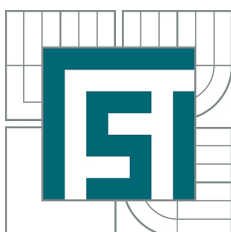


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÝ ALGORITMUS ŘÍZENÍ DALEKOHLEDU
S VYUŽITÍM DOBSONOVY MONTÁŽE
MATHEMATICAL ALGORITHM OF TELESCOPE CONTROL BY USING DOBSONIAN MOUNT

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAN MALEC

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. PAVEL ŠTARHA, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jan Malec

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematický algoritmus řízení dalekohledu s využitím dobsonovy montáže

v anglickém jazyce:

Mathematical algorithm of telescope control by using dobsonian mount

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Řízení dalekohledu pro pozorování astronomických těles je základní problematika, kterou musí každý pozorovatel řešit. Vlivem rotace Země se na obloze pozorované objekty pohybují po kružnici a dále vykonávají relativní pohyb vůči Zemi. Tedy výslednou trajektorií bývá křivka tvořená různými základními pohyby.

Cíle bakalářské práce:

Popsat matematický algoritmus pro řízení dobsonovy montáže vhodný pro implementaci digitálního řízení.

Seznam odborné literatury:

I. Zajonc: Stavba amatérských astronomických d'alekohl'adov a fotokomôr. Hurbanovo 1985.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 21.11.2013

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

V této bakalářské práci je proveden rozbor vztahů mezi polohou dalekohledu na azimutální montáži a mezi polohou objektu na obloze, přičemž se předpokládá, že poloha objektu na obloze je popsána rektascenzí a deklinací. Je zde také provedena analýza rozlišovacích schopností dalekohledu. K tomu byl vytvořen jednoduchý program (v příloze) pro výpočet difrakčních obrazců v ohniskové rovině z bodových hvězd. Na základě pohybu dalekohledu za sledovaným objektem jsou vyjádřeny také potřebné momenty a výkony vytvořené řízenými pohony montáže.

Summary

This thesis is an analysis of the relationship between the position of the azimuthal telescope assembly and the position of the object in the sky, assuming that the position of the object in the sky is described right ascension and declination. There is also an analysis of the telescope resolution. For this purpose has created a simple program (attached to this thesis) to compute the diffraction patterns in the focal plane from point star. From motion of telescope tracing observed object are also expressed the necessary torque and power generated by controlled drives on mount.

Klíčová slova

dalekohled, montáž, sledování objektu

Keywords

telescope, mount, object observation

MALEC, J. *Matematický algoritmus řízení dalekohledu s využitím dobsonovy montáže*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojího inženýrství, 2014. 24 s. Vedoucí Ing. Pavel Štarha, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matematický algoritmus řízení dalekohledu s využitím dobsonovy montáže* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Pavla Štarhy, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jan Malec

Děkuji tímto rodině, mému vedoucímu práce Ing. Pavlu Štarhovi, Ph.D., *Jihomoravskému Centru pro Mezinárodní Mobilitu* a všem, kteří mě podporovali, případně poskytli vhodnou kritiku.

Jan Malec

Obsah

Úvod	2
1 DRŽENÍ A POHYB DALEKOHLEDU	3
1.1 Azimutální montáž	3
1.2 Paralaktická montáž	4
1.3 Pohon montáže	4
2 ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST	6
2.1 Základní vstupní hodnoty	6
2.2 Zobrazení bodového světelného zdroje	6
2.3 Kamera v primárním ohnisku	7
2.4 Požadavky na pohyb vyplývající z uvedených technických parametrů	7
2.5 Příklady	7
2.6 Krokové motory	8
3 VZTAHY SOUŘADNIC NA OBLOZE A NA MONTÁŽI	9
3.1 Transformace souřadnic na obloze na souřadnice nastavení montáže	9
4 ELIMINACE STÁČENÍ ZORNÉHO POLE	14
5 RYCHLOSTI	17
6 ZATÍŽENÍ MONTÁŽE	18
Závěr	22
Slovníček, seznam symbolů a zkratk	23
Literatura	24

ÚVOD

Žijeme na planetě obklopeni obrovským prostorem a každou noc, když rozptýlené sluneční světlo nevybarvuje oblohu do modra, můžeme odhalovat krásy, které ve velikých dálkách čekají na naši pozornost. Na první pohled si toho možná nevšimneme, neboť lidské oči jsou "optimalizovány" pro spíše pro jiné využití. Přesto byl lidský zrak po dlouhá tisíciletí jediným nástrojem, kterým lidé oblohu zkoumali. V posledních staletích začali lidé výkon svého zraku vylepšovat pomocí optických přístrojů. Pro zachycení ještě vzdálenějších a méně jasných objektů překoná schopnosti lidského zraku fotografie, která se může na pozorovaný objekt bez únavy "dívat" hodiny i týdny. Většině obyvatel Země výhled na krásnou v poslední době bohužel kazí umělé osvětlení - další krok ale ne kupředu.

Objekty, které můžeme na obloze vidět se různě pohybují. Vzhledem k jejich velké vzdálenosti se nám však zdá jejich pohyb pomalý. Nejvýraznější pohyb, kterého si všimneme, je způsoben rotací naší planety kolem vlastní osy. Druhý významný pohyb je také pohyb nás samotných - oběh Země kolem Slunce. V důsledku toho se nám obloha nad hlavou otočí každý den o více než 360° .

Chceme-li objekt pozorovat dalekohledem, bude se nám v zorném poli pohybovat tím rychleji, čím větší bude mít celá optická soustava zvětšení. Budeme-li chtít objekt v zorném poli dalekohledu udržet delší dobu, budeme muset polohu dalekohledu měnit. Tento pohyb může s dnešní technikou probíhat samočinně - bez neustálého ručního "pošťuchování".

Poloha objektu na obloze se dá popsat dvěma úhly - rektascenzí a deklinací. V této práci jsou popsány vztahy mezi pohybem objektu po obloze a příslušným pohybem dalekohledu uchyceném na tzv. azimutální montáži. Je zde rozebráno také "stáčení zorného pole", které je u azimutální montáže běžným jevem a které omezuje její využití pro fotografické účely.

Na začátku je rozebrána rozlišovací schopnost dalekohledu, aby bylo zřejmé, jak precizní pohyb dalekohledu při sledování objektu musí být. Rozlišení dalekohledu je omezeno vlnovou povahou světla. Abychom získali představu o velikosti tohoto omezení, byl vytvořen program pro numerický výpočet difrakčních obrazců, které vzniknou v důsledku ohybu světla na vstupní apertuře dalekohledu. Tento program umí vykreslit současně komu - chybu zobrazení parabolického zrcadla u objektů ležících mimo optickou osu. Obrazce z bodových hvězd jsou počítány pouze pro monochromatické světlo o vlnové délce 550nm

Na konci práce jsou rozebrány mechanické účinky pohybu dalekohledu - momenty působící v osách montáže a výkony potřebné pro vykonání požadovaného pohybu. V práci není řešena problematika mechanického kmitání a průhybů konstrukce. To je závislé na konkrétním dalekohledu, typu pohonu atd. Pojmy a symboly, jejichž význam nemusí být čtenářům zřejmý, jsou vysvětleny na konci práce před seznamem literatury.

1. DRŽENÍ A POHYB DALEKOHLEDU

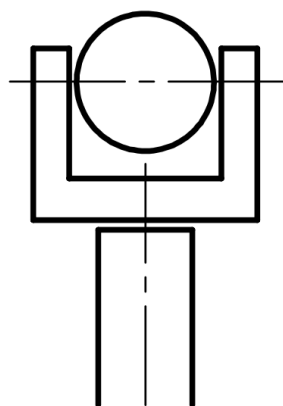
Každý dalekohled musí být držen při pozorování v požadované poloze. Nejmenší dalekohledy (triedry, ...) můžeme držet v ruce. I s triedrem však uvidíme mnohem více detailů, upevníme-li ho na stativ. Potom i v triedru s 15x přiblížením můžeme vidět například mezeru mezi Saturnem a jeho prstenci. Větší dalekohledy bychom v ruce neudrželi už jen kvůli jejich hmotnosti. Navíc při větším zvětšení se také více projeví třes rukou.

Zařízení, které se nachází mezi pevným tělesem (Zemí) a dalekohledem, se nazývá montáž. Musí splňovat určité požadavky.

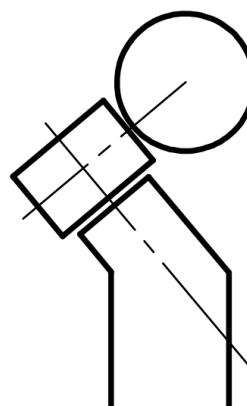
- Musí přenést tíhové síly působící na dalekohled.
- Musí umožnit držení dalekohledu v požadované poloze.
- Pohybovat s dalekohledem musí jít ve všech směrech hladce, bez "trhání".
- Musí tlumit mechanické kmitání soustavy, které se při velkém zvětšení dalekohledu odpovídajícím způsobem násobí v kmitání pozorovaného obrazu.

...

Existuje mnoho typů montáží (způsobů uchycení dalekohledu). Uvedmě dva základní typy: azimutální a paralaktickou.



azimutální montáž



paralaktická montáž

1.1. Azimutální montáž

Asi nejjednodušší je tzv. azimutální montáž, která funguje na stejném principu, jako fotografický stativ. Azimutální montáž má dvě osy. Nakláněním dalekohledu v jedné ose nastavujeme výšku nad horizontem. Otáčíme-li celou touto soustavou ve vodorovné rovině (kolem druhé - svislé osy), nastavujeme azimut. Pro pozorování pozemských cílů je to zcela postačující řešení. Chceme-li pozorovat objekty na obloze, musíme pro udržení objektu v zorném poli pohybovat dalekohledem v obou osách. Pokud bychom znali souřadnice objektu na obloze, museli bychom odpovídající natočení našich os přepočítat.

1.2. PARALAKTICKÁ MONTÁŽ

Speciálním konstrukčním řešením azimutální montáže je tzv. Dobsonova montáž, pojmenovaná po svém konstruktérovi Johnu Dobsonovi. Jde o jednoduchou bedýnku, ve které se může naklápět dalekohled a která se může otáčet na podstavci ve vodorovné rovině. Využívá se v různých modifikacích. Často se zvětšuje průměr osy, kterou naklápíme dalekohled do požadované výšky nad obzorem. Místo čepu nám tak vznikne "kolébka", která umožní zmenšení "bedýnky".

Podobné konstrukční řešení, jako je Dobsonova montáž, používají i největší současné dalekohledy s průměrem zrcadla cca 10m. (dalekohledy Keck 1, Keck 2, GTC,...)

1.2. Paralaktická montáž

Pro focení, vyhledávání objektů podle souřadnic, atd. je výhodnější použít druhý typ - Paralaktickou montáž. Paralaktickou montáž je třeba před pozorováním/focením správně nastavit vzhledem k (severnímu) pólu. Po takovém nastavení je jedna osa montáže (osa rektascenze) rovnoběžná s osou rotace Země. Druhá osa (osa deklinace) je k té první ose kolmá a je v konstrukčním uspořádání blíže k dalekohledu. Otáčením kolem osy rektascenze se dalekohled (i s deklinací osou) pohybuje stejným směrem, jakým se otáčí obloha, takže pohybem v jedné ose můžeme zajistit, že se nám hvězdy v zorném poli jeví jako nehybné. Pro focení na delší expozice se samozřejmě projevují i různé další vlivy, jako jsou různé průhyby soustavy v různých polohách, refrakce v atmosféře blízko u obzoru nebo nepřesnost ustavení paralaktické montáže. Pro korekci těchto drobných odchylek se používá tzv. pointace.

Paralaktická montáž má však také své nevýhody. Ne však z hlediska pozorování oblohy, ale z hlediska mobility a ceny. Paralaktická montáž je obvykle výrazně těžší než dalekohled, který je na ní upevněn. Pro vyvážení soustavy musí být naproti dalekohledu umístěno závaží přibližně stejně těžké jako dalekohled. Mohli bychom potřebnou hmotnost závaží snížit prodloužením ramene. Tím by se ale zvětšil moment setrvačnosti soustavy a soustava by měla větší sklon ke kmitání, což je nežádoucí. Existují i řešení bez závaží. O to masivnější však musí být samotná konstrukce. Pro dalekohled o průměru objektivu (zrcadla) 400mm mobilní paralaktickou montáž prakticky neseženeme. Vážila by mnoho "metrických centů".

1.3. Pohon montáže

Pokud bychom chtěli s dalekohledem fotit delší expozice, pak je třeba s dalekohledem pohybovat tak, aby se obraz v dalekohledu nehýbal. Proto je vhodné dalekohled vybavit systémem pohonů, které budou relativní pohyb pozorovaného objektu korigovat.

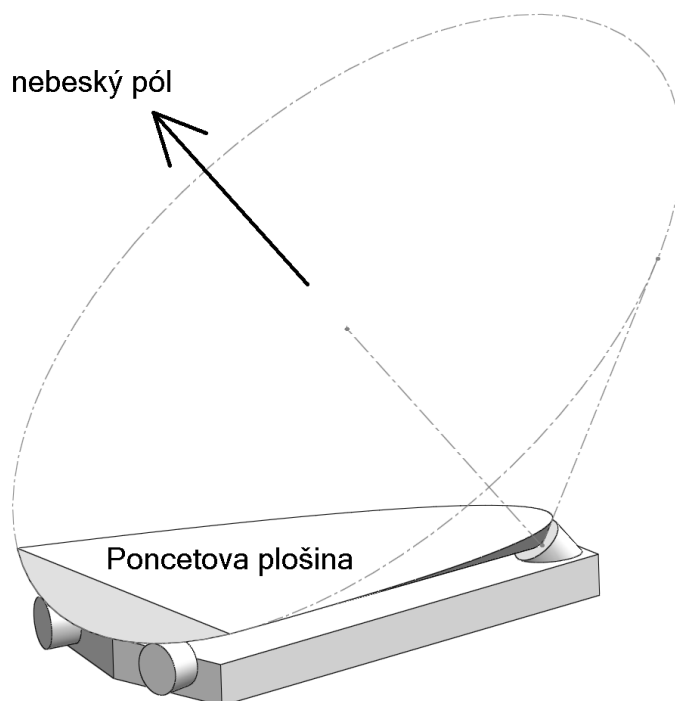
Také při vizuálním pozorování (= očima) je automatické sledování pozorovaného objektu přínosem. V důsledku zemské rotace trvá při větším zvětšení "přelétnutí" objektu zorným polem dalekohledu jen pár desítek sekund. Navíc na okrajích zorného pole nebývá pozorovaný objekt zobrazen tak kvalitně jako uprostřed zorného pole. Poháněný dalekohled nemusíme neustále "pošťuchovat" a když si dáme v pozorování pauzu, tak nemusíme objekt znova hledat.

Nejjednodušší korekce otáčení oblohy je na paralaktické montáži, která má osu rektascenze poháněnou hodinovým strojkem (s konstantní rychlostí).

1. DRŽENÍ A POHYB DALEKOHLEDU

Máme-li azimutální (např. dobsonovu) montáž, můžeme ji posadit na Poncetovu plošinu. Poncetova plošina musí být, stejně jako paralaktická montáž, ustavena dostatečně přesně na (severní) pól. Hodinovým strojkem pak můžeme korigovat pohyb oblohy po dobu přibližně jedné hodiny. Toto řešení má své výhody i nevýhody.

- + Na správně ustavené Poncetově plošině nedochází, stejně jako na paralaktické montáži, ke stáčení zorného pole.
- + K pohonu nám stačí opět pouze hodinový strojek.
- Správné ustavení je obtížnější, než ustavení paralaktické montáže.
- Zvýší se nám poloha dalekohledu, takže u větších dalekohledů můžeme potřebovat k pozorování (vyšší) schůdky



Jiným řešením je použití pohonů na každou osu azimutální montáže samostatně. V tom případě nám nebude stačit pohon hodinovým strojkem (konstantní rychlostí). Obloha se totiž vůči nám otáčí tak, že musíme pohybovat oběma osami zároveň a rychlosti obou pohybů se v čase mění. Vztahy mezi pohybem oblohy a příslušnými pohyby montáže odvodíme dále v textu.

U tohoto řešení se nám obraz v zorném poli v průběhu času vůči orientaci okuláru/kamery otáčí. To pro vizuální pozorování nevadí. Při fotografování na delší expozice bychom měli střed obrazu sice ostrý ale se vzdáleností od středu by se zvětšovalo rozmazání obrazu. Proto musíme použít tzv. derotátor zorného pole, který bude otáčením kamery korigovat otáčení obrazu.

2. ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST

2.1. Základní vstupní hodnoty

Do této práce jsem se pustil především kvůli jednomu konkrétnímu dalekohledu, který by měl být brzy hotový a ke kterému bych chtěl dodělat pohony, aby pozorované objekty "neutíkaly" ze zorného pole. Je vhodné mít povědomí o skutečných hodnotách vyjádřených matematickými výrazy. Proto tam, kde to bude vhodné, budu uvádět ke vztahům odpovídající číselné výsledky založené na těchto vstupních hodnotách:

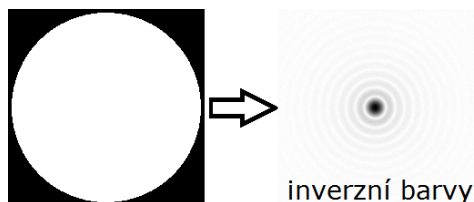
- průměr vstupní apertury (objektivu / primárního zrcadla) $D = 400mm$
- ohnisková vzdálenost optické soustavy (dalekohledu) $F = 2000mm$
- střední vlnová délka světla $\lambda = 550nm$

2.2. Zobrazení bodového světelného zdroje

Předpokládejme, že máme dokonalou optickou soustavu (tj. soustavu bez vlastních optických vad.) s kruhovým vstupním otvorem (aperturou/objektivem), Dále mějme hvězdu - bodový světelný zdroj umístěný v nekonečnu. Pro jednoduchost ještě předpokládejme, že jde o zdroj monochromatického záření. Podle pravidel geometrické optiky by měl být obrazem takovéto hvězdy opět bod v ohniskové rovině. V důsledku vlnové povahy světla se pozorovaná hvězda v ohniskové rovině této optické soustavy nezobrazí jako bod, ale jako obrazec tvořený soustřednými kroužky, přičemž nejvyšší jas bude mít tento obrazec přesně uprostřed. Tomuto obrazci se také říká Airyho disk. Mezi těmito svítícími kroužky dosahuje intenzita světla minima. V případě monochromatického světla je v těchto minimech intenzita zcela nulová. Matematicky lze průběh intenzity popsat pomocí fourierovy transformace ze vstupní apertury. Intenzita je úměrná druhé mocnině amplitudy.

$$I(\xi_x, \xi_y) = \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2\pi i(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy \right|^2$$

Funkce $f(x, y) = 1$ pro $\sqrt{x^2 + y^2} < D/2$, a všude jinde $f(x, y) = 0$.



Z toho vychází vztah pro rozlišovací schopnost optické soustavy Podle Rayleighova kritéria (viz např. [1]) jsou dva body (např. dvě hvězdy) od sebe rozlišitelné, když centrální maximum jednoho obrazce padne do prvního minima druhého obrazce. Minimální úhlová vzdálenost dvou od sebe rozlišitelných hvězd

$$\sin \alpha_o \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

nebo pro malé úhly, jednoduše

$$\alpha_o \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Pro naše hodnoty $\alpha_o \doteq 0.346 \text{ arcsec}$.

Index o budeme dále v textu používat i pro označení jiných veličin, které se týkají optické soustavy

2.3. Kamera v primárním ohnisku

K dalšímu omezení rozlišení může dojít volbou snímacího zařízení - kamery. Budeme-li mít čip s šířkou $w_c = 11 \text{ mm}$ a s počtem pixelů ve směru šířky $n_c = 1392$, pak bude rozteč pixelů $a_c = \frac{w_c}{n_c} = 7,9 \mu\text{m}$. (Pro jednoduchost předpokládám čtvercové pixely s pravidelnou roztečí v obou směrech. To si mohu dovolit, neboť v praxi je tento předpoklad téměř vždy splněn.) Odpovídající úhlová rozteč pro čip v ohniskové rovině je

$$\alpha_c = a_c/F = 3,951 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,815 \text{ arcsec}$$

Index c budeme dále v textu používat i pro označení jiných veličin, které se týkají kamery. Pro další úvahy budeme brát ten "horší" z úhlů α_o, α_c

$$\alpha_m = \max(\alpha_o, \alpha_c)$$

2.4. Požadavky na pohyb vyplývající z uvedených technických parametrů

Maximální dovolená úhlová odchylka bude $\alpha = \alpha_m \cdot k_\alpha$,

kde k_α je námi vhodně zvolený koeficient korigující dosud nezohledněné vlivy a požadavky.

Pro $k_\alpha = 0,5$ bude $\alpha = 1.976 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0.407 \text{ arcsec}$.

Budeme-li pozorovat očima, budou nám vadit hlavně vyšší frekvence kmitání. Bude proto potřeba věnovat pozornost vlastním frekvencím konstrukce dalekohledu a frekvenci impulzů pohonu řídit tak, aby nedocházelo k rezonanci. V průběhu delší doby nám budou vadit jen extra velké odchylky, kdy pozorovaný objekt zmizí ze zorného pole. Menší posuny v průběhu delší doby vadí jen, pokud s dalekohledem fotíme delší expozice.

2.5. Příklady

Podívejme se na případ, kdy bychom dalekohledem "rychle" přesouvali mezi nehybnými "mezními" polohami. Můžeme to považovat za jednoduchý matematický model dalekohledu řízeného krokovými motory, kdy pro jednoduchost zanedbáme mechanické kmitání a setrvačnost.

Pokud budeme pozorovat hvězdy na rovníku, které se na obloze pohybují v důsledku otáčení Země, pak budeme muset polohu dalekohledu upravovat s frekvencí

$$f_z = \frac{\omega_z}{\alpha}$$

kde $\omega_z = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 15 \frac{\text{arcsec}}{\text{s}}$ je úhlová rychlost zemské rotace.

2.6. KROKOVÉ MOTORY

$$f_{zo} = 86,7 \text{ Hz} , \quad f_{zc} = 36,8 \text{ Hz}$$

Takové frekvence není problém s dostupnými krokovými motory docílit.

Pokud bychom však chtěli dalekohledem pozorovat třeba Mezinárodní Kosmickou Stanici ISS, pak bychom potřebovali frekvenci mnohem vyšší.

$$f_{ISS} = \frac{\omega_{ISS}}{\alpha} = \frac{v_{ISS}}{r_{ISS} \cdot \alpha}$$

Rychlost kosmické stanice na oběžné dráze $v_{ISS} \doteq 7,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

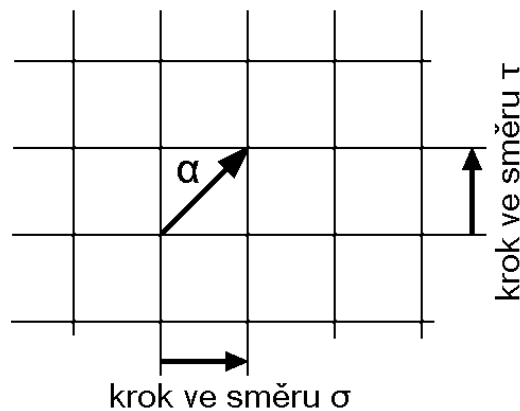
Vzdálenost stanice od nás při průletu zenitem $r_{ISS} \doteq 400 \text{ km}$

$$f_{ISSo} \doteq 23 \text{ kHz} , \quad f_{ISSc} \doteq 9,7 \text{ kHz}$$

Takovou frekvenci už je problém s krokovými motory dosáhnout. Pro takovéto použití bychom museli použít jiný způsob polohování (jiné motory), než jaký jsme uvažovali v našem modelu. Například asynchronní motory a samostatně udělat snímání aktuální polohy dalekohledu, jako zpětnou vazbu, podle které budou motory řízeny.

2.6. Krokové motory

Budeme-li pohyb dalekohledu zajišťovat krokovými motory, potom délka kroku v každé ose nesmí způsobit posunutí o větší úhel než $\alpha/\sqrt{2}$. Neboť při té "nejhorší" situaci se bude objekt pohybovat úhlopříčně ke čtvercové mřížce určené polohami krokových motorů.

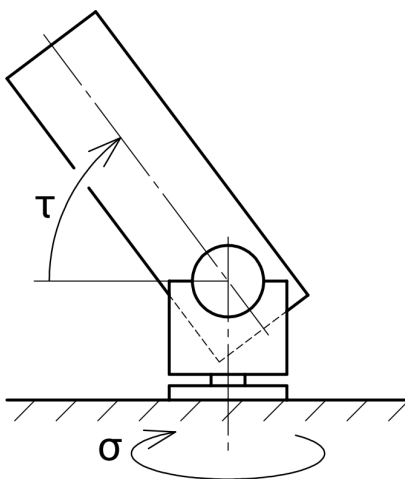


Motory na osách montáže budou "krokovat" s frekvencí $f_i = \omega_i/\alpha_i$,

- kde f_i je frekvence motoru pohánějícího i -tou osu montáže.
- ω_i je potřebná úhlová rychlost v i -té ose montáže. Hodnota těchto rychlostí při pozorování hvězd pomocí azimutální montáže rozepsána dále v textu. Závisí na poloze pozorovaného objektu, takže se mění v čase. Proto je třeba ji neustále přepočítávat a neobejdeme se bez nějaké výpočetní techniky.
- α_i je úhel, o který se pootočíme v i -té ose při jednom kroku příslušného motoru.

3. VZTAHY SOUŘADNIC NA OBLOZE A NA MONTÁŽI

Dobsonova montáž umožňuje naklápěním dalekohledu v kolébce nastavovat výšku nad obzorem (τ). Otáčením dalekohledu i s kolébkou ve vodorovné rovině se nastavuje azimut (σ).



Poloha vzdálených objektů na obloze je popsána rektascenzí ρ_0 a deklinací δ . Orientace oblohy vzhledem k pozorovateli je závislá na čase a na poloze pozorovatele na Zeměkouli - na jeho zeměpisné šířce a zeměpisné délce.

Když na tomto místě na zemi umístíme dobsonovu montáž, nemusí být tato montáž obecně postavena vodorovně. Úhlové odchylky umístění montáže se při pozorování vzdálených těles projeví tak, jako kdyby byla montáž umístěna na jiném místě na Zeměkoule. Polohu montáže vzhledem k obloze zjistíme tak, že dalekohled "ustavíme" na hvězdy, jejichž polohu (souřadnice) známe. Při tom zjistíme příslušné úhly na montáži. Z toho pak dopočítáme ekvivalentní polohu pozorovatele (zeměpisnou šířku a délku). Při transformaci souřadnic pak vycházíme z této ekvivalentní polohy.

3.1. Transformace souřadnic na obloze na souřadnice nastavení montáže

Oba souřadné systémy jsou vlastně sférické s tím, že neobsahují délkovou souřadnici (poloměr). Respektive poloměr bychom měřili od místa pozorování až k pozorovanému objektu. To jsou ve srovnání s velikostí Země velké vzdálenosti. Proto můžeme uvažovat, že obě naše sférické soustavy mají stejný počátek. Délkovou souřadnici proto pro jednoduchost znormujeme a celý model si můžeme jednoduše představit jako kouli o jednotkovém poloměru.

Nesmíme zapomenout na předpoklad dostatečné vzdálenosti těles. Třeba při pozorování Měsíce bychom museli počítat s tím, že vzhledem k němu při otáčení Země pohybujeme (např. na rovníku se naše poloha každý den periodicky mění v rozsahu $\pm 6378 \text{ km}$)

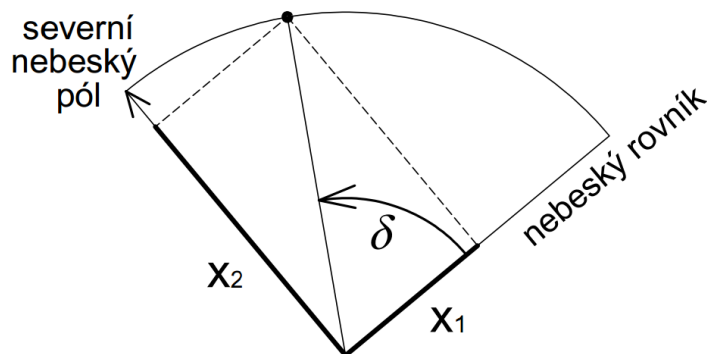
3.1. TRANSFORMACE SOUŘADNIC NA OBLOZE NA SOUŘADNICE NASTAVENÍ MONTÁŽE

Předpokládejme, že známe ρ (viz Slovníček), deklinaci δ a naši zeměpisnou šířku γ .

Zavedme takovýto 2D kartézský souřadný systém (x_1, x_2) :

osa x_2 směřuje k severnímu pólu (přibližně k Polárce)

osa x_1 je k ose x_2 kolmá tak, že bod jehož polohu chceme popsat, leží v rovině (x_1, x_2)



Potom platí:

$$x_1 = \cos \delta$$

$$x_2 = \sin \delta$$

Provedli jsme tedy první "otočení" ve směru úhlu δ (deklinace)

Rovina (x_1, x_2) je vzhledem k meridiální rovině natočená kolem polární osy x_2 o úhel ρ .

Zavedeme nyní pravotočivý kartézský systém (x_3, x_2, x_4) .

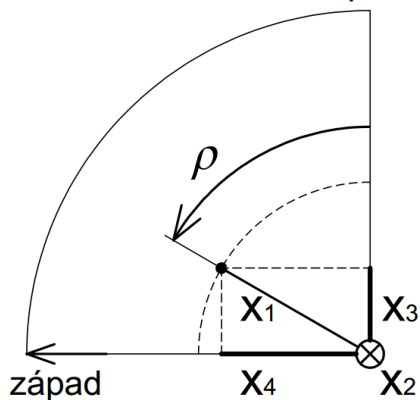
- Polární osa x_2 zůstává tak, jak jsme si ji zadefinovali před chvílí.
- Osa x_3 leží v meridiální rovině, je kolmá k ose x_2 a směřuje od země do horního poloprostoru.
- Osa x_4 kolmá ke dvěma předchozím směřuje na západ.

Protože nyní "otáčíme" v rovině kolmé na osu x_2 , tak se souřadnice ve směru osy x_2 nemění. Stačí nám tedy vyjádřit souřadnice na osách x_3 a x_4 .

$$x_3 = x_1 \cos \rho = \cos \delta \cos \rho$$

$$x_4 = x_1 \sin \rho = \cos \delta \sin \rho$$

pohled směrem
k severnímu nebeskému pólu



3. VZTAHY SOUŘADNIC NA OBLOZE A NA MONTÁŽI

Pozorovatel se může nacházet na pozorovacím stanovišti s libovolnou zeměpisnou šířkou γ . Zavedme proto nyní do třetice pravotočivý kartézský souřadný systém (x_5, x_4, x_6) .

- Osa x_4 směřuje na západ, jak jsme ji zavedli výše.
- Osa x_6 směřuje do zenitu, tj. ze země svisle vzhůru
- Osa x_5 kolmá k předchozím dvěma leží ve vodorovné rovině a směřuje na sever (už ne k severnímu nebeskému pólu jako x_2)

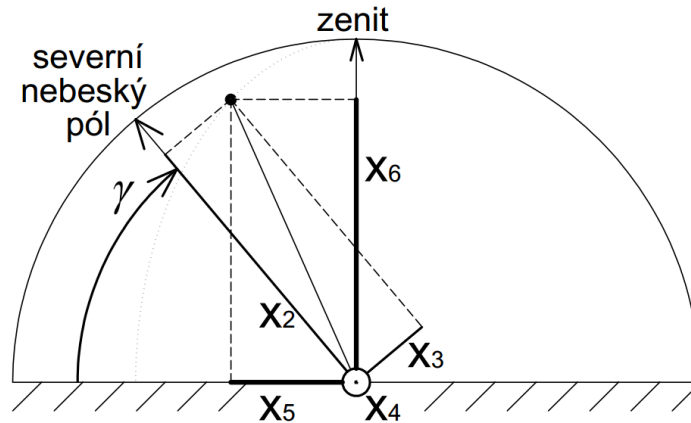
Předchozí souřadný systém (x_3, x_2, x_4) nyní "otočíme" do systému (x_5, x_4, x_6) kolem osy x_4 o úhel γ . Úhlová vzdálenost od zenitu k severnímu nebeskému pólu (cca k Polárce) je $(90^\circ - \text{zeměpisná šířka}) = \pi/2 - \gamma$.

Souřadnice x_4 se opět nezmění.

$$x_5 = x_2 \cos \gamma - x_3 \sin \gamma = \sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \cos \rho \sin \gamma$$

$$x_6 = x_2 \sin \gamma + x_3 \cos \gamma = \sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \cos \rho \cos \gamma$$

pohled ze západu směrem na východ



Z tohoto kartézského systému již jsme schopni určit hledaný azimut a výšku nad obzorem.

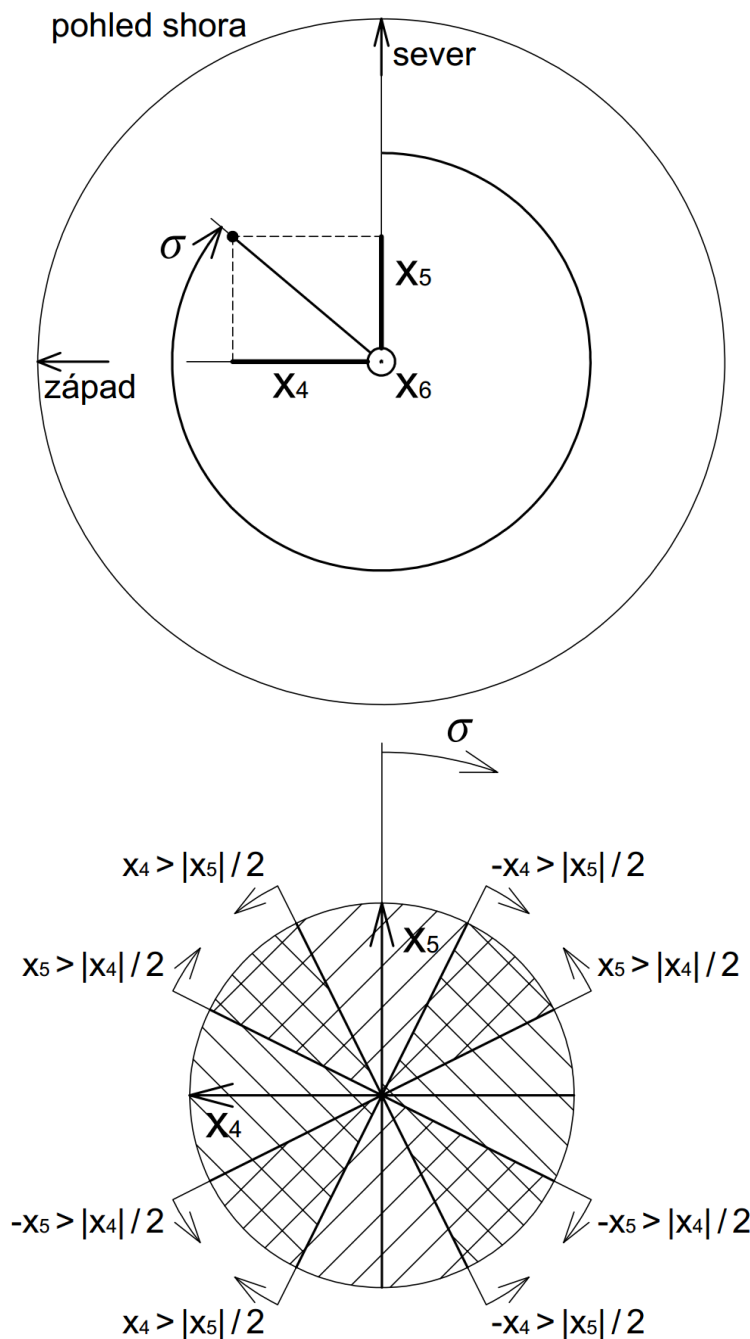
výška nad obzorem

$$\tau = \arcsin x_6$$

azimut

$$\sigma = \begin{array}{ll} -\arctan\left(\frac{x_4}{x_5}\right) & \text{pro } \left(x_5 \geq \frac{|x_4|}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x_5}{x_4}\right) & \text{pro } \left(-x_4 \geq \frac{|x_5|}{2}\right) \\ \pi - \arctan\left(\frac{x_4}{x_5}\right) & \text{pro } \left(-x_5 \geq \frac{|x_4|}{2}\right) \\ \frac{3}{2}\pi + \arctan\left(\frac{x_5}{x_4}\right) & \text{pro } \left(x_4 \geq \frac{|x_5|}{2}\right) \end{array}$$

3.1. TRANSFORMACE SOUŘADNIC NA OBLOZE NA SOUŘADNICE NASTAVENÍ MONTÁŽE



Konkrétní vztah pro výpočet azimutu je třeba určit podle hodnot $|x_4|$ a $|x_5|$, protože funkce arctan nám vrátí pouze hodnotu od $-\pi/2$ do $\pi/2$, zatímco azimut může být v intervalu dlouhém 2π . Oblasti pro různé způsoby výpočtů se překrývají. Nemůže se tedy stát, že by se pozorovaný objekt pohyboval po hranici oblasti tak, že by se vlivem numerických chyb muselo neustále přepínat mezi způsoby výpočtu. Pokud bude rychlost pozorovaných objektů omezená, budeme moci po zvolení jednoho způsobu výpočtu tento výpočet zcela jistě po určitou dobu používat. Jen stačí občas (např. jednou za sekundu) zkontrolovat, že se nacházíme v příslušné oblasti. Kdybychom se dostali kousek za hranici příslušné oblasti, tak by to také fungovalo správně. Jen se nesmíme dostat příliš daleko, což je dáno definičním oborem funkce arctan - proto se také způsob výpočtu σ tak větví.

3. VZTAHY SOUŘADNIC NA OBLOZE A NA MONTÁŽI

Zenitem dalekohled při sledování objektu nemůže projít. Při libovolné nenulové rychlosti relativního pohybu objektu na obloze by totiž v tomto bodě musela mít azimutální osa "nekonečnou rychlost". Pohybuje-li se objekt v blízkém okolí zenitu, klesá potřebná rychlost v azimutální ose přibližně nepřímo úměrně s úhlovou vzdáleností pozorovaného objektu od zenitu. V okolí zenitu bude proto oblast, ve které nejsme schopni z fyzikálních důvodů pohybuující se objekty sledovat. Velikost této oblasti bude závislá na schopnostech pohonů a na mechanických vlastnostech celého systému.

Pokud bychom pozorovali družice obíhající okolo země, asi bychom jejich dráhu nepopisovali pomocí úhlů δ, ρ , ale pomocí parametrů popisujících eliptickou dráhu, která je nějak orientovaná v prostoru se středem v těžišti Země. K tomuto pohybu po elipse bychom museli přičíst pohyb pozorovatele na otáčející se Zemi. Jde o zjednodušený model, který zanedbává vliv Měsíce a další vlivy.

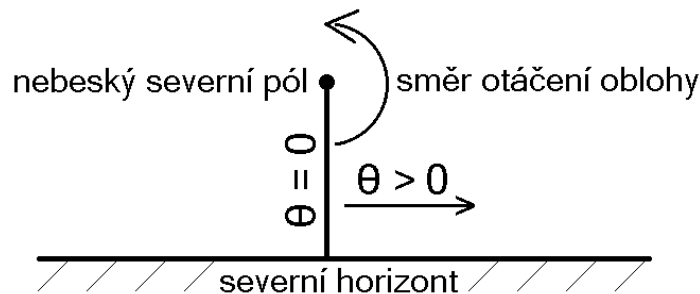
Pokud bychom chtěli pozorovat letadlo, můžeme jeho dráhu popsat v nejjednodušším případě, jako přímkou v kartézském souřadném systému (x_5, x_4, x_6) . Všechny tři souřadnice můžeme dosadit v libovolných jednotkách. Pokud souřadnici x_6 vydělíme vzdáleností letadla od pozorovatele, můžeme pro výpočet azimutu a výšky nad obzorem použít výše uvedené vzorečky pro σ a τ .

4. ELIMINACE STÁČENÍ ZORNÉHO POLE

Jak bylo uvedeno výše, při pozorování dalekohledem s azimutální montáží se sledovaný objekt v zorném poli otáčí, což nám vadí při focení. Tento pohyb můžeme korigovat tak, že budeme otáčet snímacím zařízením stejně, jako se otáčí obraz.

Největší rychlost tohoto pohybu bude potřeba v blízkosti zenitu. Zde budeme muset vyrovnávat rychlý pohyb azimutální osy. Protože přímo zenitem nemůže dalekohled při sledování objektu projít, neřešíme přímo v zenitu ani otáčení kamery.

Pojďme si vyjádřit natočení kamery v závislosti na poloze dalekohledu a pozorovaného objektu. Toto natočení budeme značit θ . Nejprve si stanovíme, kde bude natočení nulové. $\theta = 0$ na meridiánu při pohledu od Polárky směrem dolů k severnímu horizontu.



Úhel natočení θ spočítáme vhodným porovnáním jednotkových vektorů charakteristických pro pozorovaný objekt a jednotkových vektorů charakteristických pro polohu montáže.

Využijeme našich značení úhlů γ, δ, ρ . K vyjádření pomocných vektorů budeme používat zavedený kartézský souřadný systém (x_5, x_4, x_6) .

Jednotkový vektor tečný k nebeské rovnoběžce se směrem souhlasným s otáčením oblohy získáme zderivováním vektoru (x_5, x_4, x_6) podle úhlu ρ a následným znormováním na jednotkovou délku. Bude tedy mít směr otáčení oblohy.

$$q_s = \begin{pmatrix} \sin \rho \cdot \sin \gamma \\ \cos \rho \\ -\sin \rho \cdot \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Jednotkový vektor tečný k nebeskému poledníku směřující k severnímu pólu získáme zderivováním vektoru (x_5, x_4, x_6) podle úhlu δ . Jeho jednotková délka je vzhledem k významu δ zajištěna.

$$p_s = \begin{pmatrix} \cos \delta \cdot \cos \gamma + \sin \delta \cdot \cos \rho \sin \gamma \\ -\sin \delta \cdot \sin \rho \\ \cos \delta \cdot \sin \gamma - \sin \delta \cdot \cos \rho \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Jednotkový vektor tečný k azimutální rovnoběžce leží vždy v nějaké vodorovné rovině. Proto jeho třetí složka (ve směru x_6) bude nulová. Aby byl jednotkový, použijeme vhodnou kombinaci sinu a cosinu. Polohu a směr tohoto vektoru určuje azimut σ

$$q_z = \begin{pmatrix} -\sin \sigma \\ -\cos \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

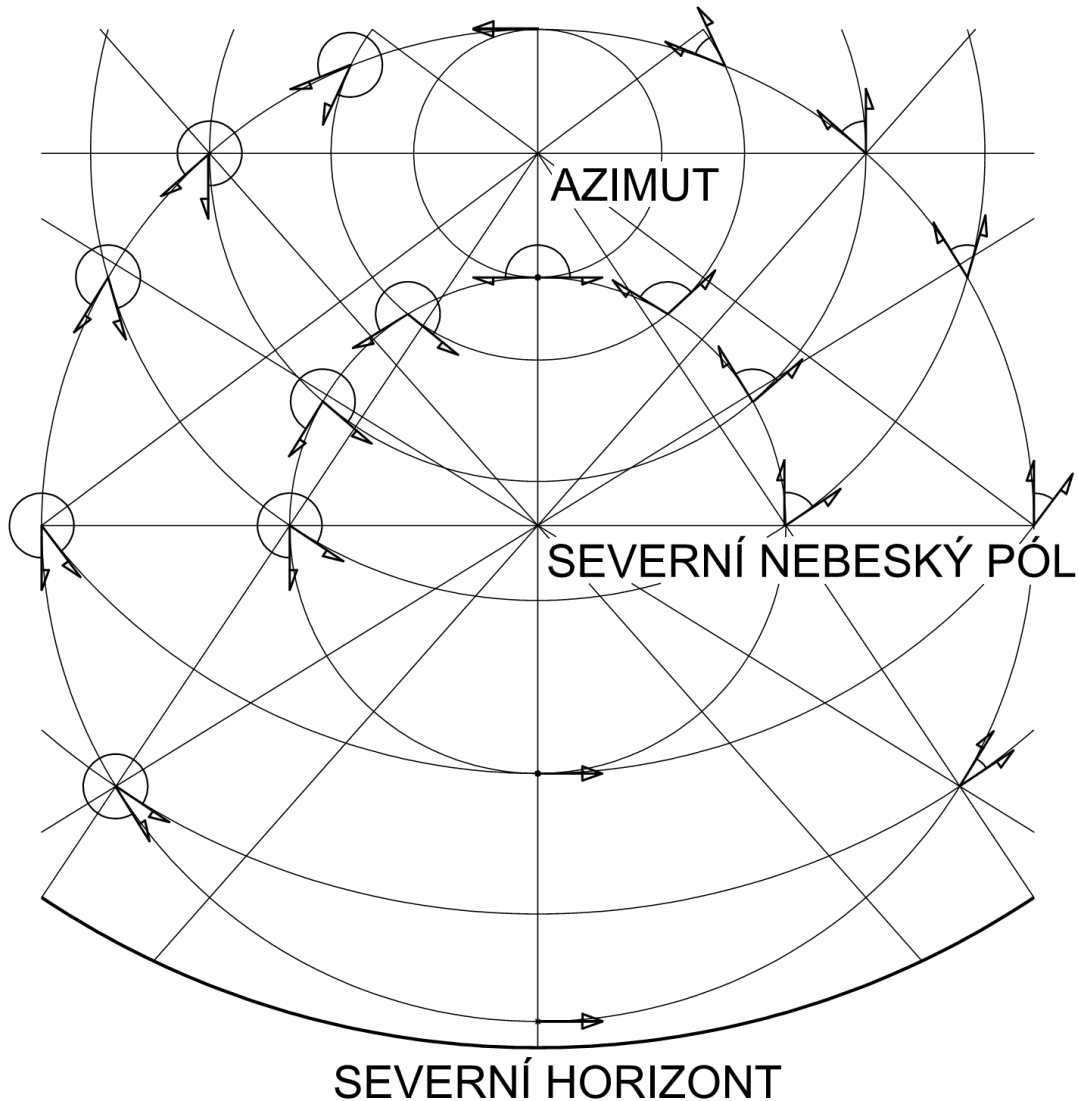
4. ELIMINACE STÁČENÍ ZORNÉHO POLE

Nyní využijeme vztah pro úhel mezi vektory jednotkové délky.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Pomocí funkce inverzní k funkci cosinus můžeme určit φ v rozsahu od 0 do π .

Náš úhel θ je ale v rozsahu od 0 do 2π , případně na jiném takto dlouhém intervalu. Proto si zde musíme pomoci rozvětvením podobně, jako jsme si pomáhali při výpočtu azimutu. Jaké podmínky stanovit, zjistíme nejspolehlivěji bez velkého úsilí, když si načrtne obrazy s příslušnými vektory.



Napočítáme si skalární součiny

$$s_q = \vec{q}_s \cdot \vec{q}_z = -\sin \gamma \sin \rho \sin \sigma - \cos \rho \cos \sigma$$

$$s_p = \vec{p}_s \cdot \vec{q}_z = \sin \delta \sin \rho \cos \sigma - \cos \gamma \cos \delta \sin \sigma - \sin \gamma \sin \delta \cos \rho \sin \sigma$$

Natočení kamery

$$\theta = \begin{array}{ll} -\arcsin s_p & \text{pro } \left(s_q \geq \frac{1}{2} \right) \\ \arccos s_q & \text{pro } \left(s_p \leq \frac{-1}{2} \right) \\ \pi + \arcsin s_p & \text{pro } \left(s_q \leq \frac{-1}{2} \right) \\ -\arccos s_q & \text{pro } \left(s_p \geq \frac{1}{2} \right) \end{array}$$

Budeme-li ze severní polokoule pozorovat objekty, jejichž trajektorie na obloze prochází vzhledem k zenitu po jižní straně (zenit leží od trajektorie na sever), potom nám stačí otáčet s kamerou v rozsahu úhlu $\pm 90^\circ$. Kdyby trajektorie objektu ležela na sever od zenitu, pak bychom mohli potřebovat otáčet úplně kolem dokola. Při pohledu do okuláru, by se obraz otáčel proti směru hodinových ručiček. Na (ne)šťěstí se nám střídá den a noc, takže můžeme/musíme pozorování přerušit a otočit kameru zpět. Pokud u nás tedy nenastává polární noc, tak se nám dráty vedoucí od kamery nezamotají. Analogicky by se to chovalo na jižní polokouli. Jen se obraz kolem jižního pólu bude otáčet po směru hodinových ručiček.

5. RYCHLOSTI

Odvodíme zde rychlosti os montáže pro případ pozorování objektu, jehož poloha je popsána parametricky:

$$\rho = \rho(t), \delta = \delta(t), \gamma \neq \gamma(t).$$

Při otáčení oblohy v důsledku rotace Země: $\dot{\delta} = 0$, $\dot{\rho} = \omega_z$.

Značení:

t ... čas

\dot{x} ... derivace veličiny x podle času t

Rychlosti budeme potřebovat znát především pro určení zatížení montáže.

$$\dot{x}_1 = -\sin \delta \cdot \dot{\delta}$$

$$\dot{x}_2 = \cos \delta \cdot \dot{\delta}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_1 \cdot \cos \rho - x_1 \cdot \sin \rho \cdot \dot{\rho} = -\dot{\delta} \cdot \sin \delta \cos \rho - \dot{\rho} \cdot \cos \delta \sin \rho$$

$$\dot{x}_4 = \dot{x}_1 \cdot \sin \rho - x_1 \cdot \cos \rho \cdot \dot{\rho} = -\dot{\delta} \cdot \sin \delta \sin \rho + \dot{\rho} \cdot \cos \delta \cos \rho$$

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_2 \cdot \cos \gamma - \dot{x}_3 \sin \gamma = \dot{\delta} \cdot (\cos \delta \cos \gamma + \sin \delta \cos \rho \sin \gamma) + \dot{\rho} \cdot \cos \delta \sin \rho \sin \gamma$$

$$\dot{x}_6 = \dot{x}_2 \cdot \sin \gamma + \dot{x}_3 \cos \gamma = \dot{\delta} \cdot (\cos \delta \sin \gamma - \sin \delta \cos \rho \cos \gamma) - \dot{\rho} \cdot \cos \delta \sin \rho \cos \gamma$$

$\dot{\sigma} =$

$$\text{pro } \left(x_5 \geq \frac{|x_4|}{2} \right) : \quad \frac{-1}{1 + \left(\frac{x_4}{x_5} \right)^2} \cdot \frac{\dot{x}_4 x_5 - \dot{x}_5 x_4}{x_5^2} = \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_5^2 + x_4^2}$$

$$\text{pro } \left(-x_4 \geq \frac{|x_5|}{2} \right) : \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{x_5}{x_4} \right)^2} \cdot \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_4^2} = \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_5^2 + x_4^2}$$

$$\text{pro } \left(-x_5 \geq \frac{|x_4|}{2} \right) : \quad \frac{-1}{1 + \left(\frac{x_4}{x_5} \right)^2} \cdot \frac{\dot{x}_4 x_5 - \dot{x}_5 x_4}{x_5^2} = \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_5^2 + x_4^2}$$

$$\text{pro } \left(x_4 \geq \frac{|x_5|}{2} \right) : \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{x_5}{x_4} \right)^2} \cdot \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_4^2} = \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_5^2 + x_4^2}$$

Tedy výsledný vztah je stejný pro všechny čtyři původní případy výpočtu σ .

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{x}_5 x_4 - \dot{x}_4 x_5}{x_5^2 + x_4^2} = \dots = \frac{\dot{\delta} \cdot \cos \gamma \sin \rho + \dot{\rho} \cdot \cos \delta \cdot (\cos \delta \sin \gamma - \sin \delta \cos \rho \cos \gamma)}{x_5^2 + x_4^2}$$

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_6^2}} \cdot \dot{x}_6 = \frac{\dot{\delta} \cdot (\cos \delta \sin \gamma - \sin \delta \cos \rho \cos \gamma) - \dot{\rho} \cdot \cos \delta \sin \rho \cos \gamma}{\sqrt{1 - x_6^2}}$$

Rychlost $\dot{\theta}$ bychom spočítali obdobně. Zrychlení $\ddot{\sigma}$, $\ddot{\tau}$ potřebná k výpočtu zatížení pohonů montáže bychom spočítali dalším derivováním podle času.

6. ZATÍŽENÍ MONTÁŽE

Nyní zjistíme, jaký vliv má pohyb dalekohledu na momenty působící v osách montáže. To je potřebné pro určení parametrů pohonů. Zde pro jednoduchost zanedbáme tření v ložiscích. Další zatížení může vznikat například při foukání větru nebo při nedokonalém vyvážení dalekohledu.

Aby se dalekohled nechoval na montáži "prapodivně", mělo by být jeho těžiště uchyceno v průsečíku os montáže. Předpokládejme, že je to splněno.

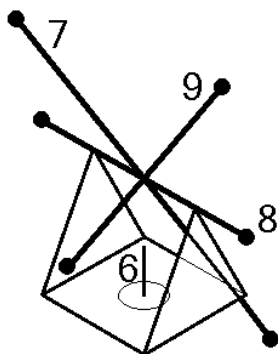
Hmotnost části, která je mezi osami montáže ("kolébka/bedýnka"), pro zjednodušení zanedbáme. V případě potřeby ji lze do vztahů jednoduše zakomponovat. (Projeví se v silovém momentu působícím na azimutální osu)

Protože jsem neabsolvoval žádný předmět, jako je kinematika, dynamika, neznám konvence, jaké se používají k popisu pohybu takového tělesa, jako je dalekohled. Proto se tímto omlouvám za případné odlišnosti od obvyklého způsobu zápisu používaného v těchto oborech. Fyzikální zákony tím porušeny nebudou.

Vím, že existují tři hlavní momenty setrvačnosti, jejichž směry jsou na sebe kolmé. Je očekávatelné, že rozložení hmoty dalekohledu bude symetricky odpovídat symetrii os montáže. Dalekohled je těleso "protáhlé" ve směru osy tubusu. Osy největšího a druhého největšího hlavního momentu setrvačnosti budou proto kolmé k tubusu a osa nejmenšího hlavního momentu setrvačnosti bude totožná s osou tubusu. Tyto hlavní momenty můžeme fyzicky změřit, nebo si je třeba spočítat z virtuálního 3D modelu dalekohledu v příslušném CAD systému. Nyní budeme předpokládat, že tyto hlavní momenty setrvačnosti známe.

Abych byl schopen momenty působící v osách montáže spočítat, vypomohu si s dovolením jednoduchým modelem. Místo těla dalekohledu budu uvažovat soustavu tří dvojic bodů umístěných tak, že se středy spojnic příslušných dvojic potkávají v těžišti dalekohledu (tj. v průsečíku os montáže). Tyto tři spojnice jsou na sebe kolmé a tvoří tak "prostorový šestiramený kříž". První dvojice bodů leží na ose tubusu. Spojnice druhé dvojice je kolmá ke směru azimutu a k ose tubusu, takže leží ve vodorovné rovině. Spojnice třetí dvojice bodů je kolmá oběma spojnicím předchozích dvojic bodů.

- Vše, co přísluší první dvojici bodů, budeme značit indexem 7.
- Vše, co přísluší druhé dvojici, budeme značit indexem 8
- a vše, co přísluší třetí dvojici, budeme značit indexem 9.



Každý ze šesti bodů má stejnou hmotnost rovnou šestině hmotnosti dalekohledu. Vzdálenosti bodů od těžiště spočítáme ze známých momentů setrvačnosti. Tyto vzdálenosti by měly být jednoznačně určeny, neboť známe tři hlavní momenty a z nich počítáme tři vzdálenosti. (Dvojice bodů jsou vzhledem k těžišti umístěny symetricky). Druhou možností by bylo zvolit pevně vzdálenosti a dopočítat rozložení hmotností.

Hmotnost dalekohledu označíme m .

Momenty setrvačnosti jsou dány těmito vztahy:

$$J_7 = \frac{m}{6} \cdot 2 \cdot (r_8^2 + r_9^2)$$

$$J_8 = \frac{m}{6} \cdot 2 \cdot (r_9^2 + r_7^2)$$

$$J_9 = \frac{m}{6} \cdot 2 \cdot (r_7^2 + r_8^2)$$

označme

$$s_7 = \frac{2}{3}mr_7^2$$

$$s_8 = \frac{2}{3}mr_8^2$$

$$s_9 = \frac{2}{3}mr_9^2$$

Pak

$$\begin{pmatrix} J_7 \\ J_8 \\ J_9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_7 \\ s_8 \\ s_9 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy dostaneme:

$$\begin{pmatrix} s_7 \\ s_8 \\ s_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_7 \\ J_8 \\ J_9 \end{pmatrix}$$

a odtud

$$r_7 = \sqrt{\frac{3s_7}{2m}}$$

$$r_8 = \sqrt{\frac{3s_8}{2m}}$$

$$r_9 = \sqrt{\frac{3s_9}{2m}}$$

Tato soustava bodů má nyní stejnou hmotnost a setrvačné momenty, jako těleso dalekohledu. Měla by se tedy chovat stejně.

Celkový moment hybnosti je dán takto:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \cdot \frac{m}{6} = \frac{m}{6} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

kde \vec{r}_i jsou polohové vektory bodů vzhledem k těžišti s výše spočítanými délkami r_i a v_i jsou rychlosti těchto bodů.

Všechny potřebné vektory vyjádříme v souřadném systému (x_5, x_4, x_6) , který budeme považovat za "nehybný".

Úhlová rychlost je dána vektorovým součtem úhlových rychlostí obou os montáže.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\tau} \cdot \sin \sigma \\ -\dot{\tau} \cdot \cos \sigma \\ -\dot{\sigma} \end{pmatrix}$$

Úhlové zrychlení

$$\dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} -\ddot{\tau} \cdot \sin \sigma - \dot{\tau} \dot{\sigma} \cdot \cos \sigma \\ -\ddot{\tau} \cdot \cos \sigma + \dot{\tau} \dot{\sigma} \cdot \sin \sigma \\ -\ddot{\sigma} \end{pmatrix}$$

Polohové vektory

$$\vec{r}_7 = r_7 \cdot \begin{pmatrix} \cos \sigma \cos \tau \\ -\sin \sigma \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_8 = r_8 \cdot \begin{pmatrix} \sin \sigma \\ \cos \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_9 = r_9 \cdot \begin{pmatrix} -\cos \sigma \sin \tau \\ \sin \sigma \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix}$$

Jestliže na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, pak se moment hybnosti zachovává co do velikosti i směru. Pokud na soustavu působí silový moment \vec{M} , pak se moment hybnosti mění podle vztahu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Derivace vektorového součinu:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{y} \times \vec{z})}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right] = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_2 z_3 + y_2 \dot{z}_3 - \dot{y}_3 z_2 - y_3 \dot{z}_2 \\ \dot{y}_3 z_1 + y_3 \dot{z}_1 - \dot{y}_1 z_3 - y_1 \dot{z}_3 \\ \dot{y}_1 z_2 + y_1 \dot{z}_2 - \dot{y}_2 z_1 - y_2 \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{y}_2 z_3 - \dot{y}_3 z_2 \\ \dot{y}_3 z_1 - \dot{y}_1 z_3 \\ \dot{y}_1 z_2 - \dot{y}_2 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \dot{z}_3 - y_3 \dot{z}_2 \\ y_3 \dot{z}_1 - y_1 \dot{z}_3 \\ y_1 \dot{z}_2 - y_2 \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \dot{\vec{y}} \times \vec{z} + \vec{y} \times \dot{\vec{z}} \end{aligned}$$

My víme, jak chceme aby se dalekohled pohyboval. Spočteme-li z požadovaného charakteru pohybu potřebnou změnu momentu hybnosti, získáme potřebný silový moment, který musí na soustavu působit.

$$\begin{aligned}\vec{M} &= 2 \cdot \frac{m}{6} \cdot \sum_{i=7,8,9} \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right) = \frac{m}{3} \cdot \sum_{i=7,8,9} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \vec{r}_i \times \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}{dt} \right) = \\ &= \frac{m}{3} \cdot \sum_{i=7,8,9} \left((\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r}_i \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}) \right) = \frac{m}{3} \cdot \sum_{i=7,8,9} \left[\vec{r}_i \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \right]\end{aligned}$$

Zde \vec{v} značí rychlost. Vektorový součin dvou stejných vektorů je roven nule. Vektor \vec{M} můžeme rozložit na složky, které leží v příslušných osách montáže.

$$\vec{M}_6 = \vec{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_8 = \vec{M} \cdot \begin{pmatrix} \sin \sigma \\ \cos \sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Potřebný výkon spočítáme podle vztahu

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Analogicky spočítáme výkony v jednotlivých osách

$$P_6 = \vec{M}_6 \cdot \vec{\omega}$$

$$P_8 = \vec{M}_8 \cdot \vec{\omega}$$

ZÁVĚR

V tomto roce (2014) bych měl mít hotový dalekohled typu Newton na Dobsonově montáži. Mým cílem je doplnit tento dalekohled pohonným systémem, který umožní sledovat hvězdy pohodlně uprostřed zorného pole i při velkém zvětšení. V této práci jsem si odvodil vztahy, které mi pomohou zvolit pro tento dalekohled vhodný typ pohonů a tyto pohony potom řídit tak, aby se dalekohled pohyboval v souladu s hvězdami. Když už jsem se do toho pustil, tak jsem odvodil zároveň vztahy popisující stáčení zorného pole, což se bude hodit v případě, že by bylo potřeba využít dalekohled i pro focení.

V našich podmínkách bude vedle umělého světelného znečištění omezujícím faktorem pro pozorování také chvění vzduchu v atmosféře - tzv. seeing. Trochu vedlejším produktem je program pro výpočet obrazce vzniklého z bodového monochromatického světelného zdroje v dalekohledu s jedním parabolickým zrcadlem (Newton). Ve skutečnosti je takový obrazec v dalekohledu relativně malý, takže je vidět až při větších zvětšeních, kde se však také nejvíce projevuje seeing, který takový obrazec často úplně rozmaže. Doufám, že takové obrazce uvidím v novém dalekohledu brzy, výrazné a nehybné.

SLOVNÍČEK, SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK

- azimut - úhel od severního směru k našemu směru ve vodorovné rovině, měřený po směru hodinových ručiček (při pohledu shora)
- arcsec - úhlová sekunda $1 \text{ arcsec} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ rad}$
- γ - zeměpisná šířka
aneb úhlová vzdálenost pozorovatele od zeměpisného rovníku
- δ - deklinace - úhlová vzdálenost měřeného bodu od nebeského rovníku. Je kladná pro body od nebeského rovníku směrem k severnímu pólu
- jarní bod - místo na obloze (směr vzhledem k hvězdnému pozadí), kde se nachází Slunce v okamžiku jarní rovnodennosti
- meridiální rovina - rovina, ve které leží meridián prochází místem pozorovatele, prochází zenitem
- meridián - hlavní poledník - prochází zenitem a severním nebeským pólem
- ρ_0 - raktascenze - Najdeme-li k našemu bodu nejbližší odpovídající bod ležící na nebeském rovníku, pak úhlová vzdálenost měřená od jarního bodu směrem směrem k tomuto bodu na nebeském rovníku se označuje rektascenze. Má počátek v jarním bodě a je rostoucí od jarního bodu směrem na východ. Bývá udávána v časových jednotkách, kdy $24 \text{ hodin} = 360^\circ = 2\pi$ (v obloukové míře) Příslušný bod na nebeském rovníku je tedy z hlediska pozemského pozorovatele na obloze "opožděn" za jarním bodem o čas vyjádřený rektascenzí.
- ρ - úhel od meridiánu při pohledu ze směru severního pólu, měřený po směru hodinových ručiček pootočení závislé na roční a denní době - rektascenze
- severní nebeský pól - místo na obloze, které se při "otáčení oblohy" v důsledku zemské rotace nehýbe. (střed otáčení)
- zenit (nadhlavník) - směr kolmý k vodorovné rovině (je přímo nad hlavou pozorovatele)
- $\omega_z = \frac{\pi}{43200} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 15 \frac{\text{arcsec}}{\text{s}}$ - úhlová rychlost zemské rotace.

Literatura

- [1] ZAJONC, Ivo. *Stavba amatérských astronomických dalekohledů a fotokomôr*. Vydání 1. SÚAA, Hurbanovo, 1985. 156 s.
- [2] MOORE, Patrick. *Hvězdy a planety*. Vydání 1. Praha: Slovart, 2001. 256 s. ISBN 80-7209-309-6.