Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Konstrukce kuželoseček s využitím rotačních kvadrik

Vypracoval:	**Bc. Václav Votoupal**
Studijní program:	N0114A170003 – Učitelství deskriptivní geometrie pro SŠ
Studijní obor:	Učitelství deskriptivní geometrie pro SŠ
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 26. května 2021

. . . .

Bc. Václav Votoupal

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce RNDr. Lence Juklové, Ph. D. za poskytnuté materiály, vstřícné konzultace a pohotovou spolupráci.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Václav Votoupal
Název práce	Konstrukce kuželoseček s využitím rotačních kvadrik
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2021
Abstrakt	Práce se zaměřuje na využití prostorových vztahů při řešení úloh v rovině. Zabývá se řešením úloh o kuželosečkách, které mají procházet danými body, dotýkat se daných přímek, a přitom se ve dvou bodech dotýkat další kuželosečky. Tyto úlohy jsou řešeny zavedením vhodné rotační kvadriky a sestrojením jejího řezu jistou rovinou. Pomocí kuželosečky řezu je nalezeno řešení dané úlohy. Práce je koncipována jako sbírka úloh pro studenty VŠ a obsahuje jak úlohy řešené, tak volné pracovní listy se zadáním určené k procvičování.
Klíčová slova	kuželosečky, rotační kvadriky, řez kvadriky rovinou, dotyk dvou kuželoseček, konstrukce odvozené z prostoru, úlohy
Počet stran	107
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Václav Votoupal
Title	Construction of Conics Using Rotational Quadrics
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.
The year of presentation	2021
Abstract	The thesis is focused on the use of spatial relationships in solving planar problems. It deals with solving problems about conics, which are to pass through given points, touch the given lines, and at the same time touch another conic at two points. These problems are solved by introducing a suitable rotational quadric and constructing its section by a certain plane. The problem is solved by using this conic section. The thesis is designed as a collection of tasks for university students and contains both solved tasks and worksheets with assignments for practice.
Keywords	conics, rotational quadrics, planar section of a quadric, touch of two conics, constructions derived by space, tasks
Number of pages	107
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod

Tato práce je věnována konstrukcím kuželoseček s využitím rotačních kvadrik, tedy konstrukcím odvozeným z prostoru. Je koncipována jako sbírka úloh, která obsahuje řešené příklady a volné pracovní listy. Úlohy, v nichž je úkolem sestrojit kuželosečku, která se dotýká ve dvou bodech jiné kuželosečky, jsou rozděleny do pěti kapitol podle typu rotační kvadriky, která je ke konstrukci řešení použita. V úvodu každé kapitoly je uveden postup řešení, typy kuželoseček, které lze získat a způsob jejich určení. Následují jednotlivé příklady včetně rozboru, popisu konstrukce, diskuze a jednoho narýsovaného řešení.

Princip řešení úloh je v celé práci stejný. Hledanou kuželosečku sestrojíme jako kolmý průmět kuželosečky, která je řezem rotační kvadriky rovinou. Pomocnou kvadriku zvolíme podle typu zadané kuželosečky a rovinu řezu určíme pomocí zadaných prvků, kterými jsou body a přímky.

Samotná práce vychází ze starších diplomových prací, které byly vypracovány na Katedře algebry a geometrie PřF UP v Olomouci. V textu je na tyto a další práce hojně odkazováno, jelikož práce pojednává o praktických konstrukcích a popis teorie je značně omezen. Zájemci o problematiku mohou tedy uvedené práce použít jako skriptum a tuto práci jako doplňující sbírku úloh.

Kapitola 1

Kuželová plocha

Tato kapitola se zabývá úlohami, v nichž máme sestrojit kuželosečku procházející danými body a dotýkající se daných přímek. Rotační kvadrika, kterou pro konstrukci volíme bude vždy plocha kuželová. Její osu umístíme do průmětny, kterou ztotožníme s nákresnou.

Ve všech příkladech této kapitoly postupujeme podobně. Ze zadaných přímek vybereme dvě, které budou ležet v průmětně π a které prohlásíme za obrysové přímky kuželové plochy, čímž kuželovou plochu určíme. Zbývající přímky považujeme za tečny zvolené kuželové plochy a zadané body za body ležící na kuželové ploše. Sestrojíme rovinu řezu, která je určená danými body a přímkami, pomocí vrcholové roviny určíme typ kuželosečky a řez zkonstruujeme. Používané konstrukce lze najít v [1].

Ze všech kuželoseček, které mohou na kuželové ploše vzniknout se úlohy omezí jen na některé typy. Kružnice vznikne pouze pokud je rovina řezu kolmá k ose kuželové plochy, tedy i k průmětně. V tomto případě je jejím kolmým průmětem do π úsečka, takže kružnici tímto způsobem sestrojit nelze. Bod, přímka a dvě různoběžky vzniknou, pokud by rovina řezu procházela vrcholem. Tento případ se však v úlohách nevyskytuje. Řešením tedy může být elipsa, hyperbola nebo parabola.

1.1 Příklad 1

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1 a body C_1, D_1, E_1.

Rozbor:

Přímky a_1, b_1 považujeme za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$ ležící v π, body C_1, D_1, E_1 považujeme za kolmé průměty bodů C, D, E této kuželové plochy do průmětny π. Rovina řezu ρ je určena body C, D, E.

Konstrukce:

1. Sestrojíme osu o kuželové plochy $\mathcal{K}$ jako osu úhlu, který svírají tečny a_1, b_1 a ve kterém leží body C_1, D_1, E_1.

2. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Rovina je určena body C, D, E, sestrojíme tedy stopníky P^{CE} a P^{DE} přímek CE a DE. Kóty bodů C, D, E určíme sklopením promítacích rovin povrchových kružnic k_C, k_D, k_E kuželové plochy $\mathcal{K}$, proložených body C, D, E. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{CE}, P^{DE} a protíná tečny a_1, b_1 v bodech A_1, B_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

3. Pomocí vrcholové roviny $\sigma \parallel \rho$ určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme průsečnice u, v rovin ρ, σ s promítací rovinou povrchové kružnice k_C. Počet společných bodů průsečnice v a kružnice k_C zjistíme ve sklopení. Přímka u prochází body C, U, kde $U = p^\rho \cap \lambda_{k_C}$. Přímka $v \parallel u$ prochází bodem $Y = p^\sigma \cap \lambda_{k_C}$ a neprotíná kružnici k_C v žádném bodě. Řezem je elipsa.

4. Abychom dokázali najít střed elipsy k, sestrojíme ještě její tečnu v bodě D, a to jako průsečnici roviny řezu ρ s tečnou rovinou τ kuželové plochy $\mathcal{K}$ v bodě D. Rovina τ se dotýká $\mathcal{K}$ podél přímky VD, její stopa p^τ prochází bodem V a stopníkem P^t tečny t sestrojené z bodu D ke kružnici k_D ve sklopení. Tečna d je určena body D a $R = p^\rho \cap p^\tau$.

5. Sestrojíme střed S kuželosečky k_1 tak, že rozpůlíme tětivy A_1B_1 a A_1D_1, půlící body označíme $1, 2$. Průsečík $a_1 \cap b_1 = V$ a $a_1 \cap d_1 = W$. Střed $S = 1V \cap 2W$.[1]

6. Sestrojíme sdružené průměry PQ, MN kuželosečky k_1. Průměr MN leží na přímce $1V$, průměr PQ s ním sdružený je rovnoběžný s tětivou elipsy A_1, B_1. Průměry omezíme pomocí konstrukce odvozené v [1].

7. Určíme hlavní a vedlejší osy elipsy k_1 pomocí Rytzovy konstrukce.[2]

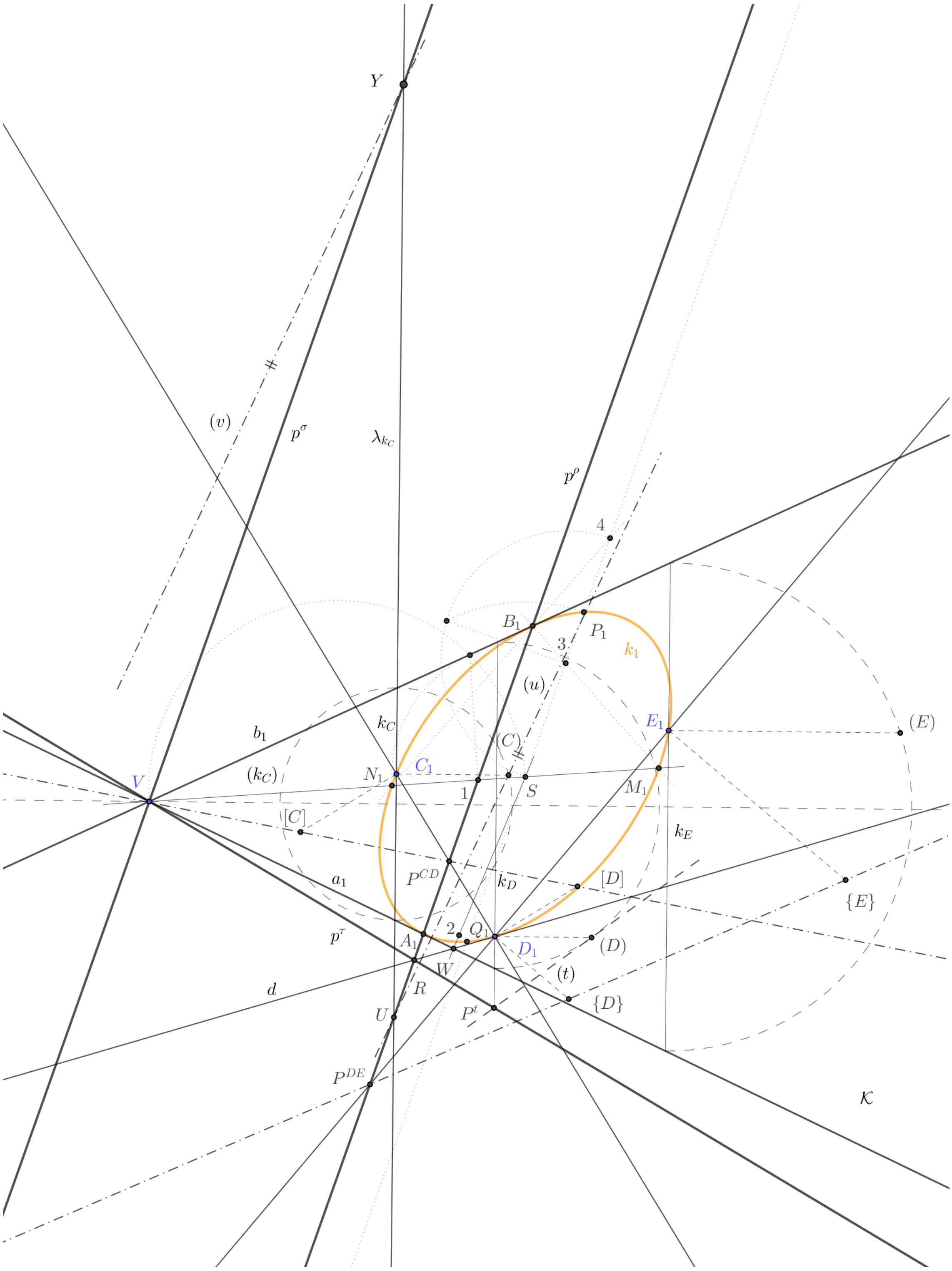
8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení, pokud všechny body C_1, D_1, E_1 leží na stejné kuželové ploše určené v prostoru přímkami a_1, b_1, neboli všechny body leží uvnitř jedné z dvojic vrcholových úhlů tvořených těmito přímkami. Body C, D, E, které neleží v π mohou mít vůči průmětně osm různých poloh. Ze souměrnosti podle průmětny však plyne, že vždy dva případy tvoří jedno řešení. Úloha má tedy čtyři řešení.

[1] Uvedeno a dokázáno v [5].

[2] Rytzovu konstrukci nebudeme pro přehlednost obrázku vyznačovat.



Y
(v)
p^{σ}
λ_{k_C}
p^{ρ}
4
B_1
P_1
3
k_1
(u)
E_1
(E)
b_1
k_C
(C)
C_1
N_1
(k_C)
V
1
S
M_1
$[C]$
k_E
P^{CD}
k_D
$[D]$
a_1
$\{E\}$
p^{τ}
2
Q_1
A_1
D_1
(D)
W
(t)
d
R
$\{D\}$
U
P^t
P^{DE}
$\mathcal{K}$

Obr. 1.1

1.2 Příklad 2

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1 a body D_1, E_1.

Rozbor:

Dvě tečny, například a_1, b_1, považujeme za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$, body D_1, E_1 za kolmé průměty bodů D, E ležící na téže kuželové ploše, tečnu c_1 za kolmý průmět tečny c kuželové plochy. Rovinu řezu ρ tvoří body D, E a přímka c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme osu o kuželové plochy $\mathcal{K}$ jako osu úhlu přímek a_1, b_1, v němž leží body D_1, E_1.

2. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Stopa bude procházet stopníkem P^c přímky c a P^{DE} přímky DE. Kóty bodů D, E určíme sklopením promítacích rovin povrchových kružnic k_D, k_E kuželové plochy $\mathcal{K}$. Stopník P^c sestrojíme také ve sklopení. Promítací rovina přímky c protíná kuželovou plochu v elipse e. Přímka c prochází bodem $R = c \cap DE$ a dotýká se elipsy e. Stopa p^ρ protíná tečny a_1, b_1 v bodech A_1, B_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

3. Pomocí vrcholové roviny $\sigma \parallel \rho$ určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme průsečnice u, v rovin ρ, σ například s promítací rovinou λ_{k_D} kružnice k_D. Počet společných bodů průsečnice v a kružnice k_D zjistíme ve sklopení. Přímka u prochází body D, U, kde $U = p^\rho \cap \lambda_{k_D}$. Přímka $v \parallel u$ prochází bodem $Y = = p^\sigma \cap \lambda_{k_D}$ a protíná kružnici k_D ve dvou bodech $\overline{M}, \overline{N}$. Řezem je hyperbola. Přímky $\overline{m} = \overline{M}V, \overline{n} = \overline{N}V$ jsou směry asymptot hyperboly.

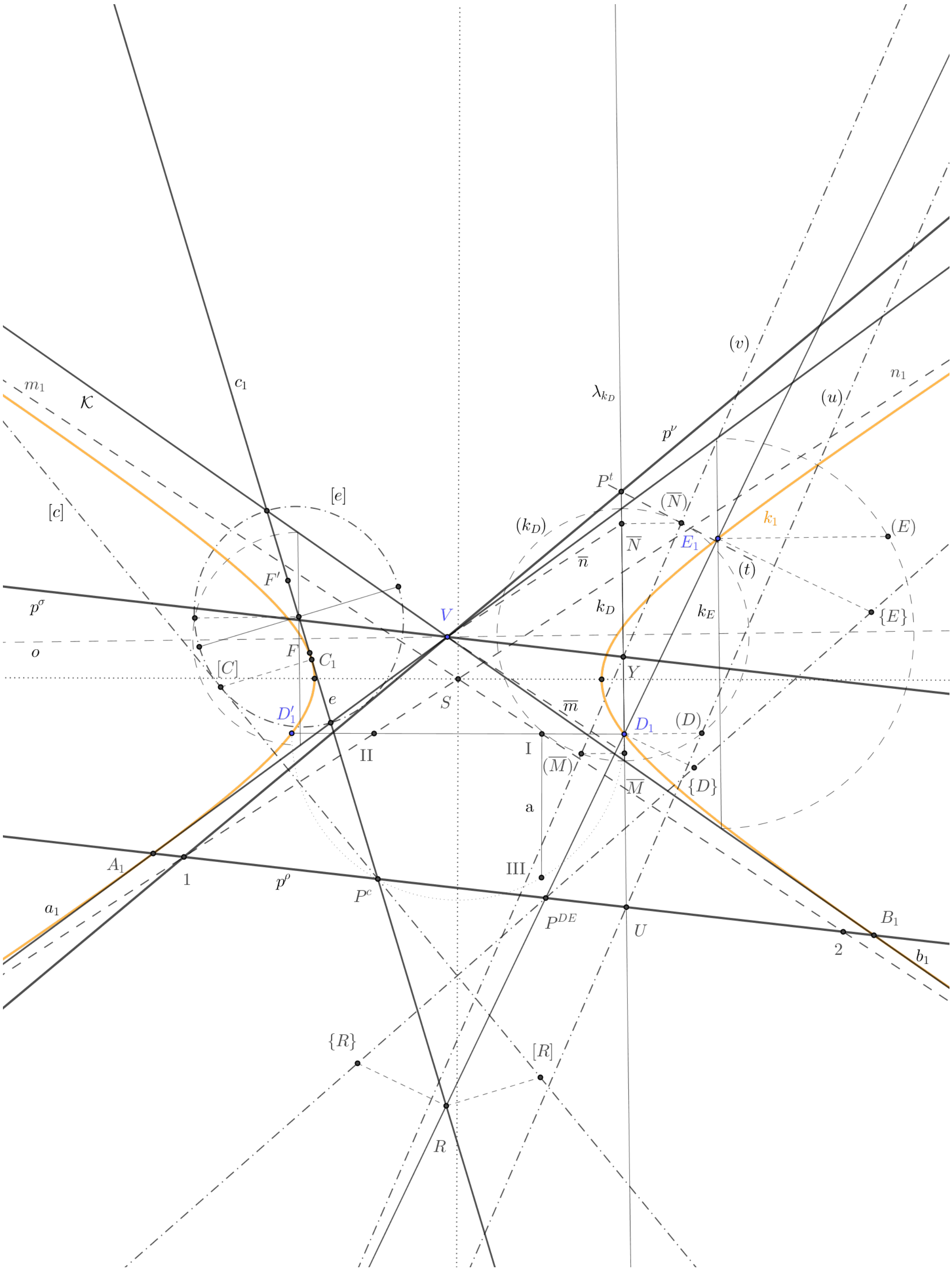
4. Sestrojíme asymptoty m, n hyperboly k_1 a zároveň její střed S. Podél povrchových přímek $\overline{m}, \overline{n}$ kuželové plochy sestrojíme tečné roviny μ, ν a určíme jejich průsečnice m, n s rovinou řezu ρ, jejich kolmé průměty m_1, n_1 jsou asymptoty hyperboly k_1. Ukážeme konstrukci asymptoty m_1. Promítací rovinu kružnice k_D sklopíme, v bodě $(\overline{M})$ sestrojíme tečnu (t) ke kružnici (k_D). Stopníkem $P^t = (t) \cap \lambda_{k_D}$ a bodem V vedeme stopu p^μ. Asymptota $m_1 \parallel \overline{m}_1$ prochází průsečíkem stop $1 = p^\mu \cap p^\rho$. Asymptotu n_1 sestrojíme stejným způsobem. Střed $S = m_1 \cap n_1$

5. Sestrojíme osy hyperboly rozpůlením úhlu asymptot m_1, n_1. Pro sestrojení hyperboly nalezneme ještě velikost hlavní poloosy a.

6. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení, pokud body D, E leží uvnitř stejné dvojice vrcholových úhlů tvořených přímkami a_1, b_1, tedy na jedné kuželové ploše. Body D, E mohou ležet ve stejném poloprostoru určeném průmětnou π nebo v opačných poloprostorech. Z bodu R lze v obou uvedených případech vést dvě tečny k elipse e. Úloha má tedy čtyři řešení.


c_1
m_1
$\mathcal{K}$
$[c]$
$[e]$
F'
p^σ
o
F
C_1
$[C]$
e
D_1'
V
S
II
I
(v)
n_1
(u)
λ_{k_D}
p^ν
P^ι
$(\overline{N})$
(k_D)
$\overline{N}$
E_1
k_1
(E)
$\overline{n}$
(t)
k_D
k_E
$\{E\}$
Y
$\overline{m}$
D_1
(D)
$(\overline{M})$
$\overline{M}$
$\{D\}$
a
III
A_1
1
p^ρ
P^c
a_1
P^{DE}
U
2
B_1
b_1
$\{R\}$
$[R]$
R

Obr. 1.2

1.3 Příklad 3

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1, d_1 a bod E_1.

Rozbor:

Dvě tečny, opět a_1, b_1, považujeme za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$, přímky c_1, d_1 považujeme za kolmé průměty tečen c, d dané kuželové plochy a bod E_1 za kolmý průmět bodu E ležícího na téže kuželové ploše. Promítací roviny přímek c, d protínají kuželovou plochu ve dvou kuželosečkách f, g, které leží jak na kuželové ploše $\mathcal{K}$, tak ještě na kuželové ploše $\mathcal{K}'$. Rovina ρ řezu prochází bodem E a dotýká se kuželové plochy $\mathcal{K}'$.

Konstrukce:

1. Sestrojíme osu o kuželové plochy $\mathcal{K}$ jako osu úhlu přímek a_1, b_1, v němž leží bod E_1.

2. Sestrojíme vrchol V' kuželové plochy $\mathcal{K}'$. Její obrysové přímky 14 a 23 jsou tvořeny průsečíky přímek a_1, b_1 s přímkami c_1, d_1, což jsou hlavní vrcholy kuželoseček f, g.

3. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Stopa prochází vrcholem V' a například stopníkem P^d přímky d. Zvolíme pomocnou přímku $r = V'E$, která protne přímku d v bodě R. Kótu bodu E určíme pomocí povrchové kružnice k_E. Přímku d dourčíme ve sklopení jako tečnu z bodu R ke kuželosečce f, tedy řezu $\mathcal{K}$ promítací rovinou přímky d. Stopa p^ρ protne tečny a_1, b_1 v bodech dotyku A_1, B_1 s kuželosečkou k_1.

4. Určíme typ kuželosečky řezu pomocí vrcholové roviny $\sigma \parallel \rho$. Rovina ρ protne rovinu povrchové kružnice k_E v přímce u, rovina σ v přímce v. Stejnou konstrukcí jako v předchozích příkladech zjistíme, že přímka v nemá s kružnicí k_E žádné společné body. Řezem je tedy elipsa.

5. Abychom nalezli střed kuželosečky k, sestrojíme bod dotyku D na tečně d s kuželovou plochou $\mathcal{K}$. Bod D je zároveň bodem dotyku tečny d a elipsy f, najdeme ho ve sklopení. Nyní můžeme snadno nalézt i bod C dotyku elipsy k s tečnou c. Body D, C leží na jedné povrchové přímce kuželové plochy $\mathcal{K}'$, podél které se jí dotýká rovina ρ. Sestrojíme přímku V', D, která protne tečnu c v hledaném bodě.

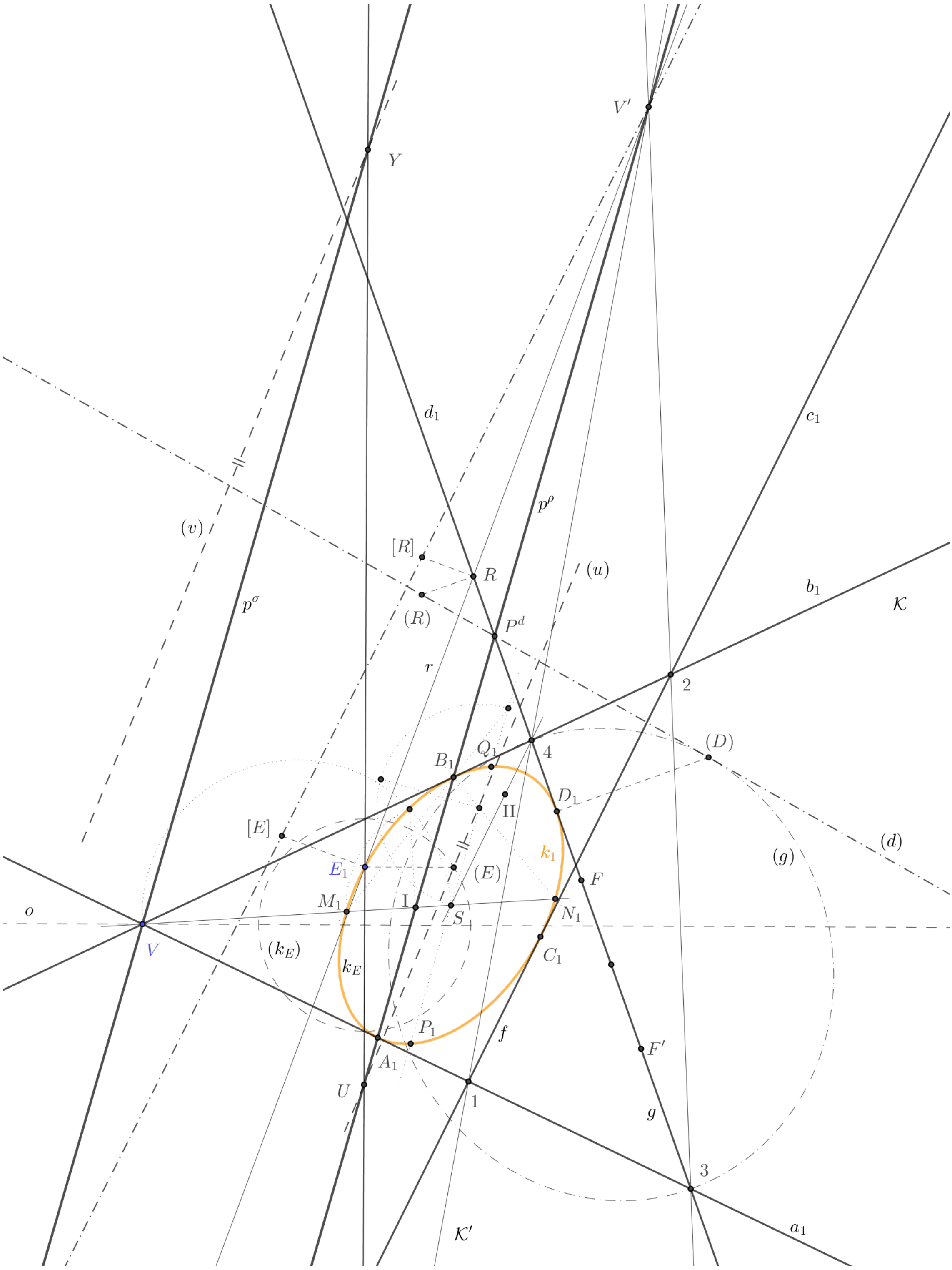
6. Střed S a sdružené průměry sestrojíme stejně jako v příkladu 1.1.

7. Sestrojíme hlavní a vedlejší osy elipsy k_1 pomocí Rytzovy konstrukce.

8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Bodem E, leží-li vně kuželové plochy $\mathcal{K}'$ lze vést dvě tečné roviny k dané kuželové ploše a úloha má dvě řešení. Pokud bod E leží uvnitř $\mathcal{K}'$, pak tečné roviny neexistují a úloha nemá řešení.


Y
V'
d_1
c_1
p^ρ
(v)
p^σ
[R]
R
(u)
(R)
P^d
b_1
𝒦
r
2
(D)
Q_1
4
B_1
D_1
II
(d)
[E]
k_1
(g)
E_1
(E)
F
M_1
I
N_1
o
S
V
(k_E)
C_1
k_E
P_1
f
F'
A_1
U
1
g
3
𝒦'
a_1

Obr. 1.3

1.4 Příklad 4

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1, d_1, e_1.

Rozbor:

Tečny a_1, b_1, budeme považovat za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$, zbylé přímky považujeme za tečny této kuželové plochy. Promítací roviny tečen c_1, d_1, e_1 protínají kuželovou plochu v kuželosečkách f, g, h. Kuželosečky f, g leží ještě na kuželové ploše $\mathcal{K}'$, podobně, kuželosečky h, g leží na kuželové ploše $\mathcal{K}''$. Společná tečná rovina ρ kuželových ploch $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ protíná kuželovou plochu $\mathcal{K}$ v kuželosečce k, jejíž kolmý průmět do průmětny π je kuželosečka k_1.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrcholy V', V'' kuželových ploch $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$. Průsečíky přímek c_1, d_1, e_1 s obrysovými přímkami kuželové plochy označíme postupně $1, 2; 3, 4; 5, 6$.[3] Hledané vrcholy jsou průsečíky obrysových přímek $14 \cap 23 = V'$ a $45 \cap 36 = V''$. Stopa p^ρ roviny řezu prochází vrcholy V' a V'' a tečny a_1, b_1 protne v bodech dotyku A_1, B_1 s kuželosečkou k_1.

2. Zjistíme, na které z ploch $\mathcal{K}, \overline{\mathcal{K}}$, určených přímkami a_1, b_1, budou ležet body dotyku zbývajících tečen s kuželosečkou k. Učiníme tak pomocí tečny c, na níž najdeme stopník P^c. Z něj lze vést tečny pouze ke kuželové ploše $\mathcal{K}$. Ve sklopení promítací roviny přímky c sestrojíme z bodu P^c tečnu c ke kuželosečce e. Určíme bod dotyku C_1 a dále body dotyku kuželosečky k s ostatními tečnami. Kuželosečky f, g leží na stejné kuželové ploše $\mathcal{K}'$, body dotyku na tečnách c, d tedy leží na jedné povrchové přímce. Bod C známe, pak $D_1 = V'C_1 \cap d_1$. Totéž pro kuželosečky h, g kuželové plochy $\mathcal{K}''$ a body dotyku D, E. Nyní známe bod D, bod $E = V''D_1 \cap e_1$.

3. Sestrojíme vrcholovou rovinu $\sigma \parallel \rho$ a určíme typ kuželosečky. Průsečnice roviny ρ s promítací rovinou přímky c je přímo přímka c, průsečnice roviny σ s toutéž rovinou je přímka v. Ve sklopení vidíme, že přímka v s kuželosečkou f nemá žádné společné body. Řezem je tedy elipsa.

4. Střed, sdružené průměry a osy elipsy sestrojíme jako v úloze 1.1.

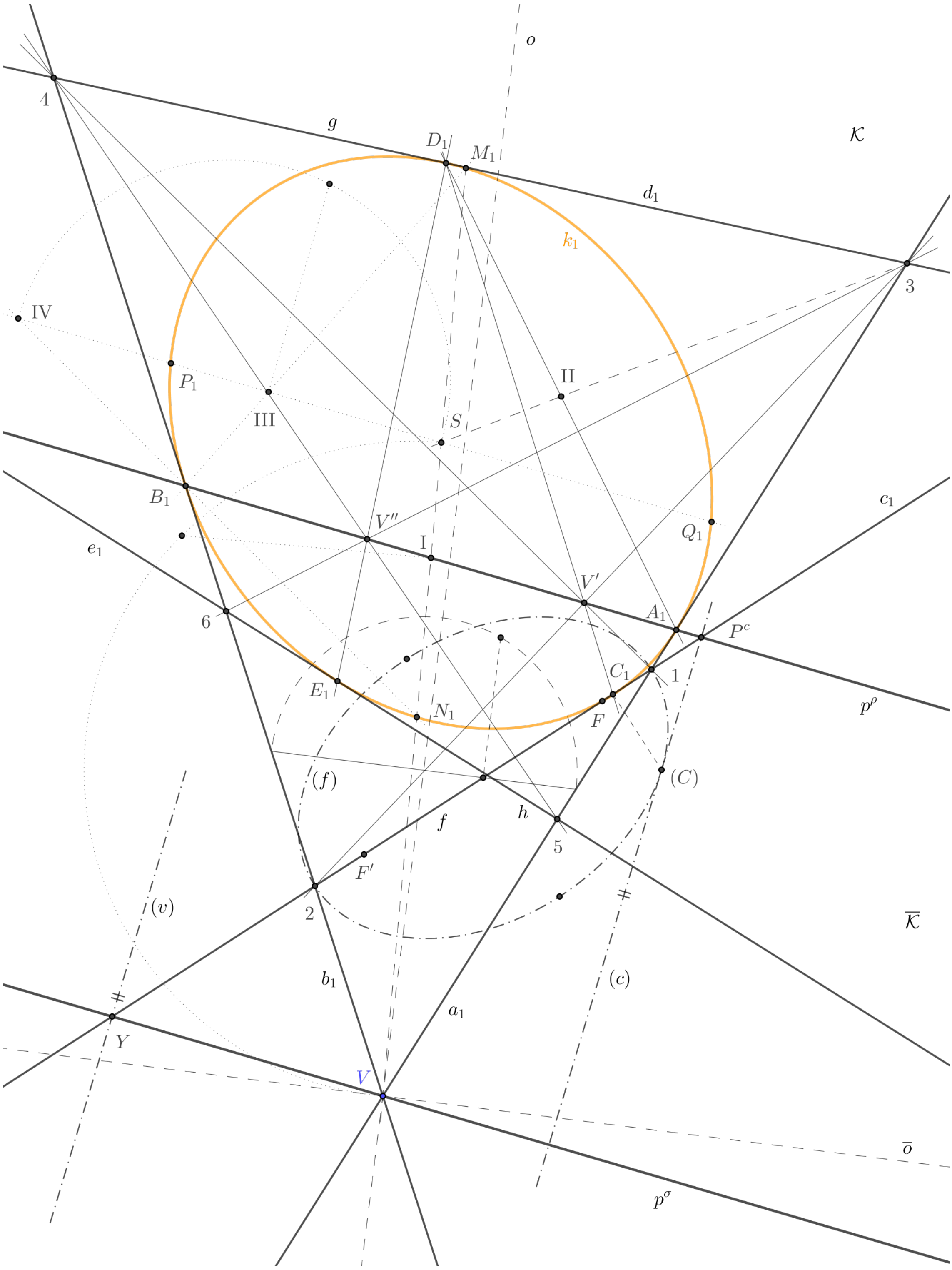
5. Elipsa k_1

Diskuze:

Jestliže, jako v našem případě, vrchol V' kuželové plochy $\mathcal{K}'$ neleží uvnitř kuželové plochy $\mathcal{K}''$, resp. vrchol V'' kuželové plochy $\mathcal{K}''$ neleží uvnitř kuželové plochy $\mathcal{K}'$, existují k těmto plochám dvě společné tečné roviny, které jsou souměrné podle průmětny π. Úloha má jedno řešení. Pokud jeden vrchol leží uvnitř druhé kuželové plochy, úloha řešení nemá.

---

[3] Tyto body jsou hlavními vrcholy kuželoseček f, g, h.


o
4
g
D_1
M_1
$\mathcal{K}$
d_1
k_1
3
IV
P_1
III
II
S
B_1
c_1
V''
I
Q_1
e_1
V'
6
A_1
P^c
C_1
1
E_1
N_1
F
p^ρ
(f)
(C)
h
f
5
F'
(v)
2
$\overline{\mathcal{K}}$
b_1
(c)
a_1
Y
V
$\overline{o}$
p^σ

Obr. 1.4

1.5 Příklad 5

Sestrojte parabolu, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1, d_1.

Rozbor:

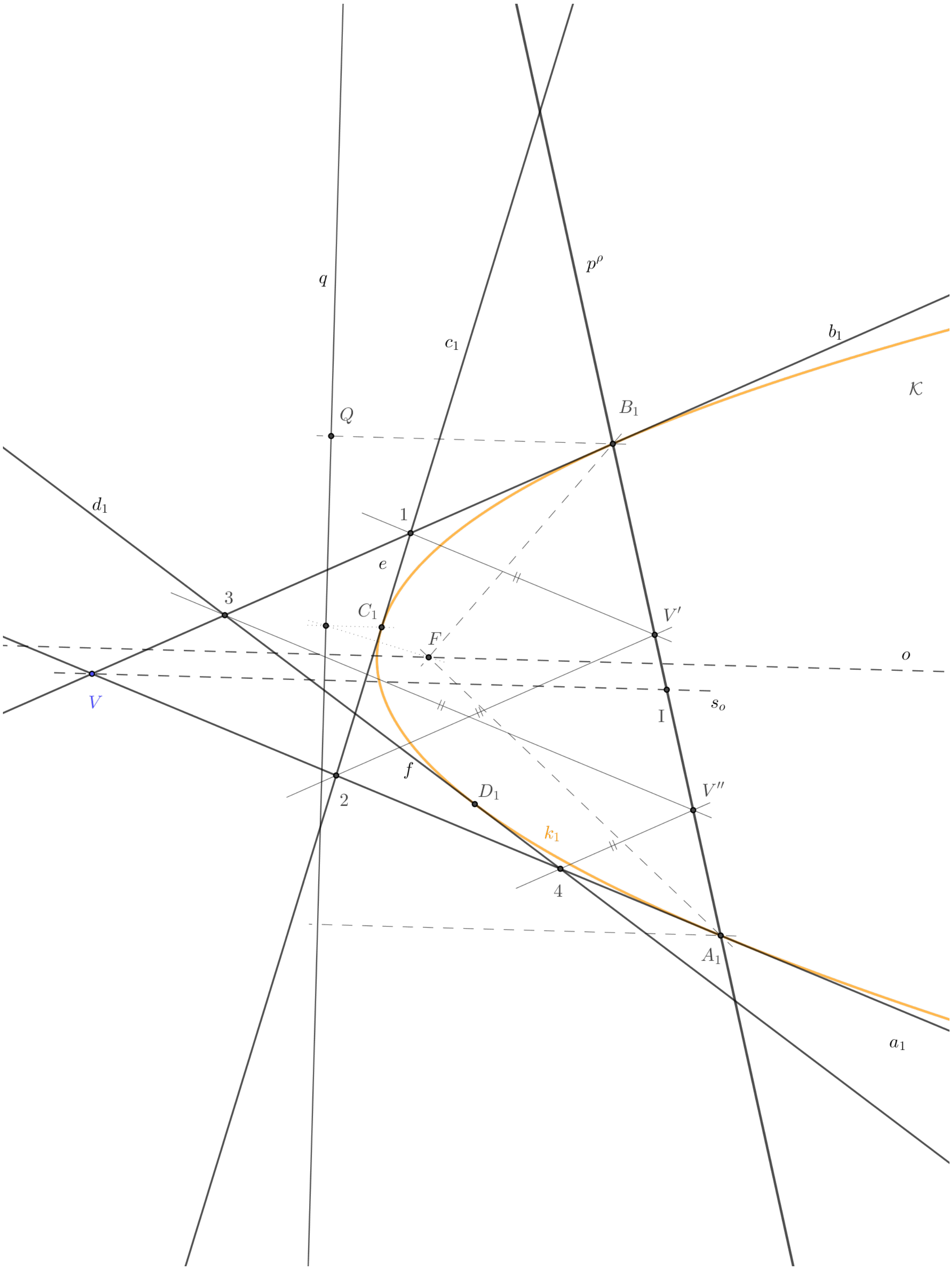
Libovolné dvě tečny, například a_1, b_1, považujeme za obrysové přímky rotační kuželové plochy $\mathcal{K}$. Tečny c_1, d_1 považujeme za kolmé průměty tečen c, d kuželové plochy $\mathcal{K}$. Promítací rovina tečny c, resp. d protíná $\mathcal{K}$ v kuželosečce e, resp. f. Roviny, jež se dotýkají kuželosečky e, resp. f a protínají kuželovou plochu $\mathcal{K}$ v parabole, obalují rotační kuželovou plochu $\mathcal{K}'$, resp. $\mathcal{K}''$. Společná tečná rovina ρ kuželových ploch $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ protíná kuželovou plochu $\mathcal{K}$ v parabole k, jejíž kolmý průmět do π je hledaná parabola k_1.

Konstrukce:

1. Průsečíky přímky c s obrysovými přímkami plochy $\mathcal{K}$ označíme $1, 2$, jsou to hlavní vrcholy kuželosečky e. Podobně body $3, 4$ na přímce d. Body $2, 4$ vedeme rovnoběžky s b_1, body $1, 3$ vedeme rovnoběžky s a_1. Průsečík přímek procházejících body $1, 2$ je vrchol V' plochy $\mathcal{K}'$, průsečík přímek procházejících body $3, 4$ je vrchol V'' plochy $\mathcal{K}''$. Spojnice vrcholů $V'V''$ je stopa p^ρ. Průsečíky p^ρ s a_1, b_1 jsou body A_1, B_1 dotyku těchto tečen s kuželosečkou k_1.
2. Směr osy s_o je určen spojnicí vrcholu V s bodem I, který půlí tětivu A_1, B_1.
3. Ohnisko F, osu o paraboly, řídící přímku q a body dotyku na tečnách c, d sestrojíme pomocí ohniskových vlastností paraboly.
4. Parabola k_1.

Diskuze:

Stopa p^ρ je vrcholy V', V'' určena jednoznačně. Kuželové plochy $\mathcal{K}', \mathcal{K}''$ mají dvě společné tečné roviny souměrné podle průmětny π. Řezy těmito rovinami mají týž společný kolmý průmět. Úloha má jediné řešení.



Obr. 1.5

1.6 Příklad 6

Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány přímky a_1, b_1, bod C_1 a směry asymptot $\overline{m}, \overline{n}$.

Rozbor:

Tečny a_1, b_1 jsou obrysové přímky kuželové plochy, přímky $\overline{m}, \overline{n}$ udávají směry asymptot, bod C_1 je kolmým průmětem bodu C kuželové plochy. Vrcholová rovina σ je určena body přímkami $\overline{m}, \overline{n}$, rovina řezu ρ prochází bodem C a je rovnoběžná s rovinou σ.

Konstrukce:

1. Nejprve sestrojíme vrcholovou rovinu σ. Zvolíme libovolně promítací rovinu λ kolmou k ose o a sestrojíme její průsečíky $\overline{M}, \overline{N}$ s přímkami $\overline{m}, \overline{n}$. Stopa p^σ prochází bodem V a stopníkem Y přímky $v = \overline{MN}$, který sestrojíme ve sklopení.

2. Sestrojíme rovinu řezu ρ. Bodem C vedeme přímku $u \parallel v$ a ve sklopení najdeme její stoník U. Stopa p^ρ je rovnoběžná s p^σ a prochází bodem U. Průsečíky p^ρ s přímkami a_1, b_1 jsou body dotyku těchto přímek s hyperbolou k_1.

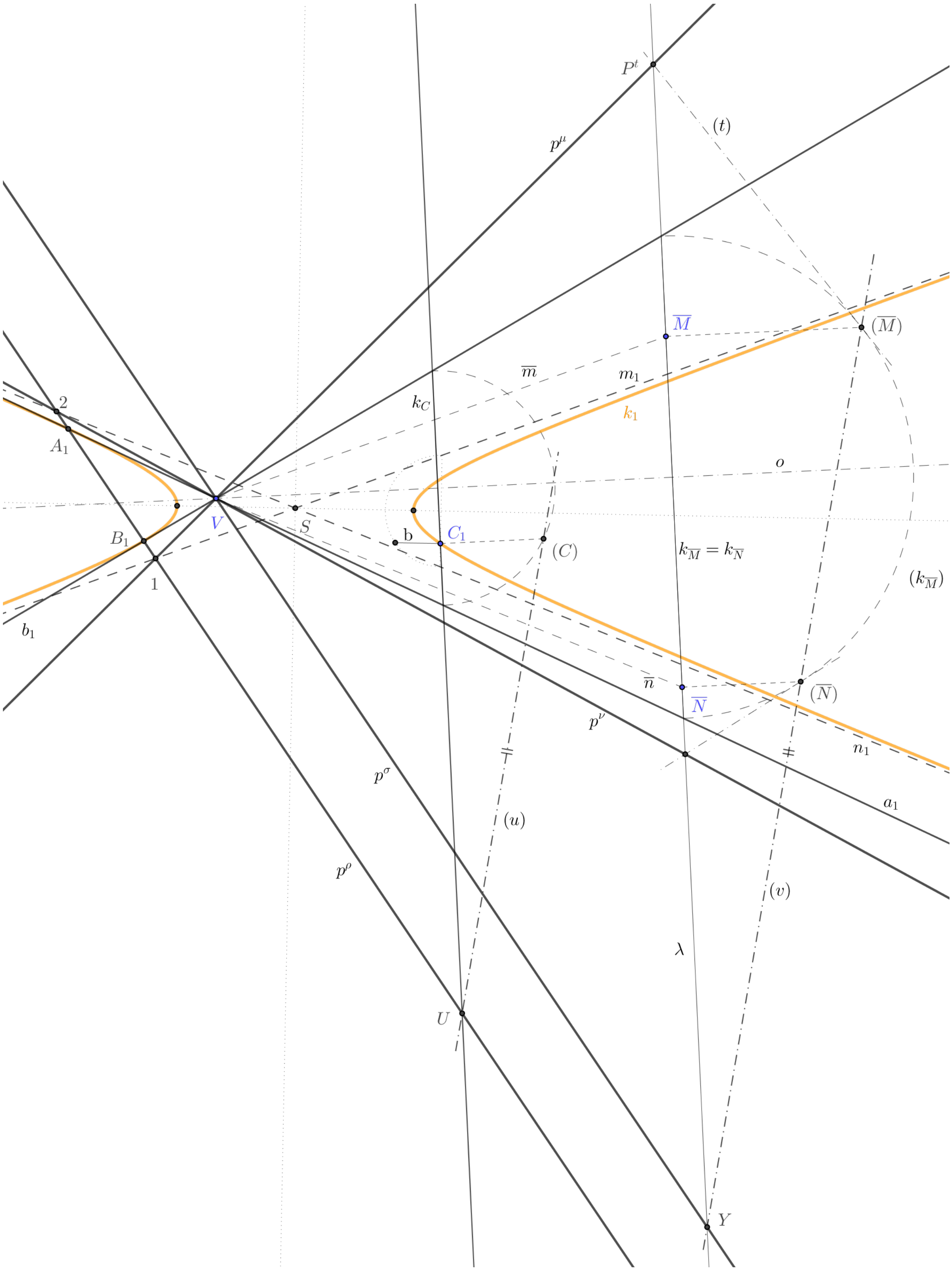
3. Sestrojíme asymptoty m, n hyperboly k_1 a také její střed S. Podél povrchových přímek $\overline{m}, \overline{n}$ kuželové plochy sestrojíme tečné roviny μ, ν a určíme jejich průsečnice m, n s rovinou řezu ρ, jejich kolmé průměty m_1, n_1 jsou asymptoty hyperboly k_1. Ukážeme konstrukci m_1. Sklopíme promítací rovinu λ kružnice $k_{\overline{M}}$, v bodě $(\overline{M})$ sestrojíme tečnu (t) ke kružnici $(k_{\overline{M}})$. Stopníkem $P^t = (t) \cap \lambda$ a bodem V vedeme stopu p^μ. Asymptota $m_1 \parallel \overline{m}_1$ prochází průsečíkem stop $1 = p^\mu \cap p^\rho$. Asymptotu n_1 sestrojíme obdobně. Střed $S = m_1 \cap n_1$

4. Osy hyperboly půlí úhly asymptot, určíme velikost vedlejší poloosy b.

5. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Body $C, \overline{M}, \overline{N}$ mohou mít vůči průmětně až na souměrnost čtyři polohy. Úloha má tedy čtyři řešení.



Obr. 1.6

1.7 Příklad 7

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1 a body D_1, E_1.

Rozbor:

Dvě tečny považujeme za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$, body D_1, E_1 za kolmé průměty bodů D, E ležící na téže kuželové ploše, tečnu c_1 za kolmý průmět tečny c kuželové plochy. Rovinu řezu ρ tvoří body D, E a přímka c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme osu o kuželové plochy $\mathcal{K}$ jako osu úhlu přímek a_1, b_1, v němž leží body D_1, E_1.

2. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Stopa bude procházet stopníky P^c, P^{DE} přímek c, DE. Kóty bodů D, E určíme ve sklopení promítacích rovin povrchových kružnic k_D, k_E. Stopník P^c sestrojíme ve sklopení promítací roviny přímky c, která protíná kuželovou plochu v elipse e. Přímka c prochází bodem $R = c \cap DE$ a dotýká se elipsy e, sestrojíme ji ve sklopení a určíme stopník P^c. Stopa p^ρ protíná tečny a_1, b_1 v bodech A_1, B_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

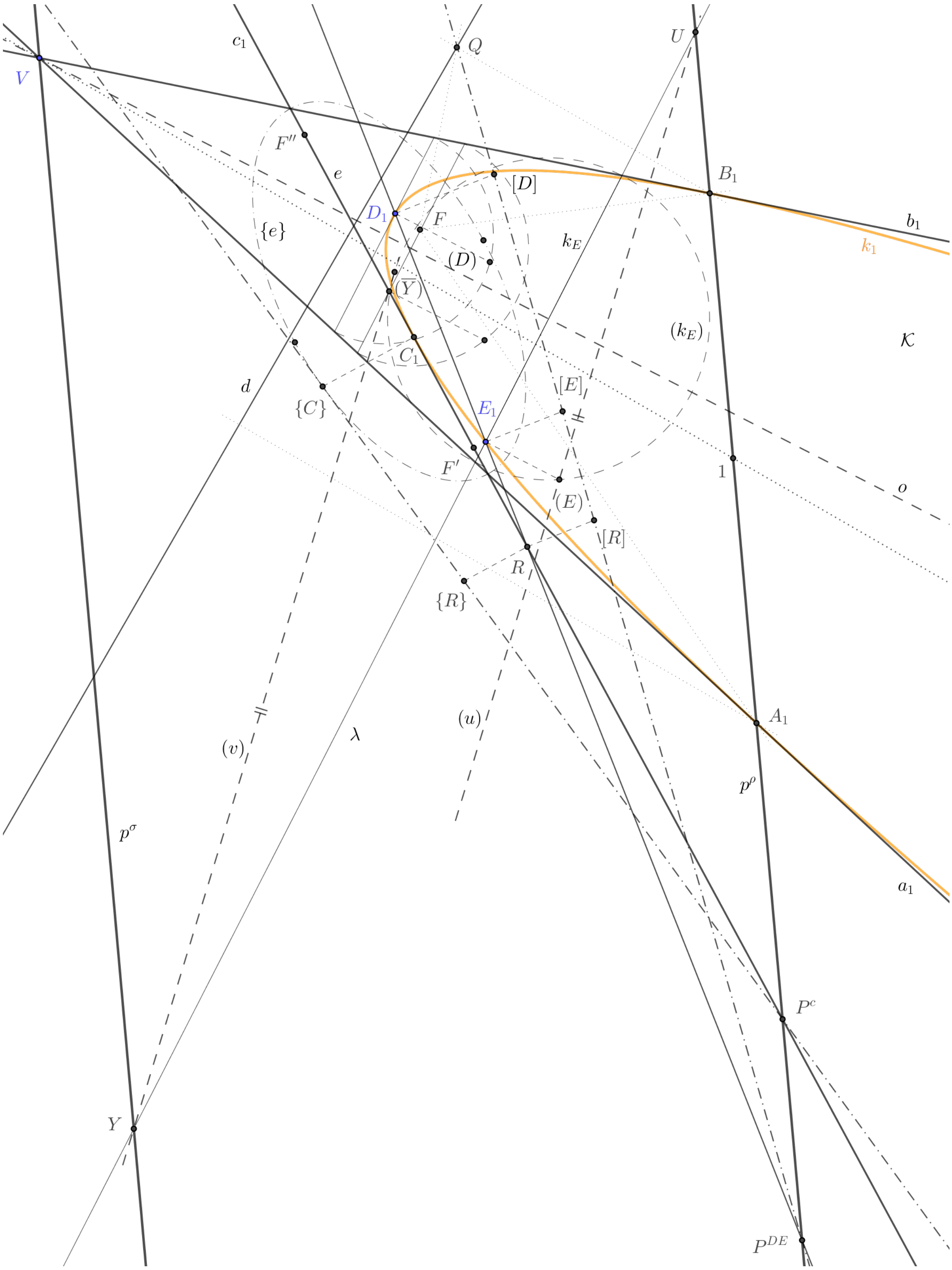
3. Pomocí vrcholové roviny $\sigma \parallel \rho$ určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme průsečnice u, v rovin ρ, σ s promítací rovinou λ povrchové kružnice k_E. Počet společných bodů průsečnice v a kružnice k_E zjistíme ve sklopení. Přímka u prochází body E, U, kde $U = p^\rho \cap \lambda$. Přímka $v \parallel u$ prochází bodem $Y = p^\sigma \cap \lambda$ a dotýká se kružnice k_E v bodě $\overline{Y}$. Řezem je parabola.

4. Ohnisko F a řídicí přímku d sestrojíme pomocí ohniskových vlastností paraboly.

5. Parabola k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení pouze pokud body D, E leží uvnitř stejné dvojice vrcholových úhlů tvořených přímkami a_1, b_1, tedy na jedné kuželové ploše. Body D, E mohou ležet ve stejném poloprostoru určeném průmětnou π nebo v poloprostorech opačných. Z bodu R lze vést v obou případech dvě tečny k elipse e. Úloha má tedy čtyři řešení.


V
c1
Q
U
F''
e
[D]
B1
b1
k1
D1
F
{e}
(D)
kE
(Y)
(kE)
K
C1
d
[E]
{C}
E1
F'
1
o
(E)
[R]
R
{R}
(u)
(v)
λ
A1
pρ
pσ
a1
Pc
Y
PDE

Obr. 1.7

1.8 Příklad 8

Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1, d_1 a bod E_1.

Rozbor:

Tečny a_1, b_1, považujeme za obrysové přímky kuželové plochy $\mathcal{K}$, přímky c_1, d_1 považujeme za kolmé průměty tečen dané kuželové plochy a bod E_1 za průmět bodu E ležícího na téže kuželové ploše. Promítací roviny přímek c, d protínají kuželovou plochu ve dvou kuželosečkách e, f, které leží na kuželové ploše $\mathcal{K}$ s vrcholem V a zároveň na kuželové ploše $\mathcal{K}'$ o vrcholu V'. Rovina ρ řezu prochází bodem E a dotýká se kuželové plochy $\mathcal{K}'$.

Konstrukce:

1. Sestrojíme osu o kuželové plochy $\mathcal{K}$ jako osu úhlu přímek a_1, b_1, v němž leží bod E_1.

2. Sestrojíme vrchol V' kuželové plochy $\mathcal{K}'$. Obrysové přímky 14 a 23 této plochy jsou tvořeny krajními body průmětů kuželoseček e, f řezu $\mathcal{K}$ promítacími rovinami přímek c, d. Najdeme je jako průsečíky přímek a_1, b_1 s přímkami c_1, d_1.

3. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Protože se rovina ρ dotýká kuželové plochy $\mathcal{K}'$ bude její stopa procházet bodem V'. Druhý bod stopy p^ρ bude stopník P^c přímky c, který sestrojíme následovně. Zvolíme pomocnou přímku $r = V'E$, která protne přímku c v bodě R. Kótu bodu E určíme sklopením povrchové kružnice k_E. Přímka c prochází bodem R a dotýká se kuželosečky e, sestrojíme ji ve sklopení a najdeme stopník P^c. Stopa p^ρ protíná tečny a_1, b_1 v jejich bodech dotyku A_1, B_1 s kuželosečkou k_1.

4. Určíme typ kuželosečky řezu pomocí vrcholové roviny $\sigma \parallel \rho$. Rovina ρ protne rovinu povrchové kružnice k_E v přímce u, rovina σ v přímce v. Stejnou konstrukcí jako v bodě 3. příkladu 1.2 zjistíme, že přímka v protíná k_E ve dvou bodech $\overline{M}, \overline{N}$. Řezem je hyperbola, směry asymptot jsou $\overline{n} = V\overline{M}, \overline{n} = V\overline{N}$.

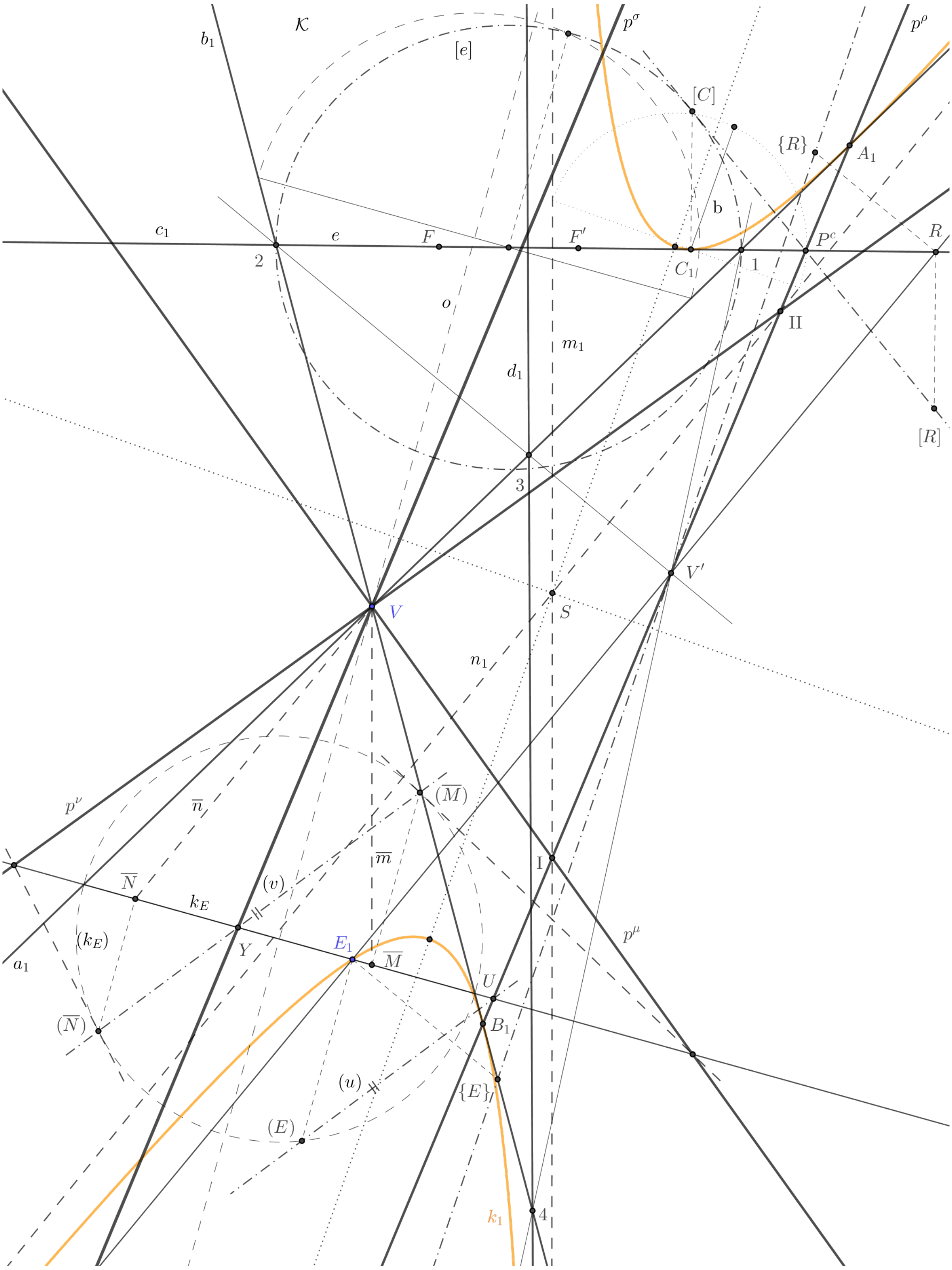
5. Sestrojíme asymptoty m_1, n_1 hyperboly k_1 a její střed S. Podél povrchových přímek $\overline{m}, \overline{n}$ kuželové plochy vedeme tečné roviny μ, ν a sestrojíme jejich průsečnice m, n s rovinou řezu ρ, jejich kolmé průměty m_1, n_1 jsou asymptoty hyperboly k_1. Konstrukce asymptot je stejná jako v příkladě 1.2. Střed hyperboly $S = m_1 \cap n_1$.

6. Osy hyperboly půlí úhly asymptot, zjistíme velikost vedlejší polosy b.

7. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Bod E buď leží vně kuželové plochy $\mathcal{K}'$ a můžeme z něj k této ploše vést dvě tečné roviny, nebo leží uvnitř plochy $\mathcal{K}'$ a tečné roviny neexistují. Úloha má tedy dvě anebo žádné řešení.



b_1
$\mathcal{K}$
$[e]$
p^σ
p^ρ
$[C]$
$\{R\}$
A_1
b
c_1
e
F
F'
P^c
R
2
C_1
1
II
o
m_1
d_1
$[R]$
3
V'
V
S
n_1
$(\overline{M})$
p^ν
$\overline{n}$
$\overline{m}$
$\overline{N}$
(v)
k_E
I
(k_E)
Y
E_1
$\overline{M}$
p^μ
a_1
U
$(\overline{N})$
B_1
(u)
$\{E\}$
(E)
k_1
4

Obr. 1.8

1.9 Příklad 9

Sestrojte parabolu, jsou-li dány přímky a_1, b_1 a body C_1, D_1.

Rozbor:

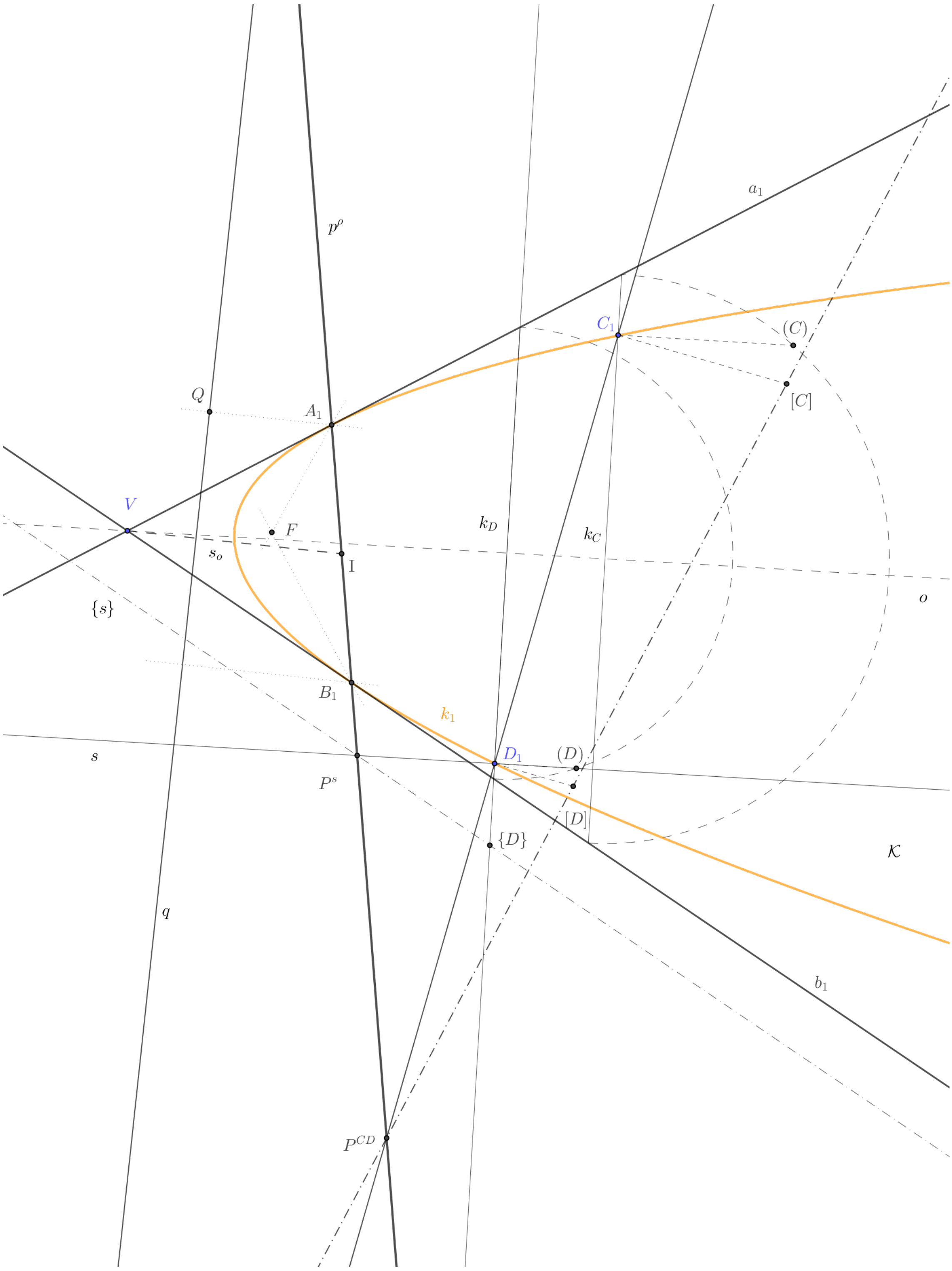
Tečny a_1, b_1 považujeme za obrysové přímky, body C_1, D_1 za kolmé průměty bodů kuželové plochy. Rovina řezu ρ prochází body C, D a má stejnou odchylku od osy o kuželové plochy jako povrchové přímky této plochy.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopník P^{CD} přímky CD.
2. Bodem D vedeme přímku s roviny ρ, která má od průmětny π stejnou odchylku jako libovolná povrchová přímka, například a_1, od osy kuželové plochy o. Ve sklopení najdeme její stopník P^s.
3. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{CD}, P^s. Průsečíky A_1, B_1 stopy roviny ρ s obrysovými přímkami a_1, b_1 jsou body dotyku těchto přímek s parabolou k_1.
4. Ohnisko F a řídicí přímku q sestrojíme pomocí ohniskových vlastností paraboly.
5. Parabola k_1.

Diskuze:

Body C, D mohou ležet ve stejném poloprostoru vymezeném průmětnou π nebo v opačných poloprostorech. Úloha má dvě řešení.



p^{ρ}
a_1
C_1
(C)
$[C]$
Q
A_1
V
F
k_D
k_C
s_o
I
o
$\{s\}$
B_1
k_1
s
D_1
(D)
P^s
$[D]$
$\{D\}$
$\mathcal{K}$
q
b_1
P^{CD}

Obr. 1.9

Kapitola 2

Kulová plocha

V této a v následujících kapitolách jsou zařazeny úlohy, ve kterých máme sestrojit kuželosečku, která prochází danými body, dotýká se daných přímek a ve dvou bodech se dotýká ještě jiné kuželosečky. Danou kuželosečkou bude v této kapitole kružnice a rotační kvadrikou plocha kulová.

Obecný postup při řešení úloh této kapitoly je následující. Zadanou kružnici umístíme do průmětny π a prohlásíme ji za obrysovou kružnici kulové plochy, čímž kulovou plochu jednoznačně určíme. Přímky považujeme za tečny zvolené kulové plochy a zadané body za body ležící na této ploše. Sestrojíme rovinu řezu, která je určená danými body a přímkami, rovinu souměrnosti řezu a řez zkonstruujeme.

Řezem kulové plochy rovinou, která s ní má společné aspoň dva body, je vždy kružnice. Jejím rovnoběžným průmětem kolmo do průmětny, která prochází středem O kulové plochy může být kružnice, elipsa nebo úsečka. Kružnice vznikne pouze v případě, že rovina řezu ρ je s průmětnou π rovnoběžná. Naopak, průmětem kružnice bude úsečka právě když rovina řezu bude k π kolmá. V následujících úlohách se vyskytují pouze případy, v nichž má rovina řezu vůči průmětně obecnou polohu a průmětem řezu tedy bude elipsa.

Aby mohl řez kulové plochy existovat musí být zadané přímky sečnami, popřípadě tečnami kružnice r_1 a všechny zadané body musí ležet uvnitř r_1, popřípadě na r_1. Pokud máme zadané pouze přímky může však nastat situace, že body dotyku těchto přímek s hledanou kuželosečkou budou ležet vně kružnice r_1. Pro konstrukci řezu v tomto případě nelze použít kulovou plochu. Tyto a podobné příklady naleznete v kapitole 4, ve které volíme jako pomocnou kvadriku jednodílný rotační hyperboloid. U úloh, kde toto řešení může nastat na to v diskuzi vždy upozorníme. Úlohu vyřešíme pomocí řezu na ploše kulové a zmíněné případy zanedbáme.[1]

Kromě běžných případů se může vyskytnout i takový, kde lze řez kulové plochy sestrojit, ale s obrysovou kružnicí nemá žádné společné body. Znamená to, že rovina řezu neprotíná rovník r kulové plochy a řez leží celý jen na jedné polokouli. Říkáme, že body dotyku jsou imaginární.

Podrobné informace o variantách zadání, počtu a kvalitě řešení najdete v [2].

[1] Po prostudování kapitoly 4 se zájemci mohou k těmto úlohám vrátit a doplnit i ona zanedbaná řešení.

2.1 Příklad 10

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ ležící v průmětně π. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C kulové plochy κ do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků P^{AC} a P^{BC} přímek AC a BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení promítacích rovin povrchových kružnic jednotlivých bodů. V případě bodu B je to rovina kolmá k přímce OB_1, která protíná kulovou plochu v kružnici k_B. V případě bodů A, C promítací rovina obsahuje přímku AC a tedy $k_A = k_C$. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{AC}, P^{BC} a protíná obrysovou kružnici r_1 kulové plochy κ v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.

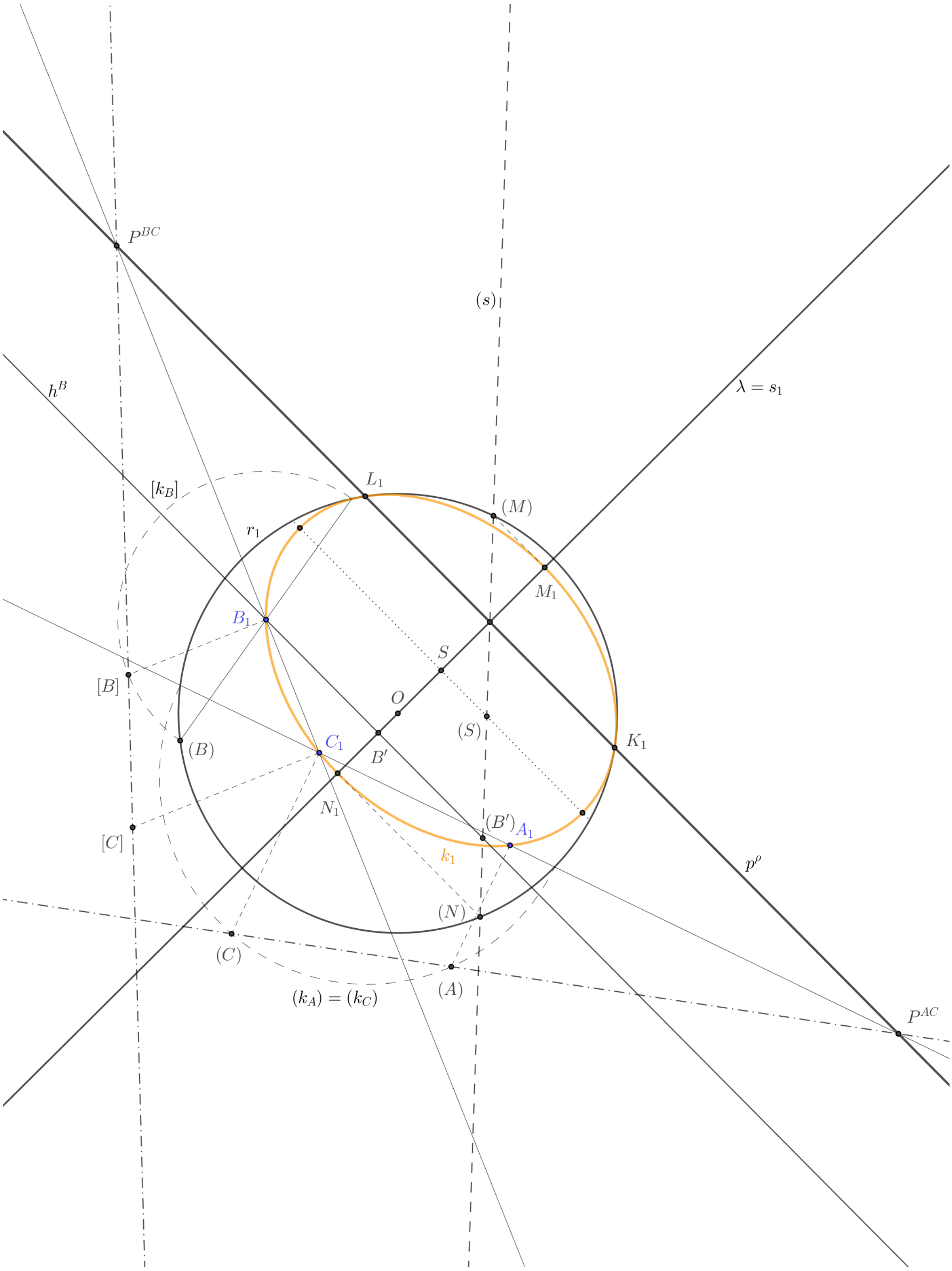
2. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k π, prochází bodem O a protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce s. Průsečnici s určíme pomocí jejího bodu B', který leží v λ a zároveň na hlavní přímce roviny ρ procházející bodem B. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.

3. Střed elipsy S je střed úsečky M_1, N_1. Hlavní osa elipsy k_1 prochází středem S a je kolmá k s. Délka hlavní poloosy a $= |(S)(M)|$.

4. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mohou mít celkem osm různých poloh vůči průmětně π a určují tak osm rovin, z nichž jsou ale vždy dvě souměrné podle π. Souměrné jsou i řezy kulové plochy κ těmito rovinami a jejich pravoúhlé průměty tedy splývají. Dostaneme tak čtyři různá řešení úlohy, z nichž nejvýše jedno má s r_1 imaginární dotyk.


P^{BC}
(s)
$\lambda = s_1$
h^B
$[k_B]$
L_1
(M)
r_1
M_1
B_1
S
$[B]$
O
(S)
K_1
(B)
C_1
B'
N_1
$[C]$
(B')
A_1
k_1
p^ρ
(N)
(C)
(A)
$(k_A) = (k_C)$
P^{AC}

Obr. 2.1

2.2 Příklad 11

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ, která leží v π. Body A_1, B_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B kulové plochy do průmětny. Přímku c_1 považujeme za kolmý průmět tečny c kulové plochy. Rovina ρ je určená přímkami c, AB.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopník přímky AB. Kótu bodu A, resp. B nalezneme ve sklopení promítací roviny daného bodu, která je zároveň kolmá k přímce OA_1, resp. OB_1.

2. Pomocí bodu $R = c \cap AB$, jehož kótu známe, sestrojíme ve sklopení stopník P^c přímky c, která je tečnou kružnice k_C, tj. řezu kulové plochy κ promítací rovinou přímky c.

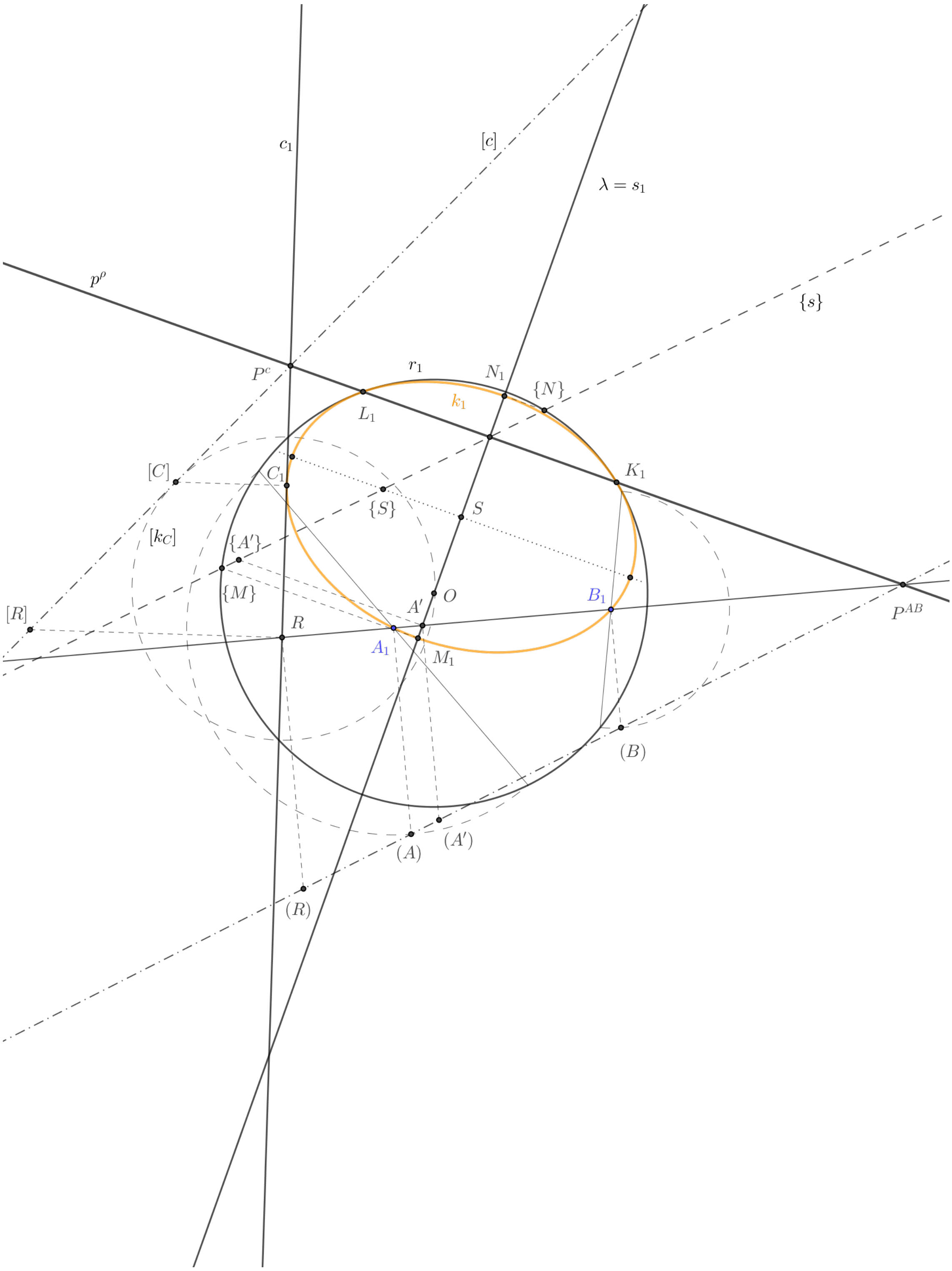
3. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k průmětně π a prochází bodem O. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je spádová přímka roviny ρ, kterou sestrojíme pomocí bodu $A' = \lambda \cap AB$. Ve sklopení najdeme body M, N, ve kterých přímka s protíná kulovou plochu κ a jejichž kolmé průměty se zobrazí jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.

4. Stejně jako v úloze 2.1 sestrojíme střed S a hlavní osu elipsy k_1.

5. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B mohou mít, až na souměrnost podle průmětny dvě různé polohy. V každém případě lze z bodu R vést ke kružnici k_C dvě tečny. Existují tedy čtyři řešení dané úlohy.


c_1
$[c]$
$\lambda = s_1$
p^ρ
$\{s\}$
r_1
N_1
$\{N\}$
P^c
k_1
L_1
$[C]$
C_1
K_1
$\{S\}$
S
$[k_C]$
$\{A'\}$
$\{M\}$
O
B_1
A'
$[R]$
R
P^{AB}
A_1
M_1
(B)
(A')
(A)
(R)

Obr. 2.2

2.3 Příklad 12

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1 a bod C_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ, která leží v π. Přímky a_1, b_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b kulové plochy κ do průmětny π. Promítací roviny přímek a, b protínají kulovou plochu v kružnicích f, g, které leží ještě na kuželové ploše $\mathcal{K}$ o vrcholu V. Bod C_1 je průmětem bodu C plochy κ. Rovina řezu ρ prochází bodem C a dotýká se kuželové plochy $\mathcal{K}$.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol kuželové plochy $\mathcal{K}$, na které leží kružnice f, g. Kružnice se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $V = 23 \cap 14$. Stopa p^ρ bude procházet body V a P^b, který najdeme ve sklopení jako stopník tečny b ke kružnici g z bodu $R = VC \cap b$. Obrysovou kružnici protíná stopa p^ρ v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.

2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1. Přímka b leží v ρ a je tečnou kružnice g, ve sklopení nalezneme bod dotyku B. Přímky b, a jsou tečny stejné kuželové plochy $\mathcal{K}$, body B, A na leží na téže povrchové přímce procházející vrcholem V.

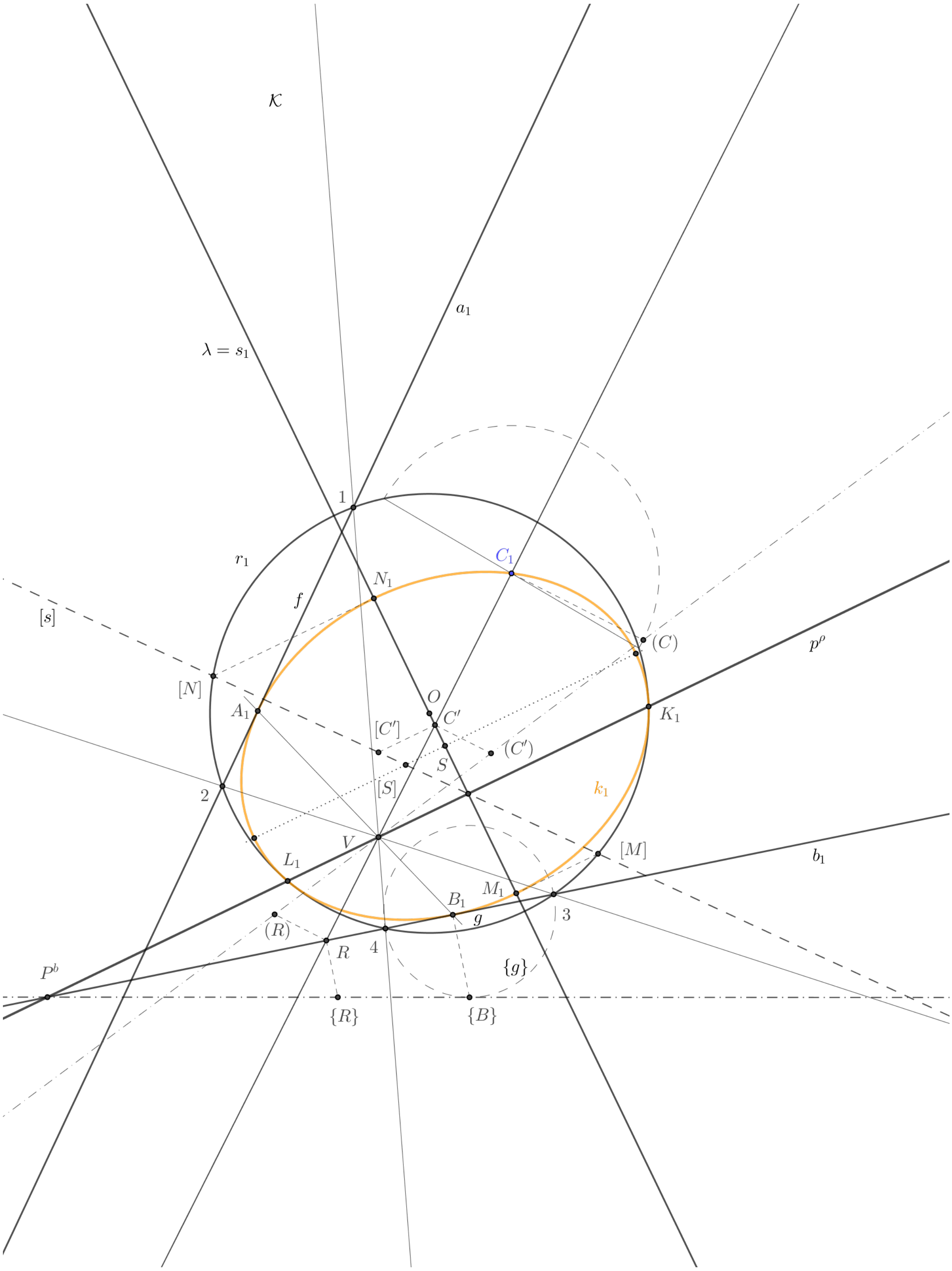
3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ, která protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce s. Přímku s určíme jejím stopníkem a bodem $C' = c \cap \lambda$. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.

4. Střed a hlavní osu elipsy sestrojíme jako v příkladě 2.1.

5. Elipsa k_1.

Diskuze:

Uvažujeme bod C uvnitř kružnice r_1. Pokud bod C_1 leží v některé kruhové úseči vyťaté přímkami a_1, b_1 na r_1, pak úloha nemá řešení. V ostatních případech kružnicemi f, g proložíme dvě kuželové plochy, ke kterým lze bodem C vést dvě tečné roviny. Úloha pak má čtyři řešení. V případě, že stopa p^ρ neprotne kružnici r_1 dostaneme řešení, ve kterém má elipsa k_1 s kružnicí dotyk imaginární.



$\mathcal{K}$
a_1
$\lambda = s_1$
1
r_1
C_1
N_1
f
$[s]$
(C)
p^ρ
$[N]$
O
A_1
C'
K_1
$[C']$
(C')
S
$[S]$
2
k_1
V
L_1
$[M]$
b_1
M_1
B_1
3
g
(R)
4
R
$\{g\}$
P^b
$\{R\}$
$\{B\}$

Obr. 2.3

2.4 Příklad 13

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

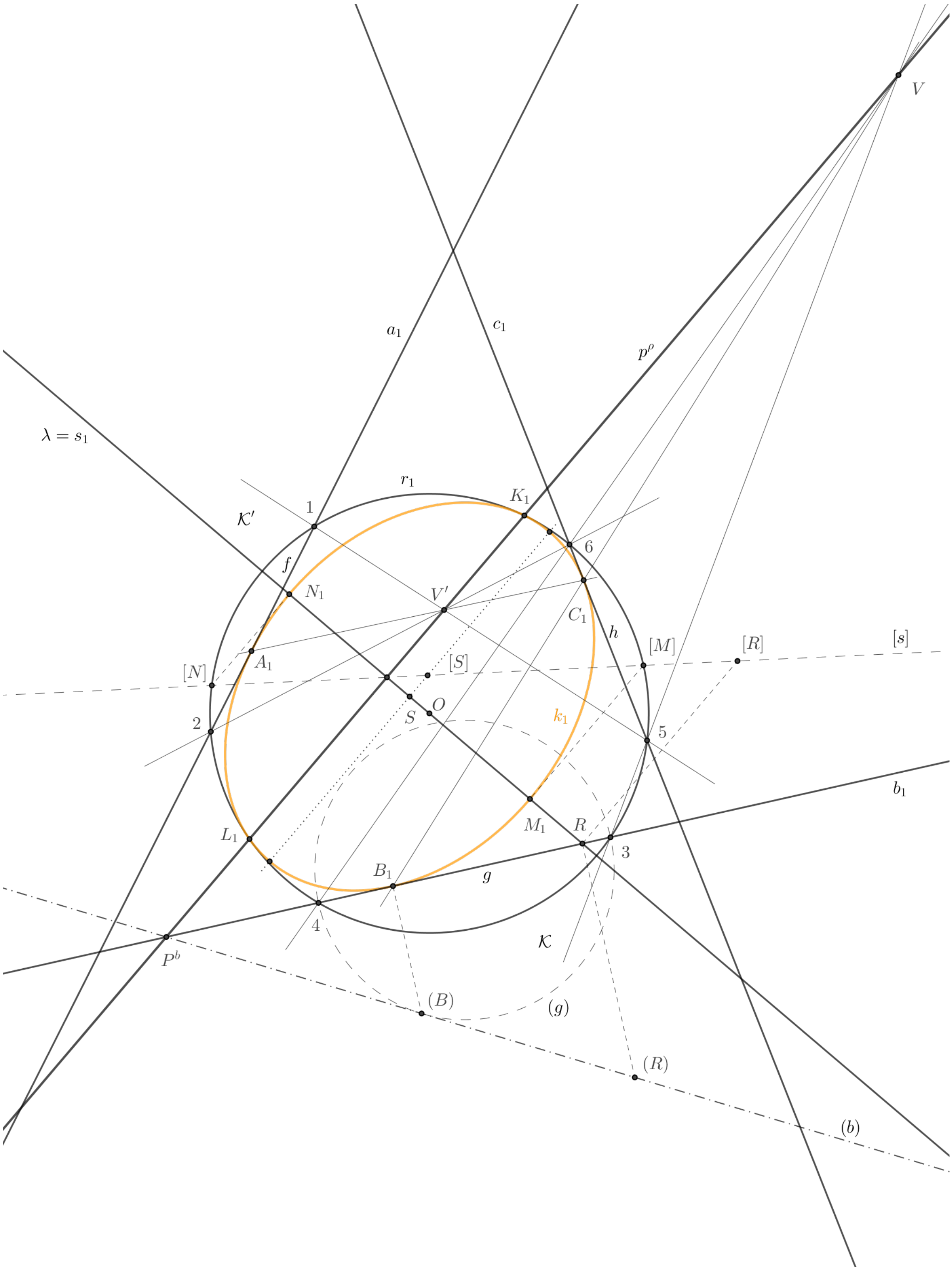
Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ, která leží v π. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c kulové plochy κ do průmětny π. Promítací roviny přímek a, b, c protínají kulovou plochu v kružnicích f, g, h. Kružnice f, g leží zároveň na kuželové ploše $\mathcal{K}$ o vrcholu V, kružnice g, h leží na kuželové ploše $\mathcal{K}'$ o vrcholu V'. Rovina řezu ρ je společnou tečnou rovinou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrcholy kuželových ploch, na kterých leží kružnice f, g, h. Tyto kružnice se zobrazí postupně do úseček $12, 34, 56$, vrchol $V = 35 \cap 46$, $V' = = 15 \cap 26$. Stopa p^ρ prochází body V, V' a obrysovou kružnici protíná v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.
2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka b leží v ρ a je tečnou kružnice g, ve sklopení nalezneme bod dotyku B. Přímky b, c jsou tečny stejné kuželové plochy $\mathcal{K}$, body dotyku B, C na leží na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V. Podobně pro přímky a, c a body dotyku A, C povrchové přímky procházející vrcholem V'.
3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ, která protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce s. Přímku s sestrojíme pomocí jejího stopníku a bodu $R = \lambda \cap b$. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.
4. Střed a hlavní osu elipsy sestrojíme jako v předchozím příkladě 2.1.
5. Elipsa k_1.

Diskuze:

V tomto případě zadání přímek a, b, c získáme řešení pouze uvnitř r_1. Kružnicemi f, g prochází dvě kuželové plochy, stejně tak kružnicemi g, h. Vrcholy kuželových ploch procházejících kružnicemi f, h leží na přímkách určených vrcholy předchozích kuželových ploch. Tyto přímky jsou čtyři různé stopy osmi rovin řezu, vždy dvou souměrných podle průmětny π. Existují tedy čtyři řešení úlohy. Stopa p^ρ neprotne kružnici r_1 v nejvýše jednom případě, pak má elipsa k_1 s kružnicí r_1 imaginární dotyk.


a_1
c_1
p^ρ
V
$\lambda = s_1$
r_1
K_1
1
$\mathcal{K}'$
6
f
N_1
V'
C_1
h
$[M]$
$[R]$
$[s]$
$[N]$
A_1
$[S]$
O
S
2
k_1
5
b_1
M_1
R
3
L_1
B_1
g
4
$\mathcal{K}$
P^b
(B)
(g)
(R)
(b)

Obr. 2.4

2.5 Příklad 14

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme opět za obrysovou kružnici kulové plochy κ, která leží v průmětně π. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této kulové plochy do průmětny π. Promítací roviny přímek a, b, c protínají kulovou plochu v kružnicích f, g, h. Kružnice h, f leží zároveň na kuželové ploše $\mathcal{K}$ o vrcholu V, kružnice g, f leží na kuželové ploše $\mathcal{K}'$ o vrcholu V'. Rovina řezu ρ je společnou tečnou rovinou těchto kuželových ploch.

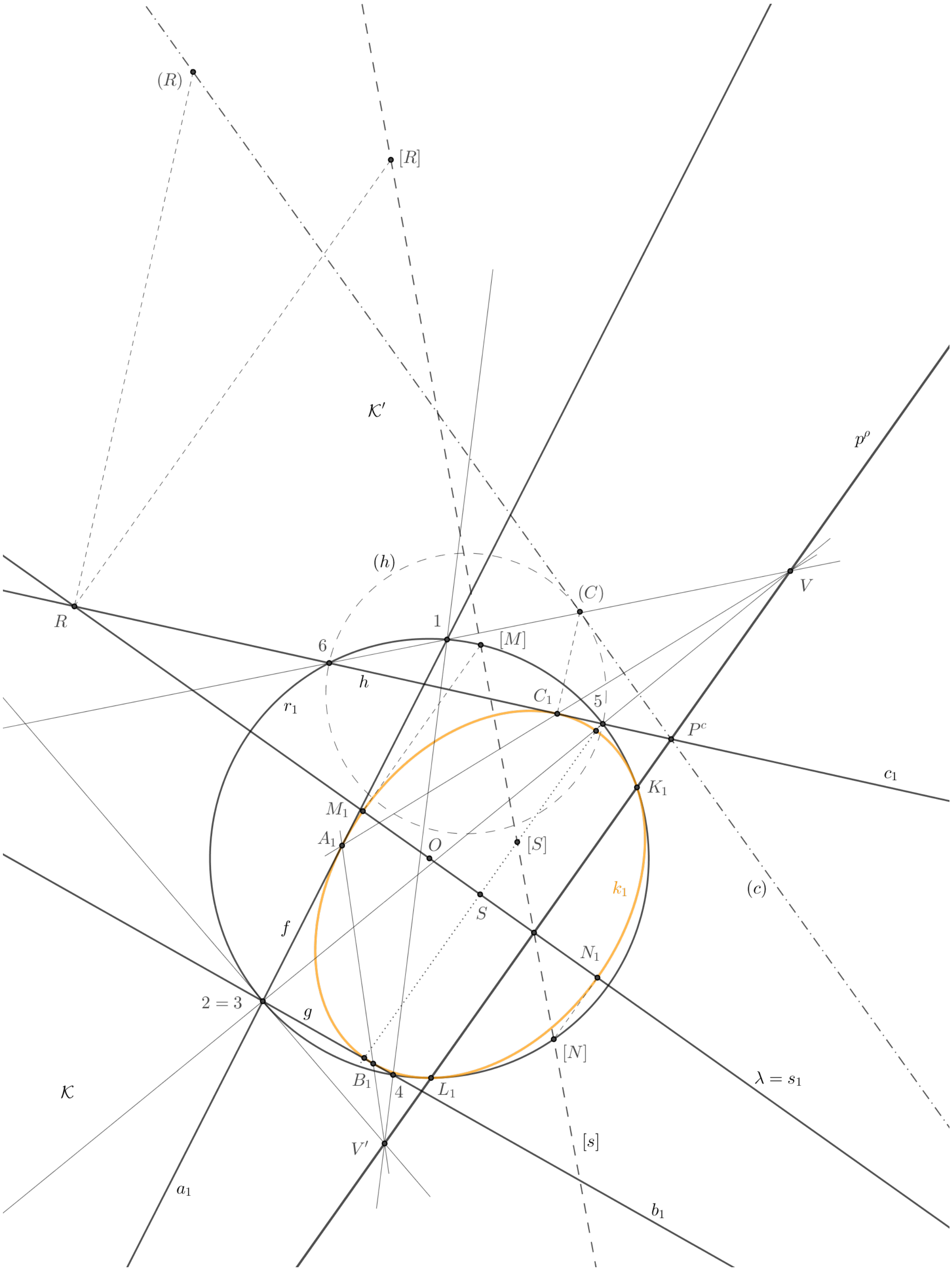
Konstrukce:

1. Sestrojíme vrcholy kuželových ploch, na nichž leží kružnice f, g, h. Kružnice se zobrazí postupně do úseček $12, 34, 56$, vrchol $V = 25 \cap 16$, $V' = 14 \cap 23$.[2] Stopa roviny ρ prochází body V, V' a obrysovou kružnici protíná v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.
2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka c leží v ρ a je tečnou kružnice h, ve sklopení nalezneme bod dotyku C. Přímky c, a jsou tečny téže kuželové plochy $\mathcal{K}$, body dotyku C, A leží na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V. Podobně pro přímky a, b a body dotyku A, B na povrchové přímce procházející vrcholem V'.
3. Rovina souměrnosti řezu λ protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce s, kterou určíme pomocí bodu $R = \lambda \cap c$ a jejího stopníku. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.
4. Střed a hlavní osu elipsy sestrojíme jako v příkladě 2.1.
5. Elipsa k_1.

Diskuze:

Jestliže průměty průsečíků tečen a, b, c leží jeden vně, jeden uvnitř a jeden na obrysové kružnici r_1, dostaneme jedno řešení uvnitř a jedno řešení vně r_1, viz [2]. Uvažujeme-li pouze řešení zkonstruované na kulové ploše, je toto řešení jediné. Dotyk s obrysovou kružnicí může být jak reálný, tak imaginární.

[2] Pokud krajní body kružnic splývají, jako v tomto případě, nahrazujeme jejich spojnici tečnou r_1 v tomto bodě.


(R)
[R]
$\mathcal{K}'$
p^ρ
(h)
(C)
V
R
1
[M]
6
h
C_1
5
P^c
c_1
r_1
K_1
M_1
A_1
O
[S]
k_1
(c)
S
f
N_1
2 = 3
g
[N]
$\lambda = s_1$
B_1
4
L_1
$\mathcal{K}$
V'
[s]
a_1
b_1

Obr. 2.5

2.6 Příklad 15

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1, z nichž c_1 je tečnou r_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ, která leží v π. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c kulové plochy κ do průmětny π. Promítací roviny přímek a, b protínají kulovou plochu v kružnicích f, g. Kružnice f, g leží také na kuželové ploše $\mathcal{K}$ o vrcholu V. Přímka c se dotýká obrysové kružnice v bodě C, který leží v π. Rovina řezu ρ prochází bodem C a dotýká se kuželové plochy $\mathcal{K}$.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol kuželové plochy, na níž leží kružnice f, g. Kružnice se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $V = 14 \cap 23$. Stopa roviny ρ prochází body V, C a obrysovou kružnici protíná v bodě K_1 dotyku s elipsou k_1.

2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1. Přímka a leží v ρ a je tečnou kružnice g, ve sklopení nalezneme bod dotyku A. Protože přímky a, b jsou tečny téže kuželové plochy $\mathcal{K}$ budou body dotyku A, B ležet na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V.

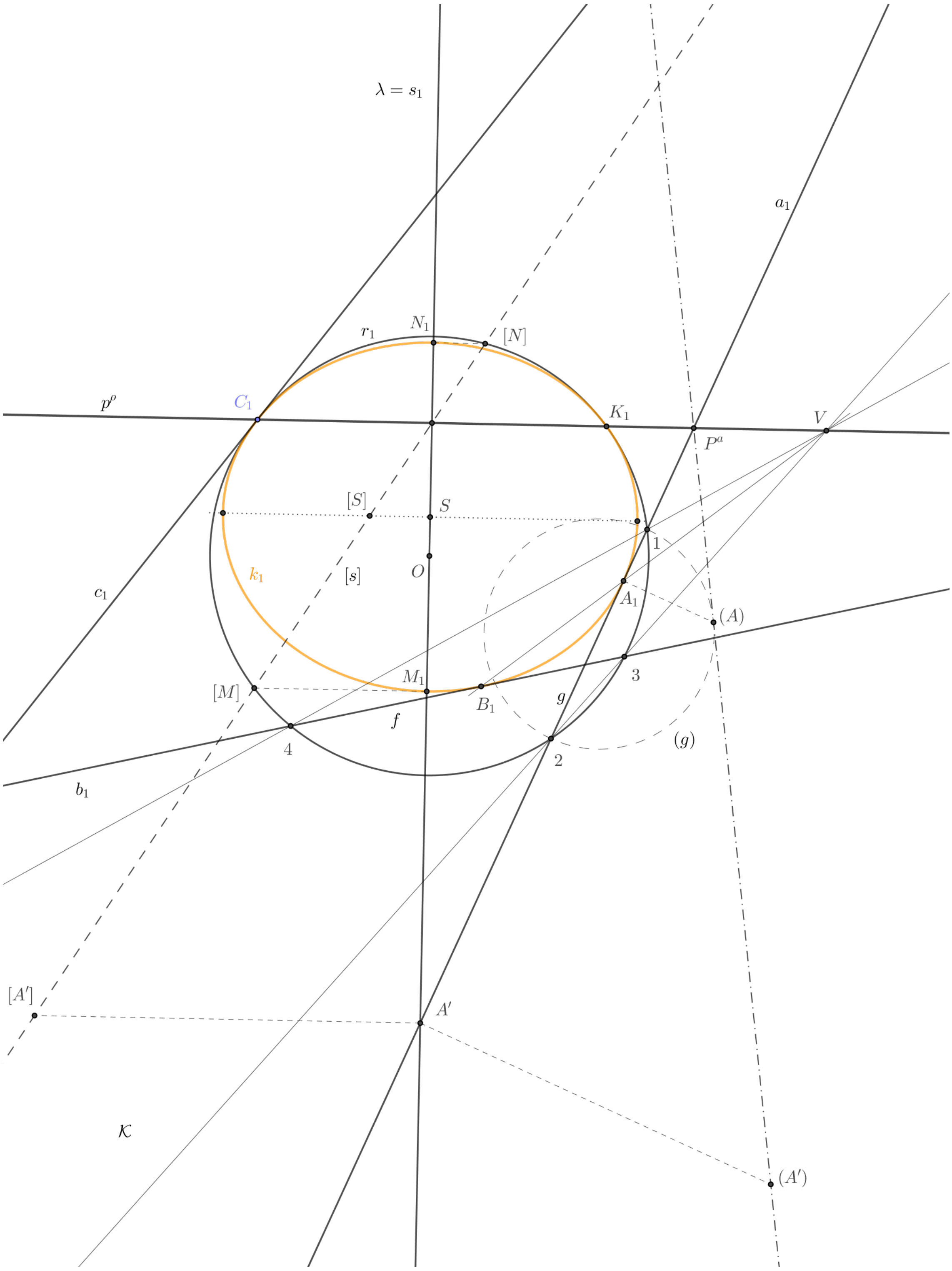
3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ a její průsečnici s s rovinou ρ. Ve sklopení sestrojíme spádovou přímku s pomocí bodu $A' = \lambda \cap a$. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.

4. Střed a hlavní osu elipsy sestrojíme jako v příkladě 2.1.

5. Elipsa k_1.

Diskuze:

Pomocnou kvadrikou je zde plocha kulová, uvažujeme tedy řešení pouze uvnitř kružnice r_1. Kružnice f, g leží na dvou kuželových plochách, ale pouze jedna odpovídá řešení uvnitř r_1. Bodem C můžeme vést ke kuželové ploše dvě tečné roviny, které jsou souměrné podle průmětny. Úloha má tedy uvnitř kružnice r_1 právě jedno řešení.



Obr. 2.6

2.7 Příklad 16

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici kulové plochy κ ležící v průmětně π. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C kulové plochy κ do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků P^{AC} a P^{BC} přímek AC a BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení promítacích rovin jejich povrchových kružnic. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{AC}, P^{BC} a obrysovou kružnici r_1 kulové plochy neprotíná v žádném bodě. Body dotyku jsou imaginární.

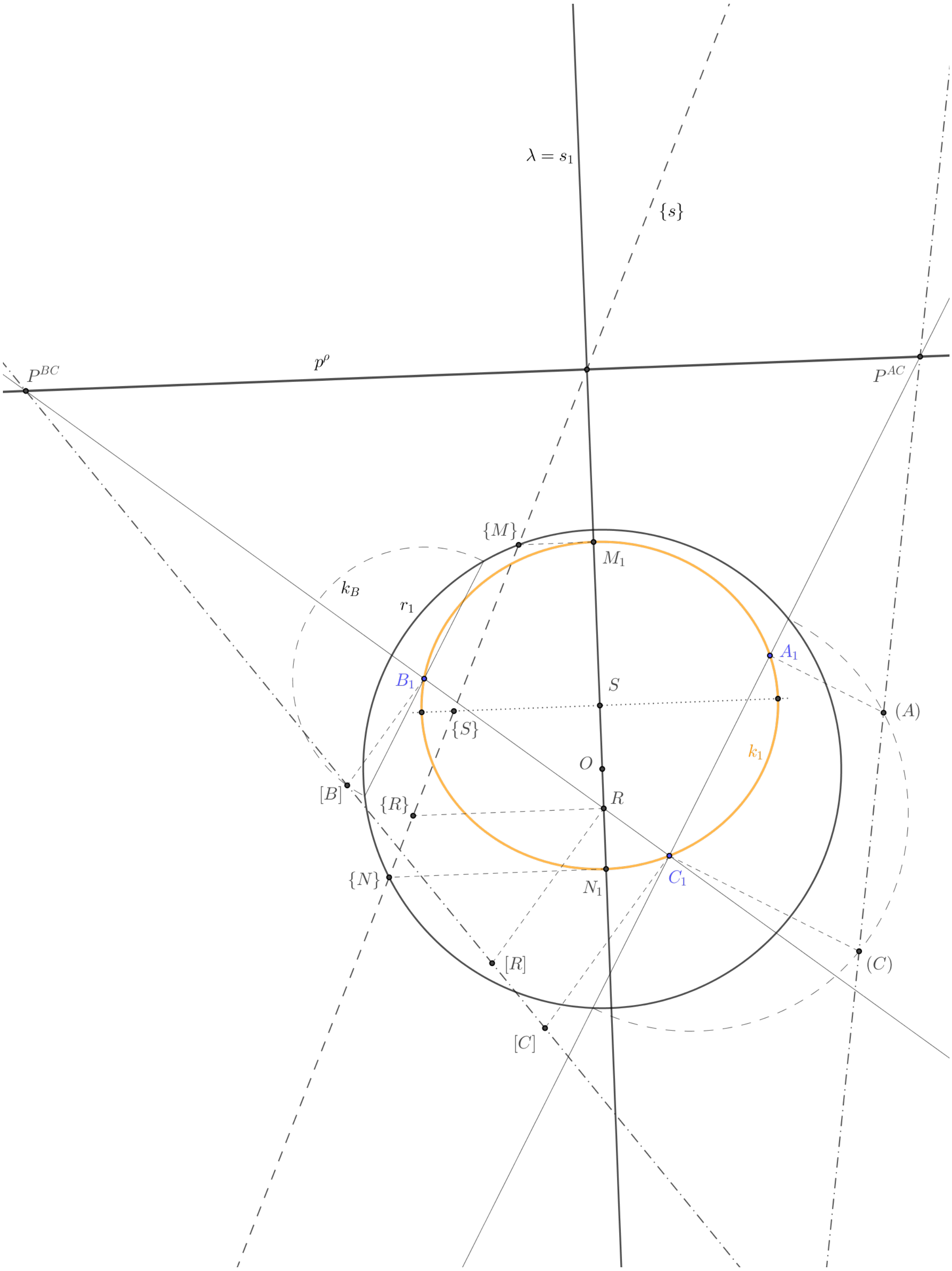
2. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k π, prochází bodem O a protíná rovinu řezu ρ ve spádové přímce s, kterou určíme pomocí jejího stopníku na p^ρ a bodu $R = \lambda \cap BC$. Průsečíky kulové plochy s přímkou s, sestrojené ve sklopení, se promítnou jako vedlejší vrcholy M_1, N_1 elipsy k_1.

3. Střed elipsy S je střed úsečky M_1, N_1. Hlavní osa elipsy k_1 prochází středem S kolmo k s. Délka hlavní poloosy a $= |\{S\}\{M\}|$.

4. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mohou mít až na souměrnost podle průmětny π čtyři polohy a určují tak čtyři roviny řezu. Dostaneme čtyři různá řešení úlohy, z nichž některé může mít s kružnicí r_1 imaginární dotyk.



Obr. 2.7

Kapitola 3

Elipsoid

V příkladech této kapitoly máme za úkol sestrojit kuželosečku, která prochází zadanými body, dotýká se zadaných přímek, a přitom se ve dvou bodech dotýká jisté elipsy. Pro konstrukci lze použít protáhlý nebo zploštělý rotační elipsoid. Většinou volíme protáhlý, jelikož kóty jeho bodů jsou menší.

Obecný postup při řešení úloh této kapitoly je následující. Elipsu zadanou středem a délkami poloos pokládáme za obrys rotačního elipsoidu $\mathcal{E}$ a umístíme ji do průmětny π, kterou ztotožníme s nákresnou. Zadané přímky považujeme za tečny plochy $\mathcal{E}$ a zadané body za body ležící na této ploše. Sestrojíme rovinu řezu, která je určená danými body a přímkami, rovinu souměrnosti řezu λ a její průsečnici s s rovinou ρ. Přímka s protíná elipsoid v hlavních vrcholech elipsy řezu k, které sestrojíme otočením roviny λ do π. Vedlejší vrcholy nalezneme v rovině kolmé k ose rotace jako průsečíky přímky kolmé k s s příslušnou rovnoběžkou elipsoidu. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k řezu se promítnou do π jako sdružené průměry elipsy k_1, kterou sestrojíme Rytzovou konstrukcí. Teorie k řešení těchto příkladů je vyložena v [2].

Řezem rotačního elipsoidu rovinou, která s ním má společné aspoň dva body, může být elipsa nebo kružnice. Kružnice je řezem právě když rovina ρ je kolmá k ose rotace elipsoidu. Osa rotace leží v π a kružnice se zobrazí jako úsečka, tyto případy vynecháme. Řezem je tedy vždy elipsa k jejímž průmětem je obvykle elipsa k_1, ve speciálních případech i kružnice.

Řez elipsoidu bude existovat, jestliže budou zadané přímky sečnami, popřípadě tečnami elipsy r_1 a zadané body budou ležet uvnitř r_1 popřípadě na r_1. Řešení tedy bude vždy ležet uvnitř elipsy r_1. Pokud máme zadané pouze přímky může však nastat situace, že body dotyku těchto přímek s hledanou kuželosečkou budou ležet vně elipsy r_1. V těchto případech bychom zvolili jako pomocnou kvadriku jednodílný nerotační hyperboloid. Tyto úlohy ale nejsou předmětem této práce, poznamenejme jen, že je lze řešit užitím afinity, která převede elipsu r_1 na kružnici, čímž dostaneme rotační případy z kapitoly 4.

Opět se může vyskytnout situace, ve které lze řez elipsoidu sestrojit, ale s obrysovou elipsou nemá žádné společné body. Znamená to, že rovina řezu neprotíná obrysovou elipsu r plochy $\mathcal{E}$ a řez leží celý jen na jedné polovině elipsoidu. Říkáme, že body dotyku jsou imaginární.

3.1 Příklad 17

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech elipsy r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Elipsu r_1 považujeme za obrysovou elipsu rotačního elipsoidu $\mathcal{E}$ ležící v průmětně π. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C elipsoidu $\mathcal{E}$ do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků přímek AB a BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o, které protínají elipsoid v kružnicích. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{AB}, P^{BC} a protíná obrysovou elipsu r_1 plochy $\mathcal{E}$ v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Pro další konstrukce zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace elipsoidu, která prochází jeho středem O.[1] Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m_3^ρ roviny ρ pomocí bodu $G = AB \cap \mu$ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O$.

3. Nyní snadno sestrojíme přímku s jako průsečnici rovin λ a ρ. Průsečíky P, Q přímky s s elipsoidem, sestrojené v otočení roviny λ do π kolem osy o pomocí bodu T, jsou hlavními vrcholy elipsy k řezu.

4. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k.

5. Vedlejší vrcholy najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ procházející bodem S a rovnoběžky n elipsoidu ležící v promítací rovině přímky h.

6. Hlavní a vedlejší vrcholy P, Q a M, N elipsy k se promítnou do π jako koncové body sdružených průměrů P_1Q_1 a M_1N_1 elipsy k_1.

7. Hlavní a vedlejší osu elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.[2]

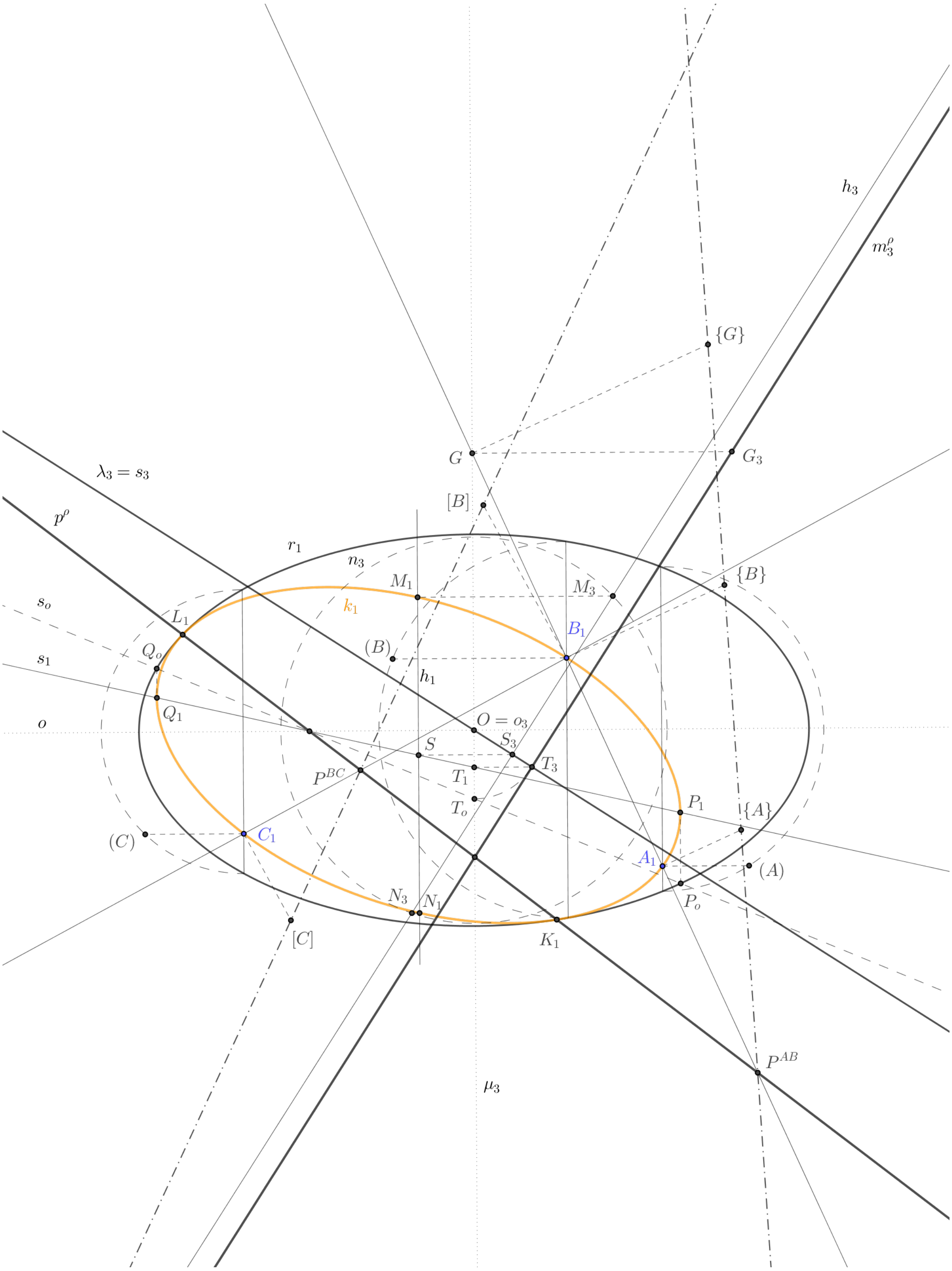
8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mají až na souměrnost podle průmětny π čtyři polohy a určují tak čtyři roviny řezu. Dostaneme čtyři různá řešení úlohy, z nichž nejvýše jedno má s r_1 imaginární dotyk.

[1] S rovinami π, μ pracujeme jako v Mongeově promítání.

[2] V obrázcích není pro přehlednost Rytzova konstrukce vyznačena.



h_3
m_3^ρ
$\{G\}$
G
G_3
$[B]$
$\lambda_3 = s_3$
p^ρ
r_1
n_3
M_1
M_3
$\{B\}$
s_o
k_1
L_1
B_1
(B)
Q_o
h_1
s_1
Q_1
o
$O = o_3$
S
S_3
T_3
P^{BC}
T_1
T_o
P_1
$\{A\}$
(C)
C_1
A_1
(A)
P_o
N_3
N_1
$[C]$
K_1
P^{AB}
μ_3

Obr. 3.1

3.2 Příklad 18

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech elipsy r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1.

Rozbor:

Elipsu r_1 považujeme za obrysovou elipsu rotačního elipsoidu $\mathcal{E}$ ležící v průmětně. Body A_1, B_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B elipsoidu $\mathcal{E}$ do průmětny, přímku c_1 za kolmý průmět tečny c elipsoidu. Rovina řezu ρ je určená body A, B a přímkou c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ. Stopa prochází stopníkem přímky AB. Kóty bodů A, B zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o. Stopník P^c najdeme ve sklopení přímky c, která je tečnou elipsy e a prochází bodem $R = AC \cap c$. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{AB}, P^c a protíná obrysovou elipsu r_1 plochy $\mathcal{E}$ v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace elipsoidu a procházející jeho středem O. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m_3^ρ roviny ρ pomocí bodu $G = AB \cap \mu$ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O$.

3. Sestrojíme přímku s jako průsečnici rovin λ a ρ. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s elipsoidem v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do π.

4. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k.

5. Vedlejší vrcholy najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ procházející bodem S a rovnoběžky n elipsoidu ležící v promítací rovině přímky h.

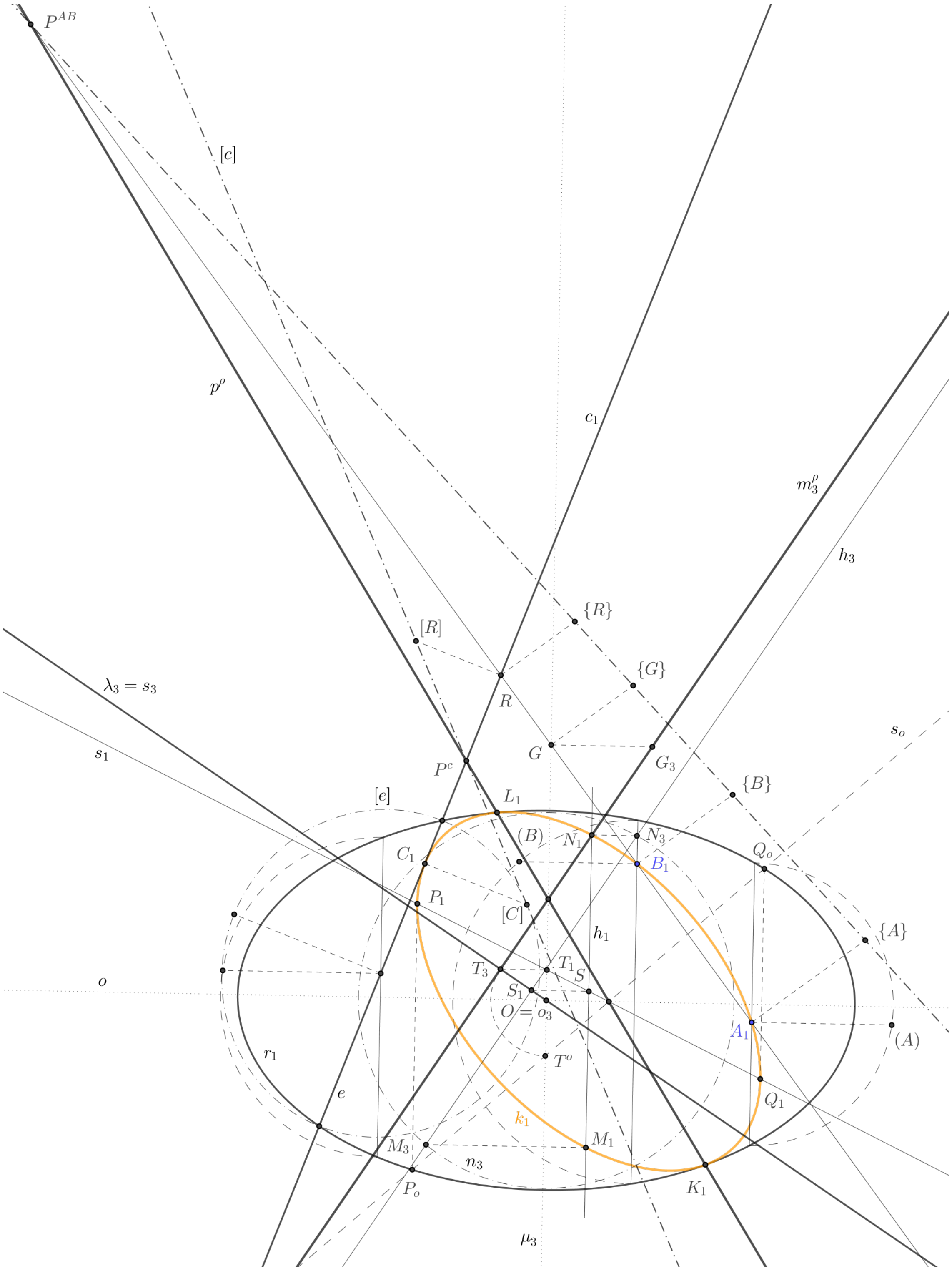
6. Hlavní a vedlejší vrcholy P, Q a M, N elipsy k se do průmětny promítnou jako koncové body sdružených průměrů P_1Q_1 a M_1N_1 elipsy k_1.

7. Osy elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Neuvažujeme-li souměrnost podle π mohou mít body A, B dvě polohy a v každé z nich lze vést z bodu R dvě tečny k elipse e. Úloha má čtyři řešení. Pokud stopa p^ρ neprotne elipsu r_1, dostaneme řešení s imaginárním dotykem k_1 a r_1.



P^{AB}
$[c]$
p^ρ
c_1
m_3^ρ
h_3
$\{R\}$
$[R]$
$\{G\}$
R
$\lambda_3 = s_3$
s_o
s_1
G
G_3
P^c
$\{B\}$
$[e]$
L_1
(B)
N_1
N_3
C_1
B_1
Q_o
P_1
$[C]$
h_1
$\{A\}$
T_3
T_1
S
o
S_1
$O = o_3$
A_1
(A)
r_1
T^o
Q_1
e
k_1
M_3
M_1
n_3
K_1
P_o
μ_3

Obr. 3.2

3.3 Příklad 19

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech elipsy r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1.

Rozbor:

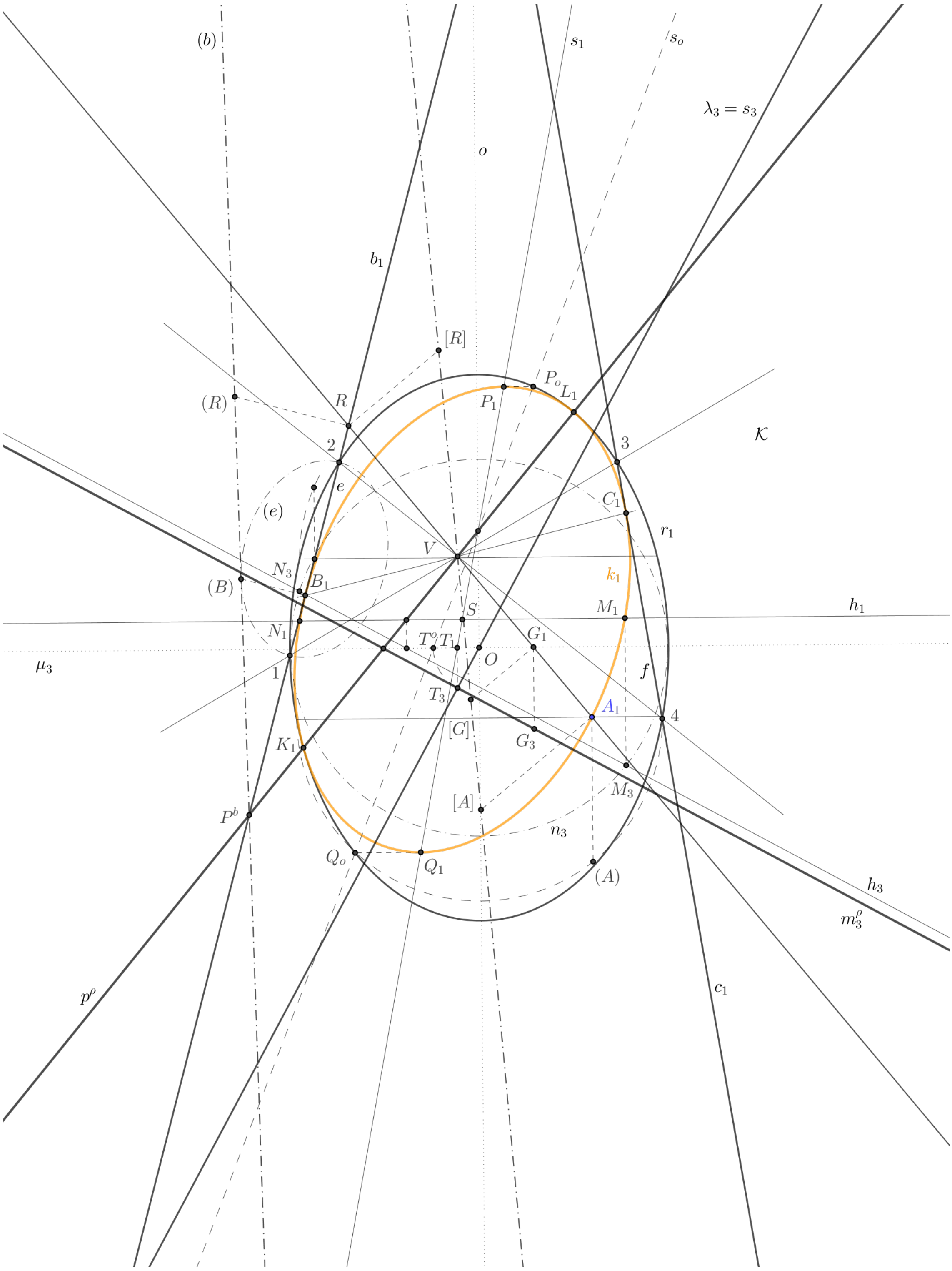
Elipsu r_1 považujeme za obrys rotačního elipsoidu, bod A_1 za průmět bodu A této plochy, přímky b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen b, c elipsoidu do průmětny π. Řezy elipsoidu promítacími rovinami přímek b, c jsou elipsy e, f, které leží ještě na kuželové ploše $\mathcal{K}$. Rovina řezu ρ prochází bodem A a dotýká se kuželové plochy $\mathcal{K}$.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol kuželové plochy $\mathcal{K}$, na které leží elipsy e, f. Elipsy se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $V = 13 \cap 24$. Stopa p^ρ bude procházet body V a P^b, který najdeme ve sklopení jako stopník tečny b elipsy e z bodu $R = VA \cap b$. Obrysovou elipsu protíná stopa p^ρ v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.
2. Sestrojíme body dotyku na tečnách b_1, c_1. Přímka b leží v ρ a je tečnou elipsy e, ve sklopení nalezneme bod dotyku B. Přímky b, c jsou tečny stejné kuželové plochy $\mathcal{K}$, body B, C budou ležet na téže povrchové přímce procházející vrcholem V.
3. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o elipsoidu a procházející jeho středem O. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m_3^ρ roviny ρ pomocí bodu $G = AV \cap \mu$ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O$.
4. Sestrojíme přímku s jako průsečnici rovin λ a ρ. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s elipsoidem v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do π.
5. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k.
6. Vedlejší vrcholy najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ procházející bodem S a rovnoběžky n elipsoidu ležící v promítací rovině přímky h.
7. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se zobrazí do průmětny π jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1. Osy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.
8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení pouze pokud bod A_1 neleží v některé eliptické úseči tvořené přímkami b_1, c_1. Elipsami e, f můžeme proložit dvě kuželové plochy. Z bodu A lze vést ke kuželovým plochám dvě tečné roviny. Úloha má tedy čtyři řešení, z nichž nejvýše dvě mají s obrysovou hyperbolou imaginární dotyk.


(b)
s_1
s_o
$\lambda_3 = s_3$
o
b_1
[R]
(R)
R
P_o
L_1
P_1
2
3
$\mathcal{K}$
e
(e)
C_1
r_1
V
N_3
B_1
(B)
k_1
M_1
h_1
S
N_1
T^{ρ}
T_1
G_1
O
μ_3
1
f
T_3
A_1
4
[G]
G_3
K_1
M_3
[A]
P^b
n_3
Q_o
Q_1
(A)
h_3
m_3^{ρ}
p^{ρ}
c_1

Obr. 3.3

3.4 Příklad 20

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech elipsy r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Elipsu r_1 považujeme za obrys elipsoidu $\mathcal{E}$. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této plochy do průmětny π. Promítací roviny těchto přímek protínají elipsoid v elipsách e, f, g, které leží také na kuželových plochách $\mathcal{K}$ o vrcholu V a $\mathcal{K}'$ o vrcholu V'. Rovina řezu ρ se dotýká obou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Sestojíme vrcholy kuželových ploch, na nichž leží elipsy e, f, g. Elipsy se zobrazí postupně do úseček $12, 34, 56$, vrchol $V = 14 \cap 23$, $V' = 15 \cap 26$. Stopa roviny ρ prochází body V, V' a obrysovou elipsu protíná v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.

2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka b leží v ρ a je tečnou elipsy f, ve sklopení nalezneme bod dotyku B. Přímky b, a jsou tečny téže kuželové plochy $\mathcal{K}$, body dotyku B, A tedy leží na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V. Totéž platí pro přímky a, c a body dotyku A, C povrchové přímky procházející vrcholem V'.

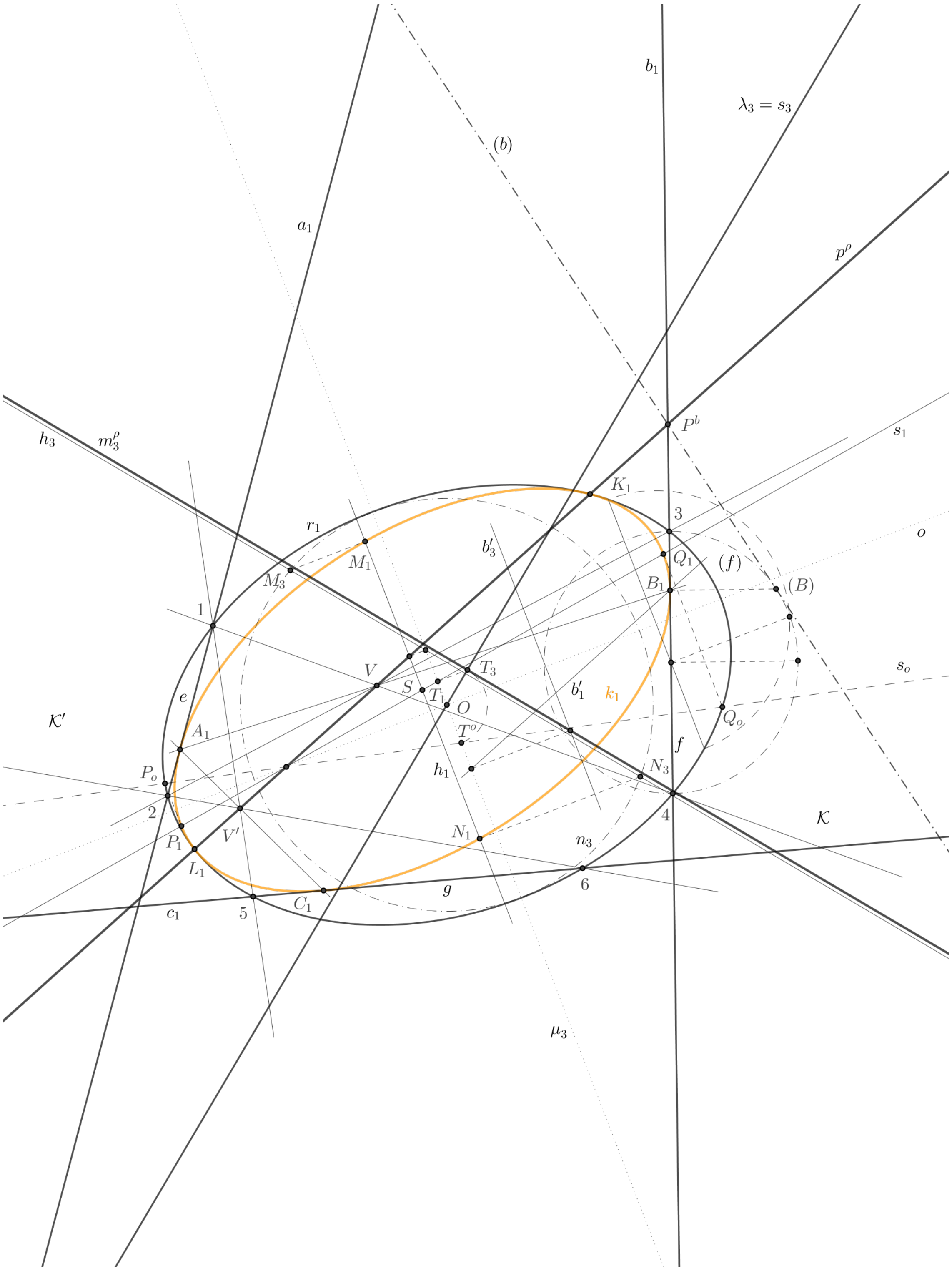
3. Rovinu souměrnosti řezu λ, spádovou přímku s s hlavními vrcholy P, Q elipsy k, střed elipsy S, hlavní přímku h s vedlejšími vrcholy M, N elipsy k sestrojíme jako v předešlých příkladech, viz 3.1.

4. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se do průmětny zobrazí jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1. Osy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

5. Elipsa k_1.

Diskuze:

Elipsami e, f prochází dvě kuželové plochy, stejně tak elipsami e, g. Vrcholy kuželových ploch procházejících elipsami f, g už leží na přímkách určených vrcholy předchozích kuželových ploch. Tyto přímky jsou čtyřmi stopami osmi rovin řezu, které jsou po dvou souměrné podle průmětny π. Existují tedy čtyři řešení úlohy. Nejvýše v jednom z nich neprotne stopa p^ρ elipsu r_1 a výsledná elipsa má se zadanou jen imaginární dotyk.



b_1
$\lambda_3 = s_3$
(b)
a_1
p^ρ
h_3
m_3^ρ
P^b
s_1
K_1
r_1
3
o
b_3'
M_1
Q_1
(f)
M_3
B_1
(B)
1
V
T_3
s_o
S
T_1
b_1'
k_1
e
O
$\mathcal{K}'$
A_1
T^o
Q_o
f
h_1
N_3
P_o
2
4
$\mathcal{K}$
P_1
V'
N_1
n_3
L_1
6
g
C_1
c_1
5
μ_3

Obr. 3.4

3.5 Příklad 21

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech elipsy r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1, přičemž bod $B_1 \in r_1$.

Rozbor:

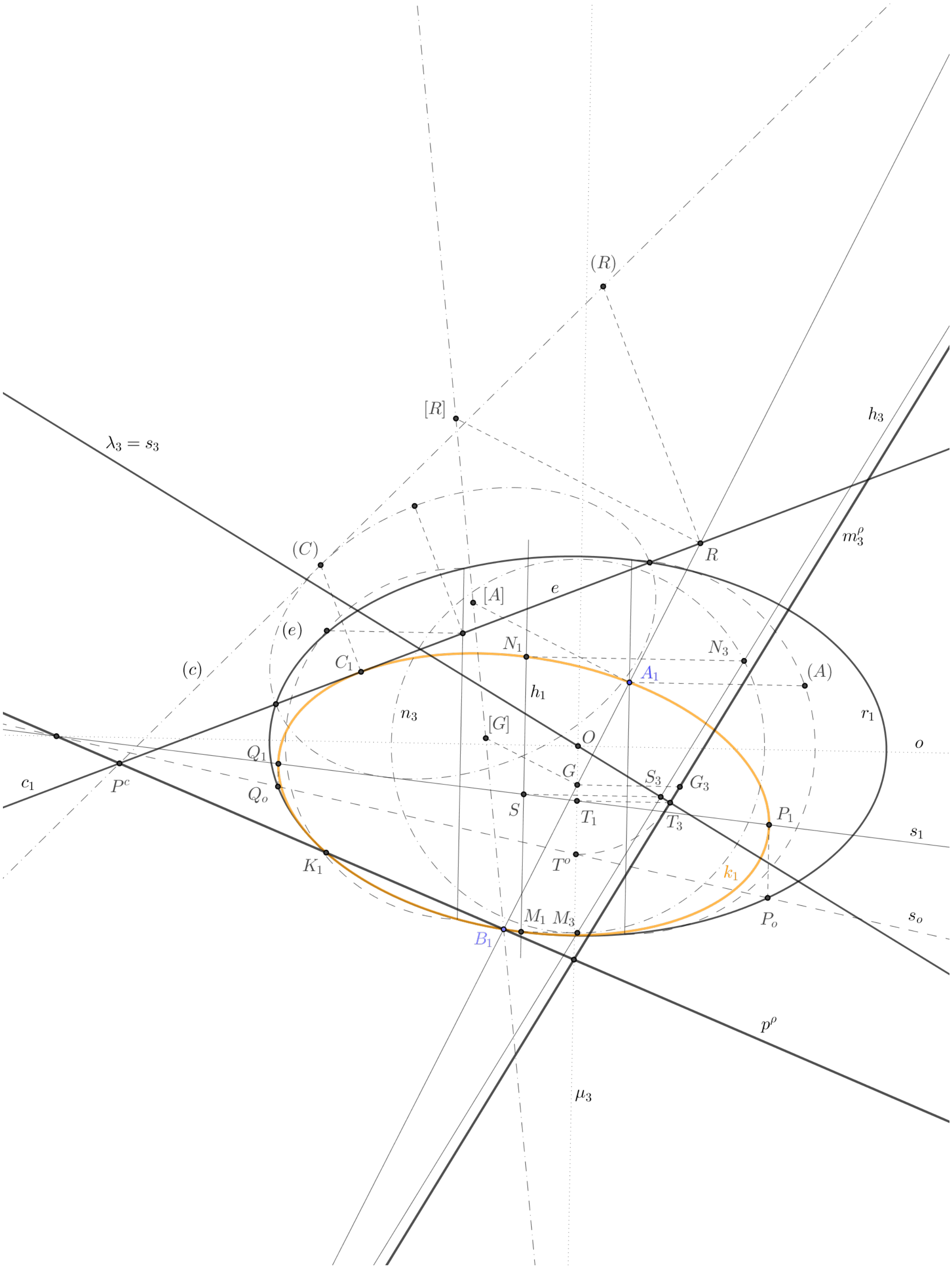
Elipsu r_1 pokládáme za obrys rotačního elipsoidu $\mathcal{E}$, bod B_1 je bodem obrysu, bod A_1 je kolmým průmětem bodu plochy $\mathcal{E}$ do π a přímku c_1 pokládáme za kolmý průmět tečny c elipsoidu $\mathcal{E}$. Rovina řezu ρ prochází body A, B a přímkou c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopník P^c přímky c pomocí bodu $R = c \cap AB$, jehož kótu najdeme ve sklopení přímky AB. Přímka c prochází bodem R a dotýká se elipsy e. Stopa p^ρ prochází bodem B, který leží v π, bodem P^c a obrysovou elipsu r_1 protíná v bodě B_1 a K_1 dotyku s k_1. Najdeme ještě bod C_1 dotyku k_1 a c_1.
2. Rovinu souměrnosti řezu λ, spádovou přímku s s hlavními vrcholy P, Q elipsy k, střed elipsy S, hlavní přímku h s vedlejšími vrcholy M, N elipsy k sestrojíme jako v předešlých příkladech, viz 3.1.
3. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se do průmětny promítají jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1. Osy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.
4. Elipsa k_1.

Diskuze:

Pokud bod B leží v průmětně, je přímka AB dána jednoznačně až na souměrnost podle průmětny π. Z bodu R lze vést k elipse e dvě tečny, úloha má tedy dvě řešení a žádné z nich nemá s r_1 imaginární dotyk.



(R)
[R]
h_3
$\lambda_3 = s_3$
m_3^ρ
R
(C)
[A]
e
(e)
N_1
N_3
C_1
(c)
A_1
(A)
h_1
n_3
r_1
[G]
O
o
Q_1
G
S_3
G_3
c_1
P^c
Q_o
S
T_1
T_3
P_1
s_1
T^o
K_1
k_1
M_1
M_3
P_o
s_o
B_1
p^ρ
μ_3

Obr. 3.5

Kapitola 4

Hyperboloid

Tato kapitola se zabývá konstrukcemi kuželoseček, které prochází danými body, dotýkají se daných přímek a ve dvou bodech se dotýkají křivky, která je obrysem rotačního hyperboloidu. Podle toho, kterou křivkou bude obrys hyperboloidu, rozdělíme příklady této kapitoly do dvou částí.

V příkladech 4.1 – 4.7 je obrysem hrdelní kružnice jednodílného hyperboloidu. Pro snadnější konstrukce volíme rovnoosý hyperboloid, jehož osa je kolmá k π, a který se zobrazí vně této kružnice. Dané přímky už nemusí být nutně sečnami obrysové kružnice. Zde jsou zahrnuta i slibovaná, v kapitole 2, zanedbaná řešení.

V příkladech 4.8 – 4.17 je obrysem hyperbola. Osa rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$ tedy leží v π. Řešení připouštíme jak vně, tak uvnitř obrysové hyperboly. K jeho nalezení použijeme buď jednodílný hyperboloid s osou rotace ve vedlejší ose obrysové hyperboly nebo dvojdílný hyperboloid s osou rotace v hlavní ose obrysové hyperboly.

Při řešení příkladů postupujeme takto. Kružnici, resp. hyperbolu pokládáme za obrys rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$ a umístíme ji do průmětny π. Zadané přímky považujeme za tečny plochy $\mathcal{H}$ a zadané body za body ležící na této ploše. Sestrojíme rovinu řezu ρ, která je určená danými body a přímkami, rovinu souměrnosti řezu λ a její průsečnici s s rovinou ρ, což je osa kuželosečky řezu. Podle následujícího odstavce určíme typ kuželosečky řezu a sestrojíme její průmět.

Řezem rotačního hyperboloidu rovinou, která s ním má společné aspoň dva body, mohou být všechny typy kuželoseček, včetně singulárních. V příkladech první části o typu kuželosečky řezu rozhodneme pomocí kuželové plochy, která má vrchol v libovolném zadaném bodě, osu rovnoběžnou s osou asymptotické kuželové plochy a její povrchové přímky mají odchylku od průmětny stejnou jako povrchové přímky asymptotické kuželové plochy, tedy 45°. Ve druhé části využíváme k určení typu řezu třetí průmětnu μ zavedenou podobně jako v kapitole 3.

V druhé části se nevyskytují příklady, v nichž zadané přímky neprotínají obrysovou hyperbolu. V takovém případě je vhodnější pomocí kolineace převést obrysovou hyperbolu na kružnici, čímž úlohu z druhé části kapitoly převedeme na úlohu z první části, kde jsou řešení uvedena.

V této kapitole se častěji vyskytuje situace, ve které řez hyperboloidu nemá s obrysovou křivkou žádné společné body. Říkáme, že body dotyku jsou imaginární.

4.1 Příklad 22

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici jednodílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$ ležící v průmětně π. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu $\mathcal{H}$ do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ jako spojnici stopníků P^{AB}, P^{AC} přímek AB, AC. Pro nalezení kót bodů využijeme konstrukce odvozené v [2]. Kóta například bodu A je $|A_1A_z|$, kde A_z je bodem dotyku tečny vedené z bodu A_1 ke kružnici r_1. Přímka p^ρ protíná kružnici r_1 v bodech dotyku K_1, L_1 s kuželosečkou k_1.

2. Určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme pomocnou kuželovou plochu, která protne průmětnu v kružnici k^B se středem B_1 a poloměrem $|B_1B_z|$. Podle společných bodů této kružnice a stopy roviny ρ rozhodneme o typu kuželosečky řezu. Stopa p^ρ a kružnice k^B se neprotínají, řezem je elipsa.

3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ, která je kolmá k ρ a prochází osou hyperboloidu o. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $R = AC \cap \lambda$.

4. Hlavní vrcholy P, Q elipsy řezu jsou průsečíky přímky s a hyperboloidu. Sestrojíme je ve sklopení jako průsečíky přímky (s) s meridiánem (e) hyperboloidu.[1] Střed S elipsy k je středem úsečky PQ.

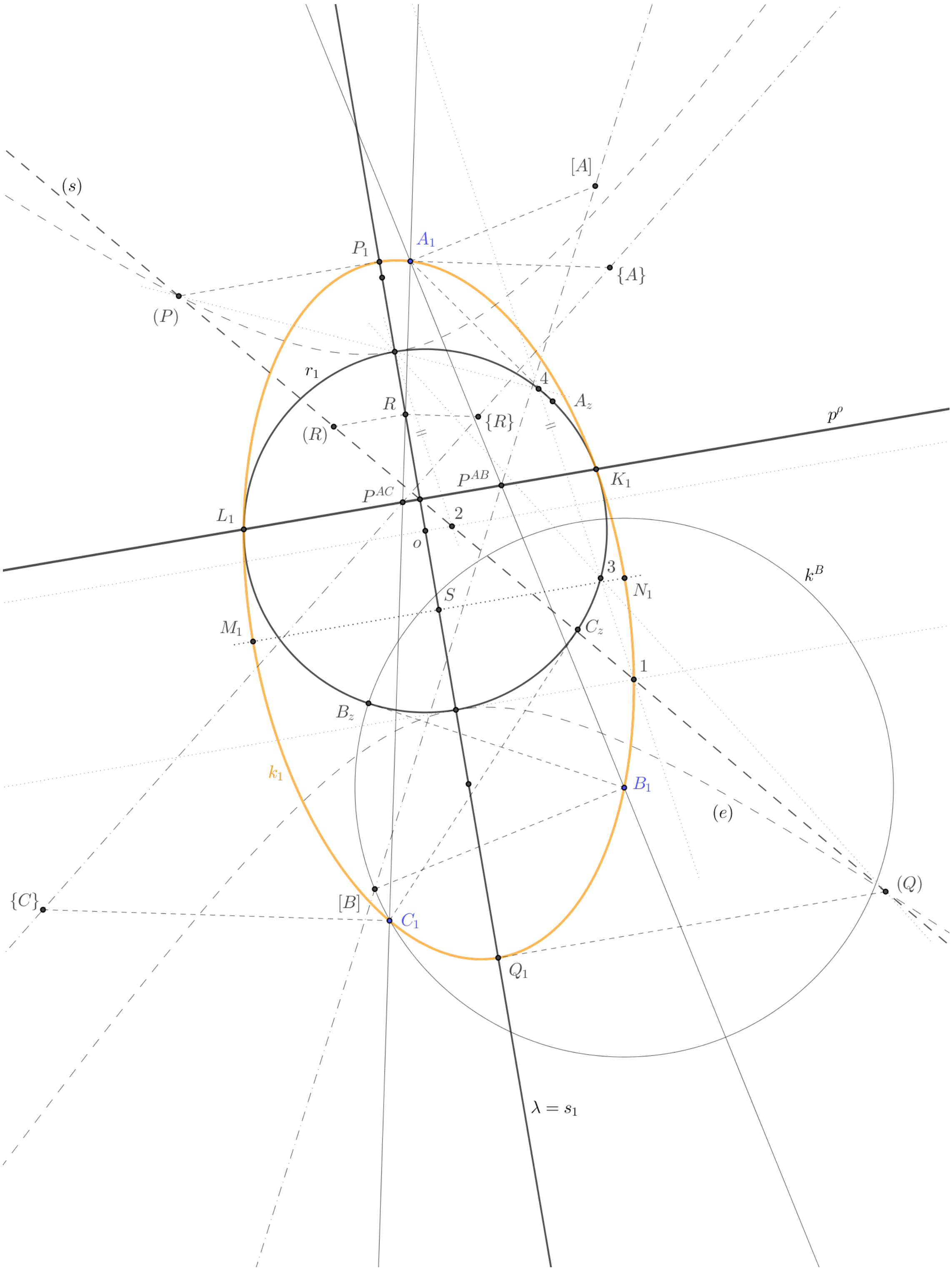
5. Vedlejší vrcholy M, N sestrojíme pomocí proužkové konstrukce elipsy.

6. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mají až na souměrnost podle průmětny π čtyři polohy a určují tak čtyři roviny řezu. Úloha má čtyři různá řešení. Může nastat situace, že všechna čtyři řešení budou mít s r_1 imaginární dotyk. Řešení bude singulární, pokud budou dva zadané body ležet na téže přímce hyperboloidu.

[1] Pro konstrukci využijeme kolineaci, ve které se hyperbola (e) zobrazí na kružnici r_1, v [2] je konstrukce uvedená pod označením K3. V obrázku je naznačena tečkovaně.


(s)
[A]
A_1
P_1
{A}
(P)
r_1
4
A_z
R
{R}
(R)
p^o
P^{AB}
K_1
P^{AC}
L_1
2
o
3
N_1
k^B
S
M_1
C_z
1
B_z
k_1
B_1
(e)
(Q)
{C}
[B]
C_1
Q_1
$\lambda = s_1$

Obr. 4.1

4.2 Příklad 23

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici jednodílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$ ležící v π. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu $\mathcal{H}$ do průmětny π a zároveň za body, kterými prochází rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ jako spojnici stopníků P^{AB}, P^{AC} přímek AB, AC. Kótu například bodu B získáme jako vzdálenost $|B_1B_z|$, kde B_z je bodem dotyku tečny vedené z bodu B_1 ke kružnici r_1. Přímka p^ρ protíná kružnici r_1 v bodech dotyku K_1, L_1 s kuželosečkou k_1.

2. Určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme pomocnou kuželovou plochu, která protne průmětnu v kružnici k^B se středem B_1 a poloměrem $|B_1B_z|$. Stopa p^ρ a kružnice k^B mají společné dva body $\overline{M}, \overline{N}$, řezem je hyperbola.

3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ, která je kolmá k ρ a prochází osou hyperboloidu o. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $R = AC \cap \lambda$.

4. Ve sklopení zjistíme, že přímka s protíná meridián e hyperboloidu v bodech P, Q, což jsou hlavní vrcholy hyperboly k.[2] Střed S hyperboly k je středem úsečky PQ.

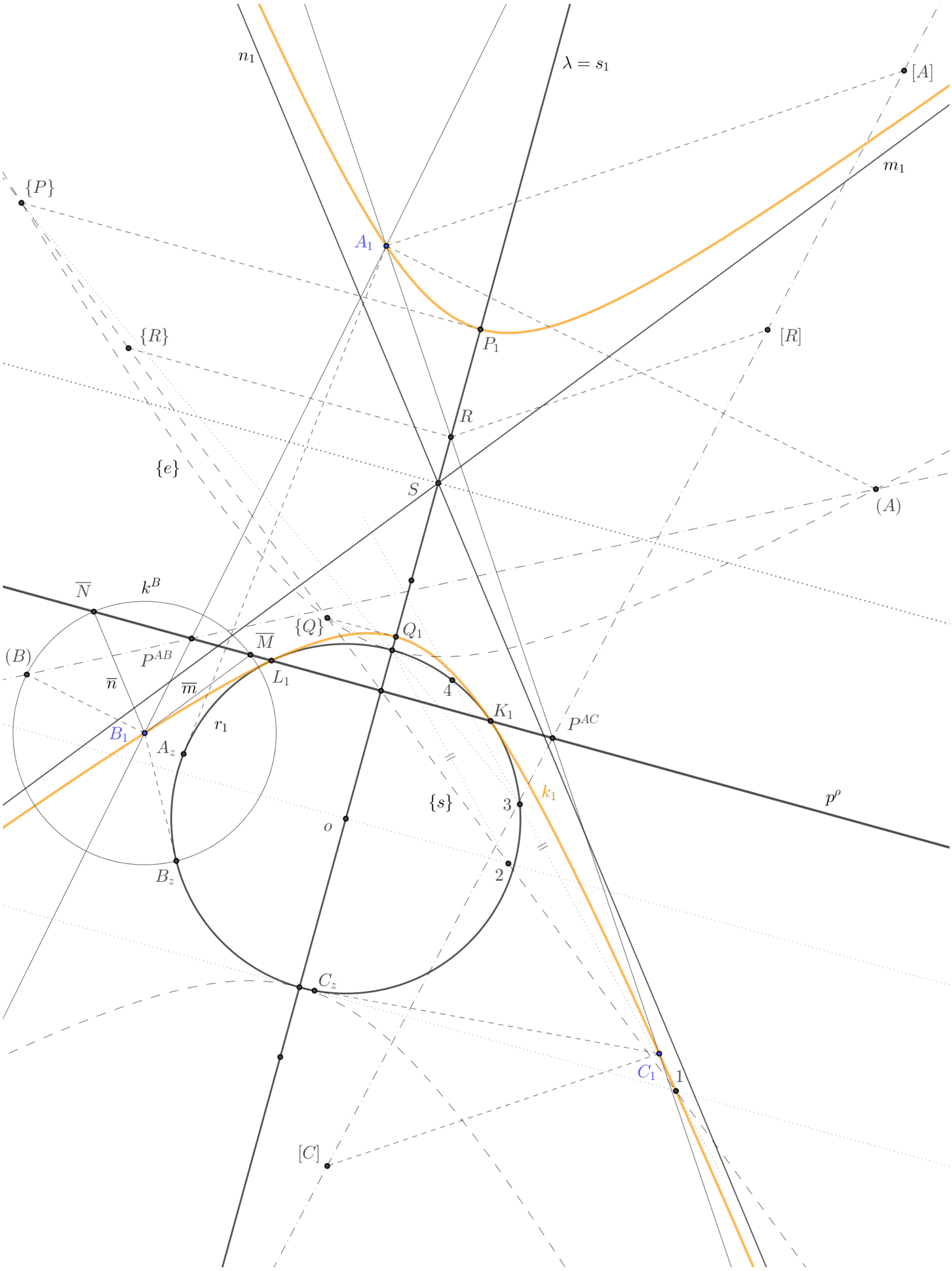
5. Sestrojíme asymptoty m, n hyperboly. Asymptoty prochází středem S a jejich směry určují přímky $\overline{m} = B\overline{M}, \overline{n} = B\overline{N}$ na pomocné kuželové ploše.

6. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Počet i kvalita řešení je stejná jako v předchozím příkladě 4.1.

[2]Ke konstrukci bodů $\{P\}, \{Q\}$ opět užijeme kolineaci mezi $\{e\}$ a r_1 , která je naznačena tečkovaně.



Obr. 4.2

4.3 Příklad 24

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici jednodílného rotačního hyperboloidu ležící v průmětně. Body A_1, B_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B hyperboloidu do π, přímku c_1 za průmět tečny c hyperboloidu $\mathcal{H}$. Přímkou c a body A, B je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ, která prochází stopníky P^{AB}, P^c přímek AB, c. Kóty bodů A, B najdeme jako v předcházejících příkladech pomocí A_z, B_z. Přímku c určíme jako tečnu z bodu $G = AB \cap c$ k hyperbole e řezu hyperboloidu $\mathcal{H}$ promítací rovinou přímky c a sestrojíme její stopník P^c. Přímka p^ρ protíná kružnici r_1 v bodech dotyku K_1, L_1 s kuželosečkou k_1.

2. Určíme typ kuželosečky k řezu. Kružnice k^B se středem B_1 a poloměrem $|B_1 B_z|$, která vznikne jako řez pomocné kuželové plochy průmětnou, má se stopou p^ρ společné dva body $\overline{M}, \overline{N}$. Řezem je hyperbola.

3. Sestrojíme rovinu souměrnosti řezu λ, která je kolmá k ρ a prochází osou o hyperboloidu. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $R = AB \cap \lambda$.

4. Ve sklopení zjistíme, že přímka s neprotíná meridián hyperboloidu f a je tedy vedlejší osou hyperboly řezu. Najdeme průsečíky I, II přímky s s asymptotami meridiánu f. Střed úsečky $\mathrm{I}\,\mathrm{II}$ je středem S hyperboly k.

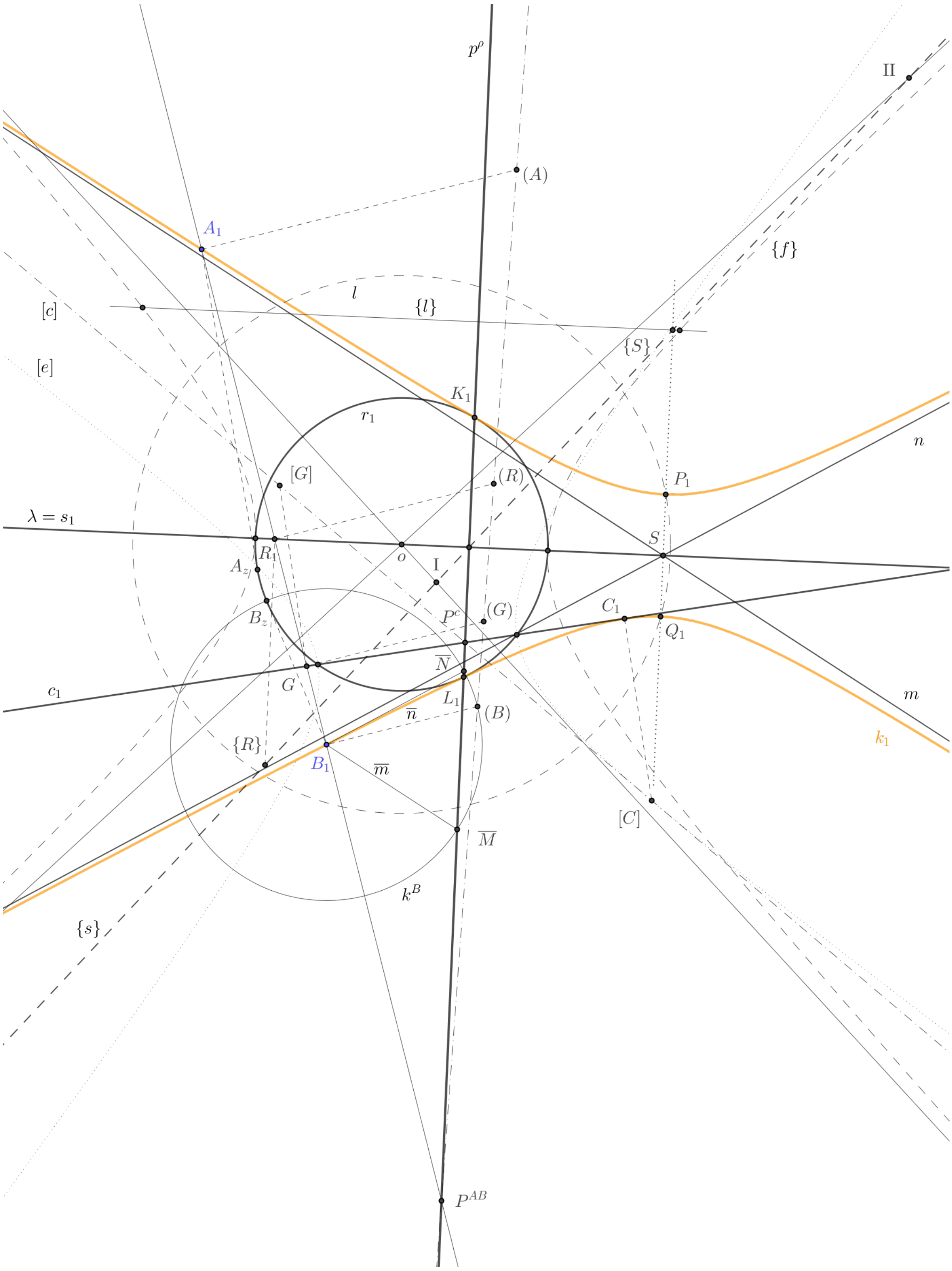
5. Hlavní osa je kolmá k vedlejší ose s a prochází středem S. Hlavní vrcholy P, Q sestrojíme jako průsečíky hlavní osy s rovnoběžkou l hyperboloidu, v jejíž rovině leží bod S.

6. Sestrojíme asymptoty m, n hyperboly. Asymptoty prochází středem S a jejich směry určují přímky $\overline{m} = B\overline{M}, \overline{n} = B\overline{N}$ pomocné kuželové plochy.

7. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Neuvažujeme-li souměrnost podle průmětny mohou mít body A, B vůči ní dvě různé polohy. Pokud bod $G = c \cap AB$ leží vně hyperboloidu $\mathcal{H}$, můžeme jím vést v každém případě dvě tečny k hyperbole e řezu $\mathcal{H}$ promítací rovinou přímky c a úloha má čtyři řešení, z nichž žádné nemá s obrysovou kružnicí imaginární dotyk. V opačném případě bodem G tečny vést tečny nelze a úloha řešení nemá.


p^ρ
II
(A)
A_1
$\{f\}$
$[c]$
l
$\{l\}$
$[e]$
$\{S\}$
K_1
r_1
n
$[G]$
(R)
P_1
$\lambda = s_1$
S
R_1
o
I
A_z
P^c
(G)
C_1
B_z
Q_1
$\overline{N}$
G
c_1
L_1
(B)
m
$\overline{n}$
k_1
$\{R\}$
B_1
$\overline{m}$
$[C]$
$\overline{M}$
k^B
$\{s\}$
P^{AB}

Obr. 4.3

4.4 Příklad 25

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrysovou kružnici jednodílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$, která leží v průmětně π. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této plochy do průmětny π. Promítací roviny přímek a, b, c protínají hyperboloid v hyperbolách e, f, g. Hyperboly e, g leží na kuželové ploše $\mathcal{K}$ o vrcholu V, hyperboly f, g leží na kuželové ploše $\mathcal{K}'$ o vrcholu V'. Rovina řezu ρ je společnou tečnou rovinou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrcholy kuželových ploch, na nichž leží hyperboly e, f, g. Každá z hyperbol se zobrazí do dvou polopřímek,[3] s krajními body $1, 2$, resp. $3, 4$, resp. $5, 6$. Vrchol $V = 14 \cap 23$, $V' = 35 \cap 46$. Stopa roviny ρ prochází body V, V' a obrysovou kružnici protíná v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka c leží v ρ a je tečnou hyperboly g, ve sklopení nalezneme bod dotyku C. Přímky c, a jsou tečny téže kuželové plochy $\mathcal{K}$, body dotyku C, A leží na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V. Podobně přímky c, b a body dotyku C, B ležící na povrchové přímce procházející vrcholem V'.

3. Určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme pomocnou kuželovou plochu, která protne průmětnu v kružnici k^C se středem C_1 a poloměrem $|C_1(C)|$. Stopa p^ρ a kružnice k^C mají dva společné body $\overline{M}, \overline{N}$, řezem je hyperbola.

4. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k ρ a prochází osou hyperboloidu o. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $G = c \cap \lambda$.

5. Ve sklopení zjistíme, že přímka s neprotíná meridián hyperboloidu h a je tedy vedlejší osou hyperboly řezu. Najdeme průsečíky I, II přímky s s asymptotami meridiánu h. Střed úsečky I II je středem S hyperboly k.

6. Hlavní osa je kolmá k vedlejší ose s a prochází středem S. Hlavní vrcholy P, Q sestrojíme jako průsečíky hlavní osy s rovnoběžkou l hyperboloidu, v jejíž rovině leží bod S.

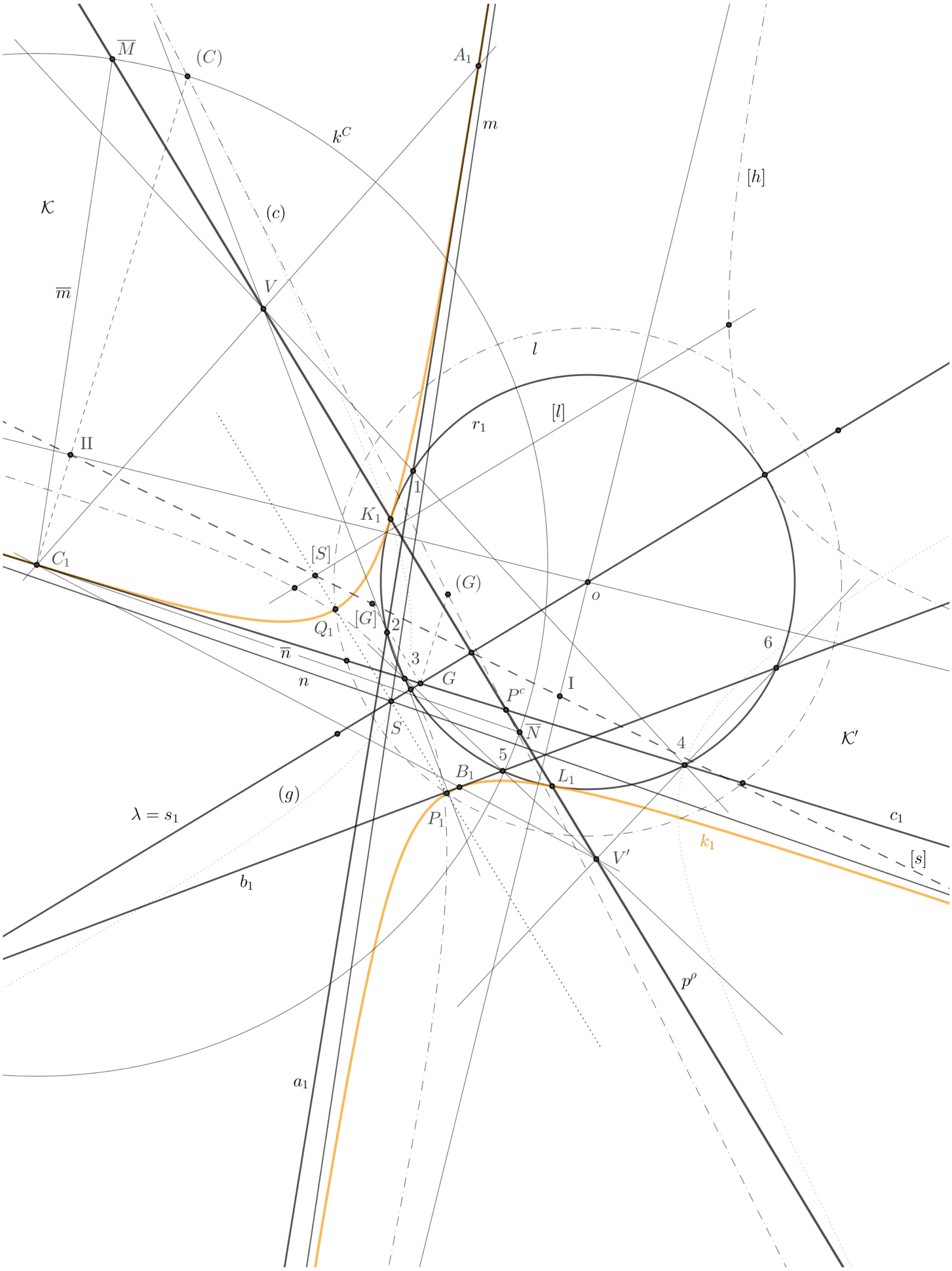
7. Sestrojíme asymptoty m, n hyperboly. Asymptoty prochází středem S a jejich směry určují přímky $\overline{m} = B\overline{M}, \overline{n} = B\overline{N}$ na pomocné kuželové plochy.

8. Hyperbola k_1.

[3]Tj. do vnějších bodů přímek a_1, b_1, c_1 vzhledem ke kružnici r_1.

Diskuze:

V tomto případě zadání přímek a, b, c můžeme získat řešení jak uvnitř, tak vně obrysové kružnice. Hyperbolami e, f prochází dvě kuželové plochy, stejně jako hyperbolami f, g. Jejich vrcholy tvoří stopy osmi rovin řezu, z nichž jsou vždy dvě souměrné podle π. Z možných čtyř řešení leží pouze dvě vně kružnice r_1 a lze je tedy sestrojit jako řez na rotačním hyperboloidu. Obě řešení mají s obrysovou kružnicí reálný dotyk.


$\overline{M}$
(C)
A_1
k^C
m
$\mathcal{K}$
(c)
$[h]$
V
$\overline{m}$
l
$[l]$
r_1
II
1
K_1
$[S]$
C_1
(G)
o
$[G]$
2
Q_1
$\overline{n}$
3
G
I
n
P^c
6
$\overline{N}$
S
$\mathcal{K}'$
4
5
B_1
L_1
(g)
$\lambda = s_1$
P_1
c_1
k_1
$[s]$
V'
b_1
p^o
a_1

Obr. 4.4

4.5 Příklad 26

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu. Bod A_1 je průmětem bodu A plochy, přímky b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen b, c hyperboloidu do průmětny π. Rovina řezu ρ je určena bodem A a přímkami b, c.

Konstrukce:

1. Přímky b_1, c_1 neprotínají obrysovou kružnici r_1, nemůžeme tedy pomocí jejich průsečíků sestrojit vrcholy kuželových ploch, na kterých leží řezy hyperboloidu promítacími rovinami těchto přímek. Použijeme projektivní vlastnosti a prostorovou kolineci.[4] Vrchol V leží na poláře p' bodu $\mathrm{I}_1 = b_1 \cap c_1$ vzhledem ke kružnici r_1 a na spojnici odpovídajících si bodů v prostorové kolineaci, ve které se na sebe zobrazí hyperboly e, f. Osa o' této kolineace je průsečnice promítacích rovin přímek b, c a střed je hledaný vrchol V. Sestrojíme odpovídající si tečny k hyperbolám, jejichž body dotyku budou ležet na přímce procházející středem kolineace. U hyperboly f zvolíme asymptotu i, z jejího bodu I na ose o' vedeme ve sklopení tečnu t k hyperbole e. Bodem dotyku T stačí vést rovnoběžku s i, její průsečík s polárou p' je vrchol V.

2. Stopa p^ρ roviny ρ prochází vrcholem V a stopníkem P^b přímky b. Přímku b určíme ve sklopení jako tečnu z bodu $R = AV \cap b$ k hyperbole e. Stopa p^ρ protíná kružnici r_1 v bodech dotyku K_1, L_1 s kuželosečkou k_1.

3. Sestrojíme body dotyku kuželosečky k_1 a přímek b_1, c_1. Bod B je bodem dotyku tečny b s hyperbolou e. Přímky b, c jsou tečny stejné kuželové plochy s vrcholem V a body B, C tedy leží na téže povrchové přímce.

4. Určíme typ kuželosečky k řezu. Sestrojíme pomocnou kuželovou plochu, která protne průmětnu v kružnici k^A se středem A_1 a poloměrem $|A_1A_z|$. Stopa p^ρ a kružnice k^A se neprotínají, řezem je elipsa.

5. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k ρ a prochází osou hyperboloidu o. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $G = AV \cap \lambda$.

6. Hlavní vrcholy P, Q elipsy řezu jsou průsečíky přímky s a hyperboloidu. Sestrojíme je ve sklopení jako průsečíky přímky (s) s meridiánem (g) hyperboloidu.[5] Střed S elipsy k je středem úsečky PQ. Vedlejší vrcholy M, N sestrojíme pomocí proužkové konstrukce elipsy.

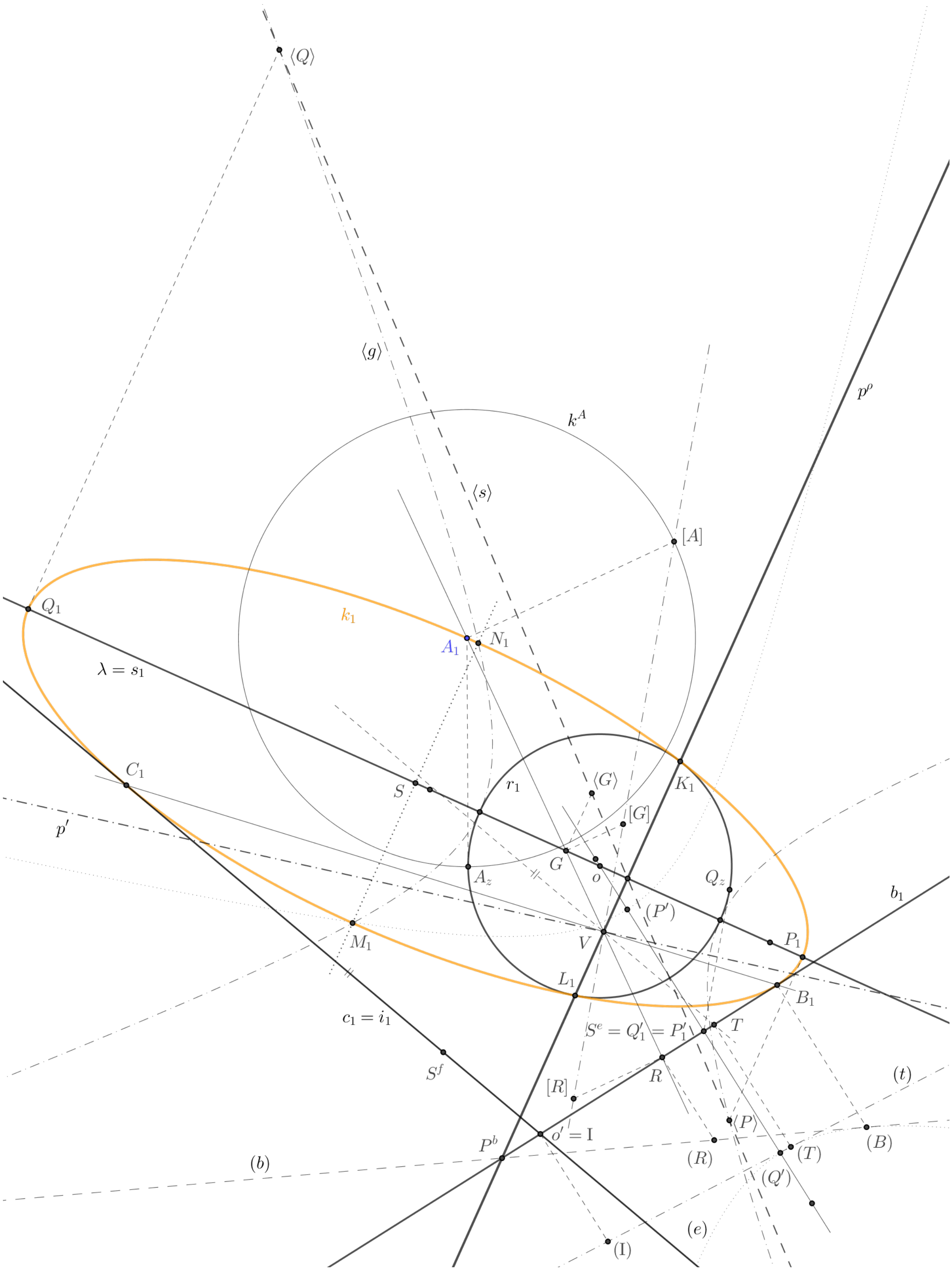
7. Elipsa k_1.

[4] Konstrukce je podrobně objasněná v [3].

[5] Opět využijeme kolineaci, viz příklad 4.1, konstrukce v obrázku není vyznačena.

Diskuze:

Hyperbolami e, f lze proložit dvě kuželové plochy. Jestliže bod A_1 leží ve dvojici vrcholových úhlů, v níž leží i obrysová kružnice, můžeme jím vést k těmto plochám dvě tečné roviny a úloha má čtyři řešení. Nejvýše dvě z nich mohou mít s kružnicí r_1 imaginární dotyk. Leží-li bod A_1 ve druhé dvojici vrcholových úhlů, pak úloha řešení nemá.



$\langle Q\rangle$
$\langle g\rangle$
k^A
$\langle s\rangle$
$[A]$
p^o
Q_1
k_1
A_1
N_1
$\lambda = s_1$
C_1
S
r_1
$\langle G\rangle$
K_1
$[G]$
p'
G
A_z
o
Q_z
(P')
V
M_1
P_1
b_1
L_1
B_1
$c_1 = i_1$
$S^e = Q'_1 = P'_1$
T
S^f
$[R]$
R
(t)
(P)
(B)
$o' = \mathrm{I}$
P^b
(T)
(R)
(b)
(Q')
(e)
(I)

Obr. 4.5

4.6 Příklad 27

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Kružnici r_1 považujeme za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této plochy do π. Promítací roviny těchto přímek protínají hyperboloid v hyperbolách e, f, g, které leží také dvou na kuželových plochách o vrcholech V^1 a V^2. Rovina řezu ρ se dotýká obou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Žádná z přímek a_1, b_1, c_1 neprotíná r_1, použijeme projektivní vlastnosti a prostorovou kolineaci. Vrchol V^1 kuželové plochy, na které leží hyperboly f, g leží na poláře p^1 bodu $\mathrm{I}_1 = b_1 \cap c_1$ vzhledem k r_1 a je zároveň středem kolineace mezi hyperbolami f, g. Vrchol V^2 kuželové plochy, na které leží hyperboly e, g leží na poláře p^2 bodu $\mathrm{II}_1 = a_1 \cap c_1$ vzhledem k r_1 a je středem kolineace, ve které se na sebe zobrazí hyperboly e, g. Dále pokračujeme, pro každý vrchol zvlášť, jako v předchozím příkladě 4.5.

2. Stopa p^ρ roviny ρ prochází vrcholy V^1, V^2 a kružnici r_1 protíná v bodech dotyku K_1, L_1 s kuželosečkou k_1.

3. Sestrojíme body dotyku k_1 a tečen a_1, b_1, c_1. Ve sklopení najdeme bod dotyku A přímky a s hyperbolou e. Přímka c se dotýká téže kuželové plochy jako přímka a, bod C tedy leží na povrchové přímce procházející bodem A a vrcholem V^2 této plochy. Stejně tak se přímky b, c dotýkají téže kuželové plochy s vrcholem V^1 a bod B tedy leží na povrchové přímce CV^1.

4. Určíme typ kuželosečky k řezu. Kružnice k^A se středem A_1 a poloměrem $|A_1[A]|$, která je řezem pomocné kuželové plochy průmětnou, nemá se stopou p^ρ žádné společné body. Řezem je elipsa.

5. Rovina souměrnosti řezu λ je kolmá k ρ a prochází osou hyperboloidu o. Průsečnice $s = \lambda \cap \rho$ je osou řezu, sestrojíme ji pomocí bodu $G = a \cap \lambda$.

6. Hlavní vrcholy P, Q elipsy řezu jsou průsečíky přímky s s hyperboloidem, které sestrojíme ve sklopení jako průsečíky $\langle s \rangle$ s meridiánem $\langle h \rangle$ hyperboloidu.[6] Střed S elipsy k je středem úsečky PQ. Vedlejší vrcholy M, N sestrojíme pomocí proužkové konstrukce elipsy.

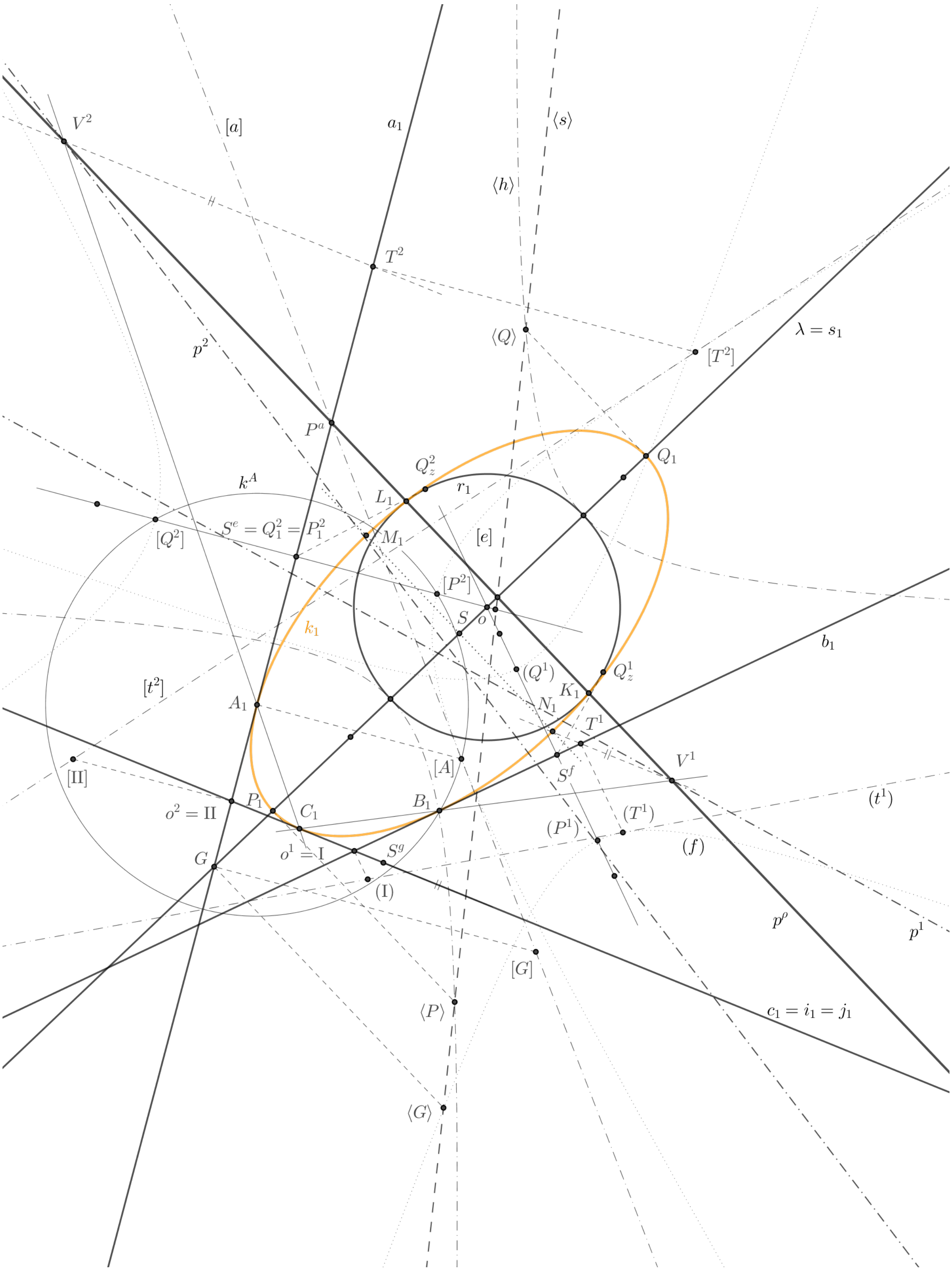
7. Elipsa k_1.

---

[6] Opět užitím kolineace mezi $\langle h \rangle$ a r_1, která není v obrázku znázorněna.

Diskuze:

Hyperbolami e, g prochází dvě kuželové plochy, stejně tak hyperbolami f, g. Vrcholy kuželových ploch procházejících hyperbolami e, f už leží na přímkách určených vrcholy předchozích kuželových ploch. Tyto přímky jsou stopami čtyř rovin řezu, neuvažujeme-li souměrnost podle průmětny π. Existují tedy čtyři řešení úlohy. Opět může nastat situace, že stopa p^ρ neprotne obrysovou kružnici a kuželosečka k_1 má s kružnicí r_1 imaginární dotyk.


V^2
$[a]$
a_1
$\langle s \rangle$
$\langle h \rangle$
T^2
$\langle Q \rangle$
$[T^2]$
$\lambda = s_1$
p^2
P^a
Q_1
Q_z^2
k^A
L_1
r_1
$S^e = Q_1^2 = P_1^2$
$[Q^2]$
M_1
$[e]$
$[P^2]$
S
o
k_1
b_1
(Q^1)
Q_z^1
$[t^2]$
A_1
K_1
N_1
T^1
$[A]$
V^1
S^f
$[\mathrm{II}]$
P_1
B_1
(t^1)
$o^2 = \mathrm{II}$
C_1
(T^1)
(P^1)
(f)
G
$o^1 = \mathrm{I}$
S^g
(I)
p^ρ
p^1
$[G]$
$\langle P \rangle$
$c_1 = i_1 = j_1$
$\langle G \rangle$

Obr. 4.6

4.7 Příklad 28

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech kružnice r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

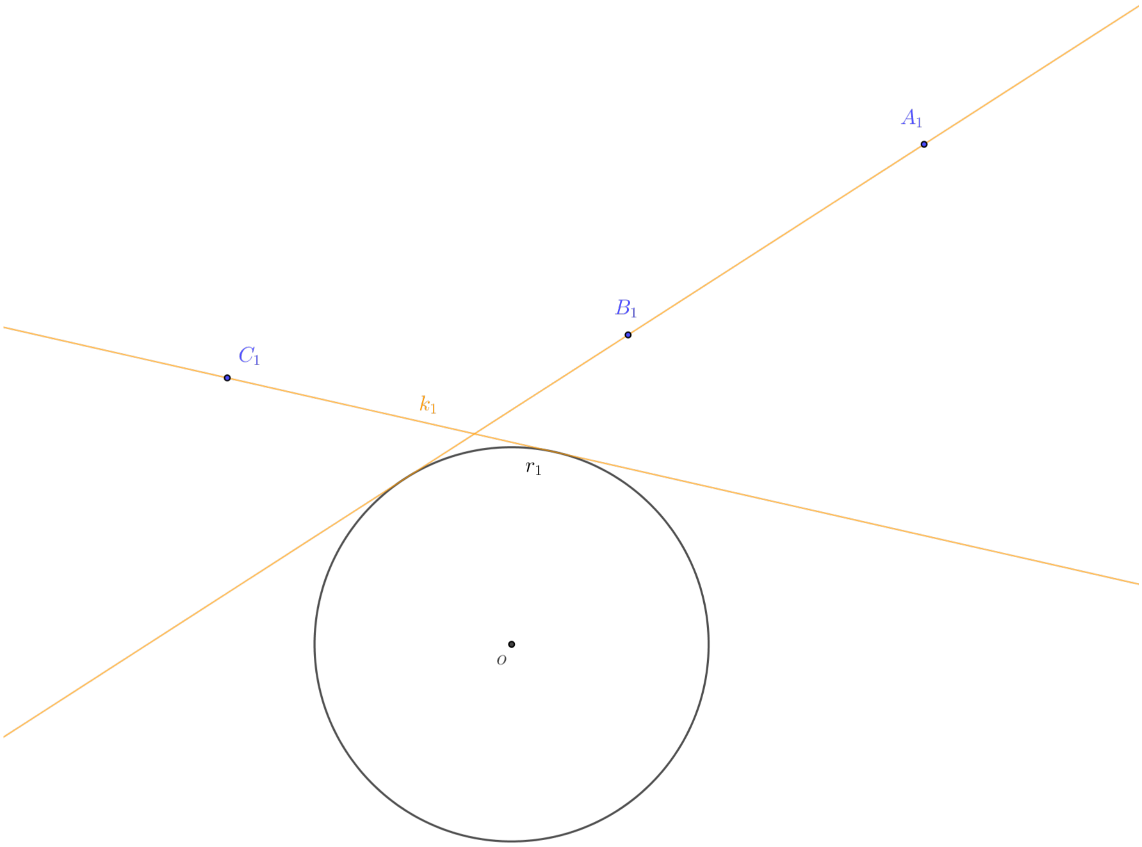
Kružnici r_1 pokládáme za obrysovou kružnici jednodílného rotačního hyperboloidu. Body A_1, B_1, C_1 pokládáme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu do průmětny π. Těmito body je rovina řezu ρ určena.

Konstrukce:

1. Body A_1, B_1 prochází přímka, která je tečnou r_1, je to tedy přímka hyperboloidu $\mathcal{H}$.
2. Řešení bude singulární, druhou přímku získáme jako tečnu vedenou bodem C_1 ke kružnici r_1.
3. Dvojice přímek k_1.

Diskuze:

Z bodu C_1 lze ke kružnici r_1 vést dvě tečny. Existují dvě řešení úlohy. Pokud je vzdálenost přímky A_1B_1 a bodu C_1 rovna průměru kružnice r_1, jedno z řešení bude dvojicí rovnoběžek. Jinak získáme dvojice různoběžek.



Obr. 4.7

4.8 Příklad 29

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Body A_1, B_1, C_1 leží vně hyperboly r_1, považujeme ji za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$. Dané body považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu do průmětny π, které zároveň určují rovinu řezu ρ.

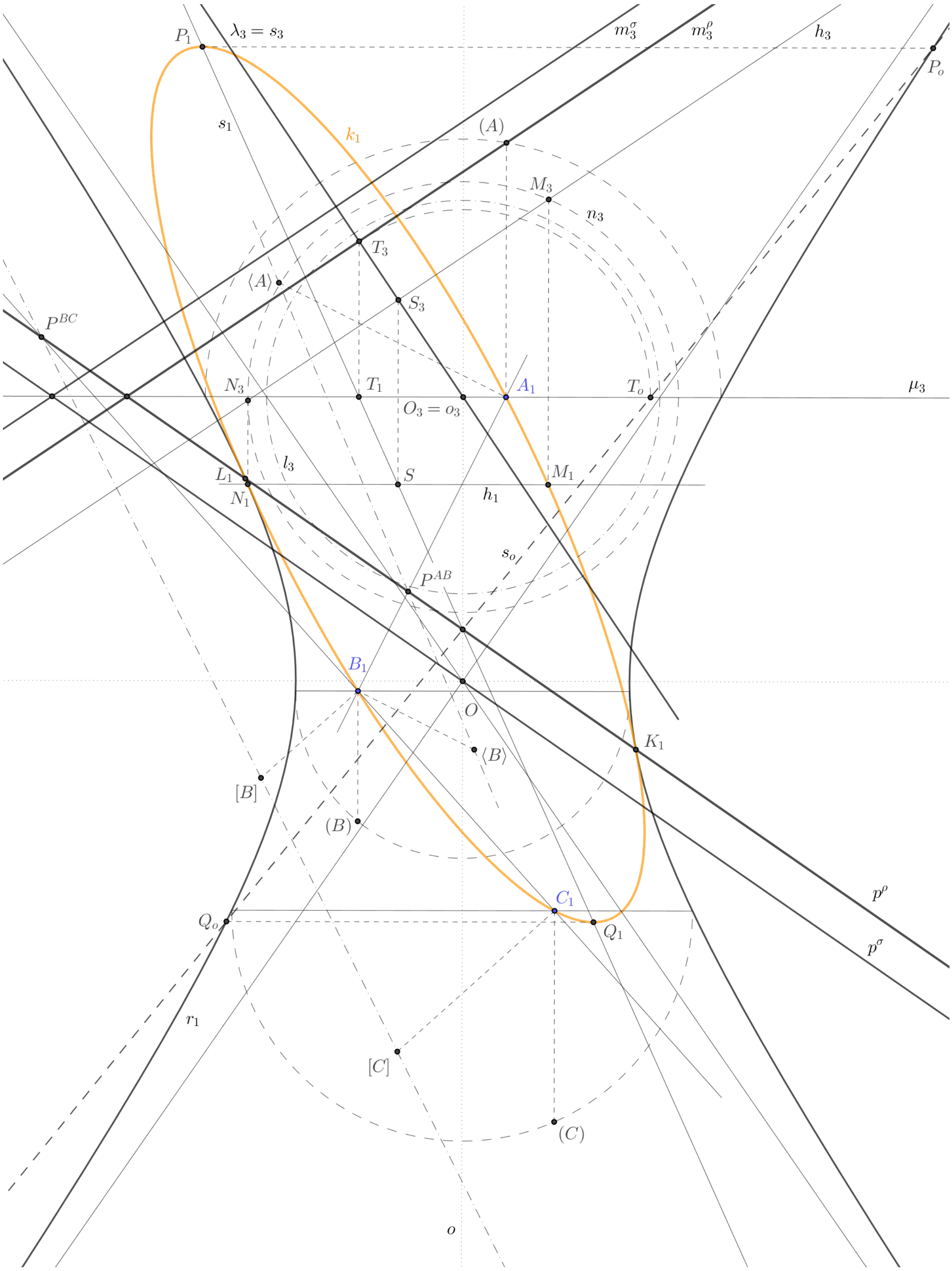
Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ, která prochází stopníky přímek AB, BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o hyperboloidu. Stopa p^ρ protíná obrysovou hyperbolu v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.
2. Bodem A proložíme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace hyperboloidu, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem hyperboloidu O vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l. Podle počtu společných bodů kružnice l a stopy m^σ rozhodneme o typu řezu. Stopa s kružnicí se neprotínají, řezem je elipsa.
3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.
4. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do průmětny π.
5. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n hyperboloidu ležící v promítací rovině přímky h.
6. Hlavní a vedlejší vrcholy P, Q a M, N elipsy k se do průmětny zobrazí jako koncové body sdružených průměrů P_1Q_1 a M_1N_1 elipsy k_1.
7. Osy elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.[7]
8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení, pokud všechny body A_1, B_1, C_1 leží na stejné rotační ploše určené v prostoru hyperbolou r_1, tedy všechny body leží uvnitř, resp. vně dané hyperboly. Body A, B, C, které neleží v π mohou mít vůči průmětně osm různých poloh. Ze souměrnosti podle průmětny však plyne, že vždy dva případy tvoří jedno řešení. Úloha má celkem čtyři řešení, z nichž může mít některé imaginární dotyk s obrysovou hyperbolou r_1.

[7] V obrázcích nebude vyznačována.



P_1
$\lambda_3 = s_3$
m_3^σ
m_3^ρ
h_3
P_o
s_1
k_1
(A)
M_3
n_3
T_3
$\langle A \rangle$
S_3
P^{BC}
N_3
T_1
A_1
T_o
μ_3
$O_3 = o_3$
L_1
l_3
S
M_1
N_1
h_1
s_o
P^{AB}
B_1
O
K_1
$\langle B \rangle$
$[B]$
(B)
p^ρ
C_1
Q_o
Q_1
p^σ
r_1
$[C]$
(C)
o

Obr. 4.8

4.9 Příklad 30

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Body A_1, B_1, C_1 leží uvnitř hyperboly r_1, považujeme ji za obrys dvojdílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$. Dané body považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu do průmětny π, kterými je zároveň určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ, která prochází stopníky přímek AB, AC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o hyperboloidu. Stopa p^ρ protíná obrysovou hyperbolu v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Bodem B proložíme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace hyperboloidu, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem hyperboloidu O vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l. Podle počtu společných bodů této kružnice a stopy roviny σ rozhodneme o typu řezu. Stopa m^σ protíná kružnici l ve dvou bodech $\overline{M}, \overline{N}$, řezem je hyperbola.

3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.

4. Hlavní vrcholy hyperboly k sestrojíme jako průsečíky U, V přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do průmětny π.

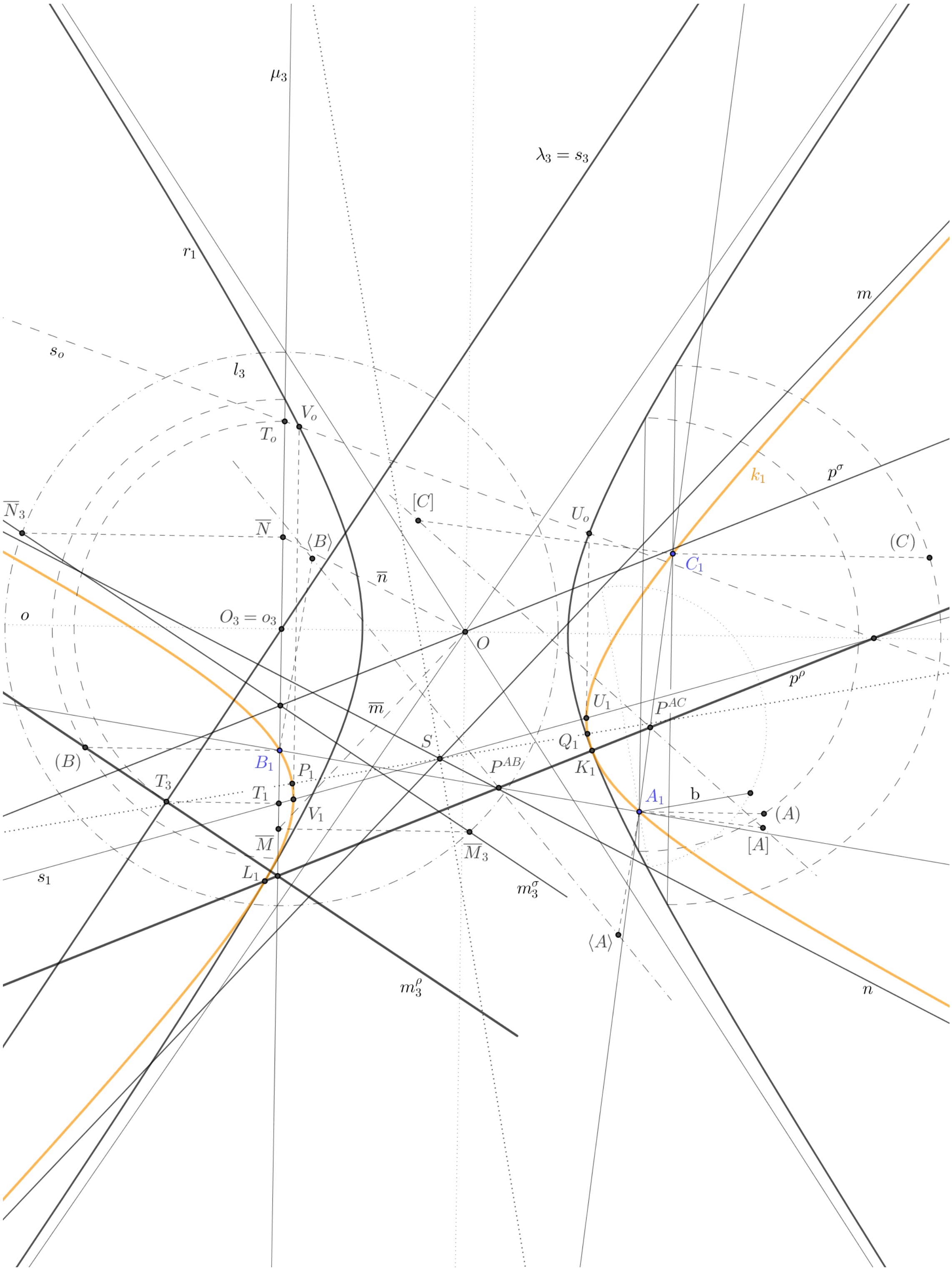
5. Střed S úsečky UV je středem hyperboly k. Sestrojíme asymptoty hyperboly k_1 jako rovnoběžky s přímkami $\overline{m} = O\overline{M}, \overline{n} = O\overline{N}$, které určují jejich směry.

6. Osy hyperboly k_1 půlí úhly asymptot. Zjistíme délku vedlejší poloosy b.

7. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení, pokud všechny body A_1, B_1, C_1 leží na stejné rotační ploše určené hyperbolou r_1, tedy všechny body leží uvnitř, resp. vně dané hyperboly. Body A, B, C, které neleží v π mohou mít vůči průmětně osm různých poloh. Ze souměrnosti podle průmětny však plyne, že vždy dva případy tvoří jedno řešení. Úloha má čtyři řešení, z nichž některé může mít s obrysovou hyperbolou imaginární dotyk.


μ_3
$\lambda_3 = s_3$
r_1
m
s_o
l_3
V_o
T_o
k_1
p^σ
$[C]$
U_o
$\overline{N}_3$
$\overline{N}$
$\langle B\rangle$
(C)
C_1
$\overline{n}$
o
$O_3 = o_3$
O
p^ρ
U_1
P^{AC}
$\overline{m}$
Q_1
S
(B)
B_1
P^{AB}
K_1
T_3
P_1
T_1
A_1
b
(A)
V_1
$[A]$
$\overline{M}$
$\overline{M}_3$
s_1
L_1
m_3^σ
$\langle A\rangle$
m_3^ρ
n

Obr. 4.9

4.10 Příklad 31

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1.

Rozbor:

Body A_1, B_1 leží vně hyperboly r_1, považujeme ji tedy za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$. Dané body považujeme za kolmé průměty bodů A, B, přímku c_1 za kolmý průmět tečny c hyperboloidu do průmětny π. Rovina řezu ρ je určena body A, B a přímkou c.

Konstrukce:

1. Stopa p^ρ roviny ρ prochází stopníky přímek AB a c. Stopník P^{AB} sestrojíme pomocí kót bodů A, B, které najdeme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o hyperboloidu. Přímka c je tečnou elipsy e, ve které protíná promítací rovina této přímky hyperboloid $\mathcal{H}$. Sestrojíme ji ve sklopení pomocí bodu $G = AB \cap c$ a najdeme stopník P^c. Stopa p^ρ protíná obrysovou hyperbolu v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Bodem A proložíme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace hyperboloidu, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem hyperboloidu O vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l. Stopa m^σ s kružnicí l nemá žádný společný bod, řezem je elipsa.

3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.

4. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do průmětny π.

5. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n hyperboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

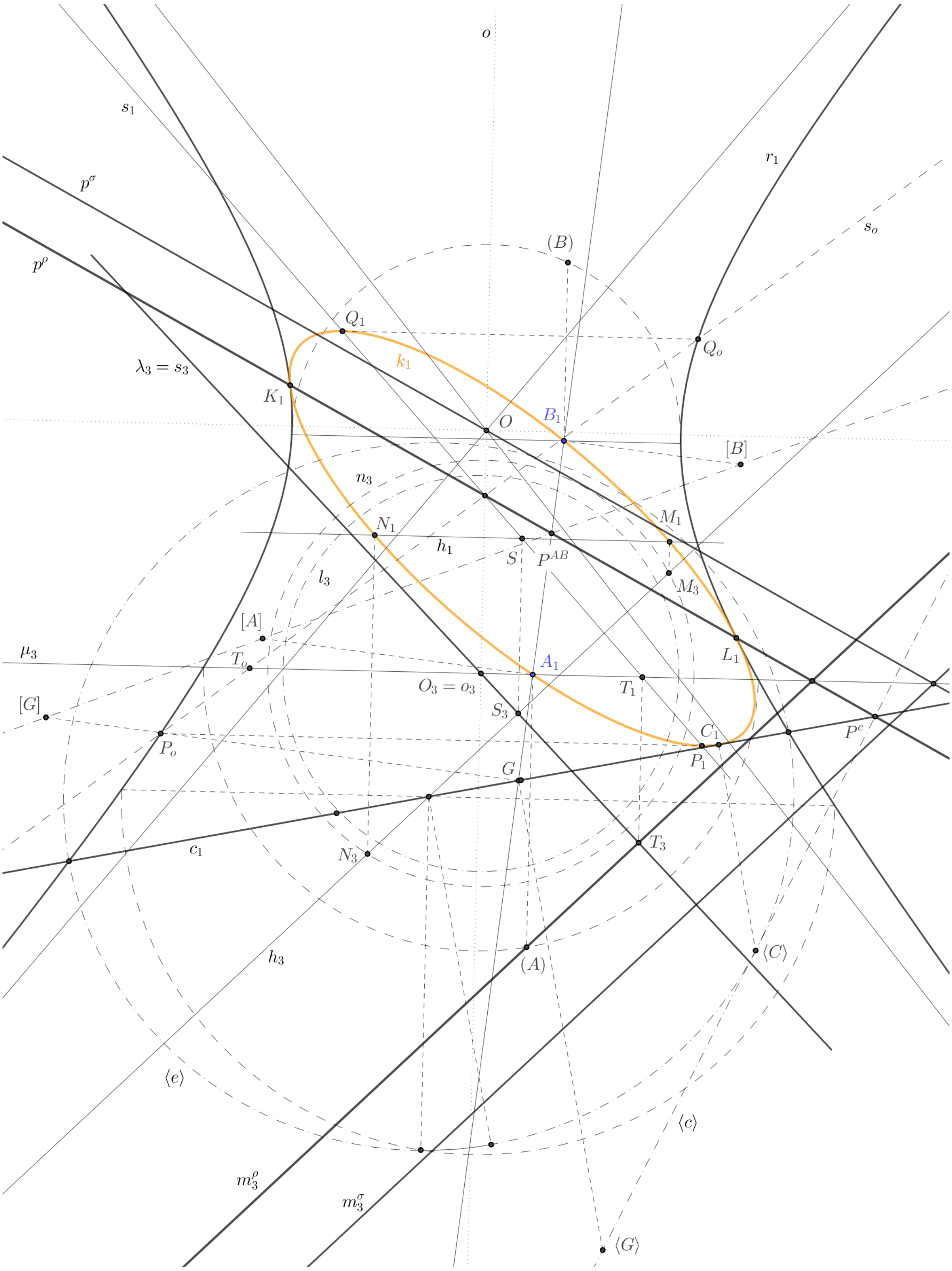
6. Hlavní a vedlejší vrcholy P, Q a M, N elipsy k se do průmětny zobrazí jako koncové body sdružených průměrů P_1Q_1 a M_1N_1 elipsy k_1.

7. Osy elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

8. Elipsa k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení pouze pokud body A, B leží oba uvnitř nebo oba vně obrysové hyperboly r_1, tedy na tomtéž hyperboloidu. Body A, B mohou ležet ve stejném poloprostoru určeném průmětnou π nebo v poloprostorech opačných. Z bodu R lze vést v obou případech dvě tečny k elipse e. Úloha má tedy čtyři řešení. Pokud stopa p^ρ neprotne hyperbolu r_1, dotýká se jí hledaná kuželosečka k_1 imaginárně.



o
s_1
r_1
p^σ
s_o
p^ρ
(B)
Q_1
Q_o
$\lambda_3 = s_3$
k_1
K_1
O
B_1
$[B]$
n_3
M_1
N_1
h_1
S
P^{AB}
l_3
M_3
$[A]$
L_1
μ_3
T_o
A_1
$O_3 = o_3$
T_1
$[G]$
S_3
C_1
P^c
P_o
P_1
G
c_1
N_3
T_3
h_3
(A)
$\langle C\rangle$
$\langle e\rangle$
$\langle c\rangle$
m_3^ρ
m_3^σ
$\langle G\rangle$

Obr. 4.10

4.11 Příklad 32

Sestrojte parabolu dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, je-li dán bod A_1 a přímka b_1.

Rozbor:

Bod A_1 leží uvnitř hyperboly r_1, považujeme ji tak za obrys dvojdílného rotačního hyperboloidu. Bod A_1 je kolmým průmětem bodu A plochy $\mathcal{H}$, přímka b_1 je kolmým průmětem tečny b téže plochy do průmětny π. Promítací rovina tečny b protíná $\mathcal{H}$ v kuželosečce. Roviny, jež se dotýkají této kuželosečky a protínají hyperboloid $\mathcal{H}$ v parabole, obalují rotační kuželovou plochu o vrcholu V. Rovina řezu ρ prochází bodem A a dotýká se této kuželové plochy.

Konstrukce:

1. Bodem A vedeme přímku s, která má od průmětny π stejnou odchylku jako libovolná povrchová přímka asymptotické kuželové plochy hyperboloidu od osy o této plochy. Ve sklopení najdeme její stopník P^s.

2. Průsečíky přímky b s obrysovou hyperbolou označíme $1, 2$. Těmito body vedeme rovnoběžky s asymptotami hyperboly r_1, jejich průsečík je vrchol V.

3. Stopa p^ρ prochází stopníkem P^s a vrcholem V. Průsečíky K_1, L_1 stopy roviny ρ s obrysovou hyperbolou jsou body dotyku r_1 s parabolou k_1.

4. V bodech K_1, L_1 sestrojíme tečny paraboly k_1. Protože se v těchto bodech dotýká parabola k_1 s hyperbolou r_1, jsou tečny sestrojené v bodech K_1, L_1 společné oběma kuželosečkám a sestrojíme je tedy jako tečny k hyperbole r_1.

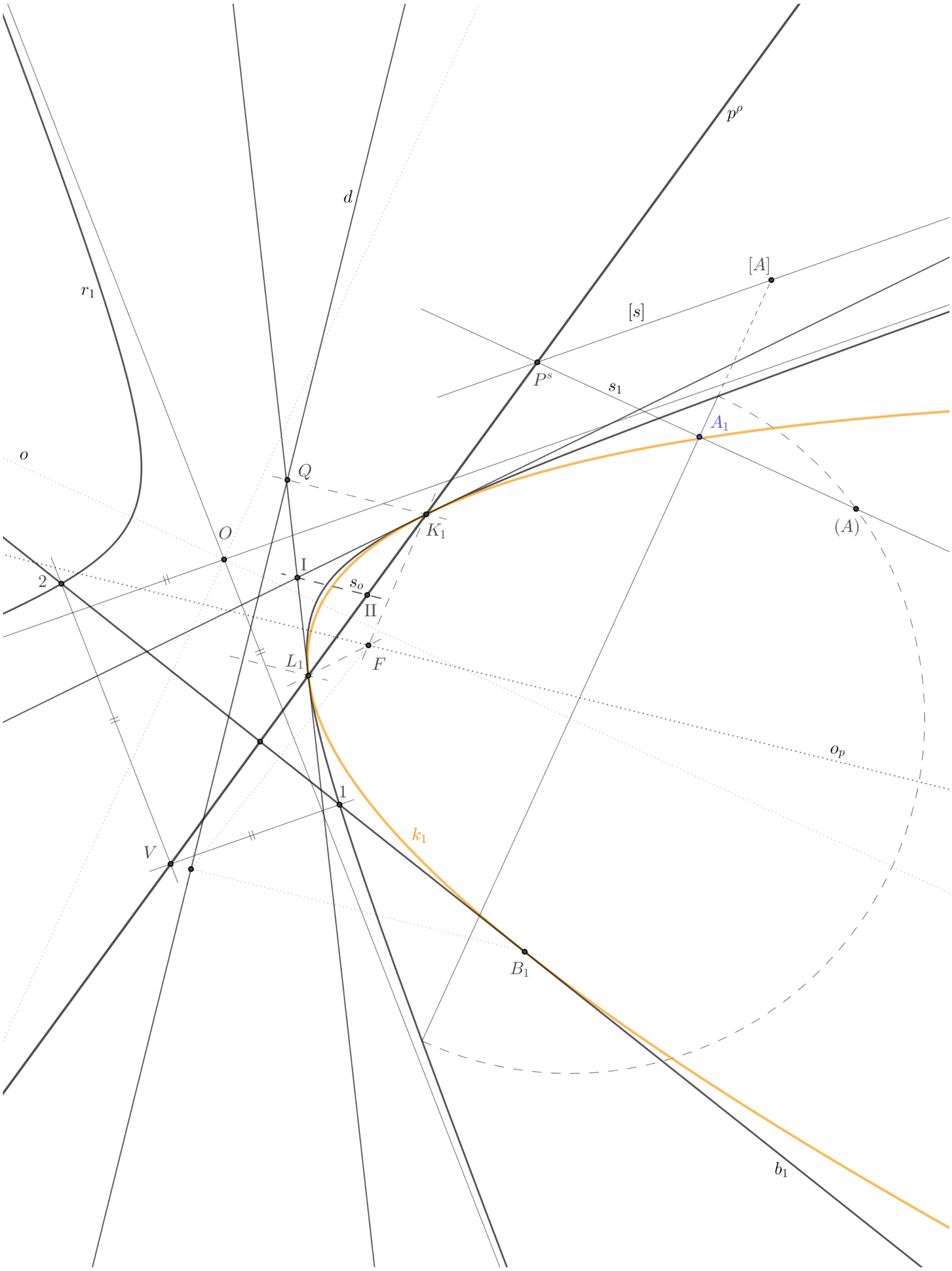
5. Směr osy s_o je určen spojnicí průsečíku I tečen procházejících body K_1, L_1 s bodem II, který půlí tětivu K_1, L_1.

6. Ohnisko F, osu o_p, řídicí přímku d a bod dotyku na tečně b sestrojíme pomocí ohniskových vlastností paraboly.

7. Parabola k_1.

Diskuze:

Kuželosečka, ve které protíná hyperboloid promítací rovina přímky b leží na dvou kuželových plochách požadovaných vlastností. Bodem A lze vést dvě roviny, které se dotýkají daných kuželových ploch, úloha má dvě řešení. Pokud stopa p^ρ neprotne hyperbolu r_1, je její dotyk s parabolou k_1 imaginární.



Obr. 4.11

4.12 Příklad 33

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1.

Rozbor:

Bod A_1 leží vně hyperboly r_1, považujeme ji tedy za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu. Bod A_1 je kolmým průmětem bodu A plochy $\mathcal{H}$, přímky b_1, c_1 jsou kolmými průměty tečen b, c této plochy do průmětny π. Kuželosečky f, e, které vzniknou řezem hyperboloidu $\mathcal{H}$ promítacími rovinami přímek b, c leží na kuželové ploše s vrcholem W. Rovina řezu ρ prochází bodem A a dotýká se této kuželové plochy.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol W kuželové plochy, na které leží elipsy f, e. Elipsy se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $W = 14 \cap 23$. Stopa p^ρ bude procházet body W a P^c, který najdeme ve sklopení jako stopník tečny c elipsy e vedené bodem $G = WA \cap c$. Bod dotyku na tečně c sestrojíme ve sklopení, a protože přímky c, b jsou tečny téže kuželové plochy s vrcholem W, bude bod B ležet na povrchové přímce CW této plochy. Obrysovou hyperbolu protíná stopa p^ρ v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1.

2. Bodem A proložíme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace hyperboloidu, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem hyperboloidu O vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l. Kružnice l a stopa m^σ mají dva společné body $\overline{M}, \overline{N}$, řezem je hyperbola.

3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.

4. Hlavní vrcholy hyperboly k sestrojíme jako průsečíky U, V přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do průmětny π.

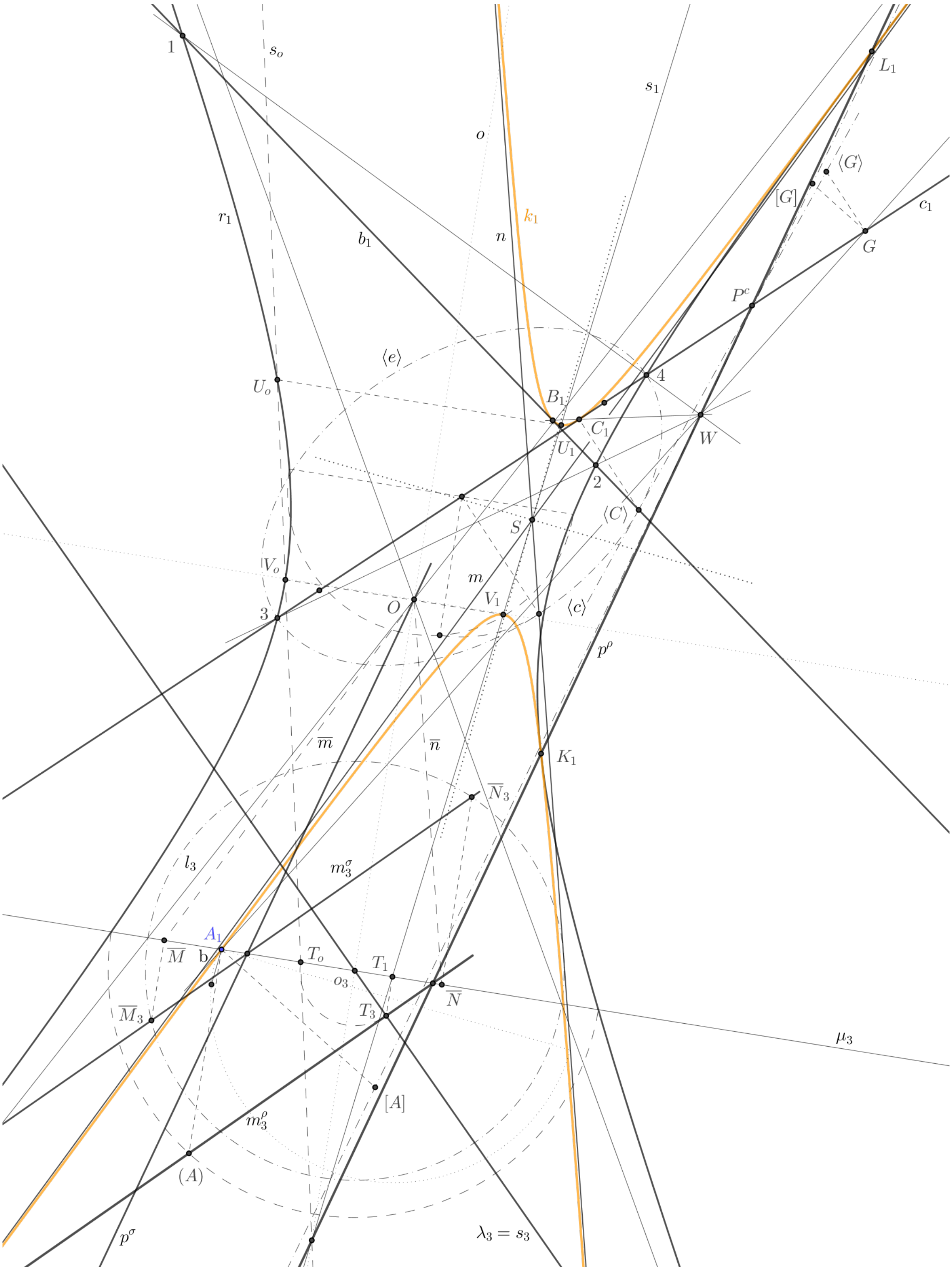
5. Střed S úsečky UV je středem hyperboly k. Sestrojíme asymptoty hyperboly k_1 jako rovnoběžky s přímkami $\overline{m} = O\overline{M}, \overline{n} = O\overline{N}$, které určují jejich směry.

6. Osy hyperboly k_1 půlí úhly asymptot. Zjistíme délku vedlejší poloosy b.

7. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Kuželosečky f, e leží na dvou kuželových plochách. Z bodu A lze ale vést tečné roviny pouze ke dvěma z nich. Úloha má dvě řešení, která mají v tomto případě, kdy se přímky b_1, c_1 protínají uvnitř průmětu $\mathcal{H}$, vždy reálný dotyk s hyperbolou r_1.


1
s_o
s_1
o
L_1
$\langle G \rangle$
$[G]$
c_1
G
r_1
b_1
n
k_1
P^c
$\langle e \rangle$
4
U_o
B_1
C_1
U_1
W
2
$\langle C \rangle$
S
V_o
m
3
O
V_1
$\langle c \rangle$
p^ρ
$\overline{m}$
$\overline{n}$
K_1
$\overline{N}_3$
l_3
m_3^σ
A_1
$\overline{M}$
b
T_o
T_1
o_3
$\overline{N}$
$\overline{M}_3$
T_3
μ_3
$[A]$
m_3^ρ
(A)
p^σ
$\lambda_3 = s_3$

Obr. 4.12

4.13 Příklad 34

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1.

Rozbor:

Bod A_1 leží uvnitř hyperboly r_1, považujeme ji za obrys dvojdílného rotačního hyperboloidu. Bod A_1 je kolmým průmětem bodu A plochy hyperboloidu, přímky b_1, c_1 jsou kolmými průměty tečen b, c plochy $\mathcal{H}$ do průmětny π. Promítací roviny tečen b, c protínají $\mathcal{H}$ v kuželosečkách f, e, které zároveň leží na kuželové ploše s vrcholem V. Rovina řezu ρ prochází bodem A a dotýká se této kuželové plochy.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol V kuželové plochy, na které leží elipsy f, e. Elipsy se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $V = 14 \cap 23$. Stopa p^ρ bude procházet body V a P^c, který najdeme ve sklopení jako stopník tečny c elipsy e z bodu $G = VA \cap c$. Bod dotyku na tečně c sestrojíme ve sklopení, a protože přímky c, b jsou tečny téže kuželové plochy s vrcholem V, bude bod B ležet na povrchové přímce CV této plochy. Obrysovou hyperbolu protíná stopa p^ρ v bodech K_1, L_1 dotyku s elipsou k_1.

2. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o hyperboloidu procházející bodem A, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem O hyperboloidu vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l, která nemá s m^σ žádné společné body. Řezem je elipsa.

3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.

4. Sestrojíme přímku s jako průsečnici rovin λ a ρ. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s hyperboloidem v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do π.

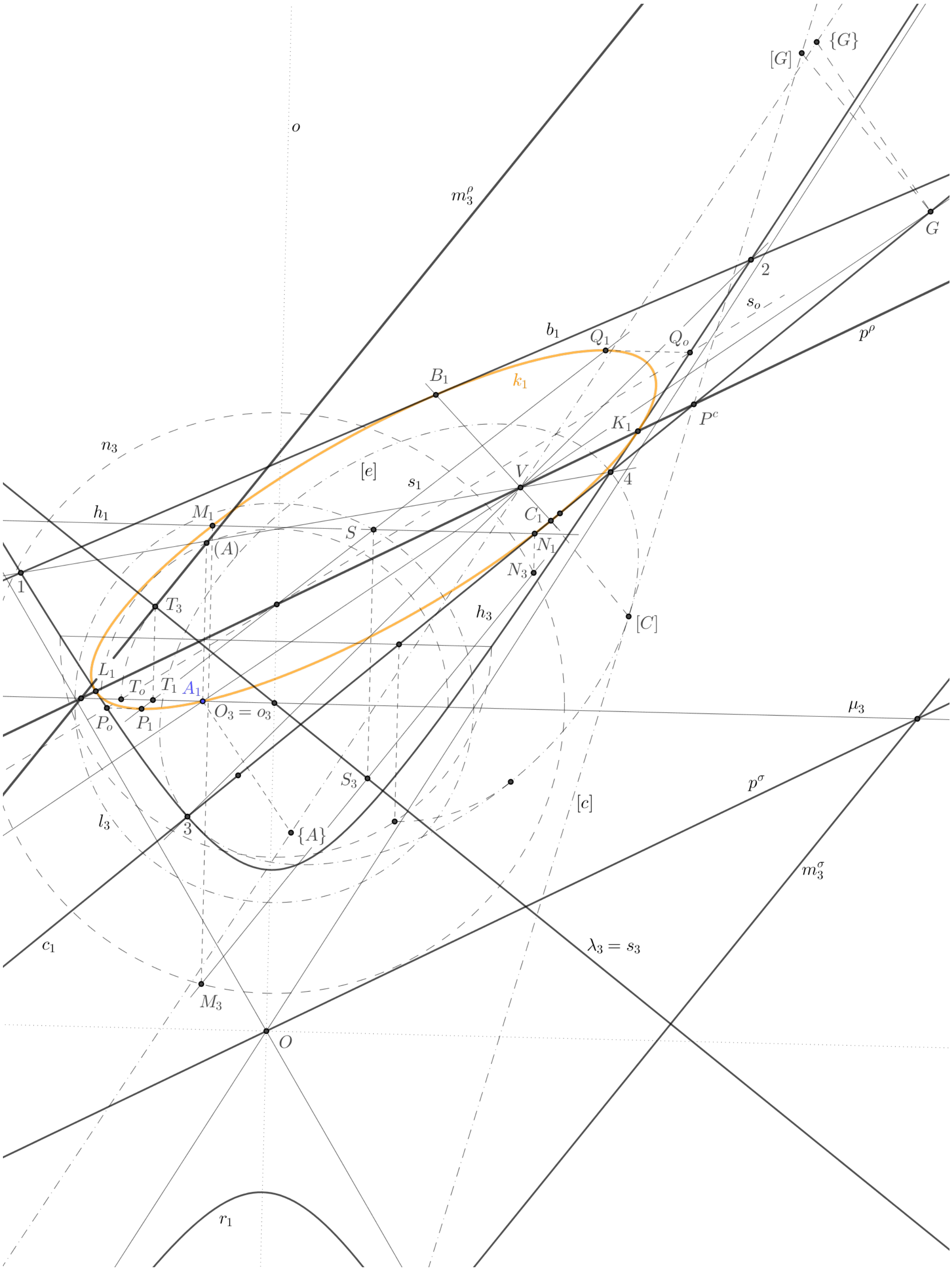
5. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy M, N najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n hyperboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

6. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se zobrazí do průmětny π jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1. Osy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

7. Elipsa k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení pouze pokud bod A_1 neleží v některé hyperbolické úseči tvořené přímkami b_1, c_1. Není-li tomu tak můžeme kuželosečkami f, e proložit dvě kuželové plochy a k nim vést bodem A dvě tečné roviny. Úloha má tedy čtyři řešení, z nichž nejvýše dvě mají s obrysovou hyperbolou imaginární dotyk.


{G}
[G]
o
m_3^ρ
G
2
s_o
b_1
Q_1
Q_o
p^ρ
B_1
k_1
K_1
P^c
n_3
[e]
s_1
V
4
h_1
M_1
C_1
S
N_1
(A)
N_3
1
T_3
h_3
[C]
L_1
T_o
T_1
A_1
μ_3
P_o
P_1
$O_3 = o_3$
S_3
p^σ
[c]
l_3
3
{A}
m_3^σ
c_1
$\lambda_3 = s_3$
M_3
O
r_1

Obr. 4.13

4.14 Příklad 35

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Hyperbolu r_1 považujeme za obrys hyperboloidu $\mathcal{H}$. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této plochy do π. Promítací roviny těchto přímek protínají $\mathcal{H}$ v kuželosečkách d, e, f, které leží zároveň na dvou kuželových plochách, jedné s vrcholem V a druhé s vrcholem V'. Rovina řezu ρ se dotýká obou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrcholy kuželových ploch, na nichž leží kuželosečky d, e, f s krajními body $12, 34, 56$, vrchol $V = 16 \cap 25$, $V' = 14 \cap 23$. Stopa roviny ρ prochází body V, V' a obrysovou hyperbolu protíná v bodech K_1, L_1 dotyku s kuželosečkou k_1. Stopník P^b přímky b leží vně r_1, $\mathcal{H}$ je jednodílný hyperboloid.

2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka b leží v ρ a je tečnou hyperboly e, ve sklopení nalezneme bod dotyku B.[8] Přímky b, a jsou tečny téže kuželové plochy, body dotyku B, A leží na stejné povrchové přímce BV'. Totéž platí pro přímky a, c a body dotyku A, C na povrchové přímce VA.

3. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o hyperboloidu tak, aby byl její průsečík se stopou p^ρ dostupný, sestrojíme stopu m^ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Rovina $\sigma \parallel \rho$ procházející středem O hyperboloidu protíná μ ve stopě m^σ.[9] Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l, která nemá s m^σ žádné společné body. Řezem je elipsa.

4. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou o_3.

5. Sestrojíme přímku s jako průsečnici rovin λ a ρ. Hlavní vrcholy elipsy k sestrojíme jako průsečíky P, Q přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do π.

6. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy M, N najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n hyperboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

7. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se do průmětny zobrazí jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1. Osy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

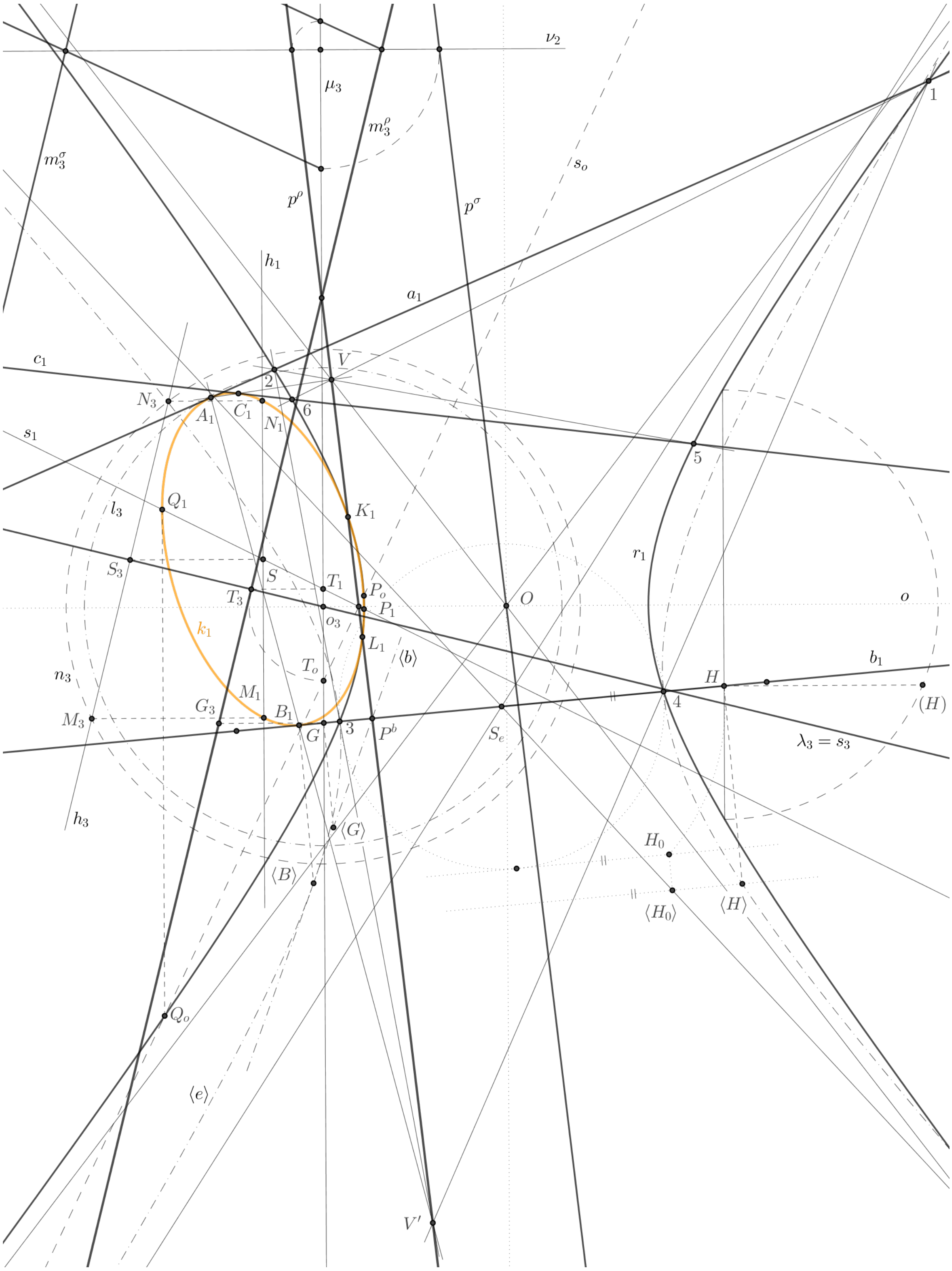
8. Elipsa k_1.

[8] U hyperboly e známe hlavní osu, vrcholy a libovolný bod H. Elegantní konstrukce pro nalezení asymptot e, také odvozená z prostoru, je uvedená v [3], str. 31. V obrázku je vyznačena tečkovaně.

[9] Pro nedostatek místa je k nalezení m^σ použita druhá průmětna ν.

Diskuze:

V tomto případě zadání přímek a_1, b_1, c_1, kde všechny jejich průsečíky leží uvnitř kuželosečky r_1, dostaneme čtyři řešení dané úlohy. Imaginární dotyk r_1 a k_1 získáme v případě, kdy stopa p^ρ neprotne obrysovou hyperbolu, což může nastat dokonce ve všech čtyřech řešeních.


ν_2
μ_3
m_3^ρ
m_3^σ
s_o
p^ρ
p^σ
1
h_1
a_1
c_1
V
2
N_3
A_1
C_1
N_1
6
5
s_1
Q_1
l_3
K_1
r_1
S_3
S
T_1
P_o
T_3
P_1
O
o
o_3
k_1
L_1
$\langle b \rangle$
n_3
T_o
b_1
H
4
(H)
M_1
G_3
M_3
B_1
G
3
P^b
S_e
$\lambda_3 = s_3$
h_3
$\langle G \rangle$
H_0
$\langle B \rangle$
$\langle H_0 \rangle$
$\langle H \rangle$
Q_o
$\langle e \rangle$
V'

Obr. 4.14

4.15 Příklad 36

Sestrojte parabolu dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1.

Rozbor:

Přímky a_1, b_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$. Promítací rovina tečny a, resp. b protíná $\mathcal{H}$ v kuželosečce e, resp. f. Roviny, jež se dotýkají kuželosečky e, resp. f a protínají rotační hyperboloid $\mathcal{H}$ v parabole, obalují rotační kuželovou plochu o vrcholu V, resp. V'. Společná tečná rovina ρ těchto kuželových ploch protíná rotační hyperboloid v parabole k, jejíž kolmý průmět do π je hledaná parabola k_1.

Konstrukce:

1. Průsečíky přímky a_1 s obrysovou hyperbolou r_1 označíme $1, 2$, jsou to hlavní vrcholy kuželosečky e. Podobně body $3, 4$ na přímce b_1. Body $2, 3$ vedeme rovnoběžky s jednou asymptotou hyperboly r_1, body $1, 4$ vedeme rovnoběžky s druhou asymptotou. Průsečík přímek procházejících body $1, 2$ je vrchol V, průsečík přímek procházejících body $3, 4$ je vrchol V'. Spojnice vrcholů VV' je stopa p^ρ. Průsečíky p^ρ s obrysovou hyperbolou jsou body K_1, L_1 dotyku r_1 s parabolou k_1.

2. Podle polohy stopníků přímek a_1, b_1 vzhledem k obrysové hyperbole zjistíme, jestli bude kuželosečka k řezem jednodílného nebo dvojdílného hyperboloidu. Stopníky leží uvnitř hyperboly r_1, $\mathcal{H}$ je tedy jednodílný hyperboloid.

3. V bodech K_1, L_1 sestrojíme tečny paraboly k_1. Protože se v těchto bodech dotýká parabola k_1 s hyperbolou r_1, jsou tečny sestrojené v bodech K_1, L_1 společné oběma kuželosečkám a sestrojíme je tedy jako tečny k hyperbole r_1.

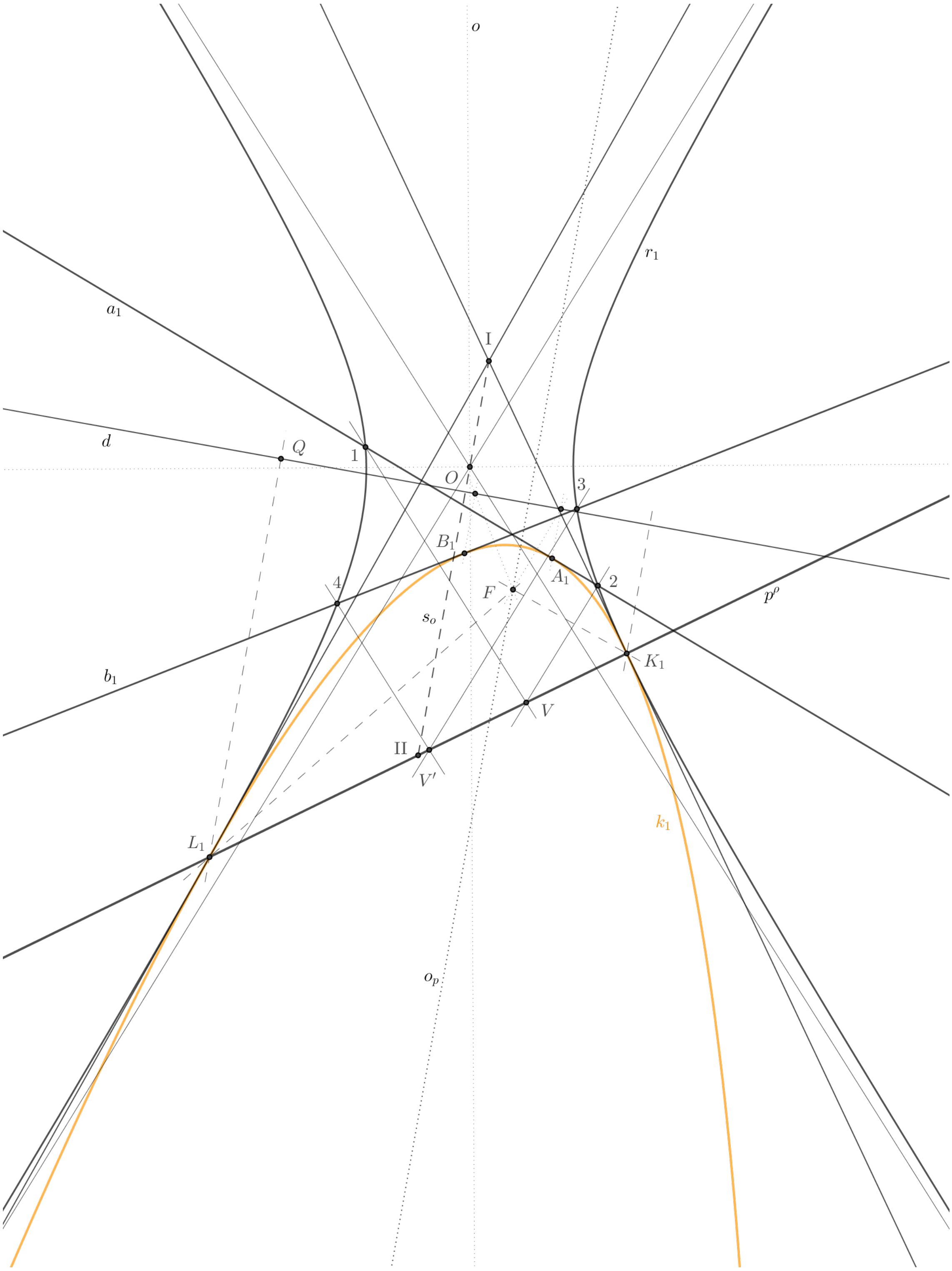
4. Směr osy s_o je určen spojnicí průsečíku I tečen procházejících body K_1, L_1 s bodem II, který půlí tětivu K_1, L_1.

5. Ohnisko F, osu o_p paraboly, řídící přímku d a body dotyku na tečnách a, b sestrojíme pomocí ohniskových vlastností paraboly.

6. Parabola k_1.

Diskuze:

Stopa p^ρ je vrcholy V', V'' určena jednoznačně. Kuželové plochy s těmito vrcholy mají dvě společné tečné roviny souměrné podle průmětny π. Řezy těmito rovinami mají týž společný kolmý průmět a úloha má jediné řešení.



Obr. 4.15

4.16 Příklad 37

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Body A_1, B_1, C_1 leží uvnitř hyperboly r_1, považujeme ji za obrys dvojdílného rotačního hyperboloidu $\mathcal{H}$. Dané body považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu do průmětny π, kterými je zároveň určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ, která prochází stopníky přímek AB, AC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o hyperboloidu. Stopa p^ρ neprotíná obrysovou hyperbolu, body dotyku r_1 a k_1 jsou imaginární.

2. Bodem B proložíme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace hyperboloidu, sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a určíme typ kuželosečky řezu. Středem hyperboloidu O vedeme rovinu $\sigma \parallel \rho$, která protíná μ ve stopě m^σ. Asymptotická kuželová plocha protíná μ v kružnici l. Stopa m^σ protíná kružnici l ve dvou bodech $\overline{M}, \overline{N}$, řezem je hyperbola.

3. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k rovině ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou $o_3 = O_3$.

4. Hlavní vrcholy hyperboly k sestrojíme jako průsečíky U, V přímky s s hyperboloidem, a to v otočení roviny λ kolem osy o pomocí bodu T do průmětny π.

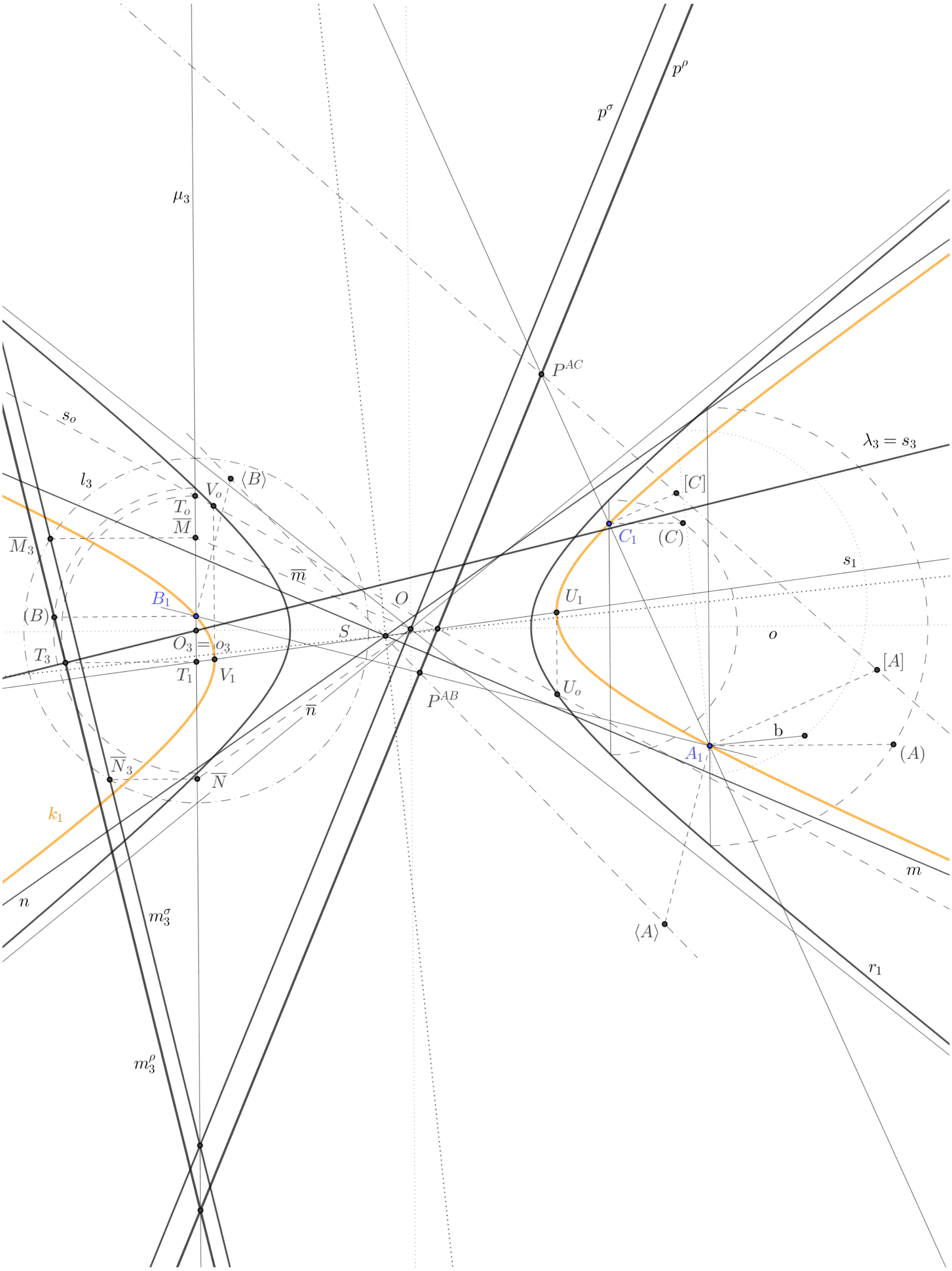
5. Střed S úsečky UV je středem hyperboly k. Sestrojíme asymptoty hyperboly k_1 jako rovnoběžky s přímkami $\overline{m} = O\overline{M}, \overline{n} = O\overline{N}$, které určují jejich směry.

6. Osy hyperboly k_1 půlí úhly asymptot. Zjistíme délku vedlejší poloosy b.

7. Hyperbola k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení, pokud všechny body A_1, B_1, C_1 leží na stejné rotační ploše určené hyperbolou r_1, tedy všechny body leží uvnitř resp. vně dané hyperboly. Body A, B, C, které neleží v π mohou mít vůči průmětně osm různých poloh. Ze souměrnosti podle průmětny však plyne, že vždy dva případy tvoří jedno řešení. Úloha má čtyři řešení, z nichž některé může mít s obrysovou hyperbolou imaginární dotyk.



p^{ρ}
p^{σ}
μ_3
P^{AC}
s_o
$\lambda_3 = s_3$
l_3
$\langle B \rangle$
V_o
T_o
$\overline{M}$
$[C]$
$\overline{M}_3$
C_1
(C)
$\overline{m}$
s_1
B_1
O
U_1
(B)
S
o
$O_3 = o_3$
T_3
$[A]$
T_1
V_1
U_o
P^{AB}
$\overline{n}$
b
(A)
A_1
$\overline{N}_3$
$\overline{N}$
k_1
m
n
m_3^{σ}
$\langle A \rangle$
r_1
m_3^{ρ}

Obr. 4.16

4.17 Příklad 38

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech hyperboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

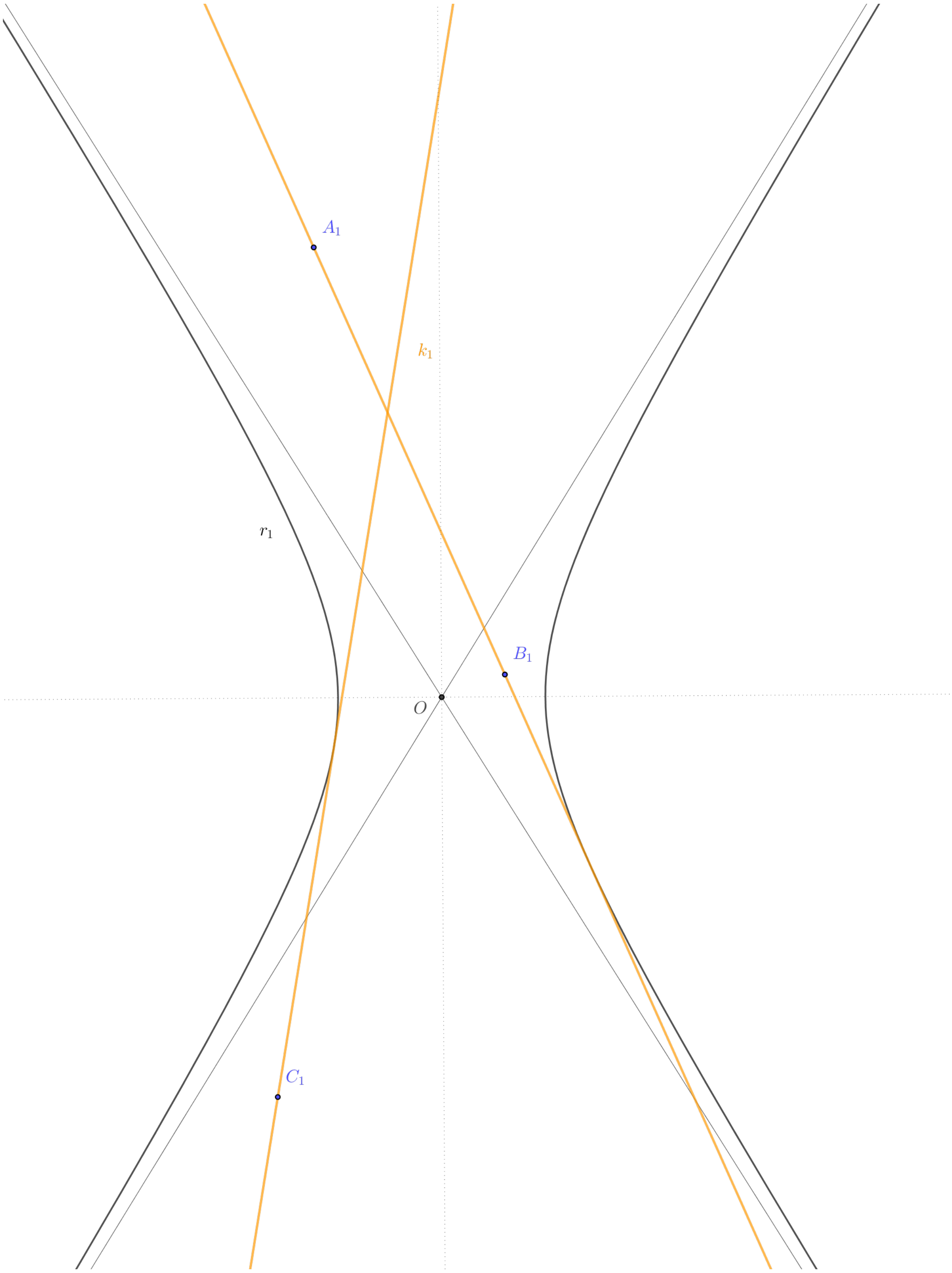
Body A_1, B_1, C_1 leží vně hyperboly r_1, pokládáme ji tedy za obrys jednodílného rotačního hyperboloidu. Body A_1, B_1, C_1 pokládáme za kolmé průměty bodů A, B, C hyperboloidu do průmětny π. Těmito body je zároveň určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Body A_1, B_1 prochází přímka, která je tečnou r_1, je to tedy přímka hyperboloidu $\mathcal{H}$.
2. Řešení bude singulární, druhou přímku získáme jako tečnu vedenou bodem C_1 k hyperbole r_1.
3. Dvojice přímek k_1.

Diskuze:

Z bodu C_1 lze k hyperbole r_1 vést dvě tečny. Existují dvě řešení úlohy.



Obr. 4.17

Kapitola 5

Paraboloid

Tato kapitola obsahuje příklady na sestrojení kuželosečky, která prochází danými body, dotýká se daných přímek, a přitom se ve dvou bodech dotýká paraboly. Parabola je zadaná ohniskem, řídicí přímkou a navíc osou.

Postupujeme obdobně jako v předchozích kapitolách, parabolu pokládáme za obrys rotačního paraboloidu $\mathcal{P}$ a umístíme ji do průmětny π, kterou ztotožníme s nákresnou. Zadané přímky považujeme za tečny plochy $\mathcal{P}$ a zadané body za body ležící na této ploše. Sestrojíme rovinu řezu ρ, která je určená danými body a přímkami, rovinu souměrnosti řezu λ a její průsečnici s s rovinou ρ. Přímka s protíná paraboloid v hlavních vrcholech kuželosečky řezu, které sestrojíme otočením roviny λ do π. Podle typu kuželosečky řezu sestrojíme chybějící prvky a její průmět.

Řez paraboloidu bude existovat, jestliže budou zadané přímky sečnami, případně tečnami paraboly r_1 a zadané body budou ležet uvnitř r_1 popřípadě na r_1. Řešení tedy bude vždy ležet uvnitř paraboly r_1. Pokud jsou zadané pouze přímky může však nastat situace, že body dotyku těchto přímek s hledanou kuželosečkou budou ležet vně paraboly r_1. V takovýchto případech, které v této práci nejsou řešeny, bychom použili kvadriku nerotační, a to hyperbolický paraboloid.

Řezem rotačního paraboloidu rovinou, která s ním má společné aspoň dva body, může být parabola nebo elipsa, resp. kružnice. Kružnice je řezem právě když je rovina ρ kolmá k ose rotace paraboloidu a kružnice se tak zobrazí jako úsečka, tyto případy neuvažujeme. Typ kuželosečky řezu určíme podle polohy roviny řezu ρ a osy o paraboloidu. Řezem $\mathcal{P}$ je parabola, právě když je rovina ρ rovnoběžná s o, v ostatních případech je řezem elipsa. Imaginární dotyk kuželosečky k_1 s parabolou r_1 může nastat pouze pokud je hledaná kuželosečka k elipsou.

5.1 Příklad 39

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys rotačního paraboloidu $\mathcal{P}$. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C paraboloidu do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků P^{AB}, P^{BC} přímek AB a BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o, které protínají paraboloid v kružnicích. Podle polohy stopy roviny ρ a osy paraboloidu určíme typ řezu. Stopa p^ρ není rovnoběžná s osou o, řezem je tedy elipsa, která se dotýká paraboly r_1 v jejích průsečících K_1, L_1 se stopou p^ρ.

2. Opět zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace paraboloidu, která prochází bodem A. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou o_3.

3. Přímku s sestrojíme jako průsečnici rovin λ a ρ. Průsečíky P, Q přímky s s paraboloidem, sestrojené v otočení roviny λ do π kolem osy o pomocí bodu T, jsou hlavními vrcholy elipsy k řezu.

4. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy M, N najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n paraboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

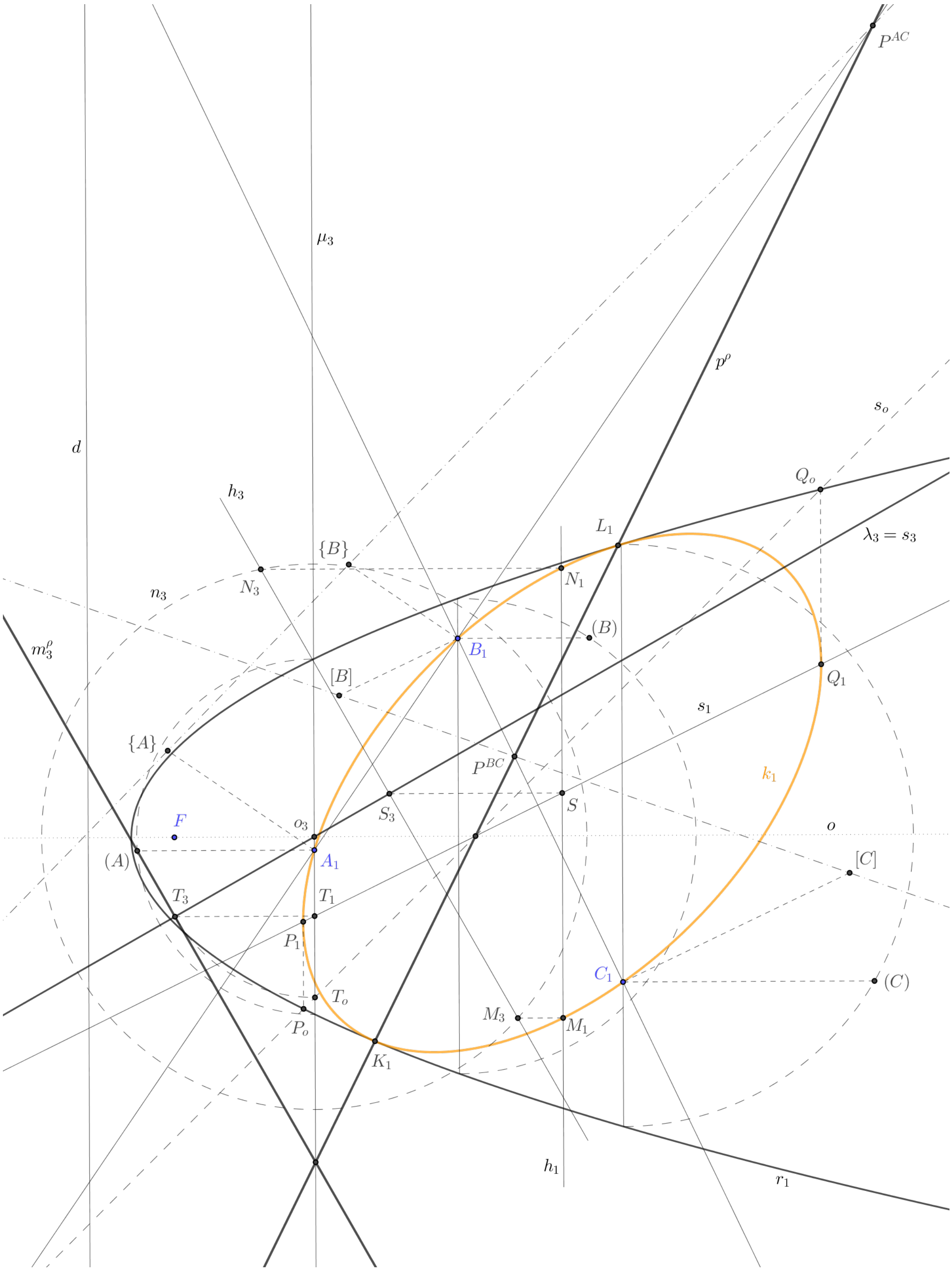
5. Hlavní a vedlejší vrcholy P, Q a M, N elipsy k se promítnou do π jako koncové body sdružených průměrů P_1Q_1 a M_1N_1 elipsy k_1.

6. Hlavní a vedlejší osu elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

7. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mohou mít až na souměrnost podle průmětny π čtyři polohy a určují tak čtyři roviny řezu. Dostaneme čtyři různá řešení úlohy, z nichž nejvýše jedno má s r_1 imaginární dotyk.


P^{AC}
μ_3
p^ρ
s_o
d
h_3
Q_o
L_1
$\lambda_3 = s_3$
$\{B\}$
N_3
N_1
n_3
(B)
m_3^ρ
B_1
$[B]$
Q_1
s_1
$\{A\}$
P^{BC}
k_1
F
S_3
S
o_3
o
(A)
A_1
$[C]$
T_3
T_1
P_1
C_1
(C)
T_o
M_3
M_1
P_o
K_1
h_1
r_1

Obr. 5.1

5.2 Příklad 40

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1, C_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys rotačního paraboloidu $\mathcal{P}$. Body A_1, B_1, C_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, C paraboloidu do průmětny π a zároveň za body, kterými je určena rovina řezu ρ.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků P^{AB}, P^{BC} přímek AB a BC. Kóty bodů A, B, C zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o. Podle polohy stopy roviny ρ a osy paraboloidu určíme typ řezu. Stopa p^ρ je rovnoběžná s osou o, řezem je parabola, která se dotýká obrysové paraboly r_1 v jejím průsečíku K_1 se stopou p^ρ.[1]

2. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace paraboloidu, která prochází bodem A. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji v přímce s. Sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a průmět λ_3 roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou o_3.

3. Přímku s sestrojíme jako průsečnici rovin λ a ρ. Průsečík V přímky s s paraboloidem, sestrojený v otočení roviny λ do π kolem osy o pomocí bodu T, je vrcholem paraboly k řezu. Přímka s je osou paraboly k.

4. Sestrojíme subtangentu RS tečny c procházející bodem C. Bod R je průsečíkem osy s a kolmice k ní vedené bodem C. Vrchol půlí délku subtangenty, můžeme tedy sestrojit bod S. Přímka SC je tečnou k v bodě C.

5. Pomocí ohniskových vlastností sestrojíme ohnisko F_p a řídicí přímku d_p paraboly řezu.

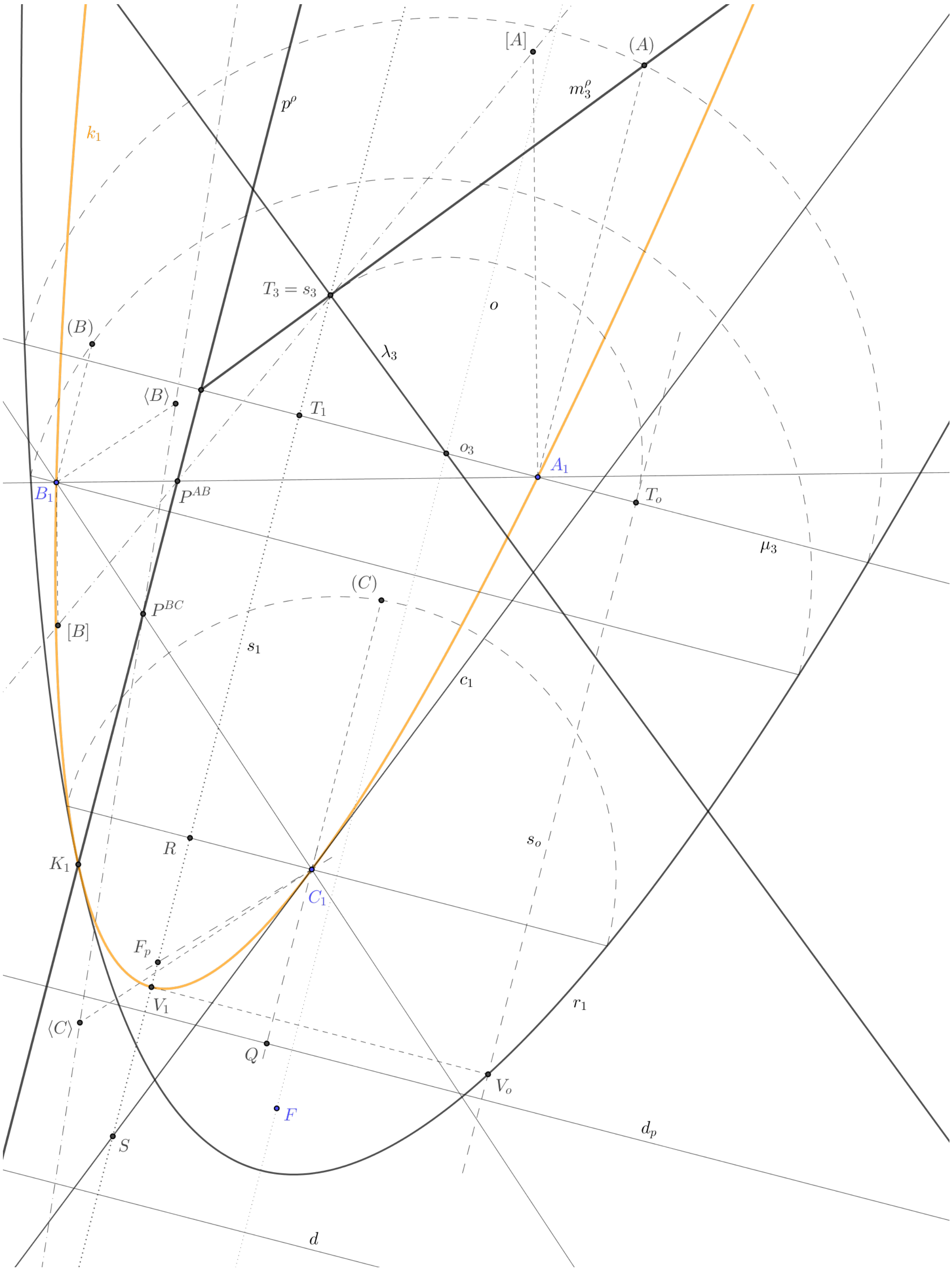
6. Parabola k_1.

Diskuze:

Body A, B, C mohou mít až na souměrnost podle průmětny π čtyři polohy a určují tak čtyři roviny řezu. Dostaneme čtyři různá řešení úlohy, z nichž nejvýše jedno má s r_1 imaginární dotyk.

---

[1] Druhý bod dotyku je nevlastní.


k_1
p^ρ
$[A]$
(A)
m_3^ρ
$T_3 = s_3$
o
λ_3
(B)
$\langle B\rangle$
T_1
o_3
A_1
B_1
P^{AB}
T_o
μ_3
(C)
P^{BC}
$[B]$
s_1
c_1
s_o
R
K_1
C_1
F_p
V_1
r_1
$\langle C\rangle$
Q
V_o
F
d_p
S
d

Obr. 5.2

5.3 Příklad 41

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, jsou-li dány body A_1, B_1 a přímka c_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys rotačního paraboloidu. Body A_1, B_1 považujeme za kolmé průměty bodů A, B, přímku c_1 za průmět tečny c paraboloidu do průmětny. Rovina řezu ρ je určená body A, B a přímkou c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu p^ρ roviny ρ pomocí stopníků přímek AB a c. Kóty bodů A, B zjistíme ve sklopení jejich promítacích rovin kolmých k ose o. Přímka c je tečnou elipsy e, která je řezem $\mathcal{P}$ promítací rovinou přímky c. Ve sklopení sestrojíme pomocí bodu $R = AB \cap c$ stopník P^c a bod dotyku C kuželosečky k_1 a přímky c_1. Podle polohy stopy roviny ρ a osy paraboloidu určíme typ řezu. Stopa p^ρ prochází stopníky P^{AB}, P^c, není rovnoběžná s osou o, řezem je tedy elipsa, která se dotýká paraboly r_1 v jejích průsečících K_1, L_1 se stopou p^ρ.

2. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace paraboloidu, která prochází bodem A. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou o_3.

3. Přímku s sestrojíme jako průsečnici rovin λ a ρ. Průsečíky P, Q přímky s s paraboloidem, sestrojené v otočení roviny λ do π kolem osy o pomocí bodu T, jsou hlavními vrcholy elipsy k řezu.

4. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy M, N najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n paraboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

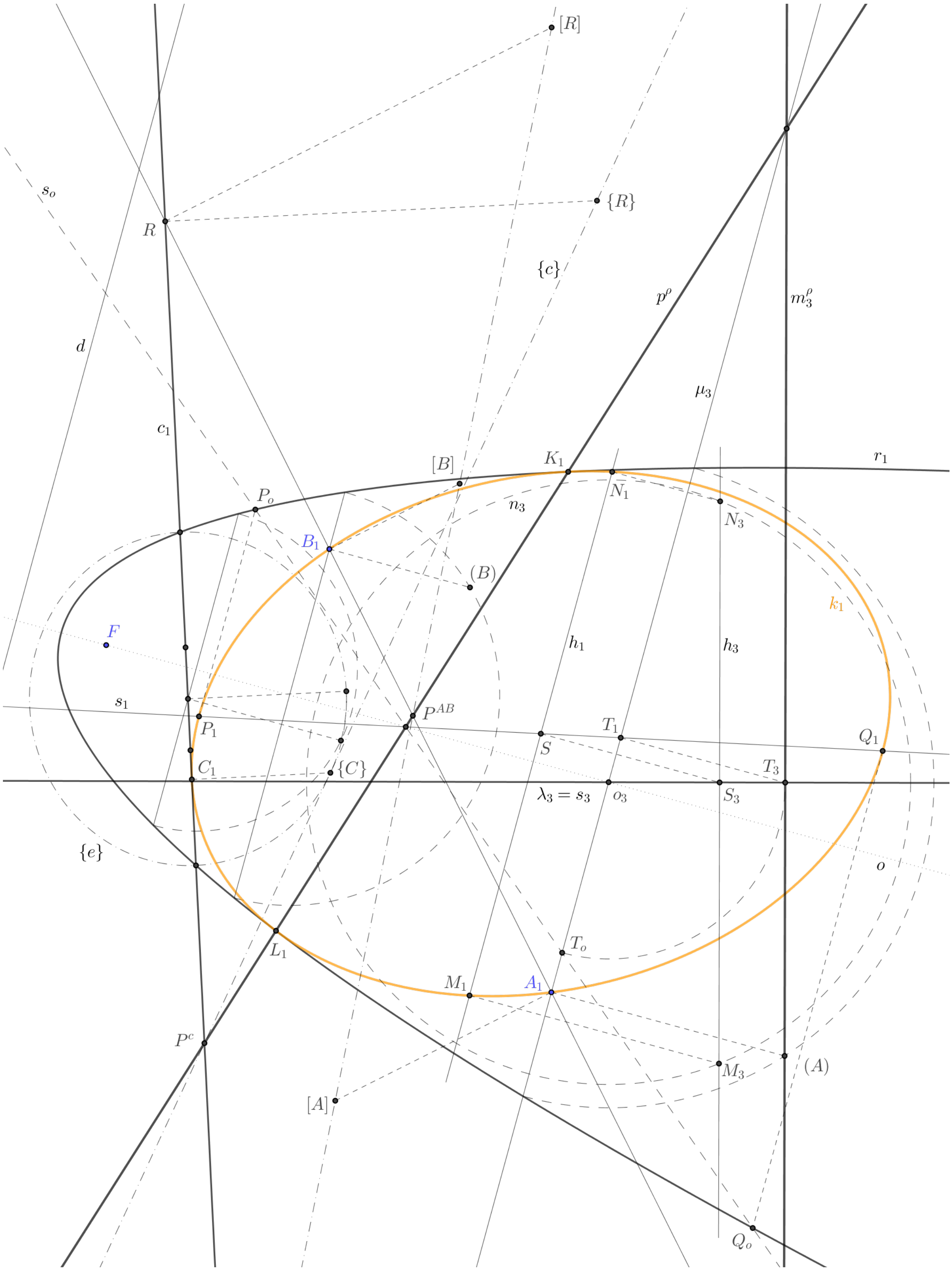
5. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se promítnou do průmětny jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1.

6. Hlavní a vedlejší osu elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

7. Elipsa k_1.

Diskuze:

Body A, B mohou mít až na souměrnost podle průmětny π dvě polohy. Z bodu R lze v každém případě vést dvě tečny k elipse e. Úloha má čtyři různá řešení. Pokud stopa p^ρ neprotne r_1, má řešení s obrysovou parabolou imaginární dotyk.


[R]
{R}
R
s_o
d
{c}
p^ρ
m_3^ρ
μ_3
c_1
[B]
K_1
r_1
P_o
N_1
n_3
N_3
B_1
(B)
k_1
F
h_1
h_3
s_1
P^AB
P_1
T_1
S
Q_1
C_1
{C}
T_3
λ_3 = s_3
o_3
S_3
{e}
o
L_1
T_o
M_1
A_1
P^c
M_3
(A)
[A]
Q_o

Obr. 5.3

5.4 Příklad 42

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys rotačního paraboloidu $\mathcal{P}$. Bod A_1 považujeme za kolmý průmět bodu A plochy $\mathcal{P}$, přímky b_1, c_1 za kolmé průměty tečen b, c paraboloidu do průmětny. Promítací roviny přímek b, c protínají $\mathcal{P}$ v elipsách, které zároveň leží na kuželové ploše $\mathcal{K}$. Rovina řezu ρ prochází bodem A a dotýká se této kuželové plochy.

Konstrukce:

1. Sestrojíme vrchol kuželové plochy $\mathcal{K}$, na které leží elipsy e, f. Elipsy se zobrazí do úseček $12, 34$, vrchol $V = 13 \cap 24$. Pomocí bodu $R = AV \cap b$ sestrojíme ve sklopení stopník P^b a bod dotyku B kuželosečky k_1 s přímkou b_1.

2. Stopa p^ρ prochází vrcholem V a stopníkem P^b, je rovnoběžná s osou o, řezem je tedy parabola, která se dotýká obrysové paraboly r_1 v jejím průsečíku K_1 se stopou p^ρ.

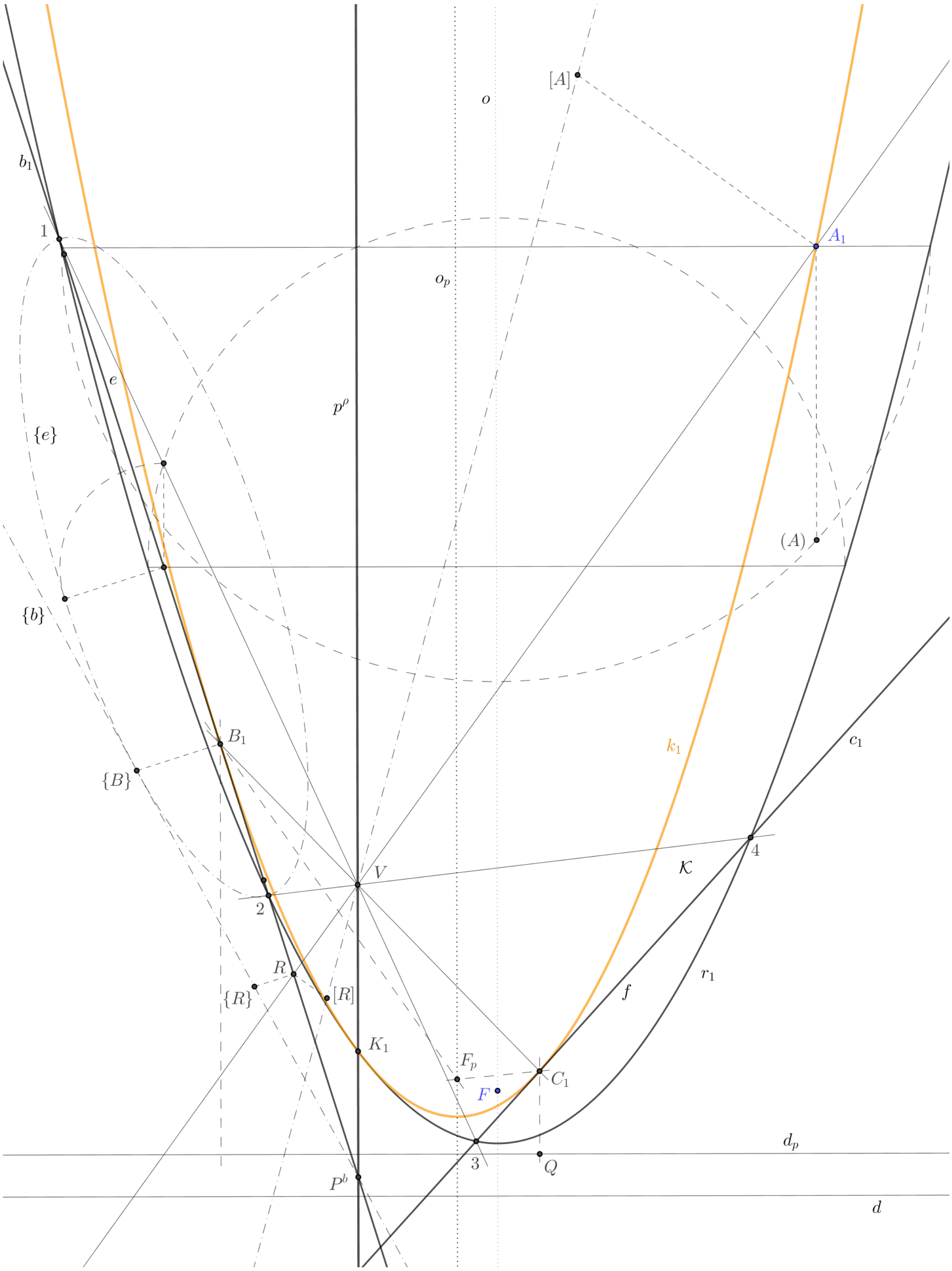
3. Sestrojíme bod dotyku na tečně c_1. Přímky b, c leží v ρ a obě se dotýkají kuželové plochy $\mathcal{K}$. Body B, C leží tedy na povrchové přímce této plochy procházející vrcholem V.

4. Směr osy o_p paraboly určuje přímka o, pomocí ohniskových vlastností sestrojíme ohnisko F_p a řídicí přímku d_p paraboly řezu.

5. Parabola k_1.

Diskuze:

Úloha má řešení pouze pokud bod A_1 neleží v některé parabolické úseči tvořené přímkami b_1, c_1. Elipsami e, f můžeme proložit dvě kuželové plochy. Bodem A lze vést dvě tečné roviny ke každé z nich. Úloha má čtyři řešení, z nichž nejvýše dvě mají s obrysovou parabolou imaginární dotyk.



$[A]$
o
b_1
1
A_1
o_p
e
p^ρ
$\{e\}$
(A)
$\{b\}$
B_1
k_1
c_1
$\{B\}$
4
V
$\mathcal{K}$
2
R
$[R]$
$\{R\}$
f
r_1
K_1
F_p
C_1
F
d_p
3
Q
P^b
d

Obr. 5.4

5.5 Příklad 43

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, jsou-li dány přímky a_1, b_1, c_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys paraboloidu $\mathcal{P}$. Přímky a_1, b_1, c_1 považujeme za kolmé průměty tečen a, b, c této plochy do průmětny π. Promítací roviny těchto přímek protínají $\mathcal{P}$ v elipsách e, f, g, které leží také na kuželových plochách $\mathcal{K}$ s vrcholem V a $\mathcal{K}'$ s vrcholem V'. Rovina řezu ρ se dotýká obou těchto kuželových ploch.

Konstrukce:

1. Sestojíme vrcholy kuželových ploch, na nichž leží elipsy e, f, g. Elipsy se zobrazí postupně do úseček $12, 34, 56$, vrchol $V = 35 \cap 46$, $V' = 16 \cap 25$. Stopa roviny ρ prochází body V, V', je rovnoběžná s osou o, řezem je tedy parabola, která se dotýká obrysové paraboly r_1 v jejím průsečíku K_1 se stopou p^ρ.

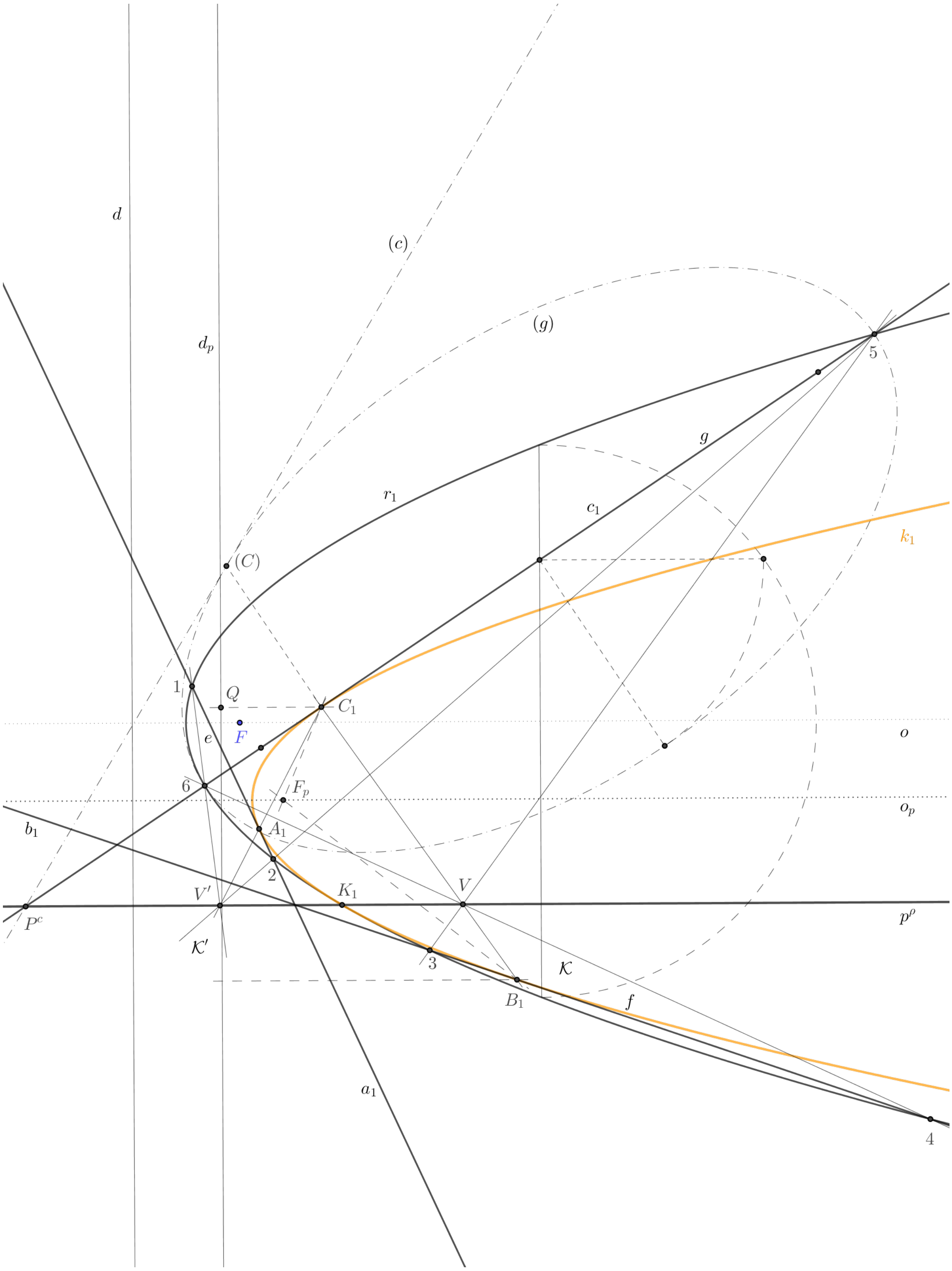
2. Sestrojíme body dotyku na tečnách a_1, b_1, c_1. Přímka c leží v ρ a je tečnou elipsy g, ve sklopení nalezneme bod dotyku C přímky c s parabolou k. Přímky c, b jsou tečny téže kuželové plochy $\mathcal{K}$, body dotyku C, B tedy leží na stejné povrchové přímce procházející vrcholem V. Totéž platí pro přímky c, a a body dotyku C, A na povrchové přímce procházející vrcholem V'.

3. Směr osy o_p paraboly určuje přímka o, pomocí ohniskových vlastností sestrojíme ohnisko F_p a řídicí přímku d_p paraboly řezu.

4. Parabola k_1.

Diskuze:

Elipsami e, f prochází dvě kuželové plochy, stejně tak elipsami e, g. Vrcholy kuželových ploch procházejících elipsami f, g už leží na přímkách určených vrcholy předchozích kuželových ploch. Tyto přímky jsou čtyřmi stopami osmi rovin řezu, které jsou po dvou souměrné podle průmětny. Úloha má dvě řešení ležící uvnitř paraboly r_1, z nichž jedno s ní může mít dotyk pouze imaginární.



d
(c)
(g)
d_p
5
g
r_1
c_1
k_1
(C)
1
Q
C_1
e
F
o
6
F_p
o_p
b_1
A_1
2
V
V'
K_1
P^c
p^ρ
$\mathcal{K}'$
3
$\mathcal{K}$
B_1
f
a_1
4

Obr. 5.5

5.6 Příklad 44

Sestrojte kuželosečku dotýkající se ve dvou bodech paraboly r_1, je-li dán bod A_1 a přímky b_1, c_1, z nichž b_1 je tečnou r_1.

Rozbor:

Parabolu r_1 považujeme za obrys rotačního paraboloidu. Bod A_1 považujeme za kolmý průmět bodu A, přímky b_1, c_1 za průměty tečen b, c paraboloidu do průmětny. Přímka b se dotýká obrysové paraboly v bodě B, který leží v π. Rovina řezu ρ prochází body A, B a přímkou c.

Konstrukce:

1. Sestrojíme stopu roviny ρ. Stopa p^ρ prochází bodem B dotyku přímky b s parabolou r_1, který leží v π. Druhý bod stopy p^ρ je stopník P^c přímky c, která je tečnou elipsy e řezu $\mathcal{P}$ promítací rovinou přímky c. Pomocí bodu $R = AB \cap c$ sestrojíme ve sklopení stopník P^c a bod dotyku C kuželosečky k_1 a přímky c_1. Stopa p^ρ není rovnoběžná s osou o, řezem je elipsa, která se dotýká paraboly r_1 v jejích průsečících B_1, K_1 se stopou p^ρ.

2. Zavedeme třetí průmětnu μ kolmou k ose o rotace paraboloidu, která prochází bodem A. Rovina souměrnosti řezu λ prochází osou o, je kolmá k ρ a protíná ji ve spádové přímce s. Sestrojíme stopu m^ρ roviny ρ a průmět $\lambda_3 = s_3$ roviny λ jako kolmici k m_3^ρ procházející osou o_3.

3. Přímku s sestrojíme jako průsečnici rovin λ a ρ. Průsečíky P, Q přímky s s paraboloidem, sestrojené v otočení roviny λ do π kolem osy o pomocí bodu T, jsou hlavními vrcholy elipsy k řezu.

4. Střed S úsečky PQ je středem elipsy k. Vedlejší vrcholy M, N najdeme jako průsečíky hlavní přímky h roviny ρ, která prochází bodem S a rovnoběžky n paraboloidu ležící v promítací rovině přímky h.

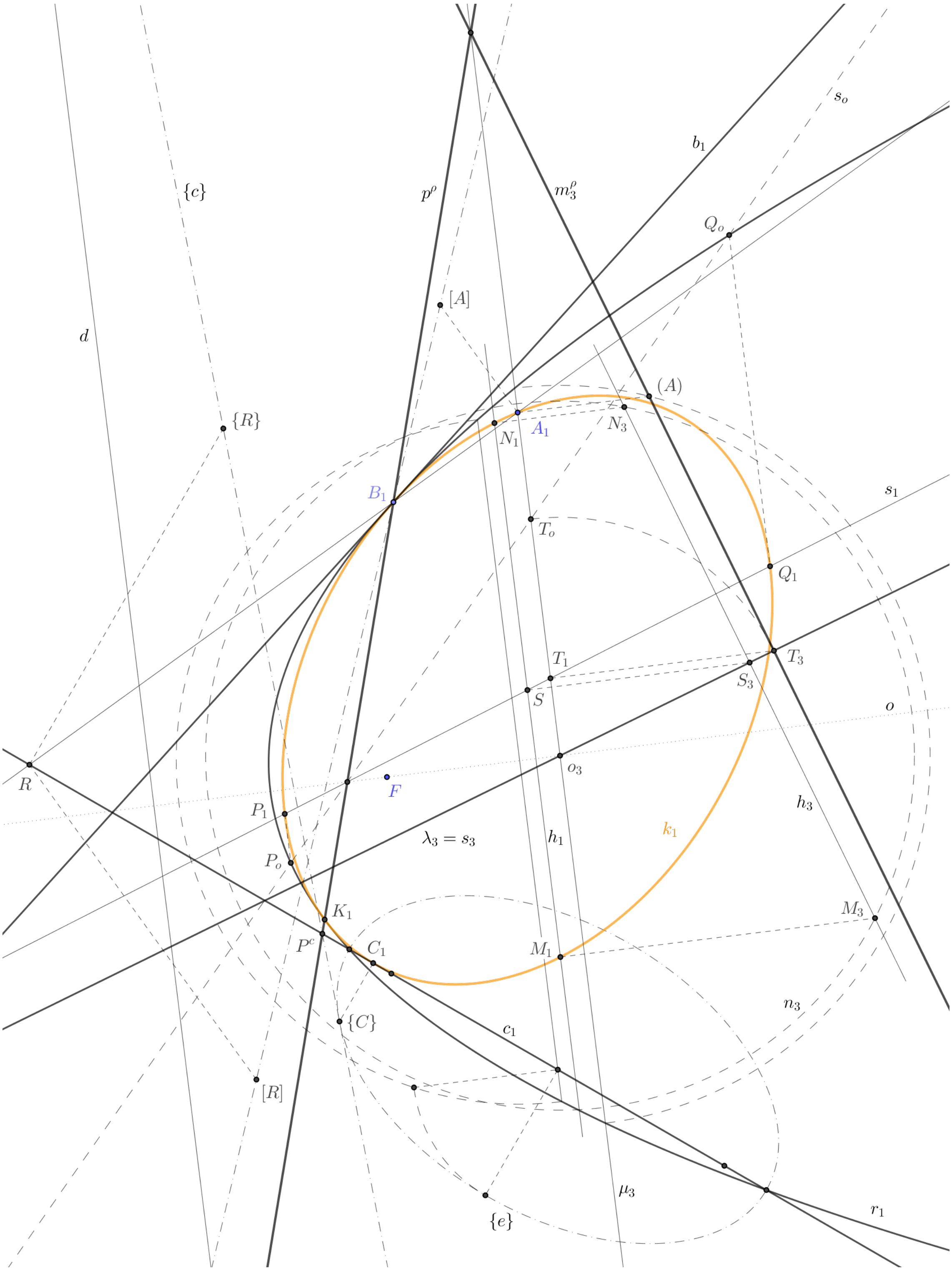
5. Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k se promítnou do průmětny jako koncové body sdružených průměrů elipsy k_1.

6. Hlavní a vedlejší osu elipsy k_1 sestrojíme Rytzovou konstrukcí.

7. Elipsa k_1.

Diskuze:

Přímkou AB lze vést dvě tečné roviny ke kuželosečce e řezu plochy $\mathcal{P}$ promítací rovinou přímky c. Úloha má dvě řešení, z nichž zřejmě žádné nemá s obrysovou parabolou imaginární dotyk.



$\{c\}$
p^ρ
m_3^ρ
b_1
s_o
Q_o
$[A]$
d
$\{R\}$
(A)
N_1
A_1
N_3
B_1
s_1
T_o
Q_1
T_1
T_3
S
S_3
o
o_3
R
F
P_1
h_3
$\lambda_3 = s_3$
h_1
k_1
P_o
K_1
M_3
P^c
C_1
M_1
n_3
$\{C\}$
c_1
$[R]$
μ_3
$\{e\}$
r_1

Obr. 5.6

Závěr

Práce se zabývá planimetrickými úlohami sestrojení kuželoseček z daných prvků, ke kterým přistupuje z prostorového hlediska. Využívá tedy opačný princip k obvykle používanému zobrazování prostoru do roviny v deskriptivní geometrii. Metody však zůstávají stejné.

V příloze je ke každému příkladu uvedeno zadání a předrýsované prvky. Díky tomu není ve většině případů třeba provádět konstrukci průnik přímky s kuželosečkou pomocí kolineace, která převede danou kuželosečku na kružnici, ale stačí průsečíky jednoduše vyznačit.

Práce obsahuje vybrané typy úloh v jejichž zadání se, kromě dané kuželosečky, vyskytují pouze body, kterými hledaná kuželosečka prochází a přímky, kterých se dotýká. Další typy příkladů, které stojí za pozornost, ale zde nejsou řešeny, tvoří úlohy, v nichž je zadán například střed nebo ohnisko hledané kuželosečky.

Sbírku úloh spolu s uvedenými pracemi je možné využít jako základ ke studiu uvedených konstrukcí kuželoseček, potažmo k ne tak obvyklému upotřebení deskriptivní geometrie při řešení úloh v rovině. Ucelenější problematika by mohla být náplní volitelného předmětu na geometricky zaměřených vysokých školách, který by měl za cíl rozvíjet možnosti uplatnění deskriptivní geometrie. S některými snazšími příklady, zejména z druhé kapitoly, lze však seznámit už žáky středních škol, při pokročilejším procvičování prostorové představivosti.

Literatura

[1] PANÁČKOVÁ, Olga. *Některé speciální vlastnosti kuželoseček z publikací českých autorů I (Konstrukce kuželoseček odvozené z prostoru).* Olomouc, 1991.

[2] HERCIKOVÁ, Pavla. *Řešení některých úloh o kuželosečkách užitím rotačních kvadrik.* Olomouc, 1995.

[3] HOLUBÁŘ, Josef. *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů.* Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.

[4] SOBOTKA, Jan. *Příspěvek k sestrojování kuželoseček dvojnásobně se dotýkajících.* In: Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1, 1903.

[5] CHODOROVÁ, Marie. *Projektivní geometrie.* Olomouc, 2013.

[6] OŠLEJŠKOVÁ, Marie, JUKLOVÁ, Lenka. *Rotační kvadriky v příkladech.* Olomouc, 2013.

[7] MACHALA, František. *Plochy technické praxe.* Olomouc, 1986.

[8] KADEŘÁVEK, František, KOUNOVSKÝ, Josef a KLÍMA, Josef. *Deskriptivní geometrie. II. díl.* Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1954.