



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Riemannuv integrál a jeho aplikace

Vypracovala: Bc. Lenka Vopálenská
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.
České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Riemannuv integrál a jeho aplikace jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 22. 6. 2015

.....

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování vedoucí mé diplomové práce Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D. za její ochotu při spolupráci, připomínky a čas, který mi věnovala. Zvláštní poděkování patří mé rodině a mým přátelům, kteří při mně po celou dobu studia stáli.

Anotace:

Hlavním cílem mé diplomové práce na téma „Riemannův integrál a jeho aplikace“ je vytvořit přehled, který vystihuje jednotlivé užití Riemannova integrálu. První tři kapitoly se zabývají historií, definicí Riemannova integrálu a výpočtem integrace. Ve čtvrté kapitole je přehled jednotlivých užití (obsah rovinné oblasti, délka rovinné křivky, objem rotačního tělesa a obsah pláště rotačního tělesa), který je doplněn o řešené příklady, příklady jsou pro lepší představu doplněny o grafické znázornění. V páté kapitole je sbírka neřešených příkladů, k procvičení jednotlivých užití. Sbíрка je doplněna o výsledky, aby si čtenář mohl zkontrolovat správnost výpočtu.

Klíčová slova: integrace, obsah plochy, délka křivky, objem rotačního tělesa, plášť rotační plochy, integrál, Riemannův určitý integrál

Annotation:

The main goal of my diploma work on the topic „The Riemann integral and its applications“ is to create an overview that describes the individual use of the Riemann integral. The first three chapters deal with the history, the definition of the Riemann integral and with the calculation of integration. There is the overview of the individual use in the fourth chapter (area plane region, length plane curve, volume solid of revolution and area lateral surface solid of revolution) that is accompanied by solved examples, the examples are accompanied by graphical representation for a better idea. In the fifth chapter there is a collection of unsolved examples, for practising of the individual use. The collection is complemented by results for the reader to check the accuracy of calculation.

Key words: integration, area surface, length curve, volume solid of revolution, lateral surface of revolution, Riemann definite integral

Obsah

1	Úvodem něco z historie.....	8
1.1	Výpočty obsahů a objemů ve starověké matematice.....	8
1.1.1	Egypt a Mezopotámie	8
1.1.2	Řecko.....	9
1.2	Vznik a vývoj v 16. - 18. století	11
1.2.1	Johann Kepler (1571 - 1630).....	11
1.2.2	Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647).....	12
1.2.3	Isaac Newton (1643 - 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)	12
1.3	Určitý integrál a počátky teorie míry (19. století).....	14
1.3.1	Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).....	14
2	Riemannův integrál	17
2.1	Součtová definice určitého integrálu	17
2.2	Vlastnosti riemannovsky integrovatelných funkcí	20
3	Výpočet integrace.....	23
3.1	Newtonova-Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu	23
3.2	Integrace per partes pro určitý integrál.....	24
3.3	Substituční metoda pro určitý integrál	25
4	Užití.....	27
4.1	Obsah rovinného útvaru	27
4.1.1	Řešené příklady	30
4.2	Délka rovinné křivky	44
4.2.1	Řešené příklady	46
4.3	Objem rotačního tělesa	55
4.3.1	Řešené příklady:.....	58
4.4	Povrch rotačních ploch neboli obsah pláště rotačního tělesa	70

4.4.1	Řešené příklady:	72
5	Příklady k procvičení	79
5.1	Obsah rovinného útvaru	79
5.2	Délka rovinné křivky	80
5.3	Objem rotačního tělesa	81
5.4	Povrch rotačních ploch (obsah pláště rotačního tělesa)	82
6	Závěr	83
7	Literatura	84

Úvod

Ve své diplomové práci se chci věnovat zejména Riemannovu určitému integrálu a hlavně jeho geometrickému využití. Úplně první věc, které se ve své práci budu věnovat, je historie. Je až neuvěřitelné jak lidé dokázali počítat obsahy a objemy už ve starověku. Už Egypťané v devatenáctém století před našim letopočtem prováděli výpočty objemů za pomoci rozdělení na trojúhelníky a jejich následné sečtení. V 16. století už lidé dokázali vypočítat objemy sudů, čímž se zabýval například Johann Kepler.

Počátky určitého integrálu přišly v devatenáctém století. Mezi představitele tohoto období je zahrnován i Georg Friedrich Bernhard Riemann, který roku 1854 nastolil otázku co to vlastně je určitý integrál. Postupně se z teoretického definování integrálu, přehledu jeho vlastností a výpočtu integrace (Newtonův-Leibnizův vzorec, metoda Per Partes, substituce) dostávám k praktickému využití Riemannova určitého integrálu.

Čtvrtá kapitola už se zabývá využitím, nejprve obsahem rovinných útvaru, dále délkami rovinných křivek, objemem rotačních těles a v neposlední řadě povrchem rotačních ploch neboli obsahem pláště rotačních těles. Všechny tyto pojmy jsou nejprve definovány, a pak následují řešené příklady, které jsou doplněny o grafické znázornění.

Práce obsahuje celkově 36 řešených příkladů, jejichž zadání jsou posbírány z publikací zabývajících se matematickou analýzou. Grafické znázornění je vytvořeno v matematickém softwaru Maple 16 a dynamickém matematickém softwaru GeoGebra 5.

Nejen v matematice, ale i v dalších vědních oborech jako je fyzika či chemie je možné se setkat s úlohami, k jejichž vyřešení se dostaneme pomocí určitého integrálu. V poslední páté kapitole uvádím sbírku neřešených příkladů, které jsou doplněny o výsledky.

1 Úvodem něco z historie

Tato úvodní pasáž je vytvořena na základě podkladů literatury [12], ve které je shrnut celý vývoj integrálu.

1.1 Výpočty obsahů a objemů ve starověké matematice

1.1.1 Egypt a Mezopotámie

První, i když ne příliš průkazný doklad číselného záznamu, tzv. věstonická vrubovka je datován do doby asi 30 tisíc let před n. l. V 5. - 4. tisíciletí před n. l. se rozvíjela výstavba zavodňovacích děl, zejména v oblastech vodních toků a také se začali využívat zeměměřičské pomůcky. V tomto období, díky vyměřování zaplavených ploch byl položen základ prvních poznatků z geometrie a vznik geometrické terminologie.

Další matematické poznatky jsou zaznamenány ve dvou dochovaných pramenech, jimiž jsou tzv. Moskevský a Londýnský (Rhindův) papyrus. Moskevský papyrus pocházející z 19. stol. před n. l. je do značné míry poškozen a lze z něj vyčíst 25 úloh včetně jejich řešení. Z Londýnského papyru, který je asi o 200 let mladší, je možné vyčíst všech 85 úloh s řešením. Asi 20 z nich pojednává o výpočtu ploch polí a objemu sípek, kde je každý problém řešen v konkrétních číslech. Jde vždy o návod na řešení dané situace bez použití vzorců či metod, jak je známe dnes. V tomto období byl totiž pojem proměnné veličiny neznámý.

Egyptané prováděli výpočty obsahů ploch tak, že danou plochu rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Obsahy trojúhelníků přitom určovali podle známého vzorce jako součin poloviny základny a výšky (Schwabik [12], str. 7). Dále byl v Rhindově papyru zaznamenán postup na výpočet obsahu kruhu

o průměru d jako $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, což vedlo k hodnotě¹ $\pi = \frac{256}{81} = 3.1605$. Nalezneme zde i několik postupů či vzorců pro výpočet objemů, např. krychle, rovnoběžnostěnu a kruhového válce, obvykle ve zcela konkrétním tvaru. Tyto výpočty sloužily k určování objemů nádob, které se používali k uchování obilí a jiných surovin.

V Moskevském papýru se objevuje také jeden z nejpozoruhodnějších egyptských příkladů, ve kterém se počítá objem kolmého komolého jehlanu se čtvercovou základnou, tj. objem pyramidy. Úloha obsahuje náčrt a slovní popis výpočtu, který souhlasí s dnes používaným vztahem pro objem $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, kde a, b jsou délky stran čtverců základen a h výška. Tento výsledek je tím pozoruhodnější, že nemáme doklad o znalosti Pythagorovy věty u Egyptanů, kromě několika nepodložených pověstí o „napínačích lan“, kteří údajně konstruovali pravý úhel provazcem, na němž bylo 2 + 4 + 5 uzlů (Schwabik [12], str. 8).

Současně s matematikou ve starém Egyptě se vyvíjela matematika v Mezopotámii. Texty zaznamenané v této době, ukazují vysokou úroveň jak aritmeticko-algebraických, tak i geometrických znalostí. V obou zemích byla matematika používána zejména jako praktická věda, pro usnadnění výpočtů např. kalendáře, plánování sklizně, k organizaci staveb či vybírání daní. Nikde v ní nenalezneme žádný „důkaz“ jakéhokoliv jejich řešení. *Nebyla podávána žádná argumentace, nýbrž jen popis jistých pravidel typu "udělej to tak a tak"* (Schwabik [12], str. 7).

1.1.2 Řecko

Na rozdíl od Orientu se Řecká matematika nezabývala pouze otázkou „jak?“, ale též novou vědecky zaměřenou otázkou „proč?“. Na začátku 6. stol. před n. l. se rozvíjí teoretická stránka matematiky, která se již nezabývá pouze návody na řešení, ale také

¹ Hodnota π je matematickou konstantou, někdy také nazývanou jako Ludolfovo číslo, která udává poměr obvodu jakéhokoli kruhu v euklidovské rovině k jeho průměru. Dále se také jedná o hodnotu poměru obsahu kruhu ke čtverci o hraně jeho poloměru. Jedná se o iracionální číslo, což znamená, že nemůže být vyjádřeno zlomkem $\frac{m}{n}$, kde m je celé číslo, n je přirozené číslo a největší společný dělitel je 1. [18]

zdůvodňováním správnosti řešení. Tímto dochází k rozdělení teoretické a praktické matematiky.

Soubor děl, který dnes nazýváme "řeckou matematikou", vznikl v období od roku 350 do roku 200 před n. l. Mezi nejstarší dochované díla patří Euklidovy *Základy*, ve kterých jsou shrnuty téměř všechny matematické poznatky z této doby.

Další význam v řecké matematice má na svědomí skupina filozofů, jejíž zakladatelem byl Pythagoras (asi 580 - 500 před n. l.). Studovali zejména geometrii, aritmetiku, astronomii a hudbu. Pythagorejci objevili nesouměřitelnost úseček a zjistili, že svět geometrických veličin (reprezentovaných délkami úseček) je bohatší než svět "čísel". Což způsobilo zhroucení původní pythagorejské představy o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin, tento fakt je považován za tzv. první krizi matematiky.

Hlavním cestou z krize se stala řecká geometrická algebra. *Znamenala přechod od aritmetického pohledu na veličiny k pohledu geometrickému. Veličiny přestaly být chápány jako přirozená či racionální čísla a začaly být chápány jako délky, obsahy a objemy* (Schwabik [12], str. 10). Byl vytvořen tzv. zákon homogenity: *sčítat a odčítat bylo možno jen veličiny stejného „rozměru“ - délky s délkami, obsahy s obsahy, objemy s objemy* (Schwabik [12], str. 10). Obsah byl definovaný jako součin délky s délkou, objem jako součin obsahu a délky apod. Z dnešního pohledu vedlo odhalení nesouměřitelnosti k přechodu od diskrétního chápání veličin ke spojitému.

Řeckými matematiky tohoto období, kteří se zabývali zejména problematikou obsahů a objemů byli Hippokrates a Démokritos. Hippokrates (asi 460 - 370 před n. l.) vyslovil domněnku, *že kužel může být podobně "vyčerpáván" jehlany s pravidelnou mnohoúhelníkovou základnou vepsanou do kruhové základny kužele. Domníval se, že objem kužele je jedna třetina válce s toutéž základnou a výškou. K tomuto výsledku dospěl podobnými úvahami i Démokritos, avšak ani ten jej neopatrnil důkazem. Teprve o padesát let později byly tyto výsledky dokázány Eudoxem.* (Schwabik [12], str. 11)

Démokritos z Áber (asi 460 - 370 před n. l.) vycházel z toho, že *body jsou prostorové atomy mající konečný objem* (Schwabik [12], str. 11). Těchto představ využíval k určování obsahů a objemů u velkého počtu útvarů. *Tělesa si představoval, jako by byla "složena z rovnoběžných destiček" silných jeden atom, a usuzuje z toho, že dvě tělesa "složená ze stejných destiček" ve stejných výškách od základny by měla mít stejné objemy. Tento princip rozpracoval Cavalieri v 17. století.* (Schwabik [12], str. 11)

1.2 Vznik a vývoj v 16. - 18. století

1.2.1 Johann Kepler (1571 - 1630)

Ve svém díle *Nová stereometrie vinných sudů* (1615) počítal objemy těles, které vznikly rotací částí kuželoseček kolem osy ležící v jejich rovině (Schwabik [12], str. 23). Podle legendy na jednom trhu byl Kepler udiven postupem prodavače, který *aby zjistil objem sudu, prostě strčil do otvoru po zátce měřící proutek a ze vzdálenosti tohoto otvoru od protější stěny vypočítal objem sudu* (Schwabik [12], str. 23). Nad problémem objemu sudů Kepler přemýšlel a doufal, že objeví takový tvar sudu, který by při stejném povrchu měl větší objem, než sudy, které byly doposud používány.

Při svých výpočtech postupoval tak, že tělesa postupně rozdělil na nekonečně mnoho malých "kusů", jejichž objem lze jednoduše výpočtem určit. *Například při určování objemu koule při známém povrchu rozdělil kouli na nekonečně mnoho jehlanů s vrcholy ve středu koule a základnou na povrchu koule a výškou rovnou poloměru koule. Sečetl objemy těchto jehlanů a dostal $V = \frac{1}{3}Ar$, kde $A = 4\pi r^2$ je povrch koule. Odtud získal objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.* (Schwabik [12], str. 23)

Podobných úvah využil k výpočtům objemů velkého množství těles. V hlediscích důkazových metod se rozcházel s archimédovským požadavkem přesnosti. *Prohlásil, že Archimédovy důkazy jsou absolutně přesné, že je však přenechává lidem, kteří si chtějí dopřát přesné důkazy* (Schwabik [12], str. 24). Dnes však víme, že Keplerovo dílo má velký význam ve vzniku moderních integračních metod.

1.2.2 Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)

V díle *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635) Cavalieri popsal objem těles za pomoci jednoduchých výpočtů. Uvedl formulaci, dnes nazývanou "Cavalieriho principem": *Když dvě tělesa mají stejnou výšku a když řezy rovinami, které jsou rovnoběžné s jejich podstavami a mají od nich stejnou vzdálenost, jsou takové, že poměr jejich obsahů je vždy stejný, potom objemy těles mají též poměr.* (Schwabik [12], str. 25)

Hlavním principem Cavalieriho tvrzení při výpočtu objemů (resp. obsahů) je v tom, že odvozuje správné formule, aniž by byl nucen použít postupu, který je dnes nazýván výpočtem limity. Cavalieriho metoda měla velký vliv na matematiky současného i pozdějšího období.

Následovníkem Cavalieriho byl John Wallis (1616 - 1703), který navázal tím, že vyšel z metody řezů, ale na rozdíl od Cavalieriho, jenž využíval geometrický přístup, používal přístup aritmetický.

1.2.3 Isaac Newton (1643 - 1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Integrálním a diferenciálním počtem se nezávisle na sobě zabývali dva nejvýznamnější matematici druhé poloviny 17. stol., jedná se o Isaaca Newtona a Gottfrieda Wilhelma Leibnize. Svými teoriemi navázali na matematiky z 16. a 17. století, kteří se zabývali studiem křivek.

Na základě Newtonových úvah se dostáváme k dnešní podobě definice Newtonova integrálu:

Definice 1.1: Je-li $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která má primitivní funkci² $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, pak existuje *Newtonův integrál* (N) $\int_a^b f(x) dx$ funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ a je definován vztahem:

² **Primitivní funkci** k funkci f jedné reální proměnné x na intervalu (a, b) , se nazývá libovolná funkce F , jejíž derivace $F'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ má hodnotu $f(x)$. (Podobně lze definovat primitivní funkci na uzavřeném intervalu, v krajních bodech je však třeba požadovat příslušné jednostranné derivace). [Schwabik [12], str. 92]

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Newton vytvořil „metodu prvních a posledních poměrů“, jakýsi prvopočátek limit, i když pojem limity v dnešním smyslu nedefinoval, opíral se pouze o jeho intuitivně zřejmý význam. Otevřel tím cestu k dalšímu rozvoji klíčového pojmu matematické analýzy. (Schwabik [12], str. 39)

Leibniz byl v matematice úplný samouk, navzdory tomu během pobytu v Paříži objevil a popsal vlastnosti nekonečné řady, která je dnes nazývána po něm. V roce 1693 ve své práci publikoval, že *problém kvadratur se převádí na problém nalezení funkce, která má dán „zákon sklonu“, tj. strany jejího charakteristického trojúhelníka jsou v daném poměru. Odvodil tedy vztah:*

$$\int_0^x f(x) dx = F(x), \text{ když } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

za předpokladu, že $F(0) = 0$ (Schwabik [12], str. 43). Toto Leibnitzovo tvrzení ukrývá dvě důležitá fakta a to souvislost mezi integrálem³ a derivací a dále vztah pro výpočet určitého integrálu⁴ jako rozdílu funkčních hodnot primitivní funkce.

Z důvodu pochopení podstaty jeho algoritmů a podpoře algoritmizace nových poznatků, kladl velký důraz na symboliku. *Napsal, že bude užitečné místo "součtu všech l" psát od nynějška $\int l$ (znak je odvozen z prvního písmene slova summa) a že vzniká nový druh počtu, nová početní operace, která odpovídá sčítání a násobení. Druhý druh počtu vzniká, když z výrazu $\int l = a$ získáme $l = a \frac{y}{a}$ (d je první písmeno slova differentia). Jako totiž operace \int zvětšuje rozměr, tak jej d zmenšuje. Znak \int znamená pak součet, d diferenci [Schwabik [12], str. 43]. Zavedl operační symbol pro integrování, ale název integrál pochází od Jakoba Bernoulliho (švýcarský matematik a fyzik 17. století).*

³ Pojem **integrál** vznikl na základě dvou úloh: 1) určení funkce na základě znalosti její derivace, 2) výpočet plochy, která je vymezena grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a osou nezávislé proměnné x .

[Schwabik [12], str. 92]

⁴ **Určitý integrál** je definován buď jako jistá limita integrálních součtů, nebo v případě, že je daná funkce f , ke které v intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje primitivní funkce F , jako rozdíl $F(b) - F(a)$.

[Schwabik [12], str. 93]

Za období působení Newtona a Leibnize došlo k těmto nejvýznamnějším výsledkům:

- Došlo k propojení metody integrování a diferencování. Diferenciální metody byly prvotními, z nichž se při následných úvahách vycházelo. Integrál funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ se začal počítat na základě vztahu:

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

kde $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce primitivní k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

- "Statický" určitý integrál se propojil s "dynamickým" neurčitým integrálem zejména pod vlivem mechanických představ o pohybu.
- Matematické metody byly přímo odvozeny z potřeb fyziky a byly s ní těsně svázány.
- Vytvořil se základní názor na pojem funkce, která se tak stala hlavním objektem zkoumání nové vědní disciplíny (matematické analýzy).
- Byla vytvořena promyšlená symbolika a bohatý algoritmický aparát.

(Schwabik [12], str. 45)

1.3 Určitý integrál a počátky teorie míry (19. století)

V 19. století nastává období rozvoje a upřesňování matematické analýzy, mezi nejslavnější představitele patří např. B. Bolzano, A. L. Cauchy, G. F. B. Riemann, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass.

1.3.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Jeden z matematiků zabývajících se integrály byl A. L. Cauchy, který položil základy matematické analýzy v takové podobě, v jaké ji známe dnes. Právě na Cauchyho pak svojí prací navázal G. F. B. Riemann.

Riemann se narodil ve vesnici Breselenz (Německo) v rodině kazatele. Vystudoval filologii a teologii, *avšak poslouchal i matematické přednášky (např. numerické řešení rovnic - Stern, zemský magnetismus - Goldschmid, metoda nejmenších čtverců - Gauss, určité integrály - Stern)* (Schwabik [12], str. 58). Objevil velký sklon k matematice a nadále ji studoval na univerzitě v Berlíně.

Riemannova disertační práce byla velmi uznale posouzena Gaussem. Na konci roku 1853 odevzdal svůj habilitační spis "*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*" (*O reprezentovatelnosti funkce trigonometrickou řadou*) (Schwabik [12], str. 58). Po Gaussově smrti (22. února 1855) je do Göttingenu povolán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), který se snažil jmenovat Riemanna mimořádným profesorem, avšak neúspěšně. Teprve po Dirichletově smrti byl Riemann roku 1859 jmenován řádným profesorem a zvolen členem učené společnosti.

B. Riemann v roce 1854 nastolil otázku, co vlastně je $\int_a^b f(x)dx$. Ptal se, jak má chápat to, s čím se už více než jedno století pracovalo a co přinášelo užitečné poznatky a bylo běžně užíváno ve fyzice (Schwabik [12], str. 59).

Podívejme se na pasáže z Riemannova habilitačního spisu: *Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.*

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x) dx$?

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot x_1, x_2, \dots, x_{n-1} a označme kvůli krátkosti:

$$x_1 - a \text{ znakem } \delta_1, x_2 - x_1 \text{ znakem } \delta_2, \dots, b - x_{n-1} \text{ znakem } \delta_n$$

a buď ε kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu:

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

bude záviset na volbě intervalů δ a veličin ε . Bude-li nyní mít (ten součet) tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit k pevné hranici A jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota (tj. A) nazývá $\int_a^b f(x) dx$.

Když tuto vlastnost nemá, pak nemá $\int_a^b f(x) dx$ význam. (Schwabik [12], str. 59)

Tímto bychom mohli ukončit rekapitulaci historického vývoje integrálního počtu a podívat se na tuto problematiku dnešními očima.

2 Riemannův integrál

Uvedme nyní definici určitého Riemannova integrálu, jak jí popisuje V. Jarník ve své práci Integrální počet [5].

2.1 Součtová definice určitého integrálu

Definice 2.1: Necht' je dán interval $\langle a, b \rangle$. Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n + 1$ bodů (body na číselné ose, čili reálná čísla) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, jež splňují vztah

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (2)$$

říkáme, že tyto body definují určité *rozdělení* intervalu $\langle a, b \rangle$. Body x_0, x_1, \dots, x_n budeme nazývat *dělicími body* tohoto rozdělení; tyto body dělí interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1 \rangle \langle x_1, x_2 \rangle \dots \langle x_{n-1}, x_n \rangle$.

Rozdělení, definované dělicími body $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, označme písmenem D , Δx_i délku i -tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, tzn. položíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

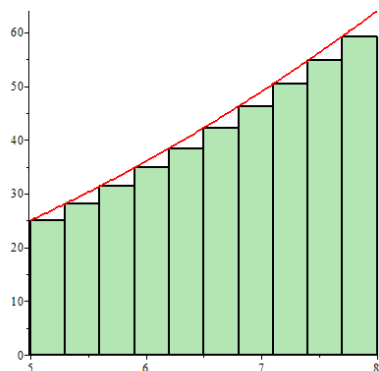
Necht' dále existuje funkce f , která je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Označíme znakem M_i *supremum* (značíme sup) a znakem m_i *infimum*⁵ (značíme inf) funkce f v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla: číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

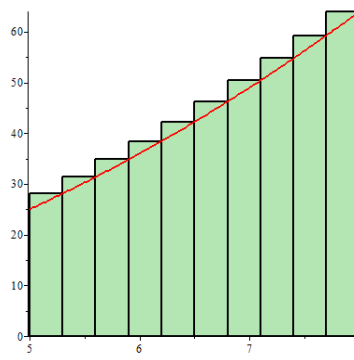
jež budeme nazývat *horním součtem příslušným k rozdělení D* (viz. obr.1) a číslo

$$S(D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

jež budeme nazývat *dolním součtem příslušným k rozdělení D* (viz. obr.2).



Obr. 1 Horní součet



Obr. 2 Dolní součet

⁵ Pojmy supremum a infimum funkce jsou jakýmsi zobecněním pojmů maxima a minima funkce f . Více se o této problematice čtenář dočte např. v literatuře (Jarník [5], str. 13).

Jestliže D, D' jsou dvě rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Rozdělení D' je *zjemněním rozdělení* D , jestliže každý dělicí bod rozdělení D je také dělicím bodem rozdělení D' , $D \subseteq D'$.

(Jarník [5], str. 26-27)

Podívejme se nyní, co platí mezi pojmy zavedenými v definici 2.1 s ohledem na vlastnosti funkce omezené na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Věta 2.1: Dolní součet, příslušný k rozdělení D , je nejvýše roven hornímu součtu příslušnému k témuž rozdělení neboli $s(D) \leq S(D)$.

Věta 2.2: Je-li rozdělení D' zjemněním rozdělení D , pak platí $S(D') \leq S(D)$, $s(D') \geq s(D)$.

Věta 2.3: Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, platí $S(D_1) \geq s(D_2)$.

Věta 2.4: Je-li $f(x)$ funkce omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, je nejvyšší možná hodnota horního součtu rovna číslu $\sup f(x) \cdot (b - a)$, nejnižší možná hodnota dolního součtu rovna číslu $\inf f(x) \cdot (b - a)$.

Je-li tedy D libovolné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, platí nerovnosti:

$$\inf f(x) \cdot (b - a) \leq s(D) \leq S(D) \leq \sup f(x) \cdot (b - a).$$

Definice 2.2: Infimum množiny horních součtů pro všechna možná dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ označíme znakem $\int_a^b f(x) dx$ a budeme jej nazývat *horním integrálem funkce* $f(x)$ od a do b .

Definice 2.3: Supremum množiny horních součtů pro všechna možná dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ označíme znakem $\int_a^b f(x) dx$ a budeme jej nazývat *dolním integrálem funkce* $f(x)$ od a do b .

Věta 2.5: Necht' $a < b$, funkce $f(x)$ je omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\inf f(x) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup f(x) \cdot (b - a).$$

Definice 2.4: Je-li funkce $f(x)$ omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak řekneme, že má Riemannův určitý integrál od a do b , platí-li $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ (funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b \rangle$). Společnou hodnotu nazveme Riemannovým určitým integrálem funkce $f(x)$ od a do b a označujeme ji znakem:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka: Čísla a, b nazýváme mezemi horního/dolního integrálu; číslo a nazýváme *dolní mezí*, číslo b pak *horní mezí*. Funkce f je *integrovaná funkce* neboli *integrand*, písmeno x nazýváme *integrační proměnnou*. Funkce, která má určitý integrál od a do b , říkáme, že je *integrace schopná* v intervalu $\langle a, b \rangle$.

(Dlouhý [3], str. 330-341), (Jarník [5], str.27-32)

2.2 Vlastnosti riemannovsky integrovateľných funkcií

Podkapitola 2.2 je vytvorená na základe podkladů z literatury [6] a [11] a je prehľadom najdôležitejších vlastností Riemannovsky integrovateľných funkcií. Uvedené vety nejsou opatřeny celými důkazy, ale jen zmínkou, kde na ně čtenář může nahlédnout, neboť stěžejní část diplomové práce není teorie Riemannova integrálu, ale jeho aplikace.

Věta 2.6: Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Necht' funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$. Potom je f omezená funkce v $\langle a, b \rangle$.

Důkaz věty viz. (Schwabik [11], str. 12)

Věta 2.7: Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ a necht' funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$.

Důkaz věty viz. (Schwabik [11], str. 14)

Věta 2.8: Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Necht' jsou dány funkce $f, g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a necht' integrály $\int_a^b f(x)dx$ a $\int_a^b g(x)dx$ existují. Potom existuje integrál $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ a platí rovnost:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx. \quad (3)$$

Tato vlastnost bývá označována jako linearita integrálu.

Věta 2.9: Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, reálné číslo $c \in \langle a, b \rangle$. Necht' funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že existují integrály $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$. Potom existuje integrál $(\mathbb{R}) \int_a^b f(x)dx$ a platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (4)$$

Důkaz věty viz. (Schwabik [11], str. 17)

Můžeme zformulovat i obrácenou větu, u níž bude platit:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz věty viz. (Schwabik [11], str. 20)

Věta 2.10: Jsou-li funkce f a g integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, $c \in \mathbb{R}$, pak platí

a) cf je na $\langle a, b \rangle$ integrovatelná a $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$,

b) $f \cdot g$ je na $\langle a, b \rangle$ integrovatelná.

Důkaz věty viz. (Kopáček [6], str. 40)

Věta 2.11: Jsou-li f a g integrovatelné na $\langle a, b \rangle$ a platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak pro jejich integrály platí nerovnost:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad (7)$$

speciálně nezáporná integrovatelná funkce má nezáporný integrál.

Důkaz věty viz. (Kopáček [6], str. 41)

Tato věta popisuje tzv. monotonii integrálu.

Věta 2.12: Je-li f integrovatelná na $\langle a, b \rangle$, pak také funkce $|f|$ je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a platí:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (8)$$

Důkaz věty viz. (Kopáček [6], str. 42)

Pozn.: V nerovnosti (8) nastane rovnost, pokud bude funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ pouze nezáporná nebo nekladná. Této rovnosti pak využíváme v aplikačních příkladech při výpočtech obsahů ploch.

Věta 2.13: Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je integrovatelná i na libovolném intervalu $\langle c, d \rangle$ takovém, že $\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle$.

Věta 2.14: Je-li funkce f integrovatelná na intervalech $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$, je integrovatelná také na sjednocení těchto dvou intervalů. Je-li navíc $\langle a, b \rangle \cap \langle c, d \rangle = \emptyset$, platí:

$$\int_{\langle a, b \rangle \cup \langle c, d \rangle} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^d f(x)dx. \quad (9)$$

Důkaz věty viz. (Kopáček [6], str. 43)

Věta (2.14) je užitečná při výpočtu konkrétních integrálů, neboť umožňuje rozdělit si množinu na části, na nichž budeme umět integrál spočítat.

Věta 2.15: Nechť je funkce $f(x)$ riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle -a, a \rangle$. Je-li funkce $f(x)$ sudá, potom:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Je-li funkce $f(x)$ lichá, potom:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

3 Výpočet integrace

Tato kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [3]. Zabývá se různými způsoby výpočtu určitého integrálu a ukázkovými postupy. Předpokládá se, že čtenáři jsou známé základní pojmy a tvrzení z teorie diferenciálního počtu.

3.1 Newtonova-Leibnizova formule pro výpočet určitého integrálu

Jednou z cest ke konkrétnímu výpočtu určitého integrálu je následující věta, která je vztahem mezi primitivní funkcí a určitým integrálem.

Věta 3.1: Pro $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, necht' existuje integrál $\int_a^b f(x)dx$. Budiž F funkce, spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ má derivaci $F'(x) = f(x)$ ⁶. Potom je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (10)$$

Důkaz věty viz. [Dlouhý [3], str. 347]

Existence určitého integrálu je zajištěna větou 2.7 na str. 20.

Příklad 1: Vypočtete $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

Podle věty 3.1 platí:

⁶ Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, je existence funkce F zajištěna větou: "Ke každé funkci f , která je v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá, existuje v tomto intervalu aspoň jedna taková funkce F , že je $F'(x) = f(x)$ pro všechna x z intervalu $\langle a, b \rangle$. (Pro $x = a$ rozumíme znakem $F'(a)$ derivaci zprava v bodě a , znakem $F'(b)$ derivaci zleva v bodě b .) Funkce F je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$." (Dlouhý [3], str. 347)

⁶ Derivaci funkce rozumíme: Funkce f má v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$ a v bodě a má derivaci zprava a v bodě b má derivaci zleva.

Definice: "Mějme funkci f definovanou v jistém levém, resp. pravém okolí bodu x_0 . Existuje-li limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 zleva a označujeme ji $f'_-(x_0)$. Existuje-li limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 zprava a označujeme ji $f'_+(x_0)$.

(Dlouhý [3], str. 132)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

3.2 Integrace per partes pro určitý integrál

Při výpočtu integrace pomocí metody per partes můžeme postupovat dvojitým způsobem:

1. Určíme nejprve primitivní funkci (neurčitý integrál) integrované funkce metodou integrace per partes⁷ a potom podle Věty 3.1 na str. 23 vypočteme určitý integrál. Výpočet si ukážeme na příkladu:

Příklad 2: Vypočtete integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx$.

Existence integrálu je zajištěna tím, že integrovaná funkce je spojitá v celém definičním oboru (tj. $(-\infty, \infty)$).

Řešení:

Nejprve položíme:

$$u(x) = x, v'(x) = \sin x$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x,$$

nyní je možné využít metody integrace per partes⁸

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c, \text{ poté}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx = [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.$$

2. Druhá metoda je poněkud pohodlnější, využijeme metody per partes přímo na určitý integrál. To nám umožňuje tato věta:

Věta 3.2: Funkce $u(x), v(x)$ necht' mají v intervalu $\langle a, b \rangle$ derivace $u'(x), v'(x)$, jež jsou spojitě v $\langle a, b \rangle$. Potom je

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (11)$$

⁷ Pokud to ovšem lze.

⁸ "Necht' funkce f, g mají v otevřeném intervalu spojitě derivace. Pak v tomto intervalu platí $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx + c$, přičemž c je libovolná konstanta."

(Dlouhý [3], str. 278)

Obvykle zapisujeme vzorec (11) ve zkrácené podobě takto:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (12)$$

Důkaz věty viz. (Hrubý [4], str. 354)

Výpočet si ukážeme znovu na **příkladu 2**:

Vypočtete integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx$.

Znovu položíme:

$$u(x) = x, v'(x) = \sin x ;$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x.$$

Funkce $u'(x)$ a $v'(x)$ jsou spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$, a tedy i v $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, výpočet tedy můžeme provést dle vzorce (12) na straně 25.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x \, dx = [-x \cdot \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx = 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Užívání metody per partes u určitého integrálu je výhodnější u složitějších úloh, například tehdy, je-li nutno tuto metodu opakovat.

3.3 Substituční metoda pro určitý integrál

O substituční metodě lze říci totéž, co jsme řekli o metodě integrace per partes v kapitole 3.2. Lze jí aplikovat dvojnásobem:

1. Je-li dán určitý integrál, můžeme nejprve najít primitivní funkci (neurčitý integrál) integrované funkce substituční metodou a potom podle věty 3.1 na str. 23 stanovit určitý integrál. Výpočet si ukážeme na příkladu.

Příklad 3: Vypočítejte integrál $\int_1^e \frac{\ln^2 t}{t} dt$.

Nejprve pomocí substituce⁹ spočítáme neurčitý integrál $\int \frac{\ln^2 t}{t} dt$, ten existuje v intervalu $(0, \infty)$.

Položíme: $\ln t = x$, $\frac{1}{t} dt = dx$, čímž se dostáváme k výpočtu integrálu $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Proto pro $t \in (0, \infty)$ platí $\int \frac{\ln^2 t}{t} dt = \frac{1}{3} \ln^3 t$.

Odtud tedy $\int_1^e \frac{\ln^2 t}{t} dt = \left[\frac{1}{3} \ln^3 t \right]_1^e = \frac{1}{3}$.

2. Ke stejnému výsledku dojdeme i za použití substituční metody pro určitý integrál, jak nám o tom pojednává věta:

Věta 3.3: Funkce φ nechť má v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci φ' , při čemž slovo "derivace" a znak $\varphi'(t)$ nechť pro $t = \alpha$ znamená derivaci zprava a pro $t = \beta$ derivaci zleva. Funkce f nechť je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro každé t z intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ budiž $a \leq \varphi(t) \leq b$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Důkaz věty viz. (Dlouhý [3], str. 364)

Výpočet si ukážeme znovu na **příkladu 3**:

Vypočítejte integrál $\int_1^e \frac{\ln^2 t}{t} dt$. Položíme: $\ln t = x$, $\frac{1}{t} dt = dx$ a odtud dostáváme

$$\int \frac{\ln^2 t}{t} dt = \int x^2 dx. \quad (13)$$

Meze určitého integrálu jsou 1 a e , to znamená, že integrační proměnná t probíhá interval $\langle 1, e \rangle$. Substitucí zavádíme novou integrační proměnnou, pomocí vzorce $x = \ln t$. Probíhá-li proměnná t interval $\langle 1, e \rangle$, probíhá proměnná x interval $\langle \ln 1, \ln e \rangle$. Přepíšeme tedy (13) pro určité integrály s tím, že integrálu napravo dáme meze $\ln 1$ a $\ln e$, tzn. 0 a 1.

Dostáváme tedy:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 t}{t} dt = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

⁹ "Funkce f budiž spojitá v intervalu (a, b) ; funkce φ nechť má v intervalu (α, β) derivaci φ' ; pro každé t intervalu (α, β) nechť hodnota $\varphi(t)$ leží v intervalu (a, b) . Potom platí v intervalu (α, β) rovnice: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně $\varphi(t)$ za x ." [5, str. 65]

4 Užití

Užití integrálního počtu je velmi široké zejména v geometrii, fyzice či fyzikální chemii. Pomocí určitého integrálu můžeme vypočítat nejen obsahy některých rovinných útvarů, ale i objemy a povrchy rotačních těles a délky rovinných křivek.

Při řešení geometrických a fyzikálních úloh postupujeme ve dvou krocích:

- a) Převědeme řešení úlohy na výpočet určitého integrálu
- b) Tento určitý integrál vypočítáme

4.1 Obsah rovinného útvaru

Tato kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [3], [4] a [15].

V elementární geometrii se slovem obrazec neboli útvar rozumí množina bodů v rovině, která je sjednocením konečného počtu nepřekrývajících se trojúhelníků.¹⁰ Podle toho je obrazcem např. obdélník, čtverec, trojúhelník, pravidelný mnohoúhelník apod.

V geometrii se dokazuje, že každému útvaru lze přiřadit jediné kladné číslo, zvané *obsah* tohoto útvaru, které má tyto vlastnosti:

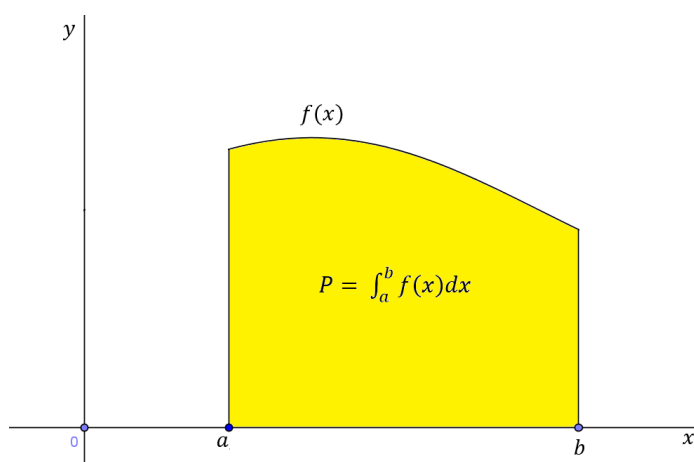
- 1) Obsahy dvou shodných obrazců jsou si rovny.
- 2) Jsou-li P_1, P_2 obsahy dvou obrazců, které se nepřekrývají, pak $P_1 + P_2$ je obsah obrazce, který je sjednocením daných dvou obrazců.
- 3) Obsah obdélníka o rozměrech a, b je roven součinu ab . Z této definice vyplývá řada důsledků. Velmi důležitý např. tento:
- 4) Mají-li obrazce P_1, P_2 po řadě obsahy P_1, P_2 , a je-li obrazec P_1 částí obrazce P_2 , pak platí: $P_1 \leq P_2$.

¹⁰ Přívlastkem „nepřekrývajících se“ chceme vyjádřit, že libovolné dva z trojúhelníků, jejichž sjednocením je obrazec, mají společné nejvýš body obvodu.

Na základě této definice a na základě toho, že každý obrazec má jediný obsah, odvozují se již na základní škole vzorce pro výpočet obsahu nejjednodušších obrazců, jako je čtverec, obdélník, trojúhelník, lichoběžník atd.

Věta 4.1: Necht' je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a je na něm **nezáporná**. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce f , přímkami $x = a, x = b$ a osou x (viz. Obr. 3) platí:

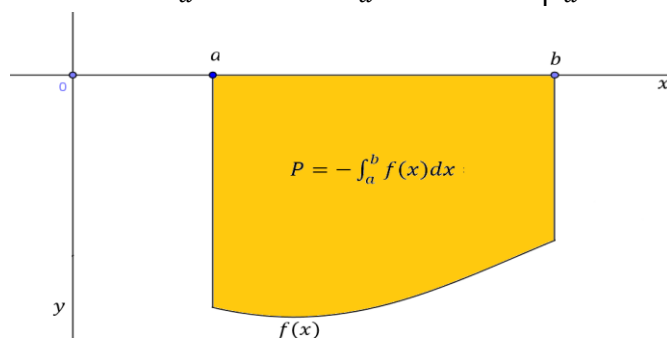
$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (14)$$



Obr. 3 Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci

Z definice určitého integrálu je zřejmé, že pro funkci f , která je naopak na intervalu $\langle a, b \rangle$ **nekladná** tzn. ($f(x) \leq 0$), bude potom integrál $\int_a^b f(x) dx \leq 0$, a proto obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce f , přímkami $x = a, x = b$ a osou x (viz Obr. 4) bude poté:

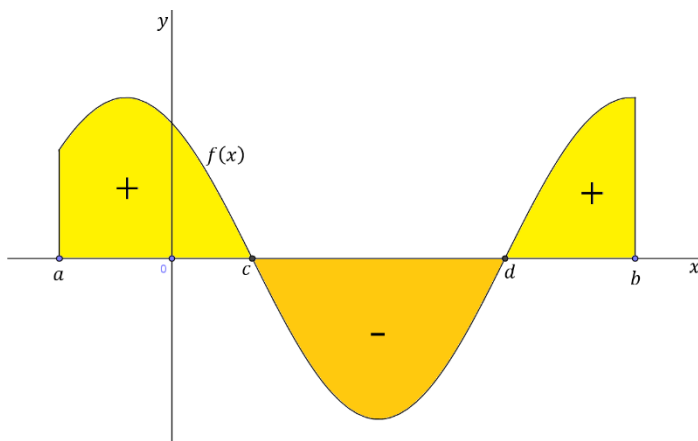
$$P = - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (15)$$



Obr. 4 Obsah křivočarého lichoběžníka pro nekladnou funkci

Můžeme se samozřejmě setkat i s funkcí, která na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá **kladných i záporných** hodnot. V takovémto případě si interval rozdělíme na intervaly, ve kterých funkce nabývá nekladných hodnot, resp. nezáporných hodnot, a příslušné integrály vypočteme podle vzorců (14), (15). Tento případ vidíme na obrázku, kdy si interval rozdělíme na intervaly $\langle a, c \rangle$, $\langle c, d \rangle$, $\langle d, b \rangle$ a pro výpočet obsahu daného útvaru tedy platí:

$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \quad (16)$$

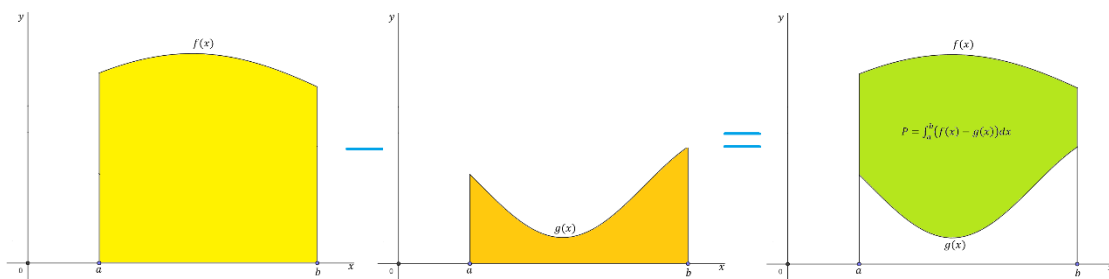


Obr. 5 Obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x)$ se znaménky

Větu 4.1 můžeme aplikovat i na případ, kdy je útvar zdola omezen další funkcí g .

Věta 4.2: Necht' jsou funkce f a g integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce g , shora grafem funkce f a přímkami $x = a$, $x = b$ (viz Obr. 6) platí:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \quad (17)$$



Obr. 6 Obsah plochy mezi funkcemi $g(x)$ a $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

V případě kdy grafem funkce $y = f(x)$ je křivka, která může být dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Proměnou t nazýváme parametr. Potom pro výpočet křivočarého lichoběžníka (Obr. 3) ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi můžeme Větu 4.1 upravit následujícím způsobem:

Věta 4.3: Necht' funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Je-li funkce φ ryze monotónní a má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce f , přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí:

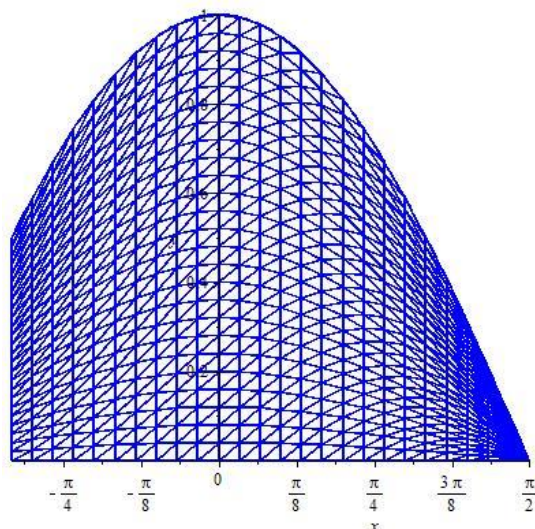
$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt \right|. \quad (18)$$

4.1.1 Řešené příklady

4.1.1.1 Příklad 1

Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkou $y = \cos x$ v intervalu $\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

([1], str. 188)



Obr. 7

Vše potřebné pro výpočet určitého integrálu máme, funkce $\cos x$ je na intervalu $\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporná, můžeme se rovnou pustit do výpočtu využitím věty 4.1 (na str. 28) a vztahu (10) na str. 23.

Výpočet:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Obsah zadaného obrazce je roven $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

4.1.1.2 Příklad 2

Vypočítejte obsah množiny ohraničené parabolou $y = x^2 - 5x - 6$ a osou x . ([4], str. 174)

Nejprve si určíme průsečíky paraboly s osou x , tím zjistíme interval, na kterém budeme počítat určitý integrál. Průsečíky vypočítáme přes diskriminant kvadratické funkce¹¹ a zjistíme tyto kořeny rovnice:

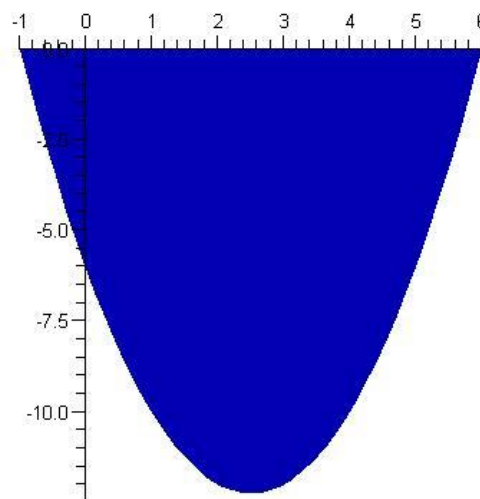
$$y = x^2 - 5x - 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 6, x_2 = -1.$$



Obr. 8

¹¹ Pro kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ (kde $a \neq 0$) je diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Pokud $D > 0$, pak má daná rovnice právě dva různé reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má daná rovnice právě jeden dvojnásobný reálný kořen $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak má daná rovnice právě dva různé komplexně sdružené kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}$. [13]

Obsah tedy budeme počítat na intervalu $\langle -1, 6 \rangle$ z funkce $y = x^2 - 5x - 6$. Vzhledem k tomu, že funkce $x^2 - 5x - 6$ je na intervalu $\langle -1, 6 \rangle$ nekladná, vypočteme obsah podle vzorce (15) na str. 28. Tedy:

$$P = - \int_{-1}^6 (x^2 - 5x - 6) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x \right]_{-1}^6 =$$

$$= -(72 - 90 - 36) + \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) = +\frac{343}{6}.$$

Obsah množiny je tedy roven zlomku $\frac{343}{6}$.

4.1.1.3 Příklad 3

Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x^2 - x$ a osou x v intervalu $\langle -2, 2 \rangle$. ([4], str. 173)

Tato funkce nabývá na daném intervalu kladných i záporných hodnot, interval si tedy rozdělíme na intervaly, ve kterých funkce nemění znaménko.

Nejprve zjistíme průsečíky křivky s osou x :

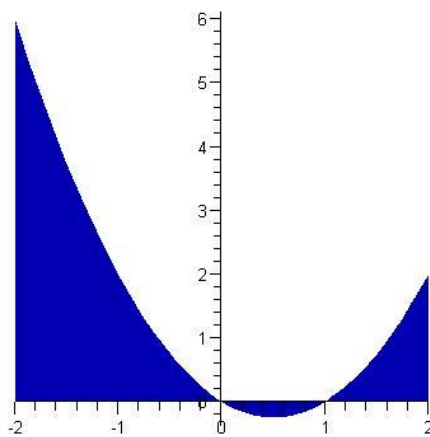
$$x^2 - x = 0,$$

$$x(x - 1) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Intervaly tedy budou následující:

$$\langle -2, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \text{ (viz. Obr. 9).}$$



Obr. 9

Výsledný obsah vypočteme následovně:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-2}^0 (x^2 - x) dx + \left| \int_0^1 x^2 - x dx \right| + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\
 &= \left[0 - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) \right] + \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right| + \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{8}{3} + 2 + \left| -\frac{1}{6} \right| + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{16 + 12 + 1 + 16 - 12 - 2 + 3}{6} = \\
 &= \frac{34}{6} = \frac{17}{3}.
 \end{aligned}$$

Obsah daného útvaru je $\frac{17}{3}$.

4.1.1.4 Příklad 4

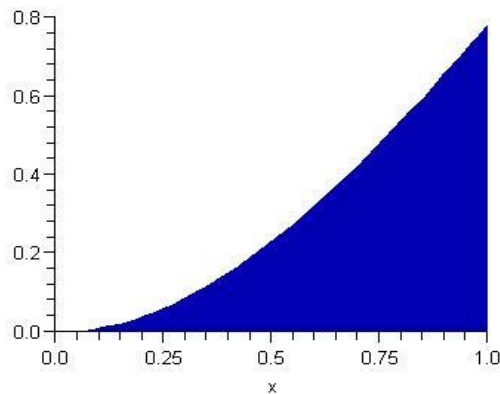
Vypočítejte obsah plochy omezené křivkou $y = x \operatorname{arctg} x$ na intervalu $(0, 1)$.

([1], str. 192)

$$P = \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$$

Použijeme metodu per partes a položíme:

$$\left| \begin{array}{ll} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x^2 + 1} \end{array} \right|$$



Obr. 9

Dostáváme:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\
 &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Obsah plochy je $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

4.1.1.5 Příklad 5

Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x \sin x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi$. ([15], str. 150)

Daný interval je tedy $\langle 0, 3\pi \rangle$, interval si rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá kladných, resp. záporných hodnot.:

Nejprve zjistíme průsečíky křivky s osou x :

$$x \sin x = 0,$$

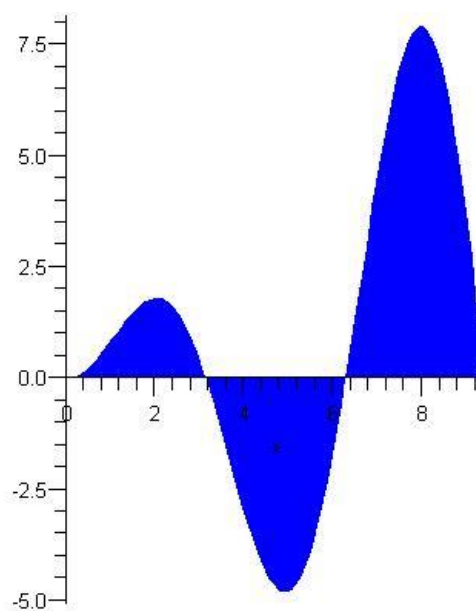
$$x = \pi n.$$

Pohybujeme se v intervalu $\langle 0, 3\pi \rangle$, průsečíky tedy budou:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi.$$

A dílčí intervaly:

$$\langle 0, \pi \rangle, \langle \pi, 2\pi \rangle, \langle 2\pi, 3\pi \rangle.$$



Obr. 10

Výsledný obsah vypočteme následovně:

$$P = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx - \left| \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx \right| + \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx .$$

Naši potřebnou primitivní funkci nalezneme metodou per partes:

$$\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = x \\ u = -\cos x \quad v' = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x .$$

Dosadíme příslušné meze a dostáváme:

$$\begin{aligned} P &= [\sin x - x \cos x]_0^{\pi} - |[\sin x - x \cos x]_{\pi}^{2\pi}| + [\sin x - x \cos x]_{2\pi}^{3\pi} = \\ &= [0 - (-\pi)] - |[0 - (-2\pi) - (0 - (-\pi))]| + [0 - (-3\pi) - (0 - (2\pi))] = \\ &= \pi + |-3\pi| + 5\pi = 9\pi . \end{aligned}$$

Obsah obrazce je tedy roven 9π .

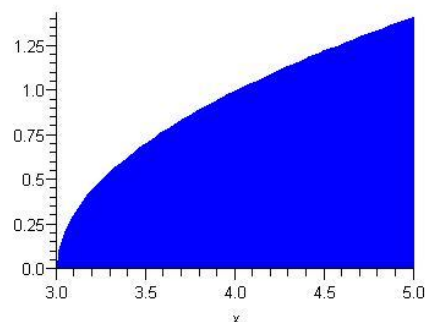
4.1.1.6 Příklad 6

Vypočítejte obsah plochy ohraničené křivkou $y = \sqrt{x-3}$, osou x a přímkami $x = 3$ a $x = 5$. ([19], př. 3)

$$P = \int_3^5 \sqrt{x-3} \, dx$$

Pro výpočet tohoto integrálu zavedeme substituci:

$$\begin{aligned} x - 3 &= t, \\ dx &= dt. \end{aligned}$$



Obr. 11

Přepočítáme meze:

Pro $x = 3$ je $t = 3 - 3 = 0$, pro $x = 5$ je $t = 5 - 3 = 2$.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 \sqrt{t} \, dt = \int_0^2 t^{\frac{1}{2}} \, dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_0^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2^3} - \sqrt{0^3}) = \frac{2}{3} \sqrt{8} = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Obsah dané plochy je $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

4.1.1.7 Příklad 7

Vypočítejte obsah kruhu o poloměru r . ([3], str. 429)

Střed kruhu si umístíme do počátku soustavy souřadnic, poté nám bude stačit vypočítat obsah čtvrtkruhu o poloměru r v prvním kvadrantu (viz. Obr. 12). Výsledek obsahu čtvrtkruhu na závěr vynásobíme čtyřmi a dostaneme tak obsah celého kruhu.

Rovnici kružnice známe:

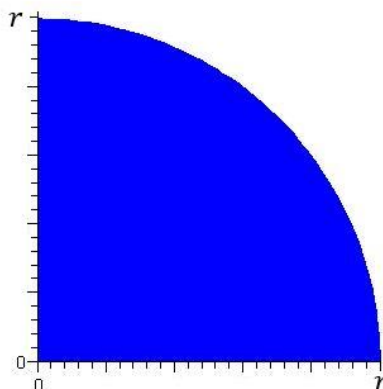
$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Vyjádříme si z ní křivku, která nám omezuje kruh v daném kvadrantu:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pohybujeme se v intervalu:

$$\langle 0, r \rangle.$$



Obr. 12

Nyní se můžeme pustit do samotného výpočtu:

$$P = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pro výpočet využijeme substituce, kdy položíme:

$$x = r \sin t,$$

$$dx = r \cos t \, dt, \text{ kde } r \in \mathbb{R}^+,$$

meze upravíme pro $x = 0$ je $t = 0$ a pro $x = r$ je $t = \frac{\pi}{2}$.

Pro celý kruh tedy dostáváme¹²:

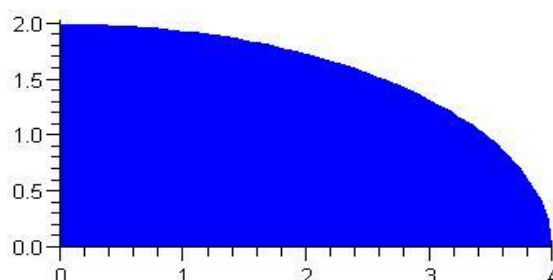
$$\begin{aligned}
 P &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\
 &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2 \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \pi r^2.
 \end{aligned}$$

Obsah kruhu je πr^2 .

4.1.1.8 Příklad 8

Odvoďte vzorec pro obsah elipsy s rovnicí $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. ([7], str. 74)

Celá elipsa není grafem žádné funkce. Proto se omezíme pouze na její první kvadrant (viz. Obr. 13), poté se jedná o plochu ohraničenou osami x a y a grafem funkce $y = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$, kterou jsme vyjádřili z rovnice elipsy.



Obr. 13

¹² Při úpravě (výpočet odmocniny $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$) jsme využili toho, že pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je $\cos x \geq 0$.

Pro výpočet obsahu tedy dostáváme:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx.$$

Použijeme podobně jako v předchozím příkladu substituci:

$$x = 4 \sin t,$$

$$dx = 4 \cos t dt,$$

meze upravíme pro $x = 0$ je $t = 0$ a pro $x = 4$ je $t = \frac{\pi}{2}$.

Nyní pro čtvrtinu elipsy dostáváme:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^2 t}{2} dt = 8 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = \\ &= \frac{8\pi}{4} = 2\pi. \end{aligned}$$

Abychom získali obsah celé elipsy, musíme ještě obsah čtvrtiny elipsy vynásobit čtyřmi:

$$P = 4 \cdot 2\pi = 8\pi.$$

Obsah celé elipsy tedy činí hodnotu 8π .

4.1.1.9 Příklad 9

Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného oblouky dvou protínajících se parabol:

$$y_1 = -3 + 8x - 2x^2,$$

$$y_2 = 6 - 4x + x^2.$$

([4], str. 171)

Nejprve si najdeme průsečíky parabol, abychom mohli určit interval, na němž budeme obsah počítat.:

$$-3 + 8x - 2x^2 = 6 - 4x + x^2,$$

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0.$$

Průsečíky vypočítáme přes diskriminant kvadratické funkce (viz. 4.1.1.2 Příklad 2, str. 31) a zjistíme tyto kořeny rovnice:

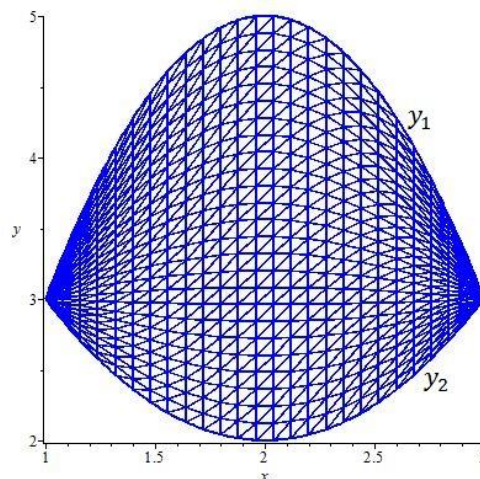
$$D = 16 - 12,$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{(-2)},$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1.$$

Interval je:

$$\langle 1, 3 \rangle.$$



Obr. 14

Obsah vypočítáme odečtením obsahu plochy pod parabolou y_2 od obsahu plochy pod parabolou y_1 na daném intervalu:

$$P = \int_1^3 (-3 + 8x - 2x^2 - (6 - 4x + x^2)) dx.$$

Nejprve si mnohočlen upravíme a následně integrujeme:

$$P = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx = \left[\frac{-3x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 9x \right]_1^3 = [-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3 =$$

$$= (-27 + 54 - 27) - (-1 + 6 - 9) = 4.$$

Obsah plochy, kterou mezi sebou svírají dvě zadané paraboly je 4.

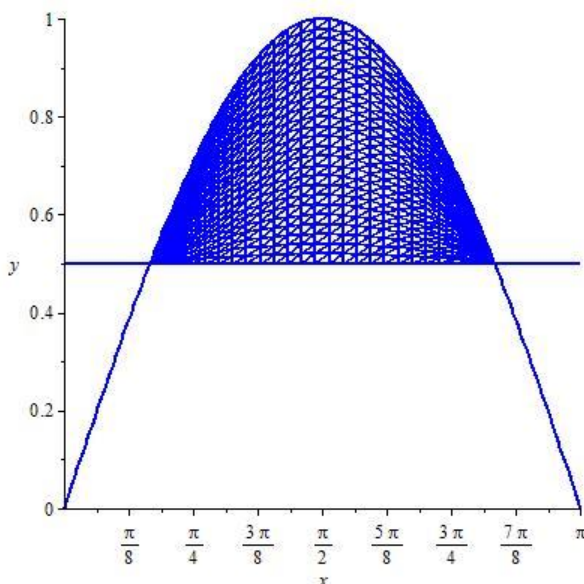
4.1.1.10 Příklad 10

Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkou $y = \sin x$ a přímkou rovnoběžnou s osou x ve vzdálenosti $\frac{1}{2}$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. ([9], str. 119)

Nejprve si určíme průsečíky křivek $y = \sin x$ a $y = \frac{1}{2}$:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Funkce \sin nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$ v daném intervalu v bodech $x = \frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$. Určitý integrál nám tedy budou vymežovat hodnoty $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$ (viz. Obr 15).



Obr. 15

Nyní už můžeme počítat obsah:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2} \, dx = \left[-\cos x - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\ &= -\cos \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{6} - \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Obsah rovinného útvaru je roven číslu $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

4.1.1.11 Příklad 11

Vypočítejte obsah plochy obrazce popsaného nerovnostmi:

$$y \leq x + 6, y \geq 2 - \frac{(x+4)^2}{8}, y \geq x^3.$$

([8], str. 58)

Pokud zadané nerovnosti zakreslíme do kartézské soustavy souřadné, je patrné, že obrazec má 2 části.

Určíme si potřebné průsečíky:

$$1. \quad x + 6 = 2 - \frac{(x+4)^2}{8},$$

$$x_1 = -4.$$

$$2. \quad 2 - \frac{(x+4)^2}{8} = x^3,$$

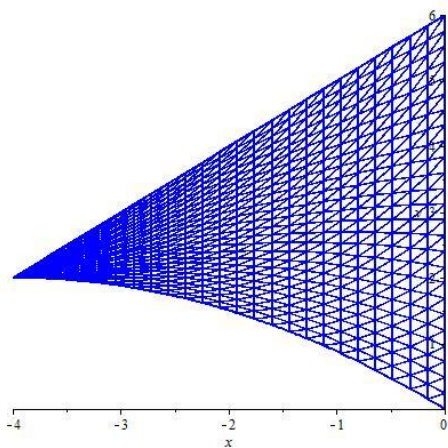
$$x_2 = 0.$$

$$3. \quad x + 6 = x^3,$$

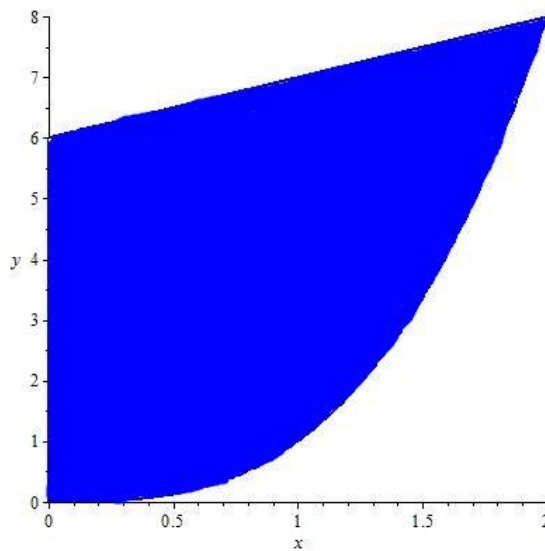
$$x_3 = 2.$$

Výpočet si rozdělíme do dvou kroků:

$$P_1 = \int_{-4}^0 \left[x + 6 - \left(2 - \frac{(x+4)^2}{8} \right) \right] dx \quad \text{a} \quad P_2 = \int_0^2 [x + 6 - (x^3)] dx.$$



Obr.16 Obsah P_1



Obr.16 Obsah P_2

Nyní spočítáme dané integrály:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{-4}^0 \left[x + 6 - \left(2 - \frac{(x+4)^2}{8} \right) \right] dx = \int_{-4}^0 \left(\frac{x^2}{8} + 2x + 6 \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{24} + \frac{2x^2}{2} + 6x \right]_{-4}^0 = \left(0 - \left(-\frac{64}{24} + \frac{32}{2} - 24 \right) \right) = \left(\frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{32}{3}, \end{aligned}$$

$$P_2 = \int_0^2 [x + 6 - (x^3)] dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = (-4 + 2 + 12) = 10.$$

Výsledný obsah dostaneme součtem dílčích obsahů:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2, \\ P &= \frac{32}{3} + 10 = \frac{62}{3}. \end{aligned}$$

Obsah vyobrazeného obrazce je $\frac{62}{3}$.

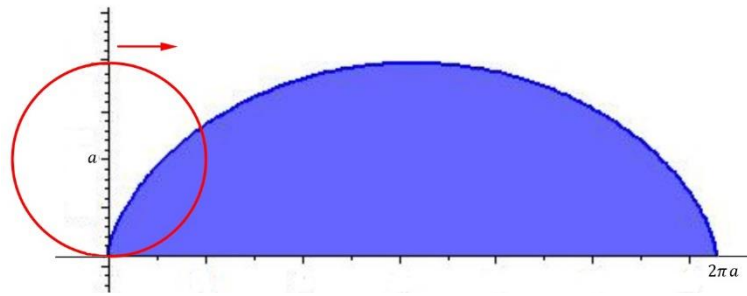
4.1.1.12 Příklad 12

Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem prosté cykloidy. ([15], str. 53)

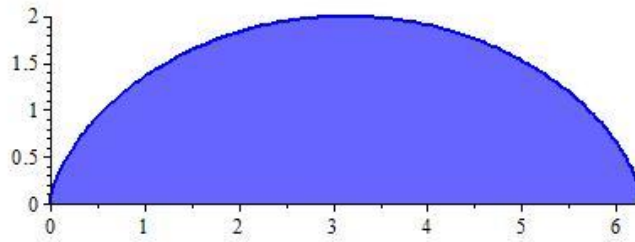
Prostá cykloida¹³ je křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s kružnicí o poloměru a při kotálení kružnice po přímce (viz. obr. 17a). Tato cykloida má parametrické rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

¹³ „Body uvnitř kružnice by při kotálení kružnice po přímce opisovaly zkrácenou cykloidu a myšlené body vně tzv. prodlouženou cykloidu. Cykloida se v přírodě a technice objevuje na nečekaných místech a v různých zajímavých souvislostech. Například vlny na vodě mají tvar cykloidy, s oblibou se využívají cykloidální ozubená kola v převodovkách, cykloida snese největší zatížení, což má využití v mostních a tunelových konstrukcích, dále je užíván cykloidální výřez na carvingových lyžích.“ ([15], str. 154)



Obr. 17a



Obr. 17b

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t \in (0, 2\pi)$.

Protože $dx = a(1 - \cos t)dt$, dostaneme z věty 4.3 (str. 30):

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\
 &= a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = a^2[2\pi + \pi] = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

4.2 Délka rovinné křivky

Tato kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [5] a [15] a pojednává o tom, jak zjistit délku křivky na daném intervalu.

Jenž je funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$. Množinu všech bodů $[x, y]$ vyhovující podmínkám:

$$a \leq x \leq b, \quad y = f(x)$$

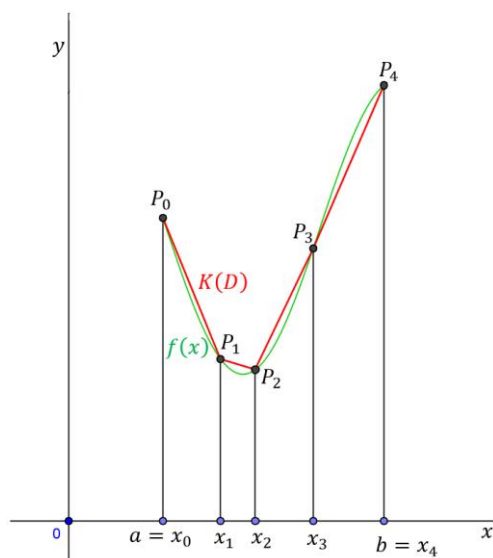
budeme nazývat „křivkou“ a označíme ji pro krátkost písmenem C . Naším cílem je definovat vhodným způsobem délku křivky C .

Nejprve sestojíme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, kde $n \geq 1$, sestavíme body:

$$[x_0, f(x_0)] = P_0; [x_1, f(x_1)] = P_1; \dots, [x_n, f(x_n)] = P_n$$

znakem $K(D)$ značíme lomenou čáru, sestavenou z úseček $\overline{P_0P_1}; \overline{P_1P_2}; \dots; \overline{P_{n-1}P_n}$ (viz Obr. 18), a znakem $L(D)$ označíme „délku“ lomené čáry $K(D)$, což je součet délek úseček $\overline{P_0P_1}; \overline{P_1P_2}; \dots; \overline{P_{n-1}P_n}$. Tímto způsobem je každému rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ přiřazeno určité kladné číslo $L(D)$.

Pro množinu všech těchto čísel $L(D)$ (příslušných ke všem možným rozdělením



Obr. 18 Aproximace křivky lomenou čarou

D intervalu $\langle a, b \rangle$ mohou nastat tyto dva případy:

I. Buďto tato množina není shora omezená a potom budeme krátce říkat, že křivka C má nekonečnou délku.¹⁴

II. Nebo tato množina je shora omezená a potom má jisté supremum, které označíme $L(a, b, f(x))$.¹⁵ Potom budeme říkat, že křivka C má konečnou délku a číslo $L(a, b, f(x))$ nazveme *délkou* křivky C .¹⁶

¹⁴ Výrok „křivka C má nekonečnou délku“ je zkrácené vyjádření okolnosti, že množina svrchu popsaná není shora omezená.

V případě že křivka C má konečnou délku, podáme vyjádření této délky pomocí určitého integrálu:

Věta 4.4: Budiž f funkce spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ jež má vlastní derivaci f' ve všech bodech intervalu, vyjma nejvýše konečného počtu bodů. Necht' existuje Riemannův integrál:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (19)$$

Potom křivka C , definovaná jako množina všech bodů $[x, y]$, vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ y = f(x) \end{aligned}$$

má konečnou délku danou rovnicí:

$$L(a, b, f(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (20)$$

Křivka nemusí vždy být zadána explicitní rovnicí $y = f(x)$. Může být dána rovněž parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Křivku si můžeme představit jako trajektorii, kterou urazí bod, který se v čase spojitě pohybuje v rovině. Spojité funkce φ a ψ udávají x -ovou a y -ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Délka takové křivky je z fyzikálního hlediska vlastně dráha, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β .

Věta 4.5: Necht' je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce φ a ψ mají spojitě derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak je délka této křivky:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (21)$$

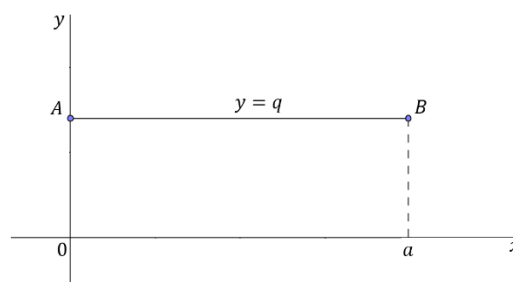
¹⁵ Toto číslo může záviset pouze na a, b a na tvaru funkce f , všechny tyto tři prvky jsou pak v označení vytčeny.

¹⁶ Věc je velmi názorná: délka křivky C je supremum délek všech lomených čar.

4.2.1 Řešené příklady

4.2.1.1 Příklad 1

Máme danou úsečku AB . Vzhledem k tomu, jak jsme zvolili na obrázku 19 soustavu souřadnic, můžeme úsečku AB chápat jako oblouk křivky, který je grafem funkce $y = f(x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$, kde f je konstantní



Obr. 19

funkce daná rovnicí $f(x) = q$. Určete délku křivky. ([3], str. 445)

Nejprve si určíme derivaci:

$$f(x) = q,$$

$$f'(x) = 0.$$

Podle vzorce (20) na straně 45 je délka křivky rovna:

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + 0^2} dx = [x]_0^a = a.$$

Délka úsečky AB je a .

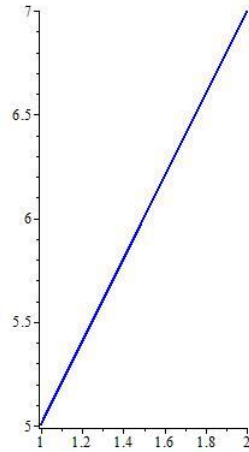
4.2.1.2 Příklad 2

Určete délku oblouku křivky daného funkcí $f(x) = 2x + 3$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. ([1], str. 188)

Nejprve zderivujeme funkci:

$$f(x) = 2x + 3,$$

$$f'(x) = 2.$$



Obr. 20

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet délky křivky:

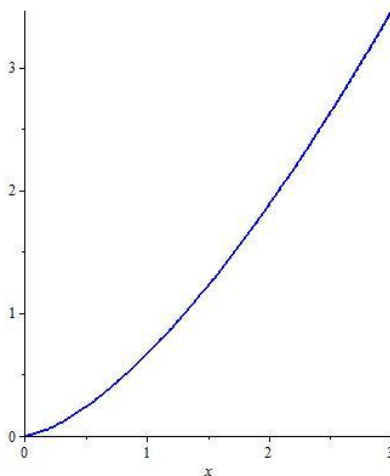
$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (2)^2} dx = [\sqrt{5}x]_1^2 = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

Délka daného oblouku je $\sqrt{5}$.

Vzhledem k tomu, že v Příkladech 1 a 2 je funkce přímka a její částí je úsečka, snadno zjistíme její délku i bez užití Riemannova integrálu. Podívejme se nyní na příklady, kde funkce f už není lineární.

4.2.1.3 Příklad 3

Určete délku oblouku určeného funkcí $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.
([2], str. 196)



Obr. 21

Určíme derivaci:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Dosadíme do vzorce (20) na str. 45:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx. \quad (22)$$

Zavedeme substituci:

$$t = 1 + x,$$

$$dt = dx.$$

Přepočteme meze:

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } t = 1 + 0 = 1, \text{ pro } x = 3 \text{ je } t = 1 + 3 = 4.$$

Dosadíme substituci a meze do výpočtu (22) a dostaneme:

$$\int_1^4 \sqrt{t} dt = \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right] = \frac{14}{3}.$$

Délka oblouku je $\frac{14}{3}$.

4.2.1.4 Příklad 4

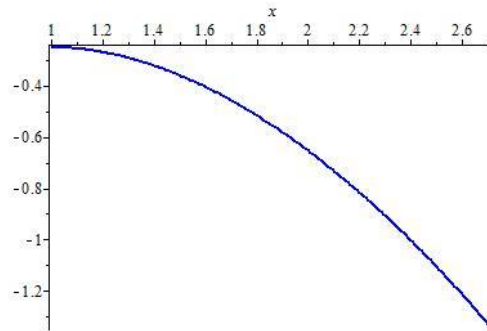
Vypočtěte délku křivky dané předpisem $f(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ na intervalu $\langle 1, e \rangle$.

([2], str. 196)

Zderivujeme danou funkci:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} = \frac{1-x^2}{2x}.$$



Obr. 22

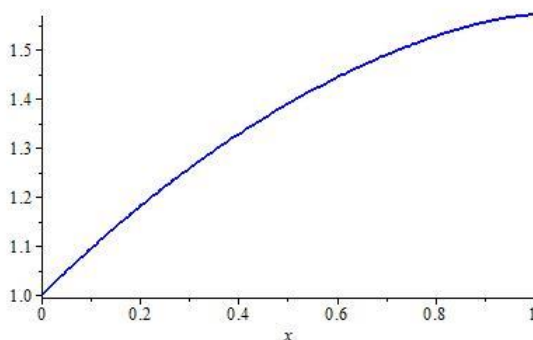
Nyní můžeme dosadit do vzorce (20) pro výpočet délky křivky:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1-x^2}{2x}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2}\right)} dx = \\
 &= \int_1^e \sqrt{\frac{4x^2+1-2x^2+x^4}{4x^2}} dx = \int_1^e \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}} dx = \\
 &= \int_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{4x^2}} dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x} dx = \int_1^e \frac{x^2}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln x \right]_1^e = \left[\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{4} + 0 \right) \right] = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \\
 &= \frac{e^2+1}{4}.
 \end{aligned}$$

Délka křivky je $\frac{e^2+1}{4}$.

4.2.1.5 Příklad 5

Určete délku křivky danou funkcí $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
([1], str. 190)



Obr. 23

Určíme potřebnou derivaci funkce:

$$f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{1-x^2} = \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow (\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Nyní dosadíme do vzorce (20) na straně 45 pro výpočet délky křivky:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1-2x+x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1-x}{1+x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x+(1-x)}{1+x}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{1+x}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Použijeme substituci:

$$1 + x = t,$$

$$dt = dx.$$

Upravíme meze:

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } t = 1 \text{ a pro } x = 1 \text{ je } t = 2.$$

Dosadíme a pokračujeme ve výpočtu:

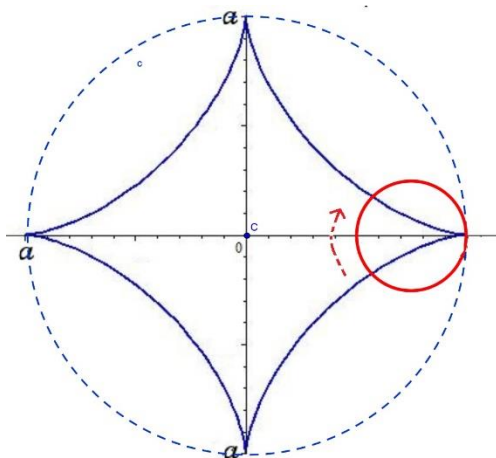
$$\sqrt{2} \int_1^2 t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Délka křivky je rovna $4 - 2\sqrt{2}$.

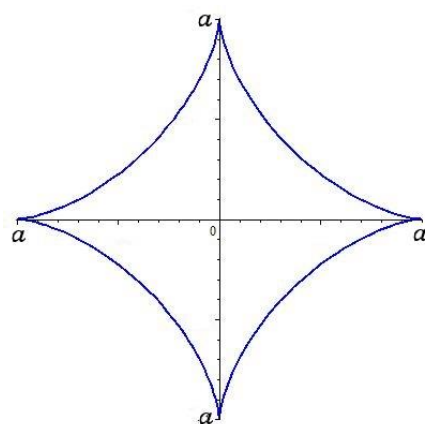
4.2.1.6 Příklad 6

Vypočítejte délku asteroidy zadané parametrickými rovnicemi $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. ([15], str. 162)

Asteroida je zvláštním případem hypocykloidy. Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnitřní straně nehybné kružnice. Asteroidu dostaneme v případě, kdy se kružnice o poloměru $r = \frac{a}{4}$ (na obrázku červená) kotálí po vnitřní straně kružnice poloměru $R = a$.



Obr. 24a Vznik asteroidy



Obr. 24b Asteroida

Asteroida je symetrická podle obou souřadnicových os. Stačí tedy určit její délku v prvním kvadrantu, tj. pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a pak vynásobit čtyřmi.

Vypočteme derivace parametrických rovnic:

$$x' = 3a \cos^2 t (-\sin t),$$

$$y' = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Dosadíme do vzorce (21) ze strany 45 a vypočteme:

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-3a \cos^2 t \sin t]^2 + [3a \sin^2 t \cos t]^2} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} dt = \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \\ &= \frac{3a}{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-3a}{4} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{3a}{4} (-1 - 1) = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

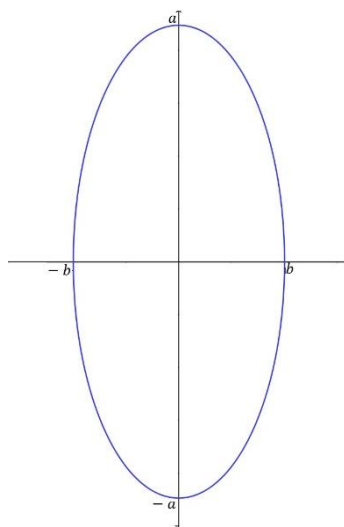
Délka celé asteroidy je tedy:

$$L = 4 \cdot \frac{3a}{2} = 6a.$$

Délka je $6a$.

4.2.1.7 Příklad 7

Vypočítejte délku elipsy, jejíž parametrické rovnice jsou $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a, b > 0$ jsou délky hlavní a vedlejší poloosy, vedlejší poloosa leží na ose x a hlavní poloosa v ose y . ([15], str. 163)



Obr. 25 Elipsa

Elipsa je symetrická podle obou souřadnicových os, budeme opět počítat její část v prvním kvadrantu, tj. pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Určíme derivace parametrických rovnic:

$$x' = -a \sin t,$$

$$y' = b \cos t.$$

Derivace dosadíme do rovnice (21) na str. 45 pro výpočet délky křivky:

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-a \sin t]^2 + [b \cos t]^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt = \\ &= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Zlomek $\frac{b^2 - a^2}{b^2}$ označíme jako k^2 , pak:

$$\frac{L}{4} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Délka celé elipsy bude:

$$L = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Nyní nastává problém, že primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Proto pro konkrétní hodnoty poloos a a b zkusme použít k výpočtu vhodnou numerickou metodu.

Hodnotu si určíme například pomocí Simpsonova pravidla, které zní:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad [17]$$

V našem případě dostáváme toto:

$$\begin{aligned} & 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = \\ & = 4b \cdot \left\{ \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 0} + 4\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\pi}{4}} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} \right) \right\} = \\ & = 4b \cdot \left\{ \frac{\pi}{12} \left(\sqrt{1 - k^2 \cdot 0} + 4\sqrt{1 - k^2 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{1 - k^2 \cdot 1} \right) \right\} = \\ & = \frac{b\pi}{3} \left(1 + 4\sqrt{1 - \frac{1}{2}k^2} + \sqrt{1 - k^2} \right). \end{aligned}$$

Délka elipsy dle Simpsonova pravidla je $\frac{b\pi}{3} \left(1 + 4\sqrt{1 - \frac{1}{2}k^2} + \sqrt{1 - k^2} \right)$, kde

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

4.3 Objem rotačního tělesa

Tato kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [3], [4] a [15].

Úvahy týkající se obsahu obrazce bychom mohli uplatnit i v případě trojrozměrného prostoru. Mohli bychom také uvést definici „základního tělesa“, dále definovat těleso a poté uvést definici *objemu tělesa* jakožto kladného čísla splňujícího tyto tři podmínky:

- 1) Objemy shodných těles jsou si rovny.
- 2) Jsou-li V_1, V_2 objemy dvou těles, které se neprotínají, pak $V_1 + V_2$ je objem tělesa, které je sjednocením těchto dvou těles.
- 3) Objem kvádrů o rozměrech a, b, c je roven součinu abc .

Pak bychom mohli ještě zobecnit 2) pro větší počet těles a z naší definice objemu poté vyplývá že:

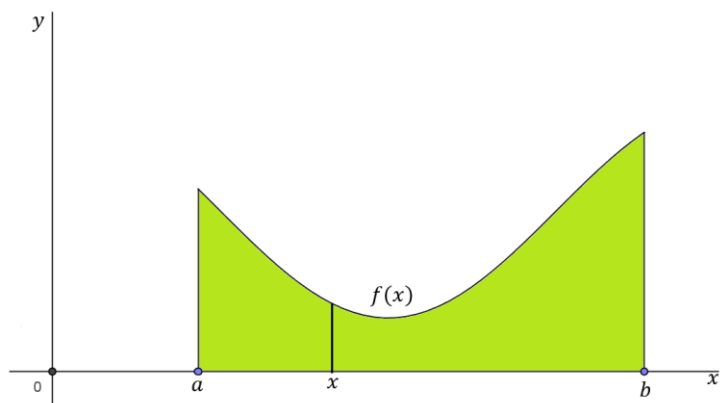
- 4) Mají-li tělesa V_1, V_2 po řadě objemy V_1, V_2 a je-li těleso V_1 částí tělesa V_2 , pak platí: $V_1 \leq V_2$.

To vše bychom mohli, kdybychom ovšem k tomu měli potřebné prostředky. Chybí nám však dvě věci. Je to jednak pojem plochy, který bychom potřebovali k definici základního tělesa, a pak nám chybí početní aparát nutný k důkazu věty o výpočtu objemu základního tělesa.

Místo obecných úvah o výpočtu objemu tělesa budeme řešit odvození vzorce pro výpočet *objemu rotačního tělesa*.

Jedná se o těleso, které vznikne rotací plošného útvaru kolem osy x . Budeme postupovat podobně jako v případě určitého integrálu.

Uvažujeme rotační těleso, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f(x))$ kolem osy x . Na Obr. 26 je příklad takového útvaru. Křivka o rovnici $y = f(x)$ je grafem spojitě funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$. Objem vzniklého rotačního tělesa označujeme $V(U)$. A naším úkolem je vypočítat tento objem.



Obr. 26 Příklad útvaru určeného k rotaci kolem osy x

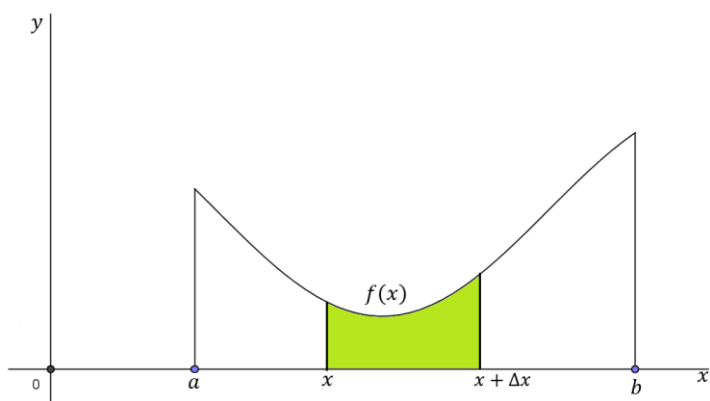
Nejprve si v intervalu $\langle a, b \rangle$ zvolíme bod x a necháme rotovat kolem osy x útvar $U_x = U(a, x, f(x))$. Objem takto vzniklého tělesa označme $V(x)$. Výraz $V(x)$ představuje funkci proměnné x definovanou v intervalu $\langle a, b \rangle$. Pro tuto funkci platí:

$$V(a) = 0, V(b) = V(U).$$

Nyní ukážeme, že pro funkci $V(x)$ platí:

$$\frac{dV}{dx} = \pi f^2(x), x \in \langle a, b \rangle. \quad (23)$$

Vztah (23) nám připomíná již z geometrie známý vzorec pro výpočet objemu válce $V = \pi r^2 v$. Poloměr takového válce by byl $f(x)$ a výška dx . Nyní v intervalu $\langle a, b \rangle$ zvolíme uzavřený interval $\langle x, x + \Delta x \rangle$ tak, jak je uvedeno na Obr. 27.



Obr. 27 Zvolení intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$

Intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ odpovídá útvar, který necháme rotovat kolem osy x . Objem tohoto tělesa je $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$ za předpokladu $\Delta x > 0$. Zároveň je ΔV přírůstek funkce $V(x)$ v bodě x pro $\Delta x > 0$. Protože je funkce f v intervalu

$\langle x, x + \Delta x \rangle$ spojitá, nabývá zde své největší hodnoty $f(x_2)$ a své nejmenší hodnoty $f(x_1)$, kde $x_1, x_2 \in \langle x, x + \Delta x \rangle$. Za těchto předpokladů potom platí:

$$\pi f^2(x_1)\Delta x \leq \Delta V \leq \pi f^2(x_2)\Delta x. \quad (24)$$

Výrazy $\pi f^2(x_1)\Delta x$, $\pi f^2(x_2)\Delta x$ vyjadřují objem válce vepsaného do rotačního tělesa a objem válce opsaného rotačnímu tělesu. Z poslední nerovnosti plyne:

$$\pi f^2(x_1)\Delta x \leq \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq \pi f^2(x_2)\Delta x. \quad (25)$$

Jestliže nyní $\Delta x \rightarrow 0+$, potom $x_1 \rightarrow x$ a podobně $x_2 \rightarrow x$. Protože funkce $f^2(x)$ je spojitá, platí:

$$\pi f^2(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} \leq \pi f^2(x). \quad (26)$$

Z poslední nerovnosti plyne $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x)$. Analogicky je možné ukázat, že

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x).$$

Spojením obou výsledků dostaneme $\frac{dV(x)}{dx} = \pi f^2(x) = \pi y^2$. Pro objem rotačního tělesa tedy platí:

$$V = V(b) - V(a) = \int_a^b \pi f^2(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

Kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $\pi f^2(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Věta 4.6: Necht' funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, F(x))$ kolem osy x neboli rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí f , osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x , má objem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (27)$$

Je-li funkce f zadána parametrickými rovnicemi, můžeme objem rotačního tělesa definovat takto:

Věta 4.7: Necht' je funkce f dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce φ má spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce ψ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti:

$$\varphi(\alpha) \leq x \leq \varphi(\beta),$$

$$0 \leq y \leq \psi(t),$$

kolem osy x , platí:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt. \quad (28)$$

Věta 4.8: Pro výpočet rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x) \leq f(x)$ kolem osy x pro $x \in \langle a, b \rangle$, použijeme vztah:

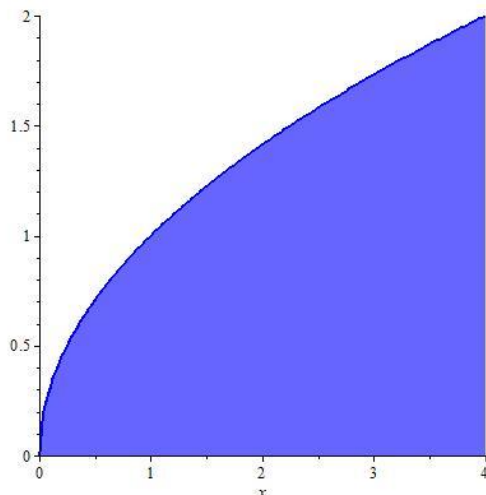
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx. \quad (29)$$

Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí, tento vztah je ale nesprávný.

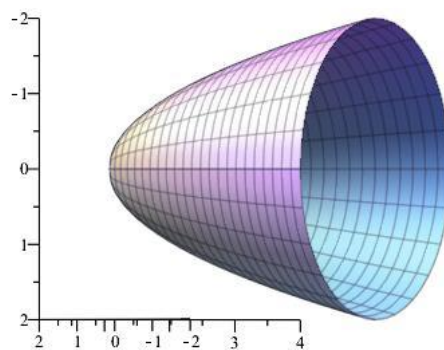
4.3.1 Řešené příklady:

4.3.1.1 Příklad 1

Určete objem tělesa, které vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. ([8], str. 59)



Obr. 28a



Obr. 28b

Pro výpočet potřebujeme druhou mocninu funkce:

$$y = \sqrt{x},$$

$$y^2 = x.$$

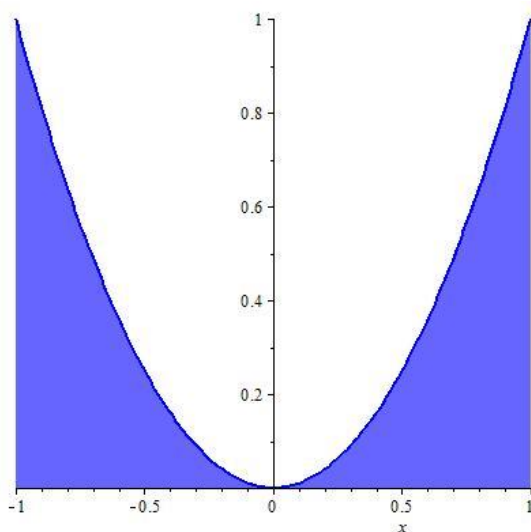
Dosadíme do vzorce (27) na str. 57 pro výpočet objemu:

$$V = \pi \int_0^4 x \, dy = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot \left(\frac{16}{2} - 0 \right) = 8\pi.$$

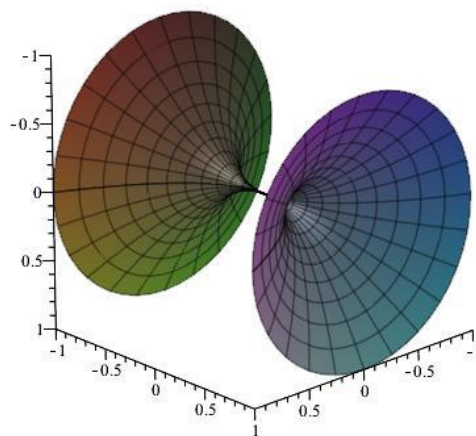
Objem daného tělesa je 8π .

4.3.1.2 Příklad 2

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy ohraničené osou x , grafem funkce $y = x^2$ a přímkami $x = -1$, $x = 1$ kolem osy x . ([9], str. 121)



Obr. 29a



Obr. 29b

Vypočteme druhou mocninu funkce:

$$y = x^2,$$

$$y^2 = x^4.$$

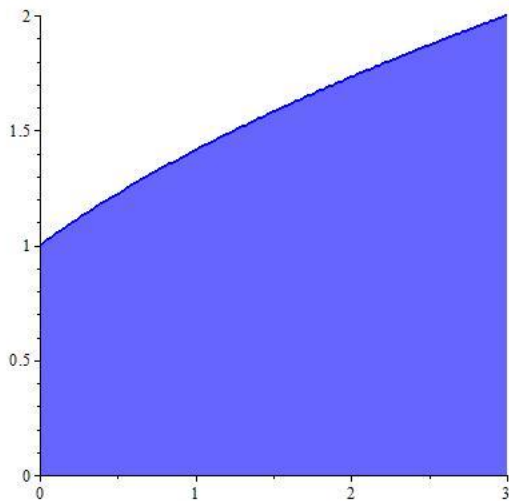
Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu a vypočteme:

$$V = \pi \int_{-1}^1 x^4 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right) = \frac{2}{5}\pi.$$

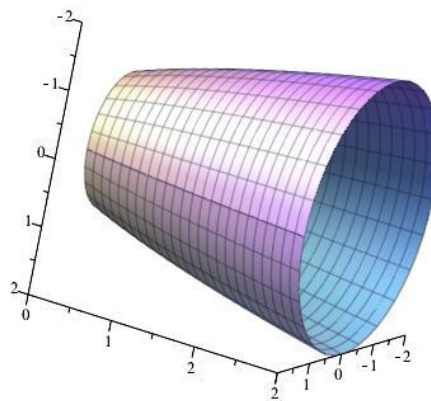
Objem zadaného tělesa je $\frac{2}{5}\pi$.

4.3.1.3 Příklad 3

Určete objem tělesa, vzniklého při rotaci kolem osy x grafu funkce $y = \sqrt{x+1}$ v intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. ([8], str. 59)



Obr. 30a



Obr. 30b

Určíme druhou mocninu funkce:

$$y = \sqrt{x+1},$$

$$y^2 = x+1.$$

Dosadíme do vzorce (27) na str. 53 a vypočteme:

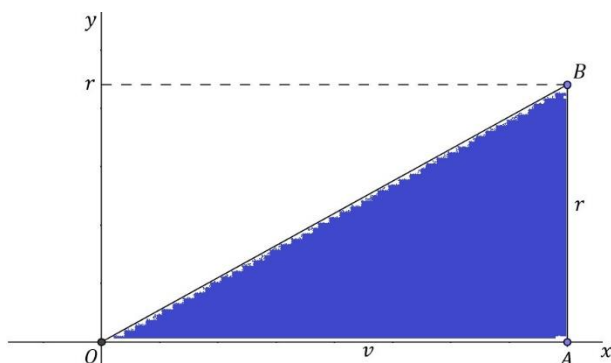
$$V = \pi \int_0^3 x+1 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^3 = \pi \cdot \left(\frac{9}{2} + 3 - 0 \right) = \frac{15\pi}{2}.$$

Objem je roven $\frac{15\pi}{2}$.

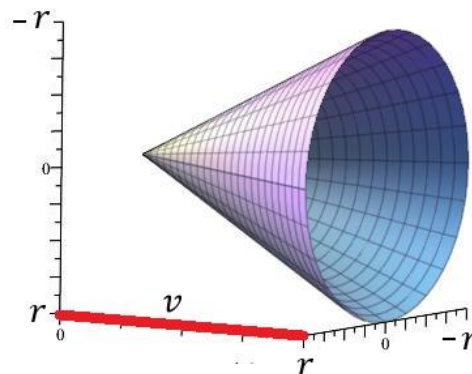
4.3.1.4 Příklad 4

Určete objem rotačního kužele o výšce v a poloměru podstavy r . ([3], str. 435)

Tento kužel vznikne, otočí-li se kolem osy x pravoúhlý trojúhelník ΔOAB jak vidíme na obrázku 31a, přičemž $O = [0,0]$, $A = [v,0]$, $B = [v,r]$, ($v > 0, r > 0$). Kolem osy x tedy necháme rotovat funkci $y = \frac{r}{v}x$.



Obr. 31a



Obr. 31b

Vypočteme druhou mocninu funkce:

$$y = \frac{r}{v}x,$$
$$y^2 = \frac{r^2}{v^2}x^2.$$

Dosadíme do příslušného vzorce:

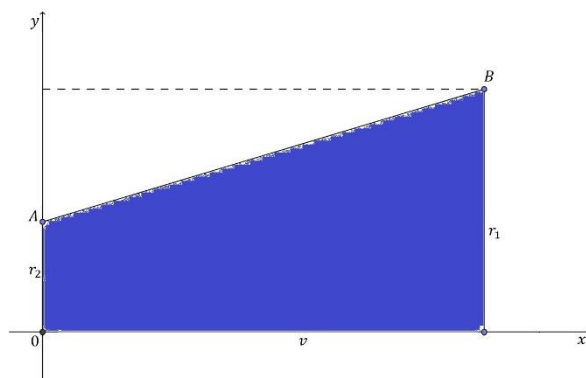
$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \frac{\pi r^2}{v^2} \cdot \left(\frac{v^3}{3} - 0 \right) =$$
$$= \frac{\pi r^2 v^3}{3v^2} = \frac{\pi r^2 v}{3}.$$

Vidíme, že objem se rovná $\frac{1}{3}\pi r^2 v$, což je vzorec známý z geometrie.

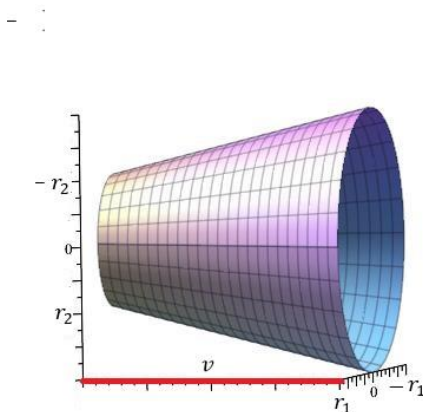
4.3.1.5 Příklad 5

Pomocí integrálního počtu odvoďte vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1 , r_2 a výškou v . ([4], str. 177)

Komolý kužel dostaneme rotací lichoběžníku kolem osy x . Lichoběžník je omezen křivkami $y = 0$, $x = 0$, $x = v$, $y = kx + q$, kde $y = kx + q$ je přímka procházející body $A[0, r_2]$, $B[v, r_1]$ jak vidíme na obrázku 32a.



Obr. 32a



Obr. 32b

Rovnice přímky je:

$$y = \frac{(r_1 - r_2)}{v}x + r_2.$$

Vypočteme její druhou mocninu:

$$y^2 = \left(\frac{(r_1 - r_2)^2}{v^2}x^2 + 2 \frac{r_2(r_1 - r_2)}{v}x + r_2^2 \right).$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu rotačních těles:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^v \left(\frac{(r_1 - r_2)^2}{v^2}x^2 + 2 \frac{r_2(r_1 - r_2)}{v}x + r_2^2 \right) dx = \\ &= \pi \left[\frac{(r_1 - r_2)^2}{3v^2}x^3 + 2 \frac{r_2(r_1 - r_2)}{2v}x^2 + r_2^2x \right]_0^v = \\ &= \pi \left[\frac{(r_1 - r_2)^2}{3v^2}v^3 + 2 \frac{r_2(r_1 - r_2)}{2v}v^2 + r_2^2v - 0 \right] = \dots = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2). \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet komolého kužele je roven $\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$. Tento vzorec již známe z geometrie a můžeme jej dohledat v matematicko-fyzikálních tabulkách pro SŠ.

4.3.1.6 Příklad 6

Určete vzorce pro výpočet koule o poloměru r . ([3], str. 436)

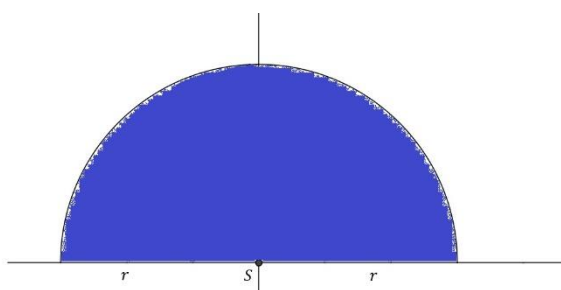
Koule vznikne rotací půlkruhu kolem osy x . Z rovnice kružnice se středem v bodě $[0,0]$ a poloměrem r si vyjádříme funkci, která odpovídá danému půlkruhu:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

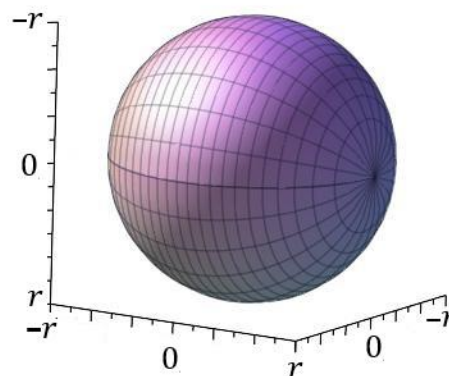
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Meze pro daný půlkruh jsou:

$$\langle -r, r \rangle.$$



Obr. 33a



Obr. 33b

Určíme druhou mocninu této funkce:

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu a vypočteme:

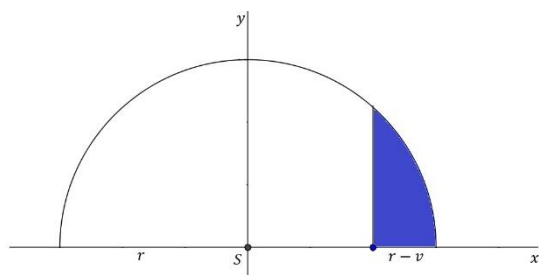
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \\ &= \pi \cdot \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet objemu koule je $\frac{4}{3} \pi r^3$.

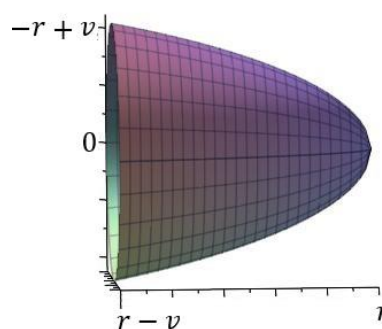
4.3.1.7 Příklad 7

Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kulové úseče, která je částí koule o poloměru r a jejíž výška je v . ([4], str. 176)

Odpovídající kružnice má rovnici $r^2 = x^2 + y^2$, kulová úseč vznikne rotací útvaru omezeného křivkami $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (r - v, r)$, $y = 0$ kolem osy x jak vidíme na obrázku 34a.



Obr. 34a



Obr. 34b

Vypočteme druhou mocninu funkce y :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Pro objem kulové úseče tedy platí:

$$V = \pi \int_{r-v}^r r^2 - x^2 dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(r^2(r-v) - \frac{1}{3}(r-v)^3 \right) \right) =$$

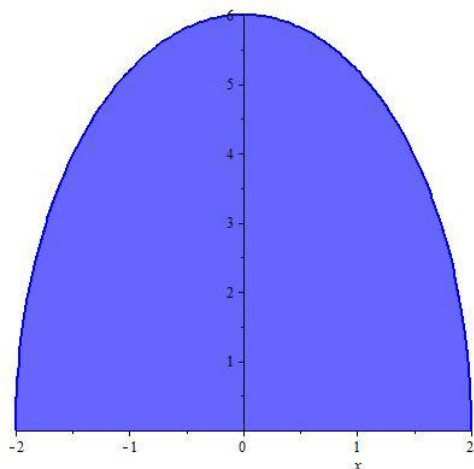
$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 v + \frac{1}{3}(r-v)^3 \right) = \dots = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v).$$

Vzorec pro výpočet kulové úseče je $\frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$.

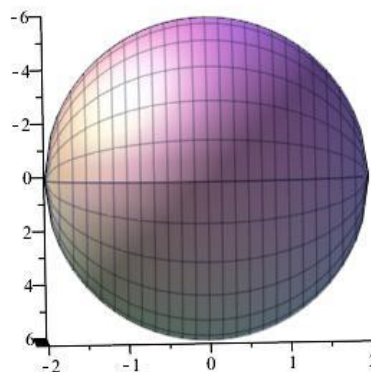
4.3.1.8 Příklad 8

Určete objem tělesa, které je zadáno rovnicí elipsy $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} = 1$ a rotuje kolem osy x . ([3], str. 438)

Elipsa je souměrná podle obou os, proto nám stačí nechat rotovat část křivky, která je v prvním kvadrantu a výsledek vynásobit dvěma.



Obr. 35a



Obr. 35b

Meze v prvním kvadrantu jsou:

$$\langle 0, 2 \rangle.$$

Vyjádříme rovnici křivky z rovnice elipsy:

$$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} = 1,$$

$$y^2 = 36 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 36 - 9x^2.$$

Dále rovnici upravovat nemusíme, její druhou mocninu využijeme při výpočtu objemu:

$$V = \pi \int_0^2 36 - 9x^2 = \pi \left[36x - \frac{9x^3}{3} \right]_0^2 = \pi(72 - 24 - 0) = 48\pi.$$

Nesmíme zapomenout výsledek vynásobit dvěma, abychom dostali objem celého tělesa:

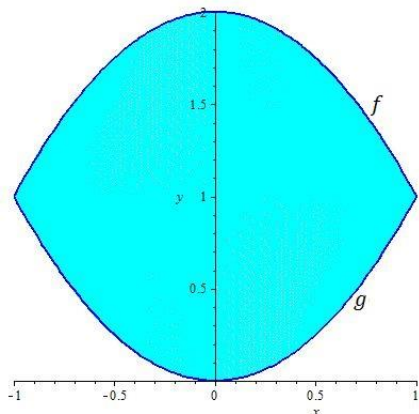
$$V = 2 \cdot 48\pi = 96\pi.$$

Objem rotující elipsy je roven 96π .

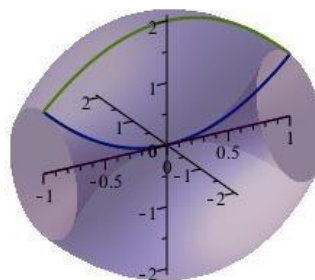
4.3.1.9 Příklad 9

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$ kolem osy x . ([15], str. 173)

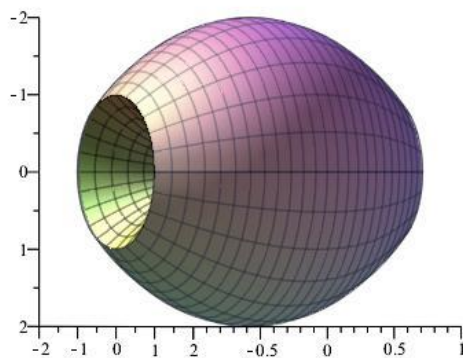
Oblast je ohraničená dvěma parabolami.



Obr. 36a



Obr. 36b



Obr. 36c

Najdeme si jejich průsečíky:

$$x^2 = 2 - x^2,$$

$$2x^2 - 2 = 0,$$

$$2(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Křivky se protínají v bodech:

$$x_1 = -1 \text{ a } x_2 = 1.$$

Objem daného objektu nalezneme, když využijeme větu 4.8 na str. 58 a odečteme od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky f kolem osy x objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou g , na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Využitím vzorce (29) na straně 58 získáváme:

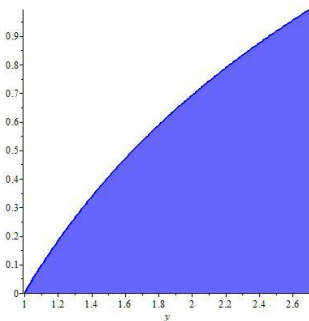
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (2-x)^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 [(2-x^2) - (x^2)^2] dx = \\ &= \pi \int_{-1}^1 [4 - 4x^2 + x^4 - x^4] dx = 4\pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = 4\pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Rotací oblasti mezi parabolami nám vznikne těleso o objemu $\frac{16\pi}{3}$.

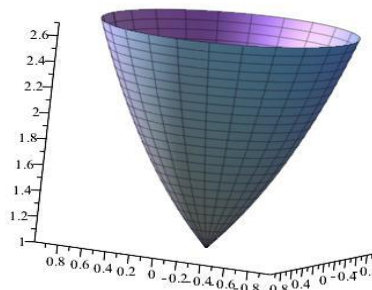
4.3.1.10 Příklad 10

Vypočítejte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ kolem osy y ¹⁷. ([15], str. 178)

Funkce $y = e^x$ je prostá na definičním oboru a inverzní funkce k ní bude $x = \ln y$, $y > 0$. Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ bude $y \in \langle 1, e \rangle$.



Obr. 37a



Obr. 37b

¹⁷ Pro výpočet objemu rotačního tělesa kolem osy y můžeme postupovat tak, že k dané funkci zvolíme funkci inverzní, přepočítáme dané meze a tím přeneseme původní rotaci kolem osy y na rotaci kolem osy x .

Druhá mocnina funkce je:

$$\begin{aligned}x &= \ln y, \\x^2 &= \ln^2 y.\end{aligned}$$

Objem vypočítáme následovně:

$$V = \pi \int_1^e \ln^2 y \, dy.$$

Využijeme metody per partes:

$$\left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln^2 y \\ u = y & v' = (2 \ln y) \frac{1}{y} \end{array} \right|$$

Dosadíme a dostáváme:

$$\pi \left([y \ln^2 y]_1^e - 2 \int_1^e \ln y \, dy \right) = \pi([e - 0] - 2 \int_1^e \ln y \, dy).$$

Opět použijeme per partes:

$$\left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln y \\ u = y & v' = \frac{1}{y} \end{array} \right|$$

Dosadíme:

$$\begin{aligned}\pi \left(e - 2[y \ln y]_1^e + 2 \int_1^e dy \right) &= \pi(e - 2e + 2[y]_1^e) = \pi(e - 2e + 2e - 2) = \\ &= \pi(e - 2).\end{aligned}$$

Objem daného tělesa je $\pi(e - 2)$.

4.3.1.11 Příklad 11

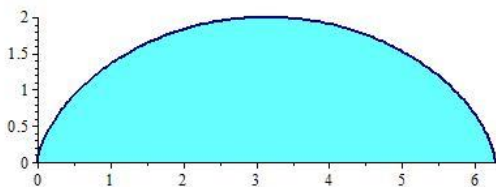
Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem cykloidy kolem osy x ([16], str. 87)

U cykloidy jsme již počítali obsah na str. 42 příklad 12. Již víme, že její parametrické rovnice jsou:

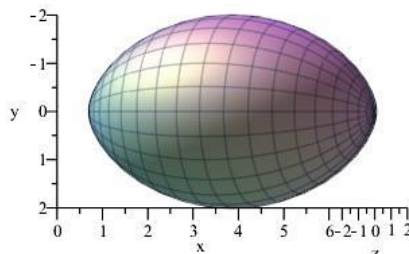
$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t).\end{aligned}$$

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obr. 38a



Obr. 38b

Protože $dx = a(1 - \cos t) dt$ dostáváme dle věty 4.7 na str. 57:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi a^3 \left([t - 3 \sin t]_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt \right) = \\ &= \pi a^3 \left([t - 3 \sin t]_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt \right). \end{aligned}$$

Pomocí substitute:

$$\sin t = u$$

zjistíme, že primitivní funkce k $\int \sin^2 t \cos t dt$ je:

$$\int \sin^2 t \cos t dt = \frac{\sin^3 t}{3} + c.$$

Pak dostáváme:

$$\pi a^3 \left(2\pi + \frac{3}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} - \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} \right) = \pi a^3 (2\pi + 3\pi - 0) = 5\pi^2 a^3.$$

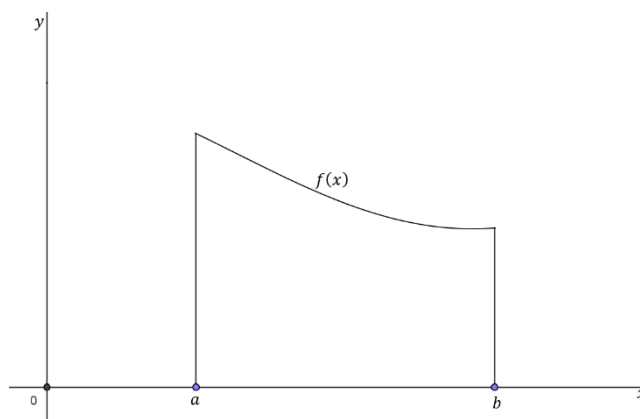
Objem tělesa, které vznikne rotací prvního oblouku cykloidy je $5\pi^2 a^3$.

4.4 Povrch rotačních ploch neboli obsah pláště rotačního tělesa

Tato kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [3] a [15].

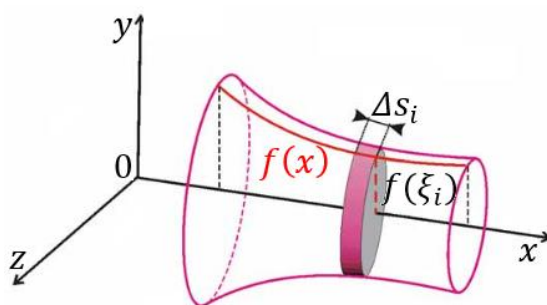
Definovat velikost nějaké plochy je úkol, který je prostředky, jež máme k dispozici, neproveditelný – a to ze stejných důvodů, které nám nedovolily obecně se zabývat pojmem objemu tělesa. Nezbyvá nám tedy nic jiného, než předpokládat pojmy „plocha“ a „velikost plochy“ za známé z geometrie a podrobněji se zabývat pouze výpočtem *velikosti pláště rotačního tělesa*.

Při výpočtu budeme postupovat následovně. Uvažujme nezápornou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Naším úkolem bude vypočítat obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce kolem osy x (např. Obr. 39).



Obr. 39 Rotace křivky kolem osy x

Nadále budeme postupovat analogicky jako při výpočtu objemu rotačního tělesa. Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků. (Můžeme si představit, že krájíme na kráječi např. šunku. Tentokrát nás zajímá slupka jednotlivých plátků.) Každý plátek můžeme aproximovat jako komolý kužel, jehož plášť vytvoří úsečka ΔS_i rotující kolem osy x (viz. Obr. 40). Plášť i -tého komolého kuželu bude $\Delta S_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i$.



Obr. 40 Rozřezání tělesa na plátky

Obsah celého pláště bude přibližně roven součtu pláštíů jednotlivých plátek (komolých kuželů):

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \Delta s_i. \quad (30)$$

Čím bude dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ jemnější, tím méně se bude součet obsahů pláštíů plátek $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$ lišit od obsahu pláště daného tělesa. Proto obsah pláště definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \rightarrow \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta s_i \rightarrow 0$. Klademe:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) ds, \quad (31)$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Dosazením za ds dostaneme:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (32)$$

Věta 4.9: Necht' je funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má zde spojitou derivaci f' . Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky $y = f(x)$ kolem osy x platí:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (33)$$

Je-li křivka zadána parametrickými rovnicemi můžeme předefinovat Větu 4.9 takto:

Věta 4.10: Necht' je funkce f dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce φ a ψ mají spojitě derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a funkce ψ je nezáporná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak pro obsah plochy, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x platí:

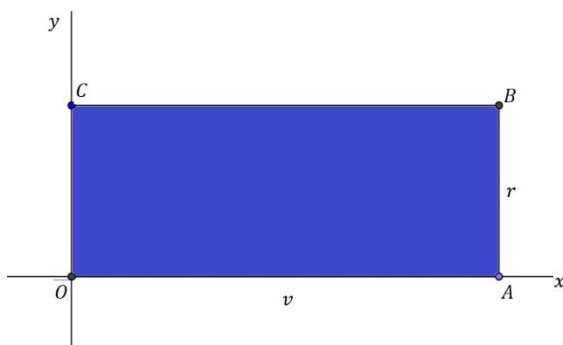
$$S = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (34)$$

4.4.1 Řešené příklady:

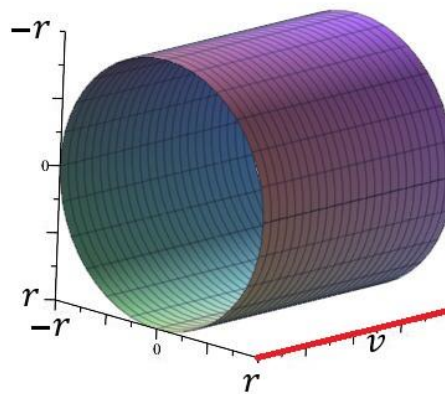
4.4.1.1 Příklad 1

Určete vzorec pro výpočet povrchu pláště válce, jehož výška je v a poloměr podstavy r . ([3], str. 451) obr str. 435

Válec s výškou v a poloměrem podstavy r vznikne, necháme-li rotovat obdelník o stranách v a r (viz Obr. 41a). Tedy útvar ohraničený osou x , přímkami $x = 0, x = v$ a úsečkou, již je částí konstantní funkce $y = r$.



Obr. 41a



Obr. 41b

Dle vzorce (33) na straně 71 sestavíme integrál k výpočtu obsahu pláště:

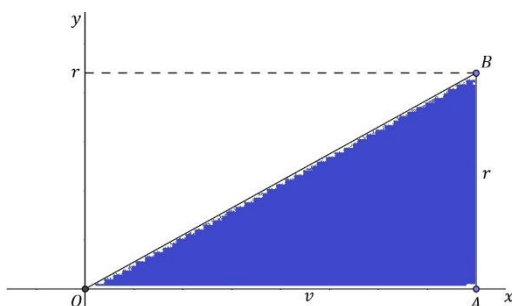
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^v r \sqrt{1 + [(r)']^2} dx = 2\pi \int_0^v r \sqrt{1 + [0]^2} dx = \\ &= 2\pi \int_0^v r \sqrt{1 + 0} dx = 2\pi r [x]_0^v = 2\pi r v. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet povrchu pláště je $2\pi r v$, tak jak jej známe z geometrie.

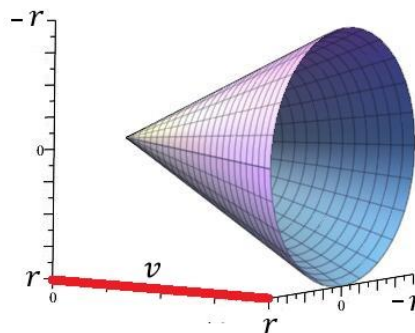
4.4.1.2 Příklad 2

Určete obsah pláště rotačního kužele o výšce v a poloměrem podstavy r . ([3], str. 451)

Funkci $f: f(x) = \frac{r}{v}x$, kterou použijeme pro náš výpočet jsme již popsali v kapitole 4.3.1.4 na straně 61. Pusťme se tedy přímo do výpočtu obsahu pláště.



Obr. 42a



Obr. 42b

Derivace této funkce je rovna:

$$f'(x) = \frac{r}{v}.$$

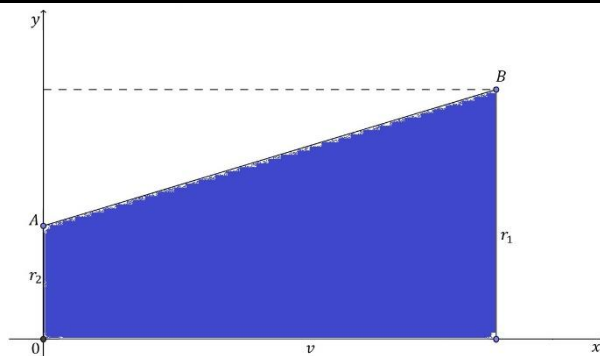
Dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu pláště tělesa (vzorec (33), str. 71):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^v \frac{r}{v}x \sqrt{1 + \left[\frac{r}{v}\right]^2} dx = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v}x \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}} dx = \\ &= \frac{2\pi r \sqrt{v^2 + r^2}}{v^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v = \pi r \sqrt{v^2 + r^2}. \end{aligned}$$

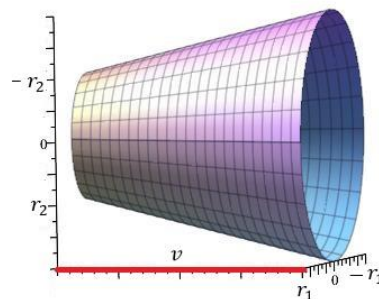
Označíme-li $\sqrt{v^2 + r^2} = s$, kde $s = OB$ což je velikost povrchy kužele, obdržíme známý vzorec $S = \pi r s$.

4.4.1.3 Příklad 3

Určete vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního komolého kužele o výšce v a poloměry podstav jsou rovny r_1 a r_2 . ([3], str. 451)



Obr. 43a



Obr. 43b

Funkce f je popsána v kapitole 4.3.1.5 na str. 62 je:

$$f(x) = \frac{r_1 - r_2}{v}x + r_1.$$

Derivace této funkce je rovna:

$$f'(x) = \frac{r_1 - r_2}{v}.$$

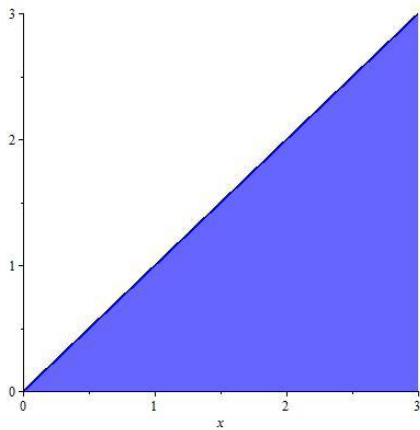
Dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu pláště (vzorec (33), str. 71):

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^v \left(\frac{r_1 - r_2}{v}x + r_1 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{r_1 - r_2}{v} \right)^2} dx = \\ &= \dots = \frac{2\pi \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}}{v^2} \cdot \left[(r_1 - r_2) \cdot \frac{x^2}{2} + r_1 vx \right]_0^v = \pi(r_1 - r_2) \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}. \end{aligned}$$

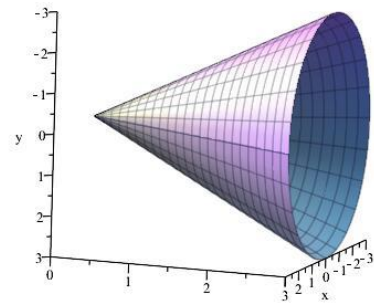
Vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního komolého kužele je $\pi(r_1 - r_2) \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

4.4.1.4 Příklad 4

Vypočítejte obsah pláště rotačního kužele, který vznikne rotací funkce $f(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 3 \rangle$ kolem osy x . ([16], str. 88)



Obr. 44a



Obr. 44b

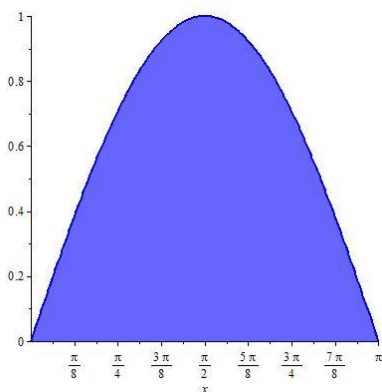
Dosadíme:

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^3 x \sqrt{1 + [1]^2} dx = \\
 &= 2\pi\sqrt{2} \int_0^3 x dx = 2\pi\sqrt{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{9}{2} = 9\pi\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

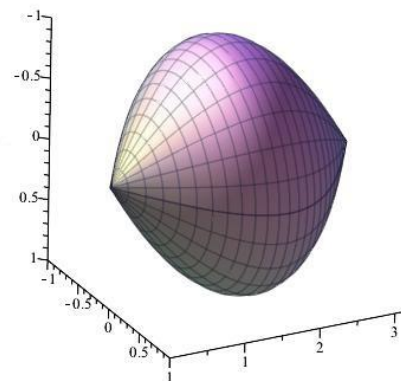
Povrch plochy, která vznikne rotací zadané funkce f je $9\pi\sqrt{2}$.

4.4.1.5 Příklad 5

Vypočítejte povrch plochy, kterou vytvoří křivka $y = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, otáčením okolo osy x . [14]



Obr. 45a



Obr. 45b

K výpočtu potřebujeme derivaci:

$$y = \sin x,$$
$$y' = \cos x.$$

Dosadíme do vzorce (33) ze strany 71:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} \sin x \, dx.$$

K výpočtu použijeme substituci:

$$\cos x = t,$$
$$-\sin x \, dx = dt,$$
$$dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$

Přepočteme meze:

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } t = \cos 0 = 1,$$
$$\text{pro } x = \pi \text{ je } t = \cos \pi = -1.$$

Dosadíme substituci, meze a pokračujeme ve výpočtu:

$$2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \sin x \left(-\frac{dy}{\sin x}\right) = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \, dt.$$

Nyní platí¹⁸:

$$-2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \, dt = 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \, dt.$$

Vzhledem k tomu, že funkce je na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ sudá, můžeme podle věty 2.15 na straně 22 integrál spočítat takto:

$$2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \, dt = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt.$$

Nyní integrál vypočítáme následovně. Nejprve výraz rozšíříme výrazem $\sqrt{1 + t^2}$. Tento integrál rozdělíme na dva a druhý integrál vyřešíme metodou per partes:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt =$$

¹⁸ Integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ jsme ve větě 2.7 na str. 20 definovali pro případ, že $a < b$. Pro $a > b$ utvoříme integrální součty takto: $S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, kde $b = x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 = a$. V tomto případě je $(x_i - x_{i-1}) < 0$ a tento nový integrální součet má opačné znaménko než definovaný integrální součet pro interval $\langle b, a \rangle$. Definujeme proto: $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$. [14]

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^1 t \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = t \quad v' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ u' = 1 \quad v = \sqrt{1+t^2} \end{array} \right| = \left[\ln |t + \sqrt{1+t^2}| \right]_0^1 + \left[t\sqrt{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.
\end{aligned}$$

Poslední integrál na pravé straně rovnice převedeme na levou stranu:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 + \sqrt{2}, \\
2 \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}, \\
\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

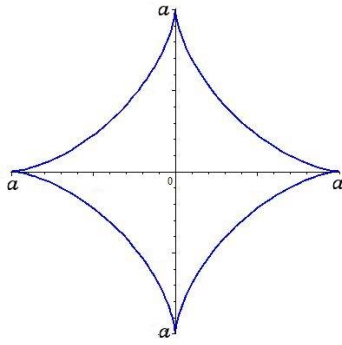
Povrch pláště je tedy roven:

$$S = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi \cdot \frac{1}{2} (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}) = 2\pi (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}).$$

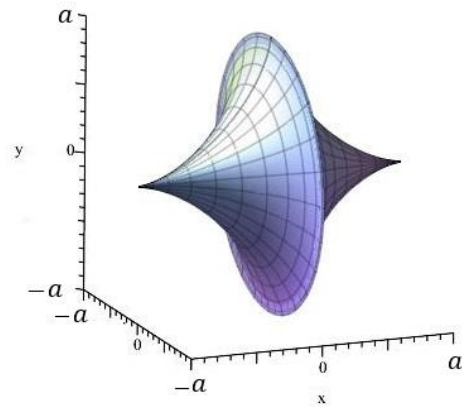
Obsah pláště, který vznikne rotací funkce $x = \sin x$ na daném intervalu je $2\pi (\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2})$.

4.4.1.6 Příklad 6

Určete obsah pláště rotační plochy, která vznikne rotací asteroidy kolem osy x . ([15], str. 188)



Obr. 46a



Obr. 46b

Vznik asteroidy je popsán u příkladu 4.2.1.6 Příklad 6 na straně 51.

Parametrické rovnice asteroidy jsou:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t) = a \cos^3 t, \\y &= \Psi(t) = a \sin^3 t, \\a &> 0.\end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii asteroidy se můžeme omezit na $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Rotací dostaneme polovinu rotační plochy. Parametrické rovnice a jejich derivace:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ \Psi'(t) &= 3a \sin^2 t \cos t,\end{aligned}$$

dosadíme do vzorce (34) ze strany 71 a vypočteme:

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{[-3a \cos^2 t \sin t]^2 + [3a \sin^2 t \cos t]^2} dt = \\ &= 2\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t (3a \sin t \cos t) dt = 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \\ &= 6\pi a^2 \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5}.\end{aligned}$$

Obsah celé rotační plochy bude:

$$S = 2 \frac{6\pi a^2}{5} = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

Obsah pláště, který vznikne rotací asteroidy je $\frac{12\pi a^2}{5}$.

5 Příklady k procvičení

Tyto příklady jsou vybrány z publikací [3], [4], [10] a [15], které se zabývají matematikou analýzou.

5.1 Obsah rovinného útvaru

1) Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen osou x a křivkou:

a) $y = 3x - x^2$

b) $y = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

2) Vypočtěte obsah rovinného útvaru, který je omezen křivkami:

a) $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = 0, x = \frac{1}{4}\pi$

b) $y = x^2, y^2 = x$

c) $y^2 = x, x + y - 2 = 0$

d) $y = e^{-x} \sin x, y = 0, x \in \langle 0, \pi \rangle$

3) Určete obsah oblasti ohraničené křivkami:

a) $y = \frac{12}{1+x^2}, y = x^2$

b) $y = \ln x, y = 2 \ln x - 1, x = e^2$

c) osa x , osa y , $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

4) Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $y = x^3 + x^2 - 6x$ pro $-3 \leq x \leq 3$ a osou x .

5) Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi$.

Výsledky:

1) a) $P = \frac{9}{2}$, b) $P = 2\pi + 2$, 2) a) $P = \frac{1}{4} \ln 2$, b) $P = \frac{1}{3}$, c) $P = \frac{9}{2}$, d) $P = \frac{1+e^\pi}{2e^\pi}$,

3) a) $P = 8\pi - 2\sqrt{3}$, b) $P = e$, c) $P = \frac{27}{2}$, 4) $P = \frac{86}{3}$, 5) $P = 2\pi$,

5.2 Délka rovinné křivky

1) Určete délku křivky dané předpisem:

a) $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$

b) $y = x\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \frac{7}{3} \rangle$

c) $y = \ln(\sin x)$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$

2) Vypočtěte délku oblouku křivky, která je grafem funkce $y = \ln(\cos x)$, a jehož krajní body mají první souřadnice $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

3) Určete délku křivky:

a) $y^2 = 4x^3$, $0 \leq x \leq 2$, $y > 0$

b) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$

c) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq e$

4) Vypočtěte délku oblouku křivky $y = \frac{2+x^6}{8x^2}$ pro $1 \leq x \leq 2$.

5) Určete délku křivky, která má parametrické rovnice $x = \cos t + t \sin t$,
 $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Výsledky: 1) a) $L = 2\sqrt{2}$, b) $L = \frac{13}{3}$, c) $L = \ln \sqrt{3}$, 2) $L = \ln(1 + \sqrt{2})$,

3) a) $L = \frac{2}{27}(\sqrt{19^3} - 1)$, b) $L = 4$, c) $L = \frac{e^2 - 1}{4}$, 4) $L = \frac{33}{16}$, 5) $L = 2\pi^2$

5.3 Objem rotačního tělesa

- 1) Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$ kolem osy x .
- 2) Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami: $x^2 - y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$ kolem osy y .
- 3) Určete objem tělesa vzniklého rotací křivky kolem osy x , je-li křivka zadána rovnicí:
 - a) $y = 3x - 2$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$
 - b) $y = \cos x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
 - c) $y = \frac{1}{\cos x}$, $x \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle$
- 4) Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy x :
 - a) $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$
 - b) $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$
 - c) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$
- 5) Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného osou x a danou, parametricky popsanou, křivkou při rotaci kolem osy x , $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$.

Výsledky: 1) $V = \frac{5}{6}\pi$, 2) $V = \frac{64}{3}\pi$, 3) a) $V = \pi$, b) $V = \frac{\pi^2}{2}$, c) $V = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$, 4) a) $v = 12\pi$, b) $V = \frac{11}{6}\pi$, c) $V = \pi(9 - 8 \ln 2)$, 5) $V = 36\pi$

5.4 Povrch rotačních ploch (obsah pláště rotačního tělesa)

1) Určete obsah rotační plochy vzniklé rotací křivky kolem osy x , je-li křivka dána rovnicí:

a) $x^2 + (y - 3)^2 = 4, x \in \langle -2, 2 \rangle$

b) $y = 3 + \sqrt{4 - x^2}, x \in \langle -2, 2 \rangle$

c) $y = 3x - 2, x \in \langle 1, 2 \rangle$

d) $9y^2 = x(3 - x)^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$

2) Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y = 2\sqrt{x}$ pro $3 \leq x \leq 8$ při otáčení kolem osy x .

3) Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x , $x = \sin 2t, y = 2 \sin^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Výsledky: 1) a) $S = 24\pi^2$, b) $S = 12\pi^2 + 16\pi$, c) $S = 5\sqrt{10}\pi$, d) $S = \frac{11}{9}\pi$,

2) $S = \frac{152}{3}\pi$, 3) $S = 4\pi^2$

6 Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit čtenáři jedno z témat matematické analýzy a to Riemannuv určitý integrál. Při psaní této práce jsem si uvědomila, u kolika ploch či objektů v našem okolí lze určit obsah, objem či délku. Znalostí tohoto tématu se nám dostává mnoha možností a usnadnění výpočtu daných veličin aniž bychom si pamatovali vzorce, která nám byly „vtloukány“ do hlavy již na základní škole.

V této práci se dostávám k odvození některých nám již známých vzorců, jako jsou například výpočet obsahu kruhu, objemu rotačního kužele a komolého rotačního kužele, objemu koule, povrchu pláště válce či povrchu kužele.

Předpokládám, že by má práce mohla být vhodná pro studenty, kteří se s touto problematikou dostávají do kontaktu, a mohla by jim pomoci v pochopení integračních postupů.

7 Literatura

- [1] Aksamit, P., Mráz, F., *Příklady z matematické analýzy pro učitelské studium (1.část)*, Pedagogická fakulta v Českých Budějovicích, 1990, (str. 192)
- [2] Děmidovič, B., P., *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Moscow 1990, (str. 172, 196)
- [3] Dlouhý, Z., Hruša, K., Kůst, J., Rohlíček, J., Taišl, J., Zieris, J., *Úvod do matematické analýzy*, Státní pedagogické nakladatelství, 1965, (str. 347, 354, 418, 432, 433, 449)
- [4] Hrubý, D., Kubát, J., *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*, Prometheus, 1997, (str. 164 - 178)
- [5] Jarník, V., *Integrální počet (I)*, Praha, ACADEMIA, 1984, (str. 26, 27, 121, 122)
- [6] Kopáček, J., *Integrály*, matfyzpress, Praha, 2004, (str. 40-44)
- [7] Moc, O., *Sbírka úloh z matematiky (Integrální počet funkcí jedné proměnné)*, Fakulta sociálně ekonomická, UJEP, Ústí nad Labem, 2008, (str. 74)
- [8] Nýdl, V., Klufová, R., *Matematika, Část 2 – Matematická analýza*, Jihočeská univerzita, Zemědělská fakulta, České Budějovice, 1998, (str. 58)
- [9] Nýdl, V., Slavík, V., *Matematika*, Vysoká škola zemědělská Praha v Čs. redakci VN MON, 1989, (str. 119)
- [10] Samková, L., *Sbírka příkladů z matematiky*, ČVUT, Praha, 2006, (str. 208-111)

[11] Schwabik, Š., *Integrace v R (Kurzweilova teorie)*, Praha, Karolinum, 1999, (str. 12-21)

[12] Schwabik, Š., Šarmanová, P., *Malý průvodce historií integrálu*, Praha, Prometheus, 1996 (str. 7 - 28, 54 - 59)

Internetové zdroje

[13] Diskriminant [online]. [cit. 2014-3-23]. Dostupné z:

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Diskriminant>

[14] Integrální počet [online]. [cit.]. Dostupné z:

<https://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i24.html>

[15] Kreml, P., Vlček, J., Volný, P., Krček, J., Poláček, J., *Matematika II.* [online].

[cit. 2014-12-10]. Dostupné z:

http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_3_1.pdf

[16] Matematika s programem Maple [online]. [cit. 2012-10-24]. Dostupné z:

http://www.umat.feec.vutbr.cz/~krupkova/Matematika_v_Maple.pdf

[17] Numerické integrování [online]. [cit. 2014-06-13]. Dostupné z:

<http://homel.vsb.cz/~nab0008/integral/index.php>

[18] Pí [online]. [cit. 2015-06-06]. Dostupné z:

http://cs.wikipedia.org/wiki/P%C3%AD_%28%C4%8D%C3%ADslo%29#Historie

[19] Určitý integrál substituce [online]. [cit. 2015-01-15]. Dostupné z:

<http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Vypocet-a-pouziti-urciteho-integralu/Urcity-integral-substituce.alej>