



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

VÝPOČTOVÝ SOFTWARE PRO ZÁKLADNÍ TERMODYNAMICKÉ VÝPOČTY PROUDĚNÍ PLYNŮ V TRYSCE

COMPUTATIONAL TOOL FOR FLUID FLOW OF GASES THROUGH NOZZLES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Kamila Kozáková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Studentka: **Kamila Kozáková**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Výpočtový software pro základní termodynamické výpočty proudění plynů v trysce

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Proudění plynů v tryskách a jeho početní řešení nachází uplatnění v mnoha technických aplikacích zahrnující např. motory pro automobily a letecký průmysl, spalování paliv či chlazení. Výpočtové řešení těchto úloh lze významně zefektivnit pomocí vhodného softwarového nástroje.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je ve vhodném programovacím prostředí (např. C#, Python, MATLAB) vytvořit a naprogramovat základní termodynamický výpočet proudění plynů v trysce. Kromě početního řešení bude program uživateli umožňovat zadávání vstupních parametrů a vhodně vizualizovat výsledky.

Seznam doporučené literatury:

ÇENGEL, Yunus A. a Michael A. BOLES. Thermodynamics: An engineering approach. Osmé vydání. New York: McGraw-Hill Education, 2015. ISBN 978-0073398174.

ATTAWAY, Stormy. MATLAB: A practical introduction to programming and problem solving. Třetí vydání. Boston: Elsevier, B/H, Butterworth-Heinemann, 2013. ISBN 978-0124058767.

LUTZ, Mark. Learning Python. 5th ed. Sebastopol: O'Reilly, 2013. ISBN 14-493-5573-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá základními termodynamickými výpočty jednorozměrného, adiabatického a stacionárního proudění plynů v tryskách. V první části práce jsou shrnuty zákony, principy a vztahy nutné pro pochopení termodynamických výpočtů. Největší pozornost je následně věnována sestavení výpočtových postupů, které byly využity při tvorbě počítačového softwaru pro řešení úloh proudění plynů v tryskách. Zdrojové kódy s funkcemi a grafické uživatelské rozhraní byly vytvořeny v jazyce Python za pomoci knihoven. Na závěr jsou schopnosti vytvořeného softwaru demonstrovány na několika úlohách.

Klíčová slova

Proudění plynů v tryskách, Lavalova tryska, konvergentní dýza, divergentní dýza, rychlost zvuku, hmotnostní tok, výstupní rychlost, Python, grafické uživatelské rozhraní

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with thermodynamic relations of one-dimensional, adiabatic and steady flow through the duct. Thermodynamic terms, equations and principles, required for understanding the problems of fluid flow, are summed at the beginning. The greatest attention is paid to step-by-step solution of each case, which can occur. These analyses were implemented in a software for solving thermodynamic problems. Scripts and the graphical user interface were created in a programming language Python using its libraries. Last part of this work is focused on evaluating and testing problems of fluid flow through the ducts.

Key words

Fluid flow through a duct, Laval nozzle, converging duct, diverging duct, Mach number, speed of sound, mass flow rate, exit velocity, Python, Graphical User Interface

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

KOZÁKOVÁ, Kamila. *Výpočtový software pro základní termodynamické výpočty proudění plynů v trysce*. Brno, 2019. 56 s. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116459>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Lubomír Klimeš.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Výpočtový software pro základní termodynamické výpočty proudění plynů v trysce* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Lubomíra Klimeše, Ph.D. s využitím vlastních znalostí a materiálů uvedených v seznamu literatury.

V Brně dne 24. 5. 2019

.....
Kamila Kozáková

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych tímto poděkovala svému bývalému učiteli informatiky Ing. Petru Šoustkovi za cenné rady a připomínky, kterými přispěl k vypracování této bakalářské práce, taktéž vedoucímu bakalářské práce Ing. Lubomíru Klimešovi, Ph.D., a v neposlední řadě mojí rodině za jejich podporu během celé doby studia.

OBSAH

ÚVOD.....	11
1 Základní pojmy a rovnice	12
1.1 Rychlost zvuku	13
1.2 Machovo číslo	13
1.3 Rovnice kontinuity.....	15
1.4 Energetická rovnice	16
1.5 Pohybová rovnice	16
1.6 Statické a klidové veličiny	18
1.7 Kritické veličiny	19
1.8 Proudění v trysce daného tvaru.....	20
1.9 Saint-Venantova-Wantzelova rovnice	21
1.10 Proudění přehřátých par dýzami	22
1.11 Konvergentní dýza	23
1.12 Lavalova dýza	25
2 Implementace.....	27
2.1 Algoritmy pro stanovení výstupní rychlosti a hmotnostního toku.....	27
2.1.1 Tok ideálního plynu a přehřáté páry konvergentní dýzou.....	28
2.1.2 Tok ideálního plynu a přehřáté páry Lavalovou dýzou.....	31
2.1.3 Tok ideálního plynu a přehřáté páry divergentní dýzou	34
2.2 Algoritmus pro vykreslování grafů.....	36
2.2.1 Grafy pro ideální plyn	37
2.2.2 Grafy pro přehřátou páru.....	37
2.3 Algoritmus pro návrh Lavalovy dýzy	37
2.3.1 Návrh Lavalovy dýzy s ideálním plynem	38
2.3.2 Návrh Lavalovy dýzy pro výtok páry	40
3 Popis softwaru a ukázka řešení vzorových příkladů	42
3.1 XSteam.....	42
3.2 Návrh uživatelského rozhraní	43
3.3 Ukázky řešení	45
ZÁVĚR.....	48
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ.....	49
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	50
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A UKÁZEK ZDROJOVÝCH KÓDŮ	52

ÚVOD

Proudění plynů v tryskách patří mezi důležité kapitoly termomechaniky a má široké uplatnění v technických aplikacích, zejména v energetickém, automobilním a leteckém průmyslu. Setkáváme se s ním ale i v každodenním životě.

Trysek bývá užito například u parních kondenzačních turbín a malých jednostupňových turbín jako lopatkových kanálů pro urychlení plynu na nadzvukovou výstupní rychlost. Další důležitou aplikací jsou raketové motory, hlavní částí motoru je spalovací turbína a na ni navazující Lavalova dýza, v níž dochází k expanzi spalín. Trysky tvoří většinu hořáků, ejekční hořáky se používají pro ohřevy nejen v technologickém průmyslu při svařování, ale i v domácnostech, kde jsou součástí plynových spotřebičů.

Tryska neboli dýza (z něm. Düse) je trubice s plynulou změnou průtočného průřezu sloužící především ke zvýšení kinetické energie a omezení průtoku tekutin. Difuzor je protikladem trysky, liší se svou funkcí, jelikož slouží ke snižování kinetické energie. Mezi základní druhy trysek dělených podle tvaru jsou řazeny: zužující se tryska, což je konvergentní dýza; rozšiřující se dýza a Lavalova dýza, která je kombinací předchozích dvou. Lavalova dýza byla významným přínosem „století páry“, jako jediná z výše jmenovaných trysek umožňuje urychlení tekutiny na nadzvukovou rychlost, a proto se stala podstatným objevem. Jméno nese podle švédského inženýra Gustafa de Laval (*1845, Orsa, †1913, Stockholm), který je známý především jako vynálezce parní turbíny a odstředivého separátoru oddělující smetanu z mléka.

Cílem bakalářské práce je navrhnout software pro základní termodynamické výpočty proudění plynů v tryskách v jazyce Python, vytvořit grafické uživatelské rozhraní pro zadávání vstupních parametrů a vhodně vizualizovat výsledky.

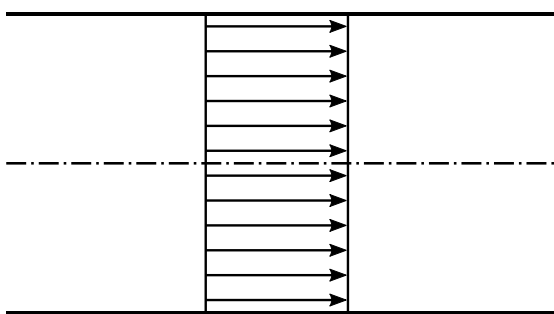
První část práce shrnuje zákony, pojmy a rovnice, z nichž vychází další kapitoly. V druhé části jsou sestaveny výpočetní postupy pro proudění plynů v tryskách a difuzoru, které jsou využity v softwaru, třetí část popisuje vytvořené grafické uživatelské rozhraní a na závěr je demonstrováno řešení termodynamických úloh pomocí vytvořeného softwaru.

1 Základní pojmy a rovnice

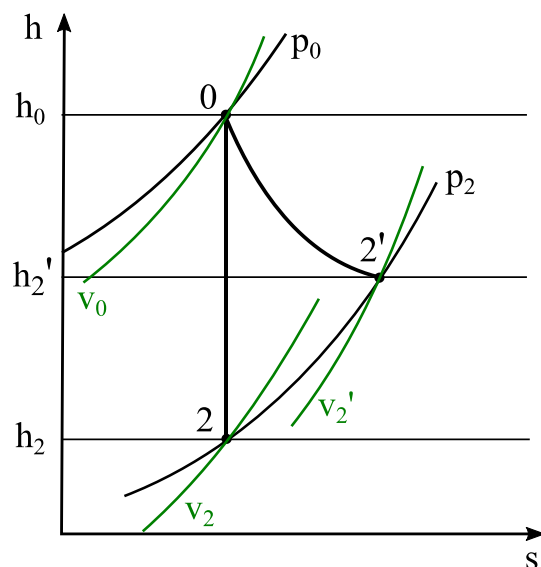
Následující kapitoly se omezí na nejjednodušší případy proudění. Bude uvažováno, že vlastnosti tekutiny jsou idealizované a v každém elementárním objemu média existuje lokální termodynamická rovnováha. Předpokladem pro výpočty je jednorozměrné, ustálené, izoentropické proudění tekutiny, které je nejčastější aplikací otevřené termodynamické soustavy [1]. Jednorozměrné proudění se v technické praxi vyskytuje při průtoku plynu trubici nebo kanálem. K dosažení tohoto typu proudění musí být splněny následující podmínky [2]:

- poloměr zakřivení trubice je poměrně velký,
- tekutina je hydrodynamicky ideální,
- průřez je malý a mění se spojitě jen velmi zvolna.

Rychlostní profil proudu dle uvedených podmínek je znázorněn na obrázku 1.1. Stacionární proudění je proudění, při kterém se místní stav proudu s časem nemění. Parametry stavu ustáleného proudu jsou funkcemi průřezu, nikoli času. Proudění plynů v dýzách považujeme za děj adiabatický. U izoentropického proudění je měrná entropie plynu ve všech průřezech neměnná. Při adiabatickém ději nedochází ke sdílení tepla s okolím. V případě ideálního plynu nedochází ke ztrátám energie, které jsou způsobeny odporem kanálku a vnitřním třením tekutiny, proto děj adiabatický je zároveň dějem izoentropickým [2]. Za předpokladu ztrát třením dochází k nárůstu měrné entropie plynu. Při stejných počátečních podmínkách je skutečná výtoková rychlost w_2' menší než výtoková rychlost w_2 u izoentropického proudění. Na obrázku 1.2 je znázorněna vratná i nevratná adiabatická expanze v dýze. V dýze dochází k expanzi na stejný konečný tlak a snížení rychlosti [3].



Obrázek 1.1: Rychlostní profil při ideálním jednorozměrném proudění (překresleno podle [2])



Obrázek 1.2: Průběh izoentropického a nevratného adiabatického proudění (adiabatická expanze v dýze)

1.1 Rychlost zvuku

Pro stlačitelné prostředí je důležitou charakterizující veličinou rychlost zvuku a , což je rychlost šíření malých tlakových rozruchů. Šíření zvuku je doprovázeno podélným vlněním vzdušiny. Dochází k postupnému zhušťování a zředování prostředí a vlnění se šíří ze zdroje v kulových vlnách, jejichž poloměry rostou přímo úměrně s časem. Zvuk vzniká malými tlakovými poruchami vycházejícími ze zdroje, které jsou způsobeny změnou stavu plynu. Rychlost zvuku je tedy funkcí stavových veličin, přičemž veličiny hustota ρ , tlak p , termodynamická teplota T jsou na zvukové vlnoploše neměnné [2; 1]. Vyjádříme ji pomocí výrazu odvozeného v akustice

$$w_{\text{podél. vlny}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}. \quad (1.1)$$

Pokud budeme předpokládat šíření malých tlakových rozruchů za izoentropické, tedy při $s = \text{konst.}$, vztah pro místní rychlost zvuku bude

$$a = w_{\text{podél. vlny}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)} = \sqrt{\kappa r T} = \sqrt{\kappa p v}, \quad (1.2)$$

přičemž vycházíme z rovnice adiabaty

$$p v^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{konst.},$$

po logaritmické derivaci a úpravě získáme

$$\begin{aligned} \ln p - \kappa \ln \rho &= \ln(\text{konst.}), \\ \frac{dp}{p} - \kappa \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa p v = \kappa r T. \end{aligned}$$

Rychlost zvuku a tedy závisí na teplotě a tekutině, ve které se šíří [1; 2]. S rostoucí teplotou prostředí dochází k nárůstu rychlosti zvuku. Při běžných venkovních teplotách je rychlost zvuku přibližně 340 m/s [4]. Zvuk hromu při úderu blesku se šíří rychlostí okolo 1 km za 3 sekundy. Pokud tedy vidíme blesk a úder slyšíme do tří sekund, tak je bouře blízko a je rozumné se před ní ukrýt.

1.2 Machovo číslo

Dalším významným parametrem je Machovo číslo Ma pojmenované podle rakouského fyzika Ernsta Macha (1838–1916) [4]. Okamžitý místní stav proudu je charakterizován poměrem rychlosti proudu média w k rychlosti zvuku a v tomto médiu. Tento poměr je bezrozměrná veličina a nazývá se tzv. Machovo číslo

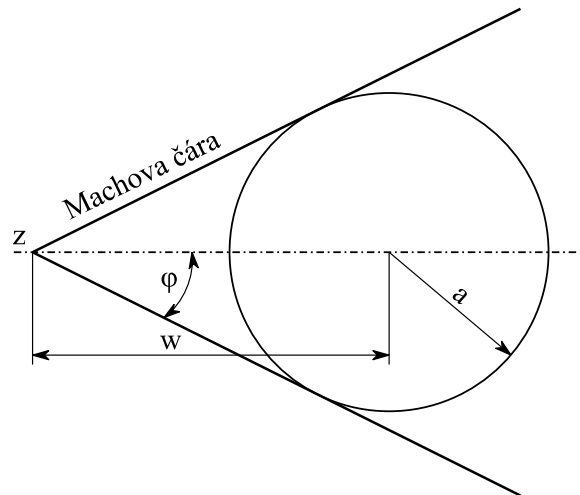
$$Ma = \frac{w}{a}. \quad (1.3)$$

Machovo číslo Ma je závislé na rychlosti zvuku, která závisí na daném prostředí. Machovo číslo proudového letadla nebo stíhacího letounu konstantní rychlosti bude tedy odlišné v různých lokalitách.

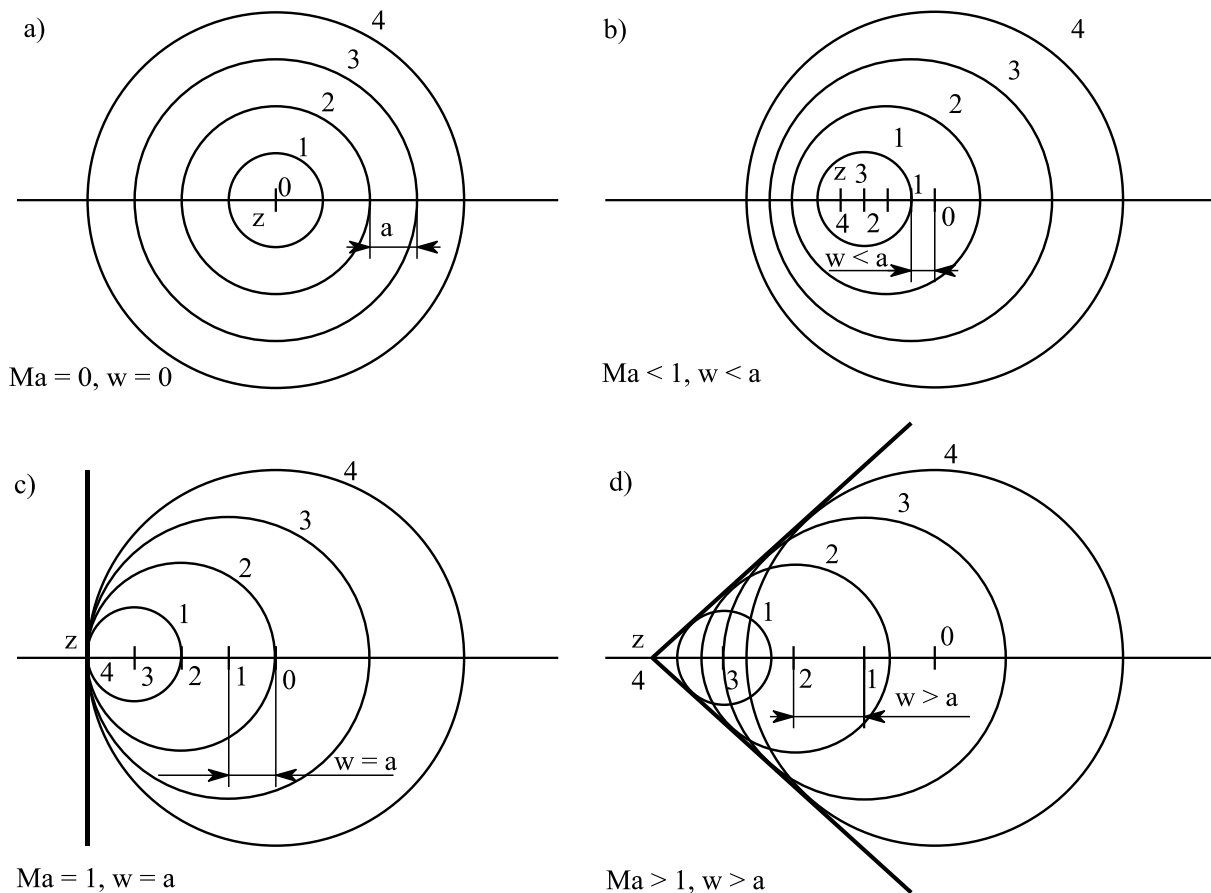
Podle velikosti Ma rozlišujeme 3 druhy proudění: subsonické (podzvukové) $Ma < 1$, nadzvukové (supersonické) $Ma > 1$ a hypersonické $Ma \gg 1$ ([1] udávají hodnotu $Ma > 6$).

Machovo číslo můžeme vyjádřit pomocí jednoduchých schémat (viz obrázek 1.3), kde tečny ke zvukovým kružnicím se nazývají Machovy čáry [2]. Tyto čáry svírají s dráhou pohybu úhel φ , což je *Machův úhel*. Platí zde vztahy

$$\sin \varphi = \frac{a}{w} = \frac{1}{Ma}. \quad (1.4)$$



Obrázek 1.3: Machův kužel (překresleno podle [2])



Obrázek 1.4: Šíření zvukových vln při klidném a pohybujícím se zdroji (překresleno podle [2])

Na obrázku 1.4 jsou znázorněny možné případy šíření zvukových vln [2].

- Zdroj tlakové poruchy je v klidu. Zvukové vlny jsou tvořeny soustřednými kružnicemi.
- Zdroj zvukové vlny se pohybuje subsonickou rychlostí $w < a$. Čela zvukových vln předbíhají zdroj z.
- Zdroj tlakové poruchy se pohybuje rychlostí zvuku $w = a$ a nachází se na vrcholu vln.
- Zdroj zvukové vlny se pohybuje supersonickou rychlostí $w > a$ a předbíhá čelo vln.

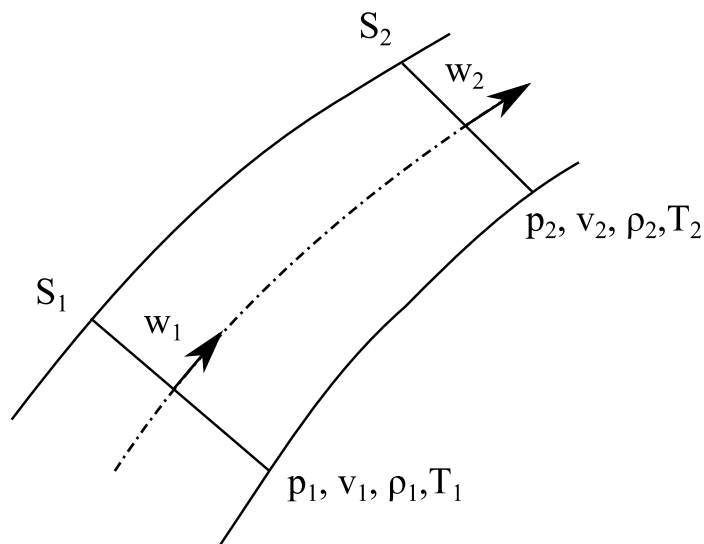
1.3 Rovnice kontinuity

Při stacionárním proudění projde za jednotku času každým průřezem trubice stejné množství hmotnosti \dot{m} (viz obrázek 1.5). Vyjádříme-li hmotnostní tok \dot{m} jako funkci objemového toku $\dot{V} = Sw$ a stavových veličin, tak platí

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \dot{V}_1 \rho_1 = \dot{V}_2 \rho_2, \\ \dot{m} &= \frac{\dot{V}_1}{v_1} = \frac{\dot{V}_2}{v_2}, \\ \dot{m} &= \frac{S_1 w_1}{v_1} = \frac{S_2 w_2}{v_2},\end{aligned}$$

tedy

$$\dot{m} = Sw\rho = \frac{Sw}{v} = konst. \quad (1.5)$$



Obrázek 1.5: K rovnici kontinuity
(překresleno podle [2])

Rovnice (1.5) se nazývá rovnice kontinuity stlačitelných látek a u proudící látky vyjadřuje zákon zachování hmotnosti [2]. Logaritmováním této rovnice obdržíme

$$\ln S + \ln w + \ln \rho = 0,$$

$$\ln S + \ln w - \ln v = 0,$$

a diferencováním

$$\frac{dS}{S} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{dS}{S} + \frac{dw}{w} - \frac{dv}{v} = 0. \quad (1.7)$$

Diferenciální rovnice kontinuity (1.6) a (1.7) vyjadřují závislost mezi poměrnými změnami průřezu, rychlosti proudu w a měrného objemu v , případně hustoty ρ . Hodnotu měrného objemu v (respektive hustoty ρ) určíme jako funkci tzv. statického tlaku a teploty, u ideálních plynů můžeme jeho hodnotu určit přímo ze stavové rovnice [2; 1].

1.4 Energetická rovnice

První zákon termodynamiky pro otevřené systémy se nazývá také základní energetická rovnice proudění a vyjadřuje ji rovnice [2]

$$q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) + a_{t12}. \quad (1.8)$$

Vztah (1.8) aplikujeme pro ustálený děj v otevřené termodynamické soustavě. Je-li výškový rozdíl průřezu $\bar{h}_2 - \bar{h}_1$ malý, můžeme potenciální energii plynu zanedbat. V případě trysek předpokládáme, že médium nekoná žádnou práci a nedochází k výměně tepla s okolím [1]. Získáme integrální a diferenciální tvar energetické rovnice adiabatického proudění

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} = h + \frac{w^2}{2} = konst, \quad (1.9)$$

$$dh + d\frac{w^2}{2} = dh + wdw = 0.$$

1.5 Pohybová rovnice

Jak už bylo uvedeno, tak proudění soustavou (viz obrázek 1.6) předpokládáme za jednodimenzionální. Součtem sil a rozepsáním podle Newtonova zákona získáme výslednou elementární sílu $dF = -Sdp$ působící v záporném směru osy x na vytyčený element o tloušťce dx [1]. Symbol \dot{w} představuje zrychlení.

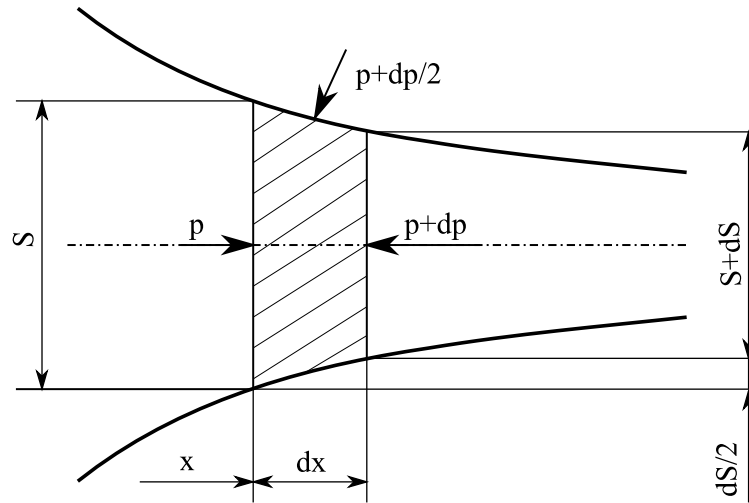
$$p \cdot S - (p + dp)(S + dS) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dS = -Sdp = dF,$$

$$F = m\dot{w},$$

$$dF = dm \cdot \dot{w} = dm \cdot \frac{dw}{d\tau},$$

$$-Sdp = S \cdot dx \cdot \rho \frac{dw}{d\tau},$$

$$-dp = dx \cdot \rho \cdot \frac{dw}{d\tau}. \quad (1.10)$$



Obrázek 1.6: Působení tlakových sil na proudící tekutinu (překresleno podle [1])

Při jednorozměrném proudění je rychlost funkcí souřadnice x a času τ

$$w = f(x, \tau),$$

dw je totální diferenciál, tedy

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial \tau} d\tau,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial w}{\partial \tau} = w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \tau}.$$

Při ustáleném proudění se rychlost v čase nemění, tedy

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = w \frac{dw}{dx}. \quad (1.11)$$

Dosazením vztahu (1.11) do rovnice (1.10) získáme

$$-dp = dx \cdot \rho \frac{dw}{d\tau} = dx \cdot \rho \cdot w \frac{dw}{dx} = \frac{dx}{v} w \frac{dw}{dx},$$

$$-vdp = wdw.$$

Vynulováním pravé strany a postupnými úpravami získáme

$$vdp + wdw = vdp + d \frac{w^2}{2} = \frac{dp}{\rho} + d \frac{w^2}{2} = \frac{dp}{\rho} + wdw = 0. \quad (1.12)$$

Tento diferenciální tvar pohybové rovnice se nazývá Bernoulliho rovnice pro stlačitelné i nestlačitelné tekutiny. Platí pro izolované i neizolované soustavy, tedy soustavy s výměnou a bez výměny tepla s okolím [1]. V elementární podobě se obvykle píše ve tvaru

$$vdp + wdw = \frac{dp}{\rho} + wdw = 0. \quad (1.13)$$

Hodnota hustoty ρ nebo měrného objemu v je vždy kladná, z čehož lze vyvodit, že znaménka při změně tlaku a rychlosti jsou vždy opačná. Při nárůstu rychlosti ($dw > 0$) tlak klesá ($dp < 0$) a obráceně [4]. Integrací rovnice (1.13) získáme

$$-\int_1^2 vdp = \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}.$$

Pro kapaliny můžeme Bernoulliho rovnici přepsat na tvar

$$v_{stř}(p_1 - p_2) = \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}, \quad p_1 + \frac{w_1^2}{2}\rho_{stř} = p_2 + \frac{w_2^2}{2}\rho_{stř},$$

kde $v_{stř}$ je střední hodnota měrného objemu a $\rho_{stř}$ je střední hodnota hustoty mezi oběma řezy. Rovnice vyjadřuje zákon zachování energie, kde součet pohybové a tlakové energie (resp. součet statického a dynamického tlaku) tekutiny je ve všech částech trysky konstantní [1; 4].

1.6 Statické a klidové veličiny

Hodnoty teploty T a tlaku p naměřené přístroji, které jsou v relativním klidu vůči proudícímu plynu nebo kapalině se nazývají statické a popisují stav proudícího plynu v obecném bodě. Izoentropického klidového (stagnačního) stavu můžeme dosáhnout izoentropickým zabrzděním proudícího média na nulovou rychlost [2; 1]. Při tomto procesu se kinetická energie tekutiny přemění na entalpii a vlivem jejího zvýšení dojde k nárůstu teploty a tlaku. Stagnační veličiny a vlastnosti jsou značeny indexem 0 [4]. Tlak a teplota dosažené v tomto stavu se nazývají klidový tlak p_0 a klidová teplota T_0 . Příkladem je výtok plynu otvorem z nádoby o velkém objemu. Rychlost proudění v nádobě považujeme za nulové a vlastnosti plynu v nádobě za stagnační [1; 2]. Klidovou hodnotu entalpie získáme z energetické rovnice (1.9), kde klidová rychlost w_0 je nulová,

$$h_0 = h + \frac{w^2}{2}. \quad (1.14)$$

V případě ideálního plynu můžeme entalpie nahradit vztahem pro teplo přivedené za konstantního tlaku

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{w^2}{2}, \quad (1.15)$$

vyjádříme rychlost, kde c_p je podle Mayerova vztahu

$$c_p = r + c_v = \frac{\kappa}{\kappa - 1} r,$$

$$w = \sqrt{2c_p(T_0 - T)} = \sqrt{2\frac{\kappa r T}{\kappa - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)}. \quad (1.16)$$

Vyjádříme-li stagnační teplotu T_0 jako

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}, \quad (1.17)$$

tak člen $w^2/2c_p$ se nazývá dynamická teplota a odpovídá nárůstu teploty během stagnačního procesu [4]. Při nižších rychlostech proudu je stagnační a statická teplota velmi podobná. Avšak při větších rychlostech je klidová teplota výrazně nižší než statická [4].

Z rovnice adiabatického děje $p v^\kappa = konst.$ můžeme vyjádřit klidový tlak p_0 a klidový měrný objem v_0 .

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (1.18)$$

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}. \quad (1.19)$$

1.7 Kritické veličiny

Vlastnosti tekutiny v místě, kde je Machovo číslo Ma rovno 1, se nazývají kritické vlastnosti. Kritické veličiny a vlastnosti jsou označeny horním indexem * [4].

Při dosažení kritického stavu dochází k dosažení rychlosti zvuku v daném prostředí. Poměr β^* se nazývá kritický poměr, dle kterého se určuje, zda dojde, nebo nedojde k urychlení plynu na rychlost zvuku [5].

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (1.20)$$

Tato rovnice byla odvozena z lokálního extrému funkce zvané výtokový součinitel Ψ , jejíž odvození je k nalezení v [1],

$$\Psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}.$$

Tlakový poměr β je poměr vnějšího tlaku p_{vn} a klidového tlaku p_0 [5].

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0} \quad (1.21)$$

Poměry stavových veličin v kritickém stagnačním bodě (kritické poměry) jsou následující:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\kappa + 1}, \quad (1.22)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \frac{v_0}{v^*} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (1.24)$$

Hodnoty těchto poměrů pro různé adiabatické exponenty κ jsou uvedeny v tabulce 1.1.

Tabulka 1.1: Hodnoty p^*/p_0 , T^*/T_0 , ρ^*/ρ_0 [4]

	Přehřátá pára	Produkty spalování	Vzduch
Adiabatický exponent κ	1,3	1,33	1,4
$\frac{p^*}{p_0}$	0,5457	0,5404	0,4871
$\frac{T^*}{T_0}$	0,8696	0,8584	0,8333
$\frac{\rho^*}{\rho_0}$	0,6276	0,6295	0,6340

1.8 Proudění v trysce daného tvaru

Sloučením diferenciální rovnice kontinuity (1.6) a Bernoulliho rovnice (1.13) získáme vztah

$$\frac{dS}{S} = \frac{dp}{\rho} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{dp}{dp} \right),$$

Další úpravou a substitucí $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \frac{1}{a^2}$

$$\frac{dS}{S} = \frac{dp}{\rho w^2} (1 - Ma^2). \quad (1.25)$$

Tento vztah je velmi důležitý pro izoentropické proudění v tryskách, protože popisuje závislost tlaku na tvaru trysky.

Průřez S , hustota ρ a rychlost w nabývají vždy kladných hodnot. Pro subsonické proudění ($Ma < 1$), je člen $1 - Ma^2$ kladný. Z toho je patrné, že dS a dp musí mít stejné znaménko. Proto při podzvukové rychlosti, když dochází k poklesu tlaku, tak plocha průřezu musí klesat (tryska se zužuje) a při nárůstu tlaku se plocha průřezu zvětšuje (tryska se rozšiřuje).

Pro supersonické proudění ($Ma > 1$) je člen $1 - Ma^2$ záporný. Diferenciály dS a dp musí mít opačné znaménko. Proto při nadzvukové rychlosti proudění musí tlak v rozšiřující se trysce klesat a růst ve zužující se trysce [4].

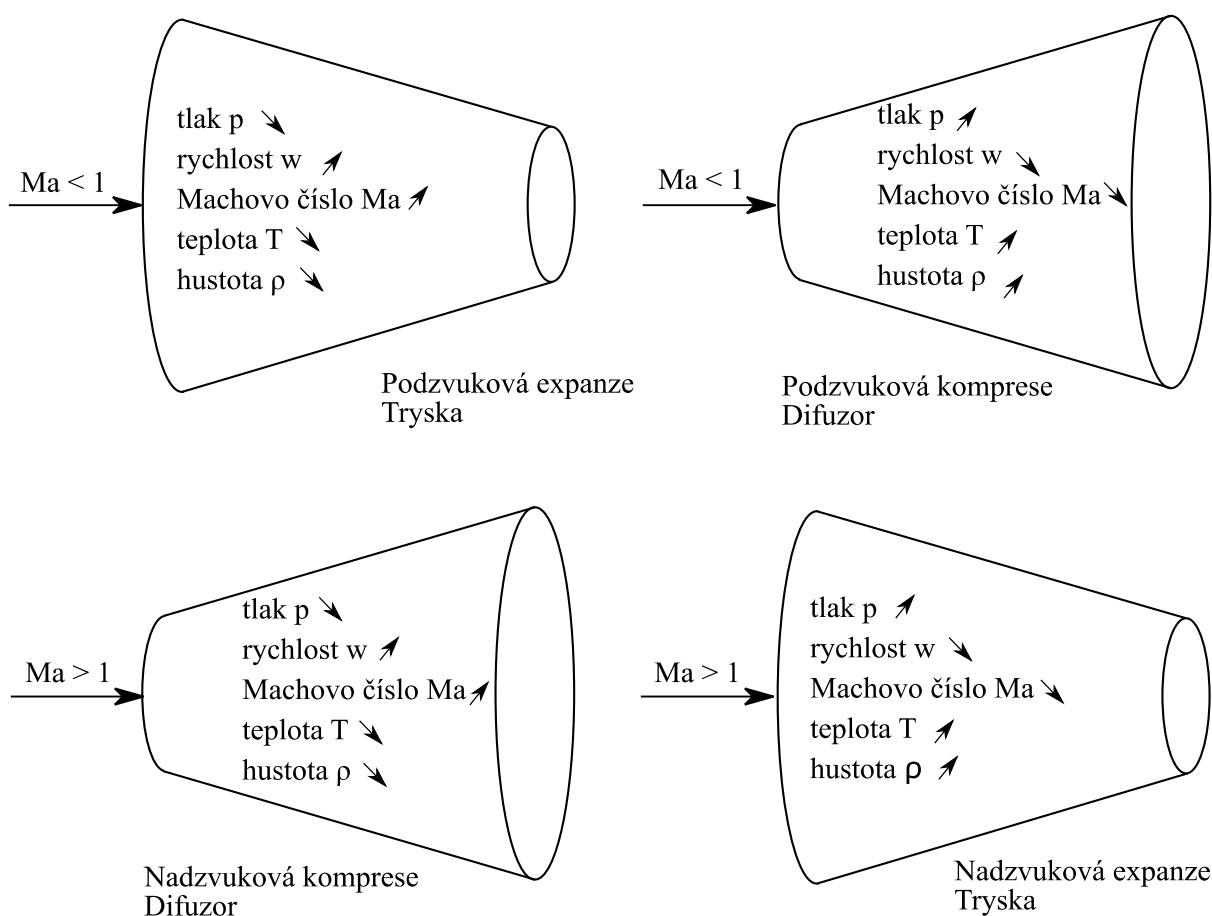
Z další úpravy Bernoulliho rovnice (1.13) dostaneme vztah $\rho w = -\frac{dp}{dw}$ a dosazením do rovnice (1.25) získáme

$$\frac{dS}{S} = -\frac{dw}{w} (1 - Ma^2). \quad (1.26)$$

Plocha průřezu trysky S , rychlost w jsou vždy kladné hodnoty. Ze vztahu analogicky jako v předchozím případě zjistíme, že pro urychlení proudění podzvukové rychlosti, musíme použít zužující se trysku a pro nadzvukové proudění trysku rozšiřující se. Všechny čtyři varianty, které mohou nastat jsou shrnuty na obrázku 1.7.

Kombinací konvergentní a divergentní dýzy vzniká konvergentně divergentní tryska, která se nazývá Lavalova. Tato dýza byla poprvé použita v parní turbíně roku 1893 a byla navržena švédským inženýrem Carlem G. B. de Lavalem, po němž si nese své jméno [4]. Tato tryska je schopna urychlit proudící látku na nadzvukovou rychlost.

Místní rychlosti zvuku se při kritickém poměru tlaků dosáhne v nejužším průřezu Lavalovy dýzy, kdy se jeho plocha nemění, což plyne z rovnice (1.26), kdy pro Machovo číslo rovno jedné je $dS = 0$.



Obrázek 1.7: Vlastnosti dýz (překresleno podle [4])

1.9 Saint-Venantova-Wantzelova rovnice

Rychlost proudění v obecném bodě za vstupem do dýzy, ve které poklesne tlak plynu na hodnotu p je odvozen z rovnice energetické (1.9), kdy

$$w = \sqrt{2(h_0 - h)} = \sqrt{2(c_p T_0 - c_p T)} = \sqrt{2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)} =$$

$$\sqrt{2 \frac{c_p}{r} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]},$$

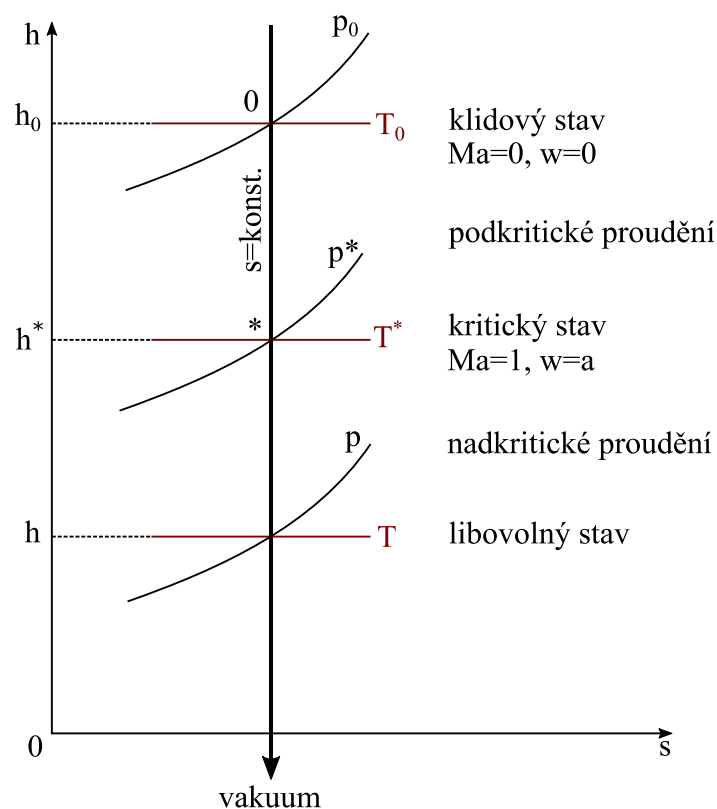
$$w = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (1.27)$$

Rovnice (1.27) se nazývá Saint-Venantova-Wantzelova rovnice a platí pouze pro ideální plyny [2; 1].

1.10 Proudění přehřátých par dýzami

Na rozdíl od proudění ideálního plynu jsou stavové veličiny páry odečítány z diagramů a tabulek. Nejpoužívanějším diagramem je $h-s$ diagram vody a vodní páry. Přehřátá pára je totiž reálný plyn a neřídí se stavovou rovnicí. Například nebude platit Saint-Venantova-Wantzelova rovnice, která byla odvozena pro ideální plyn. Výtokovou rychlost páry v obecném bodě na ose proudění můžeme stanovit z energetické rovnice (1.9).

$$w = \sqrt{2(h_0 - h)}. \quad (1.28)$$



Obrázek 1.8: Izoentropická expanze páry v $h-s$ diagramu (překresleno podle [2])

Ke stanovení kritického poměru $\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ potřebujeme znát Poissonovu konstantu κ páry. Podle [2] v případě přehřáté páry volíme $\kappa = 1,3$. Kritický poměr má tedy hodnotu $\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = 0,5457$. Pro sytou a mokrou páru se využívá empirická závislost na suchosti páry x [1]:

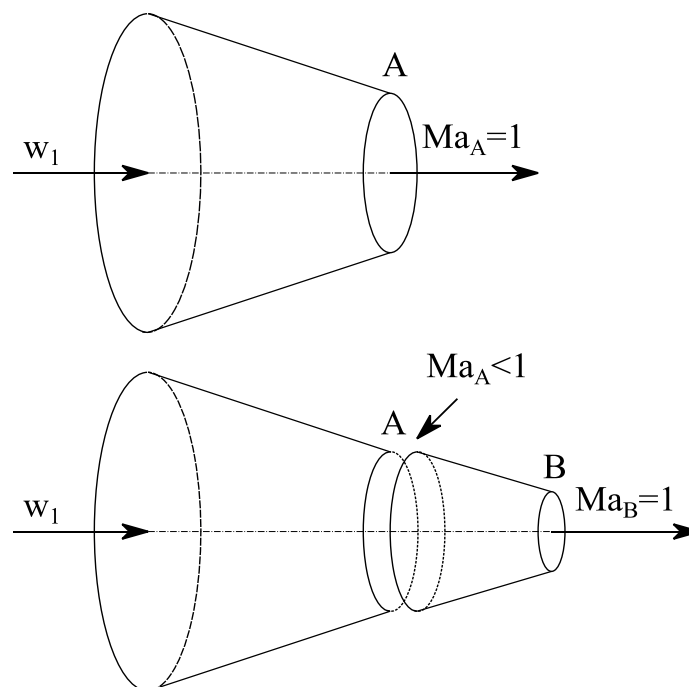
$$\kappa = 1,035 + 0,1x. \quad (1.29)$$

Využíváme h – s diagram vody a vodní páry, který je pro názornost umístěn v příloze. V dalších kapitolách bude používáno značení $A \in B \cap C$, což znamená, že izokřivka A prochází průsečíkem izokřivky B a izokřivky C. Například: $h_1 \in t_1 \cap p_1$, křivka konstantní měrné entalpie h_1 prochází průsečíkem izotermu t_1 a izobary p_1 . Průběh adiabatické expanze páry a určování stavových veličin je znázorněn na obrázku 1.8.

1.11 Konvergentní dýza

Konvergentní dýza je zužující se tryska a může zpracovávat tlakový spád pouze do kritického tlakového poměru, kdy v nejužším průřezu (výstupním průřezu) je dosaženo kritické rychlosti, která je rovna místní rychlosti zvuku a hmotnostní tok dosahuje svého maxima [3]. Dalším snižováním okolního tlaku, kdy je $p_2 < p^*$ zůstává tlak na výstupním průřezu roven tlaku kritickému p^* . K vyrovnání tlaku na tlak okolí dojde až mimo výstupní průřez trysky, dochází k tzv. zahlcení trysky [2; 1].

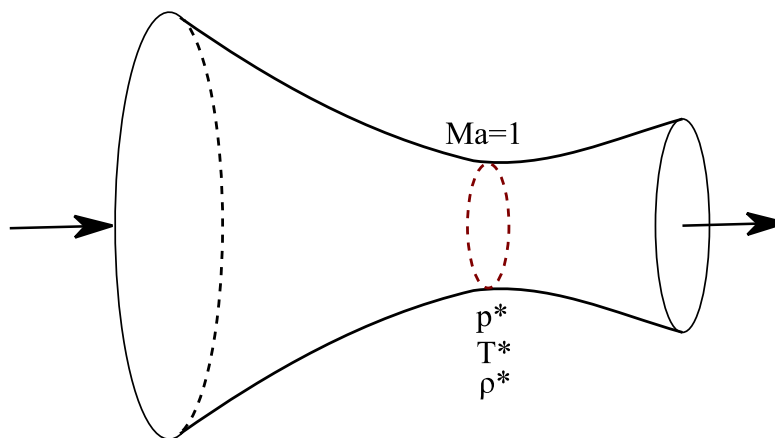
Nejvyšší rychlost, které jsme schopni pomocí konvergentní trysky dosáhnout je rychlost zvuku a je jí dosaženo na konci trysky. Pokud bychom trysku dále prodlužovali dalším snižováním průřezu v naději o dosažení supersonické rychlosti, tak by došlo k tomu, že rychlosti zvuku by bylo dosaženo na novém konci prodloužení namísto původního konce trysky a došlo by ke snížení hmotnostního toku \dot{m} [4].



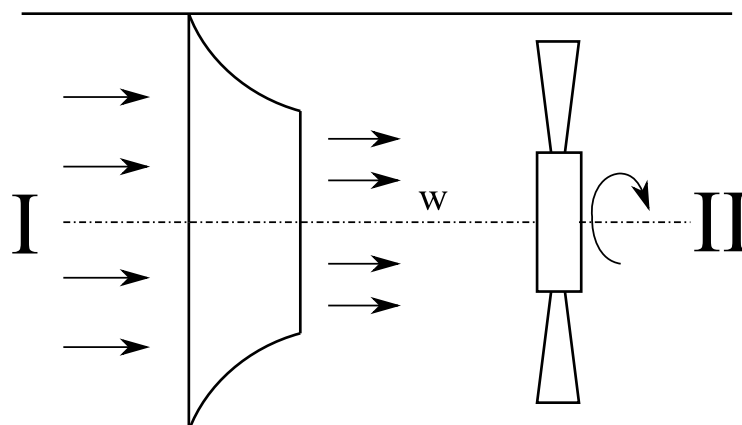
Obrázek 1.9: Zužování konvergentní dýzy
(překresleno podle [4])

Aby konvergentní dýza mohla využít podkritický tlakový poměr, musí se výstupní otvor začít rozšiřovat a přechází na Lavalovu dýzu, která je schopna za určitých podmínek urychlit proud na nadzvukovou rychlost [2; 1]. Proud plynu nejprve prochází konvergentní dýzou, kde Machovo číslo Ma roste, zatímco se průměr trysky snižuje. V hrdle trysky, nazývaném také kritické místo Lavalovy dýzy (viz obrázek 1.10), dosáhne rychlost plynu rychlosti zvuku a proud pokračuje dále do divergentní části trysky, kde je urychlován na nadzvukovou rychlost [4; 3].

Fakt, že rychlost výtoku z konvergentní dýzy nemůže dosáhnout nadzvukové rychlosti lze vysvětlit pomocí obrázku 1.11. Konvergentní dýzou vytéká plyn z oblasti I do proudové trubice do oblasti II. Předpokládejme, že v oblasti II je tlak kritický a plyn tedy vytéká rychlostí zvuku. Budeme-li snižovat tlak za tryskou pomocí ventilátoru, podtlakový rozruch se šíří plynem rychlostí zvuku ve směru proti proudění. Když však rozruch dosáhne výstupního ústí trysky, ze které opačným směrem vytéká plyn, tlakový rozruch se zastaví a nepronikne do oblasti I. Výstupní rychlost dýzy bude tedy pořád neměnná a rovna rychlosti zvuku. I kdybychom v části II vytvořili vakuum, tak výstupní rychlost z trysky bude mít stále velikost rychlosti zvuku, tedy rychlost kritickou [1; 2].



Obrázek 1.10: Kritické místo Lavalovy dýzy



Obrázek 1.11: Výtok z konvergentní trysky zabudované do proudové trubice (překresleno podle [1])

1.12 Lavalova dýza

V případě konvergentní trysky, kdy při tlaku okolí (vnějšího tlaku) $p_{vn} < p^*$, se využije ke zrychlení pouze část tlakového spádu a zbytek je pro získání kinetické energie ztracen. Této ztrátě může být zabráněno připojením divergentního nátrubku ke konvergentní trysce. V rozšířené části probíhá expanze plynu na tlak okolí a nárůstu rychlosti [2].

V následujících odstavcích budou na základě znalostí předchozích kapitol podrobně rozebrány případy, které mohou při různých vstupních podmínkách v Lavalově dýze nastat. Tato kapitola vychází z [1]. Schémata těchto případů jsou znázorněna na obrázku 1.12. Těmito vstupními podmínkami jsou: vstupní rychlost do Lavalovy dýzy w_1 a rychlost plynu do vstupního ústí divergentní části w_d . Mohou nastat čtyři různé varianty režimu vyplývající z různých hodnot těchto dvou rychlostí ve srovnání s místními rychlostmi zvuku a_1 a a_d .

Případ I

Rychlost w_1 a w_d jsou podkritické. Proud vstupuje do zužující se části ($dS < 0$) podkritickou rychlostí, člen $(1 - Ma^2)$ v rovnici (1.25) je kladný, znaménka dS a dp musí být stejná, proto tlak klesá ($dp < 0$). Z Bernoulliho rovnice (1.13) je patrné, že znaménka změny tlaku a změny rychlosti jsou navzájem opačná, proto rychlost v konvergentní části roste. Tomuto charakteru proudění se říká expanzní proudění. Část dýzy, ve které roste rychlost na úkor tlaku se nazývá tryska. Do rozšíření ($dS > 0$) Lavalovy dýzy vstupuje proud podkritickou rychlostí w_d . Stejným způsobem zjistíme, že rychlost musí klesat ($dw < 0$) a tlak naopak roste ($dp > 0$). Část dýzy, ve které roste tlak na úkor rychlosti, se nazývá difuzor. V difuzoru nastává kompresní proudění.

Případ II

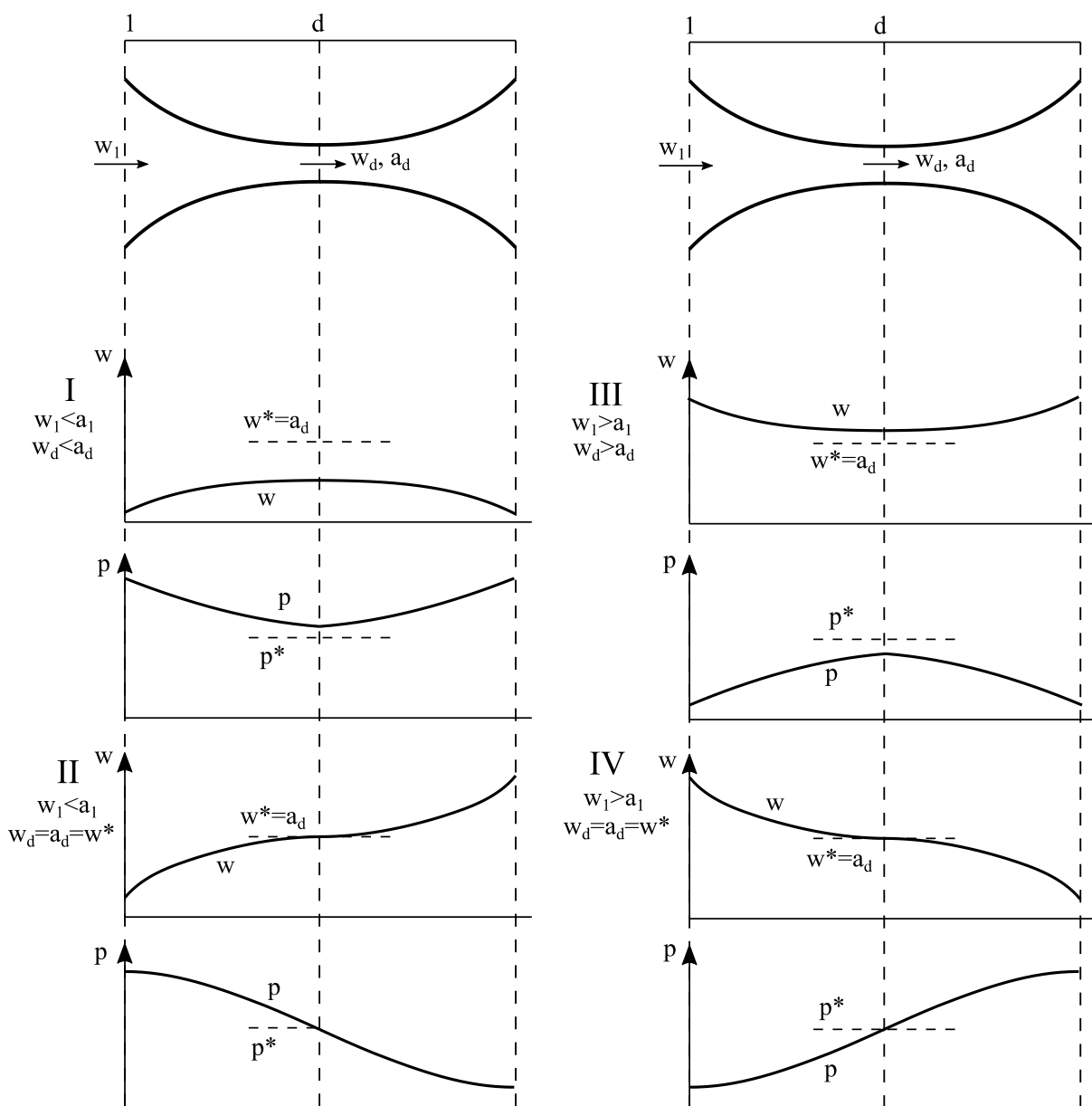
Rychlost w_1 je podkritická a rychlost w_d je rovna místní rychlosti zvuku a_d . Proudění v konvergentní části probíhá stejně jako v případě I. Na výstupu z konvergentní části proud dosáhne kritické rychlosti w^* . V zužující se části Lavalovy dýzy teď rychlost narůstá až na rychlost zvuku a tlak klesá až na hodnotu kritického tlaku p^* . V důsledku setrvačnosti dosáhne proudění před vstupem do rozšířené části lehce nadkritické rychlosti, proto nárůst rychlosti pokračuje stejně jako pokles tlaku. Rychlost proudu v dýze od vstupu až po výstup narůstá. V kritickém průřezu dosahuje právě rychlosti zvuku v daném prostředí a na výstupu je rychlost nadkritická. Tlak podél osy dýzy klesá z tlaku nadkritického až na tlak podkritický na výstupu. V tomto případě se konvergentní i divergentní část Lavalovy dýzy chová jako tryska a probíhá expanzní proudění.

Případ III

Rychlosti w_1 a w_d jsou nadkritické. Proud vstupuje do zužující se části ($dS < 0$) nadkritickou rychlostí. Člen $(1 - Ma^2)$ v rovnici (1.25) je záporný, znaménka dS a dp musí být opačná, proto tlak roste ($dp > 0$). Z Bernoulliho rovnice (1.13) lze jednoduše vyčíst, že při nárůstu tlaku, musí rychlost v konvergentní části klesat ($dw < 0$). Konvergentní část Lavalovy dýzy je tentokrát difuzorem a probíhá v ní kompresní proudění. Do rozšířené části dýzy ($dS > 0$) vstupuje proud nadkritickou rychlostí. Znaménko dp musí být opačné ($dp < 0$), tlak klesá a podle Bernoulliho rovnice (1.13) rychlost musí naopak růst. Divergentní část Lavalovy dýzy je tentokrát tryskou a dochází k expanzi.

Případ IV

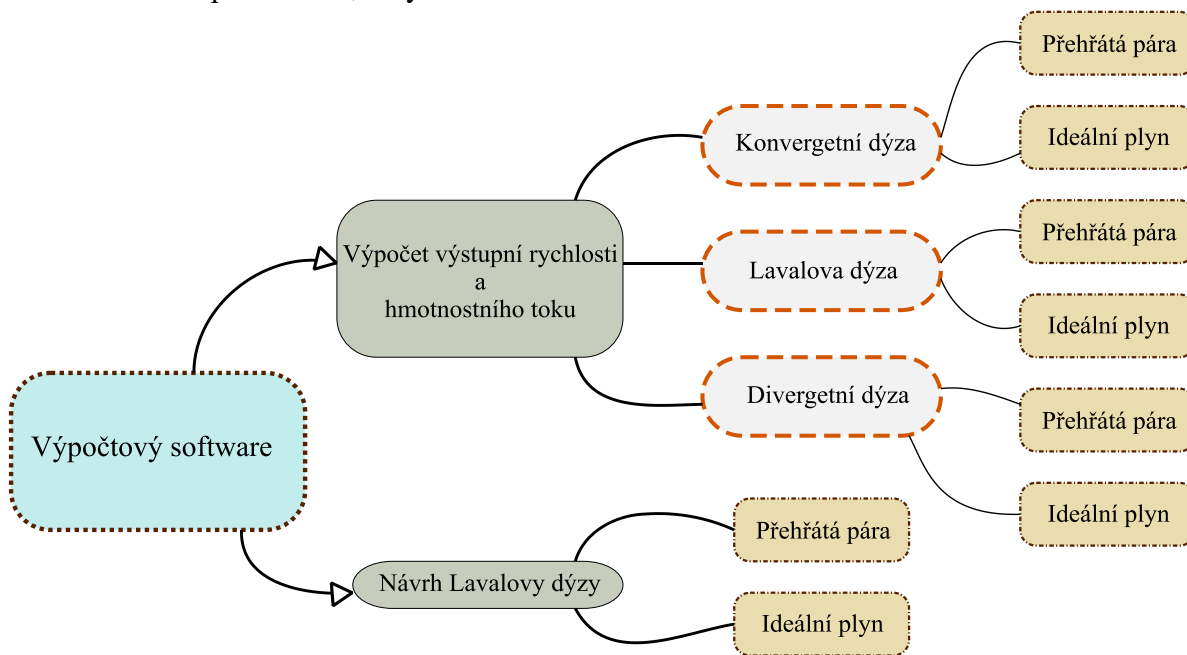
Rychlost w_1 je nadkritická a rychlost w_d je právě rovna místní rychlosti zvuku. Proudění v konvergentní části probíhá stejně jako v případě III. Na výstupu z konvergentní části proud dosáhne rychlosti kritické w^* . V zužující části Lavalovy dýzy teď rychlost klesá až na rychlost zvuku a tlak roste až na hodnotu kritického tlaku p^* . V důsledku setrvačnosti dosáhne proudění před vstupem do rozšířené části lehce podkritické rychlosti, proto pokles rychlosti pokračuje stejně jako nárůst tlaku. Rychlost proudu v dýze od vstupu až po výstup klesá. V kritickém průřezu dosahuje právě rychlosti zvuku v daném prostředí a na výstupu je rychlost podkritická. Tlak podél osy roste z tlaku podkritického až na tlak nadkritický na výstupu. V tomto případě se konvergentní i divergentní část Lavalovy dýzy chová jako difuzor a probíhá kompresní proudění.



Obrázek 1.12: Činnost konvergentně divergentní dýzy při různých vstupních podmínkách (překresleno podle [1])

2 Implementace

Pro výpočtové řešení úloh byl vytvořen software – program v jazyce Python, který řeší dva typy výpočtů. Cílem prvního druhu je zjistit výtakovou rychlost w_2 a hmotnostní tok \dot{m} . Druhý druh výpočtu je založen na návrhu parametrů Lavalovy dýzy. Rozdělení úloh je znázorněno na obrázku 2.1. Předpokladem všech výpočtů je vstupní rychlost menší než rychlost zvuku v daném prostředí a , tedy $Ma < 1$.



Obrázek 2.1: Typy úloh

2.1 Algoritmy pro stanovení výstupní rychlosti a hmotnostního toku

Cílem těchto algoritmů je zjistit výtakovou rychlost w_2 a hmotnostní tok \dot{m} . Jednotlivé výpočty jsou rozděleny na šest případů, rozlišují se 3 typy dýz (konvergentní dýza, divergentní dýza a Lavalova dýza). Pro každou dýzu je dále možné rozlišit proudící médium, a to ideální plyn, nebo přehřátou páru.

Vstupem těchto výpočtů jsou: vstupní tlak p_1 , vnější tlak p_{vm} , vstupní teplota t_1 , vstupní rychlost w_1 , výstupní průměr trysky nebo difuzoru d_2 , v případě ideálního plynu ve výpočtech vystupuje navíc měrná plynová konstanta r a Poissonova konstanta κ .

Mezi pomocné výpočty, které proběhnou ihned po získání vstupních parametrů trysky, je zařazen výpočet měrné plynové konstanty za konstantního tlaku c_p , výpočet výstupní plochy průřezu S_2 a výpočet vstupní termodynamické teploty T_1

$$c_p = \frac{\kappa r}{\kappa - 1}, \quad (2.1)$$

$$S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}, \quad (2.2)$$

$$T_1 = t_1 + 273,15. \quad (2.3)$$

2.1.1 Tok ideálního plynu a přehřáté páry konvergentní dýzou

V jednotlivých průřezích trysky dochází k poklesu tlaku na tlak p_2 , stejně tak klesá teplota i hustota plynu. Naopak dochází k nárůstu rychlosti a měrného objemu podél trysky. Tvar trysky je znázorněn na obrázku 2.2. Pro tok ideálního plynu byl navržen následující postup:

1. Zjištění klidové teploty T_0 z rovnice (1.17) a klidového tlaku p_0 z rovnice (1.18)

$$T_0 = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p}$$

$$p_0 = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} p_1$$

2. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

3. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

4. Porovnání β a β^*

Pokud bude $\beta < \beta^*$ dojde k urychlení plynu na rychlost zvuku, nikoliv ale na nadzvukovou rychlost. Na výstupu bude dosaženo kritických veličin. Tlak na výstupu trysky p_2 bude roven kritickému tlaku p^* . Výstupní rychlost w_2 bude tedy rovna rychlosti kritické w^* , kdy se za tlak p do Saint-Venantovy-Wantzelovy rovnice (1.27) dosadí kritický tlak p^* , který vypočteme z rovnice (1.20).

$$p_2 = p^*$$

$$p^* = \beta^* p_0$$

$$w_2 = w^* = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

Pokud bude $\beta > \beta^*$ dojde k urychlení, ale pouze na podzvukovou rychlost. Tlak na výstupu trysky p_2 bude roven tlaku vnějšímu p_{vn} . Výstupní rychlost w_2 lze získat ze Saint-Venantovy-Wantzelovy rovnice (1.27), kde se za tlak p dosadí vnější tlak p_{vn} .

$$p_2 = p_{vn}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p_{vn}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

5. Výpočet měrného objemu v z rovnice adiabatického děje $pv^\kappa = konst.$, kde klidový měrný objem v_0 lze určit ze stavové rovnice $v_0 = \frac{rT_0}{p_0}$.

Výstupní kritický měrný objem v^*

$$v^* = \left(\frac{p_0}{p^*}\right)^{\frac{1}{\kappa}} v_0$$

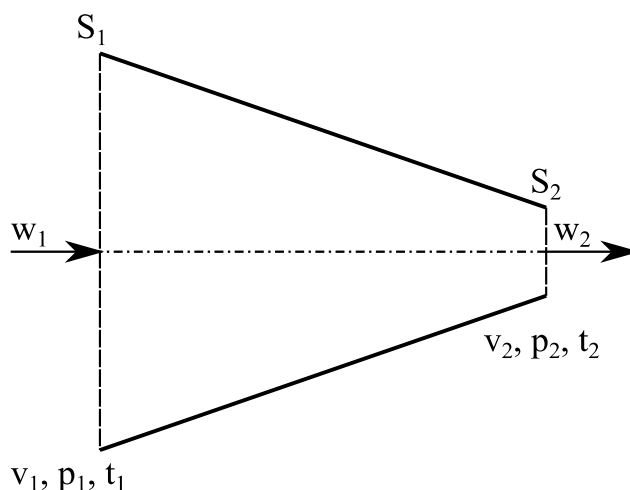
Výstupní měrný objem v_2

$$v_2 = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} v_0$$

6. Výpočet hmotnostního toku \dot{m} z rovnice (1.5), kde S_2 je výstupní průřez konvergentně zužující se dýzy.

$$\dot{m} = \frac{S_2 w^*}{v^*}$$

$$\dot{m} = \frac{S_2 w_2}{v_2}$$



Obrázek 2.2: Konvergentní tryska

V případě výpočtu proudění přehřáté páry se používá $h-s$ diagram vody a vodní páry, adiabatická expanze je znázorněna na obrázku 2.3 a 2.4. Pro tok páry konvergentní dýzou byl navržen tento postup:

1. Nalezení vstupní měrné entalpie h_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_1 \in t_1 \cap p_1$)
2. Nalezení měrné entropie na vstupu s_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($s_1 \in t_1 \cap p_1$)
3. Výpočet klidové entalpie ze vztahu (1.14)

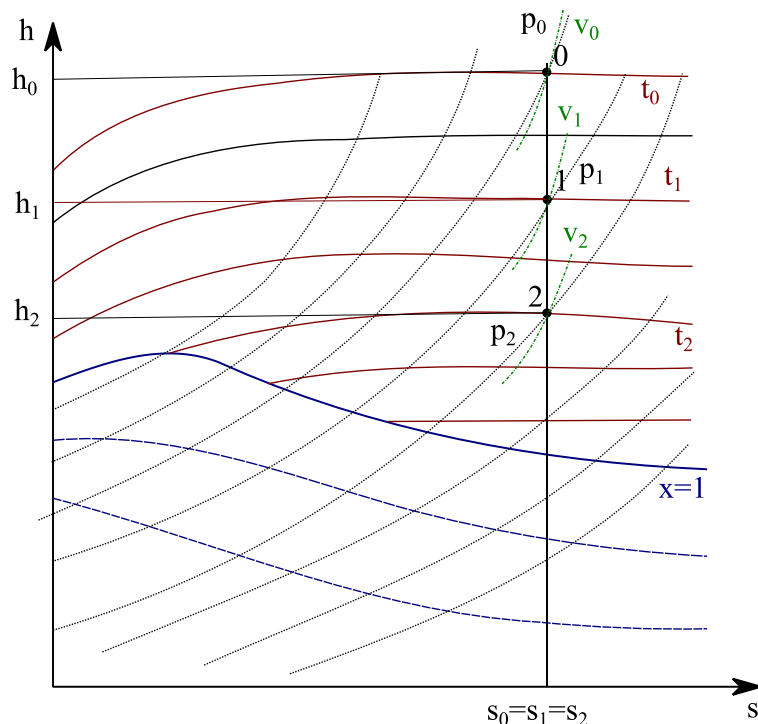
$$h_0 = h_1 + \frac{w_1^2}{2}$$

4. Nalezení klidového tlaku p_0 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($p_0 \in h_0 \cap s_1$)
5. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

6. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

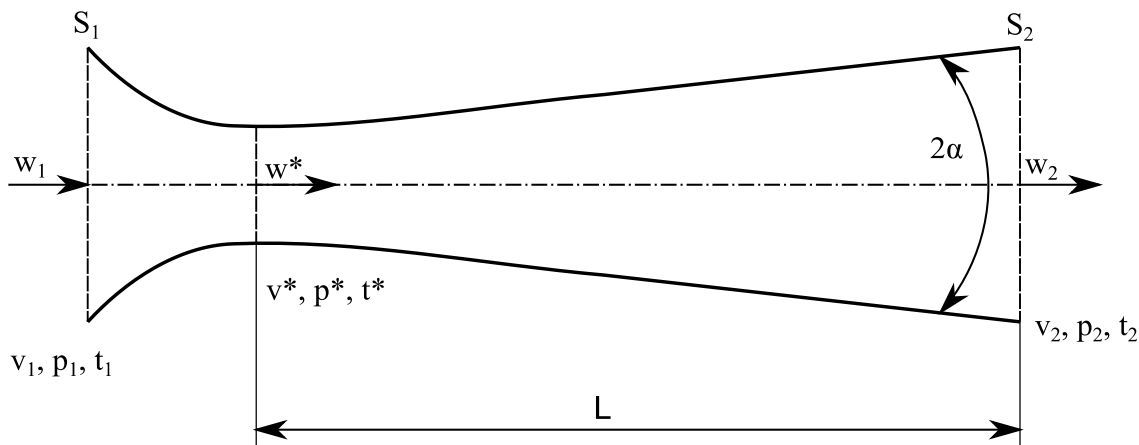
$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$



Obrázek 2.4: Průběh adiabatické expanze páry v konvergentní trysce na vnější tlak

2.1.2 Tok ideálního plynu a přehřáté páry Lavalovou dýzou

Z předchozích rozborů je patrné, že použití Lavalovy dýzy (viz obrázek 2.5) má význam pouze v případě, když vnější tlak p_{vn} je menší než tlak kritický p^* . Pokud bude $\beta > \beta^*$, tak tedy není možné dosáhnout nadzvukové rychlosti a použití Lavalovy dýzy je zbytečné a je vhodnější užít konvergentní trysku.



Obrázek 2.5: Lavalova dýza

Pro tok ideálního plynu Lavalovou dýzou byl navržen tento postup:

1. Zjištění klidové teploty T_0 z rovnice (1.17) a klidového tlaku p_0 z rovnice (1.18)

$$T_0 = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p}$$

$$p_0 = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} p_1$$

2. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

3. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

4. Porovnání β a β^*

Pokud bude $\beta < \beta^*$ bude v kritickém místě Lavalovy trysky dosaženo kritické rychlosti w^* a na výstupu bude dosaženo nadzvukové rychlosti w_2 . Tlak na výstupu trysky p_2 bude roven tlaku vnějšímu p_{vn} . Obě rychlosti se vypočítají ze Saint-Venantovy-Wantzelovy rovnice (1.27), kdy se za tlak p dosadí p^* nebo p_{vn} . Kritický tlak p^* lze získat z rovnice (1.20).

$$p_2 = p_{vn}$$

$$p^* = \beta^* p_0$$

$$w^* = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p_{vn}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$$

5. Výpočet výstupního měrného objemu v_2 z rovnice adiabatického děje $pv^\kappa = konst.$, kde se klidový měrný objem v_0 určí ze stavové rovnice $v_0 = \frac{rT_0}{p_0}$.

$$v_2 = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} v_0$$

6. Výpočet hmotnostního toku \dot{m} z rovnice (1.5), kde S_2 je výstupní průřez Lavalovy dýzy.

$$\dot{m} = \frac{S_2 w_2}{v_2}$$

Pokud bude Lavalovou dýzou proudit pára jsou stavové veličiny zjišťovány pomocí $h-s$ diagramu, tento diagram je ve vytvořeném softwaru nahrazen knihovnou XSteam. Průběh adiabatické expanze v Lavalově dýze je znázorněn na obrázku 2.6. Pro proudění páry Lavalovou dýzou byl navržen následující postup:

1. Nalezení vstupní měrné entalpie h_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_1 \in t_1 \cap p_1$)
2. Nalezení měrné entropie na vstupu s_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($s_1 \in t_1 \cap p_1$)
3. Výpočet klidové entalpie ze vztahu (1.14)

$$h_0 = h_1 + \frac{w_1^2}{2}$$

4. Nalezení klidového tlaku p_0 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($p_0 \in h_0 \cap s_1$)
5. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

6. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

7. Porovnání β a β^*

Pokud bude $\beta < \beta^*$ bude v kritickém místě Lavalovy trysky dosaženo kritické rychlosti w^* a na výstupu bude dosaženo nadzvukové rychlosti w_2 . Tlak na výstupu p_2 bude roven tlaku vnějšímu p_{vn} . Kritický tlak p^* lze získat rovnice (1.20).

$$p_2 = p_{vn}$$

$$p^* = \beta^* p_0$$

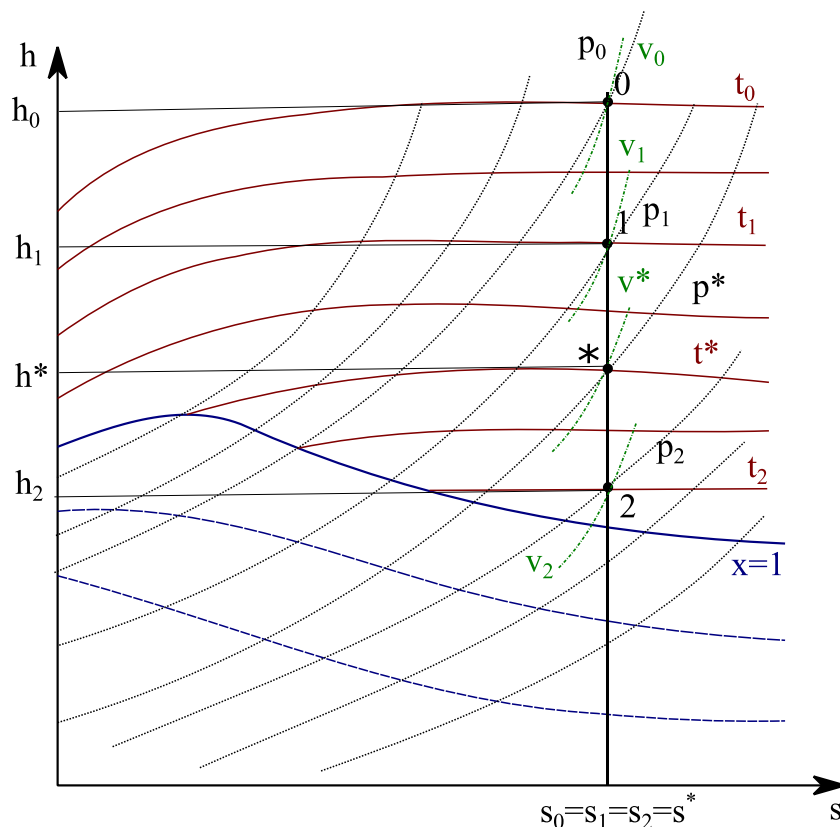
8. Zjištění měrné výstupní entalpie h_2 a výstupního měrného objemu v_2 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_2 \in p_2 \cap s_1$, $v_2 \in p_2 \cap s_1$)
9. Zjištění kritické entalpie h^* v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h^* \in p^* \cap s_1$)
10. Výpočet výstupní rychlosti w_2 a kritické rychlosti w^* z rovnice (1.28)

$$w_2 = \sqrt{2(h_0 - h_2)}$$

$$w^* = \sqrt{2(h_0 - h^*)}$$

11. Výpočet hmotnostního toku \dot{m} z rovnice (1.5), kde S_2 je výstupní průřez Lavalovy trysky

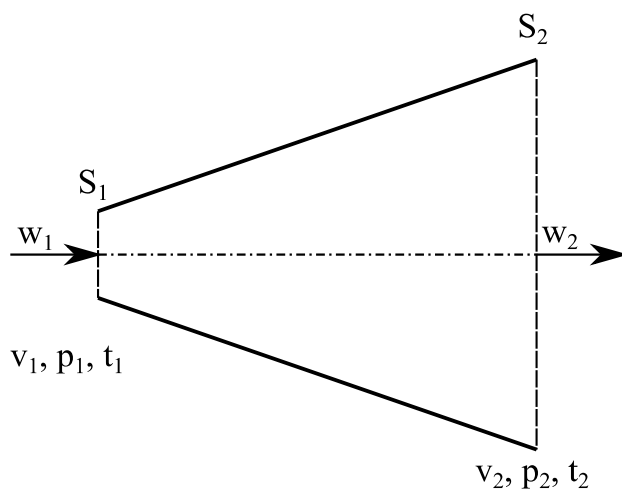
$$\dot{m} = \frac{S_2 w_2}{v_2}$$



Obrázek 2.6: Průběh adiabatické expanze v Lavalově dýze

2.1.3 Tok ideálního plynu a přehřáté páry divergentní dýzou

Za předpokladu $Ma < 1$ divergentní dýza (viz obrázek 2.7) slouží ke snížení rychlosti média. Výstupní i vstupní rychlostí je rychlost podzvuková. Vnější tlak p_{vn} musí být větší než tlak na vstupu p_1 . V difuzoru dochází k poklesu rychlosti w za současného nárůstu teploty T a hustoty ρ .



Obrázek 2.7: Divergentní dýza

Pro výpočet výstupní rychlosti w_2 a hmotnostního toku \dot{m} divergentní dýzou s ideálním plynem byl navržen tento postup:

1. Zjištění výstupní teploty T_2 z rovnice adiabatického děje $pv^\kappa = \text{konst.}$ a stavové rovnice, vnější tlak p_{vn} je roven tlaku na výstupu difuzoru p_2 .

$$p_2 = p_{vn}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

2. Zjištění výstupní rychlost w_2 z energetické rovnice (1.9)

$$w_2 = \sqrt{2(c_p T_1 - c_p T_2) + w_1^2}$$

3. Zjištění výstupního měrného objemu v_2 ze stavové rovnice

$$v_2 = \frac{rT_2}{p_2}$$

4. Výpočet hmotnostního toku \dot{m} z rovnice (1.5), kde S_2 je výstupní průřez difuzoru.

$$\dot{m} = \frac{S_2 w_2}{v_2}$$

5. Zjištění klidové teploty T_0 z rovnice (1.17) a klidového tlaku p_0 z rovnice (1.18)¹

$$T_0 = T_2 + \frac{w_2^2}{2c_p}$$

$$p_0 = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} p_1$$

Průběh adiabatické komprese v difuzoru je znázorněn na obrázku 2.8. V případě proudění páry difuzorem je postup následující:

1. Tlak na výstupu difuzoru p_2 bude roven tlaku vnějšímu p_{vn} .

$$p_2 = p_{vn}$$

2. Nalezení vstupní měrné entalpie h_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_1 \in t_1 \cap p_1$)
3. Nalezení měrné entropie na vstupu s_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($s_1 \in t_1 \cap p_1$)
4. Nalezení výstupní měrné entalpie h_2 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_2 \in p_2 \cap s_1$)
5. Nalezení měrného objemu na výstupu v_2 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($v_2 \in p_2 \cap s_1$)
6. Výpočet výstupní rychlosti w_2 z energetické rovnice (1.9)

$$w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + w_1^2}$$

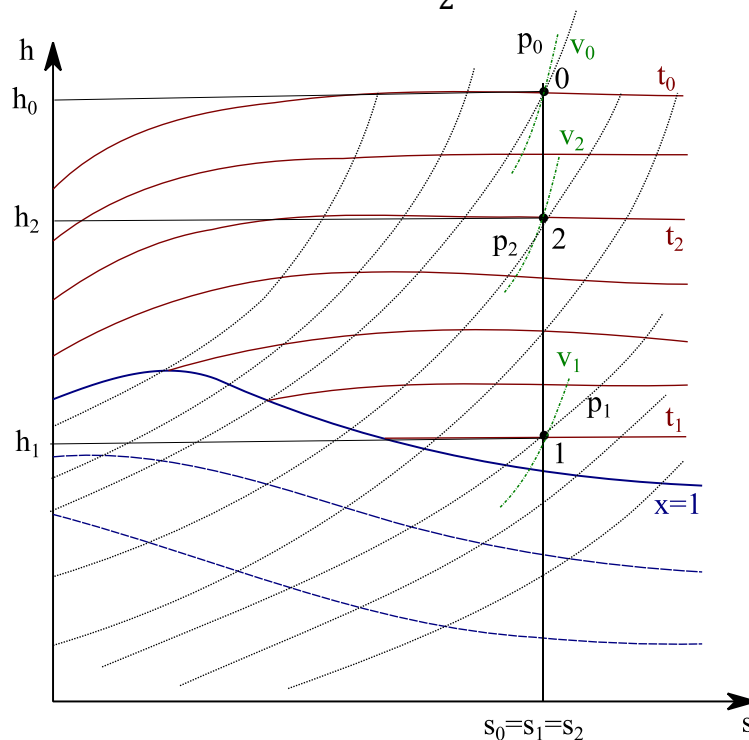
¹Tyto hodnoty budou využity při vykreslování grafů.

7. Výpočet hmotnostního toku \dot{m} z rovnice (1.5), kde S_2 je výstupní průřez difuzoru.

$$\dot{m} = \frac{S_2 w_2}{v_2}$$

8. Výpočet klidové entalpie ze vztahu (1.14)²

$$h_0 = h_1 + \frac{w_1^2}{2}$$



Obrázek 2.8: Průběh adiabatické komprese páry v difuzoru

2.2 Algoritmus pro vykreslování grafů

Mimo výstupní rychlost w_2 a výstupní hmotnostní tok \dot{m} je výstupem výpočtu 6 grafů, které vyjadřují závislost teploty T , entalpie h , rychlosti w , hustoty ρ , průřezu dýzy S , rychlosti zvuku a a Machova čísla Ma na tlaku měnícího se podél trysky.

Tlak na vstupu dýzy je označován jako p_1 , tlak na výstupu dýzy p_2 je tlak, kterého je dosaženo na konci dýzy, ve většině případů je roven vnějšímu tlaku p_{vn} , pouze u konvergentní trysky při tlakovém poměru $\beta < \beta^*$ je tlak na výstupu trysky roven kritickému tlaku p^* , jelikož konvergentní tryska nedokáže urychlit médium na nadzvukovou rychlost.

Tento interval $\langle p_1, p_2 \rangle$ je rozdělen na i hodnot a pro každou hodnotu tlaku p_i , nacházejícího se mezi p_1 a p_2 , jsou dopočítány pomocí cyklů hodnoty teploty T_i , entalpie h_i , rychlosti w_i , hustoty ρ_i , průřezu trysky S_i , rychlosti zvuku a_i a Machova čísla Ma_i . Z vypočtených hodnot jsou vytvořeny grafy závislostí.

² Tato hodnota bude využita při vykreslování grafů.

2.2.1 Grafy pro ideální plyn

Jako vstupy do funkcí pro kreslení grafů jsou potřeba: klidový tlak p_0 , měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku c_p , klidová teplota T_0 , hmotnostní tok \dot{m} , Poissonova konstanta κ a měrná plynová konstanta r . Vztahy pro vykreslování závislostí jsou následující:

$$T_i = T_0 \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (2.4)$$

$$w_i = \sqrt{2c_p(T_0 - T_i)}, \quad (2.5)$$

$$\rho_i = \frac{p_i}{rT_i}, \quad (2.6)$$

$$S_i = \frac{\dot{m}}{w_i \rho_i}, \quad (2.7)$$

$$a_i = \sqrt{\kappa r T_i}, \quad (2.8)$$

$$Ma_i = \frac{w_i}{a_i}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Grafy pro přehřátou páru

Jako vstupy do funkcí vytvářející grafy pro přehřátou páru jsou potřeba: měrná entropie s_1 , klidová entalpie h_0 , hmotnostní tok \dot{m} . Na základě těchto vztahů je vytvořeno 6 grafů závislostí:

$$t_i \in p_i \cap s_1, \quad (2.10)$$

$$h_i \in t_i \cap s_1, \quad (2.11)$$

$$w_i = \sqrt{2(h_0 - h_i)}, \quad (2.12)$$

$$\rho_i \in p_i \cap s_1, \quad (2.13)$$

$$S_i = \frac{\dot{m}}{w_i \rho_i}, \quad (2.14)$$

$$a_i \in p_i \cap s_1, \quad (2.15)$$

$$Ma_i = \frac{w_i}{a_i}. \quad (2.16)$$

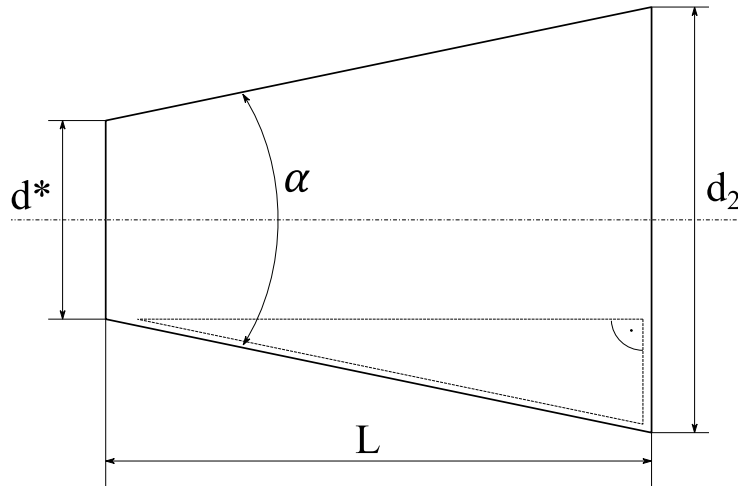
2.3 Algoritmus pro návrh Lavalovy dýzy

Návrh Lavalovy dýzy spočívá ve stanovení průtočných průměrů, čímž jsou kritický průměr d^* a výstupní průměr divergentní části d_2 , a délky rozšiřující části nástavce L . Vstupy do výpočtů jsou: vstupní rychlost w_1 , vstupní teplota t_1 , vstupní tlak p_1 , vnější tlak p_{vn} ,

Poissonova konstanta κ (v případě přehřáté páry uvažujeme $\kappa = 1,3$), hmotnostní tok \dot{m} a úhel nástavce α . V případě ideálního plynu se navíc zadává měrná plynová konstanta r .

Délku nástavce vypočítáme pomocí Pythagorovy věty podle schématu na obrázku 2.9, kde

$$L = \frac{d_2 - d^*}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.17)$$



Obrázek 2.9: Nástavec Lavalovy dýzy

2.3.1 Návrh Lavalovy dýzy s ideálním plynem

Pro návrh Lavalovy dýzy, kterou prochází ideální plyn byl navržen následující postup:

1. Výpočet vstupní termodynamické teploty T_1

$$T_1 = t_1 + 273,15$$

2. Výpočet měrné plynové konstanty za konstantního tlaku c_p

$$c_p = \frac{\kappa r}{\kappa - 1}$$

3. Zjištění klidové teploty T_0 z rovnice (1.17) a klidového tlaku p_0 z rovnice (1.18)

$$T_0 = T_1 + \frac{w_1^2}{2c_p}$$

$$p_0 = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} p_1$$

4. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

5. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

6. Porovnání β a β^*

Pokud bude $\beta > \beta^*$, tak není možné dosáhnout nadzvukové rychlosti a použití Lavalovy dýzy je zbytečné. Výpočet končí.

Pokud bude $\beta < \beta^*$, bude v kritickém místě Lavalovy trysky dosaženo kritické rychlosti w^* a na výstupu bude dosaženo nadzvukové rychlosti w_2 . Tlak na výstupu trysky p_2 bude tedy roven vnějšímu tlaku p_{vn} . Obě rychlosti se vypočítají ze Saint Vénantovy-Wantzelovy rovnice (1.27), kdy se za tlak p dosadí p^* nebo p_2 . Kritický tlak p^* se získá z rovnice (1.20).

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{vn} \\ p^* &= \beta^* p_0 \\ w^* &= \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} \\ w_2 &= \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} r T_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} \end{aligned}$$

7. Výpočet měrného objemu v z rovnice adiabatického děje $pv^\kappa = konst.$, kde se klidový měrný objem v_0 určí ze stavové rovnice $v_0 = \frac{rT_0}{p_0}$.

$$\begin{aligned} v^* &= \left(\frac{p_0}{p^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}} v_0 \\ v_2 &= \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} v_0 \end{aligned}$$

8. Výpočet kritického průměru d^* a výstupního průměru d_2 z rovnice kontinuity (1.5)

$$\begin{aligned} d^* &= \sqrt{\frac{4v^* \dot{m}}{\pi w^*}} \\ d_2 &= \sqrt{\frac{4v_2 \dot{m}}{\pi w_2}} \end{aligned}$$

9. Výpočet délky nástavce z rovnice (2.17)

$$L = \frac{d_2 - d^*}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

2.3.2 Návrh Lavalovy dýzy pro výtok páry

Při návrhu Lavalovy dýzy s přehřátou párou je využito schématu průběhu adiabatické expanze na obrázku 2.6.

1. Nalezení vstupní měrné entalpie h_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_1 \in t_1 \cap p_1$)
2. Nalezení měrné entropie na vstupu s_1 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($s_1 \in t_1 \cap p_1$)
3. Výpočet klidové měrné entalpie ze vztahu (1.14)

$$h_0 = h_1 + \frac{w_1^2}{2}$$

4. Nalezení klidového tlaku p_0 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($p_0 \in h_0 \cap s_1$)
5. Výpočet tlakového poměru z rovnice (1.21)

$$\beta = \frac{p_{vn}}{p_0}$$

6. Určení kritického tlakového poměru z rovnice (1.20)

$$\beta^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

7. Porovnání β a β^*

Pokud bude $\beta > \beta^*$, tak není možné dosáhnout nadzvukové rychlosti a použití Lavalovy dýzy je zbytečné, stačí použít konvergentní dýzu. Výpočet zde končí.

Pokud bude $\beta < \beta^*$, bude v kritickém místě Lavalovy trysky dosaženo kritické rychlosti w^* a na výstupu bude dosaženo nadzvukové rychlosti w_2 . Tlak na výstupu trysky p_2 bude roven tlaku vnějšímu p_{vn} .

$$p_2 = p_{vn}$$

8. Výpočet výstupní entalpie h_2 a výstupního měrného objemu v_2 v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h_2 \in p_2 \cap s_1$, $v_2 \in p_2 \cap s_1$)
9. Zjištění kritický tlaku p^* z rovnice (1.20)

$$p^* = \beta^* p_0$$

10. Zjištění kritické entalpie h^* a kritického měrného objemu v^* v $h-s$ diagramu vody a vodní páry ($h^* \in p^* \cap s_1$, $v^* \in p^* \cap s_1$)
11. Výpočet výstupní rychlosti w_2 a kritické rychlosti w^* z rovnice (1.27)

$$w_2 = \sqrt{2(h_0 - h_2)}$$

$$w^* = \sqrt{2(h_0 - h^*)}$$

12. Výpočet kritického průměru d^* a výstupního průměru d_2 z rovnice kontinuity (1.5)

$$d^* = \sqrt{\frac{4v^*\dot{m}}{\pi W^*}}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4v_2\dot{m}}{\pi W_2}}$$

13. Výpočet délky nástavce z rovnice (2.17)

$$L = \frac{d_2 - d^*}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

3 Popis softwaru a ukázka řešení vzorových příkladů

Výpočtový software je vytvořen v programovacím jazyce Python, což je vysokoúrovňový programovací jazyk [6; 7]. Jedná se o dynamicky typovaný jazyk, který je díky své jednoduchosti často používán pro řešení široké škály problémů, od vědeckých výpočtů až po tvorbu her. Na základě druhé kapitoly byly vytvořeny funkce pro výpočty a vykreslování, které tvoří stěžejní část softwaru. Ukázka definice funkce v tomto jazyce je na ukázce zdrojového kódu 3.2.

Pro jazyk Python existuje velké množství knihoven, které rozšiřují jeho možnosti, a proto je několik z nich využito ve vytvořeném softwaru. Například knihovna Numpy, která přidává podporu jak multidimenzionálních polí a matic, tak i funkcí, které s nimi pracují. Další použitou knihovnou je PyQt5, ta umožňuje použití frameworku Qt v jazyce Python. Tyto nástroje umožňují tvorbu grafického rozhraní, které je jednoduše modifikovatelné a zároveň multiplatformní. Poslední a klíčovou knihovnou je XSteam, je to knihovna pro termodynamické výpočty a je více popsána v následující podkapitole.

3.1 XSteam

V příkladech s přehřátou párou je potřeba hledat vlastnosti páry v tabulkách nebo v grafech, což je nahrazeno knihovnou XSteam, která poskytuje přesné vlastnosti vody a páry v rozsahu 0–1000 bar a 0–2000 °C podle IAPWS R7-97 (The International Association for the Properties of Water and Steam) [8].

Nejprve je nutné zvolit systém jednotek, se kterými bude knihovna XSteam pracovat. XSteam nabízí 3 varianty, ve vytvořeném softwaru byla zvolena první varianta (viz ukázka zdrojového kódu 3.1). Názvy použitých veličin, jejich značení a jednotky v knihovně XSteam jsou shrnuty v tabulkách 3.1 a 3.2.

```
steamTable = XSteam(XSteam.UNIT_SYSTEM_MKS) # m/kg/sec/°C/bar/W
steamTable = XSteam(XSteam.UNIT_SYSTEM_FLS) # ft/lb/sec/°F/psi/btu
steamTable = XSteam(XSteam.UNIT_SYSTEM_BARE) # m/kg/sec/K/MPa/W
```

Ukázka zdrojového kódu 3.1: Volání jednotek knihovny XSteam

Tabulka 3.1: Použité vlastnosti páry v XSteam a jejich jednotky [8]

Vlastnost	Popis	Jednotka
t	teplota	°C
p	tlak	bar
h	měrná entalpie	kJ/kg
v	měrný objem	m ³ /kg
s	měrná entropie	kJ/kg.°C
w	rychlost zvuku	m/s

Tabulka 3.2: Funkce použité v XSteam [8]

Funkce	Popis
h_ps	měrná entalpie jako funkce tlaku a měrné entropie
h_pt	měrná entalpie jako funkce tlaku a teploty
s_pt	měrná entropie jako funkce tlaku a teploty
v_ps	měrný objem jako funkce tlaku a měrné entropie
p_hs	tlak jako funkce měrné entalpie a měrné entropie
w_pt	rychlost zvuku jako funkce tlaku a teploty

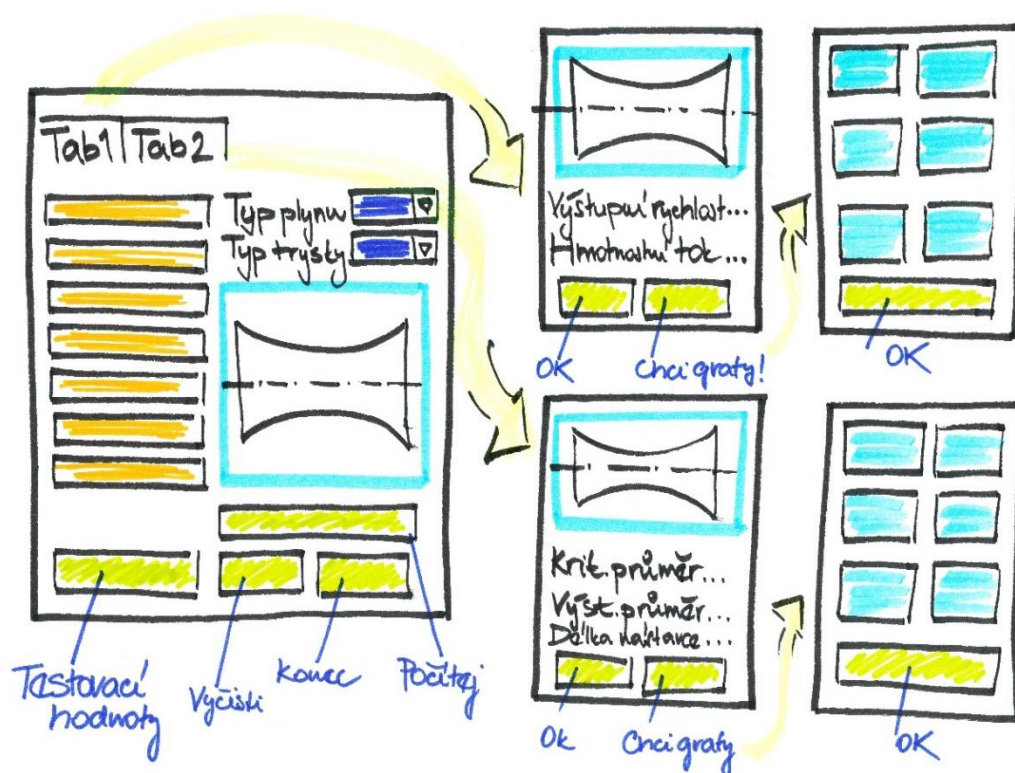
Hledané veličiny mají následující schéma: nejprve hledaná veličina, poté podtržítka a vstupní vlastnosti [8]. Například:

$$s = (\text{steamTable.s_pt}(p, t)),$$

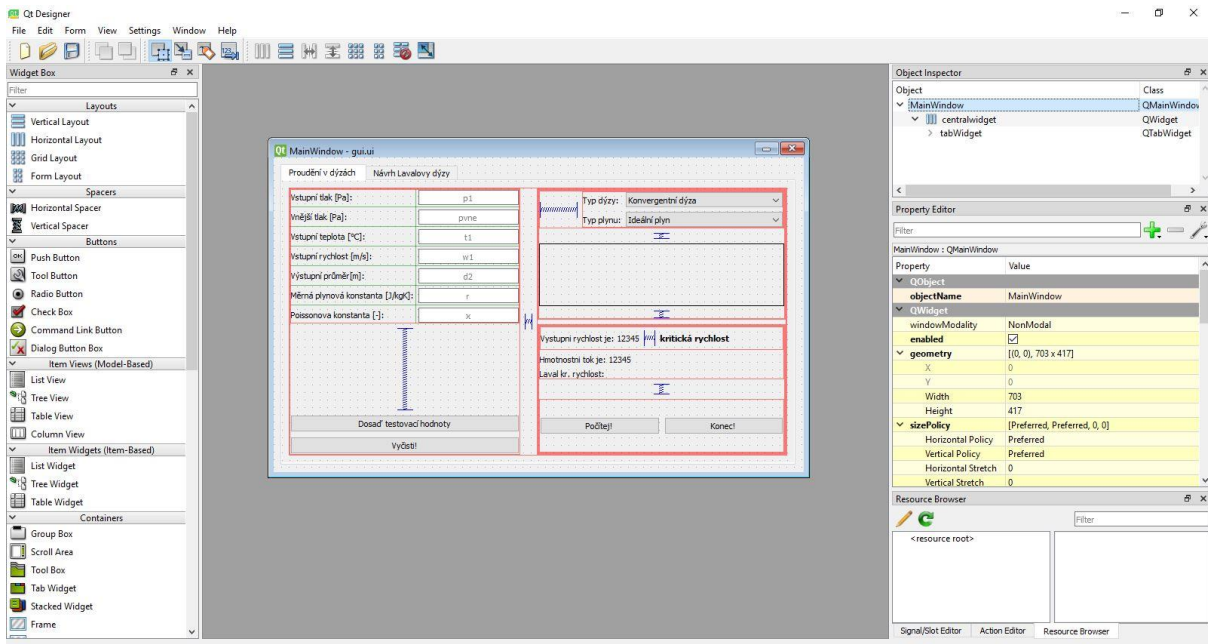
kde je hledanou hodnotou měrná entalpie, přičemž známými vstupy jsou tlak a teplota.

3.2 Návrh uživatelského rozhraní

GUI (Graphical user interface) neboli grafické uživatelské rozhraní bylo vytvořeno pomocí aplikace Qt5 Designer, kde lze základní kostru GUI jednoduše navrhnout (viz obrázek 3.2). Rozložení oken bylo navrženo na základě funkčnosti a pohodlnosti uživatele podle prvotního plánu rozložení softwaru (viz obrázek 3.1).

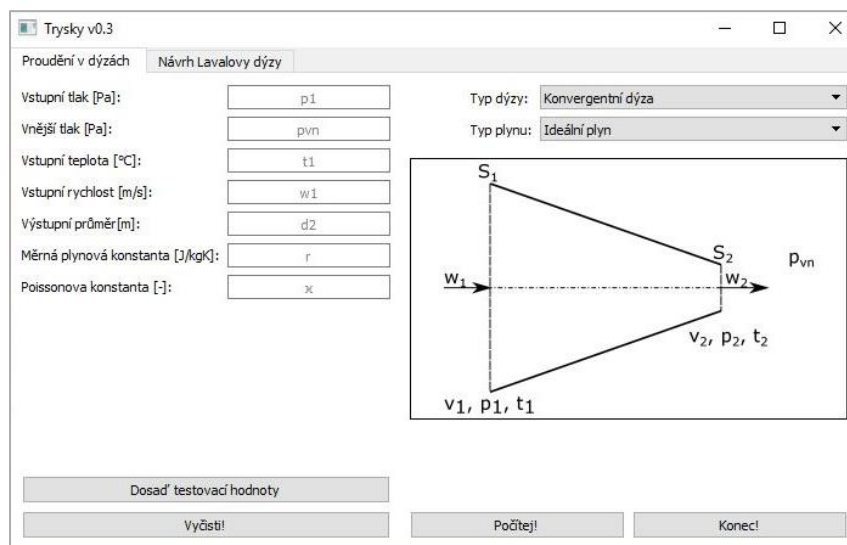


Obrázek 3.1: Prvotní návrh grafického uživatelského rozhraní

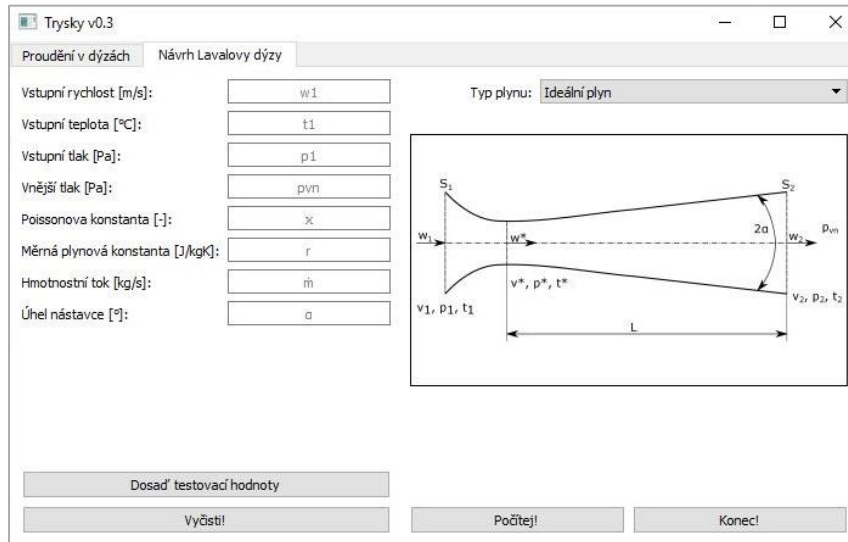


Obrázek 3.2: Qt Designer

Konečná verze softwaru se skládá ze dvou záložek, jedna pro zjišťování výstupní rychlosti a hmotnostního toku média; a druhá je určena pro návrh parametrů Lavalovy dýzy. Uživateli je umožněno zadat vstupní parametry a zvolit typ trysky nebo proudícího plynu. Na základě jeho výběru se mění obrázek trysky a pro dané kombinace může zvolit tlačítko „Dosad' testovací hodnoty“, kdy jsou za vstupy dosazeny hodnoty bez jeho námahy, nebo lze vlastní vstupní hodnoty zadat ručně. Po stisknutí tlačítka „Počítej!“ se provedou výpočty. V případě vyplnění nevhodných vstupních parametrů je software pojištěn a uživatel je upozorněn výstražným oknem. Vedle výsledků se zobrazí okno se šesti grafy popisující děj v dýze. Okno je doplněno tlačítkem „Uložit“, které vytvoří PDF soubor shrnující aktuálně řešený příklad. Ukázka tohoto PDF souboru je k nalezení v příloze C. Při změně typu dýzy a plynu je naprogramováno zařazení vstupních políček, tak aby bylo uživateli jasné, jaké hodnoty je potřeba pro daný typ příkladu zadat.



Obrázek 3.3: Grafické rozhraní softwaru A



Obrázek 3.4: Grafické rozhraní softwaru B

3.3 Ukázky řešení

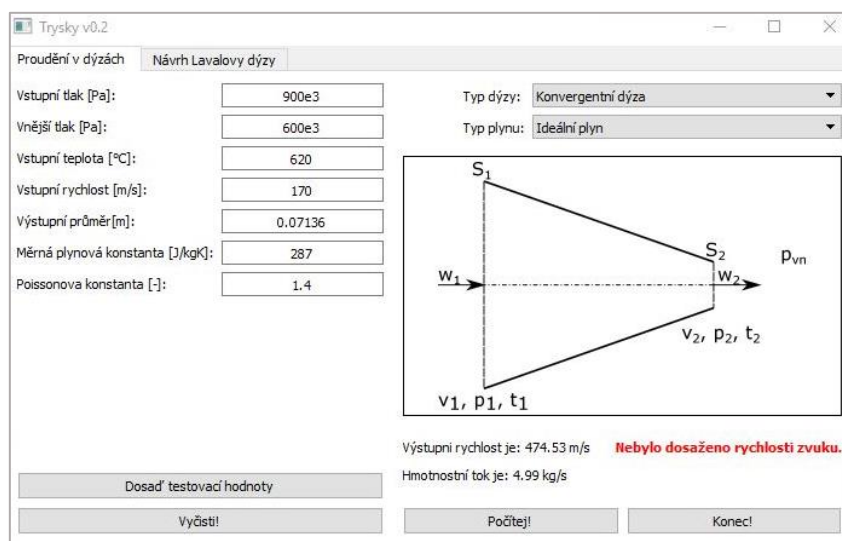
V této kapitole bude software aplikován na řešení upravených termodynamických příkladů z [9].

Příklad 1: Konvergentní dýza a ideální plyn

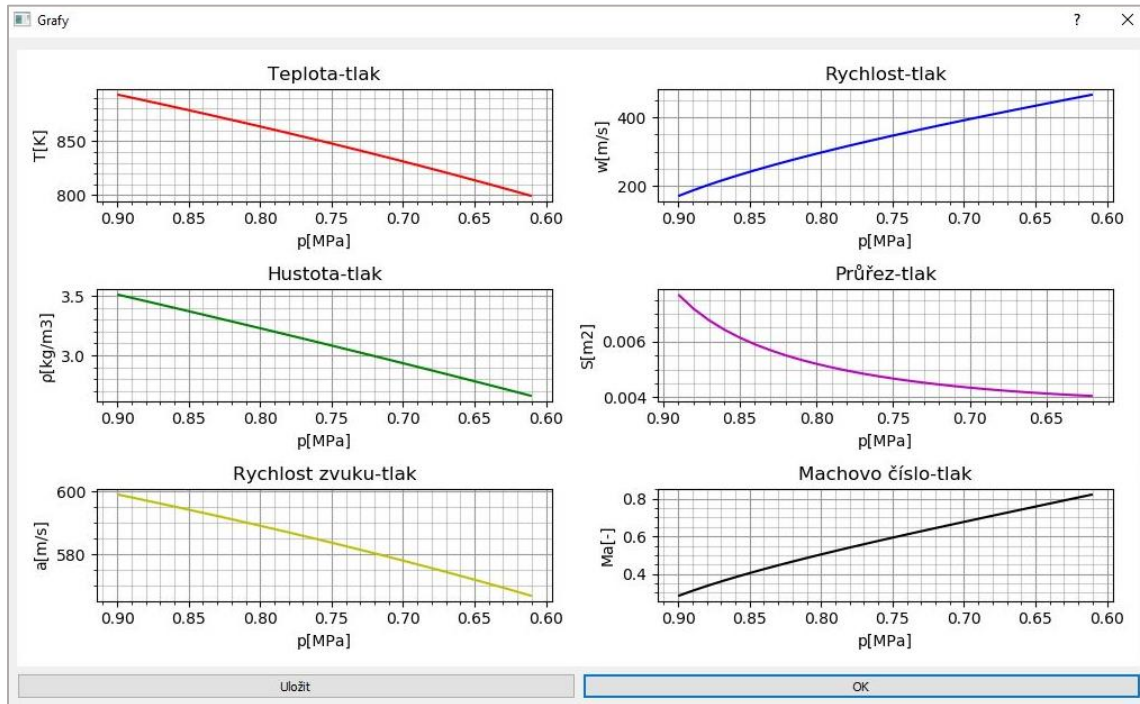
Vzduch o tlaku 900 kPa a teplotě 620 °C vstupuje do zužující se trysky rychlostí 170 m/s. Vypočítejte hmotnostní tok tryskou, je-li průměr plochy výstupního průřezu 71,36 mm při protitlaku 600 kPa.

Řešení:

Dle tabulek, které jsou k nalezení v příloze B, je měrná plynová konstanta vzduchu 287 J/kgK. Tlakový poměr není menší než kritický tlakový poměr, a proto nedojde k urychlení na rychlost zvuku. Výstupní rychlost vzduchu je 474,5 m/s a hmotnostní tok je 4,99 kg/s. Zobrazení výsledků je na obrázku 3.5 a 3.6.



Obrázek 3.5: Řešení příkladu 1 – hlavní okno



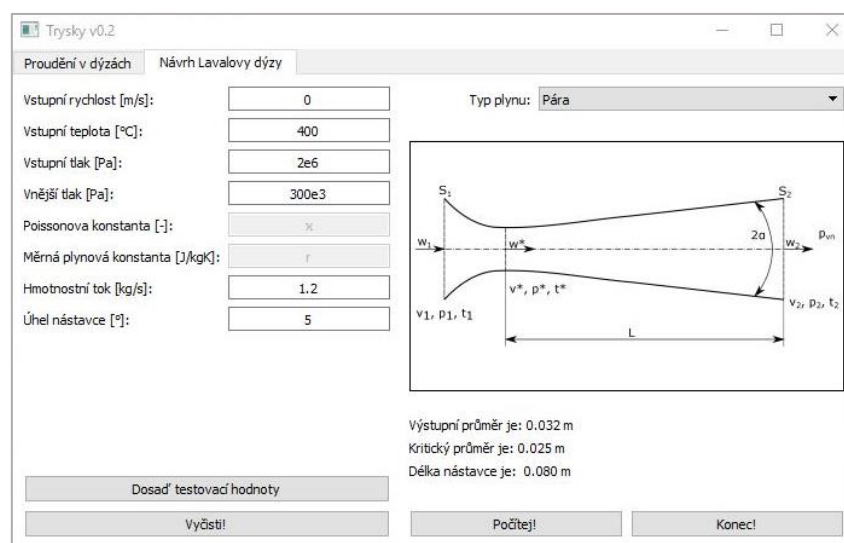
Obrázek 3.6: Řešení příkladu 1 – grafy

Příklad 2: Návrh parametrů Lavalovy dýzy

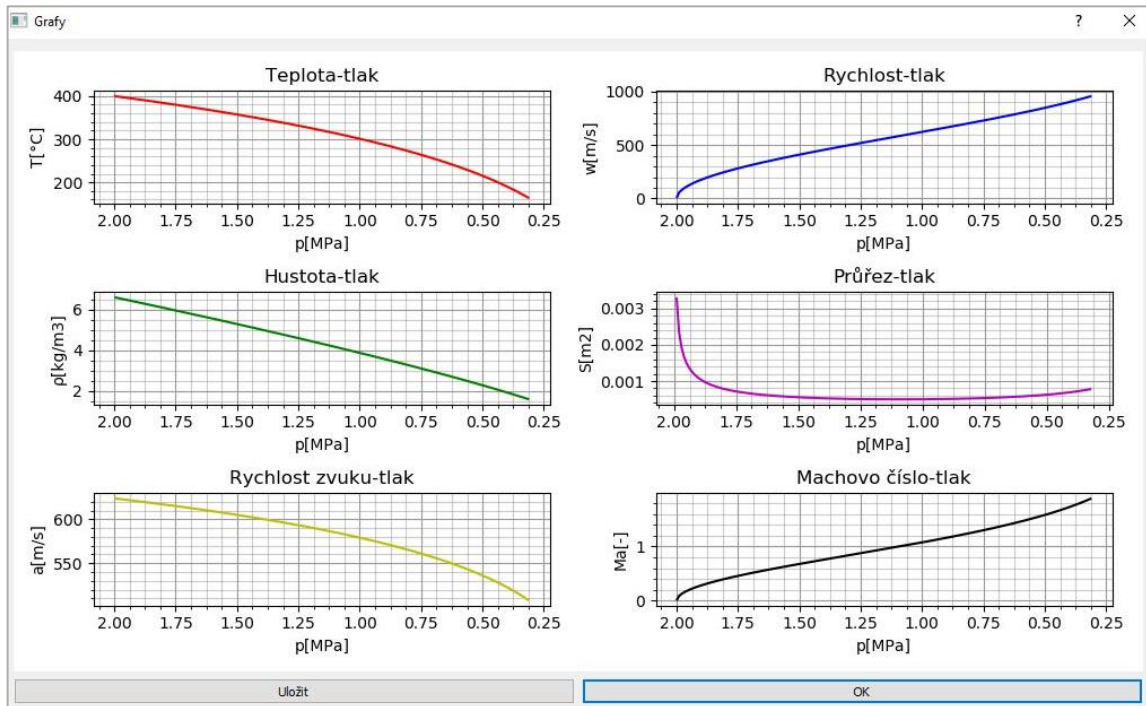
Hmotnostní tok vodní páry 1,2 kg/s o tlaku 2 MPa a teplotě 400 °C vstupuje do Lavalovy trysky zanedbatelnou rychlostí a vystupuje z ní při tlaku 300 kPa, úhel nástavce α je 5 °. Proudění je izoentropické. Stanovte oba průměry a délku nástavce.

Řešení:

Výstupní průměr nástavce je 0,032 m, kritický průměr nástavce je 0,025 m a délka nástavce je 0,08 m (viz obrázek 3.7 a 3.8).



Obrázek 3.7: Řešení příkladu 2 – hlavní okno



Obrázek 3.8: Řešení příkladu 2 – grafy

```
#ideální plyn + divergentní dyza
def case3(T1, w1, p1, pvn, S2, r, cp, kappa):
    # tlak na vystupu je roven tlaku vnejsimu
    p2 = pvn
    # zjisteni T2 ze stavove rovnice
    T2 = T1 * (p1 / p2) ** ((1 - kappa) / kappa)
    # vystupni rychlost z energeticke rovnice
    w2 = math.sqrt(2 * (cp * T1 - cp * T2) + w1 ** 2)
    # vystupni merny objem ze stavove rovnice
    v2 = r * T2 / p2
    # hmotnostni tok na vystupu
    m = S2 * w2 / v2
    # nebude dosazeno rychlosti zvuku
    CriticalSpeed = False
    # vstupy pro vykreslovani grafu
    T0 = T2 + (w2**2) / (2*cp)
    p0 = p1 * (T1 / T0) ** (kappa / (1 - kappa))
    pStart = p1
    pEnd = p2
    # vystupem bude hmotnostni tok m a vystupni rychlost
    return w2, m, CriticalSpeed, pStart, pEnd, T0, p0
```

Ukázka zdrojového kódu 3.2: Definice funkce pro divergentní dýzu a ideální plyn

ZÁVĚR

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvořit výpočtový software pro řešení základních termodynamických výpočtů proudění plynů v tryskách. V úvodní části bakalářské práce byla provedena rešerše termodynamických pojmů, principů a vztahů, které jsou stěžejní pro pochopení termodynamických problémů a tvorbu postupů řešení termodynamických výpočtů.

Práce shrnuje nejčastěji řešené termodynamické výpočty proudění plynů v tryskách. Postup jejich řešení byl zobecněn do několika rovnic, které jsou shrnuty v druhé kapitole. Praktickou částí a zároveň hlavním cílem práce je navržený výpočtový software. Software řeší dva typy úloh: výpočet výstupní rychlosti plynu a hmotnostního toku pro tři typy dýz, a návrh parametrů Lavalovy dýzy. V těchto výpočtech je dále možno vybrat mezi dvěma proudícími médii, a to ideálním plynem, nebo přehřátou párou.

Pro samotnou tvorbu softwaru byl vybrán programovací jazyk Python, ve kterém bylo vytvořeno i grafické uživatelské rozhraní. Uživateli je umožněno zadat vstupní hodnoty výpočtů, nebo si je může nechat vyplnit testovacími hodnotami. Tyto vstupní hodnoty byly navrženy pro vzorové řešení daného typu úlohy. Po zadání potřebných parametrů a provedení výpočtů se zobrazí vedle číselných výsledků šest grafů znázorňují závislosti teploty, rychlosti, hustoty tekutiny, změny průřezu, rychlosti zvuku a Machova čísla na tlaku, který se podél dýzy mění. Software také nabízí ukládání jednotlivých příkladů s jejich řešeními, a to ve formě PDF souboru.

Výpočtový software usnadňuje řešení termodynamických příkladů, zejména při změně vstupních parametrů. Ze skriptů byl vytvořen spustitelný soubor softwaru, tak aby byl přístupný všem uživatelům bez omezení na jejich softwarové vybavení počítače.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [2] KALČÍK, Josef a Karel SÝKORA. *Technická termomechanika: učebnice pro vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Academia, 1973.
- [3] ŠKORPÍK, Jiří. *Transformační technologie: Proudění plynů a par tryskami* [online]. Brno, 2018 [cit. 2019-04-19]. ISBN 1804-8293. Dostupné z: <http://www.transformacni-technologie.cz/40.html#menu>
- [4] ÇENGEL, Yunus a Michael BOLES. *Thermodynamics: an engineering approach*. Eighth edition. New York: McGraw-Hill Education, 2015. ISBN 978-0-07-339817-4.
- [5] JÍLEK, Miroslav a Zdeněk RANDA. *Termomechanika: sbírka příkladů*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03107-1.
- [6] SHAW, Zed. *Learn Python 3 the hard way: a very simple introduction to the terrifyingly beautiful world of computers and code*. Boston: Addison-Wesley, 2017. Zed Shaw's hard way series. ISBN 0134692888.
- [7] SWEIGART, Al. *Automate the boring stuff with Python: practical programming for total beginners*. San Francisco: No Starch Press, 2015. ISBN 1-59327-599-4.
- [8] DRUNSINN, . PyXSteam. In: *GitHub* [online]. b.r. [cit. 2019-03-30]. Dostupné z: <https://github.com/drunsinn/pyXSteam>
- [9] VACEK, Václav a Jiří NOŽIČKA. *Příručka termodynamiky s příklady*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 1993. ISBN 80-01-01008-2.
- [10] KLIMEŠ, Lubomír. Podklady: Tabulky a diagramy. *6TT Termomechanika* [online]. Brno, 2018 [cit. 2019-04-19]. Dostupné z: <https://sites.google.com/a/vutbr.cz/klimes/podklady-do-cviceni>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Veličina	Jednotka
a	rychlost zvuku	m/s
a_1	rychlost zvuku na vstupu	m/s
a_D	rychlost zvuku na vstupu do div. části	m/s
a_{t12}	technická práce mezi vstupem a výstupem	J
c_p	měrná tepelná kapacita za konst. tlaku	J/kg.K
d^*	kritický průměr dýzy	m
d_2	výstupní průměr dýzy	m
F	síla	N
g	tíhové zrychlení	m/s ²
h	měrná entalpie	J/kg
h^*	kritická měrná entalpie	J/kg
h_0	klidová měrná entalpie	J/kg
h_1	vstupní měrná entalpie	J/kg
\bar{h}_1	výška vstupního průřezu	m
h_2	výstupní měrná entalpie	J/kg
h_2'	skutečná výstupní měrná entalpie	J/kg
\bar{h}_2	výška výstupního průřezu	m
L	délka nástavce	m
\dot{m}	hmotnostní tok	kg/s
m	hmotnost	kg
Ma	Machovo číslo	-
Ma_A	Machovo číslo v bodě A	-
Ma_B	Machovo číslo v bodě B	-
p	tlak	Pa
p^*	kritický tlak	Pa
p_0	klidový tlak	Pa
p_1	vstupní tlak	Pa
p_2	výstupní tlak	Pa
p_{vn}	vnější tlak	Pa
q_{12}	měrné teplo mezi vstupem a výstupem	J
r	měrná plynová konstanta	J/kg.K
s	měrná entropie	J/kg.K
s^*	kritická měrná entropie	J/kg.K
s_1	vstupní měrná entropie	J/kg.K
s_2	výstupní měrná entropie	J/kg.K

S	plocha průřezu	m^2
S^*	plocha kritického průřezu	m^2
S_1	plocha vstupního průřezu	m^2
S_2	plocha výstupního průřezu	m^2
t^*	kritická teplota	$^{\circ}C$
t_1	vstupní teplota	$^{\circ}C$
T	termodynamická teplota	K
T^*	kritická termodynamická teplota	K
T_0	klidová termodynamická teplota	K
T_1	vstupní termodynamická teplota	K
T_2	výstupní termodynamická teplota	K
τ	čas	s
v	měrný objem	m^3/kg
v^*	kritický měrný objem	m^3/kg
v_0	klidový měrný objem	m^3/kg
v_1	vstupní měrný objem	m^3/kg
v_2	výstupní měrný objem	m^3/kg
v_2'	skutečný výstupní měrný objem	m^3/kg
$v_{stř}$	střední hodnota měrného objemu	m^3/kg
\dot{V}	objemový tok	m^3/s
\dot{V}_1	vstupní objemový tok	m^3/s
w	rychlost	m/s
w_0	klidová rychlost	m/s
w_1	vstupní rychlost	m/s
w_2	výstupní rychlost	m/s
w_2'	skutečná výstupní rychlost	m/s
w_D	rychlost do vstupní div. části	m/s
\dot{w}	zrychlení	m/s^2
x	suchost páry	-
α	úhel nástavce	$^{\circ}$
β	tlakový poměr	-
β^*	kritický poměr	-
κ	Poissonova konstanta	-
ρ	hustota	kg/m^3
ρ^*	kritická hustota	kg/m^3
ρ_0	klidová hustota	kg/m^3
ρ_1	vstupní hustota	kg/m^3
ρ_2	výstupní hustota	kg/m^3
$\rho_{stř}$	střední hodnota hustoty	kg/m^3
ψ	výtokový součinitel	-

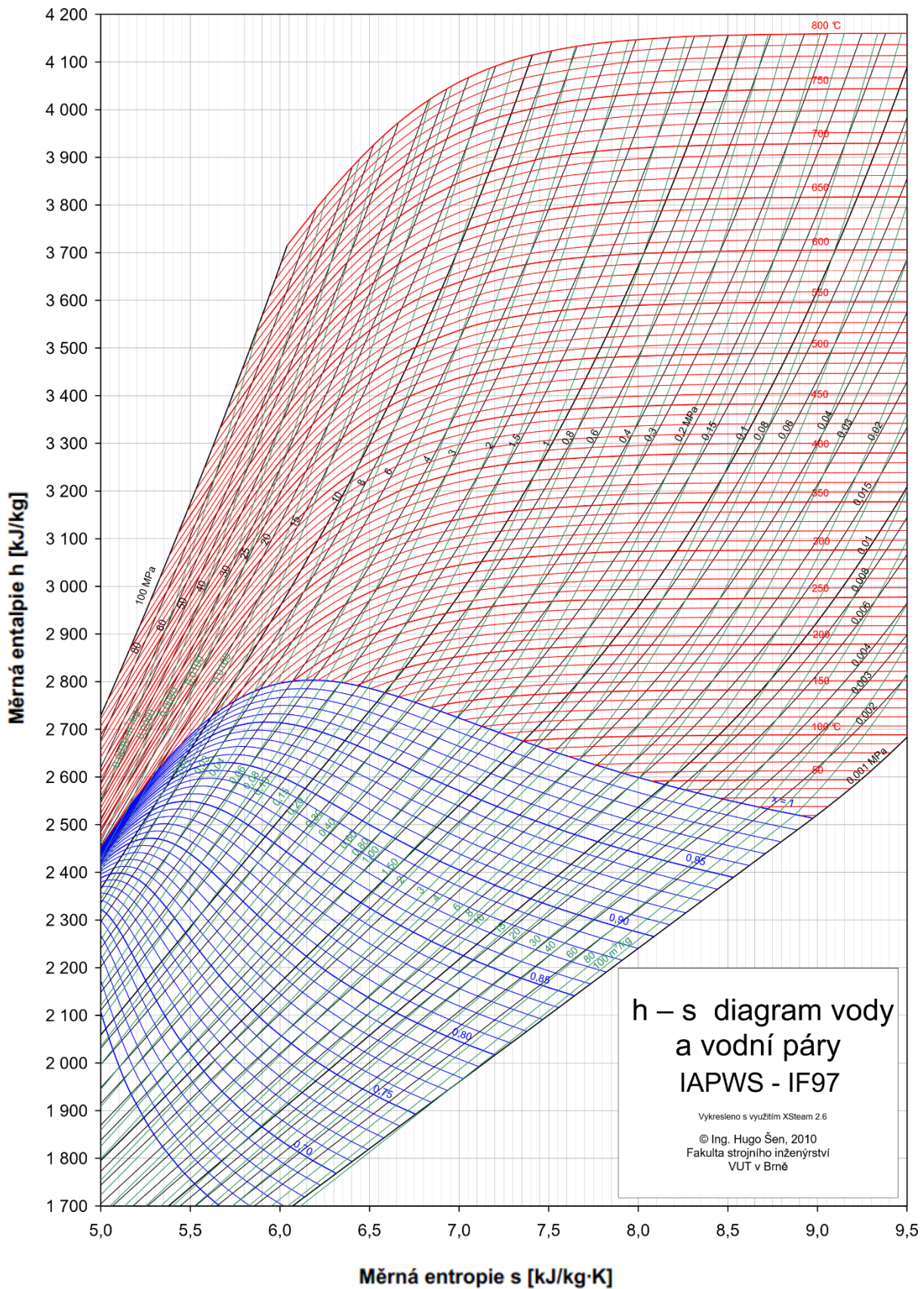
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A UKÁZEK ZDROJOVÝCH KÓDŮ

Obrázek 1.1: Rychlostní profil při ideálním jednorozměrném proudění	12
Obrázek 1.2: Průběh izoentropického a nevratného adiabatického proudění	12
Obrázek 1.3: Machův kužel	14
Obrázek 1.4: Šíření zvukových vln při klidném a pohybujícím se zdroji.....	14
Obrázek 1.5: K rovnici kontinuity	15
Obrázek 1.6: Působení tlakových sil na proudící tekutinu.....	17
Obrázek 1.7: Vlastnosti dýz	21
Obrázek 1.8: Izoentropická expanze páry v h–s diagramu	22
Obrázek 1.9: Zužování konvergentní dýzy	23
Obrázek 1.10: Kritické místo Lavalovy dýzy	24
Obrázek 1.11: Výtok z konvergentní trysky zabudované do proudové trubice.....	24
Obrázek 1.12: Činnost konvergentně divergentní dýzy při různých vstupních podmínkách ..	26
Obrázek 2.1: Typy úloh	27
Obrázek 2.2: Konvergentní tryska	29
Obrázek 2.3: Průběh adiabatické expanze páry v konvergentní trysce na kritický tlak	30
Obrázek 2.4: Průběh adiabatické expanze páry v konvergentní trysce na vnější tlak	31
Obrázek 2.5: Lavalova dýza.....	31
Obrázek 2.6: Průběh adiabatické expanze v Lavalově dýze	34
Obrázek 2.7: Divergentní dýza	34
Obrázek 2.8: Průběh adiabatické komprese páry v difuzoru	36
Obrázek 2.9: Nástavec Lavalovy dýzy	38
Obrázek 3.1: Prvotní návrh grafického uživatelského rozhraní.....	43
Obrázek 3.2: Qt Designer.....	44
Obrázek 3.3: Grafické rozhraní softwaru A.....	44
Obrázek 3.4: Grafické rozhraní softwaru B	45
Obrázek 3.5: Řešení příkladu 1 – hlavní okno.....	45
Obrázek 3.6: Řešení příkladu 1 – grafy	46
Obrázek 3.7: Řešení příkladu 2 – hlavní okno.....	46
Obrázek 3.8: Řešení příkladu 2 – grafy	47
Tabulka 1.1: Hodnoty p^*/p_0 , T^*/T_0 , ρ^*/ρ_0 [4].....	20
Tabulka 3.1: Použité vlastnosti páry v XSteam a jejich jednotky [8].....	42
Tabulka 3.2: Funkce použité v XSteam [8]	43
Ukázka zdrojového kódu 3.1: Volání jednotek knihovny XSteam.....	42
Ukázka zdrojového kódu 3.2: Definice funkce pro divergentní dýzu a ideální plyn.....	47

SEZNAM PŘÍLOH

- Příloha A** *h*-*s* diagram vody a vodní páry
Příloha B Vlastnosti ideálních plynů
Příloha C Výstupní protokol

Příloha A h - s diagram vody a vodní páry [10]



Příloha B Vlastnosti ideálních plynů [10]

Látka	Vzorec	M [kg/kmol]	r [J/kg·K]	c_p [kJ/kg·K]	c_v [kJ/kg·K]	κ [—]
Amoniak	NH ₃	17,03	488,2	2,093	1,605	1,304
Argon	Ar	39,95	208,1	0,5203	0,3122	1,667
Brom	Br ₂	159,81	52,02	0,2253	0,1732	1,300
Butan (<i>n</i> -butan)	C ₄ H ₁₀	58,12	143,0	1,694	1,551	1,092
Dusík	N ₂	28,01	296,8	1,040	0,7429	1,400
Ethan	C ₂ H ₆	30,070	276,5	1,744	1,468	1,188
Ethylen	C ₂ H ₄	28,054	296,4	1,527	1,231	1,241
Fluor	F ₂	38,00	218,7	0,8237	0,6050	1,362
Helium	He	4,003	2077	5,193	3,116	1,667
Heptan (<i>n</i> -heptan)	C ₇ H ₁₆	100,20	82,97	1,649	1,566	1,053
Hexan (<i>n</i> -hexan)	C ₆ H ₁₄	86,18	96,47	1,654	1,558	1,062
Chlor	Cl ₂	70,905	117,3	0,4781	0,3608	1,325
Isobutane	C ₄ H ₁₀	58,12	143,0	1,663	1,520	1,094
Krypton	Kr	83,80	99,21	0,2480	0,1488	1,667
Kyslík	O ₂	32,00	259,8	0,9180	0,6582	1,395
Methan	CH ₄	16,04	518,2	2,226	1,708	1,303
Neon	Ne	20,183	411,9	1,030	0,6180	1,667
Oxid dusnatý	NO	30,006	277,1	0,9992	0,7221	1,384
Oxid dusičitý	NO ₂	46,006	188,9	0,8060	0,6171	1,306
Oxid siřičitý	SO ₂	64,06	129,8	0,6228	0,4930	1,263
Oxid uhličitý	CO ₂	44,01	188,9	0,8439	0,6550	1,288
Oxid uhelnatý	CO	28,01	296,8	1,039	0,7417	1,400
Pentan (<i>n</i> -pentan)	C ₅ H ₁₂	72,15	115,2	1,664	1,549	1,074
Propan	C ₃ H ₈	44,097	188,5	1,669	1,480	1,127
Propylen	C ₃ H ₆	42,08	197,6	1,531	1,333	1,148
Vodík	H ₂	2,016	4124	14,30	10,18	1,405
Vodní pára	H ₂ O	18,015	461,5	1,865	1,403	1,329
Vzduch	—	28,97	287,0	1,005	0,7180	1,400
Tetrachlormethan	CCl ₄	153,82	54,05	0,5415	0,4875	1,111
Xenon	Xe	131,30	63,32	0,1583	0,09499	1,667

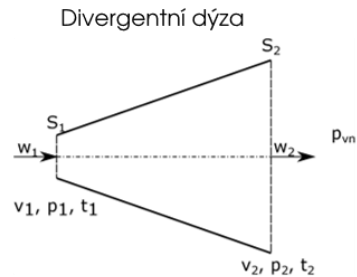
Příloha C Výstupní protokol

Výpočet proudění plynů v dýzách

Typ dýzy Divergentní dýza
Typ plynu Ideální plyn

Vstupní parametry

Vstupní tlak 1.00e+05 Pa
Vnější tlak 1.43e+05 Pa
Vstupní teplota 20.00 °C
Vstupní rychlost 260.00 m/s
Výstupní průměr 4.00e-03 m
Měrná plynová konstanta 287.00 J/kgK
Poissonova konstanta 1.40



Výsledky

Výstupní rychlost 60.92 m/s
Hmotnostní tok 0.001 kg/s

Nebylo dosaženo rychlosti zvuku.

