



Mikrostrukturální návrh a analýza 2D architektury se záporným Poissonovým číslem: experimentální/počítačový přístup

Bakalářská práce

Studijní program: B2301 – Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301R000/0 – Strojní inženýrství
Autor práce: **Václav Vomáčko**
Vedoucí práce: Ing. Jiří Šafka, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Mechanical Engineering ■

Microstructural design and analysis of 2D architecture with negative Poisson's ratio: experimental / computer approach

Bachelor thesis

Study programme: B2301 – Mechanical Engineering
Study branch: 2301R000/0 – Mechanical Engineering
Author: **Václav Vomáčko**
Supervisor: Ing. Jiří Šafka, Ph.D.



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Václav Vomáčko**
Osobní číslo: **S15000216**
Studijní program: **B2301 Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Strojní inženýrství**
Název tématu: **Mikrostrukturální návrh a analýza 2D architektury se záporným Poissonovým číslem: experimentální/počítačový přístup**
Zadávací katedra: **Katedra výrobních systémů a automatizace**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Negativní Poissonovo číslo je projev několika přírodních materiálů v některých směrech. Nicméně, negativní Poissonovo číslo lze nalézt u syntetických materiálů s pečlivě navrhnutou mikro-strukturální architekturou. Využití takové struktury je nasnadě v letectví, biomedicíně, atd. Cílem bakalářské práce je seznámit studenta s mikro-strukturálním návrhem materiálu a analyzovat výsledné makroskopické (efektivní) elastické vlastnosti s využitím metody konečných prvků, více - škálového přístupu a 3D tisku.


1. Provést rešerši v oblasti modelování auxetických materiálů.
2. Navrhnout auxetické struktury na základě definovaných kritérií.
3. Formulovat počítačový model pomocí více-škálové metody konečných prvků.
4. 3D tisk a mechanické testy definovaných struktur.
5. Zhodnocení mechanických parametrů struktury, odhad makroskopických vlastností struktury na základě počítačového modelu.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy: **40 stran textu včetně příloh**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

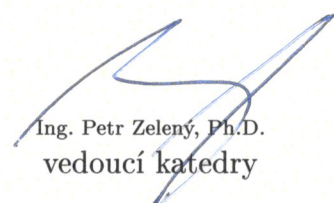
- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. and R.L. TAYLOR.,. The Finite Element Method: The Basis. Butterworth-Heinemann, 2000, ISBN 0750650494
[2] STAINHAUSER, M. Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids. Springer, 2016, ISBN 9783662532249

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Jiří Šafka, Ph.D.**
Katedra výrobních systémů a automatizace
Konzultant bakalářské práce: **Ing. Petr Henyš, Ph.D.**
Katedra technologií a struktur
Ostatní konzultanti: **Ing. Michal Ackermann, Ph.D.**

Datum zadání bakalářské práce: **15. listopadu 2017**
Termín odevzdání bakalářské práce: **15. května 2019**


prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan




Ing. Petr Zelený, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 15. listopadu 2017

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá problematikou návrhu mikrostruktur s potenciálně záporným Poissonovým číslem (auxetické materiály). Vedle této vlastnosti, která vede k celé řadě možných aplikací, jsou auxetické materiály zajímavé z hlediska možnosti nastavení mechanických vlastností geometrií struktury (např. lze vhodnou geometrií dosáhnout nulového Poissonova čísla). Metodou konečných prvků byly vypočteny napětí a deformace navržených struktur, z čehož jsme získali výsledné makroskopické vlastnosti technikou homogenizace. Vypočtené hodnoty byly následně ověřeny mechanickými zkouškami na vzorcích vyrobených 3D tiskem. Ukázalo se, že všechny struktury vykazují záporné Poissonovo číslo v určitém rozsahu parametrů. Vhodná pro použití je především struktura A (re-entrant honeycomb), která se vedle záporného Poissonova čísla pyšní i velmi dobrou tahovou kapacitou. Navzdory předpokladu vyšly u všech struktur nízké stříhové kapacity, tedy zatížení stříhem není u těchto struktur vhodné.

Klíčová slova: auxetický materiál, záporné Poissonovo číslo, lineární elasticita, metoda konečných prvků, homogenizace, 3D tisk

Abstract

In this thesis were designed microstructures with negative Poisson's ratio (auxetic materials). This feature leads to lot of possible applications. Stress and deformations were computed with finite element method and macroscopic mechanical propperties were obtained with computational homogenization. Computed results were compared with experimental measurement, samples were manufactured with 3D print technology. All structures shows negative Poisson's ratio in specific range of parameters. Structure A (re-entrant honeycomb) is useful because of good tensile capacity. Despite the assumption, negative Poisson's ratio does not lead to enhanced shear capacity for these structures, so they are not suitable for shear loading.

Key words: auxetic material, negative Poisson's ratio, linear elasticity, finite element method, homogenization, 3D printing

Poděkování

Rád bych poděkoval Ing. Jiřímu Šafkovi Ph.D. za vedení práce, Ing. Michalu Ackermannovi Ph.D. za rady ohledně 3D tisku a Ing. Petru Henyšovi Ph.D. za pomoc s sestavením výpočtového modelu a celkový přístup v průběhu studia. Dále bych chtěl poděkovat doc. Ing. Pavlu Solfronkovi Ph.D. a Ing. Jiřímu Sobotkovi Ph.D. za pomoc s experimentálním měřením. V neposlední řadě děkuji svým rodičům a přítelkyni za veškerou podporu v průběhu studia.

Obsah

1	Úvod	12
1.1	Cíle práce	12
2	Poissonovo číslo	13
3	Auxetické materiály	15
3.1	Vlastnosti	15
3.2	Aplikace	16
3.3	Způsoby výroby auxetických struktur	18
3.3.1	Stereolitografie	18
3.3.2	Selektivní laserové spékání	18
3.3.3	FDM technologie	19
3.3.4	PolyJet Matrix	19
3.3.5	Hluboké reaktivní iontové leptání	19
3.3.6	Modifikace neauxetických pěn	20
3.4	Možnosti návrhu a výpočtu	20
3.4.1	Analýza vlastních tvarů	20
3.4.2	CAD a MKP	21
3.4.3	Analytický přístup	21
3.4.4	Homogenizace	21
3.4.5	Experimentální měření	21
4	Návrh struktur	22
4.1	Struktura A	22
4.2	Struktura B	23
4.3	Struktura C	24
5	Výpočtový model	25
5.1	Lineární elasticita	25
5.1.1	Cauchyho rovnice rovnováhy tělesa ve 2D	25
5.1.2	Kinematika deformace	25
5.1.3	Konstitutivní vztah mezi napětím a deformací	26
5.1.4	Dosazení	26
5.2	Metoda konečných prvků	27
5.2.1	Oslabení nároků řešení	27
5.2.2	Návrh řešení	27

5.2.3	Výběr typu prvku	28
5.2.4	Diskretizace	28
5.2.5	Volba bázových (tvarových) funkcí	29
5.2.6	Matice B	30
5.2.7	Izoparametrické souřadnice	30
5.2.8	Výpočet derivací a dosazení	31
5.2.9	Numerická integrace	32
5.2.10	Lokální matice tuhosti	33
5.2.11	Globální matice tuhosti	33
5.2.12	Okrajové podmínky	34
5.3	Výpočetní homogenizace	35
5.3.1	Hill-Mandelův princip	36
5.3.2	Numerická derivace	37
5.3.3	Ortotropní model	38
5.4	Studie konvergence	39
5.4.1	Jemnost sítě	39
5.4.2	Počet základních buněk	40
5.4.3	Chyba numerické derivace	40
5.5	Výsledky	41
5.5.1	Struktura A2	42
5.5.2	Struktura B5	47
5.5.3	Struktura C	50
6	Experimentální měření	52
6.1	Výroba zkušebních vzorků	52
6.2	Příprava zkušebních vzorků	53
6.3	Optické měření	53
6.4	Výsledky	54
7	Závěr	55
	Literatura	61

Seznam obrázků

2.1	Poissonovo číslo a přehled příslušných materiálů	13
3.1	Porovnání klasického a auxetického chování materiálu při silovém zatížení tahem	15
3.2	Odpor proti vnikání indentoru neauxetického a auxetického materiálu	16
3.3	Synklastické chování při ohybu	16

3.4	Porovnání chování neauxetického a auxetického vlákna v kompozitním materiálu	17
3.5	Filtr s řízenou propustností	17
3.6	Aplikace auxetického stentu	18
3.7	Porovnání základní a re-entrant buňky	20
3.8	Čtvercová mřížka, její vlastní tvar a mřížka vlastního tvaru	20
4.1	Struktura A: re-entrant honeycomb	22
4.2	Struktura B	23
4.3	Struktura C	24
5.1	Constant Strain Triangle	28
5.2	Diskretizace kontinua	29
5.3	Bázové funkce na trojúhelníku	29
5.4	Sestavení globální matice tuhosti	34
5.5	Zavedení okrajových podmínek	35
5.6	Princip homogenizace	36
5.7	Homogenizace - měřítko	36
5.8	Příklad různých rozlišení sítě (a zároveň geometrie testovací struktury)	39
5.9	Závislost hodnot Poissonových čísel ν_{xy}, ν_{yx} při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70°	43
5.10	Porovnání modulů pružnosti v tahu E_x, E_y a smyku G_{xy} s referenčními moduly E_{ref} a G_{ref} (tedy tahová a stříhová kapacita) při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70°	44
5.11	Závislost tahové a stříhové kapacity (z grafu 5.10) vztažené k porozitě dané struktury při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70°	44
5.12	Polární diagramy tahové kapacity struktury A2 pro úhel $\alpha = 90^\circ$ (vlevo) a $\alpha = 70^\circ$ (vpravo).	45
5.13	Graf celkového posuvu u (levý sloupec) a k tomu příslušné redukované napětí von Mises (pravý sloupec) struktury A2. Od shora postupně zatížení tahem, tlakem a stříhem.	46
5.14	Závislost hodnot efektivních Poissonových čísel $\hat{\nu}_{xy}, \hat{\nu}_{yx}$ při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm.	47
5.15	Porovnání modulů pružnosti v tahu E_x, E_y a smyku G_{xy} s referenčními moduly E_{ref} a G_{ref} (tedy tahová a stříhová kapacita) při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm.	48
5.16	Závislost tahové a stříhové kapacity (z grafu 5.10) vztažené k porozitě dané struktury při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm. .	49
5.17	Polární diagramy tahové kapacity struktury B5 pro délky spoje $c = 0,4$ mm (vlevo), $c = 2$ mm (vpravo)	49
5.18	Závislost efektivního Poissonova čísla $\hat{\nu}$ na úhlu sevření α a tloušťce t .	50
5.19	Závislost tahové kapacity $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$ na úhlu sevření α a tloušťce t	51
5.20	Závislost stříhové kapacity $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$ na úhlu sevření α a tloušťce t	51
6.1	Zkušební vzorky pro zkoušku tahem	52

6.2	Zkušební vzorky pro zkoušku stříhem	53
6.3	Vzorek připravený pro zkoušení	53
6.4	Vlevo snímek vzorku při průběhu zkoušky, uprostřed snímek s vizualizací deformace ze softwaru ARAMIS, kde šipky představují místa měření posuvů, vpravo snímek měřicího systému a trhacího zařízení.	54
6.5	Naměřené hodnoty Poissonových čísel v závislosti na poměrné deformaci	54

Seznam tabulek

4.1	Testované modifikace struktury A	23
4.2	Testované modifikace struktury B	23
4.3	Testované modifikace struktury C	24
5.1	Efektivní mechanické vlastnosti v závislosti na rozlišení sítě	40
5.2	Efektivní mechanické vlastnosti v závislosti na počtu opakování základní buňky	40
5.3	Efektivní mechanických vlastností při snižování kroku numerické derivace	41
5.4	Parametry výpočtů	42
5.5	Struktura A - přehled výsledků	47
5.6	Struktura B - přehled výsledků	50
7.1	Zhodnocení struktur	55
7.2	Porovnání vypočtených a naměřených hodnot	56

1 Úvod

Auxetický materiál je takový, který má záporné Poissonovo číslo, tedy pokud ho silově zatěžíme v jednom směru, mění polohu jednotlivých prvků i ve směru kolmém na směr zatěžování. Pojem auxetický pochází z řečtiny a znamená *zvětšitelný*. Tato vlastnost je projevem pouze několika přírodních materiálů v některých směrech (Achillova šlacha, kočičí kůže, vlákna některých pavouků, atd.) a vede k řadě dalších zajímavých vlastností, jako je synklastické chování při ohybu, zvýšená odolnost proti nárazu, atd.

Záporného Poissonova čísla, lze však docílit i u syntetických materiálů vhodnou mikrostrukturální architekturou. S vývojem 3D tisku se naskýtají nové možnosti, jak vhodné mikrostruktury vyrobit. Mechanické vlastnosti zmíněných struktur jsou vedle materiálu z něhož jsou vyrobeny, závislé i na vlastní geometrii struktury. Vhodnou geometrií, lze tedy v určitém rozsahu ovlivnit hodnoty modulů pružnosti v tahu, smyku, či Poissonových čísel. Tohoto lze využít pro ideální návrh materiálu (struktury) pro specifickou funkci.

Využití těchto struktur z daných materiálů má velký potenciál v oblastech, jako jsou letectví, biomedicína (chirurgické implantáty, stenty), či ochranné sportovní pomůcky.

1.1 Cíle práce

Cílem této bakalářské práce je navrhnout mikrostruktur s potenciálně záporným Poissonovým číslem. Sestavení vhodného výpočtového modelu pro určení základních mechanických vlastností těchto struktur. Praktické ověření s využitím experimentů na vzorcích vyrobených 3D tiskem.

2 Poissonovo číslo

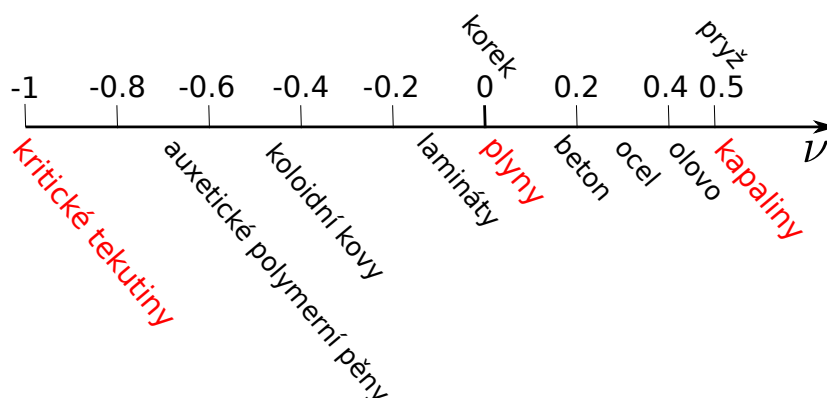
Poissonovo číslo je pojmenováno podle jeho objevitele francouzského matematika Siméon Denis Poissona. Jedná se o materiálovou konstantu, která porovnává příčnou poměrnou deformaci vůči podélné poměrné deformaci při jednoosém zatížení [1]. Vztah obsahuje znaménko minus, to jen proto, aby běžné materiály měli Poissonovo číslo kladné. [2] Nejčastěji je značeno Řeckým písmenem nu:

$$\nu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon_a}$$

ν ... Poissonovo číslo

ϵ_t ... transversální (příčná) poměrná deformace

ϵ_a ... axiální (podélná) poměrná deformace



Obrázek 2.1. Poissonovo číslo a přehled příslušných materiálů

U izotropních materiálů je Poissonovo číslo nezávislé na směru namáhání. To však neplatí u materiálů ortotropních a anizotropních, kdy se Poissonovo číslo v různých směrech liší [3]. Po té, co bylo zjištěno, že pro izotropní materiály jsou moduly pružnosti navzájem závislé (stačí definovat dva) [4] je nejvhodnější vyjádřit Poissonovo číslo pomocí izotermického modulu objemové pružnosti (nestlačitelnost) K a modulu pružnosti ve smyku G [5] :

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$$

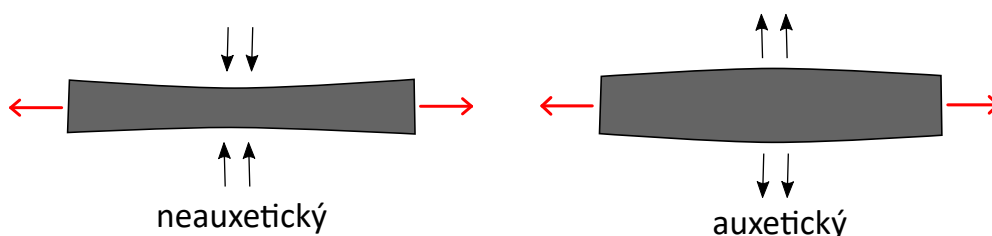
Jelikož $K > 0$ a $G > 0$ tak platí, že $0 \leq \frac{K}{G} < \infty$. Z toho vyplývá přípustný

interval hodnot Poissonova čísla pro izotropní materiály $-1 \leq \nu < 0,5$. Pro většinu materiálů však platí, že pokud je natahujeme v jednom směru, tak se ve směru příčném zužují (Poissonův efekt), a tudíž je nejčastější hodnota Poissonova čísla v rozsahu 0 až 0,5. Na druhé straně stojí poměrně úzká skupina materiálů s negativním Poissonovým číslem, které jsou nazývány auxetické. Přehled materiálů a jejich příslušných Poissonových čísel můžeme vidět na obrázku 2.1.

3 Auxetické materiály

Jak je napsáno v úvodu, auxetický materiál je takový, který když silově zatěžíme ve směru podélném, tak se roztahuje i ve směru příčném, viz obrázek 3.1. Tento jev je matematicky popsán negativním Poissonovým číslem. Prvním takovým objeveným materiálem byl monokrystal pyritu, to ve své knize popsal Love v roce 1944[6]. Velký posuv v auxetických materiálech nastal v roce 1987, kdy Lakes zhotovil první syntetický materiál, když modifikoval konvenční polymerní pěnu [7]. Klasická teorie elasticity nepředpokládala záporné hodnoty Poissonova čísla. Tato skutečnost byla vzata v úvahu roku 1991 kdy Evans a kol. tuto teorii přepracovali [8]. Následně se jim podařilo vyrobit mikroporózní polyethylen s záporným Poissonovým číslem, právě zde pro tento jev zavedli poprvé pojem auxetický.

Auxetické materiály jsou řazeny do skupiny metamateriálů [9]. Takto jsou označovány materiály vyvinuté v nedávné době, které disponují zvláštními vlastnostmi (záporný index lomu, záporná permitivita, záporné Poissonovo číslo, atd.), jež se v přírodě příliš nevyskytují [10]. Negativní Poissonovo číslo bývá v přírodě způsobeno značnou anizotropií a tak se projevuje pouze v některých směrech [7]. Jedním z mála příkladů jsou kovy s kubickou krystalovou mřížkou [11].

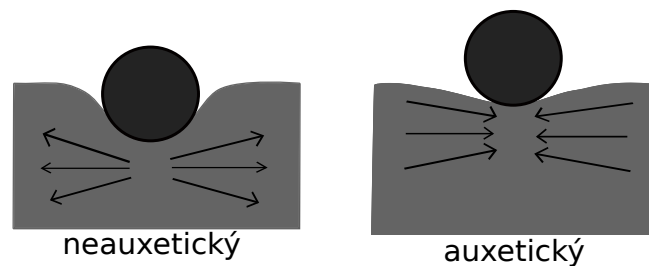


Obrázek 3.1. Porovnání klasického a auxetického chování materiálu při silovém zatížení tahem

3.1 Vlastnosti

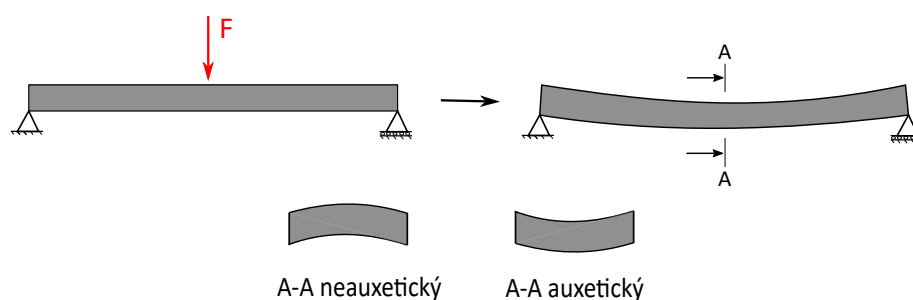
Auxetičnost vede k řadě neobvyklých mechanických vlastností. Běžné materiály mají lehce vyšší modul pružnosti ve smyku G než modul objemové pružnosti K . U auxetických materiálů s Poissonovým číslem blízkým -1 ale platí $G \gg K$ [12]. Tedy změnou mikrostruktury tak, aby Poissonovo číslo bylo nulové, či záporné lze dosáhnout zvýšení hodnoty modulu pružnosti ve smyku G [2]. Dále také vede auxetičnost

materiálu k nárůstu lomové houževnatosti [13]. Při vhodné velikosti strukturních buněk a indentoru má materiál s auxetickou strukturou větší tvrdost, než stejný nestrukturovaný materiál [14], to je znázorněno na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2. Odpor proti vnikání indentoru neauxetického a auxetického materiálu

Při ohýbání auxetických desek můžeme pozorovat *synklastické chování*, to představuje schopnost deformovat se do tvaru kopule při ohybu [15] (Obrázek 3.3). Auxetické materiály se také vyznačují vysokou schopností tlumení a dobrými zvukovými izolačními vlastnostmi [16, 12]. V neposlední řadě vede záporné Poissonovo číslo k zvýšení odolnosti proti nárazu [17, 18] a k disipaci většího množství energie při rázu [19].

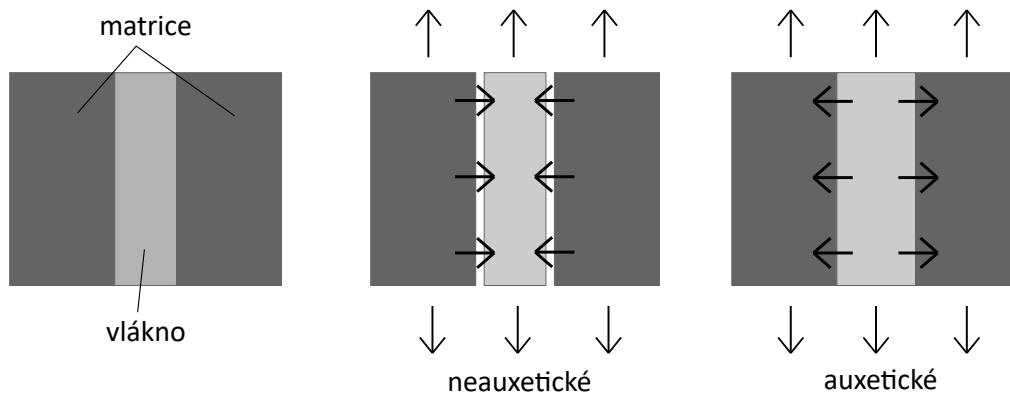


Obrázek 3.3. Synklastické chování při ohybu

3.2 Aplikace

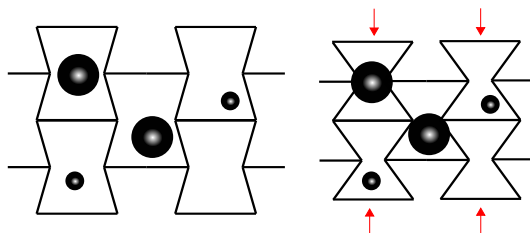
V mnoha technických, medicínských oblastech či military sektoru je nasnadě použití auxetických materiálů a četnost jejich uplatnění se zvětšuje. Příhodné je použití například pro konstrukci automobilových nárazníků, ochranného armádního oblečení, jako jsou neprůstřelné vesty, či helmy. To vše díky schopnostem nahromadění materiálu pod indentorem (nůž, projektil, atd.) a absorpce energie [20]. U ochranného oblečení lze díky auxetickému materiálu dosáhnout tenčí vrstvy a tím nižší hmotnosti při stejném stupni ochrany [12]. Další využití těchto materiálů může být pro sportovní ochranné pomůcky, jako jsou nejrůznější chrániče [21].

Dále je vhodné využití pro hydrofony, piezoelektrické a jiné senzory [22, 23], protože jsou materiály se záporným Poissonovým číslem velmi citlivé na změny



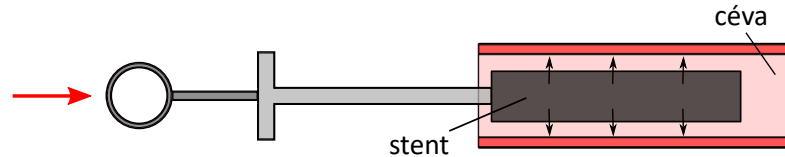
Obrázek 3.4. Porovnání chování neauxetického a auxetického vlákna v kompozitním materiálu

tlaku, což je způsobeno nízkou hodnotou modulu objemové pružnosti K [12]. Jsou také zkoumány pro použití na nýty, či hmoždinky. Při montáži se spojovací prvek stlačí a lze ho tak pohodlně umístit do otvoru, kde se po zatížení roztáhne [24]. V kompozitech auxetická vlákna zlepšují syntézu matrice s vlákny (obrázek 3.4) a dochází tak ke zvýšení odolnosti proti šíření trhlin [25]. Tyto kompozity jsou používány v leteckém průmyslu [26].



Obrázek 3.5. Filtr s řízenou propustností

V (bio)medicině se uplatní pro různé druhy stentů [27, 28], chirurgické implantáty, jako jsou kyčelní náhrady [29], umělé meziobratlové ploténky, či kolenní protézy [19]. Princip zavedení auxetického stentu je vidět na obrázku 3.6. Mohou být též vyrobeny destičky s auxetickou nanostrukturou, které se uplatní jako selektivní membrány jejichž pórovitost lze nastavit mírou zatížení. Princip je zobrazen na obrázku 3.5. Využití se naskýtá v biomedicině (dialýza), nebo jako membrány pro katalytické reaktory [30]. Kombinací materiálů se záporným a kladným Poissonovým číslem (auxetické vlákno v neauxetické matrici, střídání vrstev auxetického a neauxetického materiálu, auxetická inkluze v neauxetické matrici) je možné zvýšit celkovou tuhost materiálu [31].



Obrázek 3.6. Aplikace auxetického stentu

3.3 Způsoby výroby auxetických struktur

V této části jsou představeny vybrané způsoby výroby, kterými lze dosáhnout auxetických struktur. Vhodnou technologií výroby jsou některé metody 3D tisku. Jejich proces začíná v CAD softwaru vytvořením 3D modelu tisknutého objektu. Tento objekt je následně následně převeden do STL formátu. STL formát je popsán jako množina trojúhelníků s vrcholovými body a danou normálou. Tím je model "rozřezán na plátky" o tloušťce jedné vrstvy a poté po vrstvách "vytisknut". Pro tenké desky je vhodná metoda hlubokého reaktivního iontového leptání. Dále je také možné vyrobit auxetické tkaniny například pomocí osnovního pletení [32].

3.3.1 Stereolitografie

Stereolitografie (SLA - stereolithography) je nejstarší metodou 3D tisku a ostatní metody z ní více, či méně vycházejí. Princip tvorby objektu spočívá ve vytvrzování fotopolymery (polymeru citlivého na světlo) pomocí ultrafialového záření produkovaného laserem [33]. Základní deska je ponořena pod hladinu kapalného fotopolymery o tloušťku jedné vrstvy. První vrstva je v potřebných místech vytvrzena UV laserem a následuje posunutí základní desky o tloušťku jedné vrstvy. Pak se celý proces opakuje až do dokončení objektu, kdy je přebytečná pryskyřice vypuštěna. Po dokončení tisku je nutné na výrobek aplikovat další UV záření pro dokončení procesu polymerizace a tím stabilizovat mechanické vlastnosti [34]. Nevýhodou tohoto postupu je délka celého procesu. Naopak výhodou je přesnost této metody. Tloušťka jedné vrstvy je běžně v rozmezí 25 až 100 μm . Menších tlouštěk vrstev pod 10 μm lze dosáhnout modifikací této metody - mikrostereolitografií [35]. Fotopolymer je také možné infiltrovat různými částicemi (keramické prášky, skelná, či uhlíková vlákna, atd.) a vytvářet tak různé kompozitní materiály [36].

3.3.2 Selektivní laserové spékání

Selektivní laserové spékání (SLS - Selective Laser Sintering) je metoda 3D tisku, která pro vytvoření objektu využívá prášek spékáný CO_2 laserem. Na základní desku je nanášena vrstva práškového materiálu, ten je předehřát na teplotu blízkou jeho tání a následně v potřebných místech laserem spečen dohromady. Píst pod základní deskou se posune o tloušťku jedné vrstvy dolů a následuje nanášení další vrstvy a celý proces se znovu opakuje. Největší výhodou této metody je použití jakéhokoli materiálu který je ve formě prášku (kovy, keramika, polymery, atd.) a jejich

kombinací [37]. Nezpracovaný materiál během procesu stále obklopuje vyráběnou součást, tudíž není potřeba stavba podpor, jejíž funkci nespečený prášek zastupuje. Nepoužitý prášek může být dále recyklován a použit znovu. Nevýhodou může být velikost práškových částic, které udávají přesnost výrobku. Tloušťka jedné vrstvy je v rozmezí 20 až 100 μm pro kovy a 70 až 150 μm pro plasty. Pro vyhnutí se oxidaci je nutné spékání provádět v inertním prostředí a také po celou dobu udržovat teplotu blízkou tání používaného materiálu. Tyto skutečnosti zapříčiňují, jak vysokou cenu tiskárny, tak i výsledného produktu, navíc provoz laseru je velice energeticky náročný [33].

3.3.3 FDM technologie

Princip technologie FDM (Fused Deposition Modeling) spočívá v nanášení vrstev roztaveného termoplastického materiálu. Ten je ve formě vlákna (filamentu) umístěn na cívce. Z ní je přiveden podávacím mechanismem do vyhřívané vytlačovací hlavy. Zde je materiál zahřát na teplotu blízkou k teplotě tání a poté spojitě nanášen na základní desku. Základní stavební deska se po vytvoření jedné vrstvy posune dolů a pokračuje tvorba další vrstvy. Vedle hlavního materiálu, nejpoužívanějšími jsou ABS a PLA, je nutné použití podpůrného materiálu pro stavbu podpor. Podpory se po dokončení tisku odstraní buď mechanicky, nebo je možné použít podpůrný materiál rozpustný ve vodě, či jiné chemické lázni. Tloušťka jedné vrstvy se většinou pohybuje v rozmezí od 120 až 330 μm . Výhodou je cenová dostupnost FDM tiskáren a jednoduchá obsluha. Nevýhodou může být úzká škála použitelných materiálů [38].

3.3.4 PolyJet Matrix

PolyJet Matrix je technologie 3D tisku vyvinutá izraelskou firmou Objet. Tato technologie využívá tryskání tekutého fotopolymerního materiálu a stereolitografie. Polymer je nanášen v ultra tenkých vrstvách a to pomocí speciálních tiskových hlav. Každá vrstva je vždy vytvrzena UV lampou. Výhodou je možnost tisku z dvou a více různých materiálů v jednom tiskovém procesu a malá tloušťka vrstvy, která činí 16, či 30 μm [39]. Tato metoda byla v této práci použita pro výrobu zkušebních vzorků.

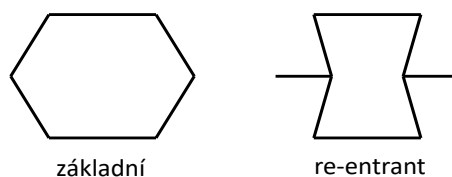
3.3.5 Hluboké reaktivní iontové leptání

Hluboké reaktivní iontové leptání (DRIE - Deep Reactive-Ion Etching) se používá pro tvorbu auxetických struktur v tenkých deskách (s tloušťkou od 200 nm do 50 μm). Jedná se o kombinaci chemického leptání a odprašování [40]. Chemicky reaktivní plazma - svazek reaktivních iontů leptacího plynu urychlených elektromagnetickým polem (chemické leptání) z povrchu leptaného objektu vytahuje atomy (odprašování). Tento jev je způsoben kinetickou energií iontů, která je vyšší než vazebná energie atomů leptaného materiálu. Celý proces probíhá za velmi nízkých teplot (-80 $^{\circ}\text{C}$ až -150 $^{\circ}\text{C}$), což zpomalí chemickou reakci a podpoří kondenzaci reaktivních plynů, tím jsou chráněny boční stěny před dalším leptáním a zůstávají téměř

svislé. Výhodou této metody výroby je přesnost a možnost použití i pro masovou produkci [30].

3.3.6 Modifikace neauxetických pěn

První uměle vyrobený auxetický materiál vznikl modifikací polymerní pěny [7]. Polymerní pěna byla ve formě stlačena ve všech třech směrech a následně zahřáta na teplotu skelného přechodu. Tím došlo ke změně úhlů ve struktuře - z původní buňky se stala takzvaná re-entrant, změnu buňky vidíme na obrázku 3.7. Nevýhodou tohoto postupu je nahodilá velikost jednotlivých buněk a tedy hůře předvídatelné mechanické vlastnosti [41].

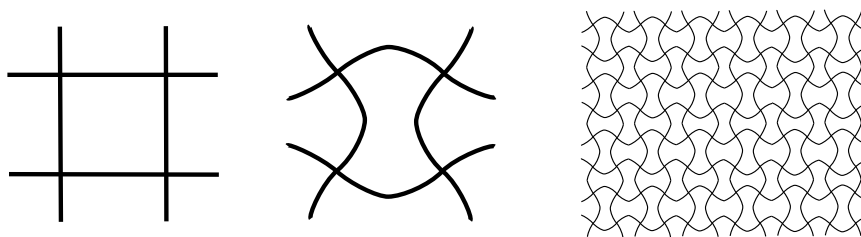


Obrázek 3.7. Porovnání základní a re-entrant buňky

3.4 Možnosti návrhu a výpočtu

3.4.1 Analýza vlastních tvarů

Tato metoda návrhu je založená na tom, že mřížka sestavená z vlastních tvarů jednoduchých útvarů (buněk), jako jsou trojúhelník, čtverec, či šestiúhelník často vykazuje auxetické chování. Prvním krokem je vybrání útvaru, u něho je provedena analýza jeho vlastních tvarů. Z těchto vlastních tvarů je sestavena mřížka (obrázek 3.8), u které je následně detekováno Poissonovo číslo. Počet vlastních tvarů a tedy potenciálně auxetických struktur se zvyšuje s počtem uzlů v buňce [42].



Obrázek 3.8. Čtvercová mřížka, její vlastní tvar a mřížka vlastního tvaru

3.4.2 CAD a MKP

Tvorba geometrie je navržena v některém z komerčních CAD (Computer Aided Design) softwarů, jako jsou Autodesk Inventor, CATIA, Solidworks, PTC Creo Parametric, atd. Nejprve je vytvořena základní buňka, která je rozmnožena pro vytvoření celé struktury. Tím je hotov CAD model. Pokud CAD software použitý pro vytvoření modelu přímo disponuje simulací metodou konečných prvků, je možné provést samotný výpočet zde. Případně je nutné použít specializovaný software pro MKP analýzu, např. ABAQUS, Ansys, či Autodesk Simulation. Následně jsou zadány parametry materiálu modelu a příslušné okrajové podmínky (vazby, zátěže). Dále je nutné vygenerovat síť konečných prvků. Následuje samotná simulace metodou konečných prvků. Z výsledné poměrné deformace se vypočítá Poissonovo číslo. Pro urychlení simulace je možné jako model použít pouze jednu základní buňku, což ale vyžaduje precizní zadání okrajových podmínek. [43]

3.4.3 Analytický přístup

Pro štíhlé struktury s malou tloušťkou stěn, či tenké desky je možno efektivní mechanické vlastnosti určit analyticky na základě Euler-Bernoulliho nosníkové teorie [44, 45].

3.4.4 Homogenizace

Pro nalezení efektivních mechanických vlastností můžeme použít metodu zvanou Homogenizace. Ta patří mezi metody více-škálového modelování, což jsou techniky, které se zabývají řešením problémů, které se současně odehrávají v různých měřítkách času nebo prostoru. Homogenizaci můžeme rozdělit na metody:

- Analytické - Voigt, Reuss, Hashin-Shtrikman, ad.
- Numerické - Výpočetní homogenizace (podrobněji v části 5.3)

3.4.5 Experimentální měření

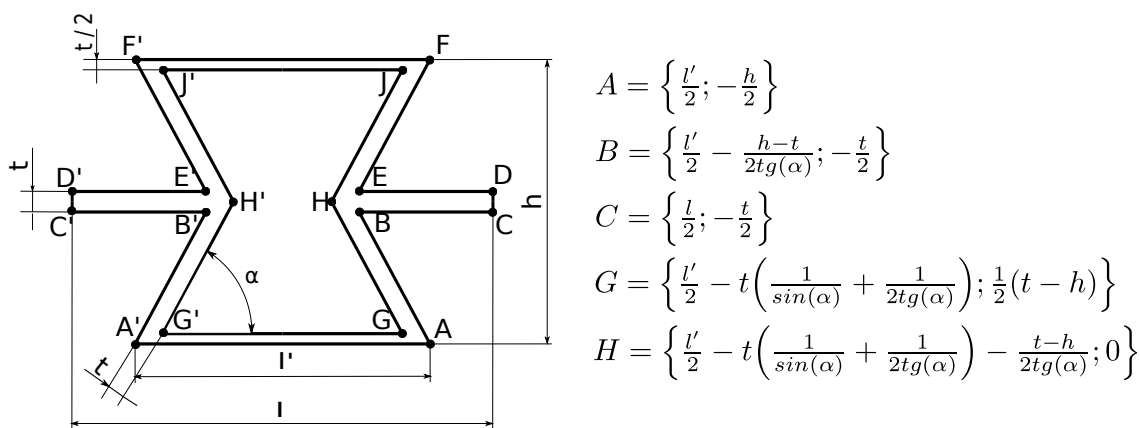
Další variantou, jak určit mechanické vlastnosti auxetických struktur je výroba testovacích vzorků a následné podrobení mechanickým zkouškám. Podrobnější popis je uveden v 6 části této bakalářské práce.

4 Návrh struktur

Samotnému návrhu potenciálně auxetických struktur se věnuje tato část. Jednotlivé struktury budou označovány velkými písmeny A, B, C a jejich příslušné modifikace čísly.

4.1 Struktura A

Struktura A je v literatuře označována jako "re-entrant honeycomb", tento název výstižně popisuje její teoretický mechanismus vzniku z plástve. Pro snadnou a rychlou změnu tvaru základní buňky jsou body A, B, C, G a H (ostatní body jsou jejich průměty kolem os souřadnicového systému) vyjádřeny v závislosti na parametrech l, l', h, t, α, k . Počátek souřadnicového systému je umístěn ve středu buňky.



Obrázek 4.1. Struktura A: re-entrant honeycomb

Výpočty budou provedeny celkem pro 5 modifikací struktury, které byly vybrány tak, aby pokryly co největší škálu možností. Jejich parametry jsou uvedeny v tabulce 4.1. V každé modifikaci se bude měnit jeden parametr v přípustném intervalu hodnot (z hlediska geometrie), a to buď úhel sevření α nebo tloušťka t . Každý interval bude ekvidistantně rozdělen do 5 částí, bude tedy počítáno pro 6 hodnot α , či t .

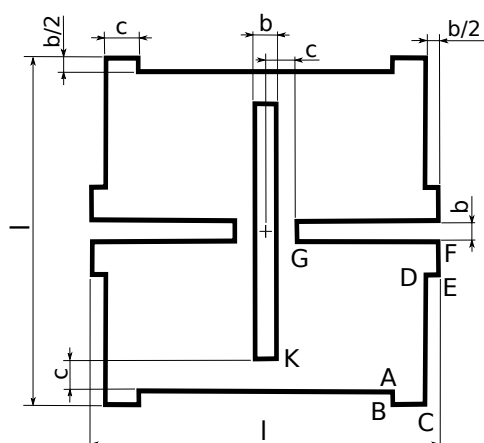
Tabulka 4.1: Testované modifikace struktury A

modifikace	l [mm]	h [mm]	t[mm]	α [°]	$\frac{l}{h}$
1	1,5	1,2	(0,2; 0,3)	65	1,15
2	2	2	0,3	(90; 70)	1,3
3	2,5	3	(0,2; 0,5)	70	1,1
4	4	2,5	0,4	(90; 47)	1,1
5	2	1,8	0,2	(90; 60)	1,2

4.2 Struktura B

Struktura B je založená na stejném základu jako struktura A. Body A, B, C, D, E, F a G jsou vyjádřeny v závislosti na parametrech l , b , c .

Zde bude měněn buďto parametr b (šířku díry) nebo c (délku spoje). Rozsahy hodnot byli vybrány tak, aby nejúžší místo bylo alespoň 0,1 mm široké. A na druhé straně tak, aby nevznikl plný materiál. Výpočty budou provedeny opět pro 5 modifikací a vždy 6 hodnot b , či c .



$$A = \left\{ \frac{l}{2} - \frac{b}{2} - c; -\frac{l}{2} + \frac{b}{2} \right\} \quad E = \left\{ \frac{l}{2}; -\frac{b}{2} - c \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{l}{2} - \frac{b}{2} - c; -\frac{l}{2} \right\} \quad F = \left\{ \frac{l}{2}; -\frac{b}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{l}{2} - \frac{b}{2}; -\frac{l}{2} \right\} \quad G = \left\{ c; -\frac{b}{2} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{l}{2} - \frac{b}{2}; -\frac{b}{2} - c \right\} \quad K = \left\{ \frac{b}{2}; -\frac{l}{2} + c \right\}$$

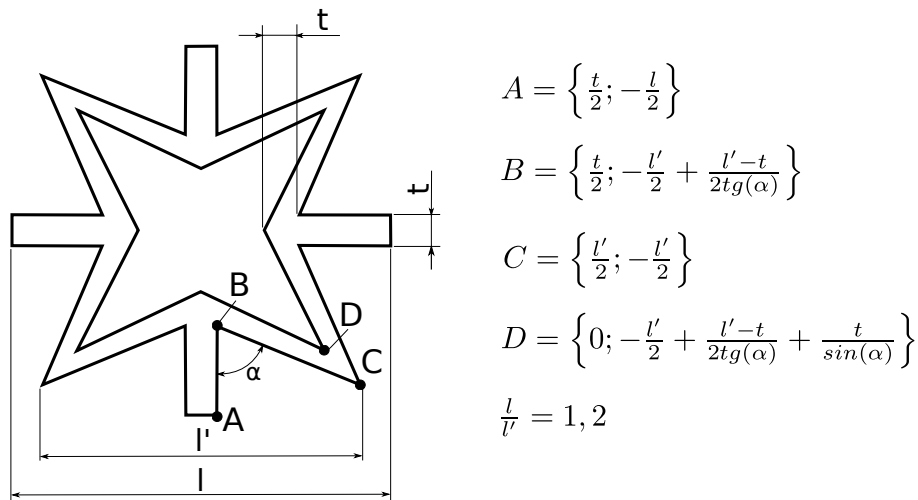
Obrázek 4.2. Struktura B

Tabulka 4.2: Testované modifikace struktury B

modifikace	l [mm]	c [mm]	b[mm]
1	4	0,4	(0,3; 0,7)
2	4	(0,3; 0,7)	0,4
3	5	0,6	(0,4; 0,7)
4	6	0,5	(0,4; 0,7)
5	6	(0,4; 2)	0,5

4.3 Struktura C

Tato struktura je označována jako "star", tedy hvězda. Opět pro ni vyjádříme body A, B, C a D v závislosti na parametrech l , t , α . Dále byl zvolen trochu jiný postup návrhu než pro předchozí struktury. Všechny výpočty budou provedeny s stejným rozsahem úhlů sevření od $\alpha = 80^\circ$ do $\alpha = 54^\circ$ a to v 5 ekvidistantních krocích. K tomu budeme měnit tloušťku t ve 4 krocích z $c = 0,15 \text{ mm}$ na $c = 0,39$. Testované modifikace jsou shrnuty v tabulce 4.3



Obrázek 4.3. Struktura C

Tabulka 4.3: Testované modifikace struktury C

modifikace	l [mm]	t [mm]	$\frac{l}{l'}$	α [°]
1	4	0,15	1,2	(80; 54)
2	4	0,23	1,2	(80; 54)
3	4	0,31	1,2	(80; 54)
4	4	0,39	1,2	(80; 54)

5 Výpočtový model

5.1 Lineární elasticita

Bude předpokládána lineární závislost mezi napětím a poměrnou deformací, velmi malé deformace a rotace. Také se omezíme na dvě dimenze.

Symetrické tenzory (tenzor napětí a poměrných deformací) budeme zapisovat Voigtovou notací. Nebudeme tudíž muset pracovat s tenzory, ale pouze s maticemi.

Příklad na tenzoru napětí ve 2D:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

5.1.1 Cauchyho rovnice rovnováhy tělesa ve 2D

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Zkrácený zápis:

$$D^T \sigma + f = X \quad (5.1)$$

D^T ... transponovaná matice diferenciálních operátorů

σ ... napětí [MPa]

f ... vektor zatížení [F]

X ... plošné síly [F]

5.1.2 Kinematika deformace

Kinematiku deformace představuje závislost mezi posunutím a poměrnou deformací. Zde se omezíme na předpoklad, že deformace jsou velmi malé. Po tomto zjednodušení můžeme psát.

Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Zkrácený zápis:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (5.2)$$

ϵ ... poměrné deformace [1]

D ... matice diferenciální operátorů

u ... vektor posunutí [mm]

5.1.3 Konstitutivní vztah mezi napětím a deformací

Předpoklad je lineárně pružné chování materiálu, a tak bude tímto vztahem Hookeův zákon pro rovinnou napjatost, tedy závislost mezi napětími a poměrnými deformacemi.

Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Zkrácený zápis:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.3)$$

kde

E ... Youngův modul pružnosti [MPa]

ν ... Poissonovo číslo [1]

C ... matice elastických konstant

5.1.4 Dosazení

Do rovnice (5.3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}$$

dosadíme z rovnice (5.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}$$

dostaneme:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (5.4)$$

toto dále dosadíme do rovnice (5.1)

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{X}$$

a dostaneme výsledný vztah:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{X} \quad (5.5)$$

což je eliptická parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro posunutí.

5.2 Metoda konečných prvků

5.2.1 Oslabení nároků řešení

Výpočtový model nebude zatížen povrchovými silami, proto dále nebudou uvažovány. Stejně tak vektor zatížení nebude nyní brán v úvahu. Deformační energie je dána jako:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (5.6)$$

Soustava bude v rovnováze tehdy, když deformační bude energie bude minimální, tj variace energie musí být nula:

$$\delta W = 0 \quad (5.7)$$

Variace energie lze rozepsat:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})] d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (5.8)$$

Kde variace tenzoru přetvoření můžeme zapsat jako:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}) \quad (5.9)$$

5.2.2 Návrh řešení

K řešení rovnice (5.8) využijeme Galerkinovu formulaci metody konečných prvků, tj. řešení \mathbf{u} a testovací funkce (variace) $\mathbf{v} = \delta \mathbf{u}$ jsou aproximovány stejnými funkcemi. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(x) C_i$$

$$\delta u = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(x) \delta C_i$$

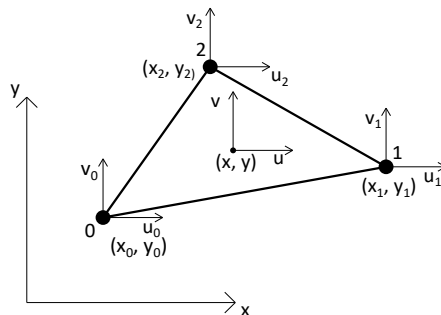
$u(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$... posunutí

N_i ... známé bázové (tvarové) funkce

$C_i = u_i(x) = \begin{bmatrix} u_i(x) \\ v_i(x) \end{bmatrix}$... posunutí jednotlivých uzlů

5.2.3 Výběr typu prvku

Byl zde použit lineární trojúhelníkový prvek. Tento prvek obsahuje tři uzly, ve vrcholech trojúhelníku, které jsou lokálně číslovány proti směru hodinových ručiček. Každý uzel má dva stupně volnosti - posuvy ve směru osy x a y. Posunutí prvku je aproximováno lineární funkcí, tudíž poměrná deformace bude na prvku konstantní, proto tento typ elementu bývá označován jako CST - Constant Strain Triangle. Znázorněn je na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1. Constant Strain Triangle

5.2.4 Diskretizace

Diskretizace se využívá k rozdělení spojitého prostředí (kontinua) na určitý (konečný) počet prvků (elementů). Tedy nahrazení nekonečného množství stupňů volnosti konečným počtem. Místo přesného řešení získáme jeho aproximaci, jejíž přesnost bude záviset na množství prvků a řádu aproximace. Princip diskretizace je vidět na obrázku 5.2.

Posuv jednoho trojúhelníkového 2D prvku lze tedy vyjádřit takto:



Obrázek 5.2. Diskretizace kontinua

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^2 N_i(x) C_i$$

Což můžeme zapsat názorněji takto:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_0 & 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

5.2.5 Volba bázových (tvarových) funkcí

Bázové funkce zvolíme, tak aby funkce N_i nabývala v uzlu i hodnotu 1 a v ostatních 0, tedy aby se vzájemně neovlivňovali, to můžeme vidět na obrázku 5.3.

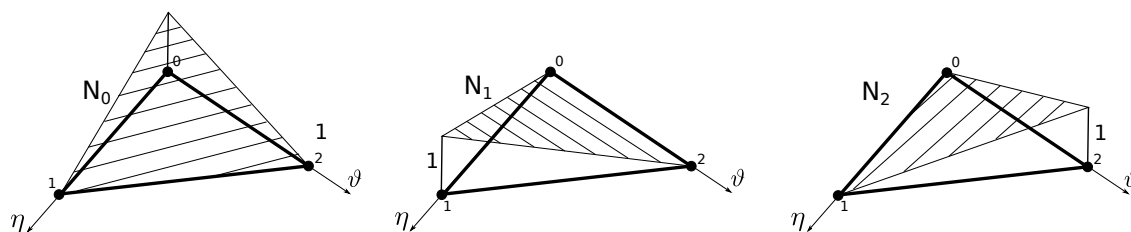
Takže budou vypadat takto:

$$N_0 = 1 - \eta - \vartheta$$

$$N_1 = \eta$$

$$N_2 = \vartheta$$

kde η, ϑ představují lokální souřadnice prvku.



Obrázek 5.3. Bázové funkce na trojúhelníku

5.2.6 Matice B

Řešení pro posuv dosadíme do rovnic kinematiky deformace. Zde vidíme, že diferencovatelnost posunutí přešla pouze na diferencovatelnost bázových funkcí. Vyjádřeno v maticovém zápisu:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_0}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_0}{\partial y} & \frac{\partial N_0}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Rovnici (5.6)

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega_e = 0$$

můžeme tedy přepsat do tvaru:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

5.2.7 Izoparametrické souřadnice

Pro popis vztahu mezi globálními a lokálními souřadnicemi použijeme stejné bázové funkce jako pro aproximaci posunutí (izoparametrické prvky). Globální souřadnice vyjádříme jako funkci lokálních souřadnic takto.

$$\begin{aligned} x &= N_0 x_0 + N_1 x_1 + N_2 x_2 \\ y &= N_0 y_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 \end{aligned}$$

po dosazení za bázové funkce:

$$\begin{aligned} x &= x_0(1 - \eta - \vartheta) + x_1\eta + x_2\vartheta \\ y &= y_0(1 - \eta - \vartheta) + y_1\eta + y_2\vartheta \end{aligned}$$

Transformaci souřadnic z lokálních do globálních provedeme pomocí Jacobiho matice následovně:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{J} je Jacobiho transformační matice, která po provedení derivací vypadá takto:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -x_0 + x_1 & -y_0 + y_1 \\ -x_0 + x_2 & -y_0 + y_2 \end{bmatrix}$$

Provedeme inverzi pro získání derivací báзовých funkcí podle globálních souřadnic:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_0 + y_2 & y_0 - y_1 \\ x_0 - x_2 & -x_0 + x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \end{bmatrix}$$

kde

$x_0, x_1, x_2 \dots$ jsou lokálně číslované souřadnice uzlů v prvku

y_0, y_1, y_2

A ... plocha prvku, pro kterou platí:

$$2A = \det \mathbf{J} = \det \begin{bmatrix} -x_0 + x_1 & -y_0 + y_1 \\ -x_0 + x_2 & -y_0 + y_2 \end{bmatrix} = x_0 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_0 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1$$

5.2.8 Výpočet derivací a dosazení

Výpočet derivací báзовých funkcí podle lokálních souřadnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial \eta} &= -1 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= 1 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial N_0}{\partial \vartheta} &= -1 & \frac{\partial N_1}{\partial \vartheta} &= 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \vartheta} &= 1 \end{aligned}$$

Výpočet derivací báзовých funkcí podle globálních souřadnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(y_1 - y_2) & \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(-y_0 + y_2) & \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{2A}(y_0 - y_1) \\ \frac{\partial N_0}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(-x_1 + x_2) & \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(x_0 - x_2) & \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{1}{2A}(-x_0 + x_1) \end{aligned}$$

Dosazením vypočtených derivací do matice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_0}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_0}{\partial y} & \frac{\partial N_0}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

dostaneme:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & 0 & -y_0 + y_2 & 0 & y_0 - y_1 & 0 \\ 0 & -x_1 + x_2 & 0 & x_0 - x_2 & 0 & -x_0 + x_1 \\ -x_1 + x_2 & y_1 - y_2 & x_0 - x_2 & -y_0 + y_2 & -x_0 + x_1 & y_0 - y_1 \end{bmatrix}$$

5.2.9 Numerická integrace

Z pohledu velkého množství rovnic je nevýhodné využívat analytickou integraci. Gaussova numerická integrace se zakládá na aproximaci integrantu pomocí polynomu a jeho následné integraci. Integrace se provádí v přirozených souřadnicích, což máme připraveno díky použití izoparametrických prvků.

Integrál z rovnice (5.10)

$$\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega_e \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

budeme numericky integrovat podle tohoto schématu:

$$\int_{\Omega_e} g(x, y) d\Omega_e = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\eta, \vartheta) |det \mathbf{J}| d\vartheta d\eta \approx \sum_{p=1}^{n_p} g(\eta_p, \vartheta_p) |det \mathbf{J}| W_p$$

takže v našem případě

$$\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega_e \approx \sum_{p=1}^{n_p} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} |det \mathbf{J}| W_{px} W_{py} = \sum_{p=1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} 2A \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} A$$

kde

$$|det \mathbf{J}| = 2A$$

$n_p = 1$... počet integračních bodů

$W_{px} = W_{py} = \frac{1}{2}$... váhové koeficienty integračních bodů (tabelované hodnoty)

$\eta_p = \vartheta_p = \frac{1}{3}$... souřadnice integračního bodu

Dostáváme tedy:

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} A \mathbf{u} = 0 \quad (5.11)$$

5.2.10 Lokální matice tuhosti

Výsledný vztah, který jsme obdrželi po numerické integraci budeme nazývat maticí tuhosti prvku a označíme ji K_e .

$$K_e = \frac{1}{2} \bar{B}^T C \bar{B} A$$

kde

$$\bar{B}^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -x_1 + x_2 & y_1 - y_2 \\ -y_0 + y_2 & 0 & x_0 - x_2 \\ 0 & x_0 - x_2 & -y_0 + y_2 \\ y_0 - y_1 & 0 & -x_0 + x_1 \\ 0 & -x_0 + x_1 & y_0 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & 0 & -y_0 + y_2 & 0 & y_0 - y_1 & 0 \\ 0 & -x_1 + x_2 & 0 & x_0 - x_2 & 0 & -x_0 + x_1 \\ -x_1 + x_2 & y_1 - y_2 & x_0 - x_2 & -y_0 + y_2 & -x_0 + x_1 & y_0 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} (x_0 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_0 - x_0 y_2 - x_1 y_0 - x_2 y_1)$$

5.2.11 Globální matice tuhosti

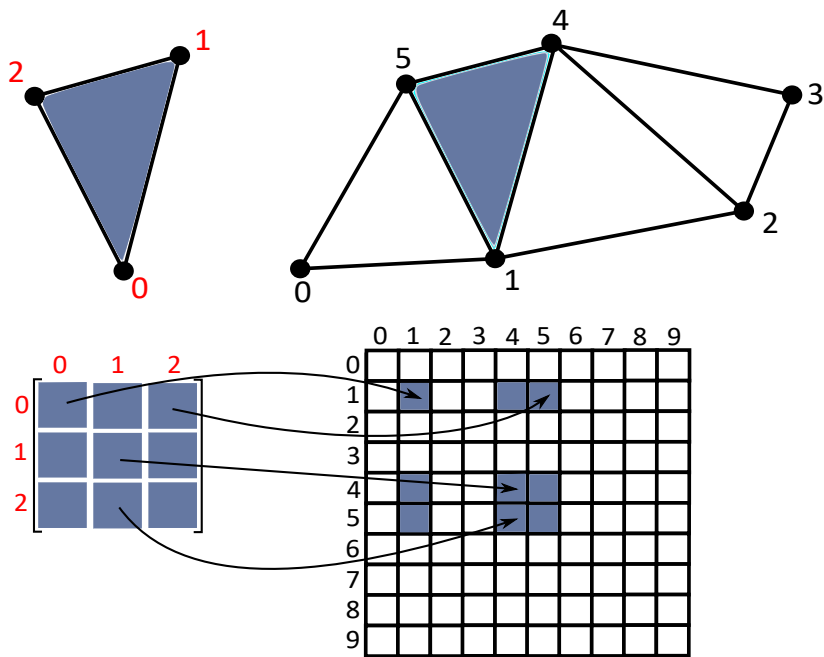
Všechny matice tuhosti jednotlivých prvků K_e , které jsme obdrželi po numerické integraci je nutné sestavit do globální (celkové) matice tuhosti K . Každý prvek (a jeho matice tuhosti) obsahuje tři uzly, které jsou v něm lokálně očíslovány, těmito lokálními indexům vždy náleží i příslušné globální indexy. Podle tohoto spojení uložíme vždy příslušný maticový prvek z lokální do globální matice tuhosti. To je názorně vidět na obrázku 5.4.

Matematicky zapsáno sloučení lokálních matic tuhosti K_e do globální matice K :

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_e$$

kde

n ... počet prvků



Obrázek 5.4. Sestavení globální matice tuhosti

Po sestavení globální matice tuhosti K obdržíme:

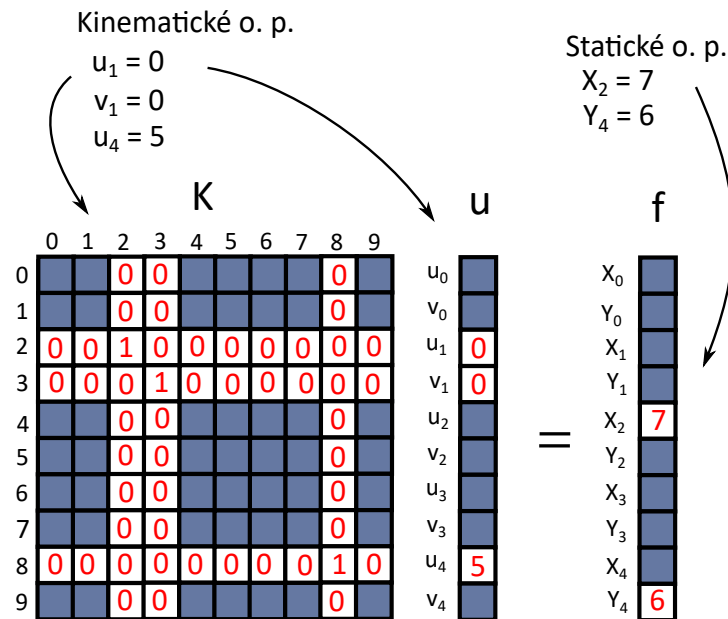
$$Ku = 0 \quad (5.12)$$

5.2.12 Okrajové podmínky

Soustava $Ku = 0$ splňuje podmínky napjatosti a deformace tělesa. Tato soustava takto vyhovuje nekonečnému množství řešení. Musíme tedy najít řešení, které k tomu splňuje také okrajové podmínky. Rozeznáváme dva základní druhy okrajových podmínek:

- statické (silové)
Vjadřují statickou vazbu tělesa s jeho okolím - je předepsán vektor vnějšího zatížení.
- kinematické (geometrické)
Vyjadřují geometrickou vazbu tělesa s jeho okolím - je předepsán vektor posuvu.

Způsob zavedení okrajových podmínek je uveden na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5. Zavedení okrajových podmínek

Budou předepsány kinematické okrajové podmínky tímto způsobem:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & \bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\epsilon}_{22} & \bar{\epsilon}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

kde

u_0, v_0 ...předepsané posuvy na hranici modelu

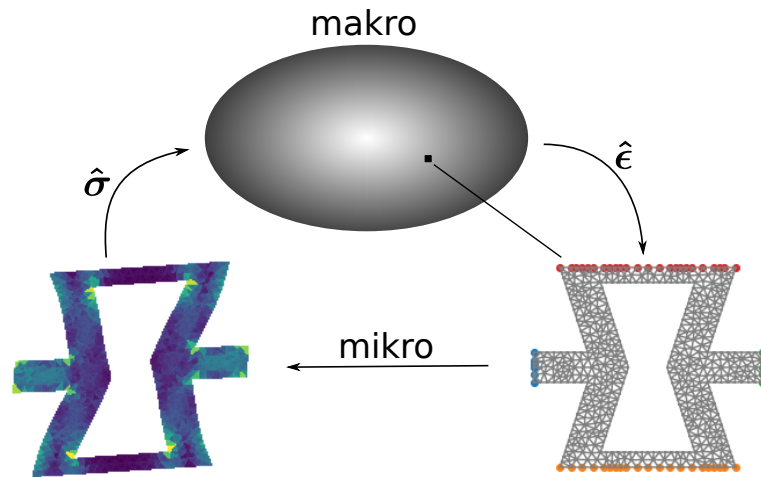
$\bar{\epsilon}$... makroskopický tenzor poměrné deformace (zvolen)

x, y ... souřadnice uzlu

5.3 Výpočetní homogenizace

Každý materiál je mikroskopicky heterogenní, přestože se v nějakém měřítku zdá homogenní - skládá se z různých složek, které vykazují rozdílné vlastnosti. Proto je popis jakéhokoliv materiálu z hlediska mechaniky kontinua vždy pouze aproximací. Stanovení vlastností heterogenního materiálu pomocí experimentálního měření bývá příliš časově a finančně nákladné. Přímá simulace Metodou konečných prvků není možná, jelikož nelze vytvořit takovou síť, která přesně reprezentuje mikrostrukturu a zároveň je přívětivá k výpočtovému času. To nás vede k problému mikro-makro propojení - k snaze o spolehlivé stanovení makroskopického chování média, které vykazuje mikroskopickou heterogenitu. [46]

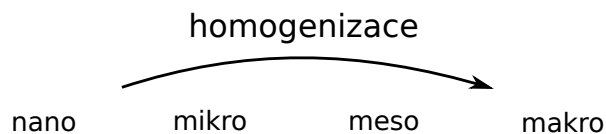
Za tímto účelem byla vyvinuta technika nazývaná Výpočetní homogenizace (Computational homogenization). Její princip spočívá v nahrazení mikro-heterogenní části pomocí referenční homogenní části (RVE), která se z makroskopic-



Obrázek 5.6. Princip homogenizace

kého hlediska chová stejným způsobem. Jinak řečeno: heterogenní médium se chová makroskopicky stejně jako jeho složky, ale s různými efektivními hodnotami.

Referenční částí je takzvaný RVE (Representative Volume Element) definovaný jako nejmenší měřitelný objem, který plnohodnotně reprezentuje celek (obsahuje veškeré nutné informace o mikrostruktuře) [47].



Obrázek 5.7. Homogenizace - měřítko

V našem případě jsou vlastnosti tělesa na makroskopické úrovni velice ovlivněné mikrostrukturální architekturou a makroskopický model tak není explicitně definován [48]. Homogenizace tak bude v této práci sloužit k určení efektivních mechanických vlastností (napětí a poměrné deformace), díky nimž bude možné určit efektivní matici elastických konstant a následně výsledné Poissonovo číslo. Princip homogenizace je znázorněn na obrázku 5.6.

Na obou měřítkách budeme uvažovat kontinuální prostředí. Byl zvolen předpoklad, že rozměry na mikroskopické úrovni jsou řádově nižší než na makroskopické. Obecně je mikroskopické měřítko takové, které je velké v porovnání s velikostí molekul a zároveň malé v celkovém rozsahu.

5.3.1 Hill-Mandelův princip

Hill-Mandelův princip je ve skutečnosti zákon zachování energie při přechodu z mikro do makro měřítko. Vyjadřuje, že hustota deformační energie akumulovaná v mikroskopickém měřítku je rovna makroskopické hustotě deformační energie.

Pro jeden element:

$$\hat{W} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} W d\Omega \quad (5.13)$$

\hat{W} ... efektivní(makroskopická) hustota deformační energie

Ω ... obsah prvku

W ... hustota deformační energie

Hustota deformační energie lze vyjádřit pomocí napětí a poměrné deformace takto:

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}$$

Rovnici (5.13) můžeme tedy přepsat do tvaru:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\Omega$$

Dostaneme se tedy k tzv. zprůměrování napětí a poměrné deformace (stress/strain averaging):

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$
$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega$$

kde

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$... efektivní tenzor napětí

$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$... efektivní tenzor poměrné deformace

5.3.2 Numerická derivace

Celý předchozí výpočet bude proveden celkem 6 krát pro různé makroskopické tenzory poměrné deformace (protože tím jsou nastaveny hodnoty okrajových podmínek), což nám umožní získat efektivní tenzor elastických konstant:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$$

kde

k ...konstanta, která udává hodnotu poměrné deformace (např. 0,01)

Nyní již můžeme efektivní tenzor elastických konstant spočítat ze vztahu:

$$\hat{C}_{ij} = \frac{\partial \hat{\sigma}_i}{\partial \hat{\epsilon}_j}$$

který budeme numericky derivovat:

$$\hat{C}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_i(\hat{\epsilon}_j + h) - \hat{\sigma}_i(\hat{\epsilon}_j)}{h}$$

kde

h...krok numerické derivace

nyní již máme celý efektivní tenzor elastických konstant:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{66} \end{bmatrix}$$

pro snazší následný výpočet spočítáme inverzi \hat{C} a získáme efektivní tenzor poddajnosti \hat{S} :

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & 0 \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_{66} \end{bmatrix}$$

5.3.3 Ortotropní model

Vzhledem k geometrii našich struktur je možné, že se mechanické vlastnosti budou lišit ve směrech na sebe kolmých, proto budeme předpokládat platnost ortotropního modelu. Pokud by Poissonova čísla a moduly pružnosti v tahu vyšly shodně, pak strukturu prohlásíme za izotropní.

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & 0 \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{E}_x} & \frac{-\hat{\nu}_{yx}}{\hat{E}_y} & 0 \\ \frac{-\hat{\nu}_{xy}}{\hat{E}_x} & \frac{1}{\hat{E}_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\hat{G}_{xy}} \end{bmatrix}$$

tedy:

$$\begin{aligned} \hat{E}_x &= \frac{1}{\hat{S}_{11}} & \hat{E}_y &= \frac{1}{\hat{S}_{22}} \\ \hat{\nu}_{yx} &= -\hat{S}_{12}\hat{E}_y & \hat{\nu}_{xy} &= -\hat{S}_{12}\hat{E}_x \\ \hat{G}_{xy} &= \frac{1}{\hat{S}_{66}} \end{aligned}$$

kde

\hat{E}_x, \hat{E}_y ... efektivní moduly pružnosti v tahu v hlavních směrech ortotropie

\hat{G}_{xy} ... efektivní modul pružnosti ve smyku v rovině xy

$\hat{\nu}_{xy}, \hat{\nu}_{yx}$... efektivní Poissonova čísla (první index odpovídá směru působícího normálového napětí a druhý směru příslušné deformace v příčném směru)

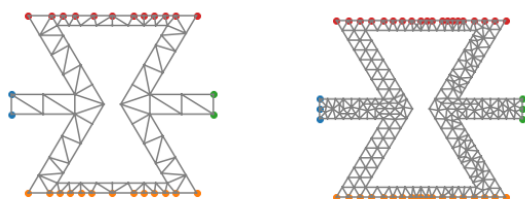
5.4 Studie konvergence

Ještě před zahájením samotných výpočtů je nutno optimálně určit parametry, na nichž závisí přesnost výsledku. To jsou jemnost sítě, počet opakování základní buňky a krok numerické derivace.

Testovací struktura

Pro stanovení optimálních parametrů výpočtu byla použita struktura A (re-entrant honeycomb) s následujícími parametry:

$$l = 2mm; h = 1,8mm; t = 0,2mm; \alpha = 60^\circ; \frac{l}{t} = 1,2$$



Obrázek 5.8. Příklad různých rozlišení sítě (a zároveň geometrie testovací struktury)

5.4.1 Jemnost sítě

Přesnost metody konečných prvků je vedle řádu aproximace závislá hlavně na počtu elementů, tedy jemnosti sítě. Z čím více elementů se síť skládá, tím lépe reprezentuje geometrii modelu, výsledek je díky tomu přesnější, ale také čas výpočtu je delší. Jde tedy o to, nalézt vhodný kompromis mezi přesností a výpočtovým časem.

V tabulce 5.1 zvyšujeme rozlišení sítě (tím je dán počet elementů a tedy i přesnost výsledku) a pozorujeme, jak se chovají hodnoty modulů pružnosti a Poissonova čísla. U hodnot rozlišení kolem 50 vidíme, že se výsledné hodnoty již příliš nemění, a tak můžeme konstatovat, že pro tyto hodnoty řešení konverguje.

Musíme si také dát pozor na tzv. "shear locking", což je jev, který vzniká používáme-li lineární elementy při ohybovém namáhání (případ našich struktur). Lineární elementy nepopisují křivky modelu dostatečně přesně a v důsledku toho vzniká dodatečné smykové napětí (které ve skutečnosti neexistuje), to dělá model tužší než ve skutečnosti je. Shear locking omezíme, pokud v nejužším místě struktury budou vedle sebe alespoň 3 elementy.

Tabulka 5.1: Efektivní mechanické vlastnosti v závislosti na rozlišení síť

rozlišení	$\hat{E}_x [GPa]$	$\hat{E}_y [GPa]$	$\hat{\nu}_{yx} [1]$	$\hat{\nu}_{xy} [1]$	$\hat{G}_{xy} [GPa]$
1	0.574	0.985	-0.175	-0.102	0.112
5	0.573	0.947	-0.179	-0.108	0.103
10	0.521	0.816	-0.212	-0.136	0.053
15	0.521	0.799	-0.213	-0.139	0.051
20	0.495	0.761	-0.224	-0.146	0.040
25	0.493	0.753	-0.227	-0.148	0.038
30	0.490	0.744	-0.228	-0.150	0.036
35	0.484	0.737	-0.230	-0.151	0.035
40	0.484	0.736	-0.231	-0.152	0.035
45	0.482	0.733	-0.232	-0.152	0.034
50	0.482	0.731	-0.232	-0.153	0.034

5.4.2 Počet základních buněk

Přesnost výsledku je dále také závislá na počtu opakování základní buňky. Čím více bude buněk v našem modelu, tím lépe bude popisovat reálnou strukturu. Na druhou stranu při velkém počtu opakování ztrácí smysl homogenizace a stačila by pak pouze simulace metodou konečných prvků. To by ale bylo velmi neefektivní z hlediska času výpočtu.

Následující výpočty budou provedeny s počtem 4 opakování základní buňky, a to jak ve směru x, tak y.

Tabulka 5.2: Efektivní mechanické vlastnosti v závislosti na počtu opakování základní buňky

opakování	$\hat{E}_x [GPa]$	$\hat{E}_y [GPa]$	$\hat{\nu}_{yx} [1]$	$\hat{\nu}_{xy} [1]$	$\hat{G}_{xy} [GPa]$
1	0.599	0.972	-0.157	-0.097	0.109
2	0.374	0.826	-0.445	-0.201	0.067
3	0.311	0.768	-0.575	-0.233	0.056
4	0.279	0.732	-0.654	-0.249	0.050
5	0.260	0.711	-0.707	-0.259	0.047
6	0.248	0.695	-0.744	-0.265	0.045
7	0.238	0.682	-0.774	-0.270	0.044

5.4.3 Chyba numerické derivace

Chyba numerické derivace se skládá z diskretizační chyby, která je daná velikostí kroku a zaokrouhlovací chyby. Se snižováním kroku se zmenšuje diskretizační chyba

a zároveň roste chyba zaokrouhlovací. Je tudíž potřebné určit vhodnou velikost kroku numerické derivace.

Tabulka 5.3: Efektivní mechanických vlastností při snižování kroku numerické derivace

opakování	$\hat{E}_x [GPa]$	$\hat{E}_y [GPa]$	$\hat{\nu}_{yx} [1]$	$\hat{\nu}_{xy} [1]$	$\hat{G}_{xy} [GPa]$
$1x10^{-2}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-3}$	0.490	0.752	-0.229	-0.149	0.038
$1x10^{-4}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-5}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-6}$	0.490	0.752	-0.229	-0.149	0.038
$1x10^{-7}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-8}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-9}$	0.490	0.752	-0.229	-0.149	0.038
$1x10^{-10}$	0.490	0.752	-0.229	-0.149	0.038
$1x10^{-11}$	0.491	0.753	-0.228	-0.149	0.038
$1x10^{-12}$	0.490	0.753	-0.230	-0.149	0.038
$1x10^{-13}$	0.492	0.747	-0.231	-0.152	0.038
$1x10^{-14}$	0.520	0.703	-0.213	-0.158	0.033
$1x10^{-15}$	0.566	0.466	-0.265	-0.321	0.032

V tabulce 5.3 je popsán krok numerické derivace, hodnoty mechanických vlastností se dlouho vůbec nemění, z toho plyne, že diskretizační chyba nehraje v našem případě žádný vliv. Až od hodnoty kroku $1x10^{-14}$ se výsledky začínají rozcházet, což přisuzují právě zaokrouhlovací chybě.

Pro následující výpočty použijeme krok $h = 1x10^{-7}$.

5.5 Výsledky

Pro odhad mechanických vlastností byl sestaven výpočtový model. Skript pro výpočet byl napsán v programovacím jazyce Python s použitím knihovny FEniCS. V této části jsou znázorněny výsledky struktur A2, B5 a struktury C. Ostatní výsledky jsou umístěné v přílohové části.

Tabulka 5.4: Parametry výpočtů

předepsaná hodnota poměrné deformace	$k = 0,01$
rozlišení sítě	roz ≈ 50
krok numerické derivace	$h = 1 \times 10^{-7}$
počet opakování buňky	$n_x, n_y = 4$
referenční modul pružnosti v tahu	$E_{ref} = 2 \text{ GPa}$
Poissonovo číslo	$\nu_{ref} = 0.3$
referenční modul pružnosti ve smyku	$G_{ref} = 0,769 \text{ GPa}$

Byly vypočteny efektivní (makroskopické) mechanické vlastnosti - moduly pružnosti v tahu, smyku a Poissonova čísla. V grafech jsou puntíky označeny hodnoty, pro které byl proveden výpočet. Křivky mezi těmito body jsou pak jejich kubickou interpolací.

Efektivní moduly pružnosti vztáhneme k referenčním modulům, které byly použity pro výpočet. To proto, aby výsledky byli nezávislé na vstupních materiálových vlastnostech ($E_{ref}, G_{ref}, \nu_{ref}$) a popisovali tak pouze strukturu. Poměry $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$ a $\frac{\hat{G}}{G_{ref}}$ označíme jako tahovou, respektive stříhovou kapacitu.

Pro porovnání našich struktur s plným materiálem vztáhneme tahovou a stříhovou kapacitu k porozitě struktury. Porozita vyjadřuje poměr plochy (objemu) pórů A_p ku ploše (objemu) celku A_c , tedy $P = \frac{A_p}{A_c}$. Veličiny $\frac{\hat{E}P}{E_{ref}}$ a $\frac{\hat{G}P}{G_{ref}}$ budeme nazývat měrnou tahovou, respektive stříhovou kapacitou. Dostaneme tedy porovnání tuhosti struktury a plného materiálu o stejné hmotnosti (pokud $\frac{\hat{E}P}{E_{ref}} = 2$, znamená to, že efektivní modul pružnosti v tahu takové struktury je 2x větší, než modul pružnosti v tahu plného materiálu o stejné hmotnosti).

Pokud je struktura namáhána pod jiným úhlem (nebo pootočena), u neizotropního média, tak vykazuje jiné efektivní mechanické vlastnosti (moduly pružnosti v tahu a Poissonova čísla), než pro směr pod kterým byla testována. K zobrazení této skutečnosti nám poslouží polární diagram.

5.5.1 Struktura A2

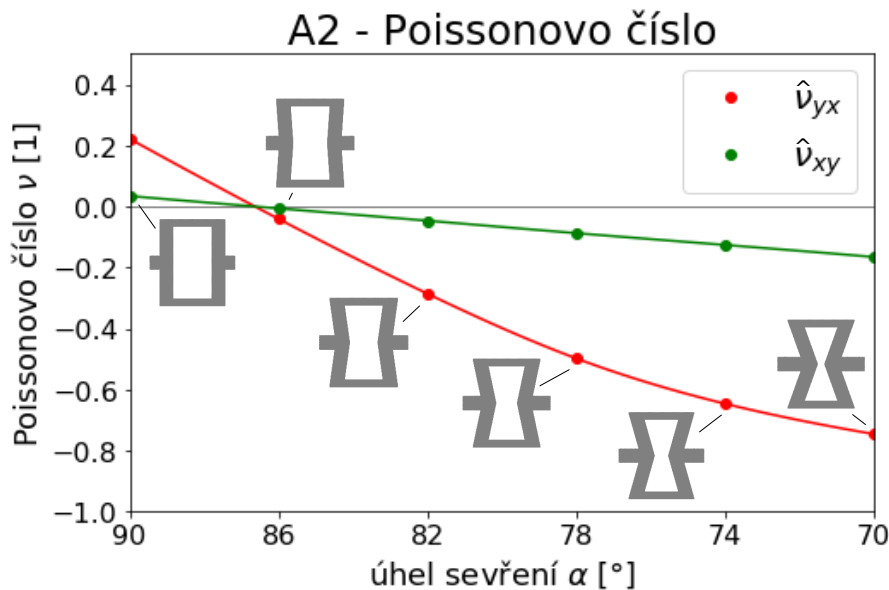
$$l = 2 \text{ mm}, h = 2 \text{ mm}, t = 0.3 \text{ mm}, \frac{l}{\bar{r}} = 1.3, \alpha \in \langle 90; 70 \rangle [^\circ]$$

Počáteční hodnotou úhlu sevření α je pro strukturu A vždy úhel $\alpha = 90^\circ$, to z toho důvodu, že pro úhel $\alpha > 90^\circ$ by vznikla konvenční plástev (což není předmětem zkoumání této práce). Na druhé straně je krajní úhel α nejmenší možný tak, aby se obě "re-entrant" ramena nedotýkala a zbyl prostor pro malou deformaci.

Tedy pro zde zobrazenou strukturu A2 úhel $\alpha = 70^\circ$.

Z následujících grafů (i geometrie struktury) je zřejmé, že struktura A je ortotropní - výpočtem vyšli různé hodnoty pro efektivní Poissonova čísla $\hat{\nu}_{xy} \neq \hat{\nu}_{yx}$ a stejně tak moduly pružnosti $\hat{E}_x \neq \hat{E}_y$.

V obrázku 5.9 vidíme závislost Poissonových čísel na úhlu sevření α . Od úhlu sevření $\alpha = 90^\circ$ jsou obě Poissonova čísla $\hat{\nu}_{xy}, \hat{\nu}_{yx}$ kladné až do hodnoty $\alpha \approx 87^\circ$, kdy dosáhnou nuly (při $\nu = 0$ se objekt ve směru příčném ke směru zatěžování nedeformuje). Pro nižší hodnoty α se struktura stává auxetickou. Poissonovo číslo $\hat{\nu}_{xy}$ pomalu klesá až na nejnižší hodnotu $\hat{\nu}_{xy} = -0,166$, oproti tomu $\hat{\nu}_{yx}$ klesá výrazně strměji na hodnotu $\hat{\nu}_{yx} = -0,746$ při nejmenším úhlu sevření $\alpha = 70^\circ$. U jednotlivých bodů výpočtu jsou zobrazeny příslušné geometrie struktur.

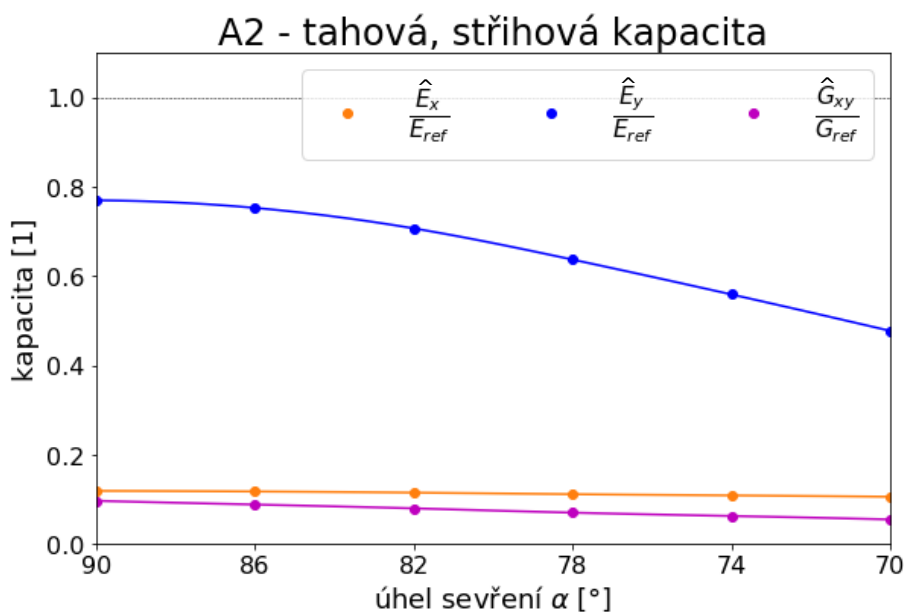


Obrázek 5.9. Závislost hodnot Poissonových čísel ν_{xy}, ν_{yx} při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70° .

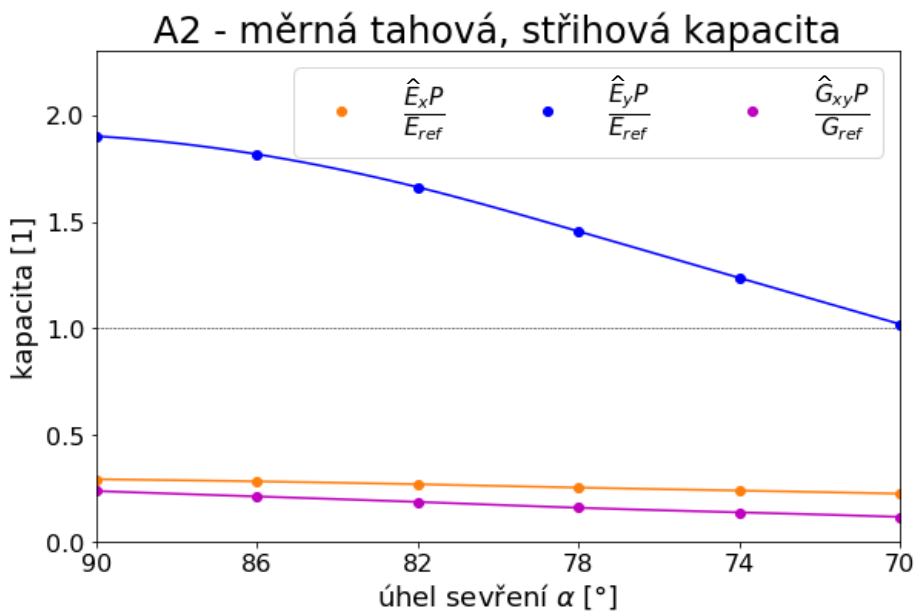
Graf 5.10 zobrazuje "o kolik" má struktura A2 horší mechanické vlastnosti, než plný materiál, který je charakterizován hodnotou 1. Efektivní moduly pružnosti v tahu ve směru x E_x a smykový modul G_{xy} vztahované k referenčním hodnotám se při změně úhlu sevření α mění minimálně kolem hodnoty 0,1 (dosahují 10 % výkonosti plného materiálu, který má stejný objem). Tahová kapacita ve směru y $\frac{\hat{E}_y}{E_{ref}}$ začíná na hodnotě 0,77 při $\alpha = 90^\circ$ a se snižováním úhlu α klesá na hodnotu 0,48.

V grafu 5.11 jsou hodnoty z grafu 5.10 vztahovány k porozitě struktury. Struktura je tedy porovnávána s plným materiálem o stejné hmotnosti (a menším objemu). Měrná tahová kapacita ve směru x a měrná stříhová kapacita se příliš nemění stejně jako v případě grafu 5.10 a dosahují zhruba třetinových hodnot plného materiálu. Na

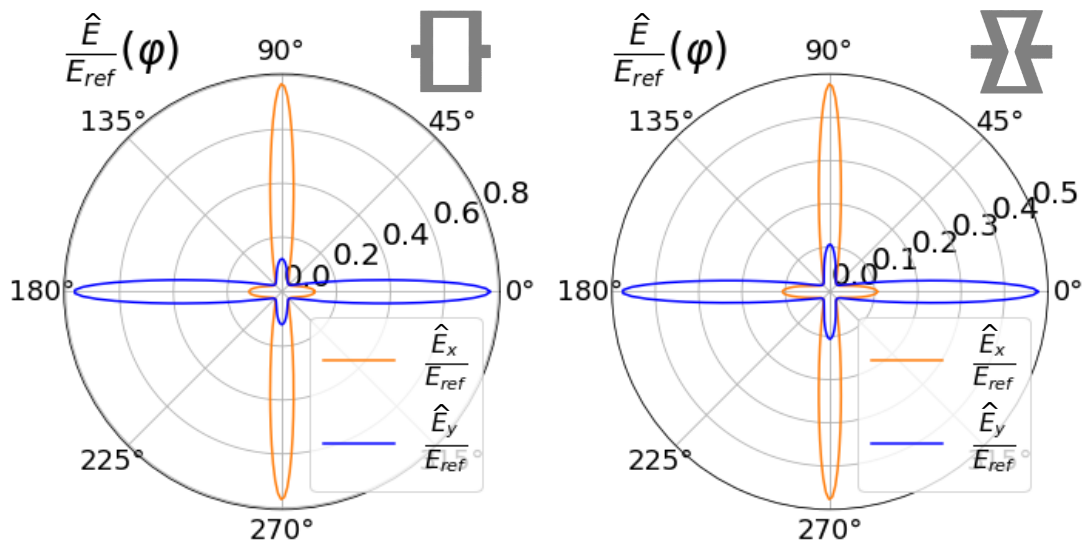
rozdíl od toho měrná tahová kapacita ve směru y je 1,9 pro neauxetickou strukturu $\alpha \in \langle 90; 87 \rangle$. A poté při snižování úhlu α (a klesání ν_{xy}, ν_{yx} také klesá až na hodnotu 1.



Obrázek 5.10. Porovnání modulů pružnosti v tahu E_x, E_y a smyku G_{xy} s referenčními moduly E_{ref} a G_{ref} (tedy tahová a střižová kapacita) při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70° .



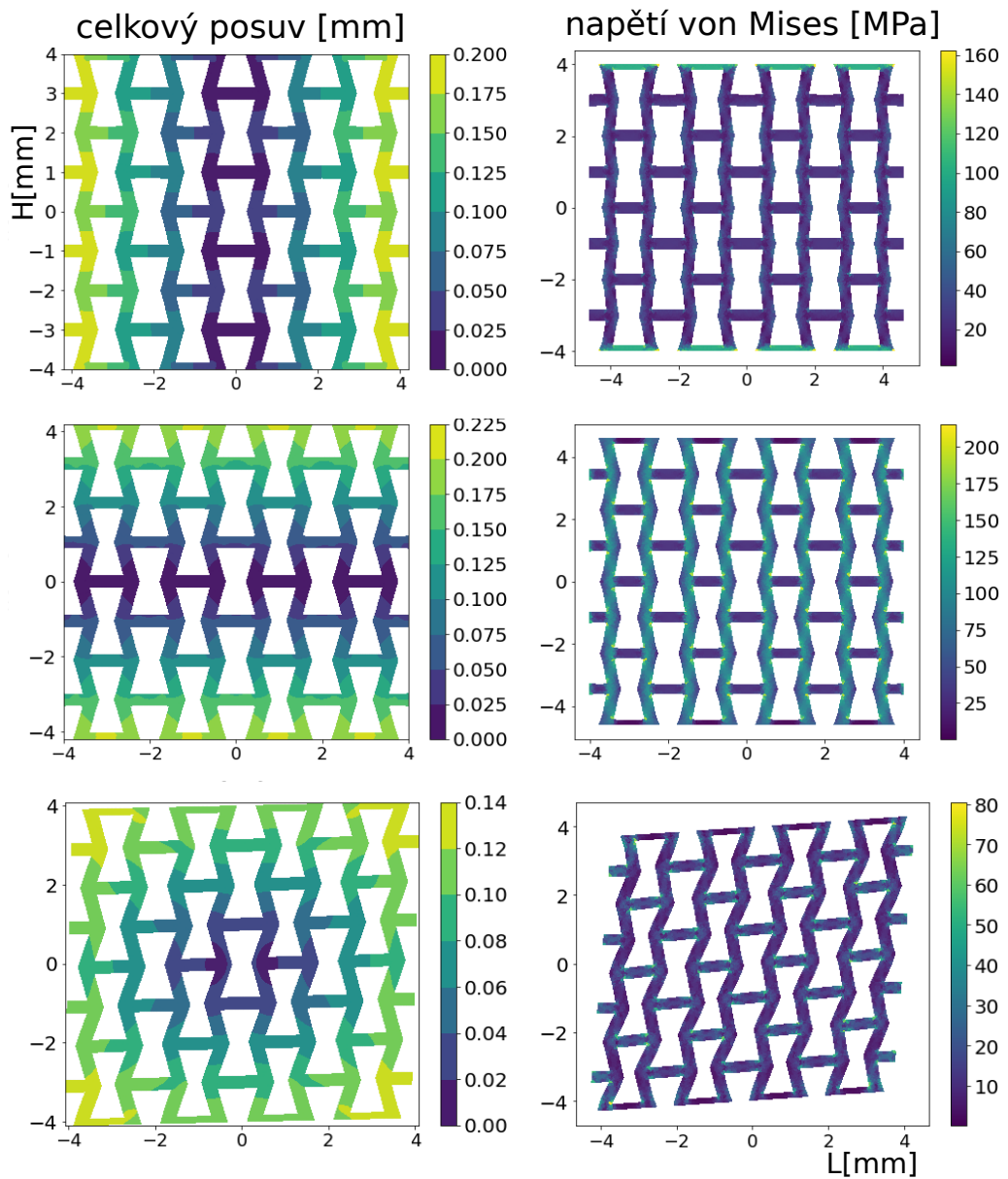
Obrázek 5.11. Závislost tahové a střižové kapacity (z grafu 5.10) vztahované k porositě dané struktury při postupné změně úhlu sevření α z 90° na 70° .



Obrázek 5.12. Polární diagramy tahové kapacity struktury A2 pro úhel $\alpha = 90^\circ$ (vlevo) a $\alpha = 70^\circ$ (vpravo).

V grafu 5.12 je zobrazen polární diagram tahové kapacity v závislosti na úhlu natočení φ pro krajní úhly α struktury A2. Vidíme, že tvary křivek jsou pro oba úhly α totožné a liší se pouze hodnoty. Pokud zvětšujeme úhel zatěžování struktury od $\varphi = 0^\circ$ (výchozí testovaná poloha), tak nejprve obě tahové kapacity (ve směru x a y) rychle klesají až do hodnoty $\varphi = 45^\circ$. Tam opět začnou obě tahové kapacity růst stejným způsobem jako klesaly, ale s opačným průběhem (E_x roste na vyšší hodnotu a E_y na nižší) až do $\varphi = 90^\circ$. Při dalším natáčení by bylo chování stejné díky symetrii struktury.

Celkový posuv a redukované napětí von Mises struktury A2 je zobrazeno v grafu 5.13. V levé části grafu jsou znázorněny celkové posuvy a v pravé příslušné napětí von Mises. V horní části grafu můžeme vidět zatížení tahem, uprostřed tahem a v dolní části stříhem. Zobrazená napětí nejsou příliš průkazná, nejvyšší hodnoty jsou v rozích - singulárních bodech. To lze vyřešit nahrazením ostrých rohů radiusy, ale návrh struktury by byl o poznání složitější, museli bychom generovat jemnější síť pro jejich přesný popis.



Obrázek 5.13. Graf celkového posuvu u (levý sloupec) a k tomu příslušné redukované napětí von Mises (pravý sloupec) struktury A2. Od shora postupně zatížení tahem, tlakem a stříhem.

Přehled mezních výsledků dalších testovaných modifikací struktury A je shrnut v tabulce 5.5.

Tabulka 5.5: Struktura A - přehled výsledků

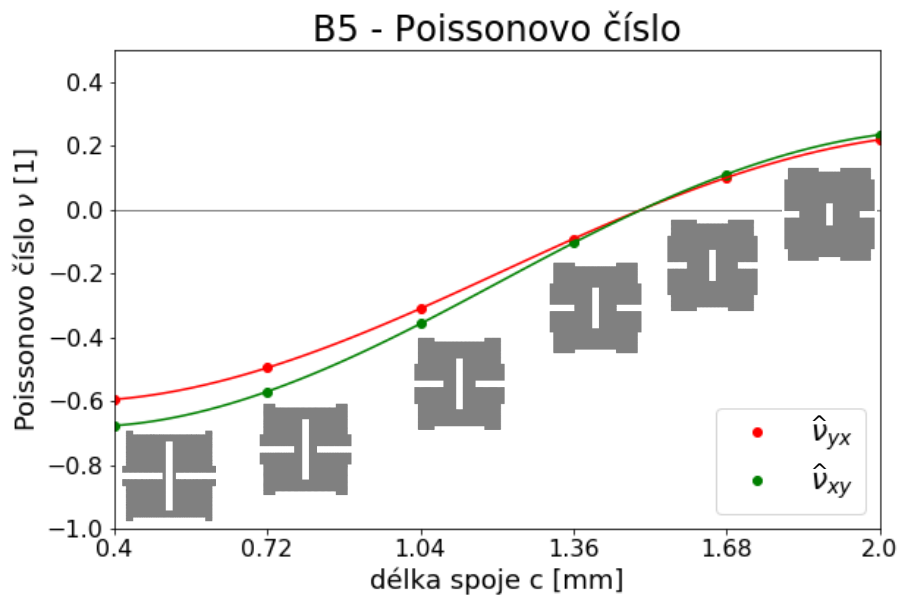
str	$\frac{l}{h}$	$\downarrow \nu_{xy}$	$\downarrow \nu_{yx}$	$\uparrow \frac{\hat{E}_x P}{E_{ref}}$	$\uparrow \frac{\hat{E}_y P}{E_{ref}}$	$\uparrow \frac{\hat{G}_{xy} P}{G_{ref}}$
A1	1,25	-0,21 ($t = 0, 2$)	-0,55 ($t = 0, 2$)	0,36 ($t = 0, 3$)	0,95 ($t = 0, 3$)	0,26 ($t = 0, 3$)
A2	1	- 0,17 ($\alpha = 70$)	- 0,75 ($\alpha = 70$)	0,29 ($\alpha = 90$)	1,9 ($\alpha = 90$)	0,24 ($\alpha = 90$)
A3	0,83	- 0,22 ($t = 0, 2$)	- 1,16 ($t = 0, 2$)	0,26 ($t = 0, 2$)	1,38 ($t = 0, 2$)	0,12 ($t = 0, 5$)
A4	1,6	- 0,35 ($\alpha = 47$)	- 0,31 ($\alpha = 47$)	0,89 ($\alpha = 90$)	1,63 ($\alpha = 90$)	0,2 ($\alpha = 90$)
A5	1,11	- 0,37 ($\alpha = 60$)	- 0,89 ($\alpha = 66$)	0,39 ($\alpha = 90$)	2,48 ($\alpha = 90$)	0,15 ($\alpha = 90$)

5.5.2 Struktura B5

$l = 6 \text{ mm}$, $b = 0.5 \text{ mm}$, $c \in \langle 0, 4; 2 \rangle [\text{mm}]$

Pro strukturu B5 budeme měnit šířku spoje c od 0,4 mm až do 2 mm.

V grafu 5.14 vidíme závislost Poissonových čísel na šířce spoje c . Nejnižší hodnoty Poissonových čísel vykazuje struktura s nejmenší délkou spoje $c = 0,4 \text{ mm}$: $\hat{\nu}_{xy} = -0,676$, $\hat{\nu}_{yx} = -0,594$. Se zvětšováním délky spoje rostou i Poissonova čísla, obě křivky jsou velmi podobné. Při délce spoje $c = 1,5 \text{ mm}$ dosáhnou obě Poissonova čísla hodnoty 0, odsud nadále rostou až na hodnoty $\hat{\nu}_{xy} = 0,235$, $\hat{\nu}_{yx} = 0,22$ při $c = 2 \text{ mm}$. U jednotlivých bodů výpočtu jsou zobrazeny příslušné geometrie struktur.

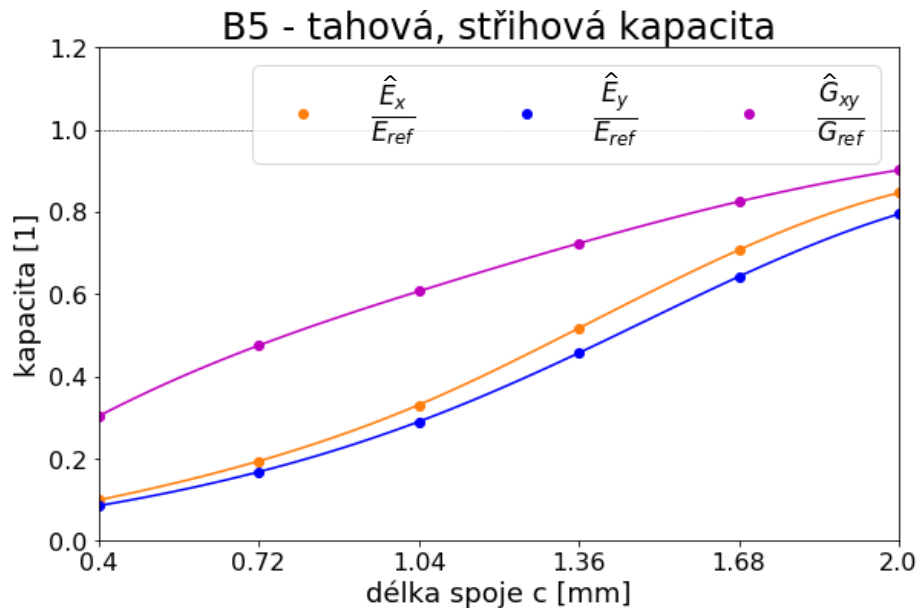


Obrázek 5.14. Závislost hodnot efektivních Poissonových čísel $\hat{\nu}_{xy}$, $\hat{\nu}_{yx}$ při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm.

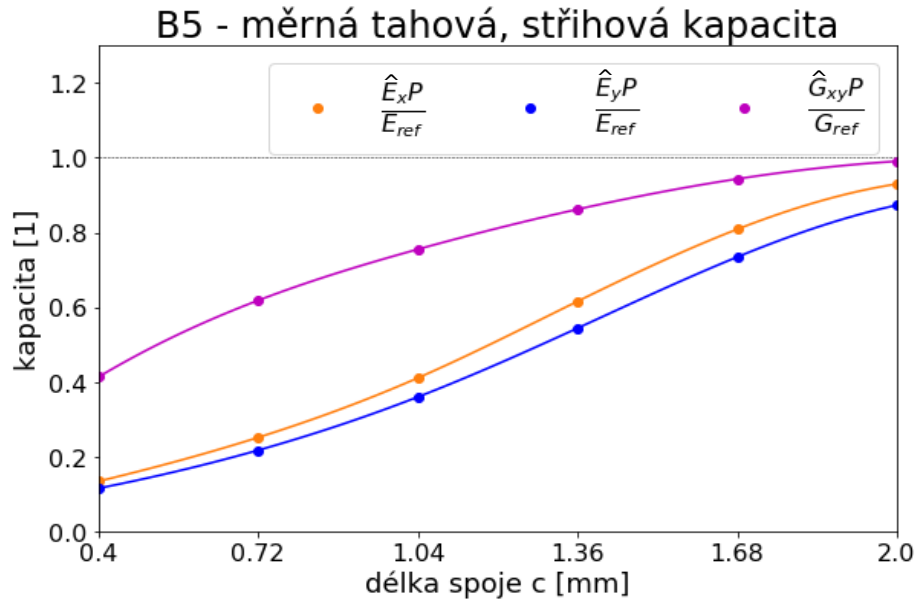
Závislost tahové a stříhové kapacity pro strukturu B5 vidíme v grafu 5.15. Stejně jako u Poissonových čísel, tak jsou i hodnoty tahových kapacit v obou

směrech velmi podobné. Se zvětšováním délky spoje rostou i efektivní mechanické vlastnosti, tahové kapacity startují na hodnotě 0,08 pro $c = 0,4 \text{ mm}$ a končí na 0,8 pro $c = 2 \text{ mm}$. Střihová kapacita roste z hodnoty 0,29 až na 0,9.

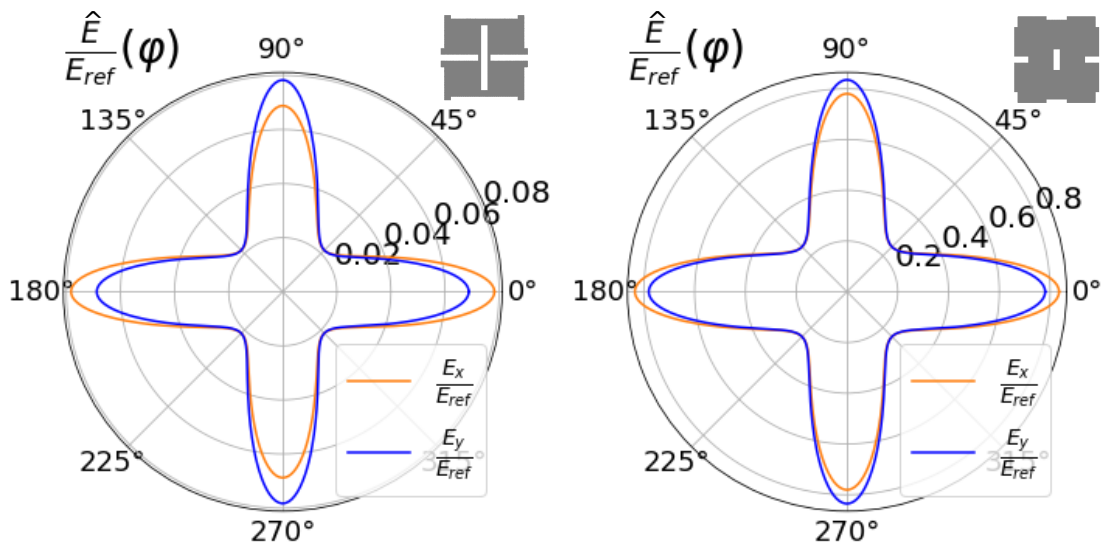
Graf 5.16 měrných kapacit je oproti předchozímu grafu 5.15 jen mírně posunut do vyšších hodnot. To kvůli malé porozitě struktury B.



Obrázek 5.15. Porovnání modulů pružnosti v tahu E_x, E_y a smyku G_{xy} s referenčními moduly E_{ref} a G_{ref} (tedy tahová a střižová kapacita) při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm.



Obrázek 5.16. Závislost tahové a střižové kapacity (z grafu 5.10) vztažené k porozitě dané struktury při postupné změně délky spoje c z 0,4 mm na 2mm.



Obrázek 5.17. Polární diagramy tahové kapacity struktury B5 pro délky spoje c = 0,4 mm (vlevo), c = 2mm (vpravo)

V polárních diagramech 5.17 vidíme, že křivky představující hodnoty tahových kapacit jsou v obou směrech velmi podobné stejně jako v grafu 5.15. Na základě této skutečnosti můžeme prohlásit, že struktura B je téměř izotropní. Tedy platí $\hat{\nu} \approx \hat{\nu}_{xy} \approx \hat{\nu}_{yx}$ a $\hat{E} \approx \hat{E}_x \approx \hat{E}_y$, což můžeme přibližně vidět ve grafech výše.

Přehled mezních výsledků dalších testovaných modifikací struktury B je shrnut v tabulce 5.6.

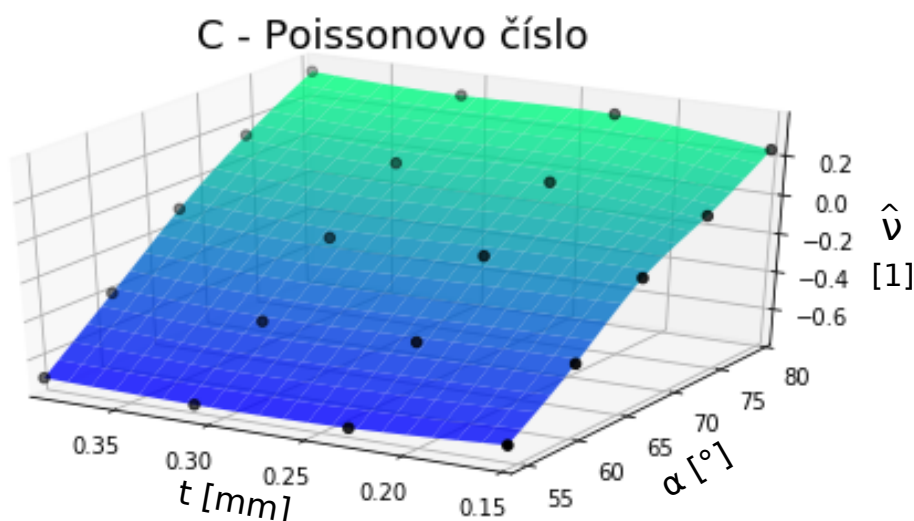
Tabulka 5.6: Struktura B - přehled výsledků

str	$\downarrow \hat{\nu}_{xy}$	$\downarrow \hat{\nu}_{yx}$	$\uparrow \frac{\hat{E}_x P}{E_{ref}}$	$\uparrow \frac{\hat{E}_y P}{E_{ref}}$	$\uparrow \frac{\hat{G}_{xy} P}{G_{ref}}$
B1	-0,59 ($b = 0, 46$)	-0,51 ($b = 0, 3$)	0,37 ($b = 0, 7$)	0,22 ($b = 0, 7$)	0,76 ($b = 0, 7$)
B2	-0,65 ($c = 0, 3$)	-0,55 ($c = 0, 3$)	0,44 ($c = 0, 7$)	0,37 ($c = 0, 7$)	0,36 ($c = 0, 7$)
B3	-0,65 ($b = 0, 4$)	-0,55 ($b = 0, 4$)	0,44 ($b = 0, 7$)	0,37 ($b = 0, 7$)	0,36 ($b = 0, 7$)
B4	-0,66 ($b = 0, 7$)	-0,57 ($b = 0, 4$)	0,17 ($b = 0, 7$)	0,13 ($b = 0, 7$)	0,17 ($b = 0, 4$)
B5	-0,68 ($c = 0, 4$)	-0,59 ($c = 0, 4$)	0,92 ($c = 2$)	0,86 ($c = 2$)	0,81 ($c = 2$)

5.5.3 Struktura C

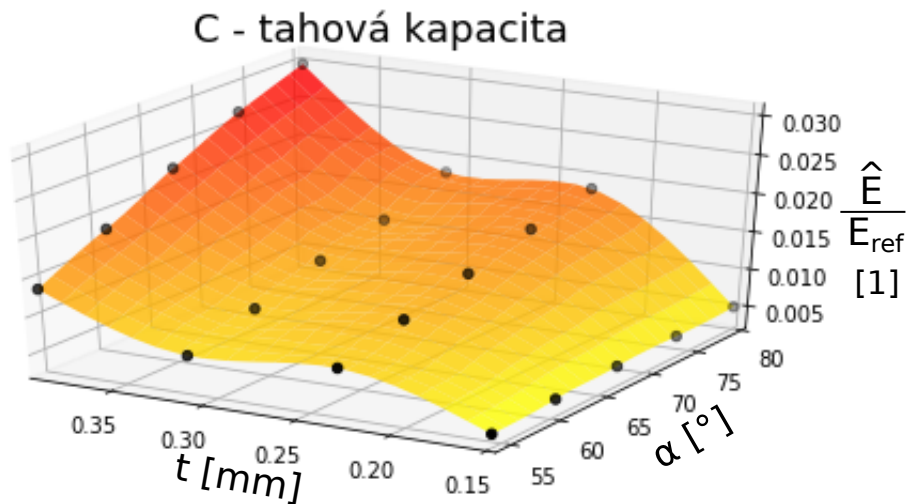
Díky tom, že jsme ve všech modifikacích struktury C počítali pro stejný rozsah a hodnoty úhlů sevření α , tak je možné zobrazit komplexní výsledky v 3D grafech. Z výsledků vyplynulo, že efektivní Poissonova čísla a tahové kapacity jsou v obou směrech shodné, tudíž tuto strukturu budeme považovat za izotropní, stejně jako u struktury B. Vzhledem k tomu budeme tedy v grafech zobrazovat pouze jedno efektivní Poissonovo číslo $\hat{\nu}$ a jednu tahovou kapacitu $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$. Černé puntíky v grafech představují body výpočtu.

Závislost Poissonova čísla $\hat{\nu}$ na tloušťce t a úhlu sevření α zobrazuje graf 5.18. Je zřejmé, že změna tloušťky t má na efektivní Poissonovo číslo $\hat{\nu}$ zanedbatelný vliv. Pro tento případ je tedy efektivní Poissonovo číslo $\hat{\nu}$ pouze funkcí úhlu sevření α a to tak, že se zvětšováním úhlu α roste i hodnota Poissonova čísla. Struktura je auxetická pro úhly $\alpha \approx 70^\circ$ a menší. Nejnižší hodnota Poissonova čísla je $\hat{\nu} = -0,714$ ($\alpha = 54^\circ$, $t = 0,23mm$) a nejvyšší $\hat{\nu} = 0,341$ ($\alpha = 80^\circ$, $t = 0,35mm$).



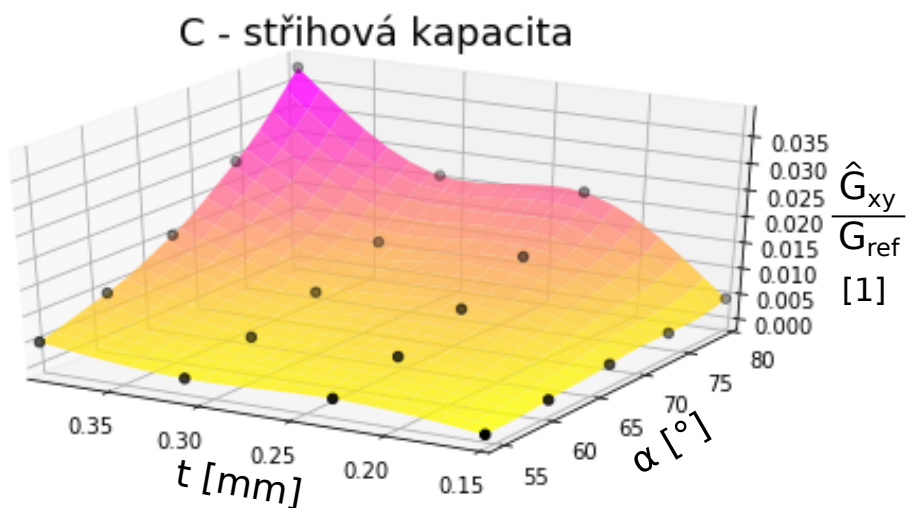
Obrázek 5.18. Závislost efektivního Poissonova čísla $\hat{\nu}$ na úhlu sevření α a tloušťce t .

Tahová kapacita struktury C je zobrazena v grafu 5.19. Tahová kapacita roste při zvětšování úhlu α a stejně tak při zvětšování tloušťky t . Tedy nejmenší tahová kapacita je 0,004 při malém úhlu $\alpha = 54^\circ$ a malé tloušťce $t = 0,15\text{mm}$. Naopak největší $\frac{\hat{E}}{E_{ref}} = 0,03$ při $\alpha = 80^\circ$ a tloušťce $t = 0,39\text{mm}$.



Obrázek 5.19. Závislost tahové kapacity $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$ na úhlu sevření α a tloušťce t .

Na obrázku 5.20 můžeme vidět, že stříhová kapacita roste plynule s úhlem α . S zvětšováním šířky roste od tloušťky $t = 0,15\text{mm}$ do $t = 0,23\text{mm}$, následně při dalším zvyšování tloušťky až do $t = 0,31\text{mm}$ se hodnota stříhové kapacity nemění. Poté začíná opět růst až na nejvyšší hodnotu 0,038 ($\alpha = 80^\circ$, $t = 0,35\text{mm}$).



Obrázek 5.20. Závislost stříhové kapacity $\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$ na úhlu sevření α a tloušťce t

6 Experimentální měření

V této části jsou experimentálně ověřeny vypočtené elastické konstanty. Pro vybrané modifikace struktur A, B a C byly provedeny statické zkoušky tahem a stříhem. Pro každou strukturu jedna zkouška tahem a jedna stříhem.

6.1 Výroba zkušebních vzorků

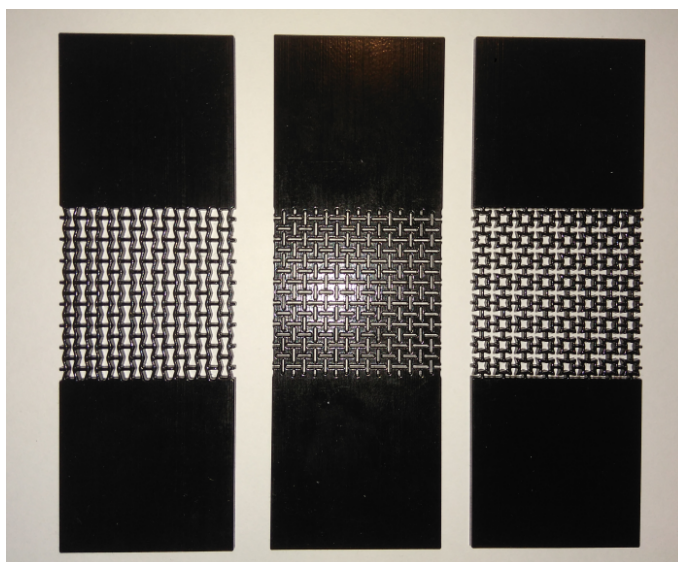
Zkušební vzorky byly vyrobeny 3D tiskem - technologií PolyJet, konkrétně na tiskárně Stratasys J750. Pro tisk byl použit fotopolymerní materiál VeroFlex. Vzorky pro tahovou zkoušku jsou vidět na obrázku 6.1 a pro stříhovou zkoušku na obrázku 6.2.

Pro zkoušení byly vybrány struktury s následujícími parametry:

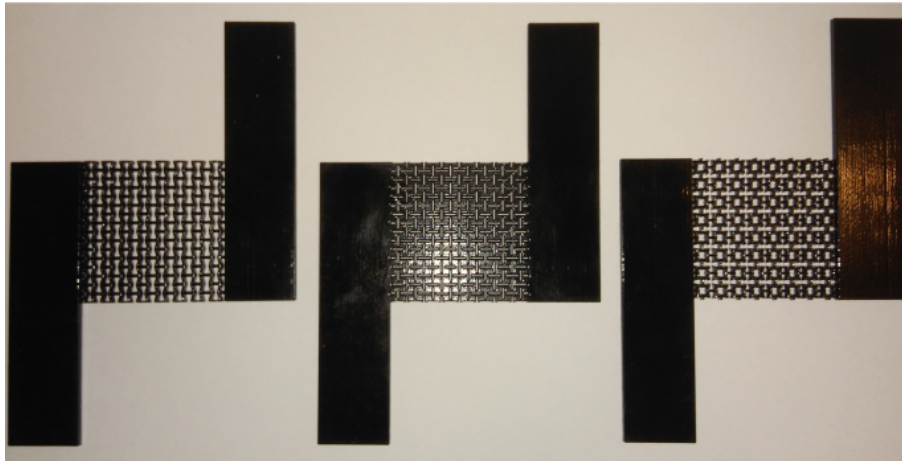
A: $l = 5 \text{ mm}$, $h = 5 \text{ mm}$, $t = 0.75 \text{ mm}$, $\frac{l}{\bar{v}} = 1.3$, $\alpha = 74^\circ$ (struktura A2, $\alpha = 74^\circ$)

B: $l = 5 \text{ mm}$, $b = 0.42 \text{ mm}$, $c = 0.6 \text{ mm}$ (struktura B5, $c = 0.72 \text{ mm}$)

C: $l = 5 \text{ mm}$, $t = 0.6 \text{ mm}$, $\alpha = 60$



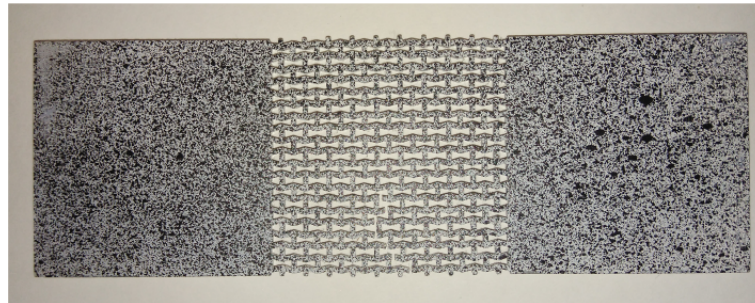
Obrázek 6.1. Zkušební vzorky pro zkoušku tahem



Obrázek 6.2. Zkušební vzorky pro zkoušku stříhem

6.2 Příprava zkušebních vzorků

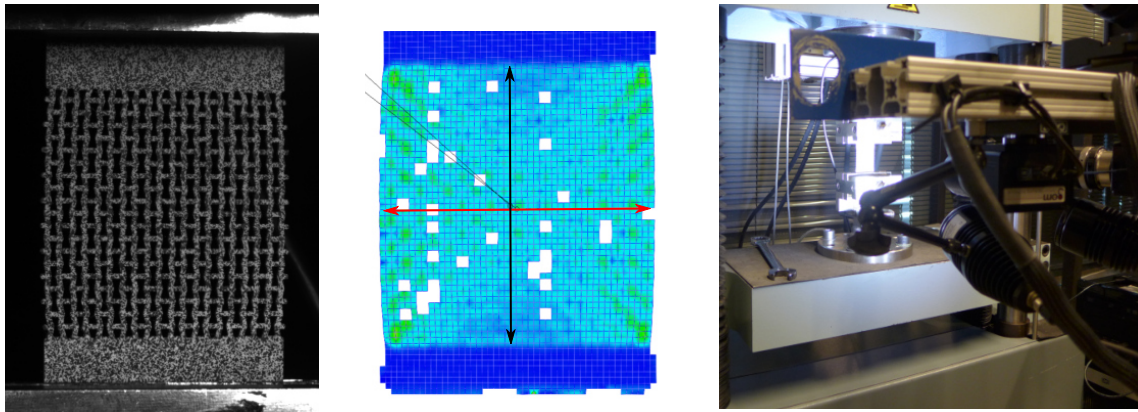
Před samotným experimentem je nutné měřicí vzorky upravit tak, aby bylo možné deformaci snímat. To je zajištěno vytvořením náhodného skvrnitého vzoru na snímané straně vzorku. Vzor se deformuje společně se zkušebním vzorkem a nese tak informaci o vznikajících deformacích. Snímaná strana vzorku byla nastříkána bílým sprejem a skvrnitý vzor následně vytvořen černým. Výsledek přípravy vzorku je vidět na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3. Vzorek připravený pro zkoušení

6.3 Optické měření

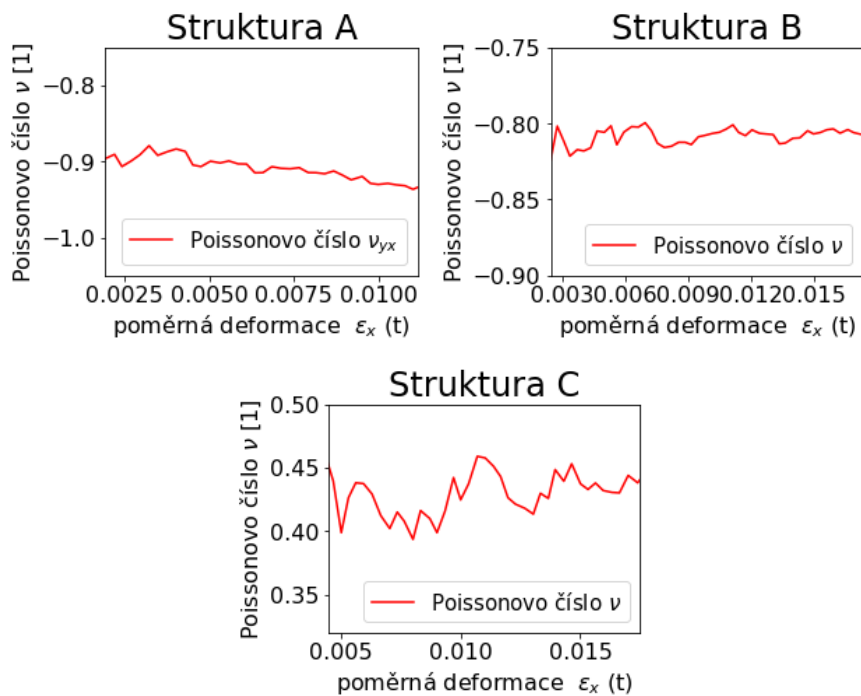
Pro naše měření byl použit optický měřicí systém ARAMIS. Tento systém využívá dvou digitálních kamer, které snímají změny poloh bodů v průběhu deformace vzorku zatíženého v trhacím zařízení. Polohy bodů jsou v softwaru vyhodnoceny a porovnány, z čehož je určena deformace vzorků. Na obrázku 6.4 je vidět měřicí systém a zkušební vzorek v průběhu zkoušky.



Obrázek 6.4. Vlevo snímek vzorku při průběhu zkoušky, uprostřed snímek s vizualizací deformace ze softwaru ARAMIS, kde šipky představují místa měření posuvů, vpravo snímek měřicího systému a trhačího zařízení.

6.4 Výsledky

Naměřené hodnoty Poissonových čísel v závislosti na poměrné deformaci jsou vidět na obrázku 6.5. U struktur A a B se Poissonovo číslo při zvětšování deformace příliš neměnilo a kolísalo kolem hodnoty $-0,9$ respektive $-0,8$. U struktury C bylo nutno přizpůsobit parametry struktury tak, aby bylo možné snímat její deformaci. To zapříčinilo výslednou kladnou hodnotu Poissonova čísla mezi $0,4$ až $0,45$.



Obrázek 6.5. Naměřené hodnoty Poissonových čísel v závislosti na poměrné deformaci

7 Závěr

Pro tři struktury byly provedeny výpočty efektivních mechanických vlastností. Metodou konečných prvků jsme vypočítali tenzory napětí na jednotlivých prvcích, z kterých byly technikou výpočetní homogenizace získány efektivní Poissonova čísla, moduly pružnosti v tahu a smyku. Místo efektivních modulů pružnosti jsou uváděny tzv. kapacity, které lépe charakterizují tyto struktury, díky jejich pórovitosti. Struktura A (re-entrant honeycomb) se podle předpokladu ukázala jako ortotropní. Pro struktury B a C (star) se Poissonova čísla a moduly pružnosti v obou směrech lišily, ale pouze mírně, a tak bychom tyto struktury mohli nazvat izotropními.

Všechny navržené struktury se v určitém rozsahu parametrů ukázali jako auxetické, tedy vykazují záporné Poissonovo číslo.

U všech zkoumaných struktur se ukázalo, že záporné Poissonovo číslo vede díky pórovitosti ke snížení hodnot modulů pružnosti. Pokud přihlédneme právě i k pórovitosti a porovnááme plný materiál s pórovitou strukturou o stejné hmotnosti (tedy větším objemu) tak výsledné mechanické vlastnosti nejsou tak špatné. Velmi výkonnou se ukázala struktura A (re-entrant honeycomb) při zatížení ve směru y , kdy pro neauxetickou strukturu A5 ($\alpha = 90^\circ$) byla nejvyšší měrná kapacita v tomto směru $\frac{\hat{E}_y P}{E_{ref}} = 2,475$, jinak řečeno při stejné hmotnosti dosáhla téměř 250% tuhosti ve směru y oproti plnému materiálu. A pro první auxetickou strukturu A5 ($\alpha \approx 87^\circ$) $\frac{\hat{E}_y P}{E_{ref}} = 2,4$. V tabulce 7.1 jsou struktury kvalitativně zhodnoceny.

Tabulka 7.1: Zhodnocení struktur

struktura	auxetičnost	tahová kapacita x	tahová kapacita y	stříhová kapacita
A	☺	☹	☺	☹
B	☺	☹	☹	☹
C	☺	☹	☹	☹

Zajímavých výsledků bylo dosaženo pro smykové moduly pružnosti. Podle lineární elasticity je modul pružnosti ve smyku pro izotropní materiál závislý na Poissonově čísle a modulu pružnosti v tahu podle vztahu: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Pokud do této rovnice dosadíme Poissonovo číslo ν , které je záporné, tak se zmenší jmenovatel zlomku a výsledný modul pružnosti ve smyku G by se měl podle

teorie lineární elasticity zvýšit. To se podle výpočtů nepotvrdilo ani u jedné ze struktur. A to ani v případě, pokud jsme mechanické vlastnosti auxetické struktury vztáhly k porozitě a porovnávali s plným materiálem o stejné hmotnosti. To vede k závěru, že klasická teorie kontinua není vhodná pro předpovězení stříhových mechanických vlastností auxetických materiálů. Posléze bylo zjištěno, že pro strukturu typu re-entrant honeycomb bylo v [45] dosaženo stejného úsudku. Tuto skutečnost podtrhuje to, že pro strukturu A3 bylo dosaženo Poissonova čísla ν_{yx} menšího než jedna ($\nu_{yx} = -1,16$), což podle klasické teorie kontinua není možné.

Jak již bylo zmíněno, veškeré výpočty jsou platné pouze pro malé deformace a pro materiály, které lze popsat pomocí Hookeova zákona. U struktur, které mají malé vzdálenosti mezi jejich stěnami, či rameny může již při malém zatížení (především stříhem u struktur A a C) dojít k dotyku stěn. V této chvíli přestává náš model platit.

U struktur s malou tloušťkou stěn (A - re-entrant honeycomb, C - star) hrozí nebezpečí vzpěru. Vypočtené mechanické vlastnosti nemusí být platné, pokud by již při malém zatížení došlo k vybočení a následnému zhroucení struktury. Ověření stability je ale nad rámec této práce.

Tabulka 7.2: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot

A2	Vypočtené	Naměřené	B5	Vypočtené	Naměřené
$\hat{\nu}_{yx}$	-0,65	-0,87	$\hat{\nu}$	-0,57	-0,81
$\frac{\hat{E}_y}{E_{ref}}$	0,56	0,98 až 1,65	$\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$	0,15	0,15 až 0,26
$\frac{\hat{G}_{xy}}{G_{ref}}$	0,06	0,03 až 0,05	$\frac{\hat{G}_{xy}}{G_{ref}}$	0,18	0,07 až 0,12

C	Vypočtené	Naměřené
$\hat{\nu}$	0,24	0,44
$\frac{\hat{E}}{E_{ref}}$	0,05	0,22 až 0,37
$\frac{\hat{G}_{xy}}{G_{ref}}$	0,05	0,06 až 0,1

Pro vybrané struktury byli vypočtené výsledky ověřeny mechanickými zkouškami na vzorcích vyrobených 3D tiskem. V tabulce 7.2 jsou vypočtené a naměřené výsledky porovnány. Pro výpočet tahových a stříhových kapacit stanovených experimentem byl použit modul pružnosti v tahu z technického listu materiálu VeroFlex, který udává rozsah 950 až 1600 MPa, proto jsou naměřené hodnoty kapacit udávány v určitém rozsahu. Výpočtový model se ukázal jako dostatečně přesný pro určení znaménka Poissonova čísla, nejlepší shody bylo dosaženo u struktury A a nejhorší struktury C. U všech struktur byly naměřeny vyšší hodnoty tahových kapacit než bylo předpovězeno výpočtem, zde bylo dosaženo dobré shody pouze u struktury B. Dobře dopadlo porovnání vypočtených a naměřených stříhových kapacit u všech struktur, kdy experiment potvrdil výsledky výpočtů. Podle literatury [2, 49, 23, 50] by záporné Poissonovo číslo mělo doprovázet navýšení modulu pružnosti ve smyku,

což se v této práci nepotvrdilo podle výpočtů ani provedeného experimentu, naopak došlo k výraznému snížení oproti plnému materiálu.

Literatura

- [1] Siméon Denis Poisson. Note sur les vibrations des corps sonores. *Ann. Chim. Phys*, 36:86–93, 1827.
- [2] Yunan Prawoto. Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: a structural review on the negative poisson's ratio. *Computational Materials Science*, 58:140–153, 2012.
- [3] SP Tokmakova. Stereographic projections of poisson's ratio in auxetic crystals. *Physica status solidi (b)*, 242(3):721–729, 2005.
- [4] Woldemar Voigt. Allgemeine formeln für die bestimmung der elasticitätsconstanten von krystallen durch die beobachtung der biegun g und drillung von prismen. *Annalen der Physik*, 252(6):273–321, 1882.
- [5] Jean-Paul Poirier. *Introduction to the Physics of the Earth's Interior*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Augustus Edward Hough Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press, 2013.
- [7] Roderic Lakes. Foam structures with a negative poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1041, 1987.
- [8] KEMA Evans. Molecular network design. *Nature*, 353:124–125, 1991.
- [9] Ruben Gatt, Luke Mizzi, Joseph I Azzopardi, Keith M Azzopardi, Daphne Attard, Aaron Casha, Joseph Briffa, and Joseph N Grima. Hierarchical auxetic mechanical metamaterials. *Scientific reports*, 5:srep08395, 2015.
- [10] Rakesh S Kshetrimayum. A brief intro to metamaterials. *IEEE Potentials*, 23(5):44–46, 2004.
- [11] Ray H Baughman, Justin M Shacklette, Anvar A Zakhidov, and Sven Stafström. Negative poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*, 392(6674):362–365, 1998.
- [12] Q Liu. Literature review: materials with negative poisson's ratios and potential applications to aerospace and defence. Technical report, DEFENCE SCIENCE AND TECHNOLOGY ORGANISATION VICTORIA (AUSTRALIA) AIR VEHICLES DIV, 2006.

- [13] JB Choi and RS Lakes. Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative poisson's ratio: experiment and analysis. *International Journal of fracture*, 80(1):73–83, 1996.
- [14] KL Alderson, AP Pickles, PJ Neale, and KE Evans. Auxetic polyethylene: the effect of a negative poisson's ratio on hardness. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(7):2261–2266, 1994.
- [15] Cesare Davini, Antonino Favata, Andrea Micheletti, and Roberto Paroni. A 2d metamaterial with auxetic out-of-plane behavior and non-auxetic in-plane behavior. *arXiv preprint arXiv:1708.07112*, 2017.
- [16] Xiangwen Zhang and Deqing Yang. Mechanical properties of auxetic cellular material consisting of re-entrant hexagonal honeycombs. *Materials*, 9(11):900, 2016.
- [17] F Scarpa, JR Yates, LG Ciffo, and S Patsias. Dynamic crushing of auxetic open-cell polyurethane foam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 216(12):1153–1156, 2002.
- [18] JB Choi and RS Lakes. Non-linear properties of polymer cellular materials with a negative poisson's ratio. *Journal of Materials Science*, 27(17):4678–4684, 1992.
- [19] Fabrizio Scarpa. Auxetic materials for bioprotheses [in the spotlight]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(5):128–126, 2008.
- [20] Royale S Underhill. Manufacture and characterization of auxetic foams. 2017.
- [21] Mohammad Sanami, Naveen Ravirala, Kim Alderson, and Andrew Alderson. Auxetic materials for sports applications. *Procedia Engineering*, 72:453–458, 2014.
- [22] Marco Avellaneda and Pieter J Swart. Calculating the performance of 1–3 piezoelectric composites for hydrophone applications: an effective medium approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(3):1449–1467, 1998.
- [23] Vitor Hugo Carneiro, José Meireles, and Hélder Puga. Auxetic materials—a review. *Materials Science-Poland*, 31(4):561–571, 2013.
- [24] JB Choi and RS Lakes. Design of a fastener based on negative poisson's ratio foam. *Cellular Polymers*, 10(3):205–212, 1991.
- [25] KL Alderson, VR Simkins, VL Coenen, PJ Davies, Andrew Alderson, and KE Evans. How to make auxetic fibre reinforced composites. *physica status solidi (b)*, 242(3):509–518, 2005.
- [26] Z Wang, A Zulifqar, and H Hu. Auxetic composites in aerospace engineering. *Advanced composite materials for aerospace engineering: Processing, properties and applications*. Cambridge: Woodhead Publishing, pages 213–240, 2016.

- [27] SK Bhullar, AT Mawanane Hewage, A Alderson, K Alderson, and Martin BG Jun. Influence of negative poisson s ratio on stent applications. *Advances in Materials*, 2(3):42–47, 2013.
- [28] Zheng-Dong Ma and Yuanyuan Liu. Auxetic stents, July 2 2010. US Patent App. 12/829,815.
- [29] OA Abdelaal and SM Darwish. Analysis, fabrication and a biomedical application of auxetic cellular structures. *Int J Eng Innov Technol*, 2(3):218–23, 2012.
- [30] Alban Muslija and Andrés Díaz Lantada. Deep reactive ion etching of auxetic structures: present capabilities and challenges. *Smart Materials and Structures*, 23(8):087001, 2014.
- [31] Laura Zorzetto and Davide Ruffoni. Re-entrant inclusions in cellular solids: From defects to reinforcements. *Composite Structures*, 176:195–204, 2017.
- [32] Yuping Chang and Pibo Ma. Fabrication and property of auxetic warp-knitted spacer structures with mesh. *Textile Research Journal*, page 0040517517716910, 2017.
- [33] Kaufui V Wong and Aldo Hernandez. A review of additive manufacturing. *ISRN Mechanical Engineering*, 2012, 2012.
- [34] formlabs. The ultimate guide to stereolithography (sla) 3d printing. <https://formlabs.com/blog/ultimate-guide-to-stereolithography-sla-3d-printing/#printing-process>, 2017.
- [35] Arnaud Bertsch, Sebastien Jiguet, Paul Bernhard, and Philippe Renaud. Microstereolithography: a review. *MRS Online Proceedings Library Archive*, 758, 2002.
- [36] CM Cheah, JYH Fuh, AYC Nee, and L Lu. Mechanical characteristics of fiber-filled photo-polymer used in stereolithography. *Rapid Prototyping Journal*, 5(3):112–119, 1999.
- [37] Alida Mazzoli. Selective laser sintering in biomedical engineering. *Medical & biological engineering & computing*, 51(3):245–256, 2013.
- [38] P Chennakesava and Y Shivraj Narayan. Fused deposition modeling-insights. In *International Conference on Advances in Design and Manufacturing (ICAD&M'14)*, 2014.
- [39] Objet. PolyJet Matrix™ Technology. <http://www.objet.cz/uploads/files/PolyJet%20Matrix%203D%20Printing%20Technology%20A4.pdf>, 2009. Accessed: 2018-06-01.

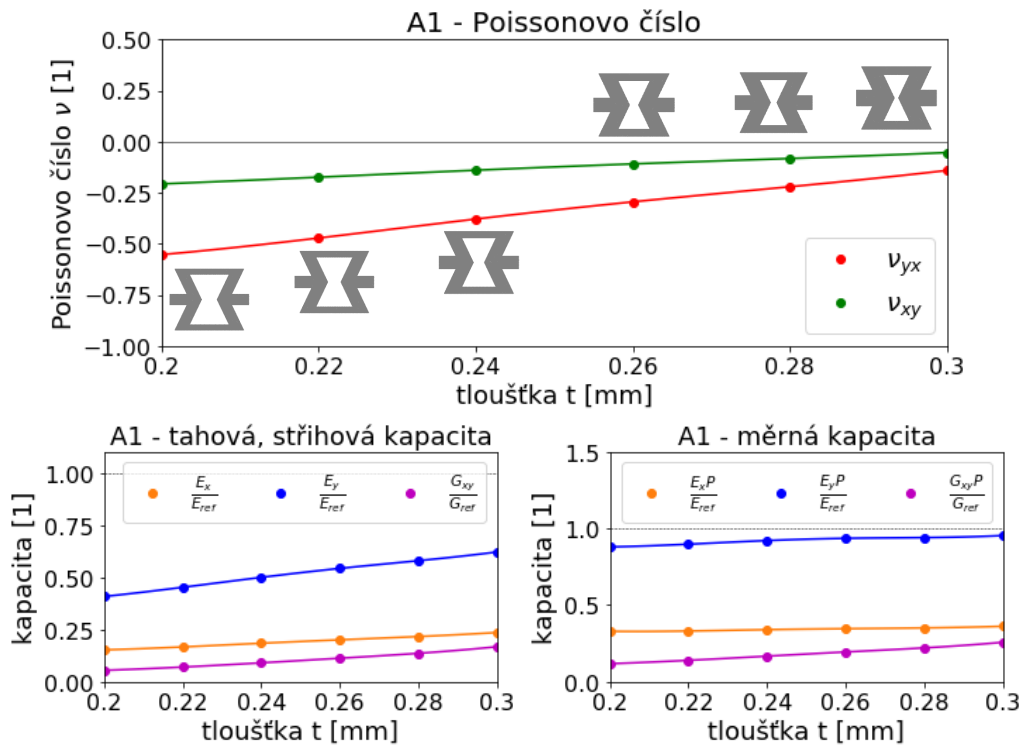
- [40] Tereza Steinhartova. Modifikace povrchu pomoci kovovych a polymernich nanocastic. 2015.
- [41] Alaa Mohammed EL-Butch. *Auxetic Polyurethane Foam*. PhD thesis, Helwan University, 2012.
- [42] Carolin Körner and Yvonne Liebold-Ribeiro. A systematic approach to identify cellular auxetic materials. *Smart Materials and Structures*, 24(2):025013, 2014.
- [43] Juan Carlos Álvarez Elipe and Andrés Díaz Lantada. Comparative study of auxetic geometries by means of computer-aided design and engineering. *Smart Materials and Structures*, 21(10):105004, 2012.
- [44] Luigi Cabras and Michele Brun. Effective properties of a new auxetic triangular lattice: an analytical approach. *Frattura ed Integrità Strutturale*, (29):9, 2014.
- [45] MH Fu, OT Xu, LL Hu, and TX Yu. Nonlinear shear modulus of re-entrant hexagonal honeycombs under large deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 80:284–296, 2016.
- [46] Dipl-Ing T Luther. *Homogenization of Damaged Concrete Meso-structures using Representative Volume Elements—Implementation and Application to SLang*. PhD thesis, Bauhaus–University Weimar Germany, 2005.
- [47] Rodney Hill. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5):357–372, 1963.
- [48] Innocent NIYONZIMA. Alternative numerical method in continuum mechanics computational multiscale.
- [49] Justin Dirrenberger, Samuel Forest, Dominique Jeulin, and Christophe Colin. Homogenization of periodic auxetic materials. *Procedia Engineering*, 10:1847–1852, 2011.
- [50] George Neville Greaves, AL Greer, RS Lakes, and T Rouxel. Poisson’s ratio and modern materials. *Nature materials*, 10(11):823–837, 2011.

Seznam příloh

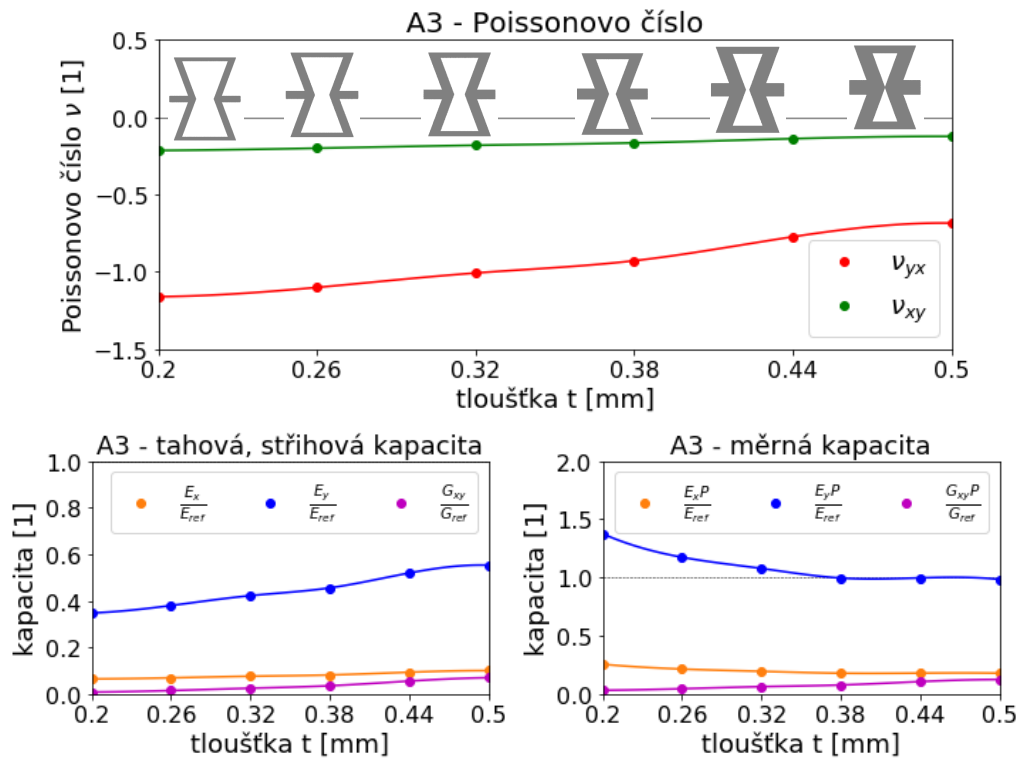
A	Vypočtené výsledky struktury A1	62
B	Vypočtené výsledky struktury A3	63
C	Vypočtené výsledky struktury A4	63
D	Vypočtené výsledky struktury A5	64

E	Vypočtené výsledky struktury B1	64
F	Vypočtené výsledky struktury B2	65
G	Vypočtené výsledky struktury B3	65
H	Vypočtené výsledky struktury B4	66
I	Celkový posuv u (levý sloupec) a napětí von Mises (pravý sloupec) struktury B5.	67
J	Celkový posuv u (levý sloupec) a napětí von Mises (pravý sloupec) struktury C4.	68

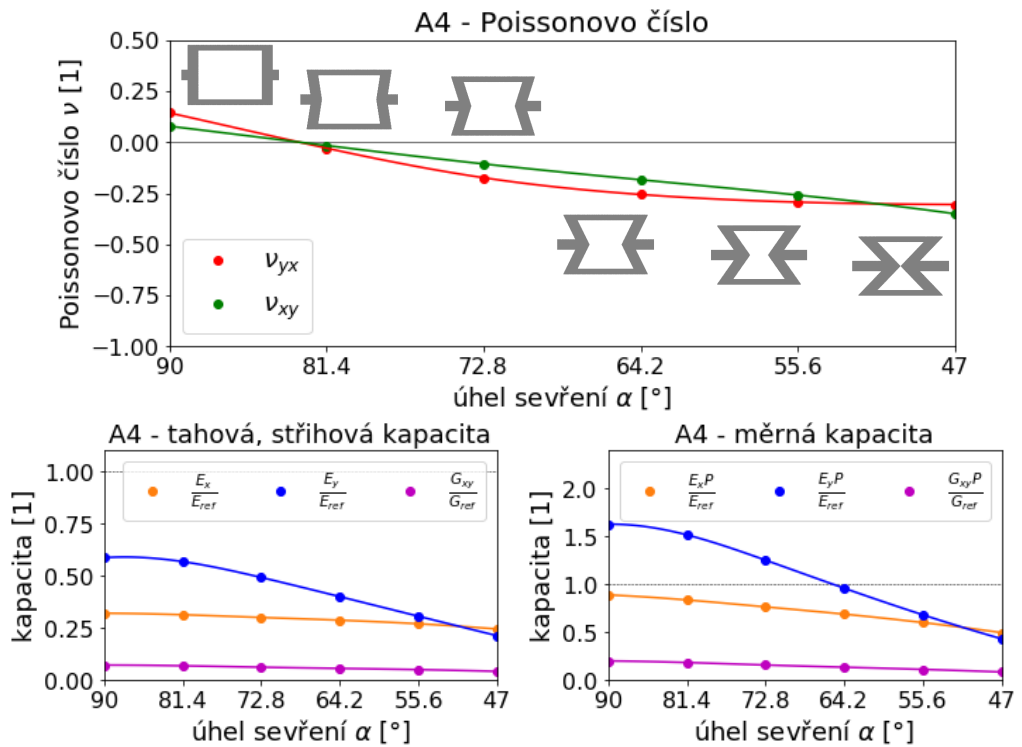
Příloha A. Vypočtené výsledky struktury A1



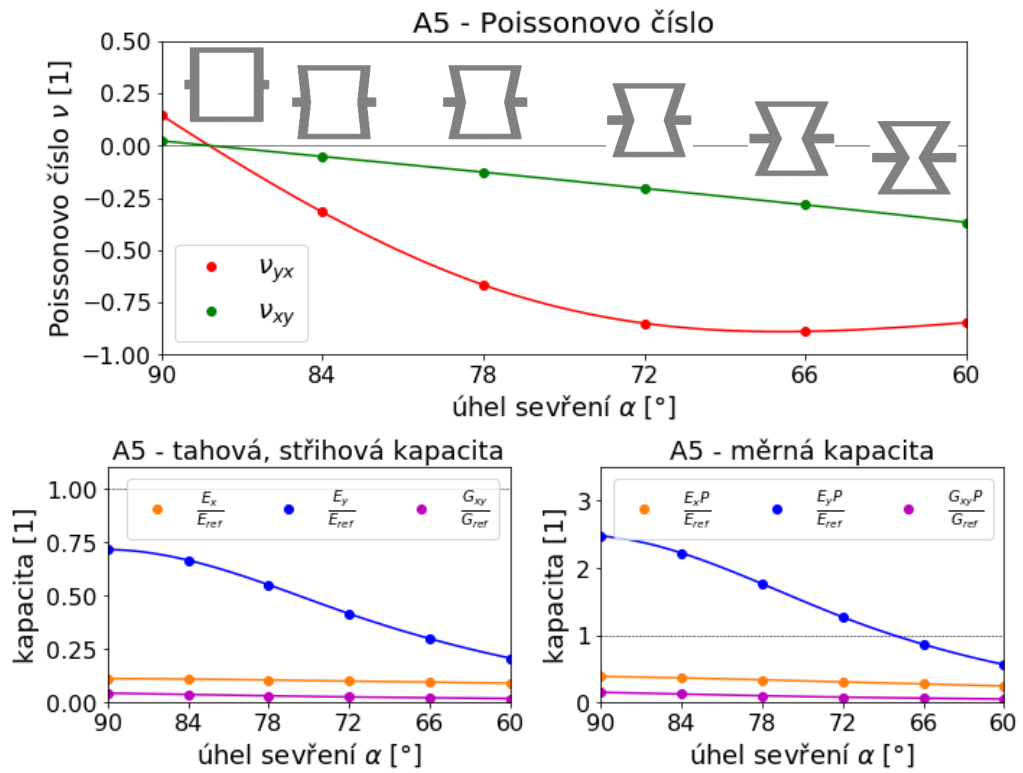
Příloha B. Vypočtené výsledky struktury A3



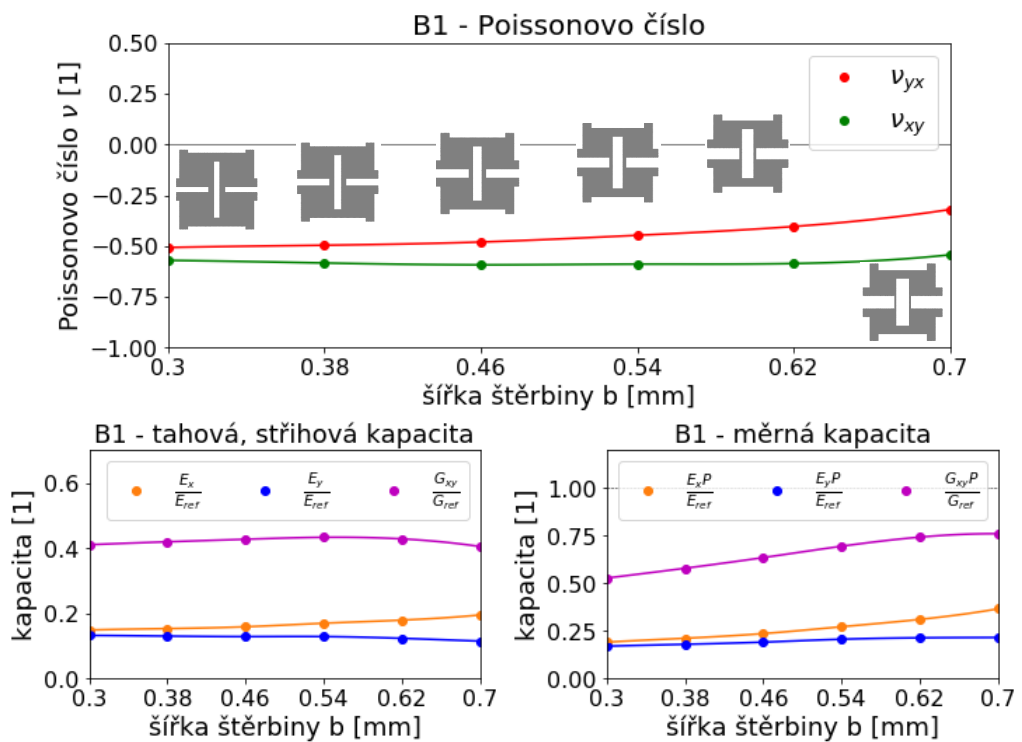
Příloha C. Vypočtené výsledky struktury A4



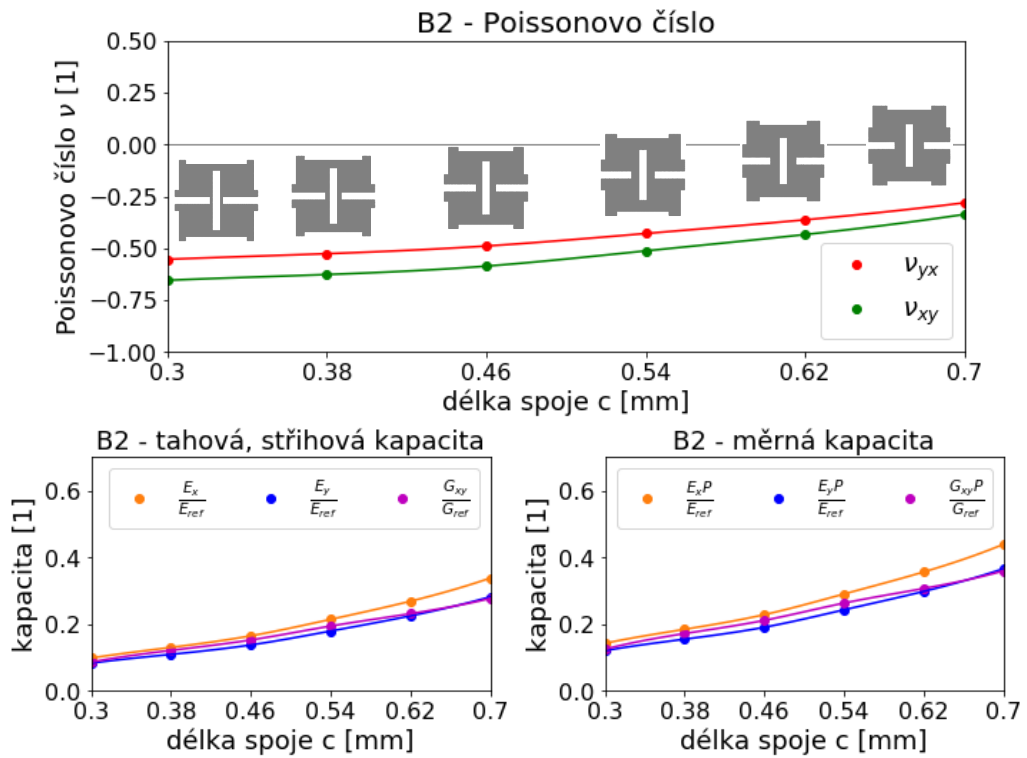
Příloha D. Vypočtené výsledky struktury A5



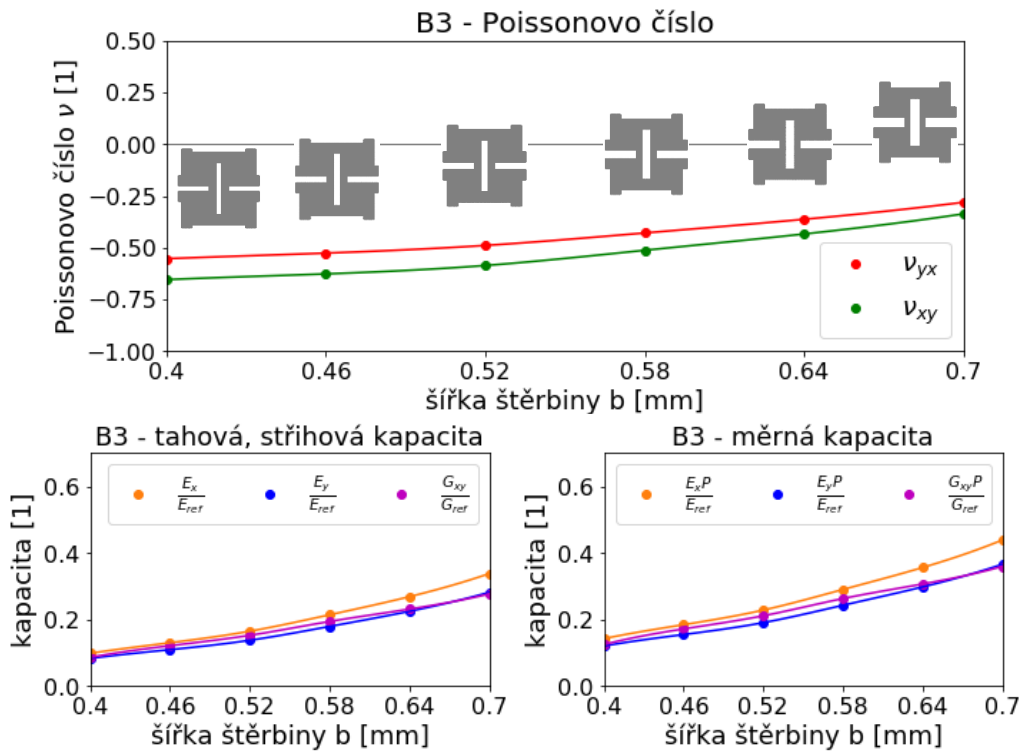
Příloha E. Vypočtené výsledky struktury B1



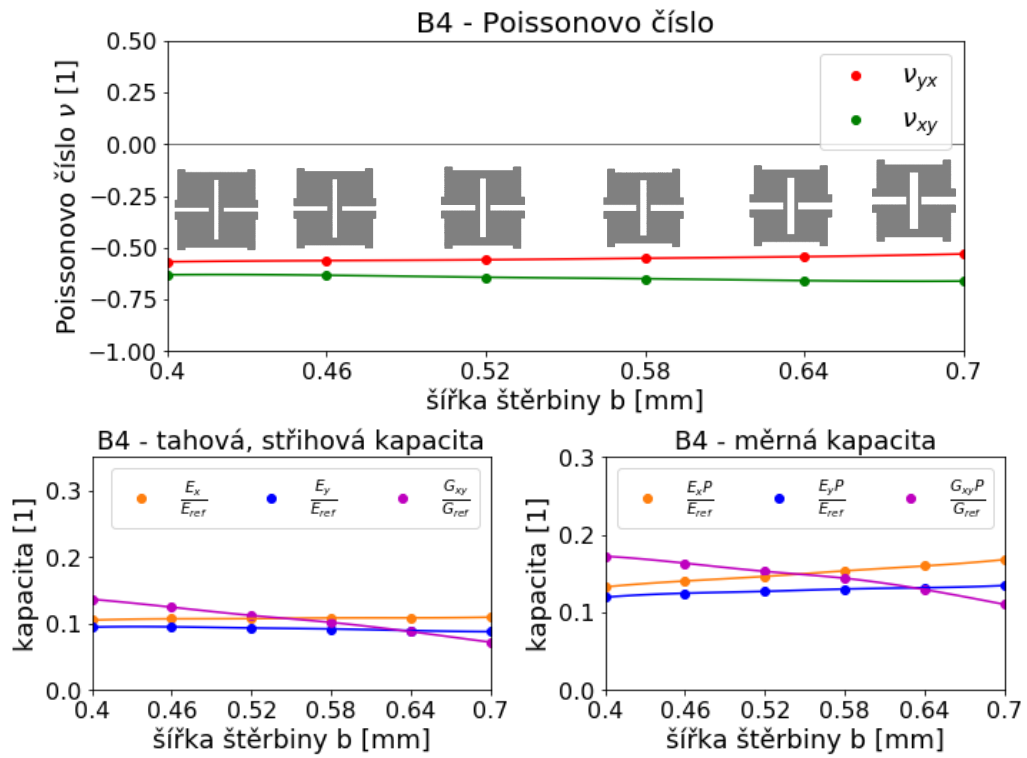
Příloha F. Vypočtené výsledky struktury B2



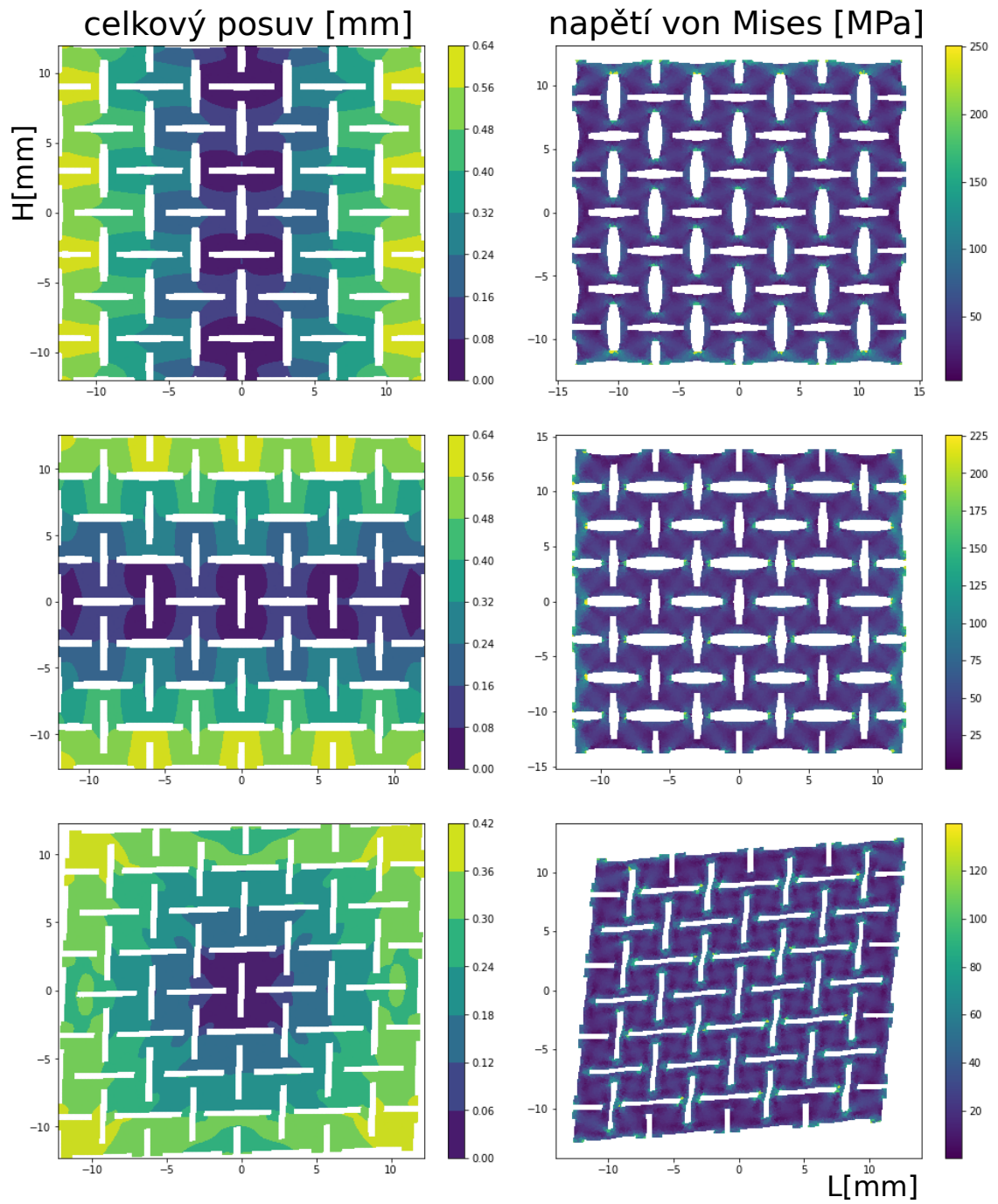
Příloha G. Vypočtené výsledky struktury B3



Příloha H. Vypočtené výsledky struktury B4



Příloha I. Celkový posuv u (levý sloupec) a napětí von Mises (pravý sloupec) struktury B5.



Příloha J. Celkový posuv u (levý sloupec) a napětí von Mises (pravý sloupec) struktury C4.

