$ a odtud vidíme, že $dx = -dt$.

Tedy

$$\begin{aligned}
 * &= \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = 1 - x \implies \begin{array}{l} -x = t - 1 \\ x = 1 - t \end{array} \\ \begin{array}{l} dt = -dx \\ dx = -dt \end{array} \end{array} \right| = - \int (1 - t) t^{10} dt = - \int (t^{10} - t^{11}) dt = \\
 &= - \frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{12}}{12} = *
 \end{aligned}$$

Po dosazení proměnné a dt do původního integrálu získáme výsledek $-\frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{12}}{12}$ a do něj za t opět dosadíme výraz $1 - x$.

$$* = - \frac{(1 - x)^{11}}{11} + \frac{(1 - x)^{12}}{12} + C$$

4 Integrace racionální funkce

4.1 Pojem racionální funkce

Protože integrování celé racionální funkce je snadné, neboť jde o součet integrálů tvaru $\int c_k \cdot x^k dx$, k je celé nezáporné, můžeme se omezit na integrování racionální lomené funkce. Funkce $f(x)$ tvaru $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž stupeň polynomu $P(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$, se nazývá racionální lomená funkce. Tato funkce může vzniknout součtem několika jednoduchých zlomků. Integrováním racionálních funkcí vždy dospějeme ke konečnému počtu elementárních funkcí.

4.2 Rozklad na parciální zlomky

Než se pustíme do rozkladu na parciální zlomky, je třeba definovat pojem racionální lomená funkce.

Definice 2. ([10]) *Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je polynom stupně*

m . Funkce tvaru $R(x) = \frac{P_n(x)}{G_m(x)}$ se nazývá racionální lomená funkce.

1. Je-li $n < m$, pak se $R(x)$ nazývá ryze lomená.

2. Je-li $n \geq m$, pak se $R(x)$ nazývá neryze lomená.

Základní myšlenka je, zda se každá ryze racionální lomená funkce dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru – budeme jim říkat parciální zlomky, které umíme integrovat. Integrovaní racionální lomené funkce $\frac{F(x)}{Q(x)}$ se provádí takto: Není-li $\frac{F(x)}{Q(x)}$ ryze racionální lomená funkce, upravíme zlomek na součet polynomu a funkce ryze racionální lomené $\frac{P(x)}{Q(x)}$, u níž jmenovatel $Q(x)$ má koeficient u nejvyšší mocniny roven jedné. V obecném případě rozklad ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky vypadá takto:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x - x_1)^l} + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} \\ & + \dots + \frac{B_m}{(x - x_2)^m} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \\ & + \dots + \frac{M_rx + N_r}{(x^2 + px + q)^r} + \dots, \end{aligned}$$

kde

$$Q(x) = (x - x_1)^l (x - x_2)^m \dots (x^2 + px + q)^r \dots$$

(viz [1], strana 165)

Nyní si vyřešíme pár příkladů pomocí rozkladu na parciální zlomky.

Příklad 5.

Rozkladem na parciální zlomky najděte primitivní funkci k funkci

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx.$$

Řešení: $I = \int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx$

Rozklad na parciální zlomky :

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x-5} = \frac{\frac{4}{8}}{2x-1} - \frac{\frac{2}{8}}{2x+3} + \frac{\frac{6}{8}}{2x-5}$$

Kde výpočet koeficientů A, B, C probíhá takto :

$$4x^2 + 4x - 11 = A(2x + 3)(2x - 5) + B(2x - 1)(2x - 5) + C(2x - 1)(2x + 3)$$

$$4x^2 + 4x - 11 = (2Ax + 3A)(2x - 5) + (2Bx - B)(2x - 5) + (2Cx - C)(2x + 3)$$

$$4x^2 + 4x - 11 = 4Ax^2 - 10Ax + 6Ax - 15A + 4Bx^2 - 10Bx - 2Bx + 5B + 4Cx^2 + 6Cx - 2Cx - 3C$$

$$4x^2 + 4x - 11 = 4Ax^2 - 4Ax - 15A + 4Bx^2 - 12Bx + 5B + 4Cx^2 + 4Cx - 3C$$

Porovnání koeficientů:

$$\begin{array}{lcl} x^2 & : & 4 = 4A + 4B + 4C \implies 1 = A + B + C \\ x^1 & : & 4 = -4A - 12B + 4C \implies 1 = -A - 3B + C \\ x^0 & : & -11 = -15A + 5B - 3C \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + C \implies C = 1 - A - B \implies C = 1 + 2B - B \\ &\implies C = 1 + B = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= -A - 3B + C \implies 1 = -A - 3B + 1 - A - B \\ 0 &= -2A - 4B \\ 2A &= -4B \\ A &= -2B \\ A &= \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -11 &= -15A + 5B - 3C \\ -11 &= 30B + 5B - 3 - 3B \\ 32B &= -8 \\ B &= -\frac{1}{4} = -\frac{2}{8} \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$I = \frac{1}{4} \left[2 \int \frac{1}{2x-1} dx - \int \frac{1}{2x+3} dx + 3 \int \frac{1}{2x-5} dx \right] = \frac{1}{4} [\ln|2x-1|^2 - \ln|2x+3| + 3\ln|2x-5|] = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3} \right| + C$$

4.3 Ostrogradského metoda

Při integraci racionálních funkcí je možné užít též metody Ostrogradského, která převádí integraci libovolné ryzí racionální funkce na integraci zlomku, jehož jmenovatel má pouze jednoduché reálné kořeny.

Vycházíme ze vzorce :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}}_{\text{racionální část}} + \underbrace{\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx}_{\text{transcendentní část}}.$$

(viz[15], strana 31)

Hledáme polynomy $P_1(x)$ a $P_2(x)$. Integrujeme transcendentní část metodou rozkladu na parciální zlomky.

Abychom pochopili, jak se tento vzorec používá, vyřešíme následující příklad.

Příklad 6.

Ostrogradského metodou najděte primitivní funkci $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Řešení: Chceme, aby $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}$ měl podobu $\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{ax+b}{x^2+2x+2} dx$, a proto musíme dopočítat A,B,a,b. Víme, že : $Q(x) = (x^2+2x+2)^2$. V tomto případě jsme si $Q_1(x), Q_2(x), P_1(x)$ a $P_2(x)$ zvolili následujícím způsobem :

$$Q_1(x) = x^2 + 2x + 2, Q_2(x) = x^2 + 2x + 2 \text{ a } P_1(x) = Ax + B, P_2(x) = ax + b.$$

Tedy

$$I = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{ax+b}{x^2+2x+2} dx$$

Abychom mohli porovnat jednotlivé koeficienty, musíme celou rovnici zderivovat.

Derivováním :

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{A(x^2+2x+2)-(2x+2)(Ax+B)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{ax+b}{x^2+2x+2}$$

$$x^2 = Ax^2 + 2Ax + 2A - 2Ax^2 - 2Bx - 2Ax - 2B + ax^3 + 2ax^2 + 2ax + bx^2 + 2bx + 2b$$

$$x^2 = -Ax^2 + 2A - 2Bx - 2B + ax^3 + 2ax^2 + 2ax + bx^2 + 2bx + 2b$$

Porovnávání koeficientů :

$$x^3 : 0 = a \implies a = 0$$

$$x^2 : 1 = -A + 2a + b \implies 1 = -A + b \implies b = 1$$

$$\begin{aligned} x^1 : 0 &= -2B + 2a + 2b \implies 0 = -B + a + b \implies 0 = -B + b \\ &\implies B = b \\ &\implies B = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^0 : 0 &= 2A - 2B + 2b \implies 0 = A - B + b \implies 0 = A - B + B \\ &\implies A = 0 \end{aligned}$$

$$A = 0, B = 1, a = 0, b = 1$$

Tedy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C \end{aligned}$$

5 Integrace iracionální funkce

Na začátku této kapitoly si řekneme, co to vlastně iracionální funkce je. Iracionální nebo odmocninná funkce je funkce obsahující $x^{\frac{m}{n}}$, kde m, n jsou nesoudělná čísla. Vhodnou substitucí (nebo více substitucemi) lze při hledání primitivních funkcí některých funkcí integrované funkce převést na integraci racionálních funkcí.

5.1 Substitute $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$

Předpokládáme, že $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc \neq 0$. V tomto případě se budeme zabývat integrály ve tvaru $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{s}}) dx$, kde $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a kde $R(x, y)$ je racionální funkce proměnných x, y . Vypočítáme x a volíme substituci $x = \alpha(t) = \frac{(b-dt^s)}{(ct^s-a)}$, z toho plyne, že $dx = \frac{(ad-bc)}{(ct^s-a)^2} \cdot st^{s-1} dt$. Provedeme-li tuto substituci, vidíme, že výrazy $x, \frac{(ax+b)}{(cx+d)^{\frac{1}{s}}}$ jsou nahrazeny racionálními funkcemi proměnné t . Tedy integrál $\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{s}}) dx$ přejde touto substitucí v integrál funkce proměnné t , bude mít tedy tvar $\int R_1(t) dt$, kde $R_1(t)$ je racionální lomená funkce proměnné t , kterou už umíme integrovat.

V dalším textu si ukážeme řešení příkladů pomocí substituce $t^s = \frac{ax+b}{cx+d}$

Příklad 7.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Řešení : $I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Dříve než začneme hledat primitivní funkci, musíme si určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl, protože zde máme výraz s odmocninou.

Podmínky : $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-4, \infty)$. Položíme $t^2 = x + 4$, vypočítáme $x = t^2 - 4$ a volíme $x = \varphi(t) = t^2 - 4$, potom $dx = 2t dt$.

$$I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2 \int \frac{t}{t^2-4} t dt = 2 \int \frac{t^2-4+4}{t^2-4} dt = 2 \int \left(\frac{t^2-4}{t^2-4} + \frac{4}{t^2-4} \right) dt = 2 \left[\int 1 dt + 4 \int \frac{1}{t^2-4} dt \right] = *$$

Rozklad na parciální zlomky :

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{1}{4} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+2}$$

$$1 = At + 2A + Bt - 2B$$

Porovnání koeficientů :

$$t^1 : 0 = A + B \Rightarrow A = -B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$t^0 : 1 = 2A - 2B \Rightarrow 1 = 2A + 2A \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$* = 2 \left[t + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+2} \right) \right] = 2(t + \ln|t-2| - \ln|t+2|) = 2\sqrt{x+4} + 2\ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| +$$

$$+ C$$

5.2 Eulerovy substituce

Integrál $\int R(x, y) dx$, kde R je racionální funkce argumentů x a $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, vede k racionální lomené funkci použitím některé ze tří substitucí (Eulerovy sub-

stituce).

(viz [1], strana 171)

5.2.1 Eulerova substituce prvního typu

Je-li $a > 0$, položíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t$, vypočítáme x a volíme substituci $x = \varphi(t) = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}$. Dále si dopočítáme také $dx = \frac{(2t-c) \cdot (b \pm 2\sqrt{at}) - (t^2 - c) \cdot (b \pm 2\sqrt{a})}{(b \pm 2\sqrt{at})^2} dt$

5.2.2 Eulerova substituce druhého typu

Je-li $c > 0$, položíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$ a za předpokladu $x \neq 0$ vypočítáme x a volíme substituci $x = \varphi(t) = \frac{\pm 2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}$ a $dx = \frac{(\pm 2\sqrt{c} - b) \cdot (a - t^2) - (\pm 2\sqrt{ct} - b) \cdot (a - 2t)}{(a - t^2)^2} dt$.

5.2.3 Eulerova substituce třetího typu

Má-li polynom $ax^2 + bx + c$ reálné kořeny (různé), pak $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ a $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - \alpha_2| \sqrt{a \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2}} = |x - \alpha_1| \sqrt{a \frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}}$

Nyní si ukážeme na příkladech, jak se tyto substituce používají.

Eulerova substituce prvního typu

Příklad 8.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$

Řešení : $I = \int \sqrt{x^2 - 4} dx$

Z tvaru jmenovatele je zřejmé, že příklad budeme řešit pomocí Eulerovy substituce prvního typu.

$$\sqrt{x^2 - 4} = -x + t \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2 - 4}$$

Z rovnice si vyjádříme x :

$$x^2 - 4 = x^2 - 2xt + t^2$$

$$2xt = t^2 + 4$$

$$x = \frac{t^2+4}{2t} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{t^2+4}{2t}$$

Pro výpočet integrálu si musíme vyjádřit i dx :

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2+4) \cdot 2}{4t^2} dt = \frac{4t^2 - 2t^2 - 8}{4t^2} dt = \frac{2t^2 - 8}{4t^2} dt$$

Vzniklé hodnoty dosadíme za x a dx do původního integrálu.

$$I = \int \left(t - \frac{4+t^2}{2t}\right) \cdot \frac{2t^2-8}{4t^2} dt = \int \frac{t^2-4}{2t} \cdot \frac{2t^2-8}{4t^2} dt = \int \frac{2t^4-16t^2+32}{8t^3} dt = \frac{1}{4} \int t dt -$$

$$- 2 \int \frac{1}{t} dt + 4 \int \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{2} - 2 \cdot \ln|t| - 4 \cdot \frac{1}{2t^2} = \frac{t^2}{8} - 2 \cdot \ln|t| - \frac{2}{t^2} = *$$

Vrátíme se k původní proměnné x a za t dosadíme $x + \sqrt{x^2 - 4}$.

$$* = \frac{1}{8}(x + \sqrt{x^2 - 4})^2 - 2 \cdot \ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| - \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 4})^2} + C$$

Eulerova substituce druhého typu

Příklad 9.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$

$$\textbf{\text{Řešení :}} I = \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Protože $c = 1 > 0$, položíme

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = xt + 1$$

Vyjádříme si x :

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 t^2 + 2tx + 1$$

$$x^2 \cdot (1 - t^2) = x \cdot (2t - 1)$$

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{2t-1}{1-t^2}$$

Dále si musíme vyjádřit dx :

$$dx = \frac{2 \cdot (1-t^2) - (2t-1)(-2t)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt$$

Vyjádříme také odmocninu :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1 = \frac{2t-1}{1-t^2} \cdot t + 1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$

Po substituci do I dostáváme :

$$I = \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t-1}{1-t^2} \cdot \frac{t^2-t+1}{1-t^2}} dt = \int \frac{2}{2t-1} dt = \ln|2t-1| = \ln\left|2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} - 1\right| = \ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x}\right| +$$

$$+ C, \text{ kde jsme si z rovnice : } \sqrt{x^2 + x + 1} = xt + 1 \text{ vyjádřili } t : t = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$$

Eulerova substituce třetího typu

Příklad 10.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{(x+4) \cdot \sqrt{x^2+3x-4}}$

$$\textbf{\u0178ešení : } I = \int \frac{dx}{(x+4) \cdot \sqrt{x^2+3x-4}}$$

Můžeme rozložit

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1) \cdot (x + 4)$$

Potom

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t \cdot (x - 1)$$

a opět si vyjádříme x :

$$x^2 + 3x - 4 = t^2 \cdot (x - 1)^2$$

$$t^2 = \frac{(x-1) \cdot (x+4)}{(x-1) \cdot (x-1)} = \frac{x+4}{x-1}$$

$$t^2 x - t^2 = x + 4$$

$$x \cdot (t^2 - 1) = t^2 + 4$$

$$x = \frac{t^2+4}{t^2-1} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{t^2+4}{t^2-1}$$

Pro další výpočet je nutné si vyjádřit i dx :

$$dx = \frac{2t \cdot (t^2-1) - (t^2+4) \cdot 2t}{(t^2-1)^2} dt = -\frac{10t}{(t^2-1)^2} dt$$

Vyjádříme také odmocninu :

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} = t \cdot (x - 1) = t \cdot \left(\frac{t^2+4}{t^2-1} - 1\right) = t \cdot \frac{t^2+4-t^2+1}{t^2-1} = \frac{5t}{t^2-1}$$

$$I = \int \frac{\frac{-10t}{(t^2-1)^2}}{\left(\frac{t^2+4}{t^2-1} + 4\right) \frac{5t}{t^2-1}} dt = -2 \int \frac{dt}{t^2+4+4t^2-4} = -\frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{5t} = *$$

$$\text{Z rovnice } t^2 = \frac{x+4}{x-1} \text{ vyjádříme } t : t = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$$

Návratem k původní proměnné x dostáváme :

$$* = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C$$

5.3 Goniometrické a hyperbolické substituce

Každou primitivní funkci $\int R(x, \sqrt{(ax^2 + bx + c)}) dx$ lze algebraickými úpravami a lineární substitucí upravit na jeden z následujících typů :

1) $\int R(t, \sqrt{\alpha^2 - t^2}) dt$

2) $\int R(t, \sqrt{t^2 - \alpha^2}) dt$

3) $\int R(t, \sqrt{\alpha^2 + t^2}) dt$

Pomocí substitucí :

1) $\frac{\alpha^2 - t^2}{t} = \alpha \cdot \sin u, t = \alpha \cdot \cos u, t = \alpha \cdot \operatorname{tgh} u$

2) $\frac{t^2 - \alpha^2}{t} = \frac{\alpha}{\cos u}, t = \pm \alpha \cdot \cosh u, t = \alpha \cdot \coth u$

3) $\frac{\alpha^2 + t^2}{t} = \sinh u, t = \alpha \cdot \operatorname{tg} u, t = \alpha \cdot \operatorname{cotg} u$

Přejdeme k primitivní funkci $\int R_1(\sin u, \cos u) du$ resp. k $\int R_2(\sinh u, \cosh u) du$.

Protože používáme substituci, tak již nebudeme integrovat podle proměnné t , ale podle proměnné u . Jak se vypočítá du si ukážeme na příkladech.

Příklad 11.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$

Řešení : $I = \int \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}} = *$

Jelikož zde máme ve jmenovateli výraz $(1-x^4)^{\frac{3}{4}}$, musíme si určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl.

Tedy

$$\begin{aligned} (1-x^4)^{\frac{3}{4}} &= 0 \\ 1-x^4 &= 0 \\ x^4 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-1, 1)$, volíme substituci $x = \varphi(t) = \sin t$, pak $dx = \cos t dt$ a tedy

$$* = \int \frac{\cos t \, dt}{(1 - \sin^4 t)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$$

Příklad 12.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

$$\text{Řešení : } I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = *$$

Nejprve si určíme definiční obor :

$$\begin{aligned} x^2 &\neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 > 0 \\ x &\neq 0 \quad \quad \quad x^2 > 1 \\ &\quad \quad \quad x > \pm 1 \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(-\infty, -1)$, volíme substituci $x = \varphi(t) = \cosh t$, pak $dx = \sinh t \, dt$.

$$\begin{aligned} * &= \int \frac{1}{\cosh^2 t \cdot \sqrt{\cosh^2 t - 1}} \cdot \sinh t \, dt = \int \frac{1}{\cosh^2 t \cdot \sinh t} \cdot \sinh t \, dt = \int \frac{1}{\cosh^2 t} \, dt = \operatorname{tgh} t = \\ &= \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{\sqrt{1 - \cosh^2 t}}{\cosh t} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C \end{aligned}$$

Příklad 13.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}$

$$\text{Řešení : } I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}}$$

Substituce :

$$x = \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t} \, dt$$

$$I = \int \frac{dt}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^{\frac{7}{2}} \cdot \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\frac{(\sin^2 t + \cos^2 t)^{\frac{7}{2}}}{\cos^7 t} \cdot \cos^2 t} = \int \cos^5 t \, dt =$$

$$= \int \cos^4 t \cdot \cos t \, dt = \int (1 - \sin^2 t)^2 \cdot \cos t \, dt = \left. \begin{array}{l} \text{Substitute} \\ u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \\ dt = \frac{du}{\cos t} \end{array} \right| =$$

$$= \int (1 - u^2)^2 \, du = \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - 2 \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} =$$

$$= \sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t + \frac{1}{5} \sin^5 t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)^5 + C$$

Pomocné výpočty :

$$x = tg t = \frac{\sin t}{\cos t} \implies \sin t = x \cdot \cos t$$

$$\sin^2 t = x^2 \cdot (1 - \sin^2 t)$$

$$\sin^2 t = x^2 - x^2 \cdot \sin^2 t$$

$$\sin^2 t + x^2 \cdot \sin^2 t = x^2$$

$$\sin^2 t (1 + x^2) = x^2$$

$$\sin^2 t = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

6 Integrace goniometrické funkce

V této kapitole se budeme zabývat integrací goniometrické funkce. Víme, že goniometrické funkce jsou funkce $\sin x, \cos x, tg x, cotg x$. Jedná se tedy o integrály ve tvaru $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

6.1 Univerzální substitute

$$1) \int R(\sin x, \cos x) dx$$

Pokud $x \in (-\pi, \pi)$ položíme $tg(\frac{x}{2}) = t$, v tomto případě volíme substituci $x = \alpha(t) = 2 \cdot arctg t$, která vede k integrálu racionální lomené funkce, neboť

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{tg^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{tg^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$2) R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ nebo } R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

V tomto případě je vhodné použít substituce :

$$\sin x = t, dx = \frac{dt}{\cos x} \text{ nebo } \cos x = t, dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

Uvedeme si ještě jednu substituci, která už není univerzální, ale je také zajímavá a často používaná.

$$3) R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

Pokud $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ položíme $\operatorname{tg} x = t$, zde volíme substituci $x = \alpha(t) = \operatorname{arctg} t$, která vede k integrálu racionální lomené funkce, neboť $\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ a $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Kromě univerzálních substitucí se používají i jiné substituce, např. uvažujeme $\mu, \nu \notin \mathbb{Z}$, pak volíme substituci $u = \varphi(x) = \sin^2 x$, získáme primitivní funkci ve tvaru $\int \sin^\nu(x) \cdot \cos^\mu(x) dx$. Těchto substitucí existuje celá řada, ale nebudeme se jimi nyní zabývat.

Dále budeme aplikovat univerzální substituce na příkladech.

Příklad 14.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{\sin x \, dx}{(3\cos x - 1)^3}$

Řešení :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x \, dx}{(3\cos x - 1)^3} = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = 3\cos x - 1 \\ dt = -3\sin x \, dx \\ dx = -\frac{dt}{3\sin x} \end{array} \right| = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t^3} \, dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{-2}}{(-2)} = \frac{1}{6} \frac{1}{t^2} = \\ &= \frac{1}{6 (3\cos x - 1)^2} + C \end{aligned}$$

Příklad 15.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \cos^3 x \, dx$

Řešení :

$$I = \int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \left. \begin{array}{l} \text{Substitute} \\ t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right| =$$

$$= \int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Zde bude nejvhodnější zvolit substituci $t = \sin x \Rightarrow \frac{dt}{\cos x} \Rightarrow \cos x$ se nám vykrátí.

Příklad 16.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx$

Řešení :

Nejvýhodnější bude zvolit 2.substituci, protože po vyjádření dt se nám vykrátí $\sin x$.

$$I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^3 x} \, dx = 2 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \left. \begin{array}{l} \text{Substitute} \\ t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \end{array} \right| =$$

$$= -2 \int \frac{1}{t^2} \, dt = 2 \frac{1}{t} = \frac{2}{\cos x} + C$$

7 Integrace hyperbolické funkce

Mezi hyperbolické funkce řadíme funkce $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x$. Jedná se tedy o integrály ve tvaru $\int R(\sinh x, \cosh x) \, dx$.

7.1 Univerzální substitute

Integrace hyperbolických funkcí se opět řeší pomocí univerzálních substitucí, jako tomu bylo u goniometrických funkcí. V tomto případě se jedná o následující sub-

stituce :

$$1) \int R(\sinh x, \cosh x) dx$$

Položíme $\tanh \frac{x}{2} = t$, dále platí $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ a $dx = \frac{2 dt}{1-t^2}$.

$$2) R(-\sinh x, -\cosh x) = R(\sinh x, \cosh x)$$

Položíme $\tanh x = t$, dále platí $\sinh x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ a $dx = \frac{dt}{1-t^2}$.

$$3) R(\sinh x, -\cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x) \text{ nebo } R(-\sinh x, \cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$$

V tomto případě je vhodné použít substituce :

$$\sinh x = t, dx = \frac{dt}{\cosh t} \text{ nebo } \cosh x = t, dx = -\frac{dt}{\sinh x}.$$

I v případě hyperbolických funkcí se používají jiné než univerzální substituce. Např. substituce $t = \sinh x$, pokud μ je celé liché číslo, kde opět dostaneme primitivní funkci ve tvaru $\int \sinh^\nu(x) \cdot \cosh^\mu(x) dx$, ale těmi se nyní nebudeme zabývat.

Pro představu, jak se počítají integrály hyperbolických funkcí a jak se pracuje s univerzálními substitucemi si vyřešíme několik příkladů.

Příklad 17.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{(1+\cosh x)^2}$

Řešení :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(1+\cosh x)^2} = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = \tanh \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1-t^2} \\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+\frac{1+t^2}{1-t^2})^2 \cdot (1-t^2)} = \int \frac{2dt}{(\frac{1-t^2+1+t^2}{1-t^2})^2 \cdot (1-t^2)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(\frac{4}{(1-t^2)^2} \cdot (1-t^2))} = \frac{1}{2} \int (1-t^2) dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \tanh \frac{x}{2} - \\ &- \frac{1}{6} \cdot \tanh^3 \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Příklad 18.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{4+3\sinh^2 x}$

Řešení :

$$I = \int \frac{dx}{4+3\sinh^2 x} = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = \tanh x \\ dx = \frac{dt}{1-t^2} \\ \sinh x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4+\frac{3t^2}{1-t^2}} \cdot \frac{1}{1-t^2} = \int \frac{dt}{4-4t^2+3t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2}$$

Rozklad na parciální zlomky :

$$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{1}{4(2-t)} + \frac{1}{4(2+t)}$$

Porovnání koeficientů :

$$1 = 2A + At + 2B - Bt$$

$$\begin{array}{lclclclcl} t^1 & : & 0 & = & A - B & \Rightarrow & A & = & B & \Rightarrow & A & = & \frac{1}{4} \\ t^0 & : & 1 & = & 2A + 2B & \Rightarrow & 1 & = & 4B & \Rightarrow & B & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$I = \frac{1}{4} \left[\int \frac{1}{2-t} dt - \int \frac{1}{2+t} dt \right] = \frac{1}{4} [\ln|2-t| + \ln|2+t|] = \frac{1}{4} [\ln|t-2| - \ln|t+2|] =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\tanh x - 2}{\tanh x + 2} \right| + C$$

Příklad 19.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{\cosh^5 x}{\sinh x} dx$

Řešení : $I = \int \frac{\cosh^5 x}{\sinh x} dx = *$

Pokud máme integrál v tomto tvaru, je vhodné si $\cosh^5 x$ vyjádřit jako

$(1 - \sinh^2 x)^2 \cdot \cosh x$. Je to výhodné především proto, že pak se nám jako vhodná

substituce nabízí $t = \sinh x$, potom tedy $dx = \frac{dt}{\cosh x}$, což se nám vykrátí s

$\cosh x$ ze zadání.

$$* = \int \frac{(1-\sinh^2 x)^2 \cosh x}{\sinh x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Substitute} \\ t = \sinh x \\ dt = \cosh x dx \\ dx = \frac{dt}{\cosh x} \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)^2}{t} dt =$$

$$= \int \frac{1-2t^2+t^4}{t} dt = \int \frac{1}{t} dt - 2 \int t dt + \int t^3 dt = \ln|t| - t^2 + \frac{t^4}{4} =$$

$$= \ln|\sinh x| - \sinh^2 x + \frac{\sinh^4 x}{4} + C$$

8 Integrace exponenciální funkce

8.1 Substitute

Jedná se o integrály ve tvaru $\int R(e^{ax}) dx$, kde $R(u)$ je racionální funkce proměnné u . O konstantě a předpokládejme, že $a \neq 0$. Zavedeme substituci $e^{ax} = t$, potom $dt = a \cdot e^{ax} dx$. Vidíme, že daný integrál je převeden na $\frac{1}{a} \int R(t) \frac{dt}{t}$, což je integrál racionální funkce. Výše uvedenou substituci budeme aplikovat na následujícím příkladě.

Příklad 20.

Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

Řešení : $I = \int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} = *$

Vidíme, že ve jmenovateli se nám vyskytuje exponenciální funkce, proto použijeme substituci $t = e^x$.

$$* = \left| \begin{array}{l} \text{Substitute} \\ t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+t-2) \cdot t}$$

Rozklad na parciální zlomky :

$$\frac{1}{t^3+t^2-2t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+t-2} = -\frac{1}{2t} + \frac{t+1}{2(t^2+t-2)} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \left[\int \frac{t+1}{t^2+t-2} dt - \int \frac{1}{t} dt \right]$$

$$1 = At^2 + At - 2A + Bt^2 + Ct$$

Porovnání koeficientů :

$$t^2 : 0 = A + B \implies B = -A \implies B = \frac{1}{2}$$

$$t^1 : 0 = A + C \implies C = -A \implies C = \frac{1}{2}$$

$$t^0 : 1 = -2A \implies A = -\frac{1}{2}$$

Pokračujeme ve výpočtu

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\int \frac{t+1}{t^2+t-2} dt - \int \frac{1}{t} dt \right]$$

Použijeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{t+1}{t^2+t-2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} = \frac{2}{3(t-1)} + \frac{1}{3(t+2)}$$

$$t + 1 = At + 2A + Bt - B$$

Porovnání koeficientů :

$$t^1 : 1 = A + B \implies B = 1 - A \implies B = \frac{1}{3}$$

$$t^0 : 1 = 2A - B \implies 1 = 2A - 1 + A \implies 3A = 2 \implies A = \frac{2}{3}$$

Integrál I_1 bude ve tvaru :

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+2} dt - \int \frac{1}{t} dt \right] = \frac{1}{3} \ln|t-1| + \frac{1}{6} \ln|t+2| - \frac{1}{2} \ln|t|$$

Výsledný integrál získáme, když za t dosadíme e^x :

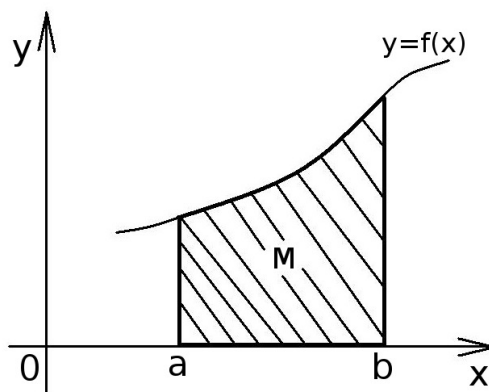
$$I = \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln|e^x + 2| - \frac{x}{2} + C$$

B Určitý integrál

Z předchozí kapitoly víme, že základní úlohou integračního počtu je nalezení primitivní funkce k dané funkci v daném intervalu. Ukážeme si, že primitivní funkce velmi úzce souvisí s celou řadou konkrétních úloh, které se týkají výpočtu obsahu rovinných útvarů, objemu rotačních těles, obsahu pláště rotačních těles a délky křivky. Tyto úlohy vedou k zavedení pojmu určitého integrálu. Pojem určitý integrál budeme definovat na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ pomocí pojmu primitivní funkce. Výsledkem určitého integrálu je vždy číslo (viz [6], strana 161).

1 O jedné úloze vedoucí k pojmu určitého integrálu

Z elementární geometrie umíme určit obsah neboli plošnou míru mnohoúhelníků. Je však důležitá též otázka, jakou plošnou míru máme přiřadit rovinnému útvaru, který nelze rozložit na mnohoúhelníky. Příkladem takového geometrického útvaru může být obrazec ohraničený přímkami $x = a, x = b, y = 0$ a grafem spojitě nezáporné funkce f , tj. množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle a, b \rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Tento geometrický útvar budeme nazývat křivočarým lichoběžníkem určeným funkcí f a intervalem $\langle a, b \rangle$ a označíme jej $M(f; a, b)$. Chceme-li přiřadit obsah libovolnému křivočarému lichoběžníku (i dalším rovinným útvarům), je přirozené požadovat, aby přiřazení

$$\text{geometrický útvar } M \rightarrow \text{míra útvaru } M$$

mělo vlastnosti, které má míra rovinných útvarů známých z elementární geometrie:

1. Jsou-li A, B dva geometrické útvary, které mají obsahy $S(A), S(B)$, a je-li $A \subset B$, pak $S(A) \leq S(B)$.
2. Jsou-li A, B dva geometrické útvary, které jsou disjunktní nebo mají společné nejvýše hraniční body, a jsou-li $S(A), S(B)$ jejich obsahy, pak geometrický útvar $C = A \cup B$ má obsah $S(C) = S(A) + S(B)$ (tzv. aditivita obsahu).
3. Obsah obdélníka se rovná součinu délek jeho dvou sousedních stran.
4. Shodné geometrické útvary mají stejný obsah.

Elementárním geometrickým útvarem nazveme každou množinu, která je sjednocením konečného počtu obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Každý elementární geometrický útvar lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu nepřekrývajících se obdélníků (tj. obdélníků, které mají společné nejvýše hraniční body). Obsah tohoto útvaru se pak dá určit z vlastností 2 a 3.

(viz [3], strana 287)

2 Definice určitého integrálu

Dříve než budeme definovat určitý integrál, zavedeme si pojmy : dělení intervalu a integrální součet.

Definice 1. ([11]) *Dělením uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ nazýváme jakoukoliv konečnou množinu bodů $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ležících v intervalu $\langle a, b \rangle$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Body $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ se nazývají dělicí body intervalu $\langle a, b \rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ se nazývá i -tý dělicí interval, číslo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ se nazývá délka i -tého dělicího intervalu. Na každém intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje nekonečně mnoho různých dělení; množinu všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ značíme jako $\mathcal{D}(\langle a, b \rangle)$.*

Definice 2. ([5], strana 455) *Označme Δx_i délku i -tého částečného intervalu, tj. položíme $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_p = x_p - x_{p-1}$. Zřejmě $\sum_{i=1}^p \Delta x_i = b - a$. Nechť $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ jsou reálná čísla a nechť $\xi_1 \in \langle x_0, x_1 \rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \xi_p \in \langle x_{p-1}, x_p \rangle$. Číslo $S_f(D) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_p)\Delta x_p = \sum_{i=1}^p f(\xi_i)\Delta x_i$ nazýváme integrálním součtem funkce $f(x)$ pro dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro danou volbu čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$.*

Definice 3. ([5], strana 456) *Číslo I nazýváme určitým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže pro každou posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro každou volbu čísel ξ v integrálních součtech $S_f(D_n)$ je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(D_n) = I.$$

Určitý (Riemannův) integrál I funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ označujeme znakem $\int_a^b f(x) dx$.

Hodnota $\int_a^b f(x) dx$ funkce $f(x) \geq 0$ představuje geometrický obsah S části roviny vymezené křivkou $y = f(x)$, osou x a dvěma přímkami kolmými k ose x v

bodech **a** a **b**.

3 Podmínky integrovatelnosti

V této kapitole si uvedeme, za jakých podmínek je funkce f Riemannovsky integrovatelná. Dále označení $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle)$ znamená, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná.

Věta 1. (Nutná a postačující podmínka) ([11]) *Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists D \in \mathcal{D}(\langle a, b \rangle) : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$, kde $s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$ nazveme dolním součtem funkce f při dělení D a číslo $S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$ nazveme horním součtem funkce f při dělení D .*

Věta 2. ([11]) *Nechť f je monotónní na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 3. ([11]) *Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 4. ([11]) *Nechť f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť má na $\langle a, b \rangle$ jen konečně mnoho bodů nespojitosti. Pak $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 5. ([11]) *Nechť f a g jsou omezené na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $f \neq g$ jen v konečně mnoha bodech z $\langle a, b \rangle$. Potom $f \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle) \Leftrightarrow g \in \mathbb{R}(\langle a, b \rangle)$.*

4 Vlastnosti Riemannova integrálu

Než přejdeme k výpočtu Riemannova integrálu, uvedeme si některé důležité vlastnosti.

Vlastnosti Riemannova integrálu. Jsou-li $f(x)$ a $\varphi(x)$ integrovatelné funkce v $\langle a, b \rangle$, resp. v $\langle a, c \rangle$, je-li $c \in \langle a, b \rangle$, pak platí:

a) $\int_a^b f(x) \, dx = 0$

b) $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$

c) $\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$ (k je konstanta)

d) $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b \varphi(x) \, dx$

e) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

f) Je-li $a < b$ a $f(x) \geq \varphi(x)$, pak $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b \varphi(x) \, dx$

g) $|\int_a^b f(x) \, dx| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

Uvedených vztahů se často užívá při výpočtu nebo při odhadech určitých integrálů (viz [1], strana 182).

5 Výpočet Riemannova integrálu

5.1 Newton - Leibnitzův vzorec

Věta 6. ([4], strana 175) *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce, tj. $F'(x) = f(x)$. Pak $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.*

Výsledkem určitého integrálu je vždy číslo.

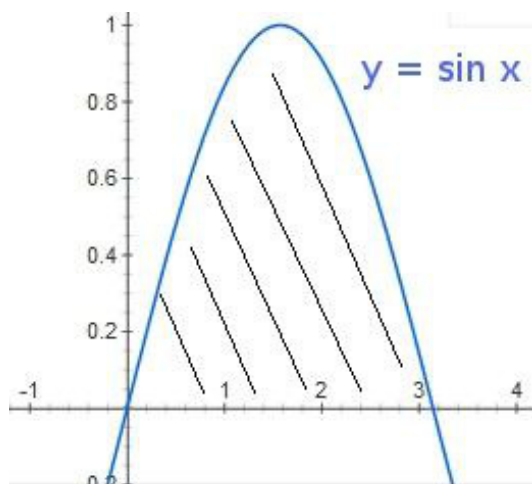
S využitím Věty 6 si zkusíme vypočítat následující dva příklady.

Příklad 1.

Vypočtete pomocí Newton-Leibnitzova vzorce následující určitý integrál a znázorněte graficky odpovídající části roviny : $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Řešení : Nejprve zintegrujeme výraz $\sin x$ stejně jako v případě neurčitého integrálu. Zde však musíme zohlednit i meze 0 a π , jelikož se jedná o určitý integrál.

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$



Příklad 2.

Vypočtete obsah útvaru omezeného křivkami:

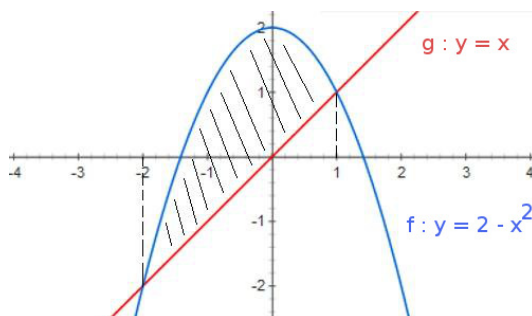
$$f : y = 2 - x^2$$

$$g : y = x$$

Řešení : Určitý integrál sestojíme tak, že si nejprve nalezneme meze. Meze vidíme v grafu a jedná se o body, ve kterých se nám vzájemně protnou křivky dané v zadání. Dále budeme postupovat tak, že od horní funkce (v tomto případě funkce f) odečteme dolní funkci (funkce g).

Nejdříve si vypočteme meze, tak že budeme počítat průsečíky funkce f a funkce

$g :$



$$\begin{aligned}
 y = x, \quad y = 2 - x^2 &\Rightarrow x = 2 - x^2 \\
 x^2 + x - 2 &= 0 \\
 D = b^2 - 4ac &= 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 \\
 x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} &= \frac{-1 \pm 3}{2} = \{1, -2\}
 \end{aligned}$$

$$S = \int_{-2}^1 [(2 - x^2) - x] dx = [2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-2}^1 = (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - (-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}) = 4.5$$

Výsledek je opět číslo.

5.2 Metoda per partes

Při výpočtu integrálu funkce podle Newton – Leibnitzova vzorce potřebujeme nalézt nejdříve její primitivní funkci. Již z předchozího textu víme, že tuto primitivní funkci najdeme často pomocí metody per partes nebo substituční metody pro určité integrály. Uvedeme si nyní vzorce, které nám umožní počítat tyto určité integrály těmito metodami přímo.

Věta 7. ([3], strana 312) *Nechť funkce u, v jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají na tomto intervalu integrovatelné derivace u', v' (např. u', v' jsou spojité nebo po částech spojité na $\langle a, b \rangle$). Potom platí $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.*

Příklad 3.

Metodou per partes vypočítejte následující určitý integrál : $\int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos x \, dx$

Řešení :

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos x \, dx = *$$

Vidíme, že se zde jedná o součin dvou funkcí, proto použijeme metodu per partes, kde metoda per partes vede k zjednodušení integrovatelné funkce.

$$* = \left| \begin{array}{l} \text{Per partes} \\ u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = *$$

Po dosazení do vzorce pro metodu per partes pro určitý integrál dostáváme opět součin dvou funkcí x a $\sin x$, proto znovu použijeme metodu per partes.

$$\begin{aligned} * &= [x^2 \cdot \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Per partes} \\ u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = (2\pi)^2 \cdot \\ &\cdot \sin 2\pi - \underbrace{0 \cdot \sin 0}_{0 \cdot \sin 0 = 0} - 2\{[-x \cdot \cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos x \, dx\} = 4\pi^2 \cdot \sin 2\pi - 2 \cdot \\ &\cdot \{(-2\pi \cdot \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0) + [\sin x]_0^{2\pi}\} = 4\pi \end{aligned}$$

5.3 Substituční metoda

Další z metod výpočtu Riemannova integrálu je substituční metoda. Definice i její použití jsou obdobné jako v případě neurčitého integrálu, ale protože se jedná o určitý integrál, je důležité zde zohlednit i meze.

Věta 8. ([6], strana 174) *Nechť $g(x)$ je ryze monotónní funkce. Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li zároveň*

$$\begin{aligned} & \text{spojitá i funkce } f(t) \text{ pro všechna } t = g(x), \text{ kde } x \in \langle a, b \rangle, \text{ pak platí } \int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \\ & = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Při změně proměnné (tj. při substituci) musíme upravit i integrační meze. Musíme si uvědomit, že při výpočtu určitého integrálu nemáme možnost kontrolovat správnost výpočtu jako při výpočtu primitivní funkce, kde se vždy dodatečně derivováním výsledku můžeme přesvědčit o jeho správnosti. Proto je při výpočtu určitých integrálů nutná zvýšená opatrnost a u substituční metody je tato okolnost ještě důležitější.

Příklad 4.

Substituční metodou vypočítejte následující určitý integrál: $\int_0^1 x \cdot (x^2 + 1)^4 dx$

Řešení :

2 možnosti výpočtu :

a) rovnou vypočítáme určitý integrál $\Rightarrow$ výhoda : není potřeba se vracet k proměnné x

b) napřed najdeme primitivní funkci, vrátíme se k proměnné x a pak dosadíme do Newton - Leibnitzova vzorce

$$\text{a) } \int_0^1 x \cdot (x^2 + 1)^4 dx = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 t^4 dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^5}{5} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) = 3.1$$

$$\text{b) } \int x \cdot (x^2 + 1)^4 dx = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce} \\ t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^4 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} = *$$

Nyní už jsme našli primitivní funkci původního integrálu, proto se vrátíme

k proměnné x , kterou dosadíme do t .

$$* = \frac{1}{10} \cdot (x^2 + 1)^5$$

$$\int_0^1 x \cdot (x^2 + 1)^4 dx = \left[\frac{1}{10} \cdot (x^2 + 1)^5 \right]_0^1 = \frac{1}{10} \cdot 2^5 - \frac{1}{10} \cdot 1^5 = \frac{32}{10} - \frac{1}{10} = \frac{31}{10} = 3.1$$

C Aplikace integrálního počtu

Užití integrálního počtu je velmi rozmanité. Setkáváme se s ním v mnoha vědních disciplínách. V následujících kapitolách se budeme věnovat konkrétním aplikacím integrálů. Výsledky budeme pro jednoduchost uvádět bezrozměrně.

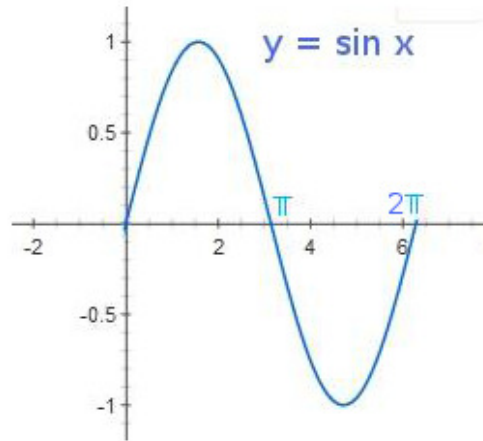
1 Výpočet obsahu rovinného útvaru

Při výpočtu obsahu rovinného útvaru budeme vycházet ze znalostí určitého integrálu. Co to vlastně rovinný útvar je? Jedná se o útvar, který je omezený osou x , tj. přímkou o rovnici $y = 0$, dále přímkami $x = a, x = b$ a grafem spojitě nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklad 1. ([6], strana 181)

Vypočtěte obsah útvaru omezeného křivkami : $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = 2\pi$

Řešení: Nejprve si nakreslíme obrázek, abychom zjistili, jakou plochu máme počítat.



Z obrázku vidíme, že budeme počítat obsah dvou stejně velkých rovinných útvarů. Graf funkce $y = \sin x$ protíná osu x v bodech 0 , π a 2π . V intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ funkce nabývá nezáporných hodnot, ale v intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$ nabývá nekladných hodnot. Pro obsah útvaru tedy platí: $S = \int_0^\pi \sin x \, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx$, viz [11] Vidíme, že zde máme dva určité integrály, které umíme jednoduše vypočítat.

$$S = \int_0^\pi \sin x \, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi - [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -\cos \pi + \cos 0 + \\ + \cos 2\pi - \cos \pi = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Obsah daného útvaru jsou 4.

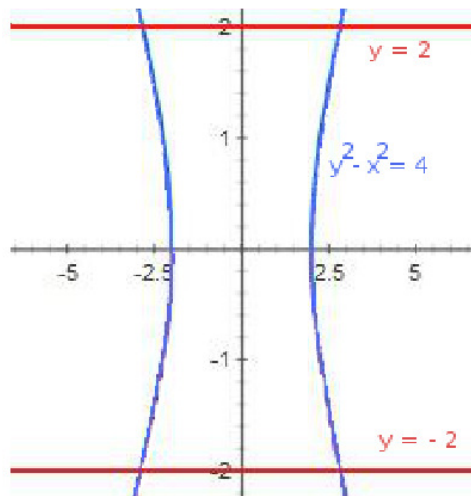
2 Výpočet objemu u rotačního tělesa

Uvažujeme rotační těleso, které vznikne rotací útvaru kolem osy x . Útvar je ohraničen křivkou o rovnici $y = f(x)$, která je grafem spojitě funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$. Objem takto vzniklého rotačního tělesa se vypočítá podle vztahu $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx$, viz [11]

Příklad 2.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami : $x^2 - y^2 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Řešení: Nejdříve si nakreslíme obrázek dané situace.



Vidíme, že útvar rotuje kolem osy y . V tomto případě je útvar ohraničen křivkou o rovnici $x = f(y)$. Objem takto vzniklého rotačního tělesa se vypočítá podle vztahu :

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy,$$

jestliže $x = f(y)$, potom $f^2(y) = x^2$ a musíme si dopočítat x^2 .

Pro výpočet x^2 vycházíme z rovnice :

$$x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow x^2 = y^2 + 4$$

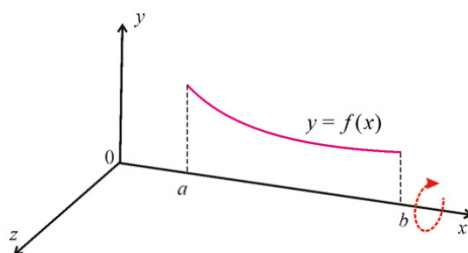
Nyní už jen všechny hodnoty dosadíme do vzorce pro V :

$$V = \pi \int_{-2}^2 (4 + y^2) dy = \pi \cdot \left[4y + \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32\pi}{3} + \frac{32\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

3 Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa

Uvažujme nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Naším úkolem bude vypočítat obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce kolem osy x . Obecně se obsah rotační plochy počítá podle vzorce

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

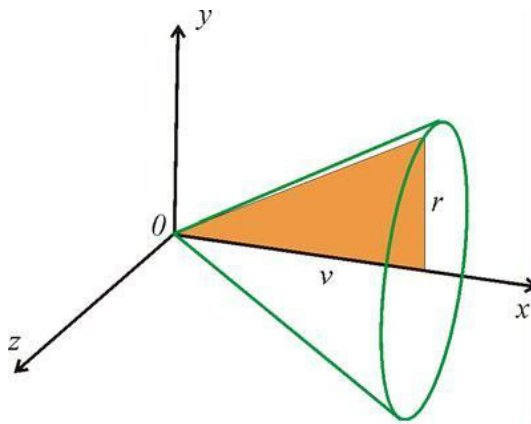


(viz [12])

Příklad 3. ([12])

Vypočtěte obsah pláště rotačního kužele, který je vytvořen úsečkou $y = x$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$ rotující kolem osy x .

Řešení: Nejprve opět nakreslíme obrázek, tentokrát rotačního kužele.



Pro danou úsečku $y = x$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$ dostáváme

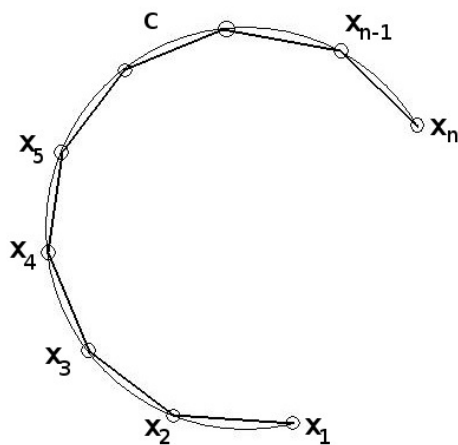
$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 1^2} dx = \sqrt{2} dx$$

Obsah pláště rotačního kužele bude

$$S = 2\pi \int_0^3 y ds = 2\pi \int_0^3 x\sqrt{2} dx = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9\pi\sqrt{2}$$

4 Výpočet délky křivky

Nechť je v rovině dána hladká křivka C parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Máme-li definovat délku křivky C , budeme vpisovat do křivky lomené čáry; přitom délkou lomené čáry rozumíme součet délek úseček, z nichž se lomená čára skládá.



Z obrázku je patrné, že při dosti jemném dělení bude lomená čára aproximovat danou křivku. K definici křivky použijeme délky lomených čar vepsaných křivce. Délkou křivky C nazýváme číslo

$$s(C) = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D})$$

kde $s(\mathcal{D})$ je délka lomené čáry $x_0x_1 \cup x_1x_2 \cup \dots \cup x_{n-1}x_n$ a $\sup$ je supremum množiny všech čísel $s(\mathcal{D})$ pro všechna možná dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Obecně délku křivky počítáme podle vzorce $s(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Délku křivky můžeme definovat nejen pro jednoduché hladké křivky; některé křivky mohou mít ovšem délku nekonečnou. Je-li číslo $s(C)$ konečné, říkáme, že křivka C je rektifikovatelná (viz [3], strana 326).

Příklad 4. ([3], strana 330)

Vypočtěte délku asteroidy : $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$

Řešení:

Nejprve si vypočteme derivace x a y :

$$x' = 3a \cos^2 t (-\sin t)$$

$$y' = 3a \sin^2 t \cos t$$

Víme, že platí :

$$x'^2 + y'^2 = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = 3a|\cos t \sin t|$$

Délka asteroidy se vypočítá podle vzorce :

$$s = 3a \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt =$$

$$= 6a \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

5 Užití integrálu ve fyzice

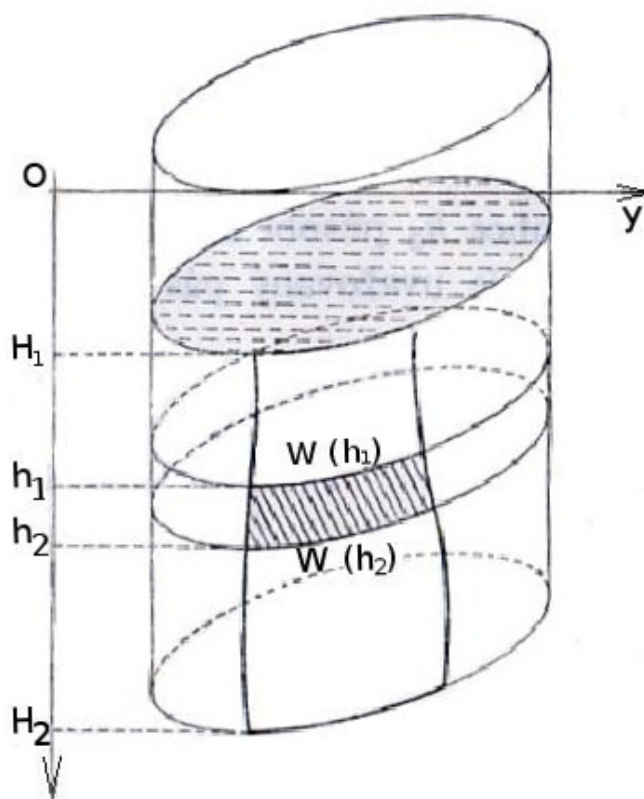
S integrály se ve fyzice setkáváme často, například při výpočtu statických momentů a těžiště, zjištění dráhy přímočarého pohybu, zjištění vykonané mechanické práce, ... Jako ukázkou si uvedeme příklad výpočtu tlakové síly kapaliny v nádobě na svislou stěnu.

Příklad 5. ([3], strana 347)

Máme určit velikost tlakové síly na svislou stěnu ponořenou do kapaliny (může jít např. o stěnu nádoby, v níž je kapalina).

Řešení:

Z fyziky je známo, že kapalina o konstantním tlaku p působí na plochu obsahu S tlakovou silou $F = pS$. Tlak kapaliny v nádobě vzniká vlivem tíhy kapaliny (tzv. hydrostatický tlak) a v hloubce h je tento tlak $p_h = \gamma h$, kde γ je měrná tíha kapaliny. Je tedy tlak v různých místech stěny různý a pro výpočet nelze použít jednoduchý vzorec $F = pS$.



Zvolme osu h kolmo k hladině a orientovanou směrem dolů, počátek zvolme např. v úrovni horní hladiny. Označme H_1 minimální hloubku stěny ponořené v kapalině a H_2 maximální hloubku této stěny, $0 \leq H_1 < H_2$. Předpokládejme, že pro každé $h \in \langle H_1, H_2 \rangle$ známe šířku stěny $w = w(h)$ v hloubce h a že funkce $w(h)$ je spojitá. (Šířka stěny je délka jejího řezu rovinou rovnoběžnou s hladinou.) Velikost tlakové síly působící na pás stěny mezi hloubkami h_1, h_2 ($h_1 < h_2$) označme $F(\langle h_1, h_2 \rangle)$. Z fyziky je známo, že síla je aditivní, tj. pro $h_1 < h_2 < h_3$ platí $F(\langle h_1, h_2 \rangle) + F(\langle h_2, h_3 \rangle) = F(\langle h_1, h_3 \rangle)$, takže F je aditivní funkcí intervalu. Plošný obsah pásu stěny mezi hloubkami h_1, h_2 je $S(\langle h_1, h_2 \rangle) = \int_{h_1}^{h_2} w(h) dh$.

V hloubce h_1 působí na plochu obsahu $S(\langle h_1, h_2 \rangle)$ tlaková síla $\gamma h_1 S(\langle h_1, h_2 \rangle)$. Protože je však uvažován pás stěny v menší hloubce než h_1 , je

$$F(\langle h_1, h_2 \rangle) \leq \gamma h_1 S(\langle h_1, h_2 \rangle).$$

V hloubce h_2 působí na plochu obsahu $S(\langle h_1, h_2 \rangle)$ tlaková síla $\gamma h_2 S(\langle h_1, h_2 \rangle)$. Protože je však uvažován pás stěny v menší hloubce než h_2 , je

$$F(\langle h_1, h_2 \rangle) \leq \gamma h_2 S(\langle h_1, h_2 \rangle).$$

Platí tedy : $\gamma h_1 \int_{h_1}^{h_1} w(h) dh \leq F(\langle h_1, h_2 \rangle) \leq \gamma h_2 \int_{h_1}^{h_2} w(h) dh$.

Pro velikost tlakové síly $F = F(\langle H_1, H_2 \rangle)$ platí vztah : $F = \gamma \int_{H_1}^{H_2} h w(h) dh$.

Například velikost F tlakové síly na plášť sudu tvaru válce poloměru R a výšky H , který je zcela naplněn kapalinou o měrné tíze γ , je podle vzorce : $F = \gamma \int_0^H h 2\pi R dh = \pi \gamma R H^2$.

6 Diferenciální rovnice

Než přejdeme k příkladu, tak si řekneme něco málo o diferenciálních rovnicích. Diferenciální rovnice je rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$. Řešením diferenciální rovnice je funkce. Musí existovat alespoň jedna derivace neznámé funkce. Při řešení diferenciálních rovnic užíváme různé substituce.

Pojmy ([14]) :

Řád diferenciální rovnice : řád nejvyšší derivace neznámé funkce v rovnici

Řešení (integrál) diferenciální rovnice : každá funkce, která po dosazení na nějakém intervalu vyhovuje dané diferenciální rovnici

Obecné řešení : obsahuje volitelné konstanty – představuje všechna řešení dané diferenciální rovnice. Například vyjde-li nám řešení diferenciálních rovnic ve tvaru $y(t) = C \cdot e^t - 1$, máme obecné řešení.

Partikulární řešení : konkrétní (jednoznačné řešení) vznikne po dosazení za volitelné konstanty

Cauchyova počáteční úloha (CPÚ) :

- mějme diferenciální rovnici $y' = f(t, y)$, $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$

- CPÚ: hledání partikulárního řešení $y(t)$ dané diferenciální rovnice, které je de-

finováno na nějakém intervalu $I(t_0 \in I)$ a splňuje podmínku $y(t_0) = y_0$. V následujícím příkladě se budeme zabývat obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Zde se vyskytuje jedna proměnná, budeme provádět obyčejné derivace.

Příklad 6.

$$y' = t + y$$

Vidíme, že zde máme obyčejnou diferenciální rovnici, k jejímu řešení povede následující substituce.

$$\begin{aligned} \text{substituce : } \quad z &= t + y \\ z' &= 1 + y' \\ y' &= z' - 1 \end{aligned}$$

Substituci dosadíme do zadané rovnice.

$$z' - 1 = z$$

$$z' = z + 1$$

Jelikož z' je derivace funkce z , dá se použít také tvar $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = z + 1$$

Celou rovnici vydělíme výrazem $z + 1$, z toho plyne, že $z \neq -1$ a dostáváme, že $z = -1$ je jedním z řešení této diferenciální rovnice. Po vydělení výrazem $z + 1$ dostáváme :

$$\frac{dz}{z+1} = dt$$

Celou rovnici zintegrujeme.

$$\int \frac{dz}{z+1} = \int dt$$

$$\ln|z+1| = t + \ln C_1, C_1 > 0$$

Tento výraz si můžeme upravit takto :

$$e^{\ln|z+1|} = e^{(t+\ln C_1)}$$

Potom tedy dostáváme :

$$|z+1| = e^t \cdot C_1$$

Odstraníme absolutní hodnotu :

$$z+1 = C_2 \cdot e^t, C_2 \neq 0 (C_2 = \pm C_1)$$

$$z = C_2 \cdot e^t - 1$$

$$z = C \cdot e^t - 1, C \in \mathbb{R}$$

dosadíme zpět : $z = t + y$

$$t + y = C \cdot e^t - 1$$

$$[y = C \cdot e^t - t - 1, C \in \mathbb{R}]$$

7 Užití integrálů ve statistice

Než přejdeme k počítání příkladů, uvedeme si pár základních pojmů :

Definice ([13], strana 87) : Náhodný vektor $(X_{i1}, \dots, X_{ik})$ se nazývá *marginální náhodný vektor* příslušný k náhodnému vektoru X , jeho distribuční funkci $F_{X_{i1}, \dots, X_{ik}}(x_{i1}, \dots, x_{ik})$ nazýváme *marginální distribuční funkcí* k distribuční funkci $F_X(x_1, \dots, x_n)$ a obdobně rozdělení pravděpodobností marginálního náhodného vektoru se nazývá *marginální rozdělení pravděpodobností* příslušné k rozdělení P_X .

Někteří autoři nazývají rozdělení pravděpodobností P_X náhodného vektoru X *simultánní rozdělení pravděpodobností*.

Ve statistice se setkáváme s integrálním počtem poměrně často, pro představu jsem zvolila následující příklad.

Příklad 7.

Nechť $(X, Y)'$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$

Najděte obě marginální hustoty a obě marginální distribuční funkce.

Řešení:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Nejprve najdeme marginální hustoty $f_X(x)$ a $f_Y(y)$. Budeme je hledat tak, že funkci $f(x, y)$ zintegrujeme pro případ $f_X(x)$ podle proměnné y a v případě $f_Y(y)$ podle proměnné x .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} [\arctg y]_{-\infty}^{\infty} = *$$

$\frac{1}{\pi^2(1+x^2)} [\arctg y]_{-\infty}^{\infty}$ v tomto případě se jedná o tzv. nevlastní integrál vlivem meze. Jedná se o zobecnění Riemannova integrálu. Nevlastní integrál zavádíme proto, že není omezený interval, na kterém integrujeme. Nevlastní integrály počítáme tak, že si určitý integrál převádíme na příslušnou limitu.

$$* = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \cdot (\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} y - \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dx = \dots = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, y \in \mathbb{R}$$

Dále si vypočítáme marginální distribuční funkce $F_X(x)$ a $F_Y(y)$. V případě $F_X(x)$ vycházíme z marginální hustoty $f_X(x)$ a počítáme integrál, který má meze $-\infty$ a x . U $F_Y(y)$ postupujeme obdobně.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\pi} [\operatorname{arctg} u]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}$$

$$F_Y(y) = \dots = \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}), y \in \mathbb{R}$$

8 Užití integrálů ve finanční matematice

Ve finanční matematice se setkáváme s integrály při výpočtu intenzity finančních toků. Předpokládáme funkci $\sigma(t)$, což je intenzita finančních toků v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ a předpokládáme, že j je intenzita při spojitém úročení. Za těchto předpokladů se současná hodnota PV vypočítá podle následujícího vzorce :

$PV = \int_0^T \sigma(t) e^{-jt} dt$, kde současná hodnota PV je počáteční hodnota kapitálu bez úroků.

Příklad 8.

Intenzita finančních toků v čase t je funkce $\sigma(t) = t^2$, přitom intenzita při spojitém úročení je 10%. Jaká je současná hodnota investice, uvažujeme-li časové období 5 let?

Řešení :

$$\sigma(t) = t^2, j = 0.1, T = 5$$

Použijeme vzoreček pro současnou hodnotu : $PV = \int_0^T \sigma(t) \cdot e^{-jt} dt$

a do něj dosadíme příslušné hodnoty.

$$\text{PV} = \int_0^5 t^2 \cdot e^{-0.1t} dt = \left| \begin{array}{l} \text{per partes} \\ u = t^2 \quad v' = e^{-0.1t} \\ u' = 2t \quad v = -10 \cdot e^{-0.1t} \end{array} \right| = *$$

Nejdříve si spočítáme $\int e^{-0.1t} dt$:

$$\int e^{-0.1t} dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ x = -0.1t \\ dx = -0.1dt \end{array} \right| = -10 \cdot \int e^x dx = -10 \cdot e^{-0.1t}$$

$$* = [-10t^2 \cdot e^{-0.1t}]_0^5 - \int_0^5 (-20e^{-0.1t}) dt = [-10t^2 \cdot e^{-0.1t}]_0^5 + \int_0^5 20e^{-0.1t} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{per partes} \\ u = t \quad v' = -10 \cdot e^{-0.1t} \\ u' = 1 \quad v = e^{-0.1t} \end{array} \right| = [-10t^2 \cdot e^{-0.1t}]_0^5 + 20 \{ [-10t^2 \cdot e^{-0.1t}]_0^5 -$$

$$- 100 [e^{-0.1t}]_0^5 \} = -10 \cdot 25 \cdot e^{-0.5} - 200 \cdot 5e^{-0.5} - 2000e^{-0.5} + 2000 =$$

$$= e^{-0.5} \cdot (-250 - 1000 - 2000) + 2000 = 28.78$$

Závěr

V této práci jsem uvedla různé druhy integrálů, různé metody jejich řešení a vše jsem demonstrovala na příkladech, aby si čtenář udělal lepší představu o tom, jak se používají definice a matematické věty, které jsem v práci uvedla. Nyní by měl být čtenář schopen podle typu integrálu určit, která z metod výpočtu povede k nejjednoduššímu vyřešení daného integrálu.

Cílem práce nebylo jen ukázat čtenáři problematiku určitého a neurčitého integrálu, ale také ukázat, že se tyto integrály vyskytují i v jiných vědních disciplínách. K tomuto nám slouží oddíl C této práce, kde jsme si uvedli aplikaci integrálního počtu v matematice, fyzice, statistice a finanční matematice.

Při psaní bakalářské práce jsem získala mnoho zkušeností. Naučila jsem se počítat složitější typy integrálů a blíže jsem se seznámila s některými metodami jejich řešení. Také jsem se více seznámila s typografickým systémem $\text{\TeX}$, kterým je tato práce napsána.

Literatura

- [1] L.A.Ljusternik a kolektiv : Přehled matematické analýzy II, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praga 1969, 160 - 218
- [2] Vojtěch Jarník : Integrální počet I, Academia, Praha 1974, 24 - 129
- [3] J.Brabec, F.Martan, Z.Rozenský : Matematická analýza I, Nakladatelství technické literatury. Praha 1989, 253 - 349
- [4] Boris Pavlovič Děmidovič : Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment 2003, 143 - 205
- [5] I.Kluvánek, L.Mišík, M.Švec : Matematika I, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1959, 411 - 524
- [6] Diferenciální a integrální počet, Matematika pro gymnázia, Prometheus, 145 - 193
- [7] <http://www.fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/inpoc.pdf> [online 15.1.2012]
- [8] <http://www.kubaz.cz/texty/HamplUvodDoDiferencialnihoPoctuFunkceJednePromenne.pdf> [online 2.2.2012]
- [9] http://www.dml.cz/bistream/handle/10338.dml.cz/400589/DejinyMat_06-1996-1_9.pdf [online 2.2.2012]
- [10] <http://www.user.mendelu.cz/fisnarov/zvm/prednasky/polynomy.pdf> [online 15.2.2012]
- [11] aix-slx.upol.cz/~pavlackova/ [online 5.11.2010]
- [12] http://www.homen.vsb.cz/~Kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_3_4.pdf [online 15.2.2012]
- [13] P.Kunderová : Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky, UP Olomouc, 2004, strana 87

[14] <http://aix-slx.upol.cz/~fiser/M3/M3-ODRzT-v1.pdf> [online 15.4.2012]

[15] mant.upol.cz/soubory/4.-5.pdf [online 15.2.2012]