Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka úloh Fyzikální olympiády pro ZŠ a víceletá gymnázia

Vypracoval:	**Lubomír Dvořák**
Studijní program:	B7507 Specializace v pedagogice
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	duben 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Lukáše Richterka, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 18. dubna 2022

. . . .

Lubomír Dvořák

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Lubomír Dvořák
Název práce	Sbírka úloh Fyzikální olympiády pro ZŠ a víceletá gymnázia
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022
Abstrakt	Tato bakalářská práce se zaměřuje na vytvoření sbírky úloh z okresních kol kategorií E a F Fyzikální olympiády ČR za posledních deset ročníků. V práci je možné naleznout statistické zpracování dat výsledkových listin. Hlavními analytickými nástroji je obtížnost a citlivost úloh. Sbírka je rozčleněna do tematických kategorií a uspořádána podle klesajícího indexu obtížnosti. Jednotlivé úlohy jsou opatřeny kódem a jménem autora. Na statistickém souboru je pozorován trend účasti a analýza jednotlivých úloh i testů jako celku.
Klíčová slova	sbírka úloh, Fyzikální olympiáda, index obtížnosti, Pearsonův koeficient korelace, vývoj účasti
Počet stran	110
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Lubomír Dvořák
Title	Collection of problems of the Physics Olympiad for elementary and lower grammar schools
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	The focus of this bachelor thesis is to create a collection of problems from the last ten district rounds of the Physics olympiad of Czech republic in cathegories E and F. In the thesis one can find a statistical analysis of results from these rounds. Main analytical tools are difficulty index and sensitivity of the distribution of data. The collection is divided thematically and by a descending difficulty index. Individual problems are given a code and a name of the author. In the data set, there is an observable participation trend and an analysis of individual problems and the test as a whole.
Keywords	collection of problems, Physics olympiad, difficulty index, Pearson correlation coefficient, trend in participation
Number of pages	110
Number of appendices	1
Language	czech

Obsah

Úvod

Cílem mé práce bylo roztřídit, sjednotit, zkontrolovat a popřípadě upravit úlohy, které se objevily na okresních kolech Fyzikální olympiády kategorie E a F za posledních deset ročníků s účelem úlohy sestavit do sbírky. Úlohy jsem uspořádal podle vzrůstající obtížnosti, aby řešitelé mohli postupně zdokonalovat své znalosti a rozlišovat úlohy náročnější od snazších. Pomocí sběru, třídění a analyzování dat se mi podařilo stanovit obtížnosti jednotlivých úloh, sledoval jsem jejich citlivost v rámci jednotlivých ročníků, vyhodnotil jsem obtížnosti jednotlivých testů a díky statistickému souboru sledoval vývoj účasti jak v jednotlivých krajích, tak v České republice. Tato práce je součástí serie bakalářských prací, jež dohromady vytvoří přehledný soubor statistik a úloh Fyzikální olympiády za uplynulé desetiletí.

Práce je rozdělena do třech kapitol. V kapitole první jsem se pokusil formulovat několik hypotéz ohledně účasti v okresních kolech soutěže a zastoupení kategorií úloh. Shrnuji zde také problematiku sběru dat a sestavování velkého statistického souboru.

Kapitola druhá je věnována definicím charakteristik soutěžních úloh. Ilustruje rozdělení tematických kategorií a jak se v těchto kategoriích mění obtížnost. Zhodnotil jsem zde, jaké oblasti jsou nejnáročnější, nejsnadnější a jaké mají vlastnosti. Věnoval jsem se i krátkému rozboru statisticky nejzajímavějších úloh. Nakonec jsem se pokusil vyhodnotit vývoje účasti v krajích i v celé ČR.

Kapitola třetí obsahuje samotnou sbírku úloh, která byla roztříděna do kategorií, v nichž byly úlohy seskupeny a seřazeny vzestupně podle obtížnosti. Zadání a řešení úloh jsem přejal ze zdrojových kódů, popřípadě přepsal ze starších ročníků. Jak zadání, tak řešení jsem zkontroloval, pokud to bylo nutné, doplnil řešení, popř. alternativní řešení, dokreslil schémata a grafy, upravil zaokrouhlování a gramatické chyby. V několika případech jsem pozměnil formátování úlohy, aby byla přehlednější. Ke každé úloze jsem přiřadil identifikační kód a autora úlohy. K mé bakalářské práci také přikládám soubor v programu MS EXCEL, který obsahuje celý soubor dat, výpočty a podklady pro tvorbu této práce.

Rád bych vyjádřil svůj vděk vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D. z Univerzity Palackého v Olomouci za jeho trpělivost, čas a ochotu mi pomáhat při sestavování této práce. Dále bych rád poděkoval doc. RNDr. Janu Křížovi, Ph.D. z Univerzity v Hradci Králové, RNDr. Pavlovi Křížovi, Ph.D. z Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, Mgr. Jindřichovi Pulíčkovi z Gymnázia Dr. Antona Randy v Jablonci nad Nisou, RNDr. Vladimíru Víchovi z Gymnázia Dašická 1083 z Pardubic, Mgr. Miroslavě Maňáskové z Gymnázia Uherské Hradiště, Štěpánce Macháčkové ze SVČ Ostrava, Bc. Radce Hrubé ze SVČ Fokus Nový Jičín, Mgr. Júlii Sladkowské ze SVČ Juventus Karviná a Anně Křistkové ze SVČ Klíč Frýdek–Místek za poskytnuté výsledkové listiny. Chtěl bych také poděkovat mým rodičům Lubomírovi a Aleně Dvořákovým a zejména mé přítelkyni Ivaně Kočkové za jejich podporu.

Kapitola 1

Hypotézy a sběr dat

1.1 Hypotézy a očekávané výsledky

Kromě sestavení sbírky úloh okresních kol Fyzikální olympiády bylo cílem práce také analyzovat data z dostupných výsledkových listin soutěže a vysledovat případné trendy v počtu řešitelů, obtížnosti zastoupených kategorií i typů úloh a případnému vlivu pandemie koronaviru. Před samotným zpracováním výsledných dat jsme se pokusili formulovat několik jednoduchých očekávaných závěrů, jež by mohly být ověřeny nebo vyvráceny:

- Při sestavování práce jsme si kladli otázku, zdali je možné pozorovat klesající trend účasti na okresních kolech Fyzikální olympiády (FO) jak v krajích, tak celostátně za posledních deset let.
- Domnívali jsme se, že nebude možné sestavit kompletní statistiku pro celou ČR, protože výsledky z některých regionů nebudou dostupné. Optimistickým cílem bylo sestavení statistiky pro Moravu (popř. Slezsko), vzledem k tomu, že Olomoucký kraj má již statistiku kompletní a předpokládá se, že Moravskoslezský, Zlínský a Jihomoravský kraj budou své výsledkové listiny archivovat.
- V kategorii E fyzikální olympiády bude znatelně nižší účast oproti kategorii F – úspěšní řešitelé kategorie F budou v soutěži pokračovat, neúspěšní řešitelé nikoli.
- Vliv pandemické situace v 62. ročníku (rok 2021) byl znatelný a bude jej možné pozorovat. Okresní kola proběhla online. Vzhledem k povinnému zápisu výsledků do odevzdávacího systému OSMO[1] bude statistika pro celou ČR ucelená pouze za 62. ročník.
- Největší počet úloh bude z oblasti kinematiky, protože toto téma je pro žáky ZŠ snáze uchopitelné a řešitelné.
- Ve sbírce se budou nacházet i úlohy velmi snadné – motivační.
- Úlohy týkající se řešení složitějších rovnic, vyjadřování ze vzorců a grafického řešení (např. skládání sil) budou pro řešitele velmi obtížné.

1.2 Sběr dat

Cílem sběru dat bylo sestavit co největší soubor výsledků jednotlivých úloh obou kategorií, zkontrolovat vzájemnou korelaci bodového ohodnocení a celkového bodového zisku v soutěži. Dále jsme pomocí získaných dat chtěli prověřit výše uvedené hypotézy a využít data také jako nástroj k organizaci sbírky, pomocí nich je možné určit obtížnost úloh a rozpoznat úlohy příliš snadné nebo obtížné.

Soubor dat byl sestaven z údajů výsledkových listin FO z deseti krajů ČR [2, 3, 4, 5]. Bohužel pouze 3 kraje byly konzistentní ve všech ohledech, tzn. výsledkové listiny obsahují informace z posledních deseti ročníků okresních kol obou kategorií a v rámci kraje zahrnují všechny okresy. Jedná se o kraje Olomoucký, Liberecký a Jihočeský.

U všech ostatních krajů se při sběru listin naskytlo velké množství problému – jedná se o: výsledky pouze jedné kategorie (Hlavní město Praha), omezený počet archivovaných ročníků (2–5, kraje Pardubický, Královehradecký, Karlovarský), chybějící okresy (např. ze Zlínského kraje dostupný pouze jeden okres), částečně chybějící okresy (Moravskoslezský kraj, okres Karviná – dostupné pouze ročníky 59–62). Kraj Jihomoravský byl téměř konzistentní, chyběl pouze jeden ročník, ale z některých okresů nebylo možno výsledky získat (změna pořadatele, ztráta zálohovaných dat).

Dalším problémem byla přístupnost výsledkových listin. Ta se odvíjela od systému archivování listin jednotlivými kraji. Malé množství krajů má listiny volně přístupné na svých webových stránkách. Často jsou listiny v různých a různě přehledných systémech. Často bylo nutné kontaktovat krajskou komisi FO, nebo zástupce okresních komisí. Výsledkové listiny se nacházely buď v osobním archivu, nebo musely být z místních archivů získávány. Velké množství výsledkových listin mělo pouze celkový součet bodového ohodnocení, tudíž byly např. pro vyhodnocení vlastností úloh nevhodné.

Vzhledem k velkému rozdílu formátování – použití různých datových souborů pro výsledkové listiny (.html, .doc, .xlsx, .jpeg) – byl přepis a třídění výsledků velmi časově náročný. Kategorie E sestává z 16380 vstupních hodnot, kategorie F z 14011 hodnot o řešení úloh.

V rámci výsledkových listin se také lišil zápis nenormovaných odpovědí. Některé výsledkové listiny je označovaly písmeny, nebo pomlkou, ale vyskytly se i ty, které nenormované odpovědi a nulové bodové ohodnocení úlohy nerozlišovaly. Proto nenormované odpovědi nebyly do souhrnné statistiky zahrnuty, byly ve statistice vyhodnocovány jako nulový bodový zisk.

Výsledková listina 62. ročníku (2020/2021) byla získána vedoucím této bakalářské práce z odevzdávacího systému OSMO, tudíž obsahuje výsledky všech soutěžících z ČR. Jedná se tedy o jediný ročník, který přesně určuje celkový počet soutěžících, jejich výsledky a soutěžní místo. Kvůli pandemii koronaviru se ale online okresních kol oproti jiným ročníkům účastnilo nejméně soutěžících.

Kapitola 2

Analýza statistického souboru

K zadání úloh okresního kola můžeme z hlediska analýzy položek (úloh) přistupovat podobně jako k didaktickému testu. Didaktický test může spolehlivě ověřit znalosti a vědomosti pouze v případě, pokud je zaručeno, že zkoumaný statistický vzorek obsahuje dostatečné množství testovaných. Aby byla analýza vzorku co nejpřesnější, je potřebné, aby se počet testovaných pohyboval ideálně v řádu stovek až tisíců [7]. V našem případě byla tato podmínka splněna, počet řešitelů se pohyboval v intervalu 189–371. Pokud je tato podmínka splněna, je možné zjišťovat jednotlivé vlastnosti úloh a testu jako celku [6].

2.1 Obecná analýza vlastnostní výsledků testu

Analýza vlastností výsledků testu je důležitá pro určení a posouzení kvality testu a jednotlivých úloh [7]. Pro toto posouzení byla použita obtížnost úlohy a citlivost úlohy. Definujeme tyto charakteristiky.

2.1.1 Hodnota obtížnosti úloh

Hodnota obtížnosti Q úloh je číslo, které udává procentuální zastoupení chybných nebo vynechaných odpovědí [7]. Určuje se podle vztahu:

$$Q = \frac{n_n}{n} \cdot 100\,\%,$$

kde Q je hodnota obtížnosti, n_n je počet nesprávných nebo vynechaných odpovědí a n je celkový počet odpovědí.

2.1.2 Index obtížnosti úloh

Index obtížnosti P úloh je číslo, které udává procentuální zastoupení správných odpovědí [7]. Určuje se podle vztahu:

$$P = \frac{n_s}{n} \cdot 100\,\%,$$

kde P je index obtížnosti, n_s je počet správných odpovědí n je celkový počet odpovědí. Mezi hodnotou obtížnosti a indexem obtížnosti existuje vztah:

$$P + Q = 100\,\%.$$

Index obtížnosti u váženého skórování je možné určit pomocí obecného indexu obtížnosti podle [13]:

$$P = \frac{\overline{x}}{x_m} \cdot 100\,\%, \tag{2.1}$$

kde $\overline{x}$ je aritmetický průměr bodového ohodnocení otázky u všech testovaných a x_m je maximální možné bodové ohodnocení otázky.

2.1.3 Citlivost úlohy

Citlivostí úlohy označujeme vlastnost, jak dobře dokáže úloha rozlišovat mezi testovanými s lepšími a horšími schopnostmi. Citlivost úloh lze vypočítat pomocí různých metod a koeficientů. Úlohy s vysokou citlivostí jsou takové, které jsou úspěšně řešeny osobami s lepšími schopnostmi, kdežto osoby s horšími schopnostmi v úloze selhávají [6]. Citlivost úlohy je ukazatel, jaké má bodové ohodnocení v úloze vliv na celkový výsledek testu, proto je důležitým analytickým nástrojem. Pro potřeby této práce a určení citlivosti byl využit *Pearsonův korelační koeficient*, který je implementovaný v softwarovém programu MS Excel jako funkce CORREL. Podle [14] lze koeficient spočítat jako:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}, \tag{2.2}$$

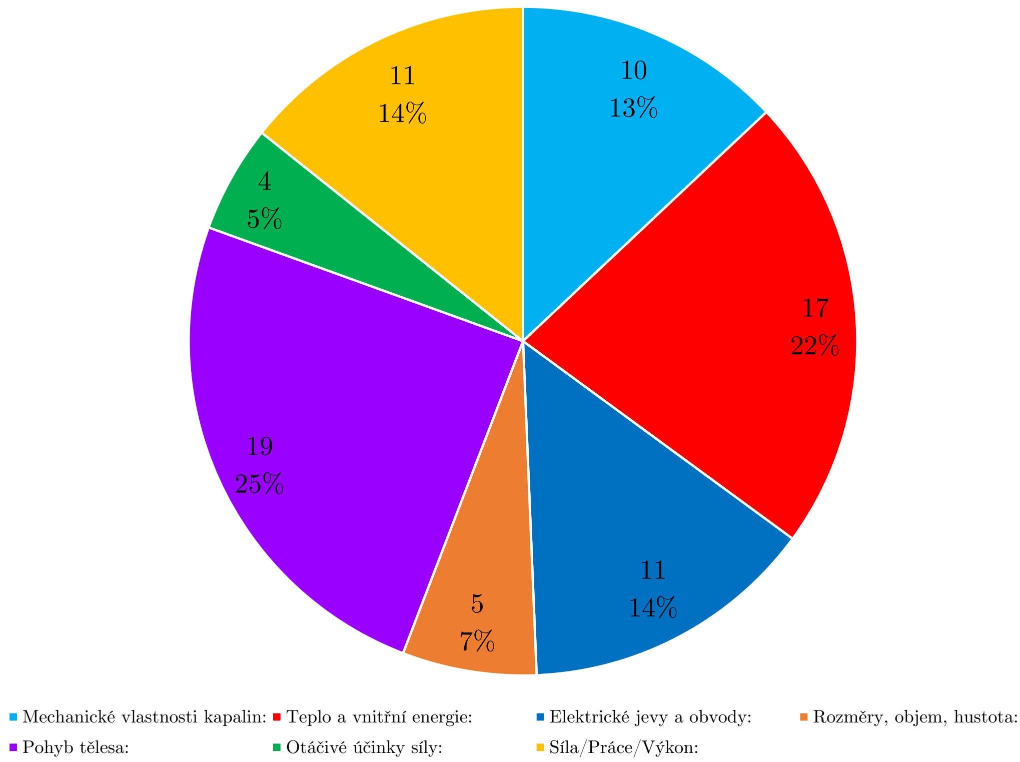
kde x_i je i-té bodové ohodnocení úlohy, $\overline{x}$ je aritmetický průměr bodového ohodnocení úlohy u všech testovaných, y_i je i-té bodové ohodnocení v celém testu a $\overline{y}$ je aritmetický průměr celkového bodového ohodnocení testu u všech testovaných [13].

Pearsonův korelační koeficient nabývá hodnot v intervalu od -1 do $+1$. Hodnota -1 značí slabou korelaci, tzn. že osoby s horšími schopnostmi jsou v zodpovídaní úloh úspěšnější, než osoby s lepšími schopnostmi. Tento jev je velmi nepravděpodobný – test by musel obsahovat řadu velmi obtížných úloh, které by se osoby s lepšími vědomostmi snažily bezvýsledně vyřešit podle jejich znalostí a osoby s horšími vědomostmi by test náhodně vyplnily s určitou úspěšností. Hodnota 0 znamená, že mezi bodovým ohodnocením úlohy a celkovým bodovým ohodnocením neexistuje závislost. Z charakteru testu – zadání úloh Fyzikální olympiády – je toto nelogické. Očekává se, že *Pearsonův korelační koeficient* bude nabývat hodnot kladných.

2.2 Analytický rozbor statistického souboru

2.2.1 Tematické kategorie sbírky

Sbírka byla rozčleněna do sedmi kategorií odpovídajících tématickým celkům v učebnicích [9, 10, 11, 12]. Pokud některá úloha zahrnovala kroky či podotázky z více kategorií (např. Pohyb tělesa i Síla/Práce/Výkon), byla zařazena do později probíraného či obtížnějšího tématu (Síla/Práce/Výkon). Na obr. 2.1 je možné pozorovat nejpočetnější zastoupení kategorií Pohyb tělesa a Teplo a vnitřní energie. Základoškolská fyzika má největší časovou dotaci těchto oblastí v sedmých a osmých ročnících[8], tudíž není překvapením, že z nich bude vybráno nejvíce příkladů. Počty úloh v tematických kategoriích sbírky a statistickém souboru se liší třemi položkami. Proto je mezi nimi rozlišováno. Jedná se o duální úlohy z 53. ročníku, které byly zadány jak v kategorii E, tak v kategorii F.



Obrázek 2.1: Zastoupení tematických kategorií ve sbírce

2.2.2 Zastoupení obtížnosti v kategoriích

Podle indexu obtížnosti lze úlohy rozdělit na čtyři skupiny. Velmi snadné úlohy jsou ty, jejichž index obtížnosti nabývá hodnot $P > 80\,\%$. Snadné úlohy mají index obtížnosti $80\,\% \geq P > 50\,\%$, obtížné úlohy se pohybují v rozmezí $50\,\% \geq P > 20\,\%$ a velmi obtížné úlohy $P \leq 20\,\%$. Velmi snadné úlohy slouží v testech nebo zadáních FO jako úlohy motivační. Mají za cíl řešitele dostat do dobré nálady, zrelaxovat jejich myšlení a připravit je na úlohy náročnější. Úlohy velmi obtížné by se v testu zpravidla objevovat neměly. Úlohy, jejichž indexy obtížnosti se pohybují buď kolem hodnoty $P = 100\,\%$ nebo $P = 0\,\%$ jsou úlohy extrémně snadné (triviální) nebo extrémně obtížné a neměly by být zařazovány [6].

Ve statistickém souboru se objevily dvě velmi lehké úlohy a to obě v kategorii Pohyb těles. To je 10,5 % celkového počtu úloh této kategorie. Také se zde objevily čtyři velmi obtížné úlohy. Jedna v kategorii Síla/Práce/Výkon, to je $8{,}\overline{3}\,\%$ úloh kategorie, dvě v kategorii Teplo a vnitřní energie to je $11{,}\overline{1}\,\%$ kategorie a jedna úloha v kategorii Elektrické jevy a obvody, to je 9,1 % kategorie.

Na obr. 2.2 je možné pozorovat složení kategorie Pohyb tělesa pomocí hodnoty indexu obtížnosti P pro jednotlivé úlohy. Jedná se o kategorii spíše snazší, obsahuje 19 úloh, což je celá čtvrtina sbírky. Tato kategorie je optimálně obtížnostně rozvržena. Velmi často jsou úlohy z této kategorie v testu fyzikální olympiády úvodní (Ú1) a měly by být snazší. Nachází se zde třináct úloh snadných, což je 68,4 % kategorie a nachází se zde čtyři úlohy obtížné.

Na obr. 2.3 v kategorii Teplo a vnitřní energie sledujeme růst obtížnosti úloh oproti 2.2, P v rámci tematické kategorie rychleji klesá. Nachází se zde 38,9 % úloh snadných a 50,0 % úloh obtížných.

Třetí nejpočetnější kategorii, kterou je Síla/Práce/Výkon, pozorujeme na obr. 2.4.

Nachází se zde druhé největší zastoupení úloh snadných, kterých je $58,\overline{3}\,\%$ z kategorie. Úloh obtížných je $33,\overline{3}\,\%$.

Jako náročná se pro řešitele ukázala kategorie Elektrické jevy a obvody, jejíž složení je možné zhodnotit na obr. 2.5. Zastoupení snadných úloh je 27,3 % a obtížných 63,6 %.

Jedna z nejnáročnějších kategorií byla Mechanické vlastnosti kapalin viz obr. 2.6. Jediná snadná úloha tvoří 9,1 % kategorie. Zbývající úlohy jsou obtížné se zastoupením 90,9 %.

Rozložení druhé, nejméně zastoupené kategorie, Rozměry, hmotnost a hustota, je zjevné z obr. 2.7. Úloh snadných bylo 80,0 % a jediná obtížná úloha reprezentuje 20,0 %.

Nejméně zastoupená kategorie s názvem Otáčivé účinky síly sestávala pouze z úloh obtížných (viz obr. 2.8).

2.2.3 Vlastnosti kategorií a jednotlivých úloh

Pro porovnání a vyhodnocení vlastností kategorií byly zpracovány dva důležité parametry. Tím jsou průměrné hodnoty indexů obtížnosti $\overline{P}$ (viz obr. 2.9) a průměrné hodnoty *Pearsonova korelačního koeficientu* $\overline{r}$, které jsou vneseny do grafu na obr. 2.10.

Z obr. 2.9 usuzujeme, že kategorie Rozměry, objem, hustota a Pohyb tělesa jsou nejsnazší. Jejich průměrné indexy obtížnosti jsou $\overline{P} = 65{,}1\,\%$ a $\overline{P} = 61{,}8\,\%$. S výpočty rozměrů, hmotností a hustot se žáci často ve fyzice setkávají, není tedy překvapením, že v této kategorii převažovaly snadné úlohy. Stojí za to zmínit, že pro vyhodnocení aritmetického průměru by bylo žádoucí, aby kategorie sestávala z více než deseti úloh. Nejobtížnější kategorie byly Otáčivé účinky síly ($\overline{P} = 37{,}8\,\%$), Mechanické vlastnosti kapalin ($\overline{P} = 38{,}8\,\%$) a Elektrické jevy a obvody ($\overline{P} = 39{,}7\,\%$).

Z grafu na obr. 2.10 je zjevné, že průměrné hodnoty *Pearsonova korelačního koeficientu* $\overline{r}$ se pohybují v intervalu 0,70–0,77, což ukazuje velmi vysokou závislost [6]. Není tedy možné jednoznačně stanovit, zdali skóre některé kategorie více či méně koreluje se skóre z celého testu/celého okresního kola v daném ročníku.

Z analýzy jednotlivých hodnot r vidíme, že žádná nebyla nižší než 0,40, což je orientační minimální hodnota citlivosti položky [6]. Až na dvě úlohy se hodnoty r pohybovaly v intervalu 0,60–0,83, což značí jejich střední až vysokou závislost mezi skóre řešitelů v dané úloze a jejich celkovým skóre. Úloha FO56F2-2 měla $r = 0{,}57$ a FO59F2-3 měla $r = 0{,}50$.

Úloha FO59F2-3 byla také druhou nejnáročnější úlohou s $P = 15{,}7\,\%$. Její nízká hodnota r může s touto vlastností korespondovat, vzhledem k tomu, že většina soutěžících v úloze selhala, byla pozorována střední korelace mezi skóre úlohy oproti celkovému skóre.

Bylo zajímavé pozorovat, že index obtížnosti úlohy FO56F2-2 je $P = 51{,}5\,\%$, což dělá úlohu v souboru nejoptimálnější co se obtížnosti týče ($P \approx 50{,}0\,\%$). Při dalším porovnání hodnot r a P u úloh, jejichž P se blíží optimální hodnotě nebyla nalezena závislost. Pro ilustraci – FO62E2-2 ($P = 52{,}4\,\%$, $r = 0{,}80$), FO61E2-4 ($P = 53{,}0\,\%$, $r = 0{,}76$) a FO54F2-3 ($P = 49{,}8\,\%$, $r = 0{,}80$).

2.2.4 Vývoj účasti v krajích

Účast na okresních kolech fyzikální olympiády v jednotlivých krajích sice fluktuuje, proložení lineární závislostí ale ukazuje klesající tendenci. To můžeme pozorovat na obrázcích 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 a 2.16. Na horizontálních osách jsou vzestupně seřazeny jednotlivé ročníky a na vertikálních osách značí N počet účastníků v jednotlivém kraji a v odpovídající kategorii. Účást v každém ročníku byla proložena lineární závislostí pomocí lineární regrese v programu MS EXCEL.

U 62. ročníku (2020/2021) pozorujeme značný propad, který byl způsobený pandemií koronaviru. Tento ročník byl také zatím jako jediný pořádaný v distanční formě. Tyto okolnosti s velkou pravděpodobností snížily motivaci potřebnou k účasti na Fyzikální olympiádě. Pandemie zřejmě oslabila motivační působení učitelů při získávání účastníků soutěže.

Zajímavý jev pozorujeme na obr. 2.17. V kraji Praha se účast postupně zvyšuje a mírně roste. Bohužel byla získána data pouze pro kategorii E.

2.2.5 Vývoj účasti v ČR

Problematika sběru dat zapříčinila významnou nekonzistenci v datech potřebných pro určení celkové účasti, a tudíž nemohla být kompletně zpracována. Konzistentní data jsou pouze za 62. ročník. Po kontaktování předsedy ústřední komise doc. RNDr. Jana Kříže, Ph.D., bylo zjištěno, že ani ústřední komise FO nemá ucelenou statistiku popř. vývoj účasti pro celou ČR. Byl poskytnut pouze kvalifikovaný odhad z šesti ročníků, který byl odeslán na MŠMT ČR. Tato data byla zkombinována a zapracována do grafů vývoje účasti v ČR (viz obr. 2.18 a 2.19).

Při pozorování statistického souboru v krajích a z celkového množství vstupních dat bylo zjištěno, že kategorie E se účastní více soutěžících než kategorie F. Náš původní předpoklad byl opačný. Očekávalo se, že soutěžící, kteří byli neúspěšní v kategorii F ztratí motivaci a nebudou následující rok pokračovat v soutěži, a tudíž jich bude méně. Někteří žáci tak začínají FO řešit až v posledním ročníku ZŠ (popř. odpovídajícím ročnících víceletých gymnázií). Z dat nelze jednoznačně rozhodnout, zda hraje roli započítávání olympiád při přijímacím řízení na SŠ.

2.2.6 Obtížnost ročníků

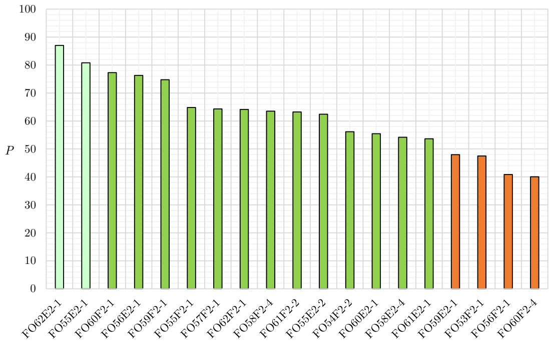
Vzhledem k tomu, že byly spočteny indexy obtížnosti P u jednotlivých úloh je možné určit celkovou obtížnost ročníku okresního kola jako aritmetický průměr indexů obtížnosti úloh Ú1, Ú2, Ú3 a Ú4. Bylo stanoveno, že průměrný index obtížnosti optimálně náročného testu nebo sady úloh by se měl pohybovat kolem hodnoty $P = 50\,\%$.

Vývoj obtížnosti kategorie E je na obr. 2.20 a kategorie F na obr. 2.21.

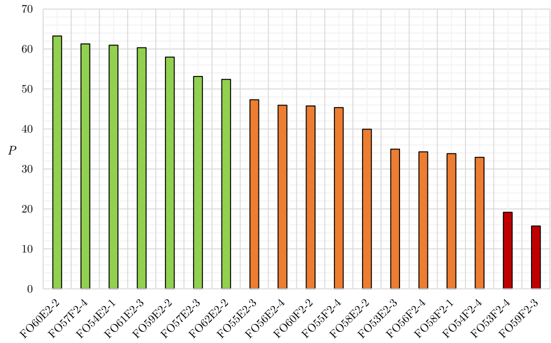
Mezi nejsnadnější v kategorii E patří ročníky 62 ($\overline{P} = 64{,}2\,\%$) a 54 ($\overline{P} = 62{,}9\,\%$). Nejnáročnější byly ročníky 58 ($\overline{P} = 38{,}2\,\%$) a 57 ($\overline{P} = 37{,}7\,\%$). Mezi nejsnadnější v kategorii F patří ročníky 62 ($\overline{P} = 60{,}4\,\%$) a 61 ($\overline{P} = 57{,}9\,\%$). Nejnáročnější byl ročník 53 ($\overline{P} = 34{,}3\,\%$). Nelze vyloučit, že k dobrým výsledkům v 62. ročníku přispěla online forma soutěže a možná spolupráce řešitelů (nebyli při řešení nijak sledováni).

Optimálně náročného testu bylo dosaženo v kategorii E v ročníku 61 ($\overline{P} = 50{,}4\,\%$) a v kategorii F v ročníku 54 ($\overline{P} = 49{,}6\,\%$), avšak ročníky 59 ($\overline{P} = 48{,}9\,\%$) a 55 ($\overline{P} = 48{,}3\,\%$) je možné taktéž považovat za vyhovující.

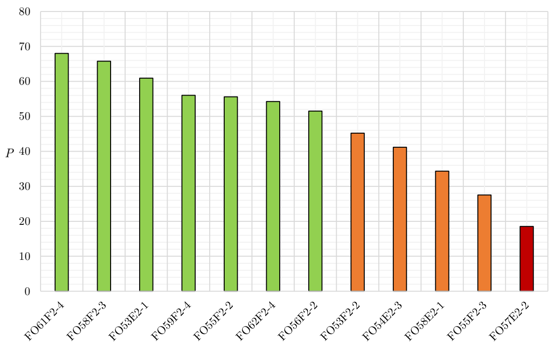
Zajímavé bylo srovnání obtížnosti 53. ročníku u obou kategorií. Oba ročníky obsahovaly tři společné (duální) úlohy a jednu unikátní úlohu pro každou kategorii. Průměrný index obtížnosti pro kategorii E byl $\overline{P} = 45{,}9\,\%$ a pro kategorii F $\overline{P} = 34{,}3\,\%$. Tento jev nebyl překvapující, protože se očekávalo, že starší žáci s větším objemem znalostí budou při řešení stejných úloh úspěšnější.



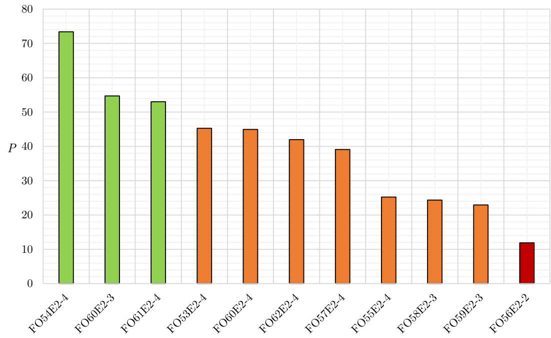
Obrázek 2.2: P, Pohyb tělesa



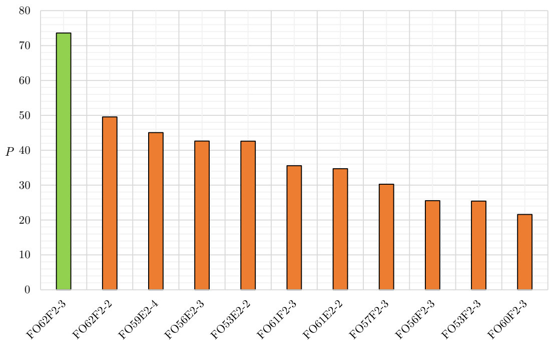
Obrázek 2.3: P, Teplo a vnitřní energie



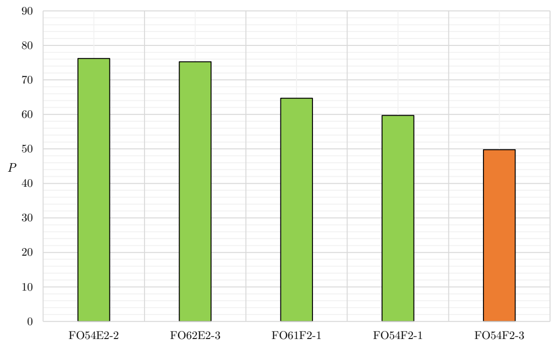
Obrázek 2.4: P, Síla, práce, výkon



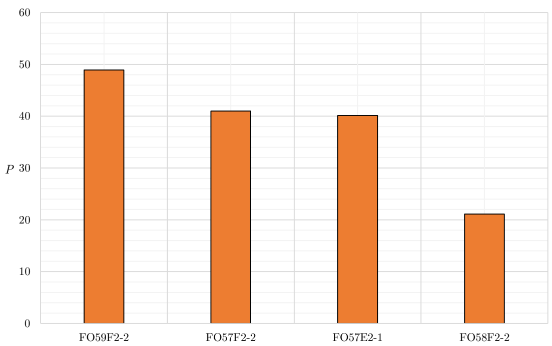
Obrázek 2.5: P, Elektrické jevy a obvody



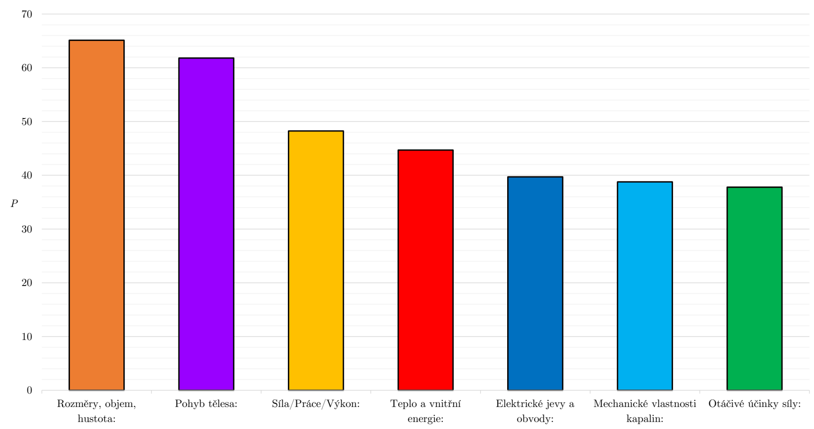
Obrázek 2.6: P, Mechanické vlastnosti kapalin



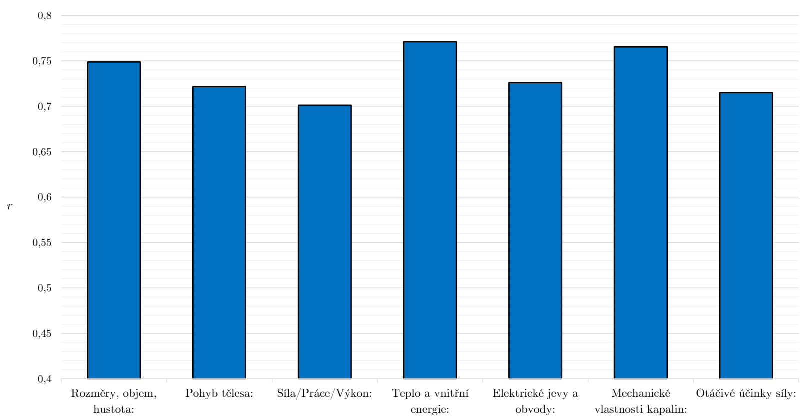
Obrázek 2.7: P, Rozměry, hmotnost a hustota



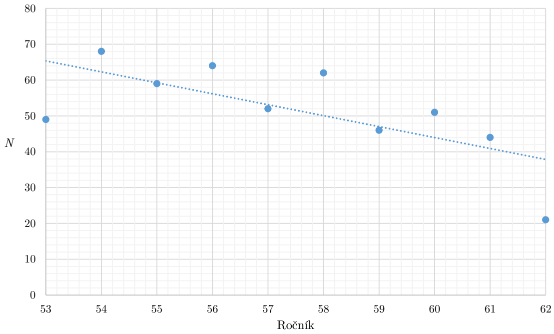
Obrázek 2.8: P, Otáčivé účinky síly



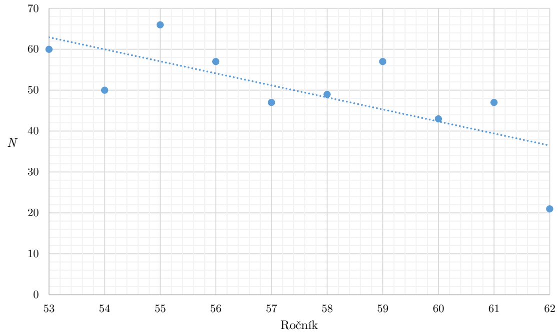
Obrázek 2.9: Průměrná hodnota P



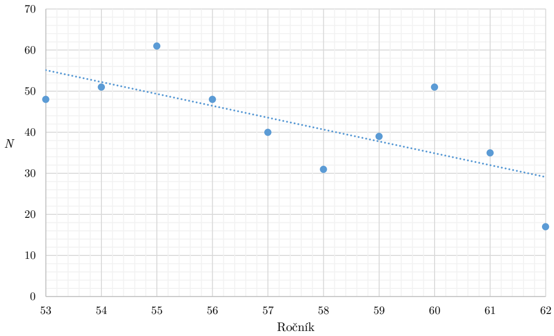
Obrázek 2.10: Průměrná hodnota *Pearsonova korelačního koeficientu*



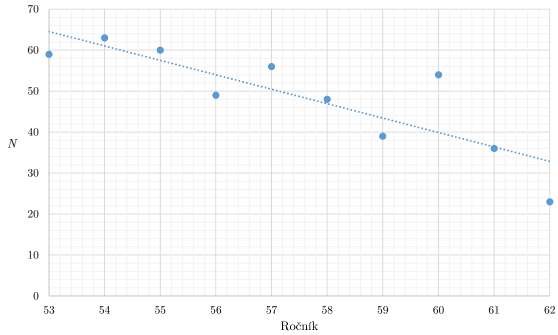
Obrázek 2.11: Olomoucký kraj, kat. E



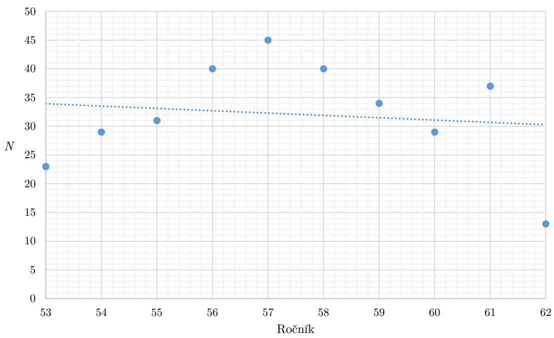
Obrázek 2.12: Olomoucký kraj, kat. F



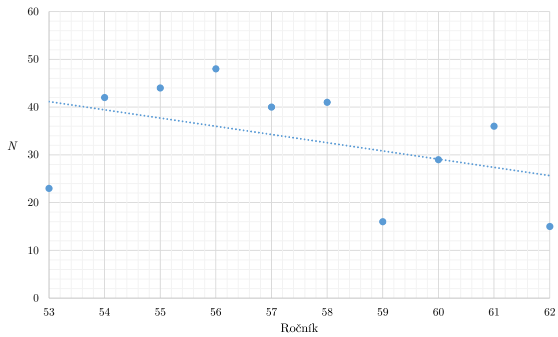
Obrázek 2.13: Liberecký kraj, kat. E



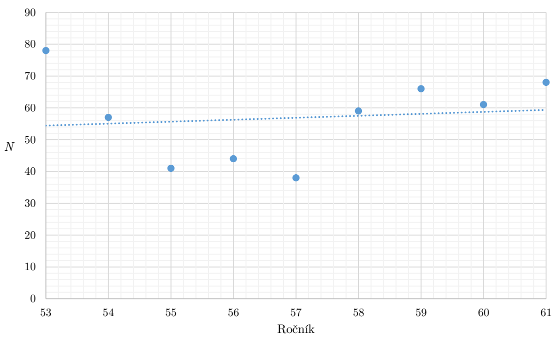
Obrázek 2.14: Liberecký kraj, kat. F



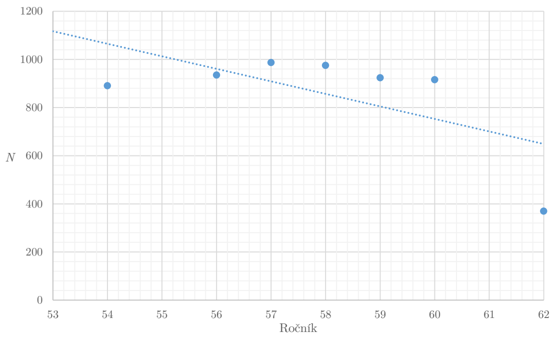
Obrázek 2.15: Jihočeský kraj, kat. E



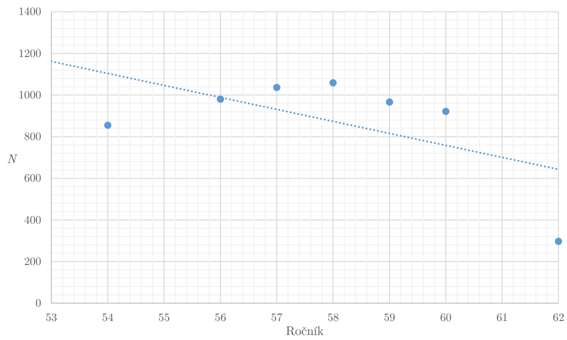
Obrázek 2.16: Jihočeský kraj, kat. F



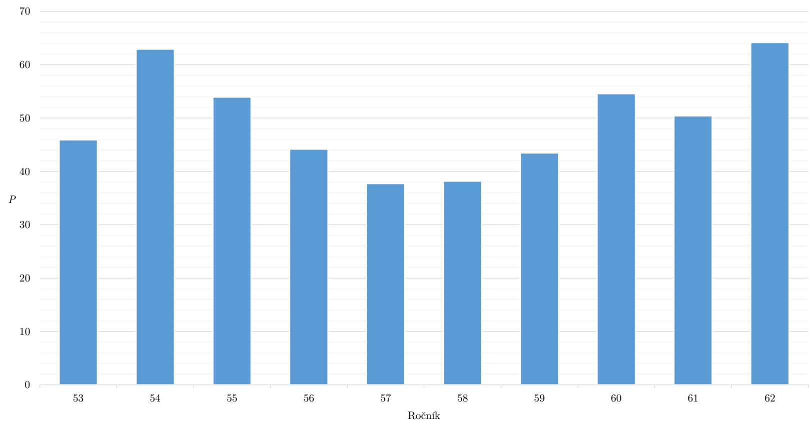
Obrázek 2.17: Praha, kat. E



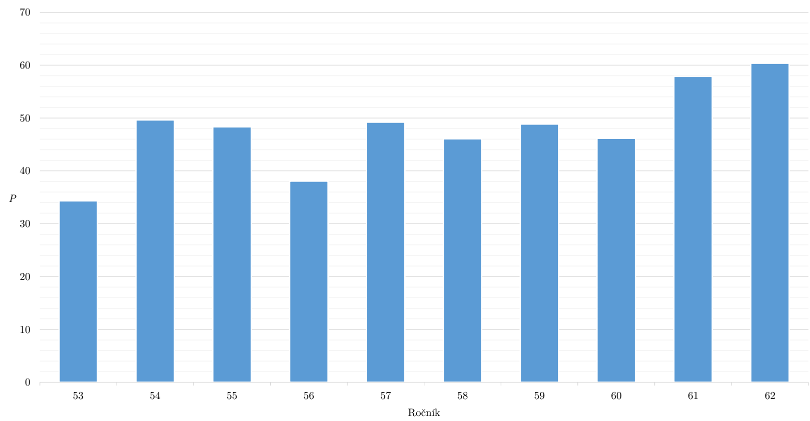
Obrázek 2.18: ČR, kat. E



Obrázek 2.19: ČR, kat. F



Obrázek 2.20: Průměrná hodnota P, kat. E



Obrázek 2.21: Průměrná hodnota P, kat. F

Kapitola 3

Sbírka úloh

Okresní kolo fyzikální olympiády kat. E a F sestává vždy ze čtyř úloh (Ú1, Ú2, Ú3 a Ú4). Obtížnost úloh by měla postupně narůstat, avšak jejich tématické zařazení je různé, tj. dáno velkým spektrem jednotlivých oblastí fyziky jako vědy. Pro účely sbírky byly úlohy rozděleny podle obtížnosti, ne podle jejich pořadí v jednotlivých ročnících. Úlohy byly součástí okresních kol kategorií E (9. ročník ZŠ) a F (8. ročník ZŠ). Sbírka obsahuje úlohy z 53. až 62. ročníku FO ČR.

Samotná sbírka úloh Fyzikální olympiády se skládá ze 77 úloh, které byly rozděleny do sedmi kapitol, jejichž názvy korespondují s kapitolami asi nejpoužívanější řady učebnic Fyzika pro 6., 7., 8. a 9. ročník základní školy [9, 10, 11, 12]. Názvy kapitol byly voleny tak, aby jim žák základní školy či nižšího gymnázia rozumněl, mohl se zorientovat a efektivně se připravit na soutěž. Bylo tedy opuštěno od pokročilejšího názvosloví (např. kinematika, termika). V jednotlivých kapitolách se nacházejí úlohy z obou kategorií E a F. Je tomu tak proto, aby si čtenář mohl zopakovat či srovnat úlohy z obou kategorií a aby byla zachována přehlednost a celistvost tématiky.

Úloha se skládá z hlavičky, zadání a řešení. Hlavička úlohy obsahuje kód úlohy (ročník, kategorie, číslo úlohy), autora a index obtížnosti uvedený v procentech. Zadání obsahuje otázky, fyzikální konstanty, popř. schémata, nákresy či tabulky. Řešení obsahuje správné autorské řešení (včetně řešení grafického, pokud je požadováno), bodové hodnocení jednotlivých položek, popř. alternativní řešení ve formě poznámky.

3.1 Pohyb tělesa

FO62E2-1: Výlet na Kašperk Mária Benediková, 87,0 %

Milan, Tomáš a Eva vyrazili pěšky z Kašperských Hor na hrad Kašperk. Tomáš s Evou šli průměrnou rychlostí $v_1 = 3{,}0\,\mathrm{km/h}$, sportovec Milan šel napřed koupit lístky rychlostí $v_2 = 6{,}0\,\mathrm{km/h}$. Z náměstí v Kašperských Horách vyrazili všichni současně, Milan přišel na hrad v 10:00, Tomáš s Evou v 10:30.

a) Jakou dobu t_1 trvala cesta na hrad Tomášovi s Evou a jakou dobu t_2 Milanovi?
b) Jak daleko bylo z Kašperských Hor na Kašperk?
c) V kolik hodin vyrazili všichni z Kašperských Hor?
d) Sestrojte graf závislosti vzdálenosti x od Kašperských Hor na čase pro Tomáše s Evou i pro Milana. Pomocí grafu ověřte výsledky vypočítané v předcházejících částech úlohy.

Řešení:

a) Protože Milan jde 2× rychleji než Tomáš s Evou, bude jeho doba chůze t_2 poloviční a Tomáš s Evou půjdou 2× déle než Milan, tj. bude platit $t_1 = 2t_2$. Zároveň platí, že Tomáš s Evou dorazí k hradu se zpožděním

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2t_2 - t_2 = t_2 = 10{:}30 - 10{:}00 = 30\,\text{min} = 0{,}50\,\text{h}.$$

Milan ušel trasu za čas $t_2 = 0{,}50\,\text{h}$ (tj. 30 min), Tomáš s Evou za $t_1 = 2t_2 = 1{,}0\,\text{h}$.
3 body

Poznámka: Úlohu lze řešit i rovnicí. Označíme-li dobu chůze Tomáše s Evou t_1, Milana o půl hodiny méně, tj. v hodinách $t_2 = t_1 - 0{,}50$, pak při zadaných rychlostech můžeme pro vzdálenost z náměstí je hradu psát

$$3t_1 = 6\,(t_1 - 0{,}50)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad t_1 = 1\,\text{h}, \qquad t_2 = t_1 - 0{,}50\,\text{h} = 0{,}50\,\text{h}.$$

b) Vzdálenost, kterou ušli, získáme buď z chůze Milana

$$d = v_2 t_2 = 6{,}0\,\text{km/h} \cdot 0{,}50\,\text{h} = 3{,}0\,\text{km}$$

nebo Tomáše s Evou

$$d = v_1 t_1 = 6{,}0\,\text{km/h} \cdot 0{,}50\,\text{h} = 3{,}0\,\text{km}.$$ **2 body**

Poznámka: Úlohu lze samozřejmě řešit i pomocí rovnice

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d\,(v_2 - v_1)}{v_1 v_2},$$

odkud vyjádříme

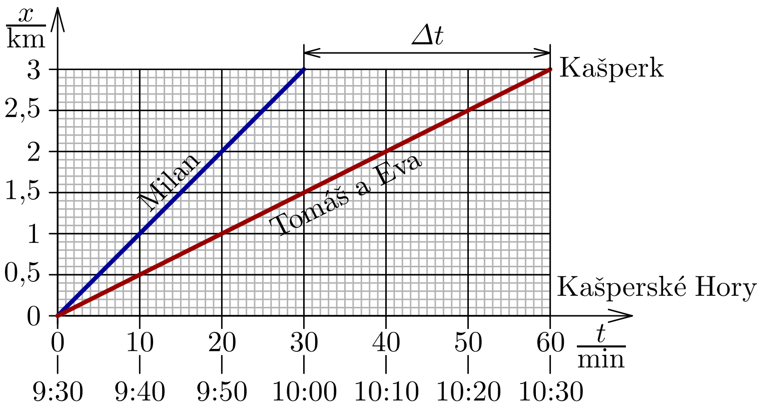
$$d = \Delta t \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_2} = 0{,}50\,\text{h} \cdot \frac{3\,\text{km/h} \cdot 6\,\text{km/h}}{6\,\text{km/h} - 3\,\text{km/h}} = 3{,}0\,\text{km}.$$

c) Z Kašperských Hor vyšli o čas $t_1 = 1{,}0\,\text{h}$ dříve, než na hrad dorazili Tomáš s Evou, tj. v čase $t = 10{:}30 - 1\,\text{h} = 9{:}30$. Můžeme také vycházet z údajů Milana, potom $t = 10{:}00 - 30\,\text{min} = 9{:}30$. **2 body**

d) Příklad grafu je na obr. 3.1. Pro chůzi Milana odpovídá graf závislosti $\{x\} = 6\{t\}$ pro hodnoty vzdálenosti x v km a času t v hodinách (případně $\{x\} = 6\{t\}/60 = \{t\}/10$) pro hodnoty času v minutách, pro Tomáše s Evou pak závislosti $\{x\} = 3\{t\}$ pro čas t v hodinách (případně $\{x\} = 3\{t\}/60 = \{t\}/20$ pro hodnoty času v minutách).
Poznámka: Vypsání funkční závislosti není po řešitelích požadováno, stačí správně sestrojený graf. Tabulka není povinná. **3 body**

FO55E2-1 Ivo Volf, 80,8 %

Zuzana navštěvuje na základní škole třídu s rozšířenou výukou matematiky a fyziky. Proto musí ze svého bydliště dojíždět a každé ráno vyráží se svým otcem autem do okresního města. Odjezd mají stanoven na 7 h a 15 min. Jedou do sousední vesnice přibližně stálou rychlostí 45 km/h po dobu 4,0 min, poté k nim přistoupí dva kamarádi Zuzany, které tatínek veze také do této školy. Auto pak jede po silnici stálou rychlostí asi 72 km/h po dobu 8,0 min. Po příjezdu do okresního města musí ještě přejet přes celé město rychlostí přibližně 54 km/h po trase 3,0 km.



Tabulka hodnot		
	Milan	Tomáš+Eva
t/min	x/km	x/km
0	0,0	0,0
10	1,0	0,5
20	2,0	1,0
30	3,0	1,5
40		2,0
50		2,5
60		3,0

Obrázek 3.1: K řešení úlohy FO62E2-1

a) Jak dlouho trvá většinou celá cesta, jestliže nástup kamarádů trvá 2,0 min a zpomalování a zrychlování vozidla je možné zanedbat? V kolik hodin se dostanou před školní budovu?
b) Jakou celkovou vzdálenost urazí Zuzana při cestě od místa svého bydliště před školu?
c) Jakou průměrnou rychlostí se vozidlo pohybuje, uvážíš-li jen jízdu bez zastavení, zpomalování a zrychlování. Jakou průměrnou rychlostí se vozidlo pohybuje, uvážíš-li při jízdě i čas nutný k nástupu kamarádů, ale zpomalování a zrychlování zanedbáš?
d) Jednou automobil odmítal nastartovat, a tak nakonec odjeli až v 7 h a 20 min. Aby děti stihly začátek školy, jel tatínek po trase mimo obce místo rychlosti 72 km/h rychlostí 90 km/h. O jakou dobu později přijelo auto před školu? Stihli žáci včas začátek výuky? Na závěr řešení vysvětli slovně, proč tvoje výpočty jsou pouze odhadem skutečnosti a získání přesných údajů je málo pravděpodobné?

Řešení:

a) Doba jízdy je:

$$t = \left(4{,}0 \cdot 60 + 2{,}0 \cdot 60 + 8{,}0 \cdot 60 + \frac{3000}{15}\right)\,\mathrm{s} = 1\,040\,\mathrm{s} \doteq 17\,\mathrm{min}.$$

Před školu se dostanou přibližně v 7 h a 32 min. **2 body**

b) Celková vzdálenost, kterou urazí Zuzana při cestě od místa svého bydliště před školu je

$$s = \left(\frac{45}{3{,}6} \cdot 4{,}0 \cdot 60 + \frac{72}{3{,}6} \cdot 8{,}0 \cdot 60 + 3000\right)\,\mathrm{m} = 15\,600\,\mathrm{m} \doteq 16\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

c) Průměrná rychlost vozidla v prvním případě je:

$$v_1 = \frac{\left(\frac{45}{3{,}6} \cdot 4{,}0 \cdot 60 + \frac{72}{3{,}6} \cdot 8{,}0 \cdot 60 + 3000\right)}{\left(4{,}0 \cdot 60 + 8{,}0 \cdot 60 + \frac{3000}{15}\right)}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \doteq 17\,\mathrm{m/s}.$$

Průměrná rychlost vozidla ve druhém případě je:

$$v_2 = \frac{\left(\frac{45}{3{,}6} \cdot 4{,}0 \cdot 60 + \frac{72}{3{,}6} \cdot 8{,}0 \cdot 60 + 3000\right)}{\left(4{,}0 \cdot 60 + 2{,}0 \cdot 60 + 8{,}0 \cdot 60 + \frac{3000}{15}\right)}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \doteq 15\,\mathrm{m/s}.$$ **3 body**

d) Vzdálenost mezi druhou vesnicí a městem je:

$$s_2 = \frac{72}{3{,}6} \cdot 8{,}0 \cdot 60\ \mathrm{m} = 9\,600\,\mathrm{m}.$$

Tuto vzdálenost nyní urazí rychlostí $90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$. Doba jízdy je:

$$t_2 = \left(4{,}0 \cdot 60 + 2{,}0 \cdot 60 + \frac{9600}{25} + \frac{3000}{15}\right)\mathrm{s} = 944\,\mathrm{s} \doteq 16\,\mathrm{min}.$$

Před školu se dostanou přibližně v 7 h a 36 min. Jestliže nemají i nultou hodinu, poté začátek výuky zajisté rádi stihnou. **3 body**

Poznámka: Výpočty jsou pouze odhadem skutečnosti, protože zanedbáváme zrychlování a zpomalování vozidla. Určitě také jsou místa, kde se musí čekat z důvodu semaforů apod.

FO60F2-1: Výsadkář Milan Bednařík, 77,3 %

Na leteckém dni předváděli výsadkáři za bezvětří seskok padákem z vrtulníku, který byl ve výšce $h_0 = 1{,}0\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země. Po otevření padáku se výsadkář snášel k zemi a jeho výška h nad zemí vždy po 15 s je zaznamenána v tabulce:

t/s	0	15	30	45	60	75	90
h/m	900	810	720	630	540	450	360

a) Jakou rychlostí v se výsadkář snášel k zemi?
b) Nakreslete graf závislosti výšky h na čase t.
c) Dokreslete závislost výšky h na čase t po 90. sekundě do doby, kdy dopadne na zem. Předpokládejte, že se jeho rychlost nezměnila.
d) Z grafu určete, v jaké výšce h nad zemí byl výsadkář v čase $t_1 = 100\,\mathrm{s}$. Výsledek ověřte výpočtem.
e) Z grafu určete čas t_2, kdy výsadkář dopadne na zem. Výsledek ověřte výpočtem.

Řešení:

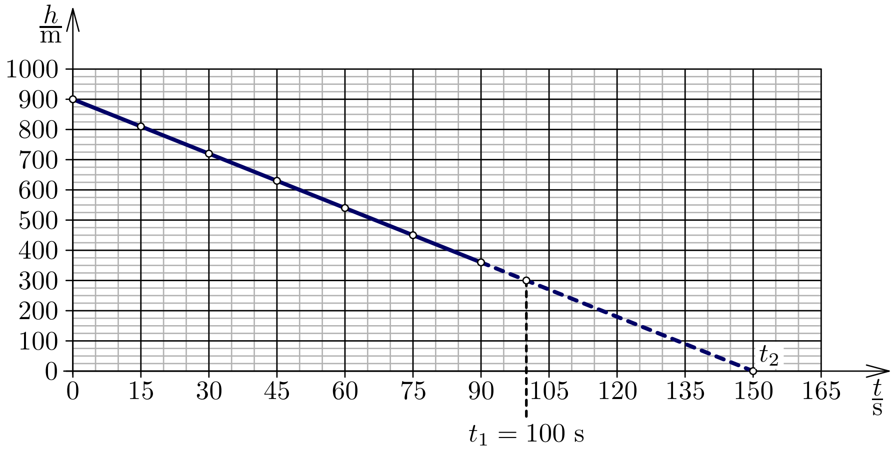
a) Podle tabulky urazí výsadkář za čas $t = 15\,\mathrm{s}$ dráhu $s = 90\,\mathrm{m}$, pohybuje se tedy rychlostí $v = s/t = 90\,\mathrm{m}/15\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{m/s}$. **2 body**
b) Graf je na obr. 3.2. **3 body**
c) Jde o část grafu na obr. 3.2 vykreslenou čárkovaně. **1 bod**
d) V čase $t_1 = 100\,\mathrm{s}$ bude výška výsadkáře nad zemí

$$h_1 = h_0 - vt_1 = 900\,\mathrm{m} - 6\,\mathrm{m/s} \cdot 100\,\mathrm{s} = 300\,\mathrm{m},$$

stejnou hodnotu odečteme i z grafu. **2 body**
e) Z výšky $h_0 = 900\,\mathrm{m}$ dopadne výsadkář na zem za čas

$$t_2 = \frac{h_0}{v} = \frac{900\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m/s}} = 150\,\mathrm{s},$$

stejnou hodnotu odečteme i z grafu. **2 body**



Obrázek 3.2: Závislost výšky h výsadkáře nad zemí na čase t

FO56E2-1: Triatlon Jan Thomas, 76,3 %

Závod v triatlonu se skládal z 1,5 km plavání, ze 40 km jízdy na kole a běhu na 20 km. Všimneme si závodníků A (Aleš), B (Bohouš) a C (Ctirad). Doplňte tabulku a pomocí ní určete:

a) Průběžné pořadí po jednotlivých úsecích včetně časů.
b) Pořadí závodníků v cíli.
c) Průměrnou rychlost každého závodníka na celé trati.
d) Kdo z nich byl nejlepší v plavání, kdo v jízdě na kole a kdo v běhu včetně dosažených časů.

závodník	plavání		kolo		běh	
	rychlost	čas	rychlost	čas	rychlost	čas
A	3,0 km/h			1 h 12 min 15 s	4,0 m/s	
B		28 min	36 km/h		3,8 m/s	
C	0,9 m/s			1 h 15 min		1 h 32 min 10 s

Řešení: Údaje doplníme do tabulky:

závodník	plavání		kolo		běh	
	rychlost	čas	rychlost	čas	rychlost	čas
A	3,0 km/h	30 min	9,23 m/s	1 h 12 min 15 s	4,0 m/s	5 000 s
B	0,893 m/s	28 min	36 km/h	4 000 s	3,8 m/s	5 263 s
C	0,9 m/s	1 667 s	8,89 m/s	1 h 15 min	3,62 m/s	1 h 32 min 10 s

a případně vyjádříme ve stejných jednotkách, aby je bylo možné snáze porovnat:

závodník	plavání		kolo		běh	
	rychlost	čas	rychlost	čas	rychlost	čas
A	0,833 m/s	1 800 s	9,23 m/s	4 335 s	4,0 m/s	5 000 s
B	0,893 m/s	1 680 s	10,0 m/s	4 000 s	3,8 m/s	5 263 s
C	0,900 m/s	1 667 s	8,89 m/s	4 500 s	3,62 m/s	5 530 s

Správné doplnění devíti výsledků v tabulce: **3 body**

a) Průběžné pořadí po jednotlivých disciplínách získáme z časů potřebných na jejich absolvování. Po plavání:

$$\mathrm{C}(t_{\mathrm{C1}} = 1\,667\,\mathrm{s}),\ \mathrm{B}(t_{\mathrm{B1}} = 1\,680\,\mathrm{s}),\ \mathrm{A}(t_{\mathrm{A1}} = 1\,800\,\mathrm{s})$$

Po jízdě na kole:

$$\mathrm{B}\ (t_{\mathrm{B2}} = 1\,680\,\mathrm{s} + 4\,000\,\mathrm{s} = 5\,680\,\mathrm{s})$$

$$\mathrm{A}\ (t_{\mathrm{A2}} = 1\,800\,\mathrm{s} + 4\,335\,\mathrm{s} = 6\,135\,\mathrm{s})$$

$$\mathrm{C}\ (t_{\mathrm{C2}} = 1\,667\,\mathrm{s} + 4\,500\,\mathrm{s} = 6\,167\,\mathrm{s})$$

1 bod

b) Celkové časy:

$$\text{Aleš}\ (t_{\mathrm{Ac}} = 1\,800\,\mathrm{s} + 4\,335\,\mathrm{s} + 5\,000\,\mathrm{s} = 11\,135\,\mathrm{s})$$
$$\text{Bohouš}\ (t_{\mathrm{Bc}} = 1\,680\,\mathrm{s} + 4\,000\,\mathrm{s} + 5\,263\,\mathrm{s} = 10\,943\,\mathrm{s})$$
$$\text{Ctirad}\ (t_{\mathrm{Cc}} = 1\,667\,\mathrm{s} + 4\,500\,\mathrm{s} + 5\,530\,\mathrm{s} = 11\,697\,\mathrm{s})$$

Pořadí v cíli tedy bude Bohouš, Aleš, Ctirad. **2 body**

c) Celková délka trasy závodu je

$$s = 1\,500\,\mathrm{m} + 40\,000\,\mathrm{m} + 20\,000\,\mathrm{m} = 61\,500\,\mathrm{m}.$$

Průměrné rychlosti závodníků potom vycházejí:

$$v_{\mathrm{A}} = s/t_{\mathrm{Ac}} = 61\,500\,\mathrm{m}/11\,135\,\mathrm{s} = 5{,}52\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{\mathrm{B}} = s/t_{\mathrm{Bc}} = 61\,500\,\mathrm{m}/10\,943\,\mathrm{s} = 5{,}62\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{\mathrm{C}} = s/t_{\mathrm{Cc}} = 61\,500\,\mathrm{m}/11\,697\,\mathrm{s} = 5{,}26\,\mathrm{m/s}$$

2 body

d) V plavání byl nejlepší Ctirad s časem:

$$1\,667\,\mathrm{s} = 27{,}8\,\mathrm{min} = 27\,\mathrm{min}\ 47\,\mathrm{s}.$$

Na kole byl nejrychlejší Bohouš s časem:

$$4\,000\,\mathrm{s} = 66{,}7\,\mathrm{min} = 66\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s}.$$

V běhu byl nejlepší Aleš s časem:

$$5\,000\,\mathrm{s} = 83{,}3\,\mathrm{min} = 83\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s}.$$

2 body

FO59F2-1: Abertamy – Karlovy Vary Jan Thomas, 74,8 %

Honza chce jet z Abertam do Karlových Varů. Ve všední den může jet autobusem přes Merklín, který jede přesně 1 hodinu a ujede přitom 26 km; v neděli může jet autobusem přes Ostrov, který jede rovněž 1 hodinu, ale urazí přitom 32 km. Když zmešká první autobus, musí jít 2,5 km pěšky do Perninku na vlak, který odjíždí za 20 minut a který jede průměrnou rychlostí 40 km/h a doba jízdy je 55 minut. Když zmešká nedělní autobus, musí jít pěšky 10 km až do Merklína. Protože je to s kopce, jde rychlostí 8,0 km/h. Lokálka z Merklína odjíždí v 16:17 h a v Karlových Varech je v 16:42 h. Úsek trati Merklín – Karlovy Vary měří 14 km. Určete:

a) Průměrné rychlosti všedního i nedělního autobusu v km/h i v m/s.

b) Nejmenší průměrnou rychlost Honzy v km/h i v m/s, chce-li stihnout vlak v Perninku.
c) Jak dlouho trvá Honzovi cesta do Merklína.
d) Délku vlakové trati z Perninku do Karlových Varů.
e) Průměrnou rychlost lokálky Merklín – Karlovy Vary v km/h i v m/s.

Řešení:

a) U obou autobusů je zadána vzdálenost, kterou ujedou za hodinu, snadno proto určíme jejich průměrné rychlosti; pro autobus ve všední den přes Merklín vychází $v_\mathrm{M} = 26\,\mathrm{km/h} \doteq 7{,}2\,\mathrm{m/s}$, pro nedělní přes Ostrov $v_\mathrm{O} = 32\,\mathrm{km/h} \doteq 8{,}9\,\mathrm{m/s}$.

2 body

b) Vzdálenost $s_\mathrm{P} = 2{,}5\,\mathrm{km}$ do Perninku musí ujít za čas $t_\mathrm{P} = 20\,\mathrm{min} = 1/3\,\mathrm{h}$, musí jít rychlostí

$$v_\mathrm{P} = \frac{s_\mathrm{P}}{t_\mathrm{P}} = \frac{2{,}5\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3}\,\mathrm{h}} = 7{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 2{,}1\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

c) Do Merklína ujde Honza vzdálenost $s_\mathrm{M} = 10\,\mathrm{km}$ rychlostí $v_\mathrm{M} = 8{,}0\,\mathrm{km/h}$ za čas

$$t_\mathrm{M} = \frac{s_\mathrm{M}}{v_\mathrm{M}} = \frac{10\,\mathrm{km}}{8{,}0\,\mathrm{km/h}} = 1{,}25\,\mathrm{h} = 75\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

d) Vlak z Perninku do Karlových Varů jede po dobu $t_\mathrm{v} = 55\,\mathrm{min} = 55/60\,\mathrm{h}$ rychlostí $v_\mathrm{v} = 40\,\mathrm{km/h}$, délka úseku trati vychází

$$s_\mathrm{v} = v_\mathrm{v} t_\mathrm{v} = 40\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{55}{60}\,\mathrm{h} \doteq 36{,}667\,\mathrm{km} \doteq 37\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

e) Lokálka jede z Merklína do Karlových Varů po dobu $t_\mathrm{l} = 16{:}42\,\mathrm{h} - 16{:}17\,\mathrm{h} = 25\,\mathrm{min} = 25/60\,\mathrm{h}$ a ujede vzdálenost $s_\mathrm{l} = 14\,\mathrm{km}$. Její průměrná rychlost vychází

$$v_\mathrm{l} = \frac{s_\mathrm{l}}{t_\mathrm{l}} = \frac{14\,\mathrm{km}}{\frac{25}{60}\,\mathrm{h}} = 33{,}6\,\mathrm{km/h} \doteq 9{,}3\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

FO55F2-1 Ivo Volf, 64,8 %

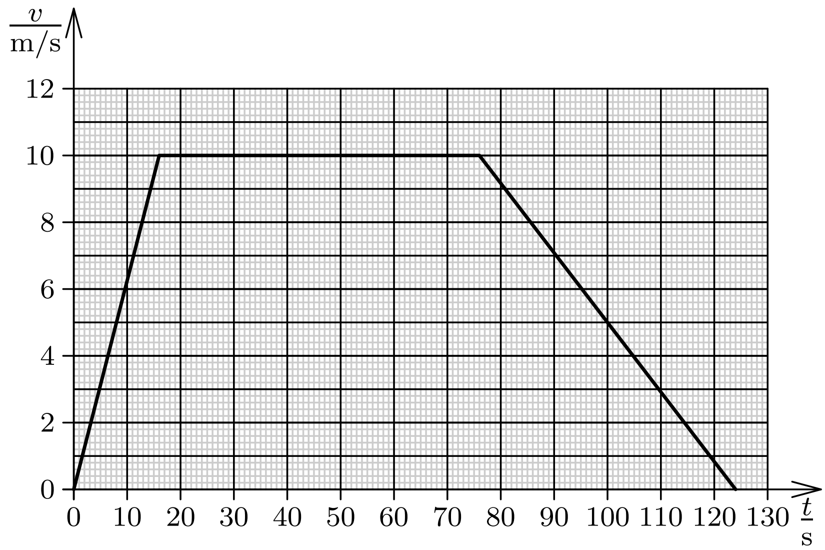
Pavel měřil, jak se mění rychlost jeho bicyklu v závislosti na čase při jízdě po rovině na dlouhém přímém úseku silnice. Rozjížděl se z klidu s konstantním zrychlením a na konci 16. sekundy pohybu dosáhl rychlosti 36 km/h. Poté jel touto rychlostí po dobu 60 s a nakonec začal rovnoměrně zpomalovat, až se po době dalších 48 s zastavil.

a) Narýsuj graf $v(t)$, znázorňující změny rychlosti bicyklu v závislosti na čase.
b) Z grafu urči, jakou dráhu urazil Pavel rovnoměrným pohybem.
c) Pomocí grafu urči dráhu při zrychlování a zpomalování. Jakou celkovou vzdálenost Pavel ujel od startu až po zastavení?
d) Při dalším měření na stejném místě Pavel rovnoměrně zrychloval ale jen po dobu 2 s a při tom urazil trasu 60 m. Dále pokračoval rovnoměrným pohybem. Za jak dlouho od vyjetí urazí trasu o celkové délce 400 m? V řešení vyjdi opět z grafického záznamu závislosti rychlosti na čase.

Řešení:

a) Graf závislosti velikosti rychlosti na čase $v(t)$ je na obr. 3.3:

3 body



Obrázek 3.3: Graf závislosti rychlosti na čase $v(t)$

b) Celková doba byla:

$$t = (16 + 60 + 48)\,\mathrm{s} = 124\,\mathrm{s},$$

přičemž konstantní rychlostí se pohyboval 60 s. Dráhu při rovnoměrném pohybu zjistíme pomocí grafu, když vypočteme obsah útvaru pod grafem, v tomto případě obdélník:

$$s_\mathrm{r} = 60 \cdot 10\,\mathrm{m} = 600\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

c) Dráhu při rovnoměrně zrychleném pohybu zjistíme pomocí grafu, když vypočteme obsah útvaru pod grafem, v tomto případě trojúhelník:

$$s_\mathrm{zr} = 16 \cdot 10 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m}.$$

Dráhu při rovnoměrně zpomaleném pohybu zjistíme pomocí grafu, když vypočteme obsah útvaru pod grafem, v tomto případě druhý trojúhelník:

$$s_\mathrm{zp} = 48 \cdot 10 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 240\,\mathrm{m}.$$

Celková dráha je:

$$s = (80 + 600 + 240)\,\mathrm{m} = 920\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

d) Jestliže Pavel při rovnoměrně zrychleném pohybu urazil vzdálenost 60 m za 10 s, jeho výsledná rychlost byla:

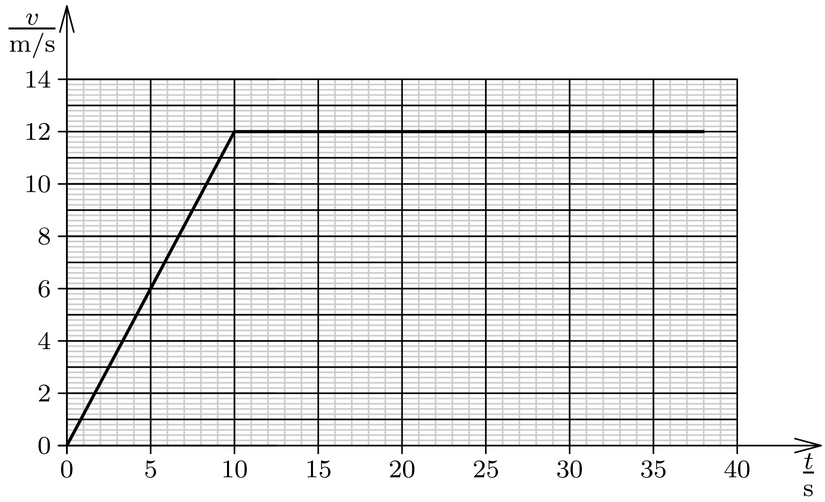
$$v_\mathrm{zr} = \frac{60}{10} \cdot 2\,\mathrm{m/s} = 12\,\mathrm{m/s}.$$

Rovnoměrným pohybem má urazit vzdálenost

$$s_2 = (400 - 60)\,\mathrm{m} = 340\,\mathrm{m}$$

rychlostí 12 m/s. Poté doba pohybu bude:

$$t = \left(\frac{340}{12} + 10\right)\,\mathrm{s} \doteq 38\,\mathrm{s}.$$ **3 body**



Obrázek 3.4: Graf závislosti rychlosti na čase $v(t)$ v otázce d)

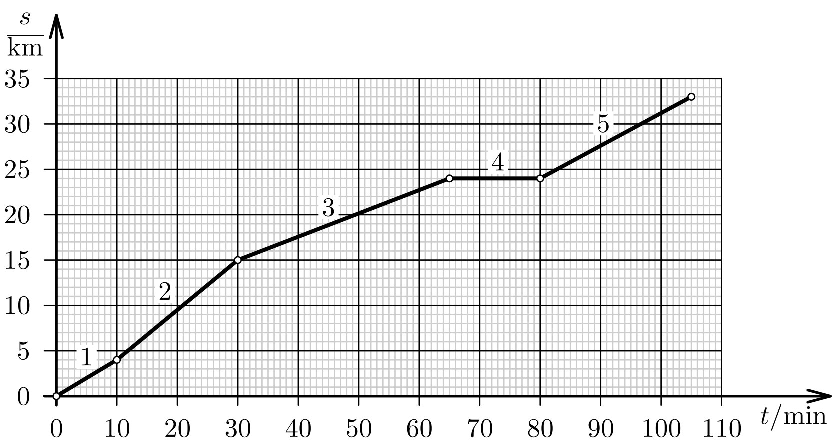
FO57F2-1: Martina jede na kole Josef Jírů, 64,3 %

Martina vyrazila na svůj první jarní cyklovýlet. Graf na obr. 3.5 znázorňuje závislost dráhy, kterou urazila, na čase.

a) Na kterém z pěti úseků se pohybovala nejdelší dobu? Určete tuto dobu.
b) Na kterém z pěti úseků urazila největší dráhu? Určete tuto dráhu.
c) Na kterém z pěti úseků se pohybovala největší rychlostí? Vypočtěte tuto rychlost.
d) Určete průměrnou rychlost celého jejího pohybu.
e) Určete průměrnou rychlost mezi začátkem druhého a koncem třetího úseku.
f) Za Martinou vyjela se zpožděním 7 min Lenka. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí se musí Lenka na kole pohybovat, aby Martinu dohonila v místě, kde se zastavila a odpočívala?
g) S jakým největším časovým zpožděním může za Martinou vyjet automobilem tatínek, aby dorazil do cílového místa dříve než Martina? Předpokládejte, že celá trasa vede mimo obce a tatínek pojede stálou rychlostí 70 km/h.

Řešení:

a) Nejdelší dobu se Martina pohybovala na třetím úseku, a to po dobu $t_3 = 65\,\mathrm{min} - 30\,\mathrm{min} = 35\,\mathrm{min} = 2\,100\,\mathrm{s} \doteq 0{,}58\,\mathrm{h}$. **1 bod**
b) Největší dráhu urazila na druhém úseku, a to $15\,\mathrm{km} - 4\,\mathrm{km} = 11\,\mathrm{km}$. **1 bod**
c) Největší rychlostí jela Martina na úseku, kde má úsečka grafu největší sklon, tj. také



Obrázek 3.5: Graf závislosti dráhy na čase pro cyklovýlet Martiny

na druhém úseku. Rychlost je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího času

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{11\,\text{km}}{30\,\text{min} - 10\,\text{min}} = \frac{11\,\text{km}}{\frac{1}{3}\text{h}} = 33\,\text{km/h} \doteq 9{,}2\,\text{m/s}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Průměrná rychlost celého pohybu je určena podílem celkové dráhy $s = 33\,\text{km}$ a celkového času $t = 105\,\text{min} = 1{,}75\,\text{h}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{33\,\text{km}}{1{,}75\,\text{h}} \doteq 18{,}9\,\text{km/h} \doteq 5{,}2\,\text{m/s}. \qquad \textbf{1 bod}$$

e) Průměrná rychlost na druhém a třetím úseku je určena podílem příslušné dráhy a příslušného času

$$v_{\text{p23}} = \frac{s_2 + s_3}{t_2 + t_3} = \frac{11\,\text{km} + 9\,\text{km}}{20\,\text{min} + 35\,\text{min}} = \frac{20\,\text{km}}{55\,\text{min}} = \frac{20\,\text{km}}{\frac{55}{60}\,\text{h}} \doteq 21{,}8\,\text{km/h} \doteq 6{,}1\,\text{m/s}.$$

2 body

f) Lenka se musí dostat do vzdálenosti 24 km nejpozději v čase 80 min od vyjetí Martiny. Vyjede-li 7 min za Martinou, má k dispozici dobu 73 min = 73/60 h. Lenčina průměrná rychlost proto musí být

$$v_{\text{L}} = \frac{24\,\text{km}}{\frac{73}{60}\,\text{h}} \doteq 19{,}7\,\text{km/h} \doteq 5{,}5\,\text{m/s}. \qquad \textbf{2 body}$$

g) Tatínek s automobilem musí urazit dráhu 33 km rychlostí 70 km/h. Doba jeho jízdy je

$$t' = \frac{33\,\text{km}}{70\,\text{km/h}} \doteq 0{,}471\,\text{h} \doteq 28\,\text{min}.$$

Automobil může vyjet se zpožděním $t - t' = 105\,\text{min} - 28\,\text{min} = 77\,\text{min}$. **1 bod**

FO62F2-1: Motocyklové závody Ivo Volf, 64,1 %

Motocyklové závody se konají na okruhu o celkové délce $d = 4{,}40\,\text{km}$, který musejí závodníci zdolat celkem patnáctkrát. Na okruhu je nejprve úsek s mírným stoupáním o délce $d_1 = 1\,200\,\text{m}$, pak se jede po rovince o délce $d_2 = 700\,\text{m}$, potom přijde klesání na úseku $d_3 = 1\,800\,\text{m}$ a okruh končí rovinkou až do cíle. Do kopce se pohybuje motocykl stálou rychlostí $v_{\text{n}} = 108\,\text{km/h}$, po rovince rychlostí $v_{\text{r}} = 126\,\text{km/h}$ a úsek z kopce zdolává závodník stálou rychlostí $v_{\text{d}} = 144\,\text{km/h}$. Na jaře se jede okruh v daném směru, na podzim ve směru opačném.

a) Za jak dlouho projede závodník jeden okruh závodu na jaře a na podzim?
b) Jakou průměrnou rychlostí jede závodník při jarním a při podzimním závodu?
c) Sestrojte graf závislosti polohy motocyklisty na čase $x = x(t)$ pro jeden okruh jarního i podzimního závodu. Pro podzimní závod uvažujte, že jde o pohyb opačným směrem než v jarním závodě. Z grafu *odhadněte*, za jak dlouho a v kterém úseku by se poprvé setkali motocyklisté, pokud by současně vyjeli opačnými směry, jeden jako při jarním a jeden jako při podzimním závodě.

Řešení:

a) V jarním závodu se okruh o délce $d = 4{,}40\,\mathrm{km} = 4\,400\,\mathrm{m}$ skládá z úseků stoupání $d_1 = 1\,200\,\mathrm{m}$, rovinky $d_2 = 700\,\mathrm{m}$, klesání $d_3 = 1\,800\,\mathrm{m}$ a cílové rovinky o délce

$$d_4 = d - (d_1 + d_2 + d_3) = 4\,400\,\mathrm{m} - (1\,200\,\mathrm{m} + 700\,\mathrm{m} + 1\,800\,\mathrm{m}) = 700\,\mathrm{m}.$$

Označme rychlosti na těchto úsecích $v_\mathrm{n} = 108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$, $v_\mathrm{r} = 126\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{m/s}$, $v_\mathrm{d} = 144\,\mathrm{km/h} = 40\,\mathrm{m/s}$ a opět $v_\mathrm{r} = 35\,\mathrm{m/s}$. Celková doba, za kterou motocyklista projede jeden okruh při jarním závodě vychází

$$t_\mathrm{j} = \frac{d_1}{v_\mathrm{n}} + \frac{d_2}{v_\mathrm{r}} + \frac{d_3}{v_\mathrm{d}} + \frac{d_4}{v_\mathrm{r}} = \frac{1\,200\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{m/s}} + \frac{700\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} + \frac{1\,800\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{m/s}} + \frac{700\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} =$$
$$= 40\,\mathrm{s} + 20\,\mathrm{s} + 45\,\mathrm{s} + 20\,\mathrm{s} = 125\,\mathrm{s}.$$

Podobně při podzimním závodě vychází na jedno kolo

$$t_\mathrm{p} = \frac{d_4}{v_\mathrm{r}} + \frac{d_3}{v_\mathrm{n}} + \frac{d_2}{v_\mathrm{r}} + \frac{d_1}{v_\mathrm{d}} = \frac{700\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} + \frac{1\,800\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{m/s}} + \frac{700\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} + \frac{1\,200\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{m/s}} =$$
$$= 20\,\mathrm{s} + 60\,\mathrm{s} + 20\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s} = 130\,\mathrm{s}.$$

5 bodů

b) Průměrná rychlost pro jarní závod je

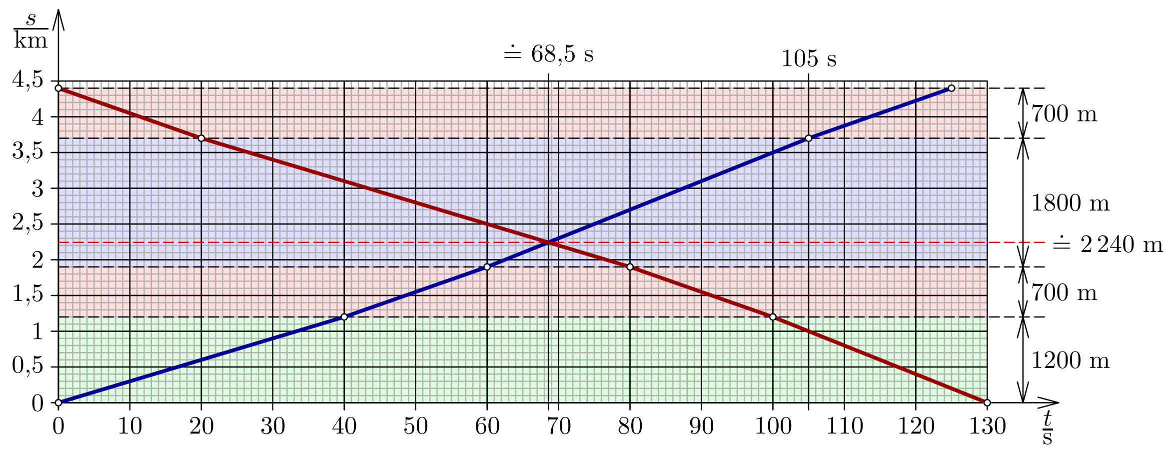
$$v_\mathrm{j} = \frac{d}{t_\mathrm{j}} = \frac{4\,400\,\mathrm{m}}{125\,\mathrm{s}} = 35{,}2\,\mathrm{m/s}$$

neboli $126{,}72\,\mathrm{km/h} \doteq 127\,\mathrm{km/h}$, pro podzimní

$$v_\mathrm{p} = \frac{d}{t_\mathrm{p}} = \frac{4\,400\,\mathrm{m}}{130\,\mathrm{s}} \doteq 33{,}846\,\mathrm{m/s} \doteq 33{,}8\,\mathrm{m/s}$$

neboli $121{,}85\,\mathrm{km/h} \doteq 122\,\mathrm{km/h}$. **2 body**

c) Graf je na obr. 3.6. Jarnímu závodu odpovídá modrý, podzimnímu červený graf. Vidíme, že se setkají ve třetím úseku v čase asi 68,5 s. **3 body**



Obrázek 3.6: Graf k úloze FO62F2-1

Poznámka: Vypočtená poloha ve vzdálenosti asi 2 240 m není po řešitelích vyžadována, v odhadu času doporučujeme toleranci mezi 60 s a 70 s, protože jde o odečítání z grafu. Tento interval odpovídá i odhadu přes součet průměrných rychlostí

$$t = \frac{d}{v_\mathrm{j} + v_\mathrm{p}} = \frac{4\,400\,\mathrm{m}}{35{,}2\,\mathrm{m/s} + 33{,}846\,\mathrm{m/s}} \doteq 63{,}7\,\mathrm{s},$$

který by odpovídal případu, že motocyklisté jedou konstantními rychlostmi.

Pokud je alespoň jeden z grafů správně, měla by být tato část ohodnocena alespoň jedním bodem.

FO58F2-4: Kolona automobilů Jan Thomas, 63,5 %

Kolonu vozidel tvoří $n = 10$ stejných automobilů, každý o délce $l_1 = 5{,}0\,\mathrm{m}$, mezi nimiž jsou rozestupy $s = 25\,\mathrm{m}$. Kolona jede rychlostí $v = 54\,\mathrm{km/h}$.

a) Jaká je délka L_1 kolony?

b) Jak dlouho projíždí kolona kolem dopravní značky stojící u okraje silnice?

c) Jak dlouho by nám trvalo předjet kolonu, kdybychom jeli rychlostí $v_1 = 90\,\mathrm{km/h}$, předjíždění zahájili ve vzdálenosti $d_1 = 20\,\mathrm{m}$ za posledním autem kolony a ukončili ve vzdálenosti $s_1 = 25\,\mathrm{m}$ před prvním autem kolony?

d) V určitém místě má kolona zastavit. Řidič druhého automobilu kolony začne brzdit za dobu $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ poté, co uvidí, že začal brzdit vůz před ním. Stejnou reakční dobu mají i ostatní řidiči: znamená to, že řidič každého následujícího automobilu začne brzdit se stejným zpožděním za řidičem automobilu, který jede před ním. Jaká bude délka kolony L_2 po zastavení všech automobilů?

Řešení:

a) Délka kolony L_1 je tvořena n vozidly o délce l_1 a $n - 1$ mezerami o délce s, tj.

$$L_1 = nl_1 + (n-1)\,s = 10 \cdot 5\,\mathrm{m} + (10-1) \cdot 25\,\mathrm{m} = 275\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

b) Kolem dopravní značky projede kolona rychlostí $v = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$ za dobu

$$t_1 = \frac{L_1}{v_1} = \frac{275\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m/s}} \doteq 18{,}333\,\mathrm{s} \doteq 18\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

c) Při předjíždění ujedeme rychlostí $v_1 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ za čas t_2 vzdálenost rovnou délce kolony L_1 zvětšenou o odstupy při předjíždění $d_1 = 20\,\mathrm{m}$, $s_1 = 25\,\mathrm{m}$ a vzdálenost, kterou ujede kolona vt_2. Platí

$$v_1 t_2 = L_1 + d_1 + s_1 + vt_2.$$

Odtud

$$t_2 = \frac{L_1 + d_1 + s_1}{v_1 - v} = \frac{275\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{m} + 25\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m/s} - 15\,\mathrm{m/s}} = 32\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

d) Díky reakční době $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ se mezery mezi vozy kolony zkrátí o vzdálenost vt, oproti části a) se délka kolony změní na

$$L_2 = nl_1 + (n-1)\,(s - vt) = 10 \cdot 5\,\mathrm{m} + (10-1) \cdot (25\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}5\,\mathrm{s}) = 72{,}5\,\mathrm{m} \doteq 73\,\mathrm{m}.$$

3 body

FO61F2-2: Trénink automobilu Ivo Volf, 63,2 %

Při tréninku na závodní dráze jezdí automobil tak, že prvních $s_1 = 1\,200\,\mathrm{m}$ jede po rovince stálou rychlostí $v_1 = 108\,\mathrm{km/h}$, potom přijde stoupání o délce $s_2 = 1\,500\,\mathrm{m}$, kde jede stálou rychlostí $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$, a posledních $s_3 = 1\,050\,\mathrm{m}$ jede z kopce stálou rychlostí $v_3 = 126\,\mathrm{km/h}$.

a) Určete doby, za něž projede automobil danými úseky, a nakreslete graf vzdálenosti od startu na čase $s = s(t)$.

b) Jaká je průměrná rychlost automobilu v_{p1}?

c) Jednou se dal automobil do pohybu v opačném směru: nejprve stoupal $s_3 = 1\,050\,\mathrm{m}$ rychlostí $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$, potom klesal na úseku o délce $s_2 = 1\,500\,\mathrm{m}$ rychlostí $v_3 = 126\,\mathrm{km/h}$ a po rovince jel rychlostí $v_1 = 108\,\mathrm{km/h}$ po trase $s_1 = 1\,200\,\mathrm{m}$. Určete doby průjezdu jednotlivými úseky a nakreslete pohyb do téhož grafu $s = s(t)$ (automobil se nyní bude přibližovat ke startu).

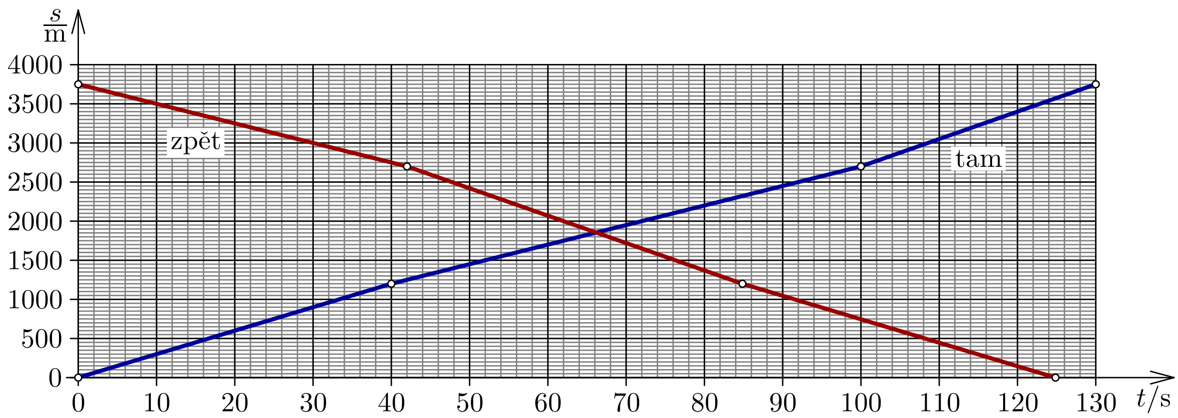
d) Jak se změnila v případě c) průměrná rychlost automobilu? Vypočítejte její hodnotu v_{p2}.

Řešení:

a) Rychlosti převedeme na m/s: $v_1 = 108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$, $v_3 = 126\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{m/s}$. Pro hledané doby, za něž automobil projede jednotlivé úseky použijeme vztah $t_i = s_i/v_i$ a obdržíme postupně

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1\,200\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{m/s}} = 40\,\mathrm{s}, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{1\,500\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m/s}} = 60\,\mathrm{s}, \quad t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{1\,050\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} = 30\,\mathrm{s}.$$

Graf je na obr. 3.7 znázorněn modrou čárou, červená čára odpovídá opačnému směru pohybu v části c). **3 body**



Obrázek 3.7: Závislost $s = s(t)$ pro pohyb automobilu

b) Průměrnou rychlost určíme z celkové ujeté dráhy a času, který byl k tomu potřeba, tedy

$$v_{\mathrm{p1}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1\,200\,\mathrm{m} + 1\,500\,\mathrm{m} + 1\,050\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s} + 60\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s}} = \frac{3\,750\,\mathrm{m}}{130\,\mathrm{s}} \doteq$$
$$\doteq 28{,}846\,\mathrm{m/s} \doteq 28{,}8\,\mathrm{m/s} \doteq 103{,}85\,\mathrm{km/h} \doteq 104\,\mathrm{km/h}.$$

2 body

c) Pro časy, za něž automobil projede jednotlivé úseky, nyní platí

$$t'_1 = \frac{s_3}{v_2} = \frac{1\,050\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m/s}} = 42\,\mathrm{s},\ t'_2 = \frac{s_2}{v_3} = \frac{1\,500\,\mathrm{m}}{35\,\mathrm{m/s}} \doteq 42{,}857\,\mathrm{s} \doteq 43\,\mathrm{s},\ t'_3 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1\,200\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{m/s}} = 40\,\mathrm{s}.$$

Graf je na obr. 3.7 (červená čára). **3 body**

d) Průměrnou rychlost určíme opět z celkové ujeté dráhy a času, který byl k tomu potřeba, tedy

$$v_{\mathrm{p2}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t'_1 + t'_2 + t'_3} = \frac{1\,200\,\mathrm{m} + 1\,500\,\mathrm{m} + 1\,050\,\mathrm{m}}{42\,\mathrm{s} + 42{,}857\,\mathrm{s} + 40\,\mathrm{s}} = \frac{3\,750\,\mathrm{m}}{124{,}857\,\mathrm{s}} \doteq$$
$$\doteq 30{,}034\,\mathrm{m/s} \doteq 30{,}0\,\mathrm{m/s} \doteq 108{,}12\,\mathrm{km/h} \doteq 108\,\mathrm{km/h} > v_{\mathrm{p1}}.$$

Je tedy vyšší než průměrná rychlost v_{p1} vypočítaná v části b). **2 body**

FO55E2-2 Ivo Volf, 62,4 %

Tahač s přívěsem pro velké náklady o celkové délce 32 m a šířce 4,0 m se po projetí zatáčkou pohybuje po rovné, přímé vozovce stálou rychlostí 45 km/h a směřuje do místa vzdáleného 63 km. Před tahačem jede z bezpečnostních důvodů osobní automobil o délce 5,0 m tak, že vozidla udržují mezi sebou stálou vzdálenost 25 m. Hned za uvedenou zatáčkou dojede zezadu tuto soupravu další osobní automobil, který jede rychlostí 72 km/h a jehož délka je také 5,0 m.

a) Kdyby v protisměru jezdilo hodně vozidel, řidič druhého osobního automobilu by musel přizpůsobit rychlost jízdy a pokračovat v cestě za tahačem s nákladem se stejnou rychlostí. Za jakou dobu by se dostal do výše uvedeného místa v případě, že by kolonu po celou část cesty nepředjel?

b) Naštěstí pro řidiče je levý jízdní pruh volný a tak může ve vzdálenosti 20 m od zadní části přívěsu k přednímu nárazníku jeho automobilu vybočit a začne předjíždět. Za jak dlouho a jakou vzdálenost urazí, než se vrátí zpět do svého jízdního pruhu, když musí předjet celou soupravu a zařadit se tak, aby mezi ním a doprovodným vozidlem byla vzdálenost 25 m? Při výpočtech zanedbej vzdálenost mezi jízdními pruhy.

c) Za jak dlouho se po předjetí kolony dostane druhý automobil nyní do výše uvedeného místa, jestliže jeho rychlost při jízdě se nebude měnit?

Řešení:

a) Doba jízdy do uvedeného místa by byla

$$t = \frac{63}{45}\,\mathrm{h} = 1{,}4\,\mathrm{h}.$$ **3 body**

b) Druhý osobní automobil jede vůči koloně rychlostí

$$v = (72 - 45)\,\mathrm{km/h} = 27\,\mathrm{km/h}.$$

Při předjíždění musí urazit vzdálenost o 112 m větší než kolona. Doba předjíždění je

$$t_\mathrm{p} = \frac{0{,}112}{27}\,\mathrm{h} \doteq 15\,\mathrm{s}.$$

Při předjíždění urazí druhý osobní automobil dráhu

$$s_\mathrm{p} = \frac{0{,}112}{27}\cdot 72\,\mathrm{km} \doteq 0{,}3\,\mathrm{km}.$$ **4 body**

c) Doba jízdy do uvedeného místa je nyní

$$t_2 = \frac{63 - \dfrac{0{,}112}{27}\cdot 72}{72}\,\mathrm{h} \doteq 0{,}87\,\mathrm{h} \doteq 52\,\mathrm{min}.$$ **3 body**

FO54F2-2: Silniční závod Ivo Volf, 56,2 %

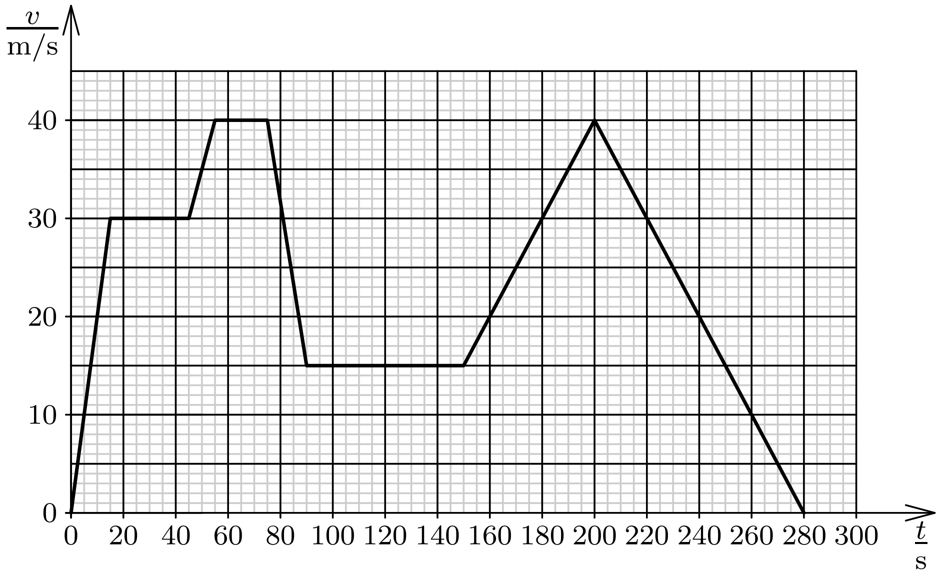
Petr sleduje tatínka v automobilu při tréninku na silniční závody. Na startu z klidu se automobil dá do pohybu a během 15 s získá rychlost 108 km/h, kterou pojede dále po dobu 30 s. Poté bude během 10 s zvyšovat svou rychlost až na 144 km/h a touto rychlostí se bude pohybovat po dobu 20 s. Přijede tak do úseku trasy s několika zatáčkami, a proto během 15 s zmenší svou rychlost na 54 km/h, oblast zatáček touto rychlostí projede za 60 s, potom zvýší svou rychlost za 50 s na 144 km/h a během následujících 80 s se zastaví v místě, kde se začal rozjíždět. Pro úseky, kde se automobil zrychluje nebo zpomaluje, budeme předpokládat, že závislost rychlosti na čase je lineární.

a) Urči, jak dlouho trvala jízda po trase.
b) Nakresli graf změny rychlosti v závislosti na časovém průběhu, $v = f(t)$.
c) Jakou dráhu ujel automobil v úsecích, kdy jel rovnoměrně?
d) Jakou dráhu ujel automobil během celé jízdy po okruhu?
e) Jaká je průměrná rychlost automobilu na celé trase?

Řešení:

a) Celkový čas tréninku zjistíme pomocí součtu všech dílčích dob průjezdu sekcemi závodní trasy jako: $t = (15 + 30 + 10 + 20 + 15 + 60 + 50 + 80)\,\mathrm{s} = 280\,\mathrm{s}$. **1 bod**

b) Graf změny rychlosti v závislosti na čase je na obr. 3.8. **3 body**



Obrázek 3.8: Graf závislosti rychlosti na čase $v(t)$

c) Dráhu v úsecích, kdy jel automobil rovnoměrně určíme pomocí grafu, nebo ze zadání. Výsledná dráha je rovna obsahu útvarů pod vodorovnými částmi grafu. Pro výpočet dráhy platí:

$$s_\mathrm{r} = \left(\frac{108}{3{,}6} \cdot 30 + \frac{144}{3{,}6} \cdot 20 + \frac{54}{3{,}6} \cdot 60\right)\ \mathrm{m} = 2\,600\,\mathrm{m}.$$

2 body

d) Celkovou dráhu určíme taktéž z grafu. Je součtem obsahu útvarů pod grafem, kdy se automobil pohyboval rovnoměrně (z předchozí otázky) a nerovnoměrně (útvary jsou trojúhelníky a obdélníky). Platí tedy:

$$s_\mathrm{c} = s_\mathrm{r} + s_\mathrm{n},$$

$$s_\mathrm{c} = \Bigg[2600 + 30 \cdot \frac{15}{2} + (40 - 30) \cdot \frac{10}{2} + 30 \cdot 10 + (40 - 15) \cdot \frac{15}{2} + 15 \cdot 15 + {}$$

$$+ (40 - 15) \cdot \frac{50}{2} + 15 \cdot 50 + 40 \cdot \frac{80}{2}\Bigg]\ \mathrm{m},$$

$$s_\mathrm{c} = 6\,562{,}5\,\mathrm{m} \doteq 6\,600\,\mathrm{m}.$$

3 body

e) Průměrnou rychlost určíme z celkové dráhy trasy a z celkového času tréninku jako:

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_\mathrm{c}}{t} = \frac{6562{,}5}{280}\,\mathrm{m/s} \doteq 23{,}4\,\mathrm{m/s} \doteq 84{,}2\,\mathrm{km/h}.$$

1 bod

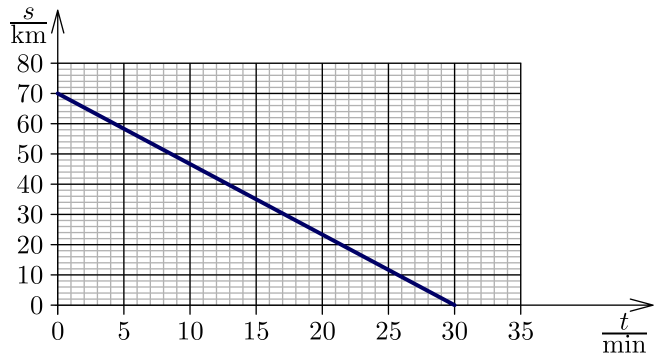
FO60E2-1: Automobil a autobus Jan Thomas, 55,5 %

Ze dvou míst, vzdálených od sebe $s = 70\,\mathrm{km}$, vyjíždí současně proti sobě automobil a autobus. Automobil jede stálou rychlostí $v_1 = 90\,\mathrm{km/h}$. V grafu na obr. 3.9 je znázorněna závislost vzdálenosti mezi automobilem a autobusem na čase pro prvních 30 minut jízdy.

a) Určete rychlost v_2 autobusu.

b) Doplňte do grafu, jak se bude měnit vzájemná vzdálenost mezi autem a autobusem do příjezdu autobusu do cíle cesty (tj. místa, odkud vyjel automobil).

c) Nakreslete do jednoho grafu závislost polohy auta i autobusu na čase po celou dobu jejich jízdy.



Obrázek 3.9: Graf k zadání úlohy 3.1

Řešení:

a) Z grafu odečteme vzájemnou rychlost mezi automobilem a autobusem; vzdálenost $s = 70\,\mathrm{km}$ urazí touto rychlostí za $t_1 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}5\,\mathrm{h}$, proto

$$v = \frac{70\,\mathrm{km}}{0{,}5\,\mathrm{h}} = 140\,\mathrm{km/h}.$$

Protože se automobil a autobus pohybují proti sobě, platí $v = v_1 + v_2$, odkud získáváme

$$v_2 = v - v_1 = 140\,\mathrm{km/h} - 90\,\mathrm{km/h} = 50\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

b) Nulová vzdálenost mezi vozidly znamená, že se potkala právě po 30 minutách. Automobil do té doby urazil vzdálenost

$$s_1 = v_1 t_1 = 90\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 45\,\mathrm{km},$$

autobus

$$s_2 = v_2 t_1 = 50\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 25\,\mathrm{km} = s - s_1.$$

Od této chvíle se vzdálenost mezi automobilem a autobusem bude zvětšovat. Automobil ujede zbývajících $s_2 = 25\,\mathrm{km}$ za čas

$$t_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{25\,\mathrm{km}}{90\,\mathrm{km/h}} = \frac{5}{18}\,\mathrm{h} = \frac{50}{3}\,\mathrm{min} \doteq 17\,\mathrm{min}.$$

Za tuto dobu se vzájemná vzdálenost mezi autem a autobusem zvětší o

$$s_3 = vt_2 = 140\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{5}{18}\,\mathrm{h} \doteq 38{,}889\,\mathrm{km} \doteq 39\,\mathrm{km}.$$

Od této chvíle už automobil bude v cíli, proto se vzdálenost mezi ním a autobusem bude měnit pouze rychlostí v_2. Autobus pojede ještě po dobu

$$t_3 = \frac{s - s_3}{v_2} = \frac{70\,\mathrm{km} - 38{,}889\,\mathrm{km}}{50\,\mathrm{km/h}} \doteq 37{,}333\,\mathrm{min} \doteq 37\,\mathrm{min}.$$

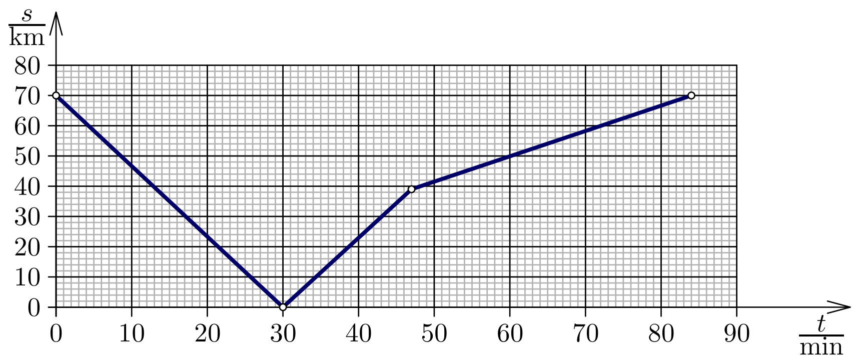
Celková doba jízdy autobusu je

$$t = \frac{s}{v_2} = \frac{70\,\mathrm{km}}{50\,\mathrm{km/h}} = \frac{7}{5}\,\mathrm{h} = 84\,\mathrm{min} = t_1 + t_2 + t_3.$$ **4 body**

K sestrojení grafu můžeme sestavit tabulku vzdálenosti automobilu a autobusu ve význačných časech:

t/min	0	30	47	84
Δs/km	70	0	39	70

Graf je na obr. 3.10. **2 body**



Obrázek 3.10: Graf závislosti vzdálenosti mezi automobilem a autobusem na čase

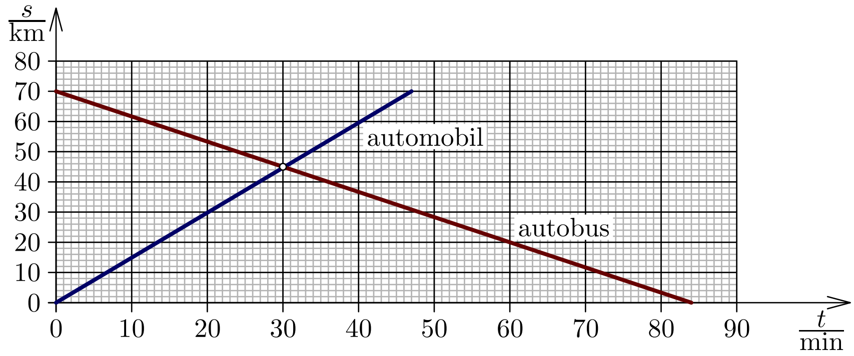
Poznámka: Graf lze sestrojit i bez výpočtu vzdáleností, pouze z dob pohybu automobilu a autobusu. Dokud se pohybuje i automobil, bude vzdálenost mezi automobilem a autobusem růst symetricky k tomu, jak klesala během jejich přibližování a zbytek grafu, kdy se pohybuje pouze autobus, je dán tím, že celková doba jízdy autobusu je 84 minut.

c) Automobilu trvá jízda dobu $t_1 + t_2 = 30\,\mathrm{min} + 17\,\mathrm{min} = 47\,\mathrm{min}$, autobusu $t = 84\,\mathrm{min}$; setkají se ve vzdálenosti $s_1 = 45\,\mathrm{km}$ od místa výjezdu automobilu po 30 minutách. Graf je na obr. 3.11. **2 body**

FO58E2-4: Kolona vozidel Bohumil Vlach, 54,2 %

Kolona automobilů má délku $d = 10{,}0\,\mathrm{km}$ a přesunuje se po silnici průměrnou rychlostí $v_0 = 20{,}0\,\mathrm{km/h}$. V okamžiku, kdy je konec kolony u kilometrovníku 100, vyjede z konce kolony spojka na motocyklu k veliteli v čele kolony. Spojka se pohybuje průměrnou rychlostí v a čelo kolony dostihne za čas $t_1 = 12\,\mathrm{min}$. Hlášením veliteli se zdrží po dobu $t_0 = 10\,\mathrm{min}$, přičemž se pohybuje s čelem kolony. Potom se vrátí stejnou průměrnou rychlostí v zpět na konec kolony.

a) Vypočtěte průměrnou rychlost v spojky.
b) Vypočtěte čas, za který se spojka vrátí z čela zpět na konec kolony.



Obrázek 3.11: Graf závislosti polohy automobilu a autobusu na čase

c) Jestliže délka jednoho vozu Tatra v koloně je $l = 10\,\mathrm{m}$, za jak dlouho projede spojka kolem jednoho vozu při cestě k čelu kolony a při cestě zpátky na konec kolony?

d) Vypočtěte vzdálenost d_1 od kilometrovníku 100 měřenou podél silnice, v níž bude konec kolony v okamžiku, kdy se spojka vrátí zpět.

Řešení:

a) Jede-li spojka od konce k čelu kolony, je její rychlost vzhledem ke koloně $v - v_0$. Platí proto

$$d = (v - v_0)\, t_1,$$

odkud při době jízdy $t_1 = 12\,\mathrm{min} = \dfrac{12}{60}\,\mathrm{h} = \dfrac{1}{5}\,\mathrm{h}$ dostáváme

$$v = \frac{d + v_0 t_1}{t_1} = \frac{10\,\mathrm{km} + 20\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{1}{5}\,\mathrm{h}}{\frac{1}{5}\,\mathrm{h}} = 70\,\mathrm{km/h}. \qquad \textbf{3 body}$$

Poznámka: Lze řešit samozřejmě i převodem rychlosti na m/s (hodnoty viz řešení části c) a času na sekundy; potom $t_1 = 12\,\mathrm{min} = 720\,\mathrm{s}$ a

$$v = \frac{d + v_0 t_1}{t_1} = \frac{10\,000\,\mathrm{m} + 5{,}555\,6\,\mathrm{m/s} \cdot 720\,\mathrm{s}}{720\,\mathrm{s}} \doteq 19{,}444\,\mathrm{m/s} \doteq 19\,\mathrm{m/s}.$$

b) Zpátky na konec kolony se spojka vrací vzhledem ke koloně rychlostí $v + v_0$ a pro čas t_2, který trvá návrat z čela na konec platí

$$t_2 = \frac{d}{v + v_0} = \frac{10\,\mathrm{km}}{70\,\mathrm{km/h} + 20\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{9}\,\mathrm{h} \doteq 0{,}11\,\mathrm{h}. \qquad \textbf{2 body}$$

Poznámka: Lze řešit samozřejmě také v m/s, potom vychází

$$t_2 = \frac{d}{v + v_0} = \frac{10\,000\,\mathrm{m}}{19{,}444\,4\,\mathrm{m/s} + 5{,}555\,6\,\mathrm{m/s}} \doteq 400\,\mathrm{s}.$$

c) Rychlosti vyjádříme v m/s; $v_0 = 20\,\mathrm{km/h} \doteq 5{,}555\,6\,\mathrm{m/s}$, $v = 70\,\mathrm{km/h} = 19{,}444\,\mathrm{m/s}$. Pro průjezd kolem jednoho vozu délky $l = 10\,\mathrm{m}$ při jízdě dopředu vychází

$$t_1' = \frac{l}{v - v_0} = \frac{10\,\mathrm{m}}{19{,}444\,\mathrm{m/s} - 5{,}555\,6\,\mathrm{m/s}} = 0{,}72\,\mathrm{s}$$

a pro cestu zpět

$$t_2' = \frac{l}{v + v_0} = \frac{10\,\mathrm{m}}{19{,}444\,\mathrm{m/s} + 5{,}555\,6\,\mathrm{m/s}} = 0{,}40\,\mathrm{s}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Do vzdálenosti d_1 od kilometrovníku 100 se konec kolony přesune za dobu $t_3 = t_1 + t_0 + t_2$, proto platí

$$d_1 = (t_1 + t_0 + t_2)\, v_0 = \left(t_1 + t_0 + \frac{d}{v + v_0}\right) v_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\,\mathrm{h} + \frac{10}{60}\,\mathrm{h} + \frac{1}{9}\,\mathrm{h}\right) \cdot 20\,\mathrm{km/h} \doteq 9{,}6\,\mathrm{km}.$$ **3 body**

FO61E2-1: Dvě auta Jan Thomas, 53,6 %

Auto jede z místa A do místa B první polovinu dráhy rychlostí $v_1 = 30\,\mathrm{km/h}$, druhou polovinu dráhy rychlostí $v_2 = 60\,\mathrm{km/h}$. Druhé auto jede z místa A do místa B první polovinu dráhy rychlostí $v_2 = 60\,\mathrm{km/h}$ a druhou polovinu rychlostí $v_1 = 30\,\mathrm{km/h}$. Auta vyjela současně a současně přijela i do cíle. Doba jízdy obou automobilů byla $t = 120\,\mathrm{minut}$.

a) Jaká je vzdálenost míst startu A a cíle B a jaká byla průměrná rychlost automobilů?
b) Nakreslete do jednoho grafu závislost dráhy na čase $s = s(t)$ obou automobilů a z grafu odečtěte, jaká byla největší vzdálenost mezi automobily během jejich jízdy a jak dlouho byly automobily od sebe takto vzdáleny.

Řešení:

a) Průměrná rychlost v_p obou automobilů je stejná. Označme t_1 čas, za který první automobil ujede první polovinu trasy $s/2$, t_2 čas, za který ujede druhou polovinu trasy $s/2$. Poloviční rychlostí ujede první polovinu trasy za dvojnásobnou dobu než druhou polovinu ($t_1 = 2t_2$), celkovou dobu jízdy $t = 120\,\mathrm{minut} = 2\,\mathrm{h}$ tak musíme rozdělit v poměru 2:1; získáme $t_1 = 80\,\mathrm{min} = \frac{4}{3}\,\mathrm{h}$, $t_2 = 40\,\mathrm{min} = \frac{2}{3}\,\mathrm{h}$ (pro první automobil, pro druhý je poměr přesně obrácený). Vzdálenost mezi oběma místy pak vychází

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 = 30\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{4}{3}\,\mathrm{h} + 60\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}.$$ **3 body**

Pro průměrnou rychlost pak dostáváme

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{80\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 40\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

Poznámka: Lze uznat např. i postup, kdy soutěžící bude zkoušet najít (třeba číselným dosazením) takovou délku trasy s, aby

$$t_1 + t_2 = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = s\frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2} = \frac{s}{40\,\mathrm{km/h}} = t = 120\,\mathrm{min} = 2\,\mathrm{h}.$$

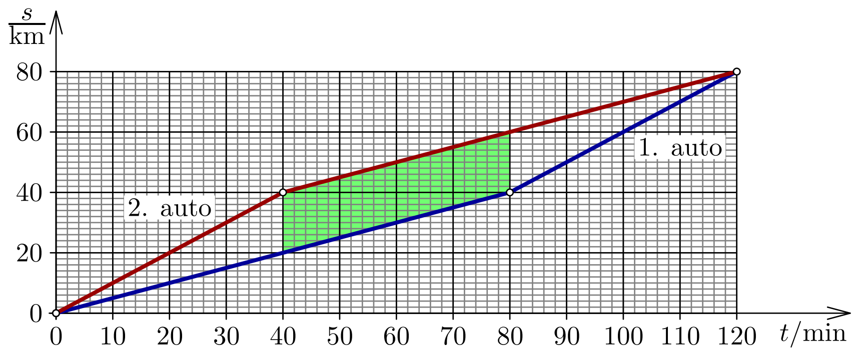
Obecně je možné spočítat i průměrnou rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 30\,\mathrm{km/h} \cdot 60\,\mathrm{km/h}}{30\,\mathrm{km/h} + 60\,\mathrm{km/h}} = 40\,\mathrm{km/h}$$

a pomocí ní vzdálenost míst A a B

$$s = v_\mathrm{p} t = 40\,\mathrm{km/h} \cdot 2\,\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}.$$

b) Z grafu na obr. 3.12 odečteme, že největší vzdálenost mezi automobily bude $s_\mathrm{max} = 20\,\mathrm{km}$. V této vzdálenosti se automobily nachází po dobu $t' = 40\,\mathrm{minut}$ (mezi 40. a 80. minutou jízdy; v grafu je oblast vyznačena zeleným rovnoběžníkem). **5 bodů**



Obrázek 3.12: Graf závislosti dráhy na čase $s = s(t)$

Poznámka: Při záměně os by graf neměl být uznán jako úplně správný, v takovém případě doporučujeme snížit hodnocení o 1 bod.

FO59E2-1: Povoz s kládou Bohumil Vlach, 48,0 %

Po přímé vodorovné silnici jede stálou rychlostí povoz s kládou. Turista jdoucí stálou rychlostí $v = 4{,}0\,\mathrm{km/h}$ po okraji silnice chce určit délku klády. Délka jeho kroku se nemění a měří $k = 0{,}75\,\mathrm{m}$. Přejde-li turista od předního konce pohybující se klády k zadnímu konci, napočítá $n_1 = 16$ kroků. Přejde-li od zadního konce pohybující se klády k přednímu konci, napočítá $n_2 = 112$ kroků.

a) Za jaký čas t_1 přejde turista od předního konce klády k zadnímu a za jaký čas t_2 od zadního konce klády k přednímu?

b) Jakou rychlostí v_1 se pohybuje povoz s kládou?

c) Jaká je délka klády d vyjádřená jednak jako násobek délky turistova kroku k, jednak v metrech?

Řešení:

a) Pro výpočet vyjádříme rychlost turisty v metrech za sekundu $v = 4/3{,}6\,\mathrm{m/s} \doteq 1{,}111\,1\,\mathrm{m/s}$. Pro časy chůze turisty proti pohybu klády a ve směru pohybu klády získáváme

$$t_1 = n_1 \frac{k}{v} = 16 \cdot \frac{0{,}75\,\mathrm{m}}{1{,}111\,1\,\mathrm{m/s}} \doteq 10{,}8\,\mathrm{s} \doteq 11\,\mathrm{s},$$
$$t_2 = n_2 \frac{k}{v} = 112 \cdot \frac{0{,}75\,\mathrm{m}}{1{,}111\,1\,\mathrm{m/s}} \doteq 75{,}6\,\mathrm{s} \doteq 76\,\mathrm{s}.$$

3 body

b) Protože pro délku klády d platí

$$d = (v + v_1)\, t_1 = (v - v_1)\, t_2 \qquad (3.1)$$

a také $t_1 = n_1 k/v$, $t_2 = n_2 k/v$, můžeme psát

$$(v + v_1)\, n_1 \frac{k}{v} = (v - v_1)\, n_2 \frac{k}{v}.$$

Odtud vyjádříme

$$v_1 = v \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = v \frac{112 - 16}{112 + 16} = \frac{3}{4} v = 3{,}0\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

c) Pro vzdálenost d nyní použijeme jeden ze vztahů v rovnici 3.1, např.

$$d = (v + v_1)\,t_1 = \left(v + v\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right) n_1 \frac{k}{v} = \frac{2kn_1n_2}{n_2 + n_1} =$$
$$= 2k\,\frac{16 \cdot 112}{16 + 112} = 28k = 28 \cdot 0{,}75\,\mathrm{m} = 21\,\mathrm{m}.$$

3 body

FO53F2-1 Ivo Volf, 47,5 %

Na trati Moskva-Petrohrad v Ruské federaci, která má délku 660 km, jezdí několik typů vlaků. Z jízdního řádu vyjímáme:

Č. vlaku	INT152	INT158	INT268	INT162	INT164	INT166	INT135	INT52
Moskva o.	6:45	13:30	13:44	16:30	19:30	19:45	20:19	21:20
Tver p.		14:33	15:25	17:30	20:30		23:14	23:36
Tver o.		14:35	15:26	17:32	20:31		23:15	23:37
Petrohrad p.	10:30	17:45	21:57	20:29	23:19	23:30	5:11	4:40

a) Urči, jak dlouho projíždějí vlaky uvedenou trasou; krátká zastavení neber do úvahy.
b) Urči průměrnou rychlost vlaků na trati Moskva - Petrohrad
c) Nejrychlejší vlaky na trati se nazývají vysokorychlostní vlaky Sapsan. Které to jsou?
d) Do grafu $s(t)$ vyznač začátky a konce pohybu s ohledem na stanice Moskva, Tver, Petrohrad. Spojitou čarou vyznač průběh pohybu, tj. časové změny dráhy.
e) Doba zastavení ve stanici Tver trvá 1-2 minuty; jakou trasu by urazil za tuto dobu zmíněný vlak?
f) Jeden z vlaků – Sapsan – dosáhl při rychlostní zkoušce nejvyšší rychlosti 290 km/h. Předpokládejme, že se rychlostní vlak rozjížděl po dobu 3,0 min, poté jel touto rychlostí 6,0 min a po dobu 5,0 min pomalu zpomaloval, až zastavil. Nakresli graf změn rychlosti na čase a urči dráhu, kterou vlak při této zkoušce urazil.

Řešení:

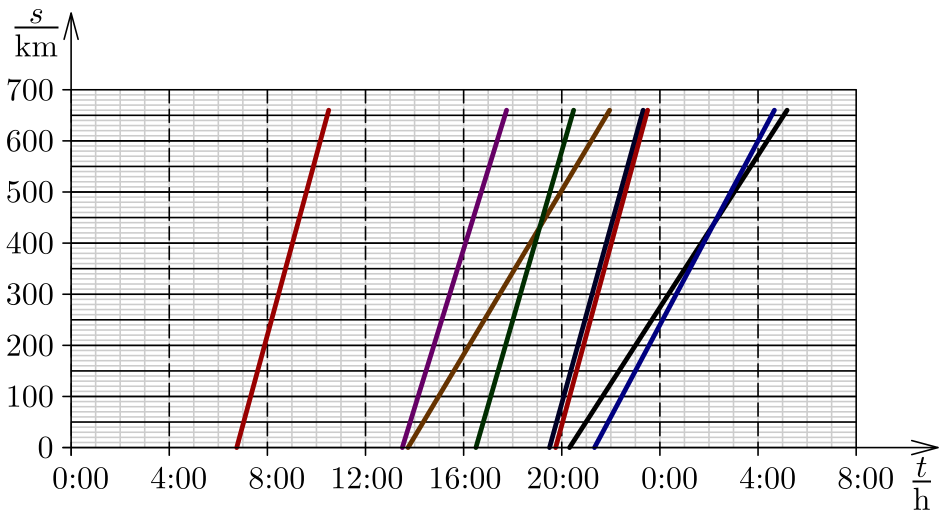
Odpovědi na otázky a) a b) můžeme vynést do tabulky pro jednotlivé vlaky:

Č. vlaku	INT152	INT158	INT268	INT162	INT164	INT166	INT135	INT52
t	3:45	4:15	8:13	3:59	3:49	3:45	8:52	7:20
t [h]	3,75	4,25	8,22	3,98	3,82	3,75	8,87	7,33
v [km/h]	176	155	80,3	166	173	176	74,4	90,0

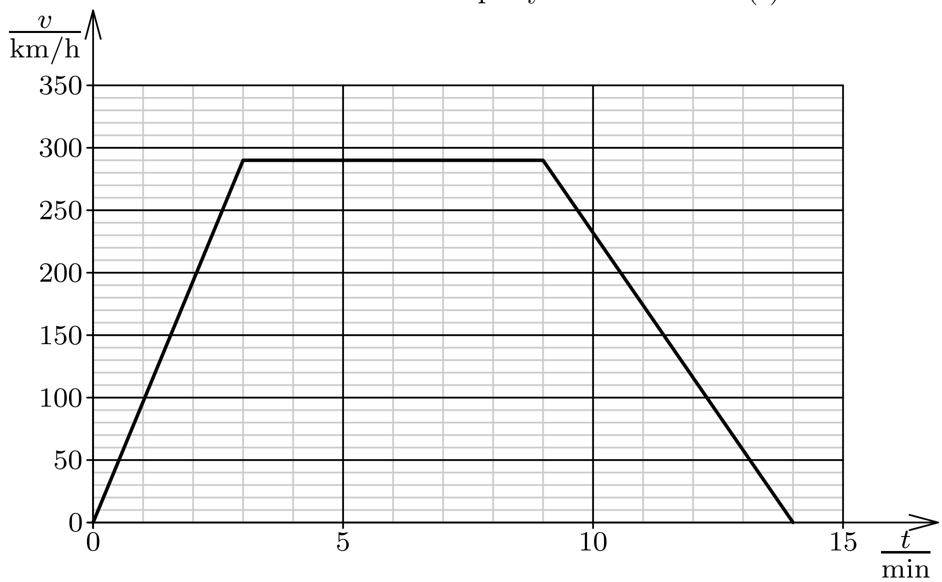
a) Viz druhý a třetí řádek tabulky s časy t. **2 body**
b) Viz řádek tabulky rychlost v. **2 body**
c) Z tabulky je zřejmé, že nejrychlejšími vlaky Sapsan jsou INT152 a INT166. **1 bod**
d) Graf časové změny dráhy vlaků je na obr. 3.13. **2 body**
e) Pro $t_1 = 1\,\mathrm{min}$ je dráha $s_1 = 2{,}93\,\mathrm{km}$. Pro $t_2 = 2\,\mathrm{min}$ je dráha $s_2 = 5{,}87\,\mathrm{km}$. **1 bod**

f) Dráhu určíme jako obsah obrazce pod grafem obrázku 3.14.

$$s = \left(290 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} + 290 \cdot \frac{1}{10} + 290 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{km} = 48{,}33\,\mathrm{km} \doteq 48\,\mathrm{km}$$ **2 body**



Obrázek 3.13: Průběh pohybu vlaků $s = s(t)$



Obrázek 3.14: Graf rychlostní zkoušky $v = v(t)$

FO56F2-1: Karkulka a vlk Jan Thomas, 40,9 %

Karkulka koupila hajnému 20 párků. Když byla ve vzdálenosti 2,5 km od hájovny, vyskočil z lesa hladový vlk schopný sníst cokoli a kohokoli. Karkulka odhodí na zem párek a běží rychlostí $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$ k hájovně. Vlk sežere párek (což mu trvá vždy 0,5 min) a vyrazí rychlostí $v_2 = 5\,\mathrm{m/s}$ za Karkulkou. Když ji právě dohání, Karkulka hodí na zem další párek a utíká dál. To se opakuje až k hájovně.

a) Jak dlouho trvá, než vlk dohoní Karkulku poprvé?
b) V jaké vzdálenosti od místa prvního setkání to bude?
c) Kolik párků donese Karkulka do hájovny?
d) Zakreslete do jednoho grafu závislost vzdálenosti vlka a Karkulky od místa prvního setkání na čase.

Řešení:

a) Než vlk sežere párek, bude mít Karkulka náskok

$$s_1 = v_1 t = 3\,\mathrm{m/s} \cdot 30\,\mathrm{s} = 90\,\mathrm{m}. \qquad \textbf{3 body}$$

Vzájemná rychlost vlka a Karkulky je $v_2 - v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$, vlk dohoní Karkulku za dobu

$$t = \frac{s_1}{v_2 - v_1} = \frac{90\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m/s}} = 45\,\mathrm{s}.$$

Připočteme-li 30 s na snědení párku, dohoní Karkulku za 75 s od setkání.

b) Vlk poprvé dohoní Karkulku ve vzdálenosti

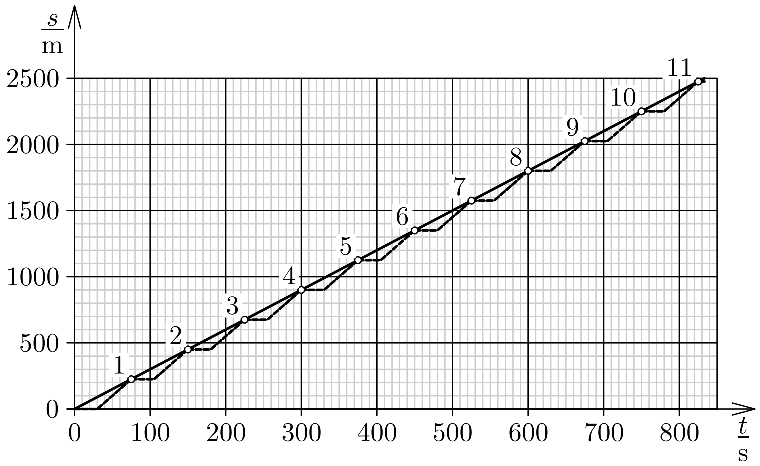
$$s = v_2 t = 5\,\mathrm{m/s} \cdot 45\,\mathrm{s} = 225\,\mathrm{m}.$$

2 body

c) Vše se bude opakovat, dokud Karkulka nedoběhne do hájovny, tedy

$$\frac{2\,500\,\mathrm{m}}{225\,\mathrm{m}} = 11{,}11;$$

vlk dohoní Karkulku ještě celkem 11×, naposledy ve vzdálenosti $2\,500\,\mathrm{m} - 11 \cdot 225\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$ od hájovny. Protože první párek položila hned na začátku, spotřebovala Karkulka 12 párků a do hájovny donese jen 8 párků. **2 body**



Obrázek 3.15: Graf závislosti $s(t)$ pro Karkulku a vlka v úloze FO56F2-1

d) Z části b) víme, že vlk dostihne Karkulku vždy po 225 m a po $30\,\mathrm{s} + 45s = 75s$, tj. ve vzdálenostech 225 m, 450 m, 675 m, 900 m, 1 225 m, 1 350 m, 1 575 m, 1 800 m, 2 025 m, 2 250 m, 2 475 m m a v časech 75 s, 150 s, 225 s, 300 s, 375 s, 450 s, 525 s, 600 s, 675 s, 750 s, 825 s. Graf závislosti $s(t)$ s vyznačenými místy setkání je na obr. 1; úsečka odpovídá pohybu Karkulky, lomená čára pohybu vlka. **3 body**

FO60F2-4: Turista na mostě Jan Thomas, 40,1 %

Turista přechází po železničním mostě. Když je ve vzdálenosti $d = 50\,\mathrm{m}$ za jeho polovinou, uvidí ve vzdálenosti $s = 300\,\mathrm{m}$ protijedoucí nákladní vlak. Rozběhne se směrem proti vlaku rychlostí $v_1 = 5{,}0\,\mathrm{m/s}$. Když dorazí na konec mostu, je vlak ještě ve vzdálenosti $l = 60\,\mathrm{m}$ před ním. Rychlost vlaku je $v_2 = 54\,\mathrm{km/h}$.

a) Za jak dlouho doběhne turista na konec mostu?

b) Jaká je délka mostu L?

Předpokládejme, že se turista v okamžiku, kdy uviděl vlak, rozhodl běžet stejnou rychlostí, ale opačným směrem.

c) Kde se bude nacházet čelo vlaku, když turista dorazí na konec mostu?

d) Kdy a kde vlak turistu dohoní?

Vlak může turistu minout, aniž dojde k jejich střetu.

Řešení:

a) Rychlost vlaku $v_2 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$. Když turista doběhne na konec mostu, je vlak ještě ve vzdálenosti l. Protože se turista a vlak pohybují proti sobě, doběhne turista na konec mostu za dobu

$$t_1 = \frac{s-l}{v_1+v_2} = \frac{300\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s} + 15\,\mathrm{m/s}} = 12\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

b) Turista za tuto dobu uběhl vzdálenost

$$s_1 = v_1 t_1 = 5{,}0\,\mathrm{m/s} \cdot 12\,\mathrm{s} = 60\,\mathrm{m}.$$

Délka mostu je tedy

$$L = 2\,(d + s_1) = 2 \cdot (50\,\mathrm{m} + 60\,\mathrm{m}) = 220\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

c) Na druhý konec mostu doběhne turista za dobu

$$t_2 = \frac{d + \frac{L}{2}}{v_1} = \frac{50\,\mathrm{m} + \frac{220\,\mathrm{m}}{2}}{5\,\mathrm{m/s}} = 32\,\mathrm{s}.$$

Vlak za tu dobu ujede vzdálenost

$$s_2 = v_2 t_2 = 15\,\mathrm{m/s} \cdot 32\,\mathrm{s} = 480\,\mathrm{m}.$$

Protože na začátku byl ve vzdálenosti $s_3 = s - s_1 = 300\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{m} = 240\,\mathrm{m}$ před mostem a most má délku $L = 220\,\mathrm{m}$, bude nyní čelo vlaku ve vzdálenosti

$$d_1 = s_2 - L - s_3 = 480\,\mathrm{m} - 220\,\mathrm{m} - 240\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$$

za mostem. **2 body**

d) Označme hledaný čas t_3. Vlak za tuto dobu musí ujet o vzdálenost s více, než uběhne turista, a pohybuje se vzhledem k turistovi rychlostí $v_2 - v_1$. Pro čas t_3 tak vychází

$$t_3 = \frac{s}{v_2 - v_1} = \frac{300\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m/s} - 5\,\mathrm{m/s}} = 30\,\mathrm{s}.$$

Turista za tuto dobu uběhne vzdálenost

$$s_4 = v_1 t_3 = 5\,\mathrm{m/s} \cdot 30\,\mathrm{s} = 150\,\mathrm{m}.$$

Bude se tedy nacházet ve vzdálenosti

$$d_4 = \frac{L}{2} + d - s_4 = \frac{220\,\mathrm{m}}{2} + 50\,\mathrm{m} - 150\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$$

před koncem mostu. **3 body**

3.2 Rozměry, hmotnost a hustota

FO54E2-2: Balení papíru Ivo Volf, 76,2 %

Bílý křídový papír se prodává v balících po 100 ks ve formátu A4, tedy 297 mm x 210 mm, jeho gramáž je 135 g/m^2.

a) Urči hmotnost jednoho balíku křídového papíru formátu A4.

b) Jaká je hmotnost jednoho listu křídového papíru?

c) Jaké jsou rozměry papíru formátu A0? Kolikrát ho musíme přeložit „napůl“, abychom dostali formát A4? Nakresli náčrtek, odpovídající tomuto postupu.

d) Jaká je hustota papíru a tloušťka jednoho listu, je-li tloušťka balíku 22 mm?

Řešení:

a) Obsah plochy jednoho listu papíru je:

$$S = (0{,}297 \cdot 0{,}21)\,\mathrm{m}^2 = 0{,}062\,37\,\mathrm{m}^2$$

Obsah plochy 100 listů papíru je:

$$S_{100} = (100 \cdot 0{,}297 \cdot 0{,}21)\,\mathrm{m}^2 = 6{,}237\,\mathrm{m}^2$$

Gramáž je 135 g/m^2, z toho celková hmotnost balíku:

$$m_{100} = 6{,}237 \cdot 135\,\mathrm{g} = 842\,\mathrm{g}$$ **3 body**

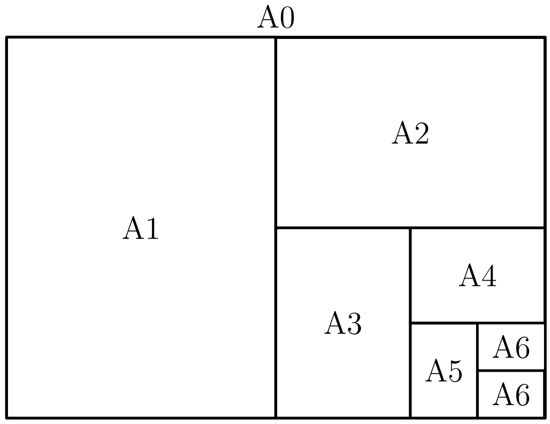
b) Hmotnost jednoho listu můžeme vypočítat dvěma způsoby:

$$m_1 = 0{,}06237 \cdot 135\,\mathrm{g} = 8{,}42\,\mathrm{g}$$

nebo

$$m_1 = \frac{m_{100}}{100} = \frac{842}{100}\,\mathrm{g} = 8{,}42\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

c) Jestliže čtyřikrát přeložíme list papíru formátu A0, získáme list formátu A4. Rozměry listu papíru formátu A0 jsou: $a = 4 \cdot 210\,\mathrm{mm} = 840\,\mathrm{mm}$
$b = 4 \cdot 297\,\mathrm{mm} = 1\,188\,\mathrm{mm}$ **2 body**



Obrázek 3.16: Schéma skládání papíru A0

d) Objem všech listů papíru v balíku o tloušťce d a hustota papíru je:

$$V = Sd$$

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sd}$$

$$\varrho = \frac{0{,}842}{(0{,}06237 \cdot 0{,}022)}\,\mathrm{kg/m^3} = 614\,\mathrm{kg/m^3}$$

Tloušťka jedno listu je:

$$d_1 = \frac{22}{100}\,\mathrm{mm} = 0{,}22\,\mathrm{mm}$$ **3 body**

FO62E2-3: Kostičky v krabicích Jan Thomas, 75,3 %

Martin našel ve sklepě dvě stejné krabice s vnitřním objemem $V = 2{,}0\,\mathrm{l}$. V krabicích jsou až po okraj naskládány červené a bílé kostičky stejných rozměrů. Maminka si pamatovala, že v první krabici je o 40 červených kostiček více, než bílých. Zvážením zjistili, že kostičky v první krabici mají dohromady hmotnost $m_1 = 5{,}2\,\mathrm{kg}$, kostičky v druhé krabici $m_2 = 6{,}8\,\mathrm{kg}$. Hmotnost jedné červené kostičky je $m_\mathrm{č} = 50\,\mathrm{g}$, hmotnost jedné bílé kostičky je $m_\mathrm{b} = 150\,\mathrm{g}$.

a) Jaká je průměrná hustota kostiček v první a druhé krabici?
b) O jakou hodnotu se změní průměrná hustota obsahu každé krabice, jestliže v ní vyměníme jednu červenou kostičku za bílou?
c) Kolik kterých kostiček je v každé krabici?

Řešení:

a) Vyjádřeme objem krabic $V = 2{,}0\,\mathrm{l} = 2\,000\,\mathrm{cm^3}$, hmotnosti $m_1 = 5{,}2\,\mathrm{kg} = 5\,200\,\mathrm{g}$ a $m_2 = 6{,}8\,\mathrm{kg} = 6\,800\,\mathrm{g}$. Pro hustoty dostáváme

$$\varrho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{5\,200\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm^3}} = 2{,}6\,\mathrm{g/cm^3} = 2\,600\,\mathrm{kg/m^3}.$$

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{6\,800\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm^3}} = 3{,}4\,\mathrm{g/cm^3} = 3\,400\,\mathrm{kg/m^3}.$$ **2 body**

b) Změna hustoty krabice při výměně jedné kostičky bude

$$\Delta\varrho = \frac{m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm^3}} = 0{,}050\,\mathrm{g/cm^3}.$$ **3 body**

Poznámka: Namísto výše uvedené úvahy lze dojít k výsledku přes hmotnosti krabic. Pokud vyměníme kostičky v první krabici, bude její hustota po záměně

$$\varrho_1' = \frac{m_1 + m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{5\,200\,\mathrm{g} + 150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm^3}} = 2{,}65\,\mathrm{g/cm^3},$$

pro druhou dostaneme

$$\varrho_2' = \frac{m_2 + m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{6\,800\,\mathrm{g} + 150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm^3}} = 3{,}45\,\mathrm{g/cm^3}.$$

V obou případech platí

$$\Delta\varrho = \varrho_1' - \varrho_1 = \varrho_2' - \varrho_2 = 0{,}050\,\mathrm{g/cm^3}.$$

c) Označme počet červených a bílých kostiček v první krabici c_1, b_1, ve druhé c_2, b_2; zároveň podle zadání platí $c_1 = b_1 + 40$. Ze zadaných hmotností kostiček pak pro hmotnost první krabice platí

$$m_1 = c_1 m_č + b_1 m_b = (b_1 + 40) \cdot m_č + b_1 m_b.$$

Po dosazení číselných hodnot v gramech dostaneme rovnici

$$5\,200 = 50 \cdot (b_1 + 40) + 150 b_1 = 200 b_1 + 2\,000,$$

odkud vychází

$$b_1 = \frac{5\,200 - 2\,000}{200} = 16.$$

Bílých kostiček je 16, červených $c_1 = b_1 + 40 = 16 + 40 = 56$, celkem $c_1 + b_1 = 56 + 16 = 72$. Pro druhou krabici tak platí $c_2 + b_2 = 72$, tj. $c_2 = 72 - b_2$ a dostáváme

$$m_2 = c_2 m_č + b_2 m_b = (72 - b_2) \cdot m_č + b_2 m_b.$$

Po dosazení číselných hodnot v gramech dostaneme rovnici

$$6\,800 = 50 \cdot (72 - b_2) + 150 b_2 = 100 b_2 + 3\,600,$$

odkud vychází

$$b_2 = \frac{6\,800 - 3\,600}{100} = 32.$$

Bílých kostiček je 32, červených $c_2 = 72 - b_2 = 72 - 32 = 40$. **5 bodů**

FO61F2-1: Kuchtík Patrik Ivo Volf, 64,7 %

Patrik postavil prázdný hrníček na váhy a zjistil, že jeho hmotnost je $m_1 = 236\,\mathrm{g}$. Třikrát za sebou ho naplnil moukou a nasypal mouku do mísy. Potom ho naplnil vodou a znovu zjistil jeho hmotnost $m_2 = 499\,\mathrm{g}$, pak vodu také vylil do mísy. Potom ještě nalil do prázdného hrníčku stolní olej a zjistil hmotnost hrníčku s olejem $m_3 = 478\,\mathrm{g}$. Poté vylil olej do mísy a přidal do ní $m_4 = 120\,\mathrm{g}$ cukru. Na kuchyňské odměrce si všiml, že hmotnost 200 g mouky má objem $300\,\mathrm{cm^3}$.

a) Určete objem hrníčku.
b) Určete hustotu stolního oleje.
c) Jaká byla hmotnost mouky, kterou přidal Patrik do mísy?
d) Jaká byla celková hmotnost těsta, které v míse vzniklo?

Řešení:

a) Hmotnost vody v hrníčku $m = m_2 - m_1 = 499\,\mathrm{g} - 236\,\mathrm{g} = 263\,\mathrm{g}$, objem vody (a tím vnitřní objem hrníčku) je

$$V = \frac{m}{\varrho} = \frac{263\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 263\,\mathrm{cm^3} = 263\,\mathrm{ml}.$$ **2 body**

b) Hmotnost oleje v hrníčku $m_o = m_3 - m_1 = 478\,\mathrm{g} - 236\,\mathrm{g} = 242\,\mathrm{g}$, hustota oleje vychází

$$\varrho_o = \frac{m_o}{V} = \frac{242\,\mathrm{g}}{263\,\mathrm{cm^3}} \doteq 0{,}920\,15\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 0{,}92\,\mathrm{g/cm^3} = 920\,\mathrm{kg/m^3}.$$ **3 body**

c) Jestliže $300\,\mathrm{cm}^3$ má hmotnost $200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, potom hustota sypané mouky je $\varrho_\mathrm{m} = \frac{2}{3}\mathrm{g/cm^3} \doteq 0{,}666\,67\,\mathrm{g/cm^3}$ a hmotnost mouky v jednom plném hrníčku

$$m_\mathrm{m} = \varrho_\mathrm{m} V = 0{,}666\,67\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 263\,\mathrm{cm^3} \doteq 175{,}33\,\mathrm{g} \doteq 175\,\mathrm{g}.$$

Když Patrik vysypal hrníček do těsta třikrát, bylo mouky celkem $m_5 = 3 \cdot 175{,}33\,\mathrm{g} \doteq 526\,\mathrm{g}$. **3 body**

d) Když připočteme hmotnost cukru $m_4 = 120\,\mathrm{g}$, bude hmotnost těsta celkem

$$m = m + m_\mathrm{o} + m_4 + m_5 = 263\,\mathrm{g} + 242\,\mathrm{g} + 120\,\mathrm{g} + 526\,\mathrm{g} = 1\,151\,\mathrm{g} \doteq 1\,150\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

FO54F2-1: Převoz dřeva Ivo Volf, 59,7 %

Řidič jedoucí po silnici předjíždí vlek, jehož rozměry odhadneme: délka vleku 160 cm, šířka vleku 130 cm. Na jeho podlaze jsou uloženy ve směru jízdy trámky o délce 240 cm, výška každého trámku je 14 cm a šířka 9 cm. Hustota čerstvého smrkového dřeva je $650\,\mathrm{kg/m^3}$, vysušeného dřeva $450\,\mathrm{kg/m^3}$. Trámky jsou ve vleku uloženy jen v jedné vrstvě.

a) Urči objem dřeva ve vleku.
b) Urči hmotnost dřeva ve vleku, jedná-li se o čerstvé, nebo vysušené.
c) Jak se změní výše uvedené hodnoty, je-li na vlečném vozíku dřevo ve dvou vrstvách?
d) Je-li těžiště prázdného vozíku přesně v místě, jehož svislice prochází prostředkem ložné plochy, jak se posune těžiště při naložení jedné nebo dvou vrstev trámků?

Řešení:

a) Do vleku se vejde na podlahu 14 trámků, ty mají dohromady šířku 126 cm, přičemž část trámků vylézá vzadu z vleku ven. Výsledný objem dřeva ve vleku tedy bude:

$$V = 14 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}09\,\mathrm{m^3} = 423{,}36\,\mathrm{dm^3}$$ **3 body**

b) Hmotnost čerstvého a vysušeného dřeva ve vleku určíme jako

$$m_\mathrm{č} = V \varrho_\mathrm{č},$$

$$m_\mathrm{č} = (423{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot 650)\,\mathrm{kg} = 275\,\mathrm{kg},$$

$$m_\mathrm{s} = V \varrho_\mathrm{s},$$

$$m_\mathrm{s} = (423{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot 450)\,\mathrm{kg} = 190{,}5\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

c) Hmotnost dřeva ve dvou vrstvách spočteme jako

$$V_2 = 2 \cdot 14 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}09\,\mathrm{m^3} = 846{,}72\,\mathrm{dm^3},$$

$$m_\mathrm{č2} = V_2 \varrho_\mathrm{č},$$

$$m_\mathrm{č2} = 550\,\mathrm{kg},$$

$$m_\mathrm{s2} = V_2 \varrho_\mathrm{s},$$

$$m_\mathrm{s2} = 381\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

d) Protože trámky vylézají vzadu z vozíku, těžiště se posune ve vodorovném směru k zadní části vozíku. O jakou vzdálenost se změní poloha těžiště, nelze ze zadání určit, neboť nebyla udána hmotnost vozíku. Při naložení druhé vrstvy trámku se těžiště ještě více posune směrem k zadní části vozíku. **2 body**

FO54F2-3: Transfuze krve Ivo Volf, 49,8 %

Při transfuzi krve po operaci bylo použito tzv. kapkové metody tak, že byla udržována frekvence 40 kapek za minutu, jež odkapávaly z trubičky, vycházející ze zásobníku krve. Celkový objem krve byl 250 ml a měl být přesunut do krevního oběhu za 1,5 h.

a) Odhadni průměr kapky krve postupující do krevního oběhu pacienta, je-li ti známo, že objem koule o průměru d je dán matematickým vztahem $V = \frac{1}{6}\pi d^3$.

b) Je-li možné přijmout, že hustota krve je 1 050 g/l, urči hmotnost kapky krve při této transfuzi.

Řešení:

a) Celkový objem krve byl 250 ml, počet kapek za 1 minutu 40, za 1,5 hodiny 3 600, objem jedné kapky 0,069 4 ml. Pro průměr kapky vychází

$$d = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 6}{\pi}},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{0{,}0694 \cdot 10^{-6} \cdot 6}{\pi}}\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{mm}.$$ **6 bodů**

b) Hmotnost kapky krve při transfuzi bude

$$m = V\varrho,$$

$$m = 0{,}0694 \cdot 10^{-3} \cdot 1050\,\mathrm{g} = 0{,}073\,\mathrm{g}.$$ **4 body**

3.3 Otáčivé účinky síly

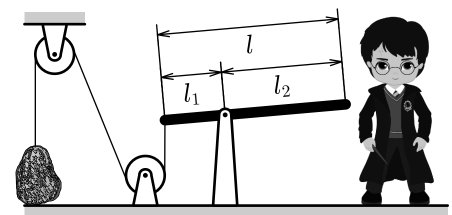
FO59F2-2: Vrátka v Bradavicích Lukáš Richterek, 48,9 %

Zadní vrátka v Bradavicích jsou jištěna žulovým kamenem o objemu $V = 72\,\mathrm{l}$. K otevření vrátek se používá pákový mechanismus znázorněný na obr. 3.17, kde délka kratšího úseku měří $l_1 = 30\,\mathrm{cm}$. Hustota bradavické žuly je asi $\varrho = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$.

a) Jaká je hmotnost kamene m_1?

b) Jaká je nejmenší délka ramene l_2 a nejmenší celková délka páky l, jestliže kámen může zvednout i Harry Potter o hmotnosti $m_2 = 60\,\mathrm{kg}$, pokud se posadí na delší konec? Hmotnost samotné páky a tření lana o kladky zanedbejte.

c) Po nějakém čase se prkno sloužící jako páka zlomilo a Hagrid sehnal na opravu nové o délce $l' = 165\,\mathrm{cm}$. Jaká pak bude délka úseků l'_1 a l'_2, aby mechanismus fungoval stejně jako před zlomením původního prkna? Uvažte, že pro rozdělení ve správném poměru může být vhodné prkno o 5 cm–10 cm zkrátit tak, aby délky úseků l'_1 a l'_2 vycházely v celých centimetrech, neboť humpolácký Hagrid neumí měřit přesněji.



Obrázek 3.17: Pákový mechanismus v úloze FO59F2-2

Řešení:

a) Pro hmotnost kamene o objemu $V = 72\,\mathrm{l} = 0{,}072\,\mathrm{m}^3$ a hustotě $\varrho = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3} = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ platí

$$m_1 = \varrho V = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}072\,\mathrm{m^3} = 180\,\mathrm{kg}.$$

2 body

b) Protože na obou stranách pevných kladek v rovnováze působí vždy stejné síly, rozhodující je rovnováha na páce. Můžeme psát

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2.$$

Odtud

$$l_2 = l_1 \frac{m_1}{m_2} = 30\,\mathrm{cm} \cdot \frac{180\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}} = 90\,\mathrm{cm}.$$

Celková délka páky pak musí být nejméně $l = l_1 + l_2 = 30\,\mathrm{cm} + 90\,\mathrm{cm} = 120\,\mathrm{cm}$.

4 body

c) Protože poměr hmotností kamene a Harryho je $m_1 : m_2 = 3 : 1$, musí platit $l_1 : l_2 = 1 : 3$. Pokud bychom dělili Hagridovo prkno bez zkrácení, vycházejí délky

$$l_1' = l' \frac{1}{3+1} = \frac{165\,\mathrm{cm}}{4} = 41{,}25\,\mathrm{cm}, \qquad l_2' = l' \frac{3}{3+1} = \frac{3 \cdot 165\,\mathrm{cm}}{4} = 123{,}75\,\mathrm{cm}.$$

Výhodnější bude zkrátit prkno na délku dělitelnou 4, např. na $160\,\mathrm{cm}$; potom vychází

$$l_1' = l' \frac{1}{3+1} = \frac{160\,\mathrm{cm}}{4} = 40\,\mathrm{cm}, \qquad l_2' = l' \frac{3}{3+1} = \frac{3 \cdot 160\,\mathrm{cm}}{4} = 120\,\mathrm{cm}.$$

4 body

FO57F2-2: Na stavbě Josef Jírů, 41,0 %

Václav, jehož hmotnost je $45\,\mathrm{kg}$, měl vytáhnout v nádobě o hmotnosti $4\,\mathrm{kg}$ maltu o hmotnosti $30\,\mathrm{kg}$ do výšky $3{,}8\,\mathrm{m}$. Rozhodl se, že jednou použije lano a pevnou kladku, podruhé lano a dvě kladky, jednu pevnou a jednu volnou. V obou případech stál Václav dole na zemi. Hmotnost lana a tření zanedbejte, hmotnost každé kladky byla $3\,\mathrm{kg}$. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{N/kg}$.

a) Načrtněte obrázek, jak Václav v obou případech vytahoval maltu nahoru.
b) Určete sílu, kterou musel Václav na lano působit, aby maltu vytáhl nahoru.
c) Určete práci, kterou přitom vykonal.
d) Určete účinnost zdvíhání, tj. poměr užitečné práce a skutečně vynaložené práce. Užitečná práce je práce nutná k vytažení samotné malty.
e) Určete maximální hmotnost malty, kterou je Václav těmito způsoby schopen vytáhnout nahoru.

Řešení:

a) Případ s využitím pevné kladky je na obr. 3.18a, s využitím pevné i volné kladky na obr. 3.18b. **2 body**

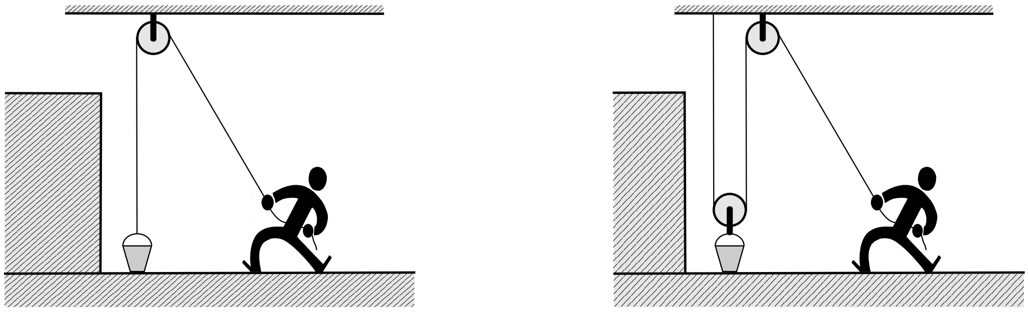
b) V prvním případě působí silou stejně velikou jako je tíha malty a nádoby, tj.

$$F_1 = G_\mathrm{m} + G_\mathrm{n} = 30\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} + 4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 340\,\mathrm{N},$$

v druhém případě poloviční silou než je tíha malty, nádoby a volné kladky, tj.

$$F_2 = \frac{G_\mathrm{m} + G_\mathrm{n} + G_\mathrm{vk}}{2} = \frac{30\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} + 4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} + 3\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{2} = 185\,\mathrm{N}.$$

2 body



(a) (b)

Obrázek 3.18: Pevná a volná kladka v úloze FO57F2-2

c) Práce je určena součinem tíhy z úlohy b) a výšky, do níž Václav nádobu s maltou vytáhne. V prvním případě vychází práce

$$W_1 = (G_\mathrm{m} + G_\mathrm{n})\,h = 340\,\mathrm{N}\cdot 3{,}8\,\mathrm{m} = 1\,292\,\mathrm{J} \doteq 1\,300\,\mathrm{J},$$

v druhém

$$W_2 = (G_\mathrm{m} + G_\mathrm{n} + G_\mathrm{vk})\,h = 370\,\mathrm{N}\cdot 3{,}8\,\mathrm{m} = 1\,406\,\mathrm{J} \doteq 1\,400\,\mathrm{J}.$$ **2 body**

d) V obou případech je práce nutná k vytažení samotné malty nahoru $W_\mathrm{m} = G_\mathrm{m}h = 30\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}\cdot 3{,}8\,\mathrm{m} = 1\,140\,\mathrm{J}$. Účinnost je v prvním případě $\eta_1 = W_\mathrm{m}/W_1 = 1\,140\,\mathrm{J}/1\,292\,\mathrm{J} \doteq 0{,}88 = 88\,\%$, v druhém $\eta_2 = W_\mathrm{m}/W_2 = 1\,140\,\mathrm{J}/1\,406\,\mathrm{J} \doteq 81 = 81\,\%$. **2 body**

e) V prvním případě celková hmotnost zátěže musí být menší než hmotnost člověka, tj. na maltu připadá hmotnost menší než 41 kg. V druhém případě hmotnost celkové zátěže musí být menší než dvojnásobek hmotnosti člověka, tj. malta musí mít hmotnost menší než $2\cdot 45\,\mathrm{kg} - 4\,\mathrm{kg} - 3\,\mathrm{kg} = 83\,\mathrm{kg}$. **2 body**

FO57E2-1: Dřevěná houpačka Josef Jírů, 40,1 %

Michal s mladší sestrou Petruškou si z fošny (prkna) délky 4,2 m a o hmotnosti 18 kg udělali houpačku. Michal má hmotnost 40 kg, Petruška 25 kg.

a) Fošnu nejprve podepřeli uprostřed a Petruška si sedla na konec fošny. V jaké vzdálenosti od konce fošny si musí sednout Michal, aby byla houpačka vyvážená?
b) Nyní podepřeli fošnu v jedné třetině její délky a Michal si sedl na kratší konec. Jakou hmotnost by musel mít jeho protějšek na opačném konci, aby byla houpačka vyvážená?
c) V jaké vzdálenosti od Michalova konce fošny je nutné fošnu podepřít, jestliže Michal a Petruška budou sedět na navzájem opačných koncích fošny tak, aby byla opět vyvážená?

Předpokládejte, že tíhová síla fošny působí v jejím těžišti.

Řešení: Označme délku fošny $l = 4{,}2\,\mathrm{m}$, hmotnost fošny $m = 18\,\mathrm{kg}$, hmotnost Michala $m_1 = 40\,\mathrm{kg}$, hmotnost Petrušky $m_2 = 25\,\mathrm{kg}$.

a) Označme dále x vzdálenost Michala od konce fošny. Těžiště fošny je v ose (přesněji nad osou) otáčení, moment tíhové síly fošny je proto nulový. V rovnováze se musí rovnat momenty tíhových sil obou dětí

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} - x\right) = m_2 g\frac{l}{2}.$$

Z rovnice plyne

$$x = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} l = \frac{40\,\mathrm{kg} - 25\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 40\,\mathrm{kg}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{m} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m}.$$ **3 body**

b) Označme m_2' hledanou hmotnost. Těžiště fošny a tedy střed fošny nyní leží ve vzdálenosti 1/6 délky fošny od osy otáčení, moment tíhové síly fošny je $mgl/6$. V rovnováze platí

$$m_1 g \frac{l}{3} = mg \frac{l}{6} + m_2' g \frac{2l}{3}.$$

Z rovnice získáváme

$$m_2' = \frac{m_1}{2} - \frac{m}{4} = \frac{40\,\mathrm{kg}}{2} - \frac{18\,\mathrm{kg}}{4} = 15{,}5\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

c) Označme x' hledanou vzdálenost. Nyní je moment tíhové síly fošny $mg\,(l/2 - x')$. V rovnováze je splněna rovnice

$$m_1 g x' = m_2 g\,(l - x') + mg\left(\frac{l}{2} - x'\right),$$

z níž plyne

$$x' = \frac{m_2 + \dfrac{m}{2}}{m_1 + m_2 + m} l = \frac{25\,\mathrm{kg} + \dfrac{18\,\mathrm{kg}}{2}}{40\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg} + 18\,\mathrm{kg}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{m} \doteq 1{,}72\,\mathrm{m}.$$

4 body

FO58F2-2: Zednické lešení Z. Kalík, 21,1 %

Deska zednického lešení má délku $d = 6{,}0\,\mathrm{m}$ a hmotnost $m = 60\,\mathrm{kg}$ a je položena na podpěrách A, B. Podpěra A je ve vzdálenosti $a = 1{,}0\,\mathrm{m}$ od levého konce desky, podpěra B ve vzdálenosti $b = 1{,}5\,\mathrm{m}$ od pravého konce desky. Po desce se mají pohybovat zedníci, z nichž ten nejmohutnější má hmotnost $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$.

a) Nakreslete náčrtek lešení. Volte měřítko $1\,\mathrm{m} \sim 2\,\mathrm{cm}$.
b) Zjistěte, zda se zedník může postavit na oba konce desky, aniž by se s ním převrátila.
c) Pokud se na některý konec zedník postavit nemůže, navrhněte, do jaké největší vzdálenosti od tohoto konce je potřeba umístit nejbližší podpěru, aby se zedník na oba konce postavit mohl. Svůj návrh zdůvodněte výpočtem.

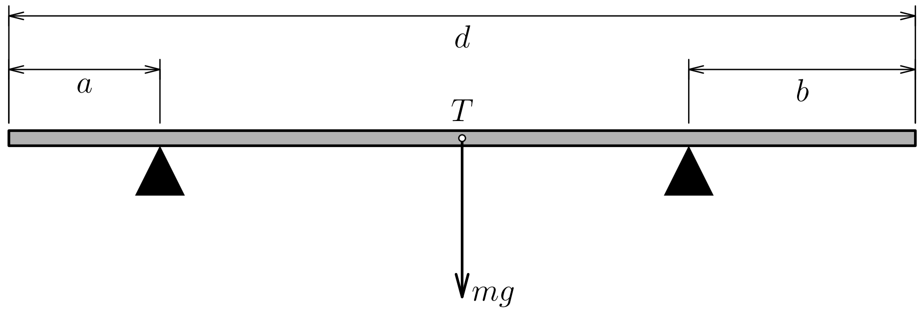
Tloušťka desky je vzhledem k jejím ostatním rozměrům zanedbatelná a těžiště desky je v jejím středu.

Řešení:

a) Náčrtek lešení je na obr. 3.19.

b) Deska lešení představuje páku, která se může otáčet buď kolem podpěry A, nebo kolem podpěry B podle toho, na které straně zedník stojí. Jednou silou působící na této páce je tíha desky mg, která působí v těžišti uprostřed ní. Pokud zedník působí svou tíhou $m_1 g$ na levém okraji desky a deska se nemá přetočit kolem podpěry A, musí platit

$$m_1 g a < mg\left(\frac{d}{2} - a\right)$$



Obrázek 3.19: Náčrt zednického lešení v měřítku $1\,\mathrm{m} \sim 2\,\mathrm{cm}$

1 bod

a po dosazení

$$80\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1\,\mathrm{m} = 800\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} < 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot \left(\frac{6\,\mathrm{m}}{2} - 1\,\mathrm{m}\right) = 1\,200\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m};$$

podmínka je splněna a deska se nepřetočí. **3 body**

Pokud zedník stojí na pravém konci a deska se nemá přetočit kolem podpěry B, mělo by platit

$$m_1 g b < mg\left(\frac{d}{2} - b\right)$$

a po dosazení

$$80\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 1\,200\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} < 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot \left(\frac{6\,\mathrm{m}}{2} - 1{,}5\,\mathrm{m}\right) = 900\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m};$$

tato podmínka ale splněna není, deska se může přetočit. Zedník se tedy nesmí postavit na pravý konec. **3 body**

c) Aby se zedník mohl postavit i na pravý konec, je nutné posunout podpěru B do vzdálenosti b_1 od pravého okraje tak, aby páka byla alespoň v rovnováze, tj. platilo

$$m_1 g b_1 = mg\left(\frac{d}{2} - b_1\right).$$

Odtud vyjádříme

$$b_1 = \frac{md}{2\,(m + m_1)} = \frac{60\,\mathrm{kg} \cdot 6\,\mathrm{m}}{2 \cdot (60\,\mathrm{kg} + 80\,\mathrm{kg})} \doteq 1{,}285\,7\,\mathrm{m} \doteq 1{,}3\,\mathrm{m}.$$

Podpěru B musíme umístit do vzdálenosti $1{,}3\,\mathrm{m}$ od pravého konce desky.

3 body

3.4 Mechanické vlastnosti kapalin

FO62F2-3: Slapská přehrada Věra Koudelková, 73,6 %

Vodní nádrž Slapy na Vltavské kaskádě pomohla těsně před svým dokončením ochránit Prahu před škodami při povodni v roce 1954. Po velkých deštích v jižních Čechách se Vltavou valila tzv. stoletá voda, která pomohla napustit právě dokončovanou přehradu.

a) Kolik m^3 přiteklo každou sekundu do nádrže, jestliže historické prameny uvádí, že do nádrže během povodně přiteklo 90 milionů m^3 vody během $2{,}5$ dne?

b) Jak dlouho by trvalo, než by stejný objem vody do nádrže natekl za normálních podmínek, kdy je přítok průměrně $120\,\mathrm{m^3/s}$ a současně je nezbytné zajistit minimální odtok z nádrže $40\,\mathrm{m^3/s}$? Za jak dlouho by se za normálních podmínek naplnila celá nádrž o objemu 270 milionů $\mathrm{m^3}$?
c) Při povodních v roce 2002 byla slapská nádrž bohužel plná. Za jak dlouho by se ale celá nádrž naplnila, jestliže Vltavou v těch místech teklo $3\,300\,\mathrm{m^3/s}$? Předpokládejte, že by z nádrže žádná voda neodtékala.
d) Porovnejte obě povodně – která z nich by byla (za jinak stejných podmínek) ničivější? Svůj názor zdůvodněte konkrétními hodnotami.

Řešení:

a) Do nádrže přitekl objem $V = 90\,000\,000\,\mathrm{m^3}$ vody za čas $t = 2{,}5\,\mathrm{dne} = 2.5 \cdot 24\,\mathrm{h} = 2.5 \cdot 24 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 216\,000\,\mathrm{s}$, tzn. průtok byl

$$Q_1 = \frac{90\,000\,000\,\mathrm{m^3}}{216\,000\,\mathrm{s}} \doteq 416{,}67\,\mathrm{m^3/s} \doteq 420\,\mathrm{m^3/s}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Za normálních podmínek je efektivní přítok $Q_2 = 120\,\mathrm{m^3/s} - 40\,\mathrm{m^3/s} = 80\,\mathrm{m^3/s}$. Objem $V = 90\,000\,000\,\mathrm{m^3}$ se tak naplní za čas

$$t_1 = \frac{V}{Q_2} = \frac{90\,000\,000\,\mathrm{m^3}}{80\,\mathrm{m^3/s}} = 1\,125\,000\,\mathrm{s} = 13\,\mathrm{dní}\,0{,}5\,\mathrm{h} \doteq 13\,\mathrm{dní}. \qquad \textbf{2 body}$$

Celá nádrž o objemu $V_1 = 270\,000\,000\,\mathrm{m^3} = 3V$ se naplní za trojnásobnou dobu

$$t_2 = \frac{V_1}{Q_2} = \frac{270\,000\,000\,\mathrm{m^3}}{80\,\mathrm{m^3/s}} = 3\,375\,000\,\mathrm{s} \doteq 39\,\mathrm{dní}\,1{,}5\,\mathrm{h} \doteq 39\,\mathrm{dní}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Pro dobu naplnění celé nádrže dostáváme

$$t_3 = \frac{V_1}{Q_3} = \frac{270\,000\,000\,\mathrm{m^3}}{3\,300\,\mathrm{m^3/s}} \doteq 81\,818\,\mathrm{s} \doteq 23\,\mathrm{h}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Povodně v roce 2002 byly výrazně ničivější – průtok Vltavou Q_3 byl zhruba $8\times$ větší než průtok Q_1 v roce 1954. **2 body**

Poznámka: Srovnání lze udělat i na základě doby, za jakou by se Slapy naplnily apod.

FO62F2-2: Pokles vodní hladiny Jan Thomas, 49,5 %

Nádoba tvaru hranolu, jehož podstavou je čtverec o straně $d = 6{,}0\,\mathrm{cm}$, je po okraj plná vody. Na siloměr zavěsíme ocelovou krychličku s délkou strany $a = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.
a) Jakou hodnotu ukáže siloměr?
b) Jakou hodnotu ukáže siloměr, ponoříme-li celou krychličku do nádoby s vodou?
c) Kolik mm pod horním okrajem bude hladina vody po vytažení ocelové krychličky?
d) Stejný pokus provedeme se stejně velkou dřevěnou krychličkou. Jakou hodnotu ukáže siloměr před položením dřevěné krychličky na hladinu vody a jakou hodnotu ukáže po položení krychličky na vodní hladinu v nádobě?
e) O kolik mm klesne hladina vody v nádobě po vytažení dřevěné krychličky?

Hustota oceli $\varrho_\mathrm{o} = 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$, hustota dřeva $\varrho_\mathrm{d} = 0{,}75\,\mathrm{g/cm^3}$.

Řešení:

a) Při zavěšení ocelové krychličky na vzduchu siloměr ukáže tíhu krychličky F_G. Pro hustotu $\varrho_o = 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3} = 7\,800\,\mathrm{kg/m^3}$ dostáváme

$$F_G = mg = \varrho_o V g = \varrho_o a^3 g = 7\,800\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (0{,}04\,\mathrm{m})^3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 4{,}892\,2\,\mathrm{N} \doteq 4{,}9\,\mathrm{N}.$$

2 body

b) Po úplném ponoření krychličky do vody siloměr ukáže rozdíl síly tíhové a síly vztlakové dané hustotou vody ϱ a objemem krychličky

$$F = F_G - F_{vz} = \varrho_o a^3 g - \varrho a^3 g = (\varrho_o - \varrho)\, a^3 g = \left(7\,800\,\mathrm{kg/m^3} - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\right) \cdot (0{,}04\,\mathrm{m})^3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 4{,}265\,0\,\mathrm{N} \doteq 4{,}3\,\mathrm{N}.$$

2 body

c) Při ponoření krychličky přeteče objem $V = a^3 = (4\,\mathrm{cm})^3 = 64\,\mathrm{cm^3}$, bude tento objem v nádobě chybět. Protože plocha vodní hladiny je $S = d^2 = (6\,\mathrm{cm})^2 = 36\,\mathrm{cm^2}$ a pro objem chybějící vody lze psát $V = Sh$, klesne hladina

$$h = \frac{V}{S} = \frac{64\,\mathrm{cm^3}}{36\,\mathrm{cm^2}} \doteq 1{,}777\,8\,\mathrm{cm} \doteq 18\,\mathrm{mm}.$$ **2 body**

d) Stejně jako v části a) siloměr ukáže tíhu krychličky F_G. Pro hustotu $\varrho_d = 0{,}75\,\mathrm{g/cm^3} = 750\,\mathrm{kg/m^3}$ dostáváme

$$F_G = mg = \varrho_d V g = \varrho_o a^3 g = 750\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (0{,}04\,\mathrm{m})^3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 0{,}470\,4\,\mathrm{N} \doteq 0{,}47\,\mathrm{N}.$$

Hustota dřeva je menší než vody ($\varrho_d < \varrho$), po položení dřevěné krychličky na vodní hladinu siloměr ukáže nulovou výchylku, protože tíhová síla a vztlaková síla jsou v rovnováze. **2 body**

e) Objem vody, který přetekl, odpovídá objemu ponořené části krychličky V_1, který odpovídá objemu vody o stejné hmotnosti jako dřevěná krychlička

$$\varrho_d V = \varrho V_1$$

odkud získáme

$$V_1 = V\frac{\varrho_d}{\varrho} = V\frac{0{,}75\,\mathrm{g/cm^3}}{1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}} = \frac{3}{4}V = \frac{3}{4} \cdot 64\,\mathrm{cm^3} = 48\,\mathrm{cm^3}.$$

Vodní hladina tedy poklesla

$$h_1 = \frac{V_1}{S} = \frac{48\,\mathrm{cm^3}}{36\,\mathrm{cm^2}} \doteq 1{,}333\,3\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{mm}$$

neboli $3h/4$. **2 body**

FO59E2-4: Injekční stříkačka Jan Thomas, 45,0 %

Hmotnost injekční stříkačky s objemem $V_1 = 3{,}00\,\mathrm{ml}$ léku je $m_1 = 14{,}4\,\mathrm{g}$ a s objemem $V_2 = 5{,}00\,\mathrm{ml}$ léku je $m_2 = 17{,}0\,\mathrm{g}$. Plocha pístu stříkačky je $S_1 = 1{,}50\,\mathrm{cm^2}$. Průměr jehly je $n = 25$krát menší než průměr pístu stříkačky.

a) Určete hustotu ϱ podávaného léku.

b) Jaká je hmotnost m prázdné stříkačky?

c) Vypočítejte rychlost v, jakou se pohybuje píst, a rychlost u, jakou se pohybuje lék uvnitř jehly, jestliže vyprázdnění stříkačky s objemem léku V_2 trvalo dobu $t = 5{,}00\,\mathrm{s}$.

d) Jakou silou F musí působit lékař při aplikaci injekce, aby vyvinul větší tlak, než je krevní tlak? Krevní tlak u zdravého člověka nemá překročit hodnotu $p = 140\,\mathrm{mm\ Hg}$, tedy přibližně $18{,}7\,\mathrm{kPa}$.

Řešení:

a) Objemy vyjádříme v cm^3 jako $V_1 = 3{,}00\,\mathrm{cm}^3$ a $V_2 = 5{,}00\,\mathrm{cm}^3$.V prvním případě platí

$$m_1 = m + \varrho V_1,$$

ve druhém případě podobně

$$m_2 = m + \varrho V_2.$$

Odečtením rovnic získáme

$$m_2 - m_1 = \varrho\,(V_2 - V_1)\,;$$
$$\varrho = \frac{m_2 - m_1}{V_2 - V_1} = \frac{17{,}0\,\mathrm{g} - 14{,}4\,\mathrm{g}}{5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 3{,}00\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}3\,\mathrm{g/cm}^3 = 1\,300\,\mathrm{kg/m}^3.$$

2 body

b) Z první rovnice vyjádříme

$$m = m_1 - \varrho V_1 = m_1 - \frac{m_2 - m_1}{V_2 - V_1} V_1 = \frac{m_1 V_2 - m_2 V_1}{V_2 - V_1} =$$
$$= \frac{14{,}4\,\mathrm{g}\cdot 5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 17{,}0\,\mathrm{g}\cdot 3{,}00\,\mathrm{cm}^3}{5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 3{,}00\,\mathrm{cm}^3} = 10{,}5\,\mathrm{g}.$$

2 body

c) Za dobu t se píst posune rychlostí v o vzdálenost $d = vt$, což je délka sloupce léku ve stříkačce. Objem léku je tedy $V_2 = S_1 d = S_1 vt$, proto

$$v = \frac{V_2}{S_1 t} = \frac{5{,}00\,\mathrm{cm}^3}{1{,}50\,\mathrm{cm}^2\cdot 5{,}00\,\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\mathrm{cm/s} \doteq 0{,}667\,\mathrm{cm/s}.$$ **2 body**

Průřez jehly $S_2 = S_1/n^2$. Tímto průřezem musí za stejnou dobu protéci rychlostí u stejný objem léku. Dostáváme tedy

$$V_2 = S_2 ut = \frac{S_1}{n^2} ut.$$

Odtud

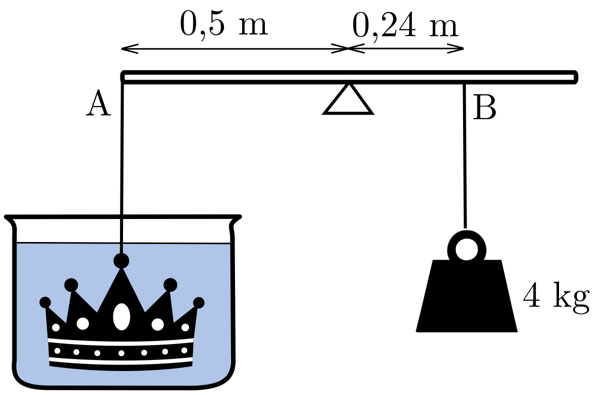
$$u = \frac{V_2 n^2}{S_1 t} = n^2 v = \frac{5{,}00\,\mathrm{cm}^3\cdot 25^2}{1{,}50\,\mathrm{cm}^2\cdot 5{,}00\,\mathrm{s}} \doteq 416{,}67\,\mathrm{cm/s} \doteq 4{,}17\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

d) Lékař musí působit silou

$$F = pS_1 = 18\,700\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}000\,15\,\mathrm{m}^2 = 2{,}805\,\mathrm{N} \doteq 2{,}81\,\mathrm{N}.$$ **2 body**

FO56E2-3: Zlatá koruna Jan Thomas, 42,6 %

Podle legendy dal syrakuský král zlatníkovi 2,05 kg zlata na výrobu zlaté koruny. Zlatník chtěl krále ošidit a vyrobil korunu stejné hmotnosti ze slitiny zlata a stříbra. Hustota zlata je $\varrho_\mathrm{Z} = 19\,300\,\mathrm{kg/m}^3$, hustota stříbra $\varrho_\mathrm{S} = 10\,500\,\mathrm{kg/m}^3$. Podvod odhalil Archimédes tak, že vyvážil korunu zavěšenou na niti a ponořenou do vody na pákových nerovnoramenných vahách (obr. 3.20). Uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$.



Obrázek 3.20: Vyvážení koruny

a) Jaký objem by měla koruna, kdyby byla z ryzího zlata?
b) Jaký objem by měla koruna, kdyby byla z čistého stříbra a měla stejnou hmotnost?
c) Jaká síla působí na páku v bodě B?
d) Jaká síla působí na páku v bodě A?
e) Jaký je objem koruny, kterou zlatník vyrobil?
f) Jaká je hmotnost stříbra a hmotnost zlata v koruně, kterou zlatník vyrobil?

Řešení:

a) Objem zlaté koruny vychází:

$$V_1 = \frac{2{,}05\,\mathrm{kg}}{19\,300\,\mathrm{kg/m^3}} = 1{,}062 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3} = 106\,\mathrm{cm^3}$$ **1 bod**

b) Stříbrná koruna o stejné hmotnosti by měla objem:

$$V_2 = \frac{2{,}05\,\mathrm{kg}}{10\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 1{,}952 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3} = 195\,\mathrm{cm^3}$$ **1 bod**

c) V bodě B působí síla $F_B = 4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 40\,\mathrm{N}$. **1 bod**

d) V bodě A působí síla $F_A = 40\,\mathrm{N} \cdot \dfrac{0{,}24\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 19{,}2\,\mathrm{N}$. **1 bod**

e) Pro sílu v bodě A platí $F_A = mg - V\varrho_V g$, takže pro objem koruny vychází:

$$V = \frac{20{,}5\,\mathrm{N} - 19{,}2\,\mathrm{N}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}} = \frac{1{,}3\,\mathrm{N}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3} = 130\,\mathrm{cm^3}.$$

3 body

f) Pro hmotnost zlata a stříbra v koruně platí:

$$m_Z + m_S = 2{,}05\,\mathrm{kg},$$

$$\varrho_Z V_Z + \varrho_S V_S = m_Z + m_S = 2{,}05\,\mathrm{kg},$$

$$V_Z + \frac{\varrho_S V_S}{\varrho_Z} = \frac{(m_Z + m_S)}{\varrho_Z} / = \frac{2{,}05\,\mathrm{kg}}{19\,300\,\mathrm{kg/m^3}} = V_1 = 106\,\mathrm{cm^3},$$

$$V_Z + 0{,}544 \cdot V_S = 106\,\mathrm{cm^3}.$$

Pro objemy také podle části e) platí:

$$V_Z + V_S = 130\,\mathrm{cm^3}.$$

Řešením vychází:

$$V_Z = 77{,}4\,\mathrm{cm}^3 = 7{,}74\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3,$$
$$V_S = 52{,}6\,\mathrm{cm}^3 = 5{,}26\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3.$$

Vynásobením hustotou určíme hmotnosti zlata a stříbra:

$$m_S = V_S\varrho_S = 5{,}26\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3\cdot 10\,500\,\mathrm{kg/m}^3 \doteq 0{,}552\,\mathrm{kg\ stříbra},$$
$$m_Z = V_Z\varrho_Z = 7{,}74\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3\cdot 19\,300\,\mathrm{kg/m}^3 \doteq 1{,}49\,\mathrm{kg\ zlata}.$$

3 body

FO53E2-2(FO53F2-3): Ropné tankery Ivo Volf, 42,6 %(25,4 %)

Poznámka: Úlohy FO53E2-2 a FO53F2-3 jsou identické.

Žáci se ve škole učili v zeměpise o nákladních lodích s velkým výtlakem (tankery), které se používají při dopravě ropy z místa čerpání do míst, kde jsou rafinerie a kde se ropa používá v dopravě a v chemickém průmyslu. Ve fyzice zase měli za sebou problematiku využití Archimedova zákona. Proto se chlapci rozhodli, že provedou několik pokusů. Jako model tankeru jim posloužil starý sud o plošném obsahu dna $0{,}80\,\mathrm{m}^2$, který se prázdný „ve stojící poloze" na rybníku ponořil do hloubky 8,0 cm. Když do něj nalili vodu o určitém objemu, hloubka ponoru sudu se zvětšila o 24 cm. Předpokládej, že hustota vody ve vodní nádrži je $1\,000\,\mathrm{kg/m}^3$.

a) Z údajů urči, jaká je hmotnost sudu v našem modelu.
b) Z dalších údajů stanov, jaká je hmotnost vody, která byla nalita do sudu (modelujeme tak hmotnost nákladu).
c) Představ si, že stojíš se sudem na mělčině; na čem asi závisí stabilita polohy sudu, tedy modelově na čem závisí stabilita tankeru; své tvrzení teoreticky zdůvodni.
d) Kdybychom neznali plošný obsah dna sudu, museli bychom ho stanovit. Navrhni způsob, jak jen pomocí délkového měřítka a kbelíku s vyznačenou stupnicí objemu určíš tento plošný obsah. Svůj nápad teoreticky zdůvodni.

Řešení:

a) Podle Archimedova zákona platí:

$$F_G = F_{\mathrm{VZ}},$$
$$mg = V_S\varrho g,$$
$$m = Sh_1\varrho = 0{,}80\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}080\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 = 64\,\mathrm{kg}.$$

2 body

b) Po naplnění vodou se hloubka ponoru zvětší na $h_2 = h_1 + h_V = 0{,}080\,\mathrm{m} + 0{,}24\,\mathrm{m} = 0{,}32\,\mathrm{m}$ a platí

$$F'_G = F'_{\mathrm{VZ}},$$
$$mg + m_V g = V'_S\varrho g,$$
$$m + m_V = Sh_2\varrho,$$
$$m_V = Sh_2\varrho - m = 0{,}80\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}32\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3 - 64\,\mathrm{kg} = 192\,\mathrm{kg}.$$

3 body

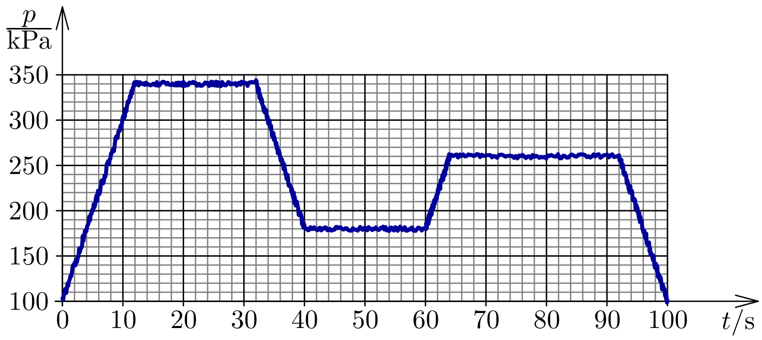
c) Stabilita sudu závisí na naplnění sudu. Je-li sud prázdný, poté se snadno převrátí, neboť těžiště je vysoko a sud je „lehký". Je-li sud částečně naplněn, jeho těžiště je nízko a proto je ve stabilnější poloze, než v předchozím případě. Jestliže však do sudu budeme dolévat další vodu, těžiště bude stále výš a sud bude v méně stabilní poloze. **2 body**

d) Do sudu nalijeme vodu, jejíž objem známe díky kbelíku. Poté již jen stačí změřit výšku hladiny nad dnem a vypočítat ze známého objemu a výšky obsah dna sudu.

3 body

FO61F2-3: Podvodní sonda Jan Thomas, 35,6 %

Podvodní sonda se při prvním testovacím ponoru a zkoušce manévrování pohybovala pod vodou buď ve svislém nebo vodorovném směru. Součástí sondy je i tlakoměr, který při ponoření sondy zaznamenával vnější tlak. Závislost tlaku na čase je na grafu (obr. 3.21). Atmosférický tlak nad hladinou v daný den byl stálý a roven $p_a = 100\,\text{kPa}$.



Obrázek 3.21: Graf závislosti tlaku zaznamenávaného sondou na čase $p = p(t)$

a) Do jaké největší hloubky se sonda ponořila? Nakreslete závislost hloubky ponoření sondy na čase $h = h(t)$.

b) Popište pohyb sondy a zjistěte, kdy se pohybuje nahoru, kdy dolů a kdy ve vodorovném směru. Do jaké největší vodorovné vzdálenosti od místa vypuštění se sonda může dostat, než se vynoří nad hladinu, jestliže se ve vodorovném směru pohybuje maximálně rychlostí $v = 2{,}0\,\text{m/s}$?

Řešení:

a) Hydrostatický tlak závisí na hloubce ponoření podle vztahu

$$p = p_a + h\varrho g,$$

kde $p_a = 100\,\text{kPa}$ je atmosférický tlak. Odtud vyjádříme

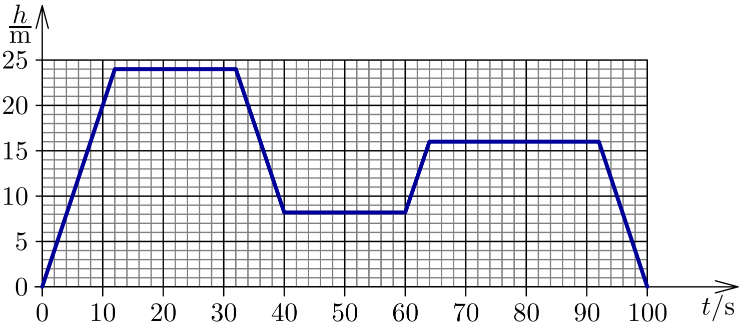
$$h = \frac{p - p_a}{\varrho g}.$$

Do tabulky zaznamenáme závislost tlaku a vypočtené hloubky na čase a sestrojíme graf (hodnoty výšky jsou zaokrouhleny na dvě platné číslice):

t/s	0	12	32	40	60	64	92	100
p/kPa	100	340	340	180	180	260	260	100
h/m	0	24	24	8,2	8,2	16	16	0

Graf závislosti hloubky ponoření sondy na čase $h = h(t)$ je na obr. 3.22. Největší hloubka ponoření sondy je 24 m. **5 bodů**

Poznámka: Při záměně os by graf neměl být uznán jako úplně správný, v takovém případě doporučujeme snížit hodnocení o 1 bod. Pokud naopak soutěžící budou počítat s hodnotou tíhového zrychlení $g = 10\,\text{N/kg} = 10\,\text{m/s}^2$, doporučujeme výsledky považovat za správné (lišit se při daném zaokrouhlení budou pro hloubku 8,2 m, kde pak vyjde 8,0 m).



Obrázek 3.22: Graf závislosti hloubky ponoření sondy na čase $h = h(t)$

b) Sonda se za 12 s ponořila do hloubky, pohybovala se prvních 12 s svisle dolů. Po příštích $t_1 = 20\,\mathrm{s}$ zůstává ve stejné hloubce, může tedy urazit vzdálenost ve vodorovném směru $s_1 = vt_1 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 20\,\mathrm{s} = 40\,\mathrm{m}$. Po dalších osmi sekundách sonda vystoupá do hloubky 8 m, tj. svisle vzhůru blíže k hladině. Dalších $t_2 = 20\,\mathrm{s}$ je ve stejné hloubce, urazí tedy opět ve vodorovném směru maximálně vzdálenost $s_2 = vt_2 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 20\,\mathrm{s} = 40\,\mathrm{m}$. Další 4 s se pohybuje svisle dolů, v dalších $t_3 = 28\,\mathrm{s}$ je ve stejné hloubce a urazí ve vodorovném směru nejvýše vzdálenost $s_3 = vt_3 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 28\,\mathrm{s} = 56\,\mathrm{m}$. Posledních 8 s sonda stoupá k hladině. Sonda se tedy může od místa vypuštění ve vodorovném směru vzdálit nejvýše o

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 40\,\mathrm{m} + 40\,\mathrm{m} + 56\,\mathrm{m} = 136\,\mathrm{m}.$$

5 bodů

FO61E2-2: Kelímek s čokoládou Jan Thomas, 34,7 %

Milan si koupil z automatu horkou čokoládu o hmotnosti m_1 v kelímku o hmotnosti m. Když vypil polovinu nápoje, zdála se mu čokoláda už příliš chladná, a tak ji i s kelímkem položil do horké vody v hrnci. Kelímek se přitom ponořil do 3/4 svého objemu. Po chvíli Milan upil ještě čtvrtinu původního obsahu kelímku. Když ho pak ponořil do horké vody, kelímek se potopil do 2/5 svého objemu.

a) Jaká byla hmotnost m_1 koupené čokolády, je-li objem kelímku $V = 300\,\mathrm{ml}$?
b) Jaká je hmotnost m prázdného kelímku?
c) Jakou hustotu má čokoláda? Díky poruše automatu byl na počátku kelímek úplně plný až po okraj.
d) Kolik čokolády může být nejvýše v kelímku, aby se ve vodě nepotopil i se svým obsahem?

Řešení:

a) Podle Archimédova zákona platí při prvním ponoření kelímku do horké vody

$$mg + \frac{1}{2}m_1 g = \frac{3}{4}V\varrho g = 0{,}75 V\varrho g$$

a při jeho druhém ponoření

$$mg + \frac{1}{4}m_1 g = \frac{2}{5}V\varrho g = 0{,}40 V\varrho g.$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$\frac{1}{4}m_1 g = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right) V\varrho g = \frac{7}{20}V\varrho g = 0{,}35 V\varrho g.$$

Odtud získáme

$$m_1 = 4 \cdot \frac{7}{20}V\varrho = \frac{28}{20}V\varrho = \frac{28}{20} \cdot 300\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 420\,\mathrm{g}.$$

3 body

b) Hmotnost prázdného kelímku pak vychází

$$m = \frac{3}{4}V\varrho - \frac{1}{2}m_1 = \frac{3}{4}V\varrho - \frac{1}{2}\cdot\frac{28}{20}V\varrho = \frac{1}{20}V\varrho = \frac{1}{20}\cdot 300\,\mathrm{cm}^3\cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 15\,\mathrm{g}.$$

3 body

c) Hustota čokolády bude

$$\varrho = \frac{m_1}{V} = \frac{420\,\mathrm{g}}{300\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}4\,\mathrm{g/cm}^3.$$ **2 body**

d) Označme m_2 největší hledanou hmotnost čokolády v kelímku. Nyní platí

$$mg + m_2 g = V\varrho g$$

a odtud dostáváme

$$m_2 = V\varrho - m = V\varrho - \frac{1}{20}V\varrho = \frac{19}{20}V\varrho = 0{,}95\cdot 300\,\mathrm{cm}^3\cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 285\,\mathrm{g} \doteq 280\,\mathrm{g}.$$

2 body

V tomto případě má smysl zaokrouhlovat dolů, jinak by se kelímek s čokoládou potopil.

FO57F2-3: Cesta zasypaná sněhem Jan Thomas, 30,3 %

Za poslední den a noc napadlo na horách hodně sněhu a na vodorovné příjezdové cestě k chatě leží vrstva sněhu o výšce $h = 70\,\mathrm{cm}$. Sněhová vrstva vytváří na povrch cesty tlak $p = 630\,\mathrm{Pa}$. Uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{N/kg}$.

a) Jaká je hustota napadaného sněhu?

b) Pavel se rozhodl cestu vyhrnout dříve, než přijedou rodiče. Jakou hmotnost sněhu odhrne z cesty široké 3 m a dlouhé 15 m? Zbytky sněhu, které po vyhrnutí a vymetení zůstanou na cestě, zanedbejte.

c) Za jasného mrazivého dne můžeme předpokládat, že sníh se skládá z ledu o hustotě $\varrho_\mathrm{l} = 0{,}9\,\mathrm{g/cm}^3$ a vzduchu. Kolik procent objemu sněhu připadá na led?

d) Před sousední chatou sníh nikdo nevyhrnul a další noc napršely 3 mm dešťových srážek, které ve sněhu zamrzly. Jak se změnila hustota sněhové vrstvy, jestliže se její výška snížila na $h' = 20\,\mathrm{cm}$? O kolik procent je tlak sněhové vrstvy na kamenitý povrch cesty po dešti větší než atmosférický tlak $p_a = 995\,\mathrm{hPa}$? Hustota dešťové vody je $\varrho_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{g/cm}^3$, sublimaci a tání sněhu během dne zanedbejte.

Řešení:

a) Na $1\,\mathrm{m}^2$ působí síla $F_1 = pS = 630\,\mathrm{Pa}\cdot 1\,\mathrm{m}^2 = 630\,\mathrm{N}$, která odpovídá tíze sněhu o hmotnosti $m_1 = 63\,\mathrm{kg}$. Objem sněhové vrstvy nad $1\,\mathrm{m}^2$ cesty je $V_1 = 1\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = 0{,}7\,\mathrm{m}^3$. Hustota sněhu pak vychází $\varrho_\mathrm{s} = m_1/V_1 = 63\,\mathrm{kg}/0{,}7\,\mathrm{m}^3 = 90\,\mathrm{kg/m}^3$. Hmotnost vzduchu ve sněhové vrstvě je velmi malá, pro objem $0{,}7\,\mathrm{m}^3$ vyjde méně než $0{,}7\,\mathrm{m}^3\cdot 1{,}3\,\mathrm{kg/m}^3 \doteq 0{,}9\,\mathrm{kg}$, není nutné ji proto uvažovat.

2 body

b) Pavel vyhrnul plochu o obsahu $S_2 = 15\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m} = 45\,\mathrm{m}^2$ a objem odpovídající sněhové vrstvy vychází $V_2 = 45\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = 31{,}5\,\mathrm{m}^3$. Pro hmotnost vyhrnutého sněhu pak dostáváme $m_2 = V_2\varrho_\mathrm{s} = 31{,}5\,\mathrm{m}^3\cdot 90\,\mathrm{kg/m}^3 \doteq 2\,800\,\mathrm{kg}$.

Jiné řešení: Lze využít i tlakovou sílu sněhu na uvažovanou plochu $S_2 = 45\,\mathrm{m}^2$; vychází $F_2 = pS_2 = 630\,\mathrm{Pa}\cdot 45\,\mathrm{m}^2 = 28\,350\,\mathrm{N}$, což po zaokrouhlení opět odpovídá hmotnosti sněhové vrstvy 2 800 kg. **2 body**

c) Označme objemový podíl ledu ve sněhu k. Led s hmotností $m = k\varrho_l Sh$ způsobí tlak $p = mg/S = k\varrho_l gh$. Odtud

$$k = \frac{p}{\varrho_l gh} = \frac{630\,\mathrm{Pa}}{900\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}7\,\mathrm{m}} = 0{,}10 = 10\,\%.$$

Led tedy tvoří 10 % objemu sněhu, vzduch 90 %. **3 body**

d) Hmotnost vody, která napršela na $1\,\mathrm{m^2}$ je pro $h_1 = 3\,\mathrm{mm}$ dešťových srážek $m_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{v} S h_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}003\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{kg}$, objem vrstvy ležící na $1\,\mathrm{m^2}$ cesty je $V_3 = Sh' = 1\,\mathrm{m^3} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}2\,\mathrm{m^3}$. Pro hmotnost zmoklého sněhu tak vychází $m_3 = m_1 + m_\mathrm{v} = 63\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{kg} = 66\,\mathrm{kg}$ a pro jeho hustotu $\varrho_3 = m_3/V_3 = 66\,\mathrm{kg}/0{,}2\,\mathrm{m^3} = 330\,\mathrm{kg/m^3}$. Tíhová síla sněhu nasáklého dešťovou vodou je $F_3 = m_3 g = 66\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 660\,\mathrm{N}$, což odpovídá tlaku $p' = 660\,\mathrm{Pa}$. Poměr přírůstku tlaku a atmosférického tlaku je

$$\frac{p'}{p_\mathrm{a}} = \frac{660\,\mathrm{Pa}}{99\,500\,\mathrm{Pa}} \doteq 0{,}007.$$

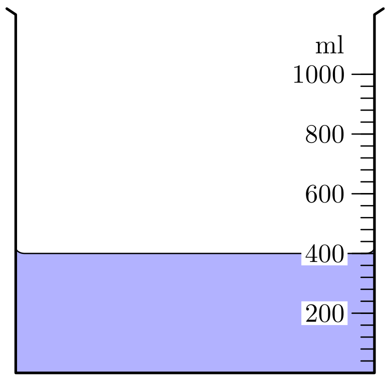
Tlak pod zmoklou sněhovou vrstvou je o 0,7 % větší než atmosférický. **3 body**

FO56F2-3: Váleček v kádince Jan Thomas, 25,5 %

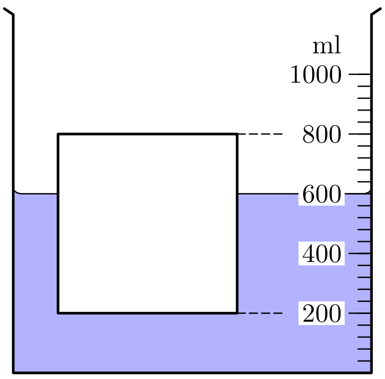
V kádince o objemu větším než 1 000 ml je 400 ml vody (obr. 3.23). Do kádinky vložíme váleček, který plove na hladině tak, že je částečně ponořen (obr. 3.24). Pozorně si prohlédněte obrázky a určete:

a) Jaká je hustota materiálu válečku?
b) Jaký je objem válečku?
c) Jaká je hmotnost válečku?
d) Jaké nejmenší závaží o hmotnosti m_1 bychom museli položit na horní podstavu válečku (obr. 3.25), aby se váleček zcela ponořil?

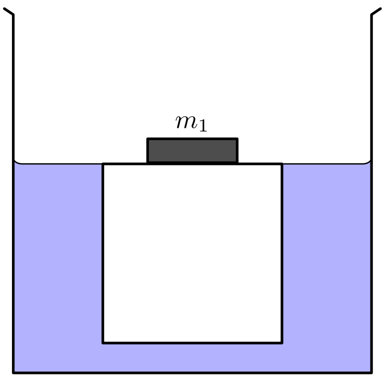
Při výpočtech uvažujte hustotu vody $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.



Obrázek 3.23



Obrázek 3.24



Obrázek 3.25

Řešení:

a) Protože jsou ve vodě ponořeny 2/3 objemu válečku, je průměrná hustota materiálu válečku rovna 2/3 hustoty vody:

$$\varrho_V : \varrho = \frac{2}{3}\varrho_V = \frac{2}{3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 667\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 670\,\mathrm{kg/m^3}.$$ **2 body**

b) Protože váleček vytlačil 200 ml vody, což odpovídá 2/3 jeho objemu, je objem válečku

$$V = \frac{200\,\mathrm{ml}}{\frac{2}{3}} = 300\,\mathrm{ml} = 300\,\mathrm{cm^3} = 300 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}.$$ **2 body**

c) Hmotnostválečku:

$$m = \varrho V = 667\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 300 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3} = 0{,}2\,\mathrm{kg}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Úvahou odvodíme, že vztlaková síla bude o 1/2 větší, celková hmotnost bude také o 1/2 větší, takže musíme přidat závaží 0,1 kg. Nebo můžeme vyjít ze vztahů pro rovnost vztlakové a tíhové síly; postupně získáme:

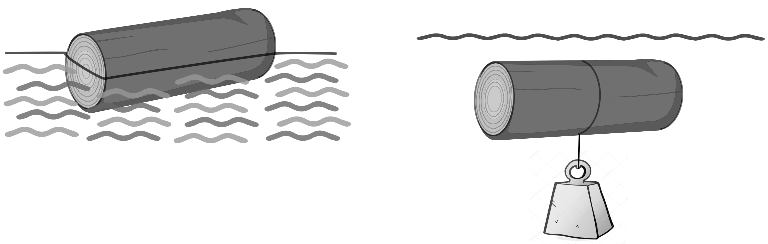
$$(m + m_1)g = V\varrho_V g$$

$$m_1 = V\varrho_V - m = 300 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} - 0{,}2\,\mathrm{kg} = 0{,}1\,\mathrm{kg}. \qquad \textbf{4 body}$$

FO60F2-3: Dva kusy dřeva Jan Thomas, 21,6 %

Dva kusy dřeva stejného objemu $V = 1{,}0\,\mathrm{dm^3}$, jeden z borového a druhý z modřínového dřeva, plavou na vodě. Hustota borového dřeva je $\varrho_1 = 0{,}70\,\mathrm{g/cm^3}$, hustota modřínového dřeva je $\varrho_2 = 0{,}65\,\mathrm{g/cm^3}$, hustota vody je $\varrho_0 = 1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}$.

a) Jaká část objemu každého kusu vyčnívá nad vodní hladinu (obr. 3.26a)?
b) Jakou silou udržíme každý z kusů dřeva pod vodní hladinou?
c) Jaký nejmenší objem musí mít těleso z hliníku o hustotě $\varrho_3 = 2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$, které zavěsíme na lehké niti pod každý kus dřeva, aby se s navázaným tělesem potopil (obr. 3.26b)?



a) b)

Obrázek 3.26: Kus dřeva plavající na vodě (a) a pod vodou se zavěšeným závažím (b)

Řešení:

a) Z Archimédova zákona plyne pro část objemu V_p ponořenou pod hladinou a část V_1 vyčnívající nad hladinou u borového dřeva

$$V\varrho_1 g = V_\mathrm{p}\varrho_0 g = (V - V_1)\,\varrho_0 g;$$

odtud pro zadaný objem $V = 1\,\mathrm{dm^3} = 1\,000\,\mathrm{cm^3}$ vyjádříme

$$V_1 = V\frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0} = 1\,000\,\mathrm{cm^3} \cdot \frac{1\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}7\,\mathrm{g/cm^3}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 300\,\mathrm{cm^3} = 0{,}30\,\mathrm{dm^3}.$$

Podobně pro modřínové dřevo

$$V_2 = V\frac{\varrho_0 - \varrho_2}{\varrho_0} = 1\,000\,\mathrm{cm^3} \cdot \frac{1\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}65\,\mathrm{g/cm^3}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 350\,\mathrm{cm^3} = 0{,}35\,\mathrm{dm^3}. \quad \textbf{3 body}$$

b) Při ponoření kusu borového dřeva na něj působí vztlaková síla $F_\mathrm{vz1} = V\varrho_0 g$ a tíhová síla $F_\mathrm{g1} = V\varrho_1 g$. Protože $\varrho_0 > \varrho_1$ a proto také $F_\mathrm{vz1} > F_\mathrm{g1}$. Musíme působit proti vztlakové síle silou o velikosti

$$F_1 = F_\mathrm{vz1} - F_\mathrm{g1} = V\,(\varrho_0 - \varrho_1)\,g = V_1\varrho_0 g =$$
$$= 0{,}000\,3\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 2{,}94\,\mathrm{N} \doteq 2{,}9\,\mathrm{N}.$$

Podobně pro kus smrkového dřeva vychází

$$F_2 = F_{vz2} - F_{g2} = V\,(\varrho_0 - \varrho_2)\,g = V_2\varrho_0 g =$$
$$= 0{,}000\,35\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 3{,}43\,\mathrm{N} \doteq 3{,}4\,\mathrm{N}.$$

3 body

c) Z podmínky rovnováhy pro kus borového dřeva s tělesem z hliníku o objemu V_{Al1} plyne

$$(V\varrho_1 + V_{Al1}\varrho_3)\,g = (V + V_{Al1})\,\varrho_0 g$$

vyjádříme

$$V_{Al1} = V\frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_3 - \varrho_0} = 1\,000\,\mathrm{cm^3} \cdot \frac{1\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}70\,\mathrm{g/cm^3}}{2{,}7\,\mathrm{g/cm^3} - 1\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 176{,}47\,\mathrm{cm^3} \doteq 0{,}18\,\mathrm{dm^3}.$$

Podobně pro kus modřínového dřeva získáváme

$$V_{Al2} = V\frac{\varrho_0 - \varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_0} = 1\,000\,\mathrm{cm^3} \cdot \frac{1\,\mathrm{g/cm^3} - 0{,}65\,\mathrm{g/cm^3}}{2{,}7\,\mathrm{g/cm^3} - 1\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 205{,}88\,\mathrm{cm^3} \doteq 0{,}21\,\mathrm{dm^3}.$$

4 body

3.5 Síla, práce, výkon

FO61F2-4: Osobní výtah Ivo Volf, 68,0 %

Osobní výtah v obytném domě má klec o hmotnosti $m_1 = 150\,\mathrm{kg}$ a povolenou zátěž 3 osoby s celkovou hmotností do $m_2 = 250\,\mathrm{kg}$. Ze sklepa až po 14. poschodí jede výtah po trase $h = 45\,\mathrm{m}$ po dobu $t = 1{,}5\,\mathrm{min}$. Lano výtahu se navíjí na kladku, která je umístěna v budce na střeše, a je taženo prostřednictvím elektromotoru. Ztráty díky tření a odporu vzduchu neuvažujte, dobu rozjezdu a zastavení výtahu považujte za velmi krátkou.

a) Vypočítejte užitečnou práci, kterou koná elektromotor výtahu při zvedání tří osob o celkové hmotnosti $m_2 = 250\,\mathrm{kg}$ ze sklepa do 14. poschodí.
b) Jakou práci koná elektromotor výtahu při zvedání prázdného výtahu?
c) Určete (nejlépe v %) podíl užitečné práce (vyvezení osob) a celkové práce (vyvezení kabiny s osobami), kterou koná elektromotor při zvedání klece se 3 osobami.
d) Jaký je užitečný P_1 a celkový výkon motoru P? Stanovte (nejlépe v %) jejich podíl P_1/P.
e) K lepšímu využívání výkonu se přehodí tažné lano přes kladku a přidá se protizávaží $m_1 = 150\,\mathrm{kg}$. Jaký význam má použití protizávaží? Jak ovlivní výsledky?

Řešení:

Výtah má hmotnost klece $m_1 = 150\,\mathrm{kg}$, hmotnost osob $m_2 = 250\,\mathrm{kg}$, celková hmotnost výtahu s osobami $m = m_1 + m_2 = 150\,\mathrm{kg} + 250\,\mathrm{kg} = 400\,\mathrm{kg}$. Výtah vystoupá do výšky $h = 45\,\mathrm{m}$ za dobu $t = 1{,}5\,\mathrm{min} = 90\,\mathrm{s}$.

a) Užitečná práce na zvedání osob

$$W_1 = m_2 g h = 250\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 45\,\mathrm{m} = 110{,}25\,\mathrm{kJ} \doteq 110\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

b) Při zvedání prázdného výtahu se koná práce

$$W_2 = m_1 g h = 150\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 45\,\mathrm{m} = 66{,}15\,\mathrm{kJ} \doteq 66\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

c) Celková práce při stoupání kabiny s lidmi

$$W = m_2 gh = (m + m_1)\, gh = W_1 + W_2 = 110{,}25\,\mathrm{kJ} + 66{,}15\,\mathrm{kJ} = 176{,}4\,\mathrm{kJ} \doteq 180\,\mathrm{kJ}.$$

Pro poměr užitečné a celkové práce vychází

$$p = \frac{W_1}{W} = \frac{110{,}25\,\mathrm{kJ}}{176{,}4\,\mathrm{kJ}} = 0{,}625 \doteq 63\,\%.$$ **2 body**

d) Užitečný výkon vychází

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{110{,}25\,\mathrm{kJ}}{90\,\mathrm{s}} = 1{,}225\,\mathrm{kW} \doteq 1{,}2\,\mathrm{kW},$$

celkový výkon

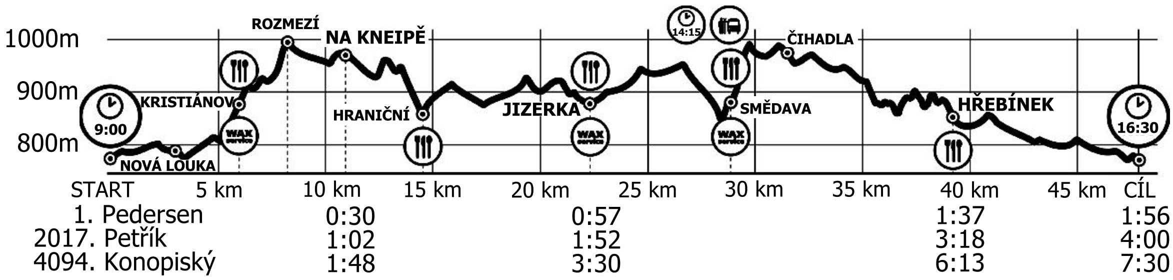
$$P = \frac{W}{t} = \frac{176{,}4\,\mathrm{kJ}}{90\,\mathrm{s}} = 1{,}96\,\mathrm{kW} \doteq 2{,}0\,\mathrm{kW}.$$

Poměr $p = P_1/P = W_1/W = 0{,}625 \doteq 63\,\%$. **3 body**

e) Tíha prázdné klece a tíha protizávaží se vyrovnají; elektromotor uvádí sice do pohybu těžší soustavu ($2m_1 + m_2 = 2 \cdot 150\,\mathrm{kg} + 250\,\mathrm{kg} = 550\,\mathrm{kg}$), ale zvedá jen osoby o hmotnosti $m_2 = 250\,\mathrm{kg}$. **1 bod**

FO58F2-3: Jizerská padesátka Lukáš Richterek, 65,8 %

Na obr. 3.27 je profil lyžařského závodu Jizerská padesátka. Na něm jsou vyznačeny časy v hodinách a minutách pro tři závodníky letošního jubilejního závodu v kontrolních bodech Na Kneipě (11 km), Jizerka (22,5 km), Hřebínek (39 km) a v cíli. Jak napovídá název, trať celého závodu má délku $s = 50\,\mathrm{km}$.



Obrázek 3.27: Profil trati Jizerské padesátky (zdroj: `http://www.jiz50.cz`)

a) Vypočtěte průměrnou rychlost těchto tří závodníků během celého závodu v km/h.
b) Zakreslete do grafu ve vhodném měřítku závislost polohy (ujeté dráhy) uvedených tří závodníků na čase (čas nanášejte na vodorovnou, polohu na svislou osu). Pomocí grafu určete, ve kterém úseku (tj. mezi kterými kontrolami) byla průměrná rychlost závodníků největší. Dokážete zdůvodnit, proč právě v tomto úseku?
c) Celkové stoupání na trati odpovídá převýšení $h = 937\,\mathrm{m}$. Jakou nejmenší práci musí při takovém stoupání vykonat lyžař, jehož hmotnost s lyžemi i výstrojí je asi $m = 80\,\mathrm{kg}$?
d) Kolik tatranek by měl lyžař sníst, aby doplnil energii vydanou na práci vykonanou při stoupání z části c)? Na obalu tatranky o hmotnosti $m_1 = 33\,\mathrm{g}$ je uveden údaj: využitelná energie 2 218 kJ ve 100 g výrobku.

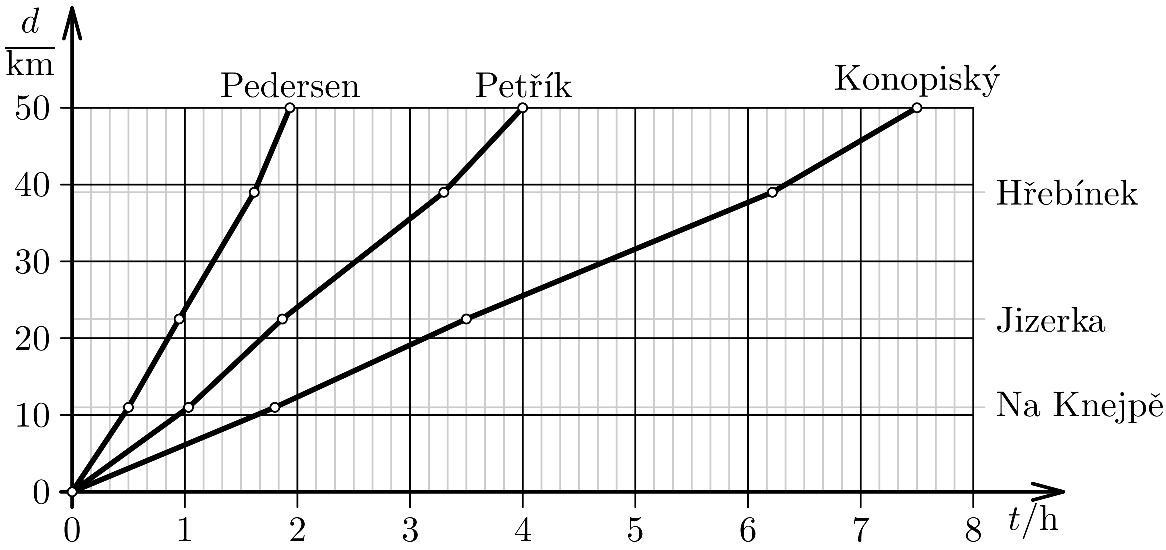
Řešení:

a) Označme délku trati $s = 50\,\mathrm{km}$ a časy závodníků $t_1 = 1\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min} \doteq 1{,}933\,3\,\mathrm{h}$, $t_2 = 4\,\mathrm{h}$ a $t_3 = 7\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min} = 7{,}5\,\mathrm{h}$. Pro průměrné rychlosti pak vychází

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{50\,\mathrm{km}}{1{,}933\,3\,\mathrm{h}} \doteq 25{,}863\,\mathrm{km/h} \doteq 26\,\mathrm{km/h},$$
$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{50\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{h}} \doteq 12{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 13\,\mathrm{km/h},$$
$$v_3 = \frac{s}{t_3} = \frac{50\,\mathrm{km}}{7{,}5\,\mathrm{h}} \doteq 6{,}666\,7\,\mathrm{km/h} \doteq 6{,}7\,\mathrm{km/h}.$$

3 body

b) Graf je na obr. 3.28. Závodníci se pohybovali největší rychlostí v posledním úseku, který vede většinou z kopce bez prudších stoupání. **3 body**



Obrázek 3.28: Graf pohybu závodníků Jizerské padesátky

c) Nejmenší práce vykonaná lyžařem odpovídá změně polohové energie při stoupání lyžaře

$$W = \Delta E_\mathrm{p} = mgh = 80\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 937\,\mathrm{m} = 749\,600\,\mathrm{J} \doteq 750\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

d) Využitelná energie v jedné tatrance je

$$E_1 = \frac{33\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} \cdot 2\,218\,\mathrm{kJ} \doteq 731{,}92\,\mathrm{kJ} \doteq 730\,\mathrm{kJ}.$$

Porovnáním s výsledkem bodu c), popřípadě podělením

$$n = \frac{W}{E_1} = \frac{749{,}6\,\mathrm{kJ}}{731{,}92\,\mathrm{kJ}} \doteq 1$$

zjišťujeme, že k pokrytí energetické spotřeby na stoupání by téměř stačila jedna tatranka. **2 body**

Dodejme, že celková energetická spotřeba závodníka je samozřejmě větší než vypočtená práce odpovídající změně polohové energie při stoupání. Pro výpočet byly použity údaje lískooříškových tatranek slovenského výrobce SEDITA Sereď, nikoli tatranek Opavia, jejichž hmotnost i výživná energetická hodnota jsou vyšší.

FO53E2-1(FO53F2-2): Plná a dutá cihla Ivo Volf, 60,9 %(45,2 %)

Poznámka: Úlohy FO53E2-2 a FO53F2-3 jsou identické.

Běžná klasická pálená cihla má rozměry 290 mm, 140 mm, 65 mm a podle podmínek, za nichž je užívána, má hustotu 1 800–2 400 kg/m^3; k výpočtům vezmi střední hodnotu. Dutá cihla z téhož materiálu a téže kvality má ve směru největší délky (tedy v ploše nejmenší stěny) dva odlehčující otvory, každý o rozměrech 35 mm×35 mm.

a) Načrtni, jak vypadá plná i dutá cihla, vyznač její rozměry v obrázku. Zvol měřítko 5:1.

b) Urči objem a hmotnost vždy jedné z obou typů cihel.

c) Cihly se převážejí na paletách tak, že v jedné vrstvě je 24 cihel ležících na největší stěně, na sobě je složeno 12 vrstev cihel. Jaká je hmotnost jedné palety s cihlami (dřevěná kostra palety má hmotnost 48 kg) a jakou silou musí paletu s cihlami zvedat jeřáb? Použij $g = 10\,\mathrm{N/kg}$.

d) Jakou práci vykoná jeřáb, zvedá-li paletu s cihlami do 12. podlaží ve výšce 30 m? Jakého výkonu dosahuje, je-li doba zvedání 2,5 min?

e) Jestliže přijmeme, že účinnost zvedání celého mechanismu je 80 %, stanov skutečný výkon jeřábu.

Řešení:

Ze zadání určíme hodnotu průměrné hustoty: $\varrho = 2\,100\,\mathrm{kg/m^3}$.

a) Plná cihla je kvádr o daných rozměrech, dutá cihla má v podélném směru dva otvory čtvercového průřezu o délce 290 mm. Bodují se náčrtky. **1 bod**

b) Objem plné cihly spočteme jako:

$$V_1 = 29\,\mathrm{cm} \cdot 14\,\mathrm{cm} \cdot 6{,}5\,\mathrm{cm} = 2\,639\,\mathrm{cm^3}.$$

Tomu odpovídá hmotnost:

$$m_1 = V_1\varrho = 2\,639\,\mathrm{cm^3} \cdot 2{,}1\,\mathrm{g/cm^3} = 5\,541{,}9\,\mathrm{g} \doteq 5{,}5\,\mathrm{kg}.$$

Objem duté cihly spočteme jako:

$$V_2 = V_1 - 2 \cdot (3{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 29\,\mathrm{cm}) = 2\,639\,\mathrm{cm^3} - 710{,}5\,\mathrm{cm^3} \doteq 1\,928{,}5\,\mathrm{cm^3}.$$

Tomu odpovídá hmotnost:

$$m_2 = V_2\varrho = 1\,928{,}5\,\mathrm{cm^3} \cdot 2{,}1\,\mathrm{g/cm^3} = 4\,049{,}85\,\mathrm{g} \doteq 4{,}1\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

c) Hmotnost palety s plnými cihlami a působící síla jeřábu jsou:

$$m_{1\mathrm{P}} = 24 \cdot 12 \cdot m_1 + m_{0\mathrm{P}} = 288 \cdot 5{,}54\,\mathrm{kg} + 48\,\mathrm{kg} \doteq 1\,644\,\mathrm{kg},$$

$$F_{1\mathrm{P}} = m_{1\mathrm{P}}g = 1\,644\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 16\,440\,\mathrm{N} \doteq 16\,\mathrm{kN}.$$

Hmotnost palety s dutými cihlami a působící síla jeřábu jsou:

$$m_{2\mathrm{P}} = 24 \cdot 12 \cdot m_2 + m_{0\mathrm{P}} = 288 \cdot 4{,}05\,\mathrm{kg} + 48\,\mathrm{kg} \doteq 1\,214\,\mathrm{kg},$$

$$F_{2\mathrm{P}} = m_{2\mathrm{P}}g = 1\,214\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 12\,140\,\mathrm{N} \doteq 12\,\mathrm{kN}.$$ **3 body**

d) Práci a výkon jeřábu při zvedání palety s plnými cihlami spočteme jako:

$$W_1 = F_{1\mathrm{P}}s = 16\,440\,\mathrm{N} \cdot 30\,\mathrm{m} = 493\,200\,\mathrm{J} \doteq 490\,\mathrm{kJ},$$

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{493\,200\,\mathrm{J}}{150\,\mathrm{s}} = 3\,288\,\mathrm{W} \doteq 3{,}3\,\mathrm{kW}.$$

Práci a výkon jeřábu při zvedání palety s dutými cihlami spočteme jako:

$$W_2 = F_{2\mathrm{P}}s = 12\,140\,\mathrm{N} \cdot 30\,\mathrm{m} = 364\,200\,\mathrm{J} \doteq 360\,\mathrm{kJ},$$

$$P_2 = \frac{W_2}{t} = \frac{364\,200\,\mathrm{J}}{150\,\mathrm{s}} = 2\,428\,\mathrm{W} \doteq 2{,}4\,\mathrm{kW}.$$ **2 body**

e) Pro palety s plnými a dutými cihlami podá jeřáb skutečný výkon:

$$P_{01} = \frac{P_1}{\eta} = \frac{3\,288\,\mathrm{W}}{0{,}8} = 4\,110\,\mathrm{W} \doteq 4{,}1\,\mathrm{kW},$$

$$P_{02} = \frac{P_2}{\eta} = \frac{2\,428\,\mathrm{W}}{0{,}8} = 3\,035\,\mathrm{W} \doteq 3{,}0\,\mathrm{kW}.$$ **2 body**

FO59F2-4: Dvě pružiny Jan Thomas, 56,0 %

Máme dvě pružiny. První má hmotnost $m_1 = 25\,\mathrm{g}$ a volně zavěšená délku $l_1 = 20\,\mathrm{cm}$; k jejímu prodloužení o 1,0 cm na ni musíme zavěsit závaží $m'_1 = 15\,\mathrm{g}$. Druhá má hmotnost $m_2 = 20\,\mathrm{g}$ a volně zavěšená délku $l_2 = 35\,\mathrm{cm}$; k jejímu prodloužení o 1,0 cm na ni musíme zavěsit závaží $m'_2 = 8{,}0\,\mathrm{g}$. Pružiny můžeme zavěšovat horním koncem na háček na stojanu a na spodní konec pružiny můžeme zavěšovat různá závaží.

a) Jaká bude délka první pružiny, když na ni zavěsíme závaží $m = 100\,\mathrm{g}$?
b) Jaká bude délka druhé pružiny, když na ni zavěsíme stejné závaží?
c) Jaká bude celková délka obou pružin, zavěsíme-li pod první pružinu druhou pružinu a na ni závaží 100 g? Změní se celková délka obou pružin, zaměníme-li jejich pořadí? Svou odpověď doložte výpočtem.

Řešení:

a) Závažím o hmotnosti $m'_1 = 15\,\mathrm{g}$ se pružina prodlouží o 1,0 cm. Závažím o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ se tedy prodlouží o $\Delta l_1 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m/m'_1 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 100\,\mathrm{g}/15\,\mathrm{g} = 6{,}666\,7\,\mathrm{cm} \doteq 6{,}7\,\mathrm{cm}$ a její délka bude celkem $l_1 + \Delta l_1 \doteq 20\,\mathrm{cm} + 6{,}7\,\mathrm{cm} \doteq 27\,\mathrm{cm}$.

2 body

b) Závažím o hmotnosti $m'_2 = 8{,}0\,\mathrm{g}$ se pružina prodlouží o 1,0 cm. Závažím o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ se tedy prodlouží o $\Delta l_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m/m'_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 100\,\mathrm{g}/8{,}0\,\mathrm{g} = 12{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{cm}$ a její celková délka bude $l_2 + \Delta l_2 \doteq 35\,\mathrm{cm} + 13\,\mathrm{cm} \doteq 48\,\mathrm{cm}$.

2 body

c) Zavěšením druhé pružiny se první pružina prodlouží o

$$\Delta l_3 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m_2/m'_1 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{g}/15\,\mathrm{g} \doteq 1{,}333\,3\,\mathrm{cm} \doteq 1{,}3\,\mathrm{cm},$$

přidáním závaží ještě o $\Delta l_1 = 6{,}7\,\mathrm{cm}$. Celkové prodloužení první pružiny tedy bude $\Delta l'_1 = \Delta l_1 + \Delta l_3 \doteq 6{,}666\,7\,\mathrm{cm} + 1{,}333\,3\,\mathrm{cm} \doteq 8{,}0\,\mathrm{cm}$; druhá pružina se prodlouží o $\Delta l_2 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$. Celková délka obou pružin bude

$$l_{12} = l_1 + l_2 + \Delta l'_1 + \Delta l_2 = 20\,\mathrm{cm} + 35\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm} + 12{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 75{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 76\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

Zaměníme-li pořadí pružin, pak se druhá pružina prodlouží při zavěšení první pružiny o

$$\Delta l_4 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m_1/m'_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 25\,\mathrm{g}/8\,\mathrm{g} \doteq 3{,}125\,\mathrm{cm} \doteq 3{,}1\,\mathrm{cm},$$

přidáním závaží ještě o $\Delta l_2 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$. Celkové prodloužení první pružiny tedy bude $\Delta l_2' = \Delta l_2 + \Delta l_4 \doteq 12{,}5\,\mathrm{cm} + 3{,}1\,\mathrm{cm} \doteq 16\,\mathrm{cm}$; první pružina se prodlouží o $\Delta l_1 = 6{,}7\,\mathrm{cm}$. Celková délka obou pružin bude

$$l_{21} = l_1 + l_2 + \Delta l_1 + \Delta l_2' = 20\,\mathrm{cm} + 35\,\mathrm{cm} + 6{,}7\,\mathrm{cm} + 16\,\mathrm{cm} \doteq 77{,}7\,\mathrm{cm} \doteq 78\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

FO55F2-2 Ivo Volf, 55,6 %

Vašek je dobrý sportovec, a proto se pustil do šplhu po laně, visícího z vrcholku skály tak, že horní konec lana je ve výšce 24 m nad úrovní okolí skály. Vaškova hmotnost je 54 kg.

a) Jak velkou práci musí při šplhu Vašek vykonat, aby se dostal na vršek skály?

b) Uvážíme-li, že průměrný výkon sportovce při delším trvání cviků je 150 W, jak dlouho bude Vašek šplhat, než vyleze nahoru?

c) Šplh na tyči probíhá tak, že se Vašek drží tyče rukama a přesouvá nohy vzhůru, poté sevře tyč nohama a přesouvá vzhůru své ruce. Víme-li, že součinitel tření chodidel nebo rukou o tyč je 0,4, jak velká musí být „přítlačná síla“, aby Vašek při přesouvání nohou, či rukou nespadl?

d) Vysvětlete, jak je tomu při šplhu po laně?

Řešení:

a) Práce vykonaná Vaškem při šplhu je:

$$W = Fs = mgh = 24 \cdot 54 \cdot 10\,\mathrm{J} = 12\,960\,\mathrm{J} \doteq 13\,\mathrm{kJ}.$$ **3 body**

b) Doba šplhu je:

$$t = \frac{W}{P} = \frac{mgh}{P} = \frac{24 \cdot 54 \cdot 10}{150}\,\mathrm{s} = 86{,}4\,\mathrm{s} \doteq 86\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

c) Tíhová síla, kterou působí Země na Vaška, je $F_\mathrm{G} = mg$, třecí síla $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{p} f$, kde F_p je přítlačná síla. Aby Vašek nespadl, musí být velikost třecí síly stejná jako velikost tíhové síly, platí:

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{t}$$
$$mg = F_\mathrm{p} f,$$

z toho

$$F_\mathrm{p} = \frac{mg}{f} = \frac{54 \cdot 10}{0{,}4}\,\mathrm{N} = 1\,350\,\mathrm{N} \doteq 1{,}4\,\mathrm{kN}.$$

Výsledek platí, pokud se drží jednou rukou, nebo svírá tyč nohama. Pokud se drží dvěma rukama, poté každá ruka může působit poloviční silou. **3 body**

d) Při šplhu na laně můžeme lézt bez přírazu. Poté v podstatě pouze ručkujeme a musíme svírat lano rukama tak, aby celková velikost třecí síly byla stejná jako velikost tíhové síly. V případě, že lezeme s přírazem, poté si můžeme odpočinout tím, že „zamotáme“ lano do nohou. Lezení poté probíhá podobně jako na tyči. **2 body**

FO62F2-4: Výtah Ľubomír Konrád (FO SR), 54,3 %

Ve výškové budově namontovali nový výkonný výtah. Během testovací jízdy rovnoměrným pohybem z druhého do devátého podlaží se naměřilo, že tažné zařízení výtahu vykonalo práci $W = 192\,\mathrm{kJ}$. Výška jednoho podlaží je $h = 3{,}5\,\mathrm{m}$.

a) Kolik techniků s průměrnou hmotností $m = 70\,\mathrm{kg}$ se při testovací jízdě vezlo v kabině výtahu o hmotnosti $M = 450\,\mathrm{kg}$?
b) Jakou užitečnou práci W_1 vykonalo tažné zařízení výtahu při testovací jízdě? Jaký je poměr W_1/W?
c) Jaký byl celkový průměrný výkon motoru tažného zařízení, jestliže se výtah pohyboval rychlostí $v = 0{,}70\,\mathrm{m/s}$? Jak dlouho jízda nahoru trvala?
d) Jaký by byl poměr W_1'/W' v případě, že by při testovací jízdě v kabině byla jen jedna osoba?

Užitečnou prací se rozumí práce potřebná pouze na zvednutí nákladu nebo osob, není v ní započtena práce na zvedání kabiny. Protizávaží výtahu, ztráty třením apod. neuvažujte.

Řešení:

a) Označme počet techniků n. Pro vykonanou práci W platí $W = (nm + M)gH$, kde $H = 7h = 7 \cdot 3{,}5\,\mathrm{m} = 24{,}5\,\mathrm{m}$ je překonaná výška z 2. do 9. podlaží. Vyjádříme celkovou hmotnost osob ve výtahu

$$nm = \frac{W}{gH} - M = \frac{192\,000\,\mathrm{J}}{9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24{,}5\,\mathrm{m}} - 450\,\mathrm{kg} \doteq 349{,}67\,\mathrm{kg} \doteq 350\,\mathrm{kg}.$$

To odpovídá počtu $5m = 5 \cdot 70\,\mathrm{kg}$, v kabině se vezlo 5 techniků. **3 body**

b) Pro užitečnou práci vychází

$$W_1 = nmgH = 5 \cdot 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24{,}5\,\mathrm{m} = 84\,035\,\mathrm{J} \doteq 84\,\mathrm{kJ}.$$ **1 bod**

Pro poměr W_1/W dostáváme

$$\frac{W_1}{W} = \frac{84\,\mathrm{kJ}}{192\,\mathrm{kJ}} \doteq 0{,}437\,50 \doteq 44\,\%.$$ **1 bod**

c) Doba zkušební jízdy byla

$$t = \frac{H}{v} = \frac{24{,}5\,\mathrm{m}}{0{,}70\,\mathrm{m/s}} = 35\,\mathrm{s}$$ **1 bod**

a pro výkon motoru platí

$$P = \frac{W}{t} = \frac{192\,000\,\mathrm{J}}{35\,\mathrm{s}} \doteq 5\,485{,}7\,\mathrm{W} \doteq 5{,}5\,\mathrm{kW}.$$ **1 bod**

d) Při zvedání kabiny s jednou osobou vychází užitečná práce

$$W_1' = mgH = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24{,}5\,\mathrm{m} \doteq 16\,807\,\mathrm{J} \doteq 17\,\mathrm{kJ}$$

a celková práce

$$W' = (m + M)\,gH = (70\,\mathrm{kg} + 450\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24{,}5\,\mathrm{m} \doteq 124\,852\,\mathrm{J} \doteq 120\,\mathrm{kJ}.$$

Pro jejich poměr získáváme

$$\frac{W_1'}{W'} = \frac{16\,807\,\mathrm{J}}{124\,852\,\mathrm{J}} \doteq 0{,}134\,62 \doteq 13\,\%.$$ **3 body**

Poznámka: V autorském řešení úlohy jsou výsledky v souladu s pravidly zaokrouhleny na 2 platné číslice, což odpovídá přesnosti hodnot v zadání. Řešitelům by mělo být tolerováno, pokud výsledky zaokrouhlí i na větší počet platných číslic (např. 3–5).

FO56F2-2: Výstup na Sněžku Lukáš Richterek, 51,5 %

Tři kamarádi Petr, Pavel a Roman se rozhodli jednoho slunečného dne vydat na Sněžku, jejíž vrchol leží v nadmořské výšce 1 602 m n. m. U stanice lanovky v Peci pod Sněžkou v nadmořské výšce 829 m n. m. se rozdělili a každý se vydal jinou trasou. Petr šel trasou o délce 5,7 km přes Růžovou horu, nejstarší Pavel ušel 5,8 km přes Obří důl a nejmladší Michal se rozhodl vyjet lanovkou na Růžovou horu do nadmořské výšky 1 330 m n. m. a zbytek o délce 2,3 km dojít pěšky. Petr urazil svou trasu za 1 h 30 min, Pavel za 1 h 50 min a Roman ušel svůj zkrácený úsek za 1 h.

a) Určete průměrnou rychlost při pěším stoupání pro každého z kamarádů.
b) Pokud jsou hmotnosti Petra 50 kg, Pavla 55 kg a Romana 45 kg (včetně oblečení), jakou práci každý z nich vykonal, jestliže měl každý batoh o hmotnosti 10 kg?
c) Jaký byl výkon chlapců?
   Při výpočtu uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{m/s^2} = 10\,\mathrm{N/kg}$.

Řešení:

a) Pro časy a průměrné rychlosti našich turistů dostáváme:

$$\begin{aligned} t_{\text{Petr}} &= 1\,\text{h}\,30\,\text{min} = 1{,}5\,\text{h}, & v_{\text{Petr}} &= 5{,}7\,\text{km}/1{,}5\,\text{h} = 3{,}8\,\text{km/h} = 1{,}1\,\text{m/s};\\ t_{\text{Pavel}} &= 1\,\text{h}\,50\,\text{min} = 1{,}83\,\text{h}, & v_{\text{Pavel}} &= 5{,}8\,\text{km}/1\,835\,\text{h} = 3{,}2\,\text{km/h} = 0{,}88\,\text{m/s};\\ t_{\text{Roman}} &= 1\,\text{h}, & v_{\text{Roman}} &= 2{,}3\,\text{km}/1\,\text{h} = 2{,}3\,\text{km/h} = 0{,}64\,\text{m/s}. \end{aligned}$$

3 body

b) Hmotnosti chlapců s batohem jsou:

$$\begin{aligned} m_{\text{Petr}} &= 50\,\text{kg} + 10\,\text{kg} = 60\,\text{kg},\\ m_{\text{Pavel}} &= 55\,\text{kg} + 10\,\text{kg} = 65\,\text{kg},\\ m_{\text{Roman}} &= 45\,\text{kg} + 10\,\text{kg} = 55\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Převýšení, které zdolali Petr a Pavel je stejné $h_1 = 1\,602\,\text{m} - 829\,\text{m} = 773\,\text{m}$, Roman pouze $h_2 = 1\,602\,\text{m} - 1\,330\,\text{m} = 272\,\text{m}$. **2 body**

Při výstupu tak vykonali práci:

$$\begin{aligned} W_{\text{Petr}} &= m_{\text{Petr}} g h_1 = 60\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 773\,\text{m} = 463\,800\,\text{J} = 464\,\text{kJ},\\ W_{\text{Pavel}} &= m_{\text{Pavel}} g h_1 = 65\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 773\,\text{m} = 502\,450\,\text{J} = 502\,\text{kJ},\\ W_{\text{Roman}} &= m_{\text{Roman}} g h_2 = 55\,\text{kg} \cdot 10\,\text{N/kg} \cdot 272\,\text{m} = 149\,600\,\text{J} = 150\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

2 body

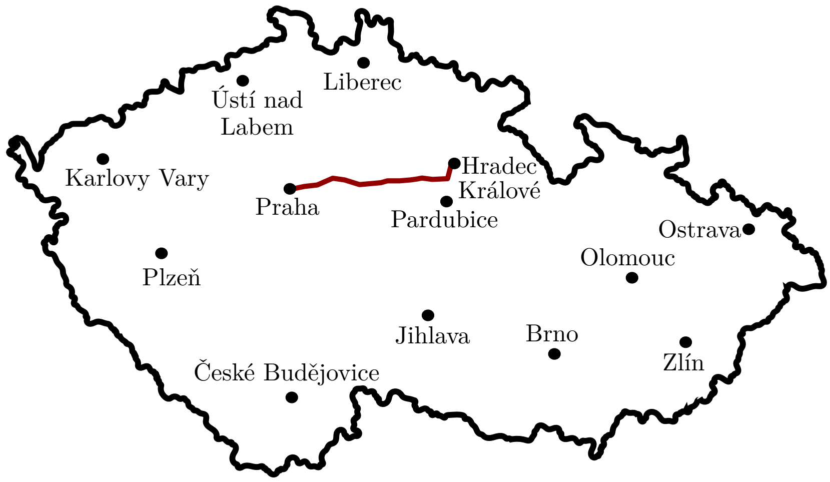
c) Výkon chlapců pak vychází:

$$\begin{aligned} P_{\text{Petr}} &= \frac{W_{\text{Petr}}}{t_{\text{Petr}}} = \frac{463\,800\,\text{J}}{1{,}5 \cdot 3\,600\,\text{s}} = 86\,\text{W},\\ P_{\text{Pavel}} &= \frac{W_{\text{Pavel}}}{t_{\text{Pavel}}} = \frac{502\,000\,\text{J}}{1{,}83 \cdot 3\,600\,\text{s}} = 76\,\text{W},\\ P_{\text{Roman}} &= \frac{W_{\text{Roman}}}{t_{\text{Roman}}} = \frac{150\,000\,\text{J}}{1 \cdot 3\,600\,\text{s}} = 42\,\text{W}. \end{aligned}$$

3 body

FO54E2-3: Z Hradce do Prahy Ivo Volf, 41,2 %

Jedeme-li z Hradce Králové do Prahy, můžeme využít dálnice D11. Automobil o hmotnosti 1 200 kg se po určitý úsek dálnice pohybuje stálou rychlostí 126 km/h, odporové síly proti pohybu se pro daný typ karosérie dají vyjádřit celkovou hodnotou $F = kv^2$, kde $k = 0{,}54\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$ pro případ, že rychlost uvádíme v m/s a sílu v newtonech.



Obrázek 3.29: Cesta z Hradce do Prahy

a) Urči minimální tahovou sílu, kterou musí vyvinout motor automobilu, aby se při dané rychlosti pohyboval automobil rovnoměrně.
b) Urči mechanický výkon automobilu.
c) Urči spotřebu automobilu (propočítává se v litrech paliva na 100 km) při pohybu po dálnici, je-li celková účinnost motoru automobilu 22 %. Dokonalým spálením litru benzínu získáme 32,6 MJ tepla.
d) Jestliže čtyřtaktní motor obsahuje čtyři válce, kolik paliva se musí dostat při jednom cyklu do válce, koná-li motor 3 000 ot/min?

Řešení:

a) Aby se automobil při dané rychlosti pohyboval rovnoměrně, musí být tahová síla F_t rovna odporové síle F:

$$F_t = F = kv^2; \quad F_t = 0{,}54 \cdot \left(\frac{126}{3{,}6}\right)^2 \mathrm{N} = 661{,}5\,\mathrm{N} \doteq 662\,\mathrm{N}.$$ **3 body**

b) Mechanický výkon motoru automobilu je dán vztahem:

$$P = Fv = 661{,}5 \cdot \frac{126}{3{,}6}\,\mathrm{W} = 23{,}15\,\mathrm{kW}. \doteq 23{,}2\,\mathrm{kW}$$ **2 body**

c) Při ujetí vzdálenosti 100 km, vykoná motor automobilu práci:

$$W = Fs = 661{,}5 \cdot 100000\mathrm{J} = 66{,}15\,\mathrm{MJ} \doteq 66{,}2\,\mathrm{MJ}.$$

Při účinnosti motoru 22 % je potřeba, aby se spálením benzínu získalo teplo, které se jen z 22 % využije pro pohyb automobilu:

$$\begin{aligned} 22\,\% &\;\_\_\; 66{,}15\,\mathrm{MJ} \\ 1\,\% &\;\_\_\; 3{,}01\,\mathrm{MJ} \\ 100\,\% &\;\_\_\; 300{,}7\,\mathrm{MJ} \end{aligned}$$

Dokonalým spálením litru benzínu získáme 32,6 MJ tepla, potřebujeme 300,7 MJ tepla. Spotřeba benzínu v litrech při ujetí vzdálenosti 100 km je potom dána:

$$V = \frac{300{,}7}{32{,}6}\,\mathrm{l} = 9{,}22\,\mathrm{l}.$$ **3 body**

d) Při dané rychlosti automobil za jednu minutu urazí vzdálenost 2 100 m = 2,1 km. Při ujetí vzdálenosti 100 km se spotřebuje 9,22 l benzinu, při ujetí 1 km se spotřebuje 0,092 2 l benzinu a při ujetí vzdálenosti 2,1 km se spotřebuje 0,193 62 l.

Během jedné otáčky ojnice je v pracovní fázi pouze jeden válec. To znamená, že během 3 000 ot/min nastane 3 000 pracovních fází. Při celkové spotřebě 0,193 62 l za minutu, se musí dostat během jedné otáčky do jednoho z válců 0,19362/3000 l.

V motoru jsou celkem čtyři válce, které postupně prochází čtyřmi různými fázemi, z nichž jen jedna je fáze sání a jen při jedné fázi se koná práce. Z toho vyplývá, že při jednom cyklu (čtyři válce, každý v jiné fázi) se musí dostat do válce 0,19362/3000 l = = 0,065 ml. **2 body**

FO58E2-1: Osobní výtah Josef Jírů, 34,4 %

Osobní výtah tvoří kabina o hmotnosti $m_0 = 300\,\mathrm{kg}$ zavěšená na laně, vedeném přes pevnou kladku poháněnou elektromotorem, a železobetonový panel o téže hmotnosti $m_0 = 300\,\mathrm{kg}$ zavěšený na opačném konci lana jako protizávaží. Do kabiny nastoupí dva lidé o celkové hmotnosti $m = 120\,\mathrm{kg}$, kteří cestují z přízemí do 6. patra, jenž se nachází ve výšce $h = 15\,\mathrm{m}$ nad přízemím. Celková doba jejich jízdy je $t = 17\,\mathrm{s}$. Po celou dobu pohybu výtahu působí na lano stálá třecí síla o velikosti $F_\mathrm{t} = 80\,\mathrm{N}$.

a) Určete velikost síly, kterou je napínáno lano, je-li kabina prázdná a výtah v klidu.
b) Určete práci vykonanou elektromotorem při jízdě do 6. patra.
c) Určete dobu jízdy rovnoměrným pohybem mezi dvěma sousedními patry při výkonu elektromotoru $P = 1{,}2\,\mathrm{kW}$.
d) Provozní režim výtahu je nastaven tak, že bez ohledu na obsazenost se kabina pohybuje rovnoměrným pohybem vždy stejnou rychlostí. Určete výkon elektromotoru P_0 při rovnoměrném pohybu prázdné kabiny výtahu.
e) Určete rychlost v_1 kabiny během rovnoměrného pohybu a průměrnou rychlost v_p celého pohybu kabiny. Jejich velikosti porovnejte a zdůvodněte.

Uvažujte tíhové zrychlení $g = 10\,\mathrm{N/kg}$.

Řešení:

a) Lano je napínáno silou o velikosti $F = m_0 g = 300\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 3\,000\,\mathrm{N}$. **1 bod**

b) Prázdná kabina a protizávaží jsou vyvážené, proto elektromotor obvodem kladky působí na lano silou, jejíž velikost je součtem velikostí tíhové síly cestujících osob a třecí síly. Elektromotor vykoná práci

$$W = (mg + F_\mathrm{t})\,h = (120\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} + 80\,\mathrm{N}) \cdot 15\,\mathrm{m} = 19\,200\,\mathrm{J} \doteq 19\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

c) Při rovnoměrném pohybu mezi dvěma sousedními patry vykoná elektromotor práci

$$W_1 = \frac{W}{6} = \frac{19\,200\,\mathrm{J}}{6} = 3\,200\,\mathrm{J} = 3{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

Doba jízdy vychází

$$t_1 = \frac{W_1}{P} = \frac{3\,200\,\mathrm{J}}{1\,200\,\mathrm{W}} \doteq 2{,}666\,7\,\mathrm{s} \doteq 2{,}7\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

d) Při stejné rychlosti je i doba jízdy rovnoměrného pohybu mezi dvěma sousedními patry stejná, proto

$$P_0 = \frac{F_\mathrm{t}\frac{h}{6}}{t_1} = \frac{F_\mathrm{t}h}{6t_1} = \frac{80\,\mathrm{N}\cdot 15\,\mathrm{m}}{6\cdot 2{,}666\,7\,\mathrm{s}} \doteq 75\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

Poznámka: Dosazení zaokrouhlené hodnoty $t_1 = 2{,}7\,\mathrm{s}$ vede k hodnotě $\doteq 74\,\mathrm{W}$, doporučujeme i tuto odpověď uznat za správnou. Podobně doporučujeme zohlednit zaokrouhlení i v následující části. Výkon P_0 lze získat i kombinací výše uvedených vztahů a vyjádřit ve tvaru

$$P_0 = \frac{F_\mathrm{t}h}{6t_1} = \frac{F_\mathrm{t}h}{6W_1}P = \frac{F_\mathrm{t}h}{W}P = \frac{80\,\mathrm{N}\cdot 15\,\mathrm{m}}{19\,200\,\mathrm{J}}\cdot 1\,200\,\mathrm{W} = 75\,\mathrm{W}.$$

e) Rychlost rovnoměrného pohybu mezi dvěma sousedními patry činí

$$v_1 = \frac{\frac{h}{6}}{t_1} = \frac{h}{6t_1} = \frac{15\,\mathrm{m}}{6\cdot 2{,}666\,67\,\mathrm{s}} = 0{,}937\,49\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}94\,\mathrm{m/s}.$$

Průměrná rychlost celého pohybu je

$$v_\mathrm{p} = \frac{h}{t} = \frac{15\,\mathrm{m}}{17\,\mathrm{s}} = 0{,}882\,35\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}88\,\mathrm{m/s}.$$

Z porovnání plyne $v_\mathrm{p} < v_1$. Příčina spočívá v rozjíždění a zastavování, kdy se okamžitá rychlost mění mezi nulovou rychlostí a rychlostí v_1. **3 body**

Poznámka: Pro ulehčení numerických výpočtů byla v zadání úlohy doporučena hodnota tíhového zrychlení $g = 10\,\mathrm{N/kg}$. Při zaokrouhlování výsledků na 2 platné číslice, což odpovídá přesnosti hodnot zadaných veličin, by bylo vhodnější dosazovat hodnotu $9{,}8\,\mathrm{N/kg}$.

FO55F2-3 Ivo Volf, 27,5 %

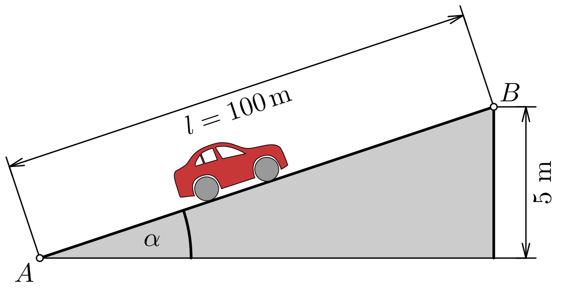
Automobil o celkové hmotnosti 1 200 kg se pohybuje stálou rychlostí 90 km/h po vodorovné, přímé silnici, přičemž můžeme uvažovat, že se pohybuje díky tahové síle motoru a proti pohybu působí především vzduch odporovou silou.

a) Jak velkou odporovou silou působí vzduch na jedoucí automobil, jehož obsah příčného řezu, kolmého na směr pohybu, je $2{,}4\,\mathrm{m}^2$, součinitel odporu automobilu C je 0,32, hustota vzduchu ϱ je $1{,}2\,\mathrm{kg/m}^3$ a pro odporovou sílu platí $F_O = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$?

b) Jakou práci vykoná automobil na trase 3,0 km a jaký bude výkon automobilu při překonávání odporu vzduchu, jestliže se nezmění zadané podmínky po celou dobu jízdy?

c) Jak se změní situace, když automobil začne vyjíždět po přímé trase kopec s mírným stoupáním 5 % (0,05)? Narýsuj obrázek a znázorni v měřítku působící síly na automobil v tomto případě. Pro zjednodušení považuj automobil za kvádr s působišti sil v těžišti. Příklad stoupání 5 % je vysvětlen na obrázku. Můžeš také obrázek jen s působícími silami nakreslit a velikosti sil dopočítat.

d) Jak se musí změnit výkon motoru, aby rychlost automobilu zůstala stálá i při jízdě do kopce? Jak se změní rychlost automobilu, když by výkon motoru zůstal stálý? Odpověz nejprve jen slovně, poté zkus také výpočet. Velikosti působících sil můžeš odečíst z narýsovaného obrázku v bodě c).



Obrázek 3.30: Příklad stoupání k úloze FO55F2-3

Řešení:

a) Odporová síla, kterou působí vzduch na automobil, je:

$$F_O = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}32 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 25^2\,\mathrm{N} = 288\,\mathrm{N} \doteq 290\,\mathrm{N}.$$

3 body

b) Práce vykonaná automobilem na trase 3 000 m je:

$$W = F_O s = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 s = 0{,}5 \cdot 0{,}32 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 25^2 \cdot 3000\,\mathrm{J} = 864\,000\,\mathrm{J} \doteq 860\,\mathrm{kJ}.$$

Výkon automobilu je:

$$P = Fv = \frac{1}{2}CS\varrho v^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}32 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 25^3\,\mathrm{W} = 7\,200\,\mathrm{W} = 7{,}2\,\mathrm{kW}.$$

2 body

c) Když automobil začne vyjíždět kopec, jeho rychlost na začátku je ještě 90 km/h. Odporová síla je tedy:

$$F_O = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}32 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 25^2\,\mathrm{N} = 288\,\mathrm{N} \doteq 300\,\mathrm{N}.$$

Tíhová síla, kterou působí Země na automobil, je :

$$F_G = mg = 1200 \cdot 10\,\mathrm{N} = 12\,000\,\mathrm{N}.$$

Složka tíhové síly F_1 je:

$$F_1 = mg \sin\alpha = 12000 \cdot \frac{5}{100}\,\mathrm{N} = 600\,\mathrm{N}.$$

Složka tíhové síly F_2 je:

$$F_2 = mg \cos\alpha \doteq 11\,985\,\mathrm{N} \doteq 12\,\mathrm{kN}.$$

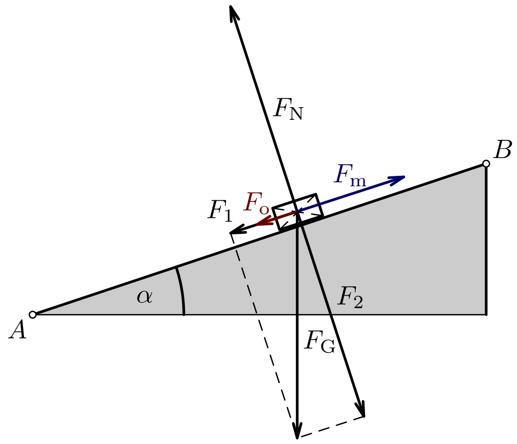
Celková síla „brzdící automobil“ je:

$$F_C = F_O + F_1 = (288 + 600)\,\mathrm{N} = 888\,\mathrm{N} \doteq 890\,\mathrm{N}.$$

Na automobil dále působí kopec normálovou silou $F_N (F_N = F_2)$ a díky motoru a tření síla $F_m (F_m = F_O)$. Působící síly na automobil jsou znázorněny na obrázku, který však není v měřítku!

3 body

Velikosti sil je možné také určit z dobře narýsovaného obrázku v patřičném měřítku.



Obrázek 3.31: Grafické znázornění působících sil v úloze FO55F2-3

d) Aby rychlost automobilu zůstala stálá i při jízdě do kopce, musí být výkon motoru větší.

$$P_2 = F_C v = (0{,}5 \cdot 0{,}32 \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 25^2 + 600) \cdot 25\,\mathrm{W} = 22\,200\,\mathrm{W} \doteq 22\,\mathrm{kW}.$$

Když by výkon motoru zůstal stálý, poté by rychlost automobilu byla menší.

2 body

FO57E2-2: Automobil jede do kopce Josef Jírů, 18,5 %

Na obr. 3.32 je závislost dráhy na čase pro jízdu automobilu značky Škoda Octavia 1.4 MPI o hmotnosti 1 300 kg. Automobil se nejprve pohybuje 8 min se stálým výkonem 11 kW po vodorovné silnici, která se nachází v nadmořské výšce 310 m. Poté jede 4 minuty do kopce se stálým stoupáním 12 % s nezměněnou rychlostí. Určete:

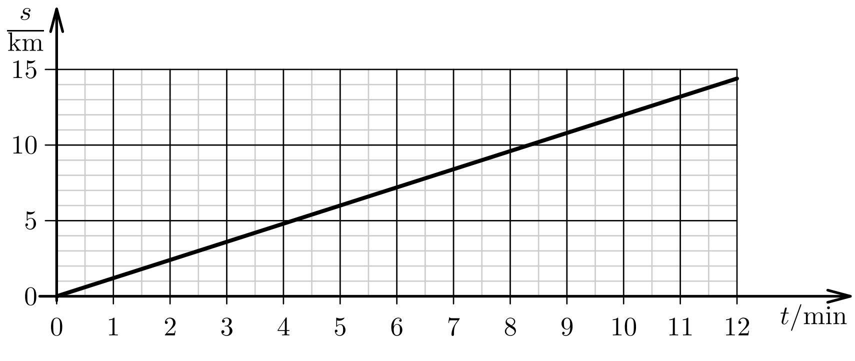
a) odporovou sílu vzduchu působící proti pohybu automobilu;
b) výkon automobilu při jízdě do kopce;
c) nadmořskou výšku automobilu v cíli;
d) celkovou práci vykonanou motorem při projetí obou úseků.

Uvažujte hodnotu tíhového zrychlení $g = 10\,\mathrm{N/kg} = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Řešení:

Označme $m = 1\,300\,\mathrm{kg}$ hmotnost automobilu, $t_1 = 8\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{s}$ čas pohybu po vodorovné rovině, $t_2 = 4\,\mathrm{min} = 240\,\mathrm{s}$ čas pohybu do kopce a $P_0 = 11\,\mathrm{kW} = 11\,000\,\mathrm{W}$ výkon automobilu.

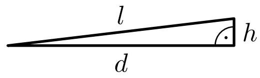
a) Z grafu určíme rychlost – např. za 10 min urazí vzdálenost 12 km, za hodinu tedy 72 km, tj. pohybuje se rychlostí $v = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$. Automobil jedoucí rovnoměrným pohybem po vodorovné silnici spotřebuje svůj výkon na překonávání



Obrázek 3.32: Graf závislosti dráhy automobilu na čase (k úloze FO57E2-2)

odporu vzduchu. Při rovnoměrném pohybu je odporová síla stejná jako tahová síla motoru a platí pro ni

$$F_0 = \frac{P_0}{v} = \frac{11\,000\,\mathrm{W}}{20\,\mathrm{m/s}} = 550\,\mathrm{N}.$$ **2 body**



Obrázek 3.33: Výška a délka trasy při stoupání

b) Podle obr. 3.33 najdeme vztah mezi vzdáleností ujetou při stoupání l a výškou h. Ve fyzikálních úlohách s nakloněnou rovinou chápeme stoupání jako podíl $h/l = 12\,\% = 0{,}12$ a pro výšku tak dostáváme $h = 0{,}12l$. Při jízdě do kopce se výkon navíc využívá na zvětšování polohové energie automobilu. Kromě odporové síly působí proti pohybu i síla rovnoběžná s nakloněnou rovinou (složka tíhové síly působící na automobil)

$$F = mg\frac{h}{l} = 1\,300\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}12 = 1\,560\,\mathrm{N} \doteq 1\,600\,\mathrm{N}.$$

Celkový výkon pak je

$$P = P_0 + Fv = 11\,000\,\mathrm{W} + 1\,560\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m/s} = 42{,}2\,\mathrm{kW} \doteq 42\,\mathrm{kW}.$$ **3 body**

Poznámka: V matematice a zeměpise je stoupání definováno nikoliv přes vzdálenost l měřenou podél silnice, ale pomocí vzdálenosti d měřené kolmo na vrstevnice. Podle této definice stoupání pak platí

$$\frac{h}{d} = 0{,}12, \qquad \frac{h}{0{,}12} = d.$$

Podle Pythagorovy věty dále získáváme

$$l^2 = d^2 + h^2 = \frac{h^2}{0{,}12^2} + h^2 = \frac{1{,}0144}{0{,}014\,4}h^2, \qquad \Longrightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{0{,}014\,4}{1{,}014\,4}}l \doteq 0{,}12l.$$

Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi hodnotami $\sin\alpha$ a $\tan\alpha$ je pro malé úhly velmi malý a v číselném výsledku se po zaokrouhlení neprojeví, doporučujeme uznat i tento postup.

c) Automobil urazil do kopce dráhu

$$l = vt_2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 240\,\mathrm{s} = 4\,800\,\mathrm{m}.$$

Při daném stoupání 12 % je dosažená výška $h = 0{,}12l = 0{,}12 \cdot 4\,800\,\mathrm{m} = 576\,\mathrm{m}$. Nadmořská výška automobilu v cíli je

$$h' = 310\,\mathrm{m} + 576\,\mathrm{m} = 886\,\mathrm{m} \doteq 890\,\mathrm{m}.$$ **3 body**

d) Celková práce je určena součtem práce nutné k překonávání odporové síly po celou dobu jízdy a získané polohové energie automobilu

$$W = P_0\,(t_1 + t_2) + mgh = 11\,000\,\mathrm{W} \cdot (480\,\mathrm{s} + 240\,\mathrm{s}) + 1\,300\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 576\,\mathrm{m} \doteq 15{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

Jiné řešení: Celkovou práci lze určit i podle výkonů motoru na jednotlivých úsecích; potom

$$W = P_0 t_1 + P t_2 = 11\,000\,\mathrm{W} \cdot 480\,\mathrm{s} + 42\,200\,\mathrm{W} \cdot 240\,\mathrm{s} \doteq 15{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

2 body

3.6 Teplo a vnitřní energie

FO60E2-2: Varná konvice Ivo Volf, 63,3 %

Na chatě na horách je varná konvice, která má na štítku údaje 230 V/1 800 W. Voda na čaj se tam vaří při teplotě $t_1 = 95\,°\mathrm{C}$. Za jak dlouho se začne voda vařit v následujících případech a), b), c), je-li účinnost konvice $\eta = 90\,\%$?

a) V létě z vodovodu do konvice nalijeme $V_1 = 1{,}2$ litru vody o teplotě $t_2 = 15\,°\mathrm{C}$.
b) V zimě do konvice nalijeme $V_1 = 1{,}2$ litru vody o teplotě $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$.
c) V zimě do konvice nalijeme $V_2 = 1{,}0$ litru vody o teplotě $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$, v níž je navíc $m = 200\,\mathrm{g}$ ledové tříště téže teploty.

Měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l = 330\,\mathrm{kJ/kg}$, hustota vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$. Ztráty tepla do okolí zanedbejte.

Řešení:
Výkon konvice varné konvice je podle štítku $P = 1\,800\,\mathrm{W}$.

a) K ohřátí vody potřebujeme teplo

$$Q_1 = \varrho V_1 c_\mathrm{v}\,(t_1 - t_2) = \\ = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}001\,2\,\mathrm{m^3}\cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\,(95\,°\mathrm{C} - 15\,°\mathrm{C}) = 403\,200\,\mathrm{J},$$

které varná konvice při účinnosti $\eta = 90\,\% = 0{,}9$ dodá za čas

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{\eta P} = \frac{403\,200\,\mathrm{J}}{0{,}9\cdot 1\,800\,\mathrm{W}} = 248{,}89\,\mathrm{s} \doteq 250\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

b) K ohřátí vody nyní potřebujeme teplo

$$Q_2 = \varrho V_1 c_\mathrm{v}\,(t_1 - t_0) = \\ = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}001\,2\,\mathrm{m^3}\cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\,(95\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}) = 478\,800\,\mathrm{J},$$

které varná konvice dodá za čas

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{\eta P} = \frac{478\,800\,\mathrm{J}}{0{,}9\cdot 1\,800\,\mathrm{W}} \doteq 295{,}56\,\mathrm{s} \doteq 300\,\mathrm{s}.$$ **3 body**.

c) Nyní musíme započítat ještě teplo potřebné k roztátí ledu $Q_\mathrm{l} = ml = 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 330\,\mathrm{kJ} = 66\,\mathrm{kJ}$. Celkem tedy musí konvice dodat teplo

$$Q_3 = Q_2 + Q_\mathrm{l} = 478\,800\,\mathrm{J} + 66\,000\,\mathrm{J} = 544\,800\,\mathrm{J}$$

za čas

$$\tau_3 = \frac{Q_3}{\eta P} = \frac{544\,800\,\mathrm{J}}{0{,}9\cdot 1\,800\,\mathrm{W}} \doteq 336{,}30\,\mathrm{s} \doteq 340\,\mathrm{s}.$$ **4 body**.

Poznámka: Pokud v části c) řešitelé použijí namísto zadané hodnoty $l = 330\,\mathrm{kJ/kg}$ hodnotu z tabulek $l = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, vychází $Q_3 = 545\,600\,\mathrm{J}$ a $\tau_3 \doteq 336{,}79\,\mathrm{s} \doteq 340\,\mathrm{s}$; i tyto hodnoty lze uznat za správné.

FO57F2-4: Vytápění v panelovém domě Lukáš Richterek, 61,3 %

Tepelný výkon starších litinových radiátorů, s nímž se orientačně počítalo při plánování domů, lze odhadnout na 1 500 W na 10 žeber radiátoru. V bytě panelového domu, kde bydlí Novákovi, mají radiátory v pokojích 15 žeber a v kuchyni 13 žeber.

a) Jaký je předpokládaný tepelný výkon radiátoru v obývacím pokoji a jaký radiátoru v kuchyni?

b) Rozměry obývacího pokoje Novákových jsou následující: délka 5 m, šířka 4 m a výška 2,6 m. Často se udává, že tepelný výkon radiátoru ve starších nezateplených domech by měl být v rozmezí 40 W/m^3 – 50 W/m^3 objemu vzduchu v místnosti. Odpovídá radiátor v obývacím pokoji tomuto požadavku?

c) U současných dobře zateplených novostaveb je postačující tepelný výkon okolo 25 W/m^3 objemu místnosti. Kolik žeber by pak mohl mít radiátor v místnosti jako je obývací pokoj Novákových v takové novostavbě?

d) Hmotnost jednoho žebra radiátoru je asi 4,5 kg a měrná tepelná kapacita litiny 460 J/(kg · °C). Jaké teplo je ráno potřeba na zahřátí samotného tělesa radiátoru v obývacím pokoji z teploty místnosti 20 °C na provozní teplotu 40 °C?

e) Teplota horké vody, která v chladném lednovém ránu přichází do radiátoru v obývacím pokoji Novákových, je 60 °C. Teplota vody, která vytéká z radiátoru, je 40 °C. Jaký objem vody by musel přitéct do radiátoru za minutu při plánovaném tepelném výkonu vypočítaném v části a)? Tepelnou kapacitu radiátoru za ustáleného stavu neuvažujte.

Hustota horké vody o teplotě 60 °C je 980 kg/m^3, měrná tepelná kapacita vody je 4 200 J/(kg · °C).

Řešení:

a) Tepelný výkon radiátorů s patnácti žebry lze odhadnout na $P_{15} = 1\,500\,\mathrm{W} \cdot 15/10 = 2\,250\,\mathrm{W}$, se třinácti žebry na $P_{13} = 1\,500\,\mathrm{W} \cdot 13/10 = 1\,950\,\mathrm{W}$.

2 body

b) Objem obývacího pokoje vychází $V = 5\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m} \times 2{,}6\,\mathrm{m} = 52\,\mathrm{m}^3$. Výkon radiátoru by se měl pohybovat v rozmezí $P_1 = 40\,\mathrm{W/m^3} \cdot V = 40\,\mathrm{W/m^3} \cdot 52\,\mathrm{m^3} = 2\,080\,\mathrm{W}$ až $P_2 = 50\,\mathrm{W/m^3} \cdot V = 50\,\mathrm{W/m^3} \cdot 52\,\mathrm{m^3} = 2\,600\,\mathrm{W}$. Zřejmě hodnota P_{15} leží v intervalu mezi P_1 a P_2. **2 body**

c) Postačující tepelný výkon radiátoru by měl být $P_3 = 25\,\mathrm{W/m^3} \cdot V = 25\,\mathrm{W/m^3} \cdot 52\,\mathrm{m^3} = 1\,300\,\mathrm{W}$. Stačilo by tedy $n = 10 \cdot 1\,300\,\mathrm{W}/1\,500\,\mathrm{W} \doteq 8{,}67 \doteq 9$ žeber namísto 15. **1 bod**

d) Celková hmotnost litinového radiátoru je $m = 15 \cdot 4{,}5\,\mathrm{kg} = 67{,}5\,\mathrm{kg}$. Na jeho zahřátí je potřeba teplo

$$Q = mc_\mathrm{L}\,(t_{40} - t_{20}) = 67{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (40\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 621\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

e) Označme V_1 objem vody, která přiteče do radiátoru za jednu sekundu. Tepelný výkon je roven teplu odevzdanému radiátorem za sekundu, platí proto

$$P_{15} = \varrho V_1 c\,(t_{60} - t_{40})\,.$$

Odtud vychází

$$V_1 = \frac{P_{15}}{\varrho c\,(t_{60} - t_{40})} = \frac{2\,250\,\mathrm{W}}{980\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (60\,^\circ\mathrm{C} - 40\,^\circ\mathrm{C})} \doteq$$
$$\doteq 0{,}000\,027\,\mathrm{m^3/s} = 27\,\mathrm{ml/s}.$$

Za ustáleného provozu, kdy můžeme zanedbat teplo na zahřívání radiátoru, za minutu přiteče objem $60V_1 \doteq 1\,600\,\mathrm{ml} = 1{,}6\,\mathrm{l}$. **3 body**

FO54E2-1: Vytápění místnosti Ivo Volf, 61,0 %

Délka učebny fyziky je 11,2 m, šířka 7,2 m a výška 2,8 m. Hustota vzduchu při teplotě 20 °C je 1,20 kg/m^3, měrná tepelná kapacita vzduchu je 1 000 J/(kg · °C) a vody 4 200 J/(kg · °C).

a) Urči hmotnost vzduchu v místnosti. Unesl bys tento vzduch, stlačený do igelitového pytle?

b) Jestliže by se vlivem netěsností oken a dveří i vedením tepla stěnami snížila teplota v místnosti za 1 hodinu o 5 °C, jaké teplo musí odevzdat teplá voda v ústředním (etážovém) topení vzduchu, aby se opět ohřál na počáteční teplotu? Je-li na vstupu do tělesa teplota vody v potrubí 65 °C a na výstupu teplota vody v potrubí 25 °C, kolik litrů vody musí topením protéct?

c) Jaký je výkon radiátoru?

Řešení:

a) Hmotnost vzduchu určíme podle vztahu

$$m = V\varrho = 11{,}2 \cdot 7{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 1{,}20\,\mathrm{kg} = 271\,\mathrm{kg}.$$

Vzduch by nebylo možné unést. **3 body**

b) Teplá voda musí odevzdat vzduchu teplo:

$$Q = mc_1\Delta t = 271 \cdot 1000 \cdot 5\,\mathrm{J} = 1\,350\,\mathrm{kJ} \doteq 1{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

Objem vody, která musí protéct topením, je dán:

$$V = \frac{Q}{c_2(t_1 - t_2)\varrho} = \frac{1350000}{4200 \cdot (65 - 25) \cdot 1000}\,\mathrm{m}^3 = 8\,\mathrm{dm}^3.$$ **4 body**

c) Výkon radiátoru je:

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{1350000}{3600}\,\mathrm{W} = 375\,\mathrm{W} \doteq 380\,\mathrm{W}.$$ **3 body**

FO61E2-3: Kapající bojler Jan Thomas, 60,3 %

Ota má na chatě bojler na ohřívání vody. Když v neděli večer v 18:00 h odjížděl domů, zapomněl ve spěchu bojler vypnout. Na chatu se vrátil až následující pátek v 18:00 h a všiml si, že z bojleru odkapává teplá voda. Odměrkou přitom zjistil, že za 10 minut nakape 34 ml vody a že objem 50 kapek je 20 ml. Celkové množství odkapané vody v kbelíku, který byl postavený pod bojlerem, odhadl na 24 litrů. Přívod vody i elektřiny nechává přes týden na chatě zapnuté.

a) Jakou hmotnost má jedna kapka vody?

b) Jak dlouho odkapávala voda v době jeho nepřítomnosti, pokud se rychlost odkapávání neměnila? Za jakou dobu po odjezdu Oty asi začala odkapávat? Kolik Ota zaplatí za odkapanou vodu, jestliže cena vodného a stočného v daném místě je 94,- Kč za 1 m^3?

c) Jaká bude cena za zbytečné ohřívání odkapané vody v době jeho nepřítomnosti, jestliže 1 kWh elektrické energie stojí 4,34 Kč? Bojler ohřívá vodu z teploty t_1 = 10 °C na t_2 = 60 °C. Účinnost ohřívání vody v bojleru je η = 60 %, měrná tepelná kapacita vody c = 4,2 kJ/(kg · °C).

Řešení:

a) Hmotnost kapky vody vychází

$$m_1 = \varrho V_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot \frac{20\,\mathrm{ml}}{50} = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot \frac{20\,\mathrm{cm^3}}{50} = 0{,}40\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

b) Za 10 minut (tj. $\frac{1}{6}$ hodiny) nakape podle zadání objem 34 ml, za hodinu $6 \cdot 34\,\mathrm{ml} = 204\,\mathrm{ml} = 0{,}204\,\mathrm{l}$, za 1 den $24 \cdot 204\,\mathrm{ml} = 4\,896\,\mathrm{ml}$. Objem $V = 24\,\mathrm{l}$ pak nakape za dobu

$$T = \frac{24\,\mathrm{l}}{0{,}204\,\mathrm{l/h}} \doteq 117{,}65\,\mathrm{h} \doteq 4{,}902\,0\,\mathrm{dne} \doteq 4\,\mathrm{dny}\,22\,\mathrm{h}.$$

Voda začala odkapávat asi $5\,\mathrm{dnů} - 4{,}902\,0\,\mathrm{dne} = 0{,}098\,039\,\mathrm{dne} \doteq 2{,}4\,\mathrm{h}$ po Otově odjezdu. **2 body**

Platba za vodné a stočné bude $0{,}024\,\mathrm{m^3} \cdot 94\,\mathrm{Kč/m^3} \doteq 2{,}256\,0\,\mathrm{Kč} \doteq 2\,\mathrm{Kč}$. **1 bod**

c) Energie spotřebovaná na zahřívání vody je rovna dodanému teplu

$$\begin{aligned} E = Q = mc\Delta t = V\varrho c\,(t_2 - t_1) = \\ = 0{,}024\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (60\,{}^\circ\mathrm{C} - 10\,{}^\circ\mathrm{C}) = \\ = 5{,}04\,\mathrm{MJ} \doteq 5{,}0\,\mathrm{MJ}. \end{aligned}$$

2 body

Protože účinnost zahřívání je jen 60 %, bude spotřeba vyšší, a to

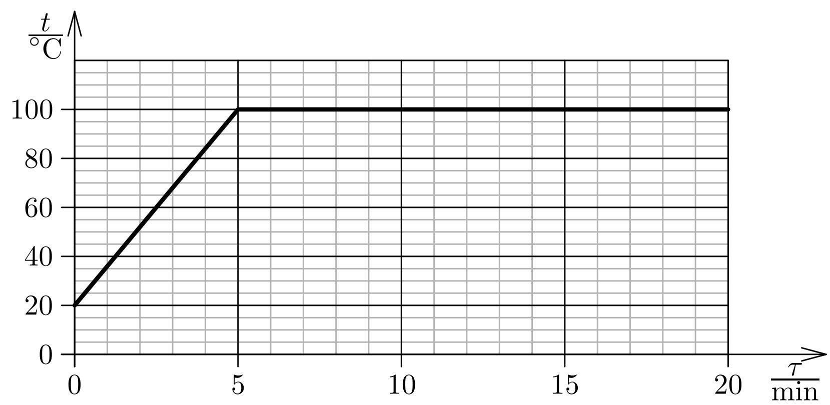
$$E_1 = \frac{E}{\eta} = \frac{5{,}04\,\mathrm{MJ}}{0{,}60} = 8{,}4\,\mathrm{MJ} = \frac{8{,}4\,\mathrm{MJ}}{3{,}6\,\mathrm{MJ/kWh}} = 2{,}333\,3\,\mathrm{kWh} \doteq 2{,}3\,\mathrm{kWh}.$$ **2 body**

Cena za spotřebovanou energii pak bude

$$2{,}333\,3\,\mathrm{kWh} \cdot 4{,}34\,\mathrm{Kč/kWh} \doteq 10{,}127\,\mathrm{Kč} \doteq 10\,\mathrm{Kč}.$$ **1 bod**

FO59E2-2: Vaření brambor Jan Thomas, 58,0 %

Brambory vaříme na plynovém sporáku v hrnci pod pokličkou. Po zapálení plynu měříme závislost teploty na čase (viz obr. 3.34).



Obrázek 3.34: Závislost teploty na čase při vaření brambor v úloze FO59E2-2

a) Určete energii potřebnou na ohřátí brambor z počáteční teploty na teplotu varu. Protože brambory obsahují velké množství vody, je situace stejná, jako bychom zahřívali $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$ vody. Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot {}^\circ C)}$.

b) K ohřátí na teplotu varu jsme spotřebovali objem $V = 0{,}054\,\mathrm{m^3}$ plynu o výhřevnosti $H = 40\,\mathrm{MJ/m^3}$. Jaká byla účinnost zahřívání?

c) Kolik plynu bychom ušetřili, kdybychom do hrnce dali místo studené vody stejné množství horké vody a počáteční teplota v hrnci by tak byla 44 °C?
d) Jak dlouho by svítila úsporná lumidka (LED „žárovka“) s příkonem $P_0 = 12\,\mathrm{W}$, kdybychom energii ušetřenou nespálením plynu dokonale využili k jejímu provozu?
e) Vysvětlete, proč máme při uvedení vody do varu přitlumit přívod plynu. Vysvětlete také, jestli musí být při varu brambory zcela potopené ve vroucí vodě.

Řešení:

a) Na ohřátí obsahu hrnce je potřeba dodat teplo

$$Q = mc\Delta t = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)} \cdot (100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C}) = 504\,000\,\mathrm{J} \doteq 500\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

b) Plyn dodá teplo $Q_1 = HV = 0{,}054\,\mathrm{m}^3 \cdot 40\,\mathrm{MJ} = 2{,}16\,\mathrm{MJ} = 2\,160\,000\,\mathrm{J}$. Účinnost vaření bude

$$\eta = \frac{Q}{Q_1} = \frac{504\,000\,\mathrm{J}}{2\,160\,000\,\mathrm{J}} \doteq 0{,}233\,33 \doteq 23\,\%.$$

2 body

c) Z grafu vidíme, že teplota stoupla z 20 °C na 100 °C za dobu $\tau = 5\,\mathrm{min}$, každou minutu stoupne teplota o $\Delta t_1 = 80\,°\mathrm{C}/5 = 16\,°\mathrm{C}$. Zahřátí z teploty 44 °C na teplotu 100 °C, tj. o $\Delta t_2 = 56\,°\mathrm{C}$ bude trvat čas

$$\tau_1 = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \cdot 1\,\mathrm{min} = \frac{56\,°\mathrm{C}}{16\,°\mathrm{C}} \cdot 1\,\mathrm{min} = 3{,}5\,\mathrm{min},$$

tj. o 1,5 minuty kratší dobu. Spotřebujeme objem plynu

$$V_1 = V\frac{\tau_1}{\tau} = 0{,}054\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{3{,}5\,\mathrm{min}}{5\,\mathrm{min}} = 0{,}037\,8\,\mathrm{m}^3.$$

Ušetříme tedy $V_2 = V - V_1 = 0{,}054\,\mathrm{m}^3 - 0{,}037\,8\,\mathrm{m}^3 = 0{,}016\,2\,\mathrm{m}^3 \doteq 16\,\mathrm{l}$ plynu.

2 body

Poznámka: Část c) je možné řešit např. i následujícím způsobem. Určíme teplo Q_2 potřebné na ohřátí obsahu hrnce z teploty 44 °C na 100 °C, tj. o $\Delta t_2 = 56\,°\mathrm{C}$

$$Q_2 = mc\Delta t_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)} \cdot 56\,°\mathrm{C} = 352\,800\,\mathrm{J}.$$

Při účinnosti vařiče $\eta = 23{,}333\,\% = 0{,}233\,33$ určíme potřebnou energii

$$E = \frac{Q_2}{\eta} = \frac{352\,800\,\mathrm{J}}{0{,}233\,33} \doteq 1{,}512\,0\,\mathrm{MJ}.$$

Z výhřevnosti plynu vypočítáme potřebný objem plynu

$$V_1 = \frac{E}{H} = \frac{1{,}512\,0\,\mathrm{J}}{40\,\mathrm{MJ/m^3}} \doteq 0{,}037\,801\,\mathrm{m}^3 \doteq 0{,}038\,\mathrm{m}^3.$$

Ušetřený objem opět vychází $V_2 = V - V_1 = 0{,}054\,\mathrm{m}^3 - 0{,}038\,\mathrm{m}^3 = 0{,}016\,\mathrm{m}^3$.

d) Z objemu $V_2 = 0{,}016\,2\,\mathrm{m}^3$ plynu můžeme spálením získat energii $E = V_2 H$. Lumidka o příkonu P_0 by tak mohla svítit po dobu

$$\tau_2 = \frac{E}{P_0} = \frac{V_2 H}{P_0} = \frac{0{,}016\,2\,\mathrm{m}^3 \cdot 40\,000\,000\,\mathrm{J}}{12\,\mathrm{W}} = 54\,000\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{h}.$$

2 body

e) Po uvedení vody do varu stačí jen udržovat teplotu na 100 °C. Energie dodaná navíc se neužitečně spotřebuje na vypařování vody (a na ztráty tepla do okolí). Protože je teplota páry pod pokličkou hrnce také 100 °C, není třeba, aby brambory byly zcela potopeny pod vodou.

2 body

FO57E2-3: Čištění mrazícího boxu Josef Jírů, 53,1 %

Maminka zjistila, že je potřeba odmrazit mrazicí box. Při čištění vybrala z boxu do nádoby led o celkové hmotnosti 2,3 kg a o teplotě 0 °C.

a) Aby led roztál, můžeme do nádoby přilít z hrnce o objemu 6,5 l vodu o teplotě 20 °C. Bude toto množství vody stačit? Pokud ano, určete konečnou teplotu vody v nádobě, pokud ne, určete hmotnost neroztátého ledu.
b) Určete minimální objem vroucí vody o teplotě 100 °C, který by maminka musela do nádoby přilít, aby led roztál.
c) Určete minimální teplotu vody o objemu 4,7 l, kterou by musela maminka do nádoby přilít, aby led roztál.

Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,180\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}$, hustota vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ a měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 334\,\mathrm{kJ/kg}$.

Řešení:

a) K roztání ledu o hmotnosti $m = 2{,}3\,\mathrm{kg}$ je nutno dodat teplo $Q = ml_\mathrm{t} = 2{,}3\,\mathrm{kg}\cdot 334\,\mathrm{kJ} \doteq 768\,\mathrm{kJ}$. Voda o objemu 6,5 l, tedy o hmotnosti $m_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}006\,5\,\mathrm{m^3} = 6{,}5\,\mathrm{kg}$, při ochlazení z teploty $t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $t = 0\,^\circ\mathrm{C}$ může poskytnout teplo $Q_1 = m_1c\,(t_1 - t) = 6{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 4\,180\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C} \doteq 543\,\mathrm{kJ} < Q$, to znamená, že voda k roztání veškerého ledu nestačí. Teplo stačí k roztání ledu o hmotnosti
$$m_2 = \frac{Q_1}{l_\mathrm{t}} = \frac{543\,\mathrm{kJ}}{334\,\mathrm{kJ}} \doteq 1{,}63\,\mathrm{kg}.$$
Neroztátý led má hmotnost $2{,}3\,\mathrm{kg} - 1{,}63\,\mathrm{kg} = 0{,}67\,\mathrm{kg}$. **4 body**

b) Hledaná hmotnost m_3 vody o teplotě $t_3 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ musí splňovat podmínku $m_3c\,(t_3 - t) = Q$; z rovnice plyne
$$m_3 = \frac{Q}{c\,(t_3 - t)} = \frac{768\,000\,\mathrm{J}}{4\,180\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\,(100\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C})} \doteq 1{,}8\,\mathrm{kg},$$
tedy do nádoby musíme přilít přibližně 1,8 l vroucí vody. **3 body**

c) Hledaná teplota t_4 vody o objemu 4,7 l, a tedy o hmotnosti $m_4 = 4{,}7\,\mathrm{kg}$, musí splňovat podmínku $m_4c\,(t_4 - t) = Q$. Z této rovnice podobně jako v předchozím bodě plyne
$$t_4 = t + \frac{Q}{m_4c} = 0\,^\circ\mathrm{C} + \frac{768\,000\,\mathrm{J}}{4{,}7\,\mathrm{kg}\cdot 4\,180\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}} \doteq 39\,^\circ\mathrm{C}.$$ **3 body**

FO62E2-2: Během tuhé zimy Věra Koudelková, 52,4 %

Franta bydlí na vesnici a občas během tuhé zimy řeší velmi nepříjemnou situaci – pokud mráz potrhá elektrické vedení, je Franta bez teplé vody, bez tepla i bez elektřiny a nezbývá mu než se spolehnout na cestovní propanbutanový vařič a venkovní zásobu sněhu.

a) Franta si chce udělat půl litru čaje. Kolik sněhu musí nabrat do hrnce, aby z něj měl půl litru vody, jestliže průměrná hustota sněhu je $\varrho_\mathrm{s} = 200\,\mathrm{kg/m^3}$?
b) Kolik tepla se spotřebuje na ohřátí sněhu k varu, jestliže venkovní teplota je $-5\,^\circ\mathrm{C}$? Měrná tepelná kapacita sněhu je stejná jako měrná tepelná kapacita ledu $c_\mathrm{l} = 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg\cdot{}^\circ C)}$. Měrné skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, měrná tepelná kapacita vody $c_\mathrm{v} = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg\cdot{}^\circ C)}$.

c) Jak dlouho bude trvat, než se sníh rozpustí a ohřeje k varu, jestliže plynový vařič má výkon 1 300 W a účinnost ohřevu je přibližně 40 %?
d) Kolik gramů plynu Franta spotřebuje, jestliže jeho výhřevnost je $H = 60\,\mathrm{MJ/kg}$ (tj. spálením 1 kg plynu lze získat 60 MJ tepla)?

Řešení:

a) Hustota sněhu je pětinová oproti hustotě vody ($\varrho_\mathrm{s} = 200\,\mathrm{kg/m^3} = \varrho/5 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}/5$), takže Franta potřebuje 5× větší objem sněhu než vody; označíme-li objem vody $V = 0{,}50$ litru $= 0{,}000\,5\,\mathrm{m^3}$, pro objem sněhu vychází $V_\mathrm{s} = 5V = 5 \cdot 0{,}50$ litru $= 2{,}5$ litru. **2 body**

Poznámka: Lze využít i skutečnost, že hmotnost vody musí být stejná jako hmotnost sněhu, jehož roztáním vznikla, platí proto

$$m = \varrho V = \varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{s}; \quad V_\mathrm{s} = V\frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{s}} = 0{,}50\,\mathrm{l}\,\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{200\,\mathrm{kg/m^3}} = 2{,}5\,\mathrm{l}.$$

b) Celkové potřebné teplo můžeme rozdělit na tři části. Ve všech případech pracujeme s hmotností sněhu a vzniklé vody $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,5\,\mathrm{m^3} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Teplo potřebné na ohřátí sněhu z venkovní teploty $t_1 = -5\,°\mathrm{C}$ na teplotu tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$

$$Q_1 = mc_\mathrm{l}\,(t_0 - t_1) = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot [0 - (-5\,°\mathrm{C})] = \\ = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot 5\,°\mathrm{C} = 5{,}25\,\mathrm{kJ}.$$

Dále potřebujeme teplo na roztátí sněhu

$$Q_2 = ml_\mathrm{t} = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 334\,\mathrm{kJ/kg} = 167\,\mathrm{kJ}.$$

Konečně k ohřátí vody z teploty tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$ na teplotu varu $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$ je potřeba teplo

$$Q_3 = mc_\mathrm{v}\,(t_2 - t_0) = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot (100\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}) = 210\,\mathrm{kJ}.$$

Celkem je potřeba

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 5{,}25\,\mathrm{kJ} + 167\,\mathrm{kJ} + 210\,\mathrm{kJ} = 382{,}25\,\mathrm{kJ} \doteq 380\,\mathrm{kJ}.$$ **4 body**

c) Pro čas τ a účinnost $\eta = 40\,\% = 0{,}4$ platí $Q = \eta P \tau$, odkud vyjádříme

$$\tau = \frac{Q}{\eta P} = \frac{382\,250\,\mathrm{J}}{0{,}4 \cdot 1\,300\,\mathrm{W}} = 735{,}1\,\mathrm{s} \doteq 740\,\mathrm{s} \doteq 12\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

d) Jestliže je výhřevnost $H = 60\,\mathrm{MJ/kg}$, spálením 1 g získáme 1000× menší teplo, tj. $H = 60\,\mathrm{kJ/g}$. Pro hmotnost m_1 plynu při účinnosti η platí $Q = \eta m_1 H$, odkud

$$m_1 = \frac{Q}{\eta H} = \frac{382{,}25\,\mathrm{kJ}}{0{,}4 \cdot 60\,\mathrm{kJ/g}} \doteq 15{,}927\,\mathrm{g} \doteq 16\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

FO55E2-3 Ivo Volf, 47,3 %

Na chalupě v zimním období si chtěli příslušníci jedné rodiny uvařit čaj. Bohužel v chodbě, kde schraňovali vodu, mrzlo a tak voda byla s ledem. Sběračkou nabral Petr asi 800 ml vody a 300 g ledu do rychlovarné konvice, na které je údaj 230 V/2 000 W. Výkon zahřívacího zařízení je dán s nepřesností ±5 %.

a) Odhadni, jaká je teplota vody s ledem, tedy počáteční teplota směsi v rychlovarné konvici.
b) Kolik tepla musí dodat zahřívací zařízení konvice vodě s ledem, aby se ohřála na teplotu 90 °C, která je potřebná pro zalití čajového sáčku, jestliže zanedbáš tepelné ztráty?
c) Jak dlouho trvá zahřívání, když účinnost konvice je 85 % a uvážíš-li toleranci v údaji o výkonu? Urči časové meze.

Počítej s měrnou tepelnou kapacitou vody 4 200 J/(kg · °C) a s měrným skupenským teplem tání ledu 330 kJ/kg.

Řešení:

a) Je-li voda s ledem, poté můžeme předpokládat, že teplota vody a ledu je asi 0 °C. **2 body**
b) Teplo potřebné k ohřátí vody s ledem na teplotu 90 °C je:

$$Q_1 = (0{,}8 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 330)\,\mathrm{J} = 415\,899\,\mathrm{J} \doteq 0{,}42\,\mathrm{MJ}.$$ **4 body**

c) Maximální výkon zahřívacího zařízení může být:

$$P_{\mathrm{max}} = (2000 + 2000 \cdot 0{,}05)\,\mathrm{W} = 2\,100\,\mathrm{W}.$$

Minimální výkon zahřívacího zařízení může být:

$$P_{\mathrm{min}} = (2000 - 2000 \cdot 0{,}05)\,\mathrm{W} = 1\,900\,\mathrm{W}.$$

Doba potřebná k ohřátí v prvním případě:

$$t_1 = \frac{0{,}8 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 330}{2100 \cdot 0{,}85}\,\mathrm{s} \doteq 233\,\mathrm{s} \doteq 3{,}9\,\mathrm{min}.$$

Doba potřebná k ohřátí ve druhém případě:

$$t_2 = \frac{0{,}8 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 4200 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 330}{1900 \cdot 0{,}85}\,\mathrm{s} \doteq 258\,\mathrm{s} \doteq 4{,}3\,\mathrm{min}.$$ **4 body**

FO56E2-4: Led na zimním stadionu Lukáš Richterek, 45,9 %

Typické rozměry ledové plochy zimního stadionu jsou 60 m×30 m a tloušťka ledu se pohybuje okolo 4 cm.
a) Spočítejte objem ledové vrstvy na stadionu.
b) Provozní teplota ledu by měla být okolo −4 °C. Kolik tepla musíme odebrat při přípravě ledové plochy na počátku sezóny, použijeme-li k výrobě ledu studenou vodu o teplotě 12 °C?
c) Jaké teplo musíme v průměru odebrat z 1 m^2 plochy?
d) Jak dlouho bude trvat příprava ledové plochy, je-li chladicí výkon zařízení pod ledovou plochou 290 kW?
e) Při rekonstrukci stadionu bylo zakoupeno chladicí zařízení s výkonem chlazení 520 kW. Jak se změnila doba přípravy ledu na začátku sezóny?

Uvažujte následující hodnoty: měrná tepelná kapacita vody 4 200 J/(kg · °C), měrné skupenské teplo tání ledu 330 kJ/kg, měrná tepelná kapacita ledu 2 100 J/(kg · °C) a hustota ledu 920 $\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

a) Objem vrstvy ledu vychází:

$$V = 30\,\mathrm{m} \cdot 60\,\mathrm{m} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} = 72\,\mathrm{m}^3. \qquad \textbf{1 bod}$$

b) Při chlazení musíme vodu ochladit na teplotu tuhnutí, potom přeměnit na led a vzniklý led ochladit na provozní teplotu. Hmotnost ledu vychází:

$$m = \varrho V = 920\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 72\,\mathrm{m}^3 = 66\,240\,\mathrm{kg}.$$

Pro příslušná tepla, které musíme vodě odebrat platí:

i) ochlazení vody

$$Q_1 = mc_1(t_{12} - t_0) = 66\,240\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (12\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C}) = 3{,}34\,\mathrm{GJ},$$

ii) přeměna vody na led

$$Q_2 = ml_t = 66\,240\,\mathrm{kg} \cdot 330\,000\,\mathrm{J/kg} = 21{,}86\,\mathrm{GJ},$$

iii) ochlazení ledu

$$Q_3 = mc_2(t_0 - t_{-4}) = 66\,240\,\mathrm{kg} \cdot 2\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot [0\,^\circ\mathrm{C} - (-4\,^\circ\mathrm{C})] = 556\,\mathrm{MJ}.$$

Celkem musíme odebrat teplo:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 25{,}76\,\mathrm{GJ} \doteq 25{,}8\,\mathrm{GJ}. \qquad \textbf{5 bodů}$$

c) Při ploše stadionu $S = 60\,\mathrm{m} \times 30\,\mathrm{m} = 1\,800\,\mathrm{m}^2$ připadne na jednotku plochy teplo:

$$Q' = Q/S = 25{,}76\,\mathrm{GJ}/1\,800\,\mathrm{m}^2 = 14{,}3\,\mathrm{MJ/m^2} \doteq 14\,\mathrm{MJ/m^2}. \qquad \textbf{1 bod}$$

d) Pro dobu zmrazení vody na led při provozní teplotě vychází:

$$\tau_1 = Q/P_1 = 25\,760\,000\,000\,\mathrm{J}/290\,000\,\mathrm{W} \doteq 88\,828\,\mathrm{s} \doteq 24{,}7\,\mathrm{h} \doteq 25\,\mathrm{h}. \qquad \textbf{2 body}$$

e) Pro dobu zmrazení vody na led při provozní teplotě při novém zařízení s větším chladicím výkonem dostáváme

$$\tau_2 = Q/P_2 = 25\,760\,000\,000\,\mathrm{J}/520\,000\,\mathrm{W} \doteq 49\,538\,\mathrm{s} \doteq 13{,}8\,\mathrm{h} \doteq 14\,\mathrm{h}. \qquad \textbf{1 bod}$$

FO60F2-2: Koupání bratříčka Ivo Volf, 45,8 %

Veronika dostala za úkol připravit vodu na koupání svého malého bratříčka Zdeňka. Dno vaničky má přibližně tvar obdélníka o rozměrech $a = 45\,\mathrm{cm}$, $b = 72\,\mathrm{cm}$, stěny jsou vysoké $h = 30\,\mathrm{cm}$. Voda na koupání by měla mít teplotu $t = 37\,^\circ\mathrm{C}$ a z kohoutku s teplou vodou přitéká do vaničky voda o teplotě $t_\mathrm{t} = 57\,^\circ\mathrm{C}$. Veronika do vanička napustila $V_\mathrm{t} = 8{,}0$ litrů teplé vody. Ztráty tepla do okolí zanedbejte.

a) Kolik vody z kohoutku se studenou vodou o teplotě $t_\mathrm{s} = 21\,^\circ\mathrm{C}$ musí Veronika do vaničky přilít, aby výsledná teplota byla vyhovující?

b) Do jaké výšky pak bude voda dosahovat ve vaničce?

c) Druhý den se Veronika spletla a napustila 8 litrů studené vody. Kolik litrů teplé vody pak musela přidat, aby získala správnou výslednou teplotu?

d) Do jaké výšky bude dosahovat voda ve vaničce v případě c)?

Řešení:

Označme postupně zadané veličiny: teplota vody na koupání $t = 37\,^\circ\mathrm{C}$, rozměry dna vaničky $a = 0{,}45\,\mathrm{m}$, $b = 0{,}72\,\mathrm{m}$, výška stěn vaničky $h = 0{,}30\,\mathrm{m}$, teplota teplé vody $t_\mathrm{t} = 57\,^\circ\mathrm{C}$, objem teplé vody ve vaničce $V_\mathrm{t} = 8{,}0\,\mathrm{l}$. Dno vaničky má plochu o obsahu $S = ab = 0{,}45\,\mathrm{m} \cdot 0{,}72\,\mathrm{m} = 0{,}324\,\mathrm{m}^2$.

a) Označme ještě m_s hmotnost a V_s objem studené vody o teplotě $t_\mathrm{s} = 21\,^\circ\mathrm{C}$, kterou je nutno přilít, aby výsledná teplota byla pro dítě vyhovující. Podle kalorimetrické rovnice se teplo přijaté studenou vodou rovná teplu odevzdanému teplou vodou o hmotnosti m_t a objemu V_t

$$m_\mathrm{s} c\,(t - t_\mathrm{s}) = m_\mathrm{t} c\,(t_\mathrm{t} - t)\,,$$
$$V_\mathrm{s} \varrho c\,(t - t_\mathrm{s}) = V_\mathrm{t} \varrho c\,(t_\mathrm{t} - t)\,,$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody a ϱ hustota vody. Odtud vychází

$$V_\mathrm{s} = V_\mathrm{t} \frac{t_\mathrm{t} - t}{t - t_\mathrm{s}} = 8\,\text{litrů} \cdot \frac{57\,^\circ\mathrm{C} - 37\,^\circ\mathrm{C}}{37\,^\circ\mathrm{C} - 21\,^\circ\mathrm{C}} = 10\,\text{litrů}.$$ **3 body**

b) Výška vody ve vaničce o celkovém objemu $V = V_\mathrm{s} + V_\mathrm{t} = 8\,\mathrm{l} + 10\,\mathrm{l} = 18\,\mathrm{l} = 0{,}018\,\mathrm{m}^3$ bude

$$h_\mathrm{v} = \frac{V}{S} = \frac{0{,}018\,\mathrm{m}^3}{0{,}324\,\mathrm{m}^2} \doteq 0{,}055\,556\,\mathrm{m} \doteq 5{,}6\,\mathrm{cm}.$$ **2 body**

c) Pokud se bude dolévat pouze teplá voda o objemu V_t' do studené vody o objemu $V_\mathrm{s}' = 8\,\mathrm{l}$, potom obdobně jako v a) můžeme psát

$$V_\mathrm{s}' \varrho c\,(t - t_\mathrm{s}) = V_\mathrm{t}' \varrho c\,(t_\mathrm{t} - t)\,,$$

odkud vyjádříme

$$V_\mathrm{t}' = V_\mathrm{s}' \frac{t - t_\mathrm{s}}{t_\mathrm{t} - t} = 8\,\text{litrů} \cdot \frac{37\,^\circ\mathrm{C} - 21\,^\circ\mathrm{C}}{57\,^\circ\mathrm{C} - 37\,^\circ\mathrm{C}} = 6{,}4\,\text{litru}.$$ **3 body**

d) Výška vody ve vaničce o celkovém objemu $V' = V_\mathrm{s}' + V_\mathrm{t}' = 8\,\mathrm{l} + 6{,}4\,\mathrm{l} = 14{,}4\,\mathrm{l} = 0{,}014\,4\,\mathrm{m}^3$ bude

$$h_\mathrm{v}' = \frac{V'}{S} = \frac{0{,}014\,4\,\mathrm{m}^3}{0{,}324\,\mathrm{m}^2} \doteq 0{,}044\,444\,\mathrm{m} \doteq 4{,}4\,\mathrm{cm}.$$ **2 body**

FO55F2-4 Ivo Volf, 45,4 %

V hrnci ze železného plechu o objemu 3,0 litru, teplotě 15 °C a hmotnosti 0,80 kg i s pokličkou je 2,5 litru čisté vody o stejné teplotě. Měrná tepelná kapacita vody je 4 200 J/(kg · °C), železa 460 J/(kg · °C).

a) Kolik tepla je potřeba k zahřátí samotné vody na 90 °C?

b) Vodu musíme zahřívat v hrnci; jaká je spotřeba tepla při zahřívání vody a hrnce s pokličkou, jestliže zanedbáme tepelné ztráty do okolního prostředí? Jaká je účinnost zahřívání vody v tomto případě?

c) Horkou vodu vylijeme, do hrnce okamžitě nalijeme 0,50 litru vody původní teploty 15 °C a přikryjeme opět pokličkou. Až se teplota soustavy ustálí, jaká bude teplota vody v hrnci, jestliže opět zanedbáme tepelné ztráty do okolního prostředí?

Řešení:

a) Teplo potřebné k ohřátí samotné vody je:

$$Q_1 = 2{,}5 \cdot 4200 \cdot (90 - 15)\,\mathrm{J} = 787\,500\,\mathrm{J} \doteq 790\,\mathrm{kJ}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Teplo potřebné k ohřátí vody a hrnce s pokličkou při zanedbání tepelných ztrát do okolního prostředí je:

$$Q_2 = [2{,}5 \cdot 4200 \cdot (90 - 15) + 0{,}80 \cdot 460 \cdot (90 - 15)]\,\mathrm{J} = 815\,100\,\mathrm{J} \doteq 820\,\mathrm{kJ}.$$

Účinnost zahřívání vody je dána poměrem:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2{,}5 \cdot 4200 \cdot (90 - 15)}{2{,}5 \cdot 4200 \cdot (90 - 15) + 0{,}80 \cdot 460 \cdot (90 - 15)} \doteq 0{,}97. \qquad \textbf{4 body}$$

c) Vyjdeme z kalorimetrické rovnice a pro výslednou teplotu dostaneme vztah:

$$t = \frac{0{,}5 \cdot 4200 \cdot 15 + 0{,}8 \cdot 460 \cdot 90}{0{,}5 \cdot 4200 + 0{,}8 \cdot 460}\,^\circ\mathrm{C} \doteq 26\,^\circ\mathrm{C}. \qquad \textbf{3 body}$$

FO58E2-2: Ekologický dům Jan Thomas, 39,9 %

Na ekologickém domě jsou sluneční panely o celkové ploše $S = 24\,\mathrm{m}^2$, které slouží k ohřívání vody a k vytápění. Průměrný výkon slunečního záření na plochu $1\,\mathrm{m}^2$ je $P_0 = 0{,}90\,\mathrm{kW}$ a účinnost celého zařízení je $\eta = 15\,\%$.

a) Jaký objem vody ohřeje zařízení z teploty $t_1 = 6\,^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $t_2 = 50\,^\circ\mathrm{C}$ za jeden den, předpokládáme-li, že Slunce bude svítit denně po dobu $\tau = 6$ hodin? Výsledek zaokrouhlete na dvě platné číslice.

b) Kolik bychom zaplatili, kdybychom chtěli stejné množství teplé vody místo slunečními kolektory ohřívat v elektrickém kotli s maximálním výkonem $P_1 = 36\,\mathrm{kW}$? Jak dlouho by toto ohřívání trvalo? Kolik ušetříme za celý rok, předpokládáme-li každý den přibližně stejnou spotřebu? Uvažujte cenu za 1 kWh spotřebované energie 5,10 Kč.

Měrná tepelná kapacita vody $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot {}^\circ C)}$, hustota vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

a) Z celkového výkonu P_0, který dodává Slunce, se na ohřátí vody využije pouze 15 %; pro využitelnou energii za dobu $\tau = 6\,\mathrm{h} = 6 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 21\,600\,\mathrm{s}$ ze záření, které dopadne na plochu $S = 24\,\mathrm{m}^2$, platí

$$E_1 = \eta P_0 S \tau = 0{,}15 \cdot 900\,\mathrm{W/m^2} \cdot 24\,\mathrm{m}^2 \cdot 21\,600\,\mathrm{s} = 69\,984\,000\,\mathrm{J} \doteq 70\,\mathrm{MJ}.$$

Toto množství energie stačí na ohřátí vody s měrnou tepelnou kapacitou c o hmotnosti

$$m = \frac{E_1}{c\,(t_2 - t_1)} = \frac{69\,984\,000\,\mathrm{J}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (50\,^\circ\mathrm{C} - 6\,^\circ\mathrm{C})} = 378{,}7\,\mathrm{kg} \doteq 380\,\mathrm{kg}.$$

Protože 1 kg odpovídá 1 l vody, ohřeje se asi 380 l vody. **5 bodů**

b) Ohřívání by trvalo dobu

$$\tau_1 = \frac{E_1}{P_1} = \frac{69\,984\,000\,\mathrm{J}}{36\,000\,\mathrm{W}} = 1\,944\,\mathrm{s} = 32\,\mathrm{min}\ 24\,\mathrm{s} \doteq 32\,\mathrm{min}. \qquad \textbf{3 body}$$

Energie E_1 vyjádřená v kWh má hodnotu

$$E_1 = \frac{69\,984\,000\,\mathrm{J}}{3\,600\,000\,\mathrm{J/kWh}} = 19{,}44\,\mathrm{kWh}$$

a za jeden den zaplatíme $19{,}44\,\mathrm{kWh} \cdot 5{,}10\,\mathrm{Kč/kWh} = 99{,}1\,\mathrm{Kč}$. Za celý rok, tj. 365 dní pak zaplatíme $99{,}1\,\mathrm{Kč/den} \cdot 365\,\mathrm{dní} \doteq 36\,000\,\mathrm{Kč}$. **2 body**

FO53E2-3(FO53F2-4): Led v sudu Ivo Volf, 34,9 %(19,2 %)

Poznámka: Úlohy FO53E2-3 a FO53F2-4 jsou identické.

Na jaře přijeli rodiče jedné rodiny i s dětmi na chalupu, kde zjistili, že na podzim zapomněli uklidit plastový válcový sud o průměru 60 cm a o výšce 90 cm. Protože sud byl ve stínu, kam nedopadají sluneční paprsky, zůstala v něm na dně vrstva právě tajícího ledu o tloušťce asi 20 cm. Děti – dvojčata deváťáci Michal a Katka – se rozhodly, že na led nalijí horkou vodu o teplotě 90 °C.

a) Urči, kolik ledu bylo v plastovém sudu.
b) Kolik horké vody bylo potřeba, aby právě roztál všechen led?
c) Kolik volného místa ještě zůstalo v sudu?
d) Kdyby nalily děti do sudu horkou vodu tak, že by ho právě zaplnily, tak by roztál všechen led a teplota vody by se ustálila na určité hodnotě nad 0 °C. Jaká by byla výsledná teplota vody v sudu?

Měrná tepelná kapacita vody je 4 200 J/(kg · °C), měrné skupenské teplo tání 330 kJ/kg.

Řešení:

Nejprve musíme zjistit hustotu ledu $\varrho_l = 920\,\mathrm{kg/m^3}$ a měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 334\,\mathrm{kJ/kg}$.

a) Objem ledu určíme podle vztahu

$$V_l = v_l \pi r^2 = (0{,}2 \cdot \pi \cdot 0{,}3^2)\,\mathrm{m^3} \doteq 0{,}056\,5\,\mathrm{m^3}.$$

Pomocí objemu a hustoty spočteme jeho hmotnost jako:

$$m_l = V_l \varrho_l = 0{,}0565 \cdot 920\,\mathrm{kg} \doteq 52\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

b) Pro roztání ledu platí:

$$l_t m_l = m_v c (t_{90} - t_0).$$

Je tedy potřeba horké vody o hmotnosti:

$$m_v = \frac{l_t m_l}{c(t_{90} - t_0)} = \frac{334000 \cdot 46}{4200 \cdot 90}\,\mathrm{kg} \doteq 46\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

c) Celkový objem vody v sudu je nyní:

$$V_v = \frac{(m_v + m_l)}{\varrho_v}\,\mathrm{m^3} = \frac{52 + 46}{1000}\,\mathrm{m^3} = 0{,}098\,\mathrm{m^3}.$$

Volné místo v sudu spočítáme jako:

$$V_p = V_s - V_v = v_s \pi r^2 - V_v = (0{,}9 \cdot \pi \cdot 0{,}3^2 - 0{,}098)\,\mathrm{m^3} \doteq 0{,}156\,\mathrm{m^3}.$$ **1 bod**

d) Nejprve musíme zjistit výšku volného místa v sudu. Výšku ledu známe, výšku vody potřebné na rozpuštění ledu zjistíme jako:

$$h_v = \frac{m_v}{\varrho_v \pi r^2} = \frac{46}{1000 \cdot \pi \cdot 0{,}3^2}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}162\,7\,\mathrm{m} \doteq 16\,\mathrm{cm}.$$

Výška vody potřebná pro zaplnění sudu bude:

$$h = h_s - h_l - h_v = (0{,}9 - 0{,}2 - 0{,}16)\,\mathrm{m} \doteq 0{,}54\,\mathrm{m}.$$

Z ní určíme hmotnost vody potřebné pro zaplnění sudu jako:

$$m_v' = \pi r^2 h \varrho_v = (\pi \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}54 \cdot 1000)\,\mathrm{kg} \doteq 153\,\mathrm{kg}.$$

Pro přidání dalšího množství horké vody sestavíme kalorimetrickou rovnici jako:

$$(m_l + m_v)c(t - t_0) = m_v' c(t_{90} - t).$$

Po vykrácení c a roznásobením závorek vyjádříme výslednou teplotu t:

$$t = \frac{m_v' t_{90}}{m_l + m_v + m_v'} = \frac{153 \cdot 90}{52 + 46 + 153}\,^\circ\mathrm{C} \doteq 55\,^\circ\mathrm{C}.$$ **4 body**

Poznámka: Je možné také sestavit kalorimetrickou rovnici v následujícím tvaru:

$$(m_v + m_v')c(t_{90} - t) = m_l l_t + m_l c(t - t_0).$$

Tu lze přepsat jako:

$$(V_s - V_l)\varrho_v c(t_{90} - t) = V_l \varrho_l l_t + V_l \varrho_l c(t - t_0),$$

a z něj vyjádřit t.

FO56F2-4: Ohřívání vody v horské chatě Lukáš Richterek, 34,3 %

Veronika se dvěma kamarádkami strávila víkend na horské chatě. Každé ráno vařily čaj v hrnci ze železného plechu s pokličkou o celkové hmotnosti 0,80 kg. Měrná tepelná kapacita vody je 4 200 J/(kg · °C), železa 460 J/(kg · °C).

a) V sobotu ráno vstala Veronika první a uvařila čaj jen pro sebe. Kolik tepla bylo potřeba k ohřátí vody o objemu 0,5 l z 15 °C na 90 °C?
b) V neděli ráno bylo o něco chladněji; kamarádky se probudily dříve a vařily si čaj pro všechny najednou. Kolik tepla bylo potřeba k ohřátí vody o objemu 1,5 l z 10 °C na 90 °C?
c) Jak dlouho by trvalo ohřátí vody v sobotu i v neděli ráno na elektrickém vařiči o výkonu 800 W? Ztráty do okolí zanedbejte.
d) Protože v neděli bylo na chatě opravdu zima, chtěly kamarádky pít čaj co nejdříve. Po vyloužení čaje byla teplota nápoje v hrnci 60 °C. Jaký objem studené vody o teplotě 10 °C bylo potřeba přilít do hrnce, aby byl čaj příjemný pro okamžité pití, tj. měl teplotu 40 °C?

Uvažujte hustotu vody 1 000 kg/m^3.

Řešení:

a)

$$Q_1 = (m_1 c + m_ž c_ž)\delta t_1 = (V_1 \varrho c + m_ž c_ž)\delta t_1 =$$
$$= \left[0{,}000\,5\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)} + 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\right] \cdot$$
$$\cdot (90\,°\mathrm{C} - 15\,°\mathrm{C}) = 185\,\mathrm{kJ} \doteq 190\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

b)

$$Q_2 = (m_2 c + m_ž c_ž)\delta t_2 = (V_2 \varrho c + m_ž c_ž)\delta t_2 =$$
$$= \left[0{,}001\,5\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)} + 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\right] \cdot$$
$$\cdot (90\,°\mathrm{C} - 10\,°\mathrm{C}) = 533\,\mathrm{kJ} \doteq 530\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

c)

$$\tau_1 = Q_1/P = 185\,\mathrm{kJ}/800\,\mathrm{W} = 231\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{min}\,51\,\mathrm{s}.$$
$$\tau_2 = Q_2/P = 533\,\mathrm{kJ}/800\,\mathrm{W} = 667\,\mathrm{s} = 11{,}1\,\mathrm{min} = 11\,\mathrm{min}\,7\,\mathrm{s}.$$

2 body

d) Z kalorimetrické rovnice dostáváme:

$$(V_2 \varrho c + m_ž c_ž)(t_{60} - t_{40}) = V_3 \varrho c (t_{40} - t_{10}),$$
$$V_3 = \frac{(V_2 \varrho c + m_ž c_ž)}{\varrho c} \cdot \frac{t_{60} - t_{40}}{t_{40} - t_{10}},$$

$$V_3 = \frac{0{,}001\,5\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)} + 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}} \cdot \frac{20\,°\mathrm{C}}{30\,°\mathrm{C}} =$$
$$= 0{,}001\,1\,\mathrm{m^3}.$$

Je potřeba přilít asi 1,1 litru studené vody. **4 body**

FO58F2-1: Sníh na střeše Jan Thomas, 33,8 %

Karel a Petr mají na horách chalupy se stejně velkou střechou o ploše $S = 50\,\mathrm{m^2}$. Oba udržují uvnitř chalupy stejnou teplotu $t = 20\,°\mathrm{C}$. Jednoho dne napadl sníh. Čtyři hodiny od chvíle, kdy přestalo sněžit, přišla za kamarády na návštěvu Věra a viděla, že na Karlově střeše a v okolí leží vrstva sněhu o výšce $h = 5\,\mathrm{cm}$, zatímco na Petrově střeše poslední sníh právě roztál.

a) Vysvětlete tento jev – proč na Karlově střeše zůstala vrstva sněhu a na Petrově sníh roztál?
b) Jaké teplo Q je potřeba na to, aby vrstva sněhu na Karlově střeše roztála? Předpokládejte, že teplota okolního vzduchu i napadlého sněhu se pohybovala okolo $0\,°\mathrm{C}$.
c) Kolik korun musí Petr zaplatit oproti Karlovi navíc za teplo Q, které bylo potřeba na roztátí sněhu, platí-li za elektrickou energii k vytápění 4,90 Kč za každou spotřebovanou kWh?
d) Kolik litrů vody na koupání si může za ušetřené peníze Karel dovolit ohřát z teploty $t_1 = 14\,°\mathrm{C}$ na teplotu $t_2 = 50\,°\mathrm{C}$ v elektrickém bojleru, je-li účinnost bojleru $\eta = 90\,\%$?

Měrná tepelná kapacita vody $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)}$, měrné skupenské teplo tání ledu $l_\mathrm{t} = 330\,\mathrm{kJ/kg}$, hustota napadlého sněhu $\varrho_\mathrm{s} = 100\,\mathrm{kg/m^3}$, hustota vody $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Řešení:

a) Karel má střechu dobře tepelně izolovanou, Petr nikoliv. **1 bod**

b) Pokud leží na střeše vrstva o výšce $h = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$, bude hmotnost sněhu

$$m = \varrho_\mathrm{s} V = \varrho_\mathrm{s} S h = 100\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 50\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{kg}.$$

Na jeho roztátí je potřeba teplo

$$Q = m l_\mathrm{t} = \varrho_\mathrm{s} S h l_\mathrm{t} = 100\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 50\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} \cdot 330\,000\,\mathrm{J/kg} = 82\,500\,\mathrm{kJ} \doteq 83\,\mathrm{MJ}.$$

4 body

c) Hodnota $Q = 82\,500\,000\,\mathrm{J}$ odpovídá energii v kWh

$$E = \frac{82\,500\,000\,\mathrm{J}}{3\,600\,000\,\mathrm{J/kWh}} = 22{,}917\,\mathrm{kWh} \doteq 22{,}92\,\mathrm{kWh}.$$

Petr musí za uniklé teplo navíc zaplatit cenu $22{,}917\,\mathrm{kWh} \cdot 4{,}90\,\mathrm{Kč/kWh} = 112{,}29\,\mathrm{Kč} \doteq 110\,\mathrm{Kč}$. **2 body**

d) Z energie spotřebované bojlerem se na ohřev vody o objemu V využije pouze část ηQ; můžeme psát

$$\eta Q = \varrho_\mathrm{v} V c\,(t_2 - t_1)\,.$$

Odtud dostáváme

$$V = \frac{\eta Q}{\varrho_\mathrm{v} c\,(t_2 - t_1)} = \frac{0{,}90 \cdot 82\,500\,000\,\mathrm{J}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (50\,°\mathrm{C} - 14\,°\mathrm{C})} \doteq$$

$$\doteq 0{,}491\,07\,\mathrm{m^3} \doteq 490\,\mathrm{l}.$$ **3 body**

FO54F2-4: Voda ke koupání

Ivo Volf, 32,9 %

Z vodovodního ventilu označeného červeně můžou vytékat za 1 min 4 litry vody o teplotě 80 °C, z modře označeného může vytékat 6 litrů vody o teplotě 15 °C. Měrná tepelná kapacita vody je přibližně $4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}$.

a) Do vany chce Adélka nechat natéct 140 litrů vody tak, že ventily uvolní na maximum. Jak dlouho bude natékat stanovený objem vody a jaká bude výsledná teplota vody?

b) Protože na koupání se doporučuje užít vodu o teplotě 35 °C, kolik studené či teplé vody je třeba přidat, aby této teploty bylo dosaženo?

c) Protože však po přidání vody Adélka ještě následujících 30 min telefonovala, voda ve vaně vychladla o 8 °C. Určete, kolik teplé vody musí ještě nechat přitéci, aby se teplota vody ve vaně dostala na počáteční teplotu, tedy 35 °C? Jaký bude objem vody ve vaně nyní?

Řešení:

a) Za 1 min přiteče do vany 6 litrů vody o teplotě 15 °C a 4 litry vody o teplotě 80 °C, dohromady 10 litrů za 1 min. 140 litrů vody nateče za 14 min. Výslednou teplotu vody zjistíme pomocí kalorimetrické rovnice, počítáme s hustotou vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$:

$$m_1 c (t - t_1) = m_2 c (t_2 - t),$$

$$t = \frac{m_1 c t_1 + m_2 c t_2}{c(m_1 + m_2)},$$

$$t = \frac{56 \cdot 4200 \cdot 80 + 84 \cdot 4200 \cdot 15}{4200 \cdot (56 + 84)}\,^\circ\mathrm{C} = 41\,^\circ\mathrm{C}.$$ **4 body**

b) Musíme přidat vodu studenou:

$$mc(t - t') = m_3 c(t' - t_2),$$

$$m_3 = \frac{mc(t - t')}{c(t' - t_2)},$$

$$m_3 = \frac{140 \cdot 4200 \cdot (41 - 35)}{4200 \cdot (35 - 15)}\,\mathrm{kg} = 42\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

c) Z kalorimetrické rovnice vyjádříme, kolik musí ještě přitéci teplé vody:

$$(m_3 + m)c\delta t = m_4 c(t_1 - t'),$$

$$m_4 = \frac{(m_3 + m)c\delta t}{c(t_1 - t')},$$

$$m_4 = \frac{(140 + 42) \cdot 4200 \cdot 8}{4200 \cdot (80 - 35)}\,\mathrm{kg} = 32{,}4\,\mathrm{kg} \doteq 32\,\mathrm{kg}.$$

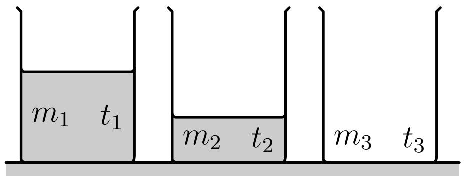
Celkový objem vody ve vaně bude:

$$V = \frac{m + m_3 + m_4}{\varrho},$$

$$V = \frac{140 + 42 + 32{,}4}{1000}\,\mathrm{m}^3 = 214{,}4\,\mathrm{m}^3 \doteq 210\,\mathrm{m}^3.$$ **3 body**

FO59F2-3: Tři nádoby Jan Thomas, 15,7 %

Veronika našla v laboratoři tři stejné kovové nádoby. V první byla kapalina o hmotnosti m_1 a teplotě $t_1 = 50\,^\circ\mathrm{C}$, ve druhé byla stejná kapalina o hmotnosti $m_2 = m_1/2$ a teplotě $t_2 = 30\,^\circ\mathrm{C}$; třetí nádoba byla prázdná, její teplota byla $t_3 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Hmotnost každé nádoby byla $m_2 = m_1/2$, měrná tepelná kapacita materiálu nádob byla 5krát menší, než měrná tepelná kapacita kapaliny (viz obr. 3.35).



Obrázek 3.35: Tři nádoby v úloze FO59F2-3

a) Jaká bude výsledná teplota kapaliny, nalije-li Veronika obsah druhé nádoby do první nádoby?
b) Jaká bude výsledná teplota, přelije-li nyní obsah první nádoby do třetí, prázdné nádoby?

Ztráty tepla do okolí zanedbejte.

Řešení:

a) Přidáním kapaliny ze druhé nádoby se v první nádobě teplota sníží na teplotu t. Podle kalorimetrické rovnice je teplo odevzdané kapalinou v první nádobě a první nádobou rovno teplu přijatému kapalinou přelitou ze druhé nádoby; můžeme proto psát
$$m_1 c\,(t_1 - t) + \frac{m_1}{2}\frac{c}{5}\,(t_1 - t) = \frac{m_1}{2} c\,(t - t_2)\,.$$
Po zkrácení výrazem $m_1 c$ a vynásobení 10 získáme rovnici
$$10\,(t_1 - t) + (t_1 - t) = 5\,(t - t_2)\,,$$
neboli
$$11\,(t_1 - t) = 5\,(t - t_2)\,.$$
Odtud vyjádříme
$$t = \frac{11t_1 + 5t_2}{16} = \frac{11 \cdot 50\,^\circ\mathrm{C} + 5 \cdot 30\,^\circ\mathrm{C}}{16} = 43{,}75\,^\circ\mathrm{C} \doteq 44\,^\circ\mathrm{C}.$$ **5 bodů**

b) Po přelití kapaliny o celkové hmotnosti $m_1 + m_1/2 = 3m_1/2$ z první do třetí nádoby o hmotnosti $m_1/2$ se třetí nádoba o měrné tepelné kapacitě $c/5$ zahřeje na teplotu t_4. Podle kalorimetrické rovnice platí
$$\frac{3m_1}{2} c\,(t - t_4) = \frac{m_1}{2}\frac{c}{5}\,(t_4 - t_3)\,.$$
Po zkrácení výrazem $m_1 c$ a vynásobení 10 získáme rovnici
$$15\,(t - t_4) = t_4 - t_3,$$
$$t_4 = \frac{15t + t_3}{16} = \frac{15 \cdot 43{,}75\,^\circ\mathrm{C} + 20\,^\circ\mathrm{C}}{16} \doteq 42{,}266\,^\circ\mathrm{C} \doteq 42\,^\circ\mathrm{C}.$$ **5 bodů**

Poznámka: Doporučujeme uznat za správný i výsledek, kdy řešitelé dosadí z části a) zaokrouhlený výsledek $t = 44\,^\circ\mathrm{C}$, potom vychází
$$t_4 = \frac{15t + t_3}{16} = \frac{15 \cdot 44\,^\circ\mathrm{C} + 20\,^\circ\mathrm{C}}{16} \doteq 42{,}5\,^\circ\mathrm{C} \doteq 43\,^\circ\mathrm{C}.$$

3.7 Elektrické jevy a obvody

FO54E2-4: Spotřebiče v domácnosti Ivo Volf, 73,4 %

V domácnosti jsou paralelně (vedle sebe) zapojeny tyto spotřebiče s následujícími údaji: rychlovarná konvice 2 000 W/230 V, mikrovlnná trouba 1 200 W/230 V, žárovka 60 W/230 V a druhá žárovka 40 W/230 V.

a) Jaký proud prochází jednotlivými spotřebiči v domácnosti při jejich zapnutí, je-li síťové napětí 230 V? Není přetížen šestnáctiampérový jistič, jsou-li zapojeny všechny čtyři spotřebiče současně?

b) Jaký je odpor jednotlivých spotřebičů v domácnosti při síťovém napětí 230 V?

c) Jaký proud bude procházet jednotlivými spotřebiči, jestliže síťové napětí se zvětší na 235 V (přepětí v síti), ale odpor jednotlivých spotřebičů zůstane stejný?

d) Jak se změní proud protékající daným jističem, jestliže k uvedeným spotřebičům zapojíme ještě paralelně pátý spotřebič (toustovač 900 W/230 V) a všechny spotřebiče budou současně zapnuty při síťovém napětí 230 V?

Řešení:

a) Příkon spotřebiče $P_0 = UI$, z toho $I = P_0/U$ a pro jednotlivé spotřebiče vychází:
Konvice $I_1 = 8{,}7\,\mathrm{A}$, trouba $I_2 = 5{,}2\,\mathrm{A}$, žárovka $I_3 = 0{,}26\,\mathrm{A}$, druhá žárovka $I_4 = 0{,}17\,\mathrm{A}$.
Proud procházející jističem je dán součtem jednotlivých proudů, $I = 14{,}3\,\mathrm{A} \doteq 14\,\mathrm{A}$.
Jistič není přetížen. **2 body**

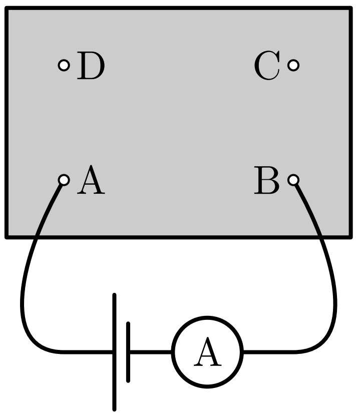
b) Ohmův zákon $U = RI$, z toho $I = U/R$, příkon spotřebiče poté $P_0 = U^2/R$, z toho odpor $R = U^2/P_0$. Pro jednotlivé spotřebiče vychází:
Konvice $R_1 = 26{,}5\,\Omega \doteq 27\,\Omega$, trouba $R_2 = 44{,}1\,\Omega \doteq 44\,\Omega$, žárovka $R_3 = 881 \doteq 880\,\Omega\Omega$, druhá žárovka $R_4 = 1\,322\,\Omega \doteq 1\,300\,\Omega$. **3 body**

c) Z Ohmova zákona $U = RI$, $I = U/R$:
Konvice $I_1' = 8{,}87\,\mathrm{A} \doteq 8{,}9\,\mathrm{A}$, trouba $I_2' = 5{,}33\,\mathrm{A} \doteq 5{,}3\,\mathrm{A}$, žárovka $I_3' = 0{,}27\,\mathrm{A}$, druhá žárovka $I_4' = 0{,}18\,\mathrm{A}$.
Proud procházející jističem je dán součtem jednotlivých proudů, $I' = 14{,}7\,\mathrm{A} \doteq 15\,\mathrm{A}$.
Jistič není přetížen. **2 body**

d) Příkon spotřebiče $P_0 = UI$, z toho $I = P_0/U$ a pro jednotlivé spotřebiče při napětí 230 V vychází:
Konvice $I_1'' = 8{,}7\,\mathrm{A}$, trouba $I_2'' = 5{,}2\,\mathrm{A}$, žárovka $I_3'' = 0{,}26\,\mathrm{A}$, druhá žárovka $I_4'' = 0{,}17\,\mathrm{A}$, toustovač $I_5'' = 3{,}9\,\mathrm{A}$.
Proud procházející jističem je dán součtem jednotlivých proudů, $I'' = 18{,}2\,\mathrm{A} \doteq 18\,\mathrm{A}$.
Jistič je přetížen a proto přeruší elektrický obvod a proud nebude procházet.
3 body

FO60E2-3: Destička se zdířkami Marta Chytilová, 54,7 %

V dřevěné destičce jsou upevněny čtyři kovové zdířky A, B, C, D. Na spodní straně destičky, kterou nevidíme, je jedna dvojice zdířek propojena rezistorem o odporu R_1 a jedna dvojice rezistorem o odporu R_2 (žádné jiné propojení zdířek, např. spojení vodivým drátem, na druhé straně destičky není). Když připojíme baterii o napětí $U = 4{,}5\,\mathrm{V}$ a ampérmetr ke zdířkám A, B, na ampérmetru naměříme proud $I_{\mathrm{AB}} = 300\,\mathrm{mA}$ (obr. 3.36). Připojíme-li stejným způsobem baterii a ampérmetr ke zdířkám A, C, naměříme proud $I_{\mathrm{AC}} = 150\,\mathrm{mA}$. Pokud baterii a ampérmetr připojíme ke zdířkám A, D nebo C, D, ampérmetrem proud neprochází.

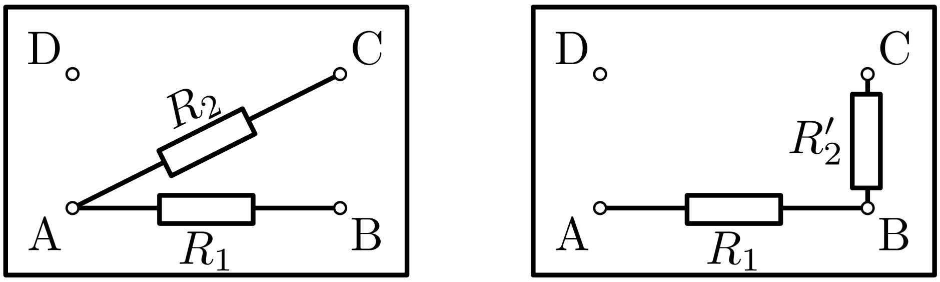


Obrázek 3.36: Připojení ke zdířkám A a B

a) Zakreslete všechna možná propojení zdířek rezistory R_1 a R_2 na spodní straně destičky. Kolik existuje řešení?
b) Ve všech možných případech určete odpory R_1 a R_2 rezistorů.
c) Jaký proud bychom naměřili při připojení baterie a ampérmetru ke zdířkám B a C? Uvažujte všechna možná propojení zdířek.

Řešení:

a) Úloha má dvě řešení zakreslená na obr. 3.37a,b.
4 body



a) b)

Obrázek 3.37: Destička se zdířkami – možná propojení zdířek rezistory

b) V případě na obr. 3.37a dostáváme

$$R_1 = \frac{U}{I_{\mathrm{AB}}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{0{,}300\,\mathrm{A}} = 15\,\Omega,$$
$$R_2 = \frac{U}{I_{\mathrm{AC}}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{0{,}150\,\mathrm{A}} = 30\,\Omega.$$

V případě na obr. 3.37b vychází

2 body

$$R_1 = \frac{U}{I_{\mathrm{AB}}} = 15\,\Omega,$$
$$R_1 + R_2' = \frac{U}{I_{\mathrm{AC}}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{0{,}150\,\mathrm{A}} = 30\,\Omega = R_3,$$
$$R_2' = R_3 - R_1 = 30\,\Omega - 15\,\Omega = 15\,\Omega.$$

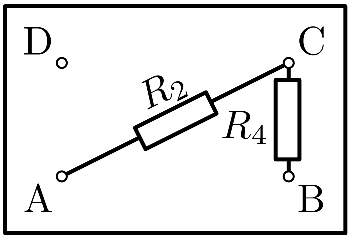
2 body

c) V případě podle obr. 3.37a jsou mezi zdířkami B a C rezistory zapojené za sebou

$$I_{\mathrm{BC}} = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{30\,\Omega + 15\,\Omega} = 0{,}10\,\mathrm{A},$$

v případě podle obr. 3.37b vychází

$$I'_{\mathrm{BC}} = \frac{U}{R_2'} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{15\,\Omega} = 0{,}30\,\mathrm{A}.$$



Obrázek 3.38: Další uspořádání

2 body

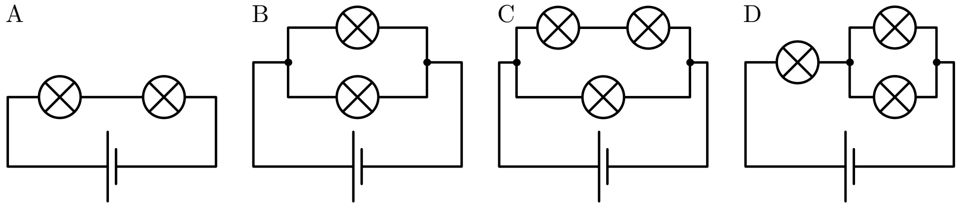
Poznámka: Někteří řešitelé mohou zkusit i propojení na obr. 3.38. Při tomto uspořádání však není možné docílit toho, aby odpor mezi body A a C byl $R_2 = 30\,\Omega$ a mezi body A a B pouze $R_1 = 15\,\Omega$. Za nápad, případně zdůvodnění, že při takovém zapojení nelze odpory nalézt, lze také přidělit 1–2 body (pokud už řešitel nezískal plných 10 bodů za ostatní části úlohy).

FO61E2-4: Žárovky a zdroje napětí Josef Jírů, 53,0 %

Každá ze tří žárovek má provozní hodnoty napětí $U = 6\,\mathrm{V}$ a proudu $I = 150\,\mathrm{mA}$ (tj. při připojení k napětí 6 V protéká žárovkou proud 150 mA). Dále máme čtyři zdroje stejnosměrného napětí s hodnotami napětí $U_1 = 3\,\mathrm{V}$, $U_2 = 6\,\mathrm{V}$, $U_3 = 9\,\mathrm{V}$ a $U_4 = 12\,\mathrm{V}$.

a) Vypočtěte odpor a elektrický příkon jedné žárovky po připojení ke zdroji o napětí $U_2 = 6\,\mathrm{V}$.
b) Popište, co se stane, připojíme-li k jedné žárovce postupně zbývající zdroje o napětí $U_1 = 3\,\mathrm{V}$, $U_3 = 9\,\mathrm{V}$ a $U_4 = 12\,\mathrm{V}$.
c) Je možné k níže uvedeným čtyřem způsobům zapojení žárovek A, B, C, D připojit některý ze zdrojů tak, aby *všechny* žárovky v příslušném zapojení svítily normálně

(tj. splňovaly provozní hodnoty)? Pokud ano, uveďte napětí zdroje k příslušnému schématu.



d) Lze ke zdroji o napětí $U_3 = 9\,\mathrm{V}$ připojit žárovku a nějaký rezistor tak, aby svítila normálně? Pokud ano, nakreslete schéma zapojení a vypočtěte odpor použitého rezistoru.

Řešení:

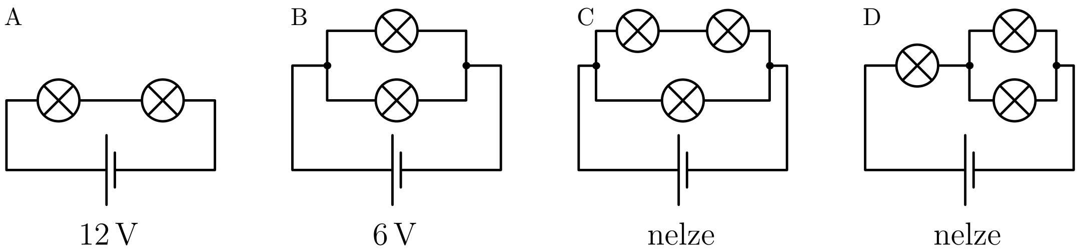
a) Odpor jedné žárovky vychází

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6\,\mathrm{V}}{0{,}150\,\mathrm{A}} = 40\,\Omega$$

a její příkon $$P = UI = 6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}150\,\mathrm{A} = 0{,}90\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

b) Při použití zdroje o napětí $U_1 = 3\,\mathrm{V}$ bude žárovka svítit málo, při postupném použití zdrojů $U_3 = 9\,\mathrm{V}$ a $U_4 = 12\,\mathrm{V}$ bude žárovka přetížena a bude svítit velmi jasně. **1 bod**
Poznámka: Doporučujeme uznat i odpověď, že při připojení k vyššímu napětí se žárovka přepálí, i když se to stát nemusí; některé žárovky s provozním napětím okolo 6 V „vydrží“ po nějakou dobu i napětí přes 12 V.

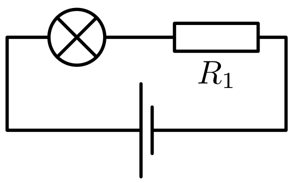
c) Podmínku lze splnit jen při zapojení A a B.



4 body

Poznámka: Zadání nepožaduje zdůvodnění a pokud chybí, není nutné kvůli tomu strhávat body, ve stručnosti může být např. následující. V případě sériového zapojení A se napětí zdroje $U_4 = 12\,\mathrm{V}$ díky stejnému odporu žárovek rozdělí na dvě stejně velká napětí 6 V. U paralelního zapojení B bude na obou žárovkách stejné napětí, zdroj by mě mít proto napětí 6 V. U zapojení C nelze docílit, aby na každé žárovce bylo napětí 6 V – pokud zvolíme zdroj o napětí $U_2 = 6\,\mathrm{V}$, bude na každé z žárovek v horní větvi poloviční napětí 3 V, pokud zvolíme zdroj o napětí $U_4 = 12\,\mathrm{V}$, bude toto napětí na žárovce ve spodní větvi. V případě D pak nemůže být stejné napětí na žárovce v nerozvětvené části obvodu a na žárovkách v rozvětvené části – výsledný odpor dvou paralelně zapojených žárovek bude vždy menší (poloviční) než jedné žárovky.

d) Aby na žárovce nebylo celé napětí $U_3 = 9\,\mathrm{V}$, je nutné rezistor připojit k žárovce sériově (možné zapojení je na obrázku, na pořadí žárovky a rezistoru nezáleží). Žárovkou musí protékat předepsaný proud $I = 0{,}15\,\mathrm{A}$. Podle Ohmova zákona pak bude celkový odpor zapojení



$$R_c = \frac{U_3}{I} = \frac{9\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 60\,\Omega.$$

Odpor rezistoru musí být

$$R_1 = R_c - R = 60\,\Omega - 40\,\Omega = 20\,\Omega. \qquad \textbf{3 body}$$

Poznámka: Hodnotu odporu lze určit i z úvahy, že na žárovce má být napětí $U = 6\,\mathrm{V}$, na rezistoru pak $U_3 - U = 9\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V} = 3\,\mathrm{V} = U_1$, při sériovém zapojení oběma součástkami prochází proud $I = 0{,}15\,\mathrm{A}$. Odpor R_1 pak získáme podělením

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{3\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 20\,\Omega.$$

FO53E2-4: Zapojení rezistorů Ivo Volf, 45,3 %

Při laboratorní práci z fyziky měli žáci připojovat ke zdroji stejnosměrného proudu o stálém napětí 12 V postupně tři rezistory, každý o odporu 120 Ω. Katka a Michal provedli postupně všechny možnosti – připojili nejprve jeden, potom dva a nakonec všechny tři rezistory, samozřejmě různými způsoby.

a) Nakresli všechna možná připojení rezistorů ke zdroji.
b) Pro každé zapojení urči výsledný odpor sítě, tedy jaký by musel mít odpor rezistor, kterým bychom dané zapojení mohli nahradit.
c) V kterém zapojení bude procházet přívodními vodiči od zdroje největší a v kterém nejmenší proud? Odhad doplňte příslušným zdůvodněním a výpočtem.
d) Na kterém rezistoru a v kterém zapojení bude největší napětí?
e) Který rezistor a v kterém zapojení bude mít největší výkon?

Řešení:

a) Možná zapojení obvodu jsou na obrázku 3.39.

2 body

b) Výsledné odpory sítě pro zapojení A-G:

$$R_A = R = 120\,\Omega, \qquad R_B = 2R = 240\,\Omega, \qquad R_C = 3R = 360\,\Omega,$$
$$R_D = R/2 = 60\,\Omega, \qquad R_E = R/3 = 40\,\Omega, \qquad R_F = R + R/2 = 180\,\Omega,$$
$$R_G = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = 80\,\Omega.$$

3 body

c) Maximální proud bude procházet zapojením F, elektrický proud je zde roven součtu proudů v jednotlivých větvích zapojení:

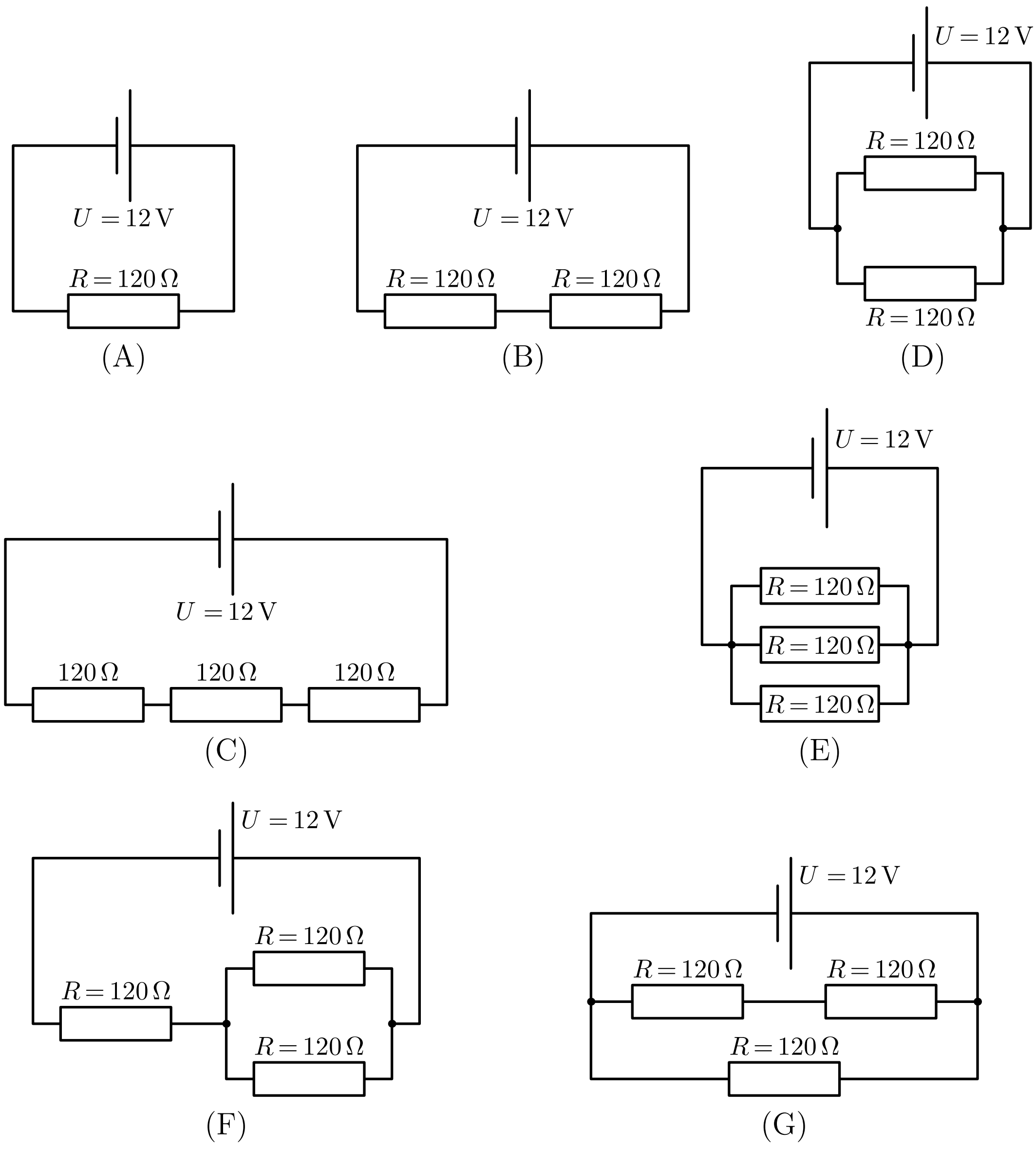
$$I_E = \frac{U}{R_E} = \frac{12}{40}\,\mathrm{A} = 0{,}3\,\mathrm{A}.$$

Minimální proud bude procházet zapojením C, protože se zde elektrický proud nerozděluje:

$$I_C = \frac{U}{R_C} = \frac{12}{360}\,\mathrm{A} \doteq 33{,}3\,\mathrm{mA}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Největší napětí na rezistoru bude v zapojení A. V zapojení D a E bude největší napětí na všech rezistorech. V zapojení G bude největší napětí na rezistoru, který není zapojen sériově k jinému rezistoru. **1 bod**

e) Největší výkon bude mít rezistor v zapojení A. V zapojení D a E bude největší výkon na všech rezistorech.V zapojení G bude největší výkon na rezistoru, který není zapojen sériově k jinému rezistoru. **2 body**



Obrázek 3.39: Možná zapojení rezistorů v úloze FO53E2-4

FO60E2-4: Elektromobil Jan Thomas, 44,9 %

Při jízdě stálou rychlostí $v_1 = 72\,\mathrm{km/h}$ působí proti pohybu elektromobilu celková odporová síla $F_\mathrm{o} = 0{,}75\,\mathrm{kN}$.

a) Jaký je okamžitý výkon P motoru elektromobilu?

b) Akumulátory elektromobilu jsou nabíjeny při napětí $U = 230\,\mathrm{V}$ proudem $I = 10\,\mathrm{A}$. Nabíjení trvá přibližně $t = 5$ hodin. Určete celkovou energii, kterou uchovává plně nabitý akumulátor. Předpokládejte účinnost nabíjení 100 %.

c) Akumulátor elektromobilu je složen z více článků. Každý článek při napětí $U_1 = 12\,\mathrm{V}$ uchovává náboj $Q = 137\,\mathrm{Ah}$ (to znamená, že článek by teoreticky mohl dodávat proud 1 A po dobu 137 hodin). Kolik článků má akumulátor elektromobilu?

d) Do jaké maximální vzdálenosti dojede elektromobil, je-li při průměrné rychlosti $v_2 = 50\,\mathrm{km/h}$ odporová síla $F'_\mathrm{o} = 0{,}33\,\mathrm{kN}$ a účinnost motoru $\eta = 80\,\%$?

Řešení:

a) Výkon motoru P se při pohybu konstantní rychlostí spotřebovává na překonání odporové síly. Při rychlosti $v_1 = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ platí

$$P = F_\mathrm{o} v = 750\,\mathrm{N} \cdot 20\,\mathrm{m/s} = 15\,000\,\mathrm{W} = 15\,\mathrm{kW}.$$ **2 body**

b) Celková energie dodaná při nabíjení za čas $t = 5\,\mathrm{h} = 18\,000\,\mathrm{s}$ vychází

$$E = UIt = 230\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{A} \cdot 18\,000\,\mathrm{s} = 41\,400\,000\,\mathrm{J} \doteq 41\,\mathrm{MJ}.$$ **2 body**

c) Jeden nabitý článek akumulátoru může (při 100% účinnosti) dodat elektrickou práci

$$W_1 = U_1 Q = 12\,\mathrm{V} \cdot 137\,\mathrm{Ah} = 1\,644\,\mathrm{Wh} = 1\,644\,\mathrm{W} \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 5\,918\,400\,\mathrm{J}.$$

Pro počet článků akumulátoru tak dostáváme

$$n = \frac{E}{W_1} = \frac{41\,400\,000\,\mathrm{J}}{5\,918\,400\,\mathrm{J}} \doteq 6{,}995\,1 \doteq 7.$$ **4 body**

d) Při účinnosti $\eta = 80\,\%$ se z celkové energie E na konání práce využije

$$W = \eta E = 0{,}8 \cdot 41\,400\,000\,\mathrm{J} = 33\,120\,000\,\mathrm{J}.$$

Přitom elektromobil dojede do vzdálenosti s, pro kterou platí $W = F'_\mathrm{o} s$; odtud vychází

$$s = \frac{W}{F'_\mathrm{o}} = \frac{33\,120\,000\,\mathrm{J}}{330\,\mathrm{N}} \doteq 100\,360\,\mathrm{m} \doteq 100\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

FO62E2-4: Zapojení LED diody Lukáš Richterek, 42,0 %

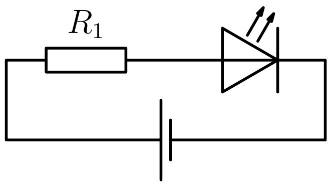
Tereza dostala ve fyzikálním kroužku za úkol zapojit červenou LED diodu. Měla k dispozici tužkovou baterii AA s napětím $U_1 = 1{,}5\,\mathrm{V}$, plochou baterii s napětím $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ a baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$. Na internetu zjistila, že na svítící diodě by mělo být napětí $U_\mathrm{D} = 1{,}8\,\mathrm{V}$ a měl by jí protékat proud $I_\mathrm{D} = 20\,\mathrm{mA}$.

a) Diodu má k baterii připojit přes rezistor podle obr. 3.40. Jaký odpor R_1 by měl mít rezistor pro připojení k bateriím U_1, U_2 nebo U_3? Podaří se jí diodu ve všech případech rozsvítit?

b) Jaký odpor R_2 by měl mít rezistor pro připojení k bateriím U_1, U_2 nebo U_3, pokud by zapojila dvě diody za sebou (obr. 3.41)?

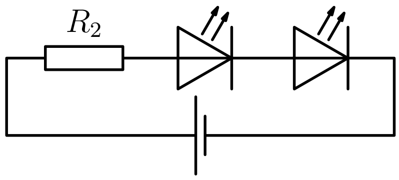
c) Jaký odpor R_3 by měl mít rezistor pro připojení k bateriím U_1, U_2 nebo U_3, pokud by zapojila dvě diody vedle sebe (obr. 3.42)?

d) Tereza má k dispozici rezistory s maximálním povoleným výkonem $P = 1{,}0\,\mathrm{W}$. Může je použít v zapojeních z části a)? Odpověď zdůvodněte vypočítanými hodnotami výkonu na rezistoru R_1 pro baterie s elektromotorickým napětím U_2 nebo U_3.



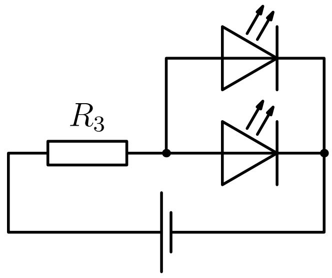
U_1, U_2, nebo U_3

Obr. 3.40



U_1, U_2, nebo U_3

Obr. 3.41



U_1, U_2, nebo U_3

Obr. 3.42

Řešení:

a) Pokud diodu připojíme na malé napětí, nerozsvítí se vůbec, proto pro připojení k baterii s napětím $U_1 < U_\mathrm{D}$ svítit nebude ani v jednom zapojení. **1 bod**

Jestliže Tereza použije plochou baterii s $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ a na diodě má být napětí $U_\mathrm{D} = 1{,}8\,\mathrm{V}$, na rezistoru bude napětí $U_\mathrm{R} = U_2 - U_\mathrm{D} = 4{,}5\,\mathrm{V} - 1{,}8\,\mathrm{V} = 2{,}7\,\mathrm{V}$ a poteče jím stejný proud jako diodou, tj. $I_\mathrm{R} = I_\mathrm{D} = 20\,\mathrm{mA} = 0{,}020\,\mathrm{A}$. Pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{2{,}7\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 135\,\Omega.$$

Podobně pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$ na rezistoru má být napětí $U_\mathrm{R} = U_3 - U_\mathrm{D} = 9{,}0\,\mathrm{V} - 1{,}8\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}$, pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{7{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 360\,\Omega.$$ **3 body**

b) Při zapojení dvou diod za sebou má být na každé napětí $U_\mathrm{D} = 1{,}8\,\mathrm{V}$, na diodách celkem $2U_\mathrm{D} = 3{,}6\,\mathrm{V}$. Podobně jako v první části při zapojení s plochou baterií $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ na rezistoru bude napětí $U_\mathrm{R} = U_2 - 2U_\mathrm{D} = 4{,}5\,\mathrm{V} - 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{V} = 0{,}90\,\mathrm{V}$ a poteče jím stejný proud jako diodami, tj. $I_\mathrm{R} = I_\mathrm{D} = 20\,\mathrm{mA} = 0{,}020\,\mathrm{A}$ a pro jeho odpor vychází

$$R_2 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{0{,}9\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 45\,\Omega.$$

Pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$ pak na rezistoru má být napětí $U_\mathrm{R} = U_3 - 2U_\mathrm{D} = 9{,}0\,\mathrm{V} - 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{V} = 5{,}4\,\mathrm{V}$, pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_2 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{5{,}4\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 270\,\Omega.$$ **2 body**

c) Nyní budou na rezistoru stejná napětí jako v části a), ale rezistorem poteče proud odpovídající součtu proudů oběma diodami, tj. $I_\mathrm{R} = 2I_\mathrm{D} = 0{,}040\,\mathrm{A}$. Pro odpor rezistoru pak dostáváme buď

$$R_3 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{2{,}7\,\mathrm{V}}{0{,}040\,\mathrm{A}} = 67{,}5\,\Omega \doteq 68\,\Omega$$

pro baterii s napětím $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ nebo

$$R_3 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{7{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}040\,\mathrm{A}} = 180\,\Omega$$

pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$. **2 body**

d) V části a) teče rezistorem proud $I_{\mathrm{D}} = 0{,}020\,\mathrm{A}$, tepelný výkon uvolněný na rezistoru pak bude buď $P = R_1 I_{\mathrm{D}}^2$ (nebo také $P = U_{\mathrm{R}}^2/R_1$ či $P = U_{\mathrm{R}} I_{\mathrm{D}}$). Pro vypočítané hodnoty vychází

$$P = R_1 I_{\mathrm{D}}^2 = 135\,\Omega \cdot (0{,}020\,\mathrm{A})^2 = 0{,}054\,\mathrm{W}$$

a

$$P = R_1 I_{\mathrm{D}}^2 = 360\,\Omega \cdot (0{,}020\,\mathrm{A})^2 = 0{,}144\,\mathrm{W} \doteq 0{,}14\,\mathrm{W}.$$

Výkon 1 W není překročen ani v jednom případě. **2 body**

FO57E2-4: Žárovka ze staré svítilny Josef Jírů, 39,1 %

Martin našel o prázdninách u dědečka na chalupě starou rozbitou svítilnu. Vymontoval z ní žárovku s jmenovitými (předepsanými) hodnotami 6 V a 0,15 A a půjčil si již používanou baterii o napětí 8,4 V.

a) Jaký rezistor musí Martin sériově připojit k žárovce, aby svítila na předepsaný výkon?

b) Kolik procent energie dodávané baterií se spotřebovává na tomto rezistoru?

c) Za kolik hodin by žárovka spotřebovala elektrickou energii 1 kWh, kdyby ji Martin připojil k elektrické síti přes transformátor s výstupním napětím 6 V?

d) Jak se v původním zapojení změní jas žárovky, připojí-li Martin k obvodu další rezistor

i) sériově k připojenému rezistoru;
ii) paralelně k připojenému rezistoru;
iii) paralelně k žárovce;
iv) paralelně k soustavě připojeného rezistoru a žárovky.

Všechny odpovědi zdůvodněte a doprovoďte náčrtkem zapojení.

Řešení:

a) Napětí na připojeném rezistoru musí být $U_1 = 8{,}4\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V} = 2{,}4\,\mathrm{V}$. Hledaný odpor rezistoru je

$$R = \frac{2{,}4\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 16\,\Omega.$$

2 body

b) Příkon dodávaný zdrojem do obvodu $P_0 = 8{,}4\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 1{,}26\,\mathrm{W}$, příkon přijímaný rezistorem $P_{\mathrm{R}} = 2{,}4\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 0{,}36\,\mathrm{W}$. Rezistor spotřebovává část

$$k_{\mathrm{R}} = \frac{P_{\mathrm{R}}}{P_0} = \frac{0{,}36\,\mathrm{W}}{1{,}26\,\mathrm{W}} \doteq 0{,}29 = 29\,\%$$

energie dodávané zdrojem. **2 body**

c) Žárovka má příkon $P_{\check{\mathrm{z}}} = 6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 0{,}9\,\mathrm{W}$. Energii $1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$ spotřebuje za dobu

$$t = \frac{3\,600\,000\,\mathrm{J}}{0{,}9\,\mathrm{W}} = 4\,000\,000\,\mathrm{s} \doteq 1\,100\,\mathrm{h}.$$ **2 body**

d) i) Zvětší se odpor obvodu, na žárovku připadne menší napětí, bude svítit méně.
ii) Zmenší se odpor obvodu, na žárovku připadne větší napětí, bude svítit více (podle skutečného napětí na žárovce a doby zapojení může dojít k přepálení vlákna).
iii) Zmenší se odpor mezi uzly žárovky, zmenší se napětí mezi nimi, bude svítit méně.

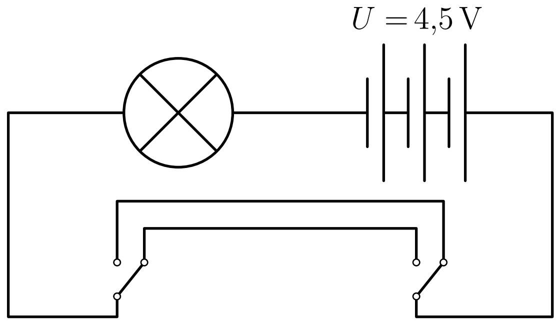
iv) Na původní větvi se napětí nezmění, žárovka bude svítit stejně.

4 body

FO55E2-4 Ivo Volf, 25,2 %

Na kroužku elektroniky dostal Honza za úkol zapojit obvod s žárovičkou tak, aby při zahřátí žárovičky na provozní teplotu jí procházel proud 300 mA. K dispozici měl žárovičku s údaji 2,5 V/300 mA, jejíž odpor při provozní teplotě je přibližně 8 Ω, plochou baterii o napětí 4,5 V a zanedbatelném odporu, rezistor o odporu 1 Ω a druhý rezistor o stejném odporu.

a) Nakresli schéma všech možných způsobů zapojení žárovičky.
b) Které zapojení bude nejvíce splňovat zadaný úkol? Jaký proud bude skutečně žárovičkou procházet a jaké napětí bude na žárovičce?
c) Jaký bude skutečný příkon žárovičky ve vybraném zapojení?
d) V dalším úkolu dostal Honza schéma zapojení žárovičky na obr. 3.43. Kde se ve skutečnosti toto zapojení dá využít?



Obrázek 3.43: Zapojení žárovičky v úloze FO55E2-4d)

Řešení:

a) Možná zapojení obvodu s žárovičkou jsou na obr. 3.44 **3 body**
b) Zadání odpovídá nejvíce zapojení B. Celkový elektrický odpor zapojení je:

$$R = \left(\frac{1 \cdot 8}{1+8} + 1\right)\ \Omega \doteq 2\,\Omega.$$

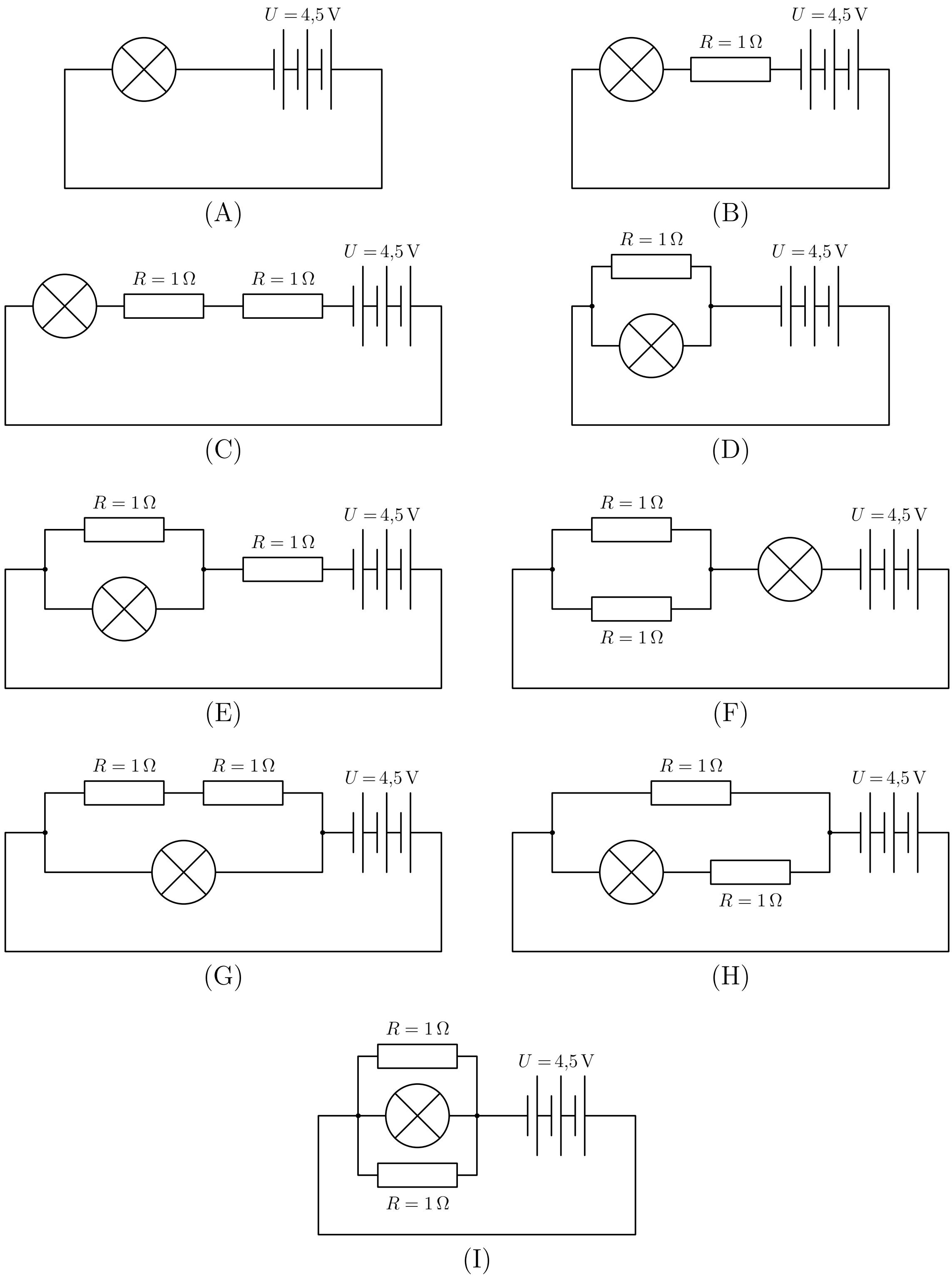
Napětí na žárovičce je:

$$U_1 = \left(4{,}5 - 1 \cdot \frac{4{,}5}{\dfrac{1 \cdot 8}{1+8} + 1}\right)\ \mathrm{V} \doteq 2\,\mathrm{V}.$$

Elektrický proud, který prochází žárovičkou je:

$$I_1 = \left(\frac{4{,}5 - 1 \cdot \dfrac{4{,}5}{\dfrac{1 \cdot 8}{1+8} + 1}}{8}\right)\ \mathrm{A} \doteq 0{,}3\,\mathrm{A} \doteq 300\,\mathrm{mA}.$$

2 body



Obrázek 3.44: Zapojení žárovičky v úloze FO55E2-4

c) Skutečný příkon žárovičky bude:

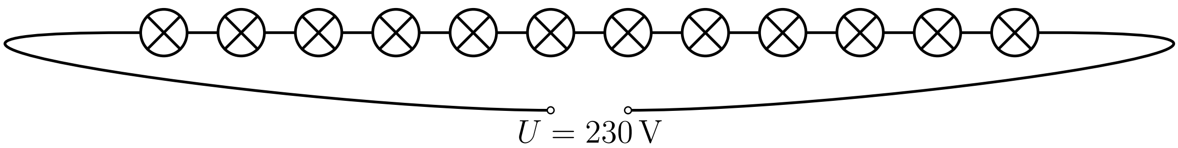
$$P = U_1 I_1 = \left(\frac{4{,}5 - 1 \cdot \dfrac{4{,}5}{\dfrac{1 \cdot 8}{1+8} + 1}}{8} \right) \cdot \left(4{,}5 - 1 \cdot \frac{4{,}5}{\dfrac{1 \cdot 8}{1+8} + 1} \right) \mathrm{W} \doteq 0{,}6\,\mathrm{W},$$

což znamená , že žárovička bude svítit slaběji. **3 body**

d) Zapojení je možné využít například k osvětlení schodiště, kde chceme mít vypínače na začátku i na konci schodiště. **2 body**

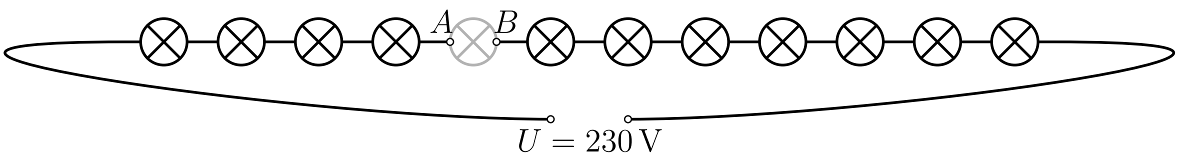
FO58E2-3: Přepálená žárovička Lukáš Richterek, 24,4 %

Osvětlení na vánoční stromek se skládá z dvanácti žároviček se jmenovitými hodnotami $U_\mathrm{j} = 20\,\mathrm{V}$ a $P_\mathrm{j} = 3\,\mathrm{W}$ zapojených sériově za sebou. Soustavu připojíme k síťovému napětí $U = 230\,\mathrm{V}$ (obr. 3.45).



Obrázek 3.45: Osvětlení na vánoční stromek

a) Jaké je napětí U_1 na jedné žárovičce po připojení osvětlení k síti a jaký proud I žárovičkami prochází?
b) Po nějaké době se jedna ze žároviček přepálila a museli jsme ji vyšroubovat. Jaké napětí potom naměříme v patici vyšroubované žárovky, tj. mezi body A a B (obr. 3.46)?



Obrázek 3.46: Osvětlení na vánoční stromek bez jedné vyšroubované žárovky

c) Jaký proud by procházel žárovičkami, pokud bychom přerušený obvod mezi body A a B spojili dotykem prstu (nikdy to nedělejte!), jehož odpor můžeme odhadnout na hodnotu $R_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{k\Omega}$? Jaké by bylo na prstu mezi body A a B napětí?

Odpor vodičů spojujících žárovičky je zanedbatelný.

Řešení:

a) Napětí se rozdělí rovnoměrně mezi $n = 12$ žároviček. Na jednu žárovičku připadá napětí

$$U_1 = \frac{U}{n} = \frac{230\,\mathrm{V}}{12} = 19{,}167\,\mathrm{V} \doteq 19\,\mathrm{V}.$$ **1 bod**

K určení proudu určíme ze zadaných hodnot odpor R_1 jedné žárovičky z jmenovitého napětí U_j a výkonu P_j podle vztahu

$$P_\mathrm{j} = \frac{U_\mathrm{j}^2}{R_1}, \qquad R_1 = \frac{U_\mathrm{j}^2}{P_\mathrm{j}} = \frac{(20\,\mathrm{V})^2}{3\,\mathrm{W}} = \frac{400}{3}\,\Omega \doteq 130\,\Omega.$$

Odpor všech žároviček zapojených za sebou pak bude

$$R = nR_1 = 12 \cdot \frac{400}{3}\,\Omega = 1\,600\,\Omega.$$

Žárovičkami prochází proud

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230\,\mathrm{V}}{1\,600\,\Omega} = 0{,}143\,75\,\mathrm{A} \doteq 140\,\mathrm{mA}.$$ **4 body**

b) Na patě vyšroubované žárovičky bude síťové napětí 230 V. **1 bod**

c) V obvodu zbude $n' = 11$ žároviček. Jestliže bychom mezi body A a B vložili prst (nikdy to nedělejte!) o odporu $R_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{k}\Omega = 2\,000\,\Omega$, bude celkový odpor

$$R' = n'R_1 + R_\mathrm{p} = 11 \cdot \frac{400}{3}\,\Omega + 2\,000\,\Omega = \frac{10400}{3}\,\Omega \doteq 3\,500\,\Omega$$

a pro proud protékající žárovičkami dostáváme

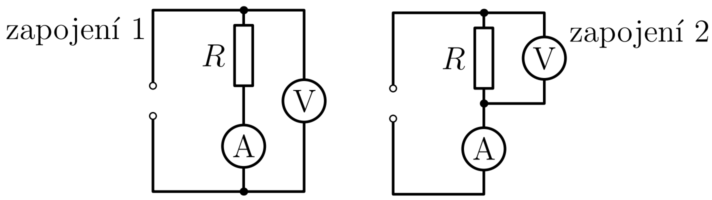
$$I' = \frac{U}{R'} = \frac{230\,\mathrm{V}}{\frac{10400}{3}\,\Omega} = 0{,}066\,346\,\mathrm{A} \doteq 66\,\mathrm{mA}.$$

Napětí mezi body A a B pak vychází

$$U_{AB} = R_\mathrm{p}I' = 2\,000\,\Omega \cdot 0{,}066\,346\,\mathrm{A} = 132{,}69\,\mathrm{V} \doteq 130\,\mathrm{V}.$$ **4 body**

FO59E2-3: Měření odporu Jan Thomas, 22,9 %

K přímému měření odporu můžeme použít zapojení 1 nebo zapojení 2 (obr. 3.47), napětí zdroje je stálé. V jednom ze zapojení byly naměřeny hodnoty 208 V a 220 mA, ve druhém zapojení hodnoty 230 V a 210 mA.



Obrázek 3.47: Zapojení pro měření odporu

a) Která dvojice hodnot napětí a proudu byla naměřena v zapojení 1 a která dvojice v zapojení 2? Odpověď zdůvodněte. Jaké je napětí zdroje?

b) Jaký je skutečný odpor R rezistoru, jaký je odpor ampérmetru R_A a jaký je odpor voltmetru R_V?

c) Které ze zapojení vede k přesnějšímu výsledku, pokud bychom odpor R počítali přímo z naměřených hodnot proudu a napětí?

Řešení:

a) Protože v zapojení 1 ukazuje voltmetr součet napětí na ampérmetru a rezistoru, musí k zapojení 1 patřit dvojice hodnot s vyšším napětím, tedy druhá dvojice 230 V a 210 mA. Napětí v druhé dvojici hodnot (v zapojení 1) je také napětím zdroje, napětí zdroje je tedy 230 V. **2 body**

b) Označme hodnoty napětí a proudu podle přiřazeného zapojení $U_1 = 230\,\mathrm{V}$, $I_1 = 210\,\mathrm{mA} = 0{,}21\,\mathrm{A}$, $U_2 = 208\,\mathrm{V}$ a $I_2 = 220\,\mathrm{mA} = 0{,}22\,\mathrm{A}$. V zapojení 2 protéká ampérmetrem proud I_2, pro odpor ampérmetru platí

$$R_\mathrm{A} = \frac{U_1 - U_2}{I_2} = \frac{230\,\mathrm{V} - 208\,\mathrm{V}}{0{,}22\,\mathrm{A}} = 100\,\Omega.$$ **2 body**

V zapojení 1 bude napětí na ampérmetru

$$U_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} I_1 = 100\,\Omega \cdot 0{,}21\,\mathrm{A} = 21\,\mathrm{V},$$

na odporu R pak $U_R = U_1 - U_\mathrm{A} = 230\,\mathrm{V} - 21\,\mathrm{V} = 209\,\mathrm{V}$ a protéká jím proud I_1. Pro odpor R tak dostáváme

$$R = \frac{U_R}{I_1} = \frac{209\,\mathrm{V}}{0{,}21\,\mathrm{A}} \doteq 995{,}24\,\Omega \doteq 995\,\Omega.$$ **2 body**

V zapojení 2 pak pro proud procházející rezistorem platí

$$I_R = \frac{U_2}{R} = \frac{U_2}{U_R} I_1 = \frac{208\,\mathrm{V}}{209\,\mathrm{V}} \cdot 0{,}21\,\mathrm{A} \doteq 0{,}209\,00\,\mathrm{A} \doteq 0{,}209\,\mathrm{A},$$

odpor voltmetru pak vychází

$$R_\mathrm{V} = \frac{U_2}{I_2 - I_R} = \frac{208\,\mathrm{V}}{0{,}22\,\mathrm{A} - 0{,}209\,\mathrm{A}} \doteq 18\,900\,\Omega.$$ **2 body**

c) V zapojení 1 vychází pro odpor rezistoru

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{230\,\mathrm{V}}{0{,}21\,\mathrm{A}} \doteq 1\,095{,}2\,\Omega \doteq 1\,100\,\Omega,$$

v zapojení 2

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{208\,\mathrm{V}}{0{,}22\,\mathrm{A}} \doteq 945{,}45\,\Omega \doteq 945\,\Omega.$$

Zapojení 2 je tedy přesnější; používá se pro rezistory s malým odporem (mnohem menším než odpor voltmetru), zatímco zapojení 1 pro rezistory s velkým odporem. **2 body**

FO56E2-2: Panel s rezistory Jan Thomas, 11,9 %

Ke třem pevným zdířkám A, B a C na panelu jsou pevně připojeny tři rezistory o stejném odporu R (obr. 3.48).

a) Jaký je odpor zapojení mezi dvěma libovolnými zdířkami?
Paralelně ke kterékoli dvojici zdířek na panelu můžeme připojit libovolný počet rezistorů o stejném odporu R. Jak musíme zapojit co nejmenší počet těchto rezistorů, aby odpor mezi zdířkami A a B byl roven:

b) $(2/5)R$,

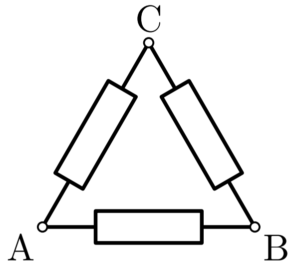
c) $(3/5)R$,

d) $(1/5)R$?

Řešení:

a) Celkový odpor zapojení odpovídá jednomu rezistoru R paralelně se dvěma za sebou, tj.:

$$R_\mathrm{AB} = R_\mathrm{AC} = R_\mathrm{BC} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R.$$ **2 body**



Obrázek 3.48: Panel rezistorů

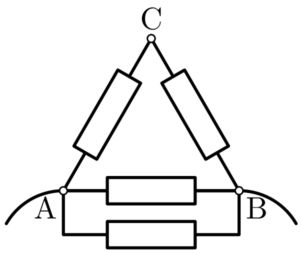
b) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl 2/5 R, musíme připojit jeden rezistor paralelně ke zdířkám A a B (obr. 3.49). Pak bude platit, že ve třech větvích budou vedle sebe odpory R, R a $2R$, takže celkový odpor vychází:

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R},$$

$$\frac{1}{R_b} = \frac{2+2+1}{2R} = \frac{5}{2R},$$

$$R_b = \frac{2}{5}R.$$

3 body



Obrázek 3.49: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $2R/5$

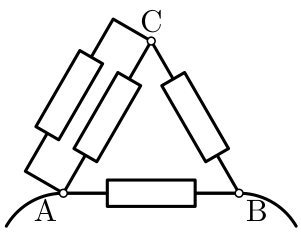
c) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl 3/5 R, musíme připojit jeden rezistor paralelně ke zdířkám A a C nebo B a C (obr. 3.50). Potom $R_{\mathrm{AB}} = R, R_{\mathrm{CB}} = R$ a $R_{\mathrm{AC}} = R/2$; celkový odpor odpovídá odporu R (větev A–B) a $R/2 + R = 3/2R$ (větev A–C–B) vedle sebe:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} = \frac{3+2}{3R} = \frac{5}{3R},$$

$$R_c = \frac{3}{5}R.$$

2 body

Poznámka: K plnému bodovému zisku stačí uvést jednu z možností.

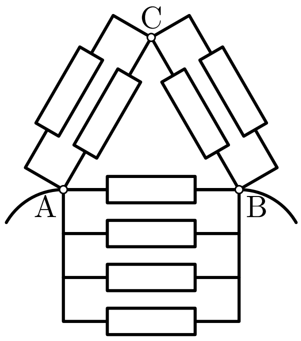


Obrázek 3.50: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $3R/5$

d) Aby celkový odpor mezi zdířkami A a B byl 1/5 R, musíme připojit ke zdířkám A a B další tři rezistory a ke zdířkám A, C a B, C vždy jeden další rezistor (obr. 3.51). Ve větvi A–C–B je pak odpor $R/2 + R/2 = R$, pro čtyři rezistory vedle sebe mezi body A–B vychází výsledný odpor $R/4$. Pro celkový odpor pak bude platit:

$$\frac{1}{R_d} = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{2}{R}} + \frac{4}{R} = \frac{1}{R} + \frac{4}{R} = \frac{5}{R},$$

$$R_d = \frac{1}{5}R.$$ **3 body**



Obrázek 3.51: Zapojení s celkovým odporem mezi zdířkami A a B rovným $R/5$

Závěr

Domnívám se, že cíle mé bakalářské práce byly dosaženy. Podařilo se mi sestavit sbírku úloh z okresních kol fyzikální olympiády kategorií E a F za posledních deset ročníků. Tematicky ji rozdělit, úlohy seřadit podle rostoucí obtížnosti a připravit, aby byla součástí většího celku úloh FO za poslední desetiletí.

Úlohy byly pečlivě zkontrolovány, doplněny, popřípadě upraveny. U některých úloh byl ponechán styl zadání a řešení použitý v daných ročnících soutěže. V úlohách se střídá rozdílné oslovení – tykání a vykání. V některých výpočtech nejsou uvedeny jednotky dílčích veličin, ale jednotka výsledná. Je možné porovnat např. úlohy FO54E2-3 a FO58E2-1. Snažil jsem se o ukázku větší rozmanitosti jak v zadáních, tak v řešeních. Chtěl jsem dát najevo, že k autorskému řešení existují i alternativní postupy a zápisy. Myslím si, že řešitelé ze základních škol jsou spíše zvyklí na zápis výpočtů jednodušším způsobem, to je bez dílčích jednotek u každé veličiny. Takto jsou zastoupeny obě možnosti a pestrost zápisu, mohou si zvolit postup, který jim osobně vyhovuje.

Sbírka zahrnující 77 úloh, byla rozčleněna do sedmi tematických kategorií, na kterých je možné pozorovat rozdílný index obtížnosti úloh P. Průměrný index obtížnosti $\overline{P}$ jak tematických kategorií, tak jednotlivých soutěžních ročníků a procentuální zastoupení velmi snadných a velmi obtížných úloh se liší. Tyto informace mohou sloužit pro zpracovatele budoucích ročníků. Je zjevné, že některé kategorie (např. Otáčivé účinky síly a Rozměry, objem, hustota) obsahují malý počet úloh a mohly by se v soutěži objevovat častěji. Ověřil jsem, že největší počet úloh byl v oblasti kinematiky – tematická kategorie Pohyb tělesa byla nejobsáhlejší, představovala 25 % sbírky. Pro budoucího zpracovatele může být přínosná analýza souboru úloh v daném ročníku, analogická k vyhodnocování testů. Může se inspirovat, jaké typové úlohy do testu zařadit, aby průměrný index obtížnost nabýval hodnot kolem $\overline{P} = 50\,\%$ a soubor úloh byl tak přiměřeně náročný. Je možné také pozorovat koeficient korelace r, který značí spíše korelaci vysokou, tudíž sady úloh v průběhu let zvýhodňují více řešitele s vyššími znalostmi, což by tak mělo být. *Pearsonův koeficient korelace* u žádné úlohy neklesl pod hodnotu $r = 0{,}40$.

Zajímavé bylo taktéž pozorovat nejobtížnější úlohy, které obsahovaly řešení kalorimetrické rovnice (FO53F2-4 a FO59F2-3), úlohy náročné na představivost při složitějším zapojování rezistorů (FO56E2-2) a úlohu na určení odporové síly/výpočty se stoupáním (FO57E2-2). Předpoklad, že největším problémem budou úlohy obsahující skládání sil a vyjadřování ze vzorců, se nepotvrdil.

Zpracování výsledkových listin do statistického souboru bylo velmi časově náročné a zdlouhavé. Nepodařilo se sestavit ucelenou statistiku ani pro Moravu a Slezsko. Bohužel jen omezený počet krajů systematicky archivuje výsledkové listiny. Myslím si, že by bylo výhodné nahrávat výsledky do odevzdávacího systému OSMO, vyvinutého v době pandemie COVID–19, každý rok. Pokud by byl zájem o další statistické zpracování listin, předejde se tímto ztrátě vysledků a velmi se usnadní sběr dat. Praktický by byl i snadný monitoring vývoje účasti v ČR a krajích. Bohužel jsem přesvědčen, že toto očekávání je naivně optimistické. Záleží především na důslednosti jednotlivců a jejich ochotě výsledkové listiny ukládat a archivovat.

Nebylo žádným překvapením, že účast v okresních kolech FO klesá. Naprosto největší propad byl zaznamenán v 62. ročníku při pandemii koronaviru a domnívám se, že bude mít vliv i na účast v budoucích ročnících. Zajímavé bylo pozorovat mírně zvyšující se zájem v kraji Praha. Předpokládám, že na to má vliv zvyšující se počet účastníků, kteří dojíždějí do pražských škol z přilehlých oblastí Středočeského kraje. Vyvrátil jsem také předpoklad, že v kategorii E bude znatelně nižší účast oproti kategorii F. Na hodnotách získaných pro sestavení statistiky lze pozorovat, že vstupy kategorie E převyšují kategorii F o cca 2400 hodnot, což není zanedbatelné.

Při zpracování této práce jsem se naučil psát v editoru TeXStudio a profesionálně zpracovávat sazbu v systému LaTeX. Dále jsem se naučil pracovat s programem pro vektorou grafiku Inkscape a kreslit/programovat grafy v jazyce Asymptote. Vyzkoušel jsem si, co obnáší práce na sestavování většího statistického souboru. Mám lepší představu o tom, jakou strategii pro budoucí sběr dat zvolit. Tyto dovednosti mi zcela jistě dobře poslouží v budoucnu, např. při tvorbě diplomové práce, jiného učebního textu, nebo jako reference při volbě úloh pro mé žáky.

Jak bylo řečeno, tato bakalářská práce je součástí série prací věnovaných analýze úloh a účasti ve Fyzikální olympiádě. Cílem je vytvořit ucelený soubor úloh z minulých ročníků, který v ČR (na rozdíl např. od SR) chybí a pomůže při přípravě řešitelů na soutěž i přípravě seminářů na podporu Fyzikální olympiády nejen v Olomouckém kraji.

Literatura

[1] Odevzdávací systém OSMO. Fyzikální olympiáda [online]. 2022 [cit. 2022-04-03]. Dostupné z: `https://osmo.fyzikalniolympiada.cz/`

[2] Výsledky okresních kol FO v Olomouckém kraji. *Krajská komise Fyzikální olympiády v Olomouci* [online]. 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: `http://fo.upol.cz/archivok.html`

[3] Výsledkové listiny. *Fyzikální olympiáda Karlovy Vary* [online]. 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: `http://kvary.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/`

[4] Výsledkové listiny. *Fyzikální olympiáda Praha* [online]. 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: `http://praha.fyzikalniolympiada.cz/vysledky/`

[5] Seznam soutěží. *Portál o školství v Jihomoravském kraji* [online]. 2022 [cit. 2022-04-17]. Dostupné z: `http://www.jmskoly.cz/souteze/soutez/?typ=predmetova`

[6] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu.* 2., aktualizované vydání. Praha: Grada, 2016. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-5326-3.

[7] JEŘÁBEK, Ondřej a Martin BÍLEK. *Teorie a praxe tvorby didaktických testů.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2494-1.

[8] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělání* [online]. Praha, 2021 [cit. 2022-03-29]. Dostupné z: `https://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani`

[9] KOLÁŘOVÁ, Růžena a Jiří BOHUNĚK. *Fyzika pro 6. ročník základní školy.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2021. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-496-4.

[10] KOLÁŘOVÁ, Růžena a Jiří BOHUNĚK. *Fyzika pro 7. ročník základní školy.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2021. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-497-1.

[11] KOLÁŘOVÁ, Růžena a Jiří BOHUNĚK. *Fyzika pro 8. ročník základní školy.* 2. vydání. Praha: Prometheus, 2021. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-498-8.

[12] KOLÁŘOVÁ, Růžena, Jiří BOHUNĚK, Ivan ŠTOLL, Miroslav SVOBODA a Marek WOLF. *Fyzika pro 9. ročník základní školy.* 2. vydání. Praha: Prometheus, 2022. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-499-5.

[13] VAFKOVÁ, Lada. *Položková analýza v systému STATISTICA* [online]. Brno, 2015 [cit. 2022-04-03]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce RNDr. Marie Budíková, Dr.

[14] PEARSON (funkce). Podpora Microsoftu [online]. 2022 [cit. 2022-04-03]. Dostupné z: https://support.microsoft.com/cs-cz/office/pearson-funkce-0c3e30fc-e5af-49c4-808a-3ef66e034c18