Univerzita Hradec Králové

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Alternativní přístupy ke slovním úlohám v řešení studentů

Diplomová práce

Autorka: Bc. Tereza Julišová

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Matematika – Německý jazyk a literatura

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.

Oponentka práce: PhDr. Jana Cachová, Ph.D.

Hradec Králové 2023

Univerzita Hradec Králové
Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Tereza Julišová**
Studium:	P21P0699
Studijní program:	N0114A300053 Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Matematika, Německý jazyk a literatura
Název diplomové práce:	**Alternativní přístupy ke slovním úlohám v řešení studentů**
Název diplomové práce AJ:	Alternative approaches to solving word problems provided by students

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Diplomová práce se zaměří na různé metody řešení slovních úloh v matematice a shrne výsledky vlastního pedagogického výzkumu. První část vycházející z podrobného studia dostupné odborné literatury poskytne teoretický základ celé práci, přičemž budou definovány stěžejní pojmy, vysvětlena problematika matematické a čtenářské gramotnosti a v neposlední řadě bude kladen důraz na zařazení slovních úloh do kurikulárních dokumentů. V druhé části diplomové práce bude představen soubor úloh o pohybu, společné práci a směsích včetně různých způsobů jejich řešení s důrazem na alternativní postupy. Tento soubor úloh se stane základem pro navazující výzkumné šetření se studenty odpovídajících ročníků, které bude vyhodnoceno v souladu se standardními a v literatuře zavedenými metodami. V práci bude podrobně analyzován, interpretován a zasazen do kontextu teoretických východisek textu.

Vondrová, N., et al. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum.

Vybrané učebnice matematiky a články z odborných časopisů zaměřených na vyučování matematiky.

Další literatura bude upřesněna v průběhu konzultací.

Zadávající pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Lukáš Vízek, Ph.D.
Oponent:	PhDr. Jana Cachová, Ph.D.
Datum zadání závěrečné práce:	28.3.2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Alternativní přístupy ke slovním úlohám v řešení studentů vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně a uvedla jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Hradci Králové dne 19.4. 2023

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé diplomové práce Mgr. Lukáši Vízkovi, Ph.D. za odborné rady, vedení, ochotu a připomínky, bez kterých by tato práce nevznikla. Dále bych chtěla poděkovat učitelce matematiky, která mi dala prostor pro realizaci výzkumu, všem zúčastněným respondentům, kteří byli ochotni zúčastnit se výzkumu. V neposlední řadě patří velký dík mému partnerovi a rodině za veškerou podporu, trpělivost a pomoc při tvorbě této závěrečné práce.

Anotace

JULIŠOVÁ, Tereza. *Alternativní přístupy ke slovním úlohám v řešení studentů*. Hradec Králové: Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové, 2023, 68 s. Diplomová závěrečná práce.

Tématem této diplomové práce je alternativní řešení slovních úloh o pohybu. První část definuje slovní úlohy i jejich roli v rámci rámcových vzdělávacích programů pro základní školy a gymnázia. Dále jsou představeny různé strategie řešení matematických slovních úloh, typické chyby objevující se v žákovských řešeních a shrnout dosavadní stav výzkumu v oblasti slovních úloh. Cílem praktické části diplomové práce je ověření, zda jsou žáci schopni aplikovat experimentální, aritmetickou a algebraickou strategii v předložených úlohách o pohybu. Dále jsou analyzovány typické chyby objevující se v řešení těchto slovních úloh žáky. Sběr a analýza dat byla provedena metodami kvalitativního výzkumu, přičemž výzkumný vzorek tvořili žáci třetího ročníku šestiletého gymnázia.

Klíčová slova: slovní úloha, pohybová slovní úloha, alternativní řešení, typické chyby

Annotation

JULIŠOVÁ, Tereza. *Alternative approaches to solving word problems provided by students.* Hradec Králové: Faculty of Education, University of Hradec Králové, 2023. 68 pp. Diploma Degree Thesis.

This diploma thesis focuses on alternative motion word problems solutions. The first part defines a mathematics topic word problem and its place in Czech curriculum documents. Furthermore, different strategies for solving these word problems, typical errors occurring in students' solutions are included as well as a summarization of existing research in this sphere. The aim of the practical part of this diploma thesis is a verification of a question, if are students able to apply experimental, arithmetical and algebraical strategy in solving motion word problems. The most common and typical student´s errors are analyzed too. Data collecting and analysis have been done through qualitative methodology and the research sample was built from the students attending the third year of six-year grammar school.

Keywords: word problem, motion word problem, alternative solutions, typical errors

OBSAH

1 ÚVOD

Slovní úlohy jsou tématem, které je zastoupené ve všech vzdělávacích oblastech matematického vzdělávání na prvním i druhém stupni základních škol. Rámcově vzdělávací program pro základní školy (2017) vymezuje problematiku slovních úloh jako oblast, kdy žáci řeší úlohy z běžného života tím, že využívají matematický aparát. I přesto, že slovní úlohy by měly propojovat běžný život s matematikou, často se řešitelé potýkají během řešení s řadou problémů. Bližší identifikací těchto obtíží se zabývala Vondrová a kolektiv (2015), kteří na základě získaných poznatků pramenících z realizovaného výzkumu označili tuto oblast za kritické místo matematiky. Problematikou řešení slovních úloh se zabýval také Verschaffel (2020), který se zaměřil na propojení různých strategií řešení slovních úloh v souvislosti s věkem žáků. Různými metodami řešení slovních úloh se zabývala také Budínová (2018), která vedla výzkum s výběrovou skupinou nadaných žáků. Na výše uvedené výzkumy navazuje praktická část této diplomové práce, kdy na základě analýzy učebnic a dostupných výsledků z realizovaných výzkumů byly vytvořeny pracovní listy, které byly zaměřeny na pohyb dvou subjektů proti sobě a jejich různé metody řešení. Tyto listy byly zadány žákům třetího ročníku šestiletého gymnázia, které bylo zvoleno záměrně, aby byla zajištěna stejná úroveň dosavadního matematického vzdělávání. Cílem tohoto kvalitativního výzkumu je ověření, zda žáci dokážou aplikovat představené strategie řešení na další úlohy a zároveň jaké jsou příčiny jejich chyb, které se ve vypracovaných listech objevily. K naplnění zvoleného cíle byla vytvořena podrobná analýza sesbíraných dat, která tvoří šestou kapitolu předložené práce. Pátá kapitola představuje zvolenou metodologii výzkumu a současně prezentuje alternativní přístupy k řešení jednotlivých úloh. Předchozí kapitoly vytváří teoretické zázemí pro celou práci. První kapitola je věnována tématu matematické slovní úlohy, a to konkrétně pojmu slovní úlohy, který je nejdůležitějším pojmem pro celou práci, jeho ukotvením v rámci RVP ZV a druhy slovních úloh, které je možné rozlišit. V této práci jsou charakterizovány různé metody řešení matematických slovních úloh, fáze řešení, a také typické chyby. Tyto oblasti jsou blíže popsány ve třetí kapitole této práce. Čtvrtá kapitola úvodní teoretické části obsahuje dosavadní poznatky získané z realizovaných výzkumů.

2 SLOVNÍ ÚLOHY

2.1 POJEM SLOVNÍ ÚLOHA

Hlavním tématem celé práce je matematická slovní úloha. Abychom mohli správně definovat tento pojem, je důležité se nejprve zabývat vymezením matematické úlohy a úlohy obecně.

Pojmem **úlohy** se zabýval Fridman (1980, s. 596), který definoval problémovou situaci takto: *„Úloha vzniká tehdy, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit.“* Dále Fridman (1980) svou definici upřesňuje tím, že je důležité, aby celá situace byla vyvolána uměle, jinak se nejedná o úlohu.

Řada autorů se pokusila blíže vysvětlit podstatu **učební úlohy**. Podle Heluse (1979, s. 220) je učební úlohou: *„každá pedagogická situace, která se tvoří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle, a je zaměřena na všechny tři aspekty učení.“* Těmito aspekty se rozumí obsahový, operační a motivační aspekt. Obsah by měl vycházet ze společensko-historické zkušenosti, aspekt operační je tvořen různými učebními, poznávacími činnostmi žáka a motivační aspekt se zabývá zájmy a potřebami řešitele. Další autor Švec (1971) ve svém výzkumu uvádí, že učební úlohy slouží zejména k procvičení učiva. Tím se rozumí každý podnět, u kterého je potřeba dosáhnout určitého učebního cíle. Pojetí Skalkové (1999) můžeme interpretovat tak, že aktivní interakce žáka a studované látky je učební úlohou. V díle Kalhouse a Obsta (2002, s. 329) je uvedeno, že *„učební úlohy jsou jedním z nejdůležitějších nástrojů řízení učení a aktivizace žáků. Zároveň jsou i nejúčinnějším prostředkem k ověřování plnění stanovených výukových cílů. Jsou to v podstatě všechna učební zadání a ve své každodenní práci jich užívá každý učitel.“* Autoři se zabývali i tím, jakou roli mají učební úlohy ve výuce, kdy došli k několika důležitým bodům: Učební úlohy by se měly vyskytovat v celém vyučovacím procesu a neměly by být zařazovány na konec probíraného tematického celku, ale měly by být zastoupeny i ve výkladu, tzn. vzdělávací a formativní funkce. Dále mají instrumentální charakter, což znamená, že nemají autonomní roli ve vyučování, nýbrž jsou pouze složkou výuky. Učební úlohy by neměly být jednotvárné, ale jejich náročnost by měla vzrůstat a ve výuce by se neměly vyskytovat ojediněle.

Učební úlohy, které jsou formulovány v matematice slovy, se nazývají **matematické slovní úlohy**. Tyto úlohy provází žáky celým jejich studiem na základní škole, kde jsou součástí jednotlivých témat. Autorem, který definoval matematickou slovní úlohu, byl Divíšek (1989), který uvedl k tomuto tématu, že jsou to úlohy z praxe. To znamená, že vycházejí z reality a vyústí v problém, který je předmětem řešení. V kontextu učiva slovních úloh je úkolem řešit předložené úlohy matematicky. Každá slovní úloha v matematice má svůj význam v oblasti didaktiky, což konkrétně znamená, že pomocí řešení slovních úloh dochází k rozvoji abstraktního myšlení, pozornosti a fantazie, dále mají funkci motivační, kdy žáci vědomě používají početní operace do kontextu reálných situací.

Kuřina (1990, s. 61) definuje slovní úlohu takto: *„Slovní úloha je úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky."* Další definici najdeme v publikaci Blažkové (1993, s. 35), kde slovními úlohami rozumíme: *„úlohy, v nichž je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací a v nichž je třeba na základě vhodných úvah zjistit, jaké operace je třeba provést s danými údaji, abychom došli k údajům, které máme určit."* Autor učebnic Odvárko (Novotná, 2000, s. 10) definoval slovní úlohy ve školské matematice takto: *„takové úlohy, v jejichž zadání se objevují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších matematických oblastí."* V současnosti se pojmem matematická slovní úloha zabývá také Vondrová (2019, s. 15), která považuje za slovní úlohu *„takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů, které lze splnit za pomoci těchto numerických údajů, vztahů mezi nimi a znalostí a zkušeností žáka."*

Souhrnně by se dalo uvést, že se většina autorů shoduje na tom, že je důležité v rámci slovní úlohy vyřešit předložený problém a pro matematickou slovní úlohu je typické slovní zadání, které by mělo popisovat reálnou situaci. Za korektní řešení celé úlohy je považováno správné zodpovězení položených otázek.

2.2 RÁMCOVĚ VZDĚLÁVACÍ PROGRAM A MATEMATICKÁ SLOVNÍ ÚLOHA

Rámcově vzdělávací program (RVP ZV) je rozdělen do několika vzdělávacích oblastí. Jednou z nich je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace, kde je stanovený vzdělávací obsah tak, aby bylo realizováno cílové zaměření, které má za úkol naplňovat klíčové kompetence. Pro druhý stupeň základní školy jsou zařazeny čtyři tematické okruhy, a to číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty, geometrie v rovině a v prostoru a nestandardní aplikační úlohy. Problematika slovních úloh by měla být obsažena ve všech tematických okruzích, avšak označení slovní úloha nalezneme v části nestandartních aplikačních úloh a problémů. Pro řešení těchto úloh je důležité logické myšlení, což může někdy do jisté míry způsobit nezávislost od znalostí z matematiky. *„Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.“* [1]

Konkrétně jsou formulovány tyto výstupy:

- M-9-1-08 žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.
- M-9-1-09 žák analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.
- M-9-4-01 žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

Řešení těchto úloh přináší i možnosti využívat ve výuce různé pomůcky výpočetní techniky nebo jiné. Další oblast, která se rozvíjí pomocí řešení slovních úloh v matematice, je kritické myšlení, které pomáhá ke shromažďování a vyhodnocování podstatných informací.

[1] Metodický portál RVP.CZ (2015, 9. října). Vzdělávací oblast – Matematika a její aplikace – úvod. https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=10289.

2.3 DRUHY SLOVNÍCH ÚLOH

Pro tematické zaměření této práce je třeba přiblížit pojetí slovních úloh u jednotlivých autorů, kteří klasifikují různé druhy slovních úloh.

Blažková a kolektiv (2007) rozděluje slovní úlohy do dvou podkategorií, a to **jednoduché** a **složené**. Jednoduchou slovní úlohou rozumíme takovou úlohu, ve které stačí použít jen jeden početní úkon. Dále se jednoduché slovní úlohy dělí do skupin podle použitých početních operací. Složená slovní úloha potřebuje ke správnému řešení použití minimálně dvou početních úkonů: *„Jsou to zejména slovní úlohy, ve kterých se využívá početních operací s více čísly, porovnávání rozdílem i podílem, dělení se zbytkem, přímé úměrnosti, počítání se zlomky, neurčitých rovnic aj.“* (Blažková a kol., 2007, s. 18)

Podle Novotné (2000) se dají slovní úlohy rozčlenit do dvou kategorií: **matematické slovní úlohy** nebo **slovní úlohy s nematematickým obsahem**. Matematické slovní úlohy jsou takové úlohy, ve kterých se vyskytují čísla, mocniny aj. Dále se dají dělit na aritmetické, algebraické slovní úlohy nebo slovní úlohy s geometrickým obsahem. Podobné členění úloh má i Květoň (1982), který zmiňuje, že tyto úlohy je možné řešit matematickými prostředky. K úlohám s nematematickým obsahem patří veškeré slovní úlohy, které obsahují alespoň jeden pojem, který nenáleží do matematické teorie. Odvárko (1990) uvádí, že i přesto, že jde o úlohy, které svým postavením nespadají do oblasti matematiky, jsou řešitelné pomocí matematických prostředků. Inspirací pro tyto úlohy se stala praxe v technických oborech či jiných oblastech a zejména každodenní situace ze života. Proto je velmi důležité celou slovní úlohu převést do jazyka matematiky, tedy ji tzv. matematizovat. Důležité je porozumět zadání slovní úlohy a až poté přetransformovat do jazyka matematiky. V metodické příručce RVP (2011) je definována matematizace jako *„základní proces, který žáci uplatňují při řešení problémů reálného života.“* Do oblasti slovních úloh s nematematickým obsahem patří dle Vyšína (1962) většina úloh v aritmetice a algebře. Stejné dělení, jako uvedla Novotná (2000), používají i autoři Odvárko a kol. (1990), kteří doplňují první kategorii matematických slovních úloh tím, že nejsou formulovány v matematickém jazyce a žák musí celou úlohu převést do symbolického zápisu. Tyto úlohy se dají rozčlenit do podkategorií, a to na aritmetické, algebraické a úlohy s geometrickým obsahem. V druhé kategorii úloh s nematematickým obsahem jsou nejčastěji úlohy, které v zadání obsahují alespoň jeden termín, který nespadá do žádné matematické teorie. S tímto členěním matematických slovních úloh se ztotožňuje i Polák (2014), který přejmenoval druhou kategorii na aplikační úlohy, které jsou z běžného života.

Další kategorizace dle Novotné (2000) je na základě propojení řešení slovní úlohy a dříve získaných zkušeností v celém kontextu slovní úlohy. Jedná se tedy o následující dělení:

- Úlohy o pohybu – slovní úlohy, která se zabývají rychlostí, dráhou nebo časem pohybu jednotlivých subjektů, blíže budou popsány v následujících kapitolách této práce.
- Úlohy o společné práci – slovní úlohy, ve kterých pracují dva či více osob nebo subjektů dohromady, ale mají různou výkonnost. Typicky bývá tématem těchto úloh společná práce osob nebo přístrojů. V zadání se často vyskytují slova jako společně, současně, zároveň a jiná.
- Úlohy o směsích – slovní úlohy, ve kterých se zjišťuje složení dané směsi. Nejčastěji jde o smíchání roztoků různé koncentrace, nebo přípravě slitin z kovů či jiných surovin (květin, potravin atd.).
- Úlohy o obsahu – slovní úlohy, ve kterých tvoří podstatnou část úvaha o obsahu rovinného obrazce, a dále i konkrétní výpočet.
- Úlohy o dělení celku na části – pro tyto slovní úlohy existují čtyři možnosti, jak mohou být zadány: První možnost je taková, že v zadání je uveden celek a zjišťuje se část, druhá možnost je přesně naopak, tudíž je známa část a zjišťuje se velikost celku, dále by to mohly být úlohy, ve kterých je známá velikost celku a některé části, úkolem je zjistit velikost zbývajících částí a v neposlední řadě by to byly úlohy se známými velikostmi celku a části, avšak není uveden počet částí celku, tudíž je úkolem zjistit tento počet.

3 ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH

Slovní úlohy v matematice mají velkou funkci, konkrétně jde o motivační funkci, což znamená, že přibližují zavedení nových pojmů, dále se rozvíjí myšlení žáků, ilustrují probírané učivo v praxi, rozvíjí kompetence komunikativní, k řešení problémů a současně k učení. Proto, aby žák dospěl k úspěšnému řešení zadané úlohy, je nutné, aby jeho řešení prošlo jistými fázemi, které na sebe logicky navazují.

3.1 FÁZE ŘEŠENÍ

K tématu slovních úloh a jejich řešení se pokusila řada autorů rozčlenit celkový postup při řešení do určitých kroků. Hruša (1967) se pokusil rozdělit postup do určitých fází. Pro první fázi podle něj patří určení rozboru podle situace, která je uvedená v zadání a zvolení konkrétního početního výkonu. Následuje vyjádření hledaného čísla pomocí dříve určené početní operace a zadaných údajů. Ve třetí fázi dochází k realizaci celkového výpočtu, na to dále navazuje kontrola výpočtu a na závěr odpověď na otázku v zadání úlohy. Reusser (1985) rozděluje řešení do pěti fází: **Tvorba sémantického modelu**, kdy pro tuto fázi řešení je typické porozumění zadání slovní úlohy. Nejčastěji to bývá překlad složitějších slov, zjednodušení textu a převyprávění zadání. Následuje **tvorba situačního modelu**, kde je stěžejní identifikace problému, co se má podle zadání zjistit a kam má řešení směřovat. Poté dochází k **vytvoření matematického modelu,** podle situačního modelu si řešitelé převádí úlohu do jazyka matematiky, který nemusí být jen numerický, ale může být nenumerický nebo algebraický. V následující fázi dochází k samotnému řešení celého matematického modelu z předchozí fáze, jedná se o **provedení výpočtu.** V poslední fázi dochází k **ověření pomocí zkoušky a sepsání odpovědi**, tedy k interpretaci výsledku pomocí odpovědi.

Podle Odvárka (1990) se rozděluje postup řešení do tří kroků, kdy prvním úkolem řešitelů je **matematizace** celé úlohy, kterou sám autor definuje takto: *„Přechod od slovní úlohy s nematematickým obsahem k matematické úloze, která má pomoci k vyřešení původní úlohy, se nazývá matematizace slovní úlohy.“* (Odvárko, 1990, s. 217) Jak autor sám zmiňuje je pro tuto fázi stěžejní převést slovní obsah, který typicky nebývá z oblasti matematiky, do jazyka matematiky, čím se získá matematická slovní úloha. Na tuto fázi navazuje provedení výpočtu, což se označuje jako **řešení matematické úlohy.** K tomuto kroku také patří provedení zkoušky k ověření správnosti řešení. Úkolem poslední fáze je **interpretace výsledku** matematické slovní úlohy tak, že bude opět zasazen do původního nematematického zadání. *„Před konečným stanovením výsledku slovní úlohy je nutné posoudit, zda výsledek matematické úlohy po své interpretaci ve výchozí situaci splňuje všechny podmínky v ní obvyklé (tj. i ty samozřejmé, jež nebyly v textu úlohy uvedeny).“* (Odvárko, 1990, s. 229)

Členění postupu řešení uvádí autorka Novotná (2000) do etap. Sama však sděluje, že její rozdělení je pouze ideální a řešitelé nemusí projít všemi etapami nebo je mohou různě přeskakovat. Jako první přichází **etapa uchopování**, kdy řešitel identifikuje celou situaci, vztahy mezi pojmy a zároveň eliminuje ty, které jsou navíc. Podstatné je porozumění textu úlohy, proto je důležité propojení čtenářské a matematické gramotnosti. V oblasti matematické dovednosti by měl řešitel porozumět tomu, co je třeba vypočítat a co již bylo zadáno. Následuje ***„etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému“*** (Novotná, 2000, s. 21), celkově by se tento úsek dal nazvat etapou matematizace, což je důležitým krokem k řešení úlohy. Do této části patří i samotné řešení úlohy. Poslední etapou, kterou autorka nazývá ***„etapa návratu do kontextu zadání úlohy“*** (Novotná, 2000, s. 21), řešitel ověřuje své řešení pomocí zkoušky. Zmiňuje, že by řešitel měl provést dvě zkoušky, první takovou, kdy ověří správnost z matematického hlediska, provede tedy tzv. *„matematickou zkoušku“*, a poté následuje tzv. *„kontextová zkouška“*, kdy kontroluje splnění podmínek z kontextu slovní úlohy.

Podrobnější rozdělení do sedmi kroků přinášejí autorky Blažková, Matoušková a Vaňurová (2002). Dalo by se konstatovat, že jejich rozčlenění představuje jakýsi návod pro řešitele. Konkrétně jde tedy o **porozumění textu**, kdy řešitelé musí být dostatečně čtenářsky gramotní, aby dokázali přečíst zadání úlohy a porozuměli celému textu. Následuje **rozbor**: *„Myšlenkový postup, zde mohou charakterizovat následující otázky: Je možné splnit požadavky úlohy? Stačí či nestačí zadané údaje k určení údajů neznámých? Vyskytují se v zadání úlohy nadbytečné? Odporují si některé údaje? V jakém vztahu jsou zadané údaje k údajům hledaným*?“ (Blažková, Matoušková, Vaňurová, 2002, s. 7) Řešitelé by v této fázi měli odpovědět na předchozí otázky dle autorek, jde zejména o rozlišení známých či neznámých údajů a jaké mají mezi sebou vztahy. V následující fázi přichází převod zadání úlohy do formy matematického jazyka, jedná se o **matematizaci reálné situace**. Dalším krokem je **provedení odhadu výsledku**, kdy se řešitelé mohou pokusit odhadnout, jaké bude řešení celé úlohy. Následně dochází k **řešení matematické úlohy**, kdy se aplikují konkrétní matematické operace. Výsledek získaný z řešení úlohy se musí ověřit pomocí **zkoušky správnosti**. Autorky se shodují i s názorem Novotné (2000), že je potřeba provést dvě zkoušky. Na závěr by mělo dojít ke slovní interpretaci výsledku získaného řešení, tzv. **odpovědi na otázku slovní úlohy**, která bude zasazena do kontextu slovního zadání úlohy. Formulaci postupu při řešení slovních úloh vytvořil Polya (2016) a to tak, že nejprve musí žák **porozumět** úloze. To znamená uvědomit si, co jsou známé údaje, co je neznámá. Pro tuto fázi je typické kreslení obrázku a označení všech údajů. Následuje **navržení plánu řešení**, což znamená, že řešitel hledá souvislost mezi údaji a sestavuje plán řešení. Třetí bod postupu je **realizace plánu** a na závěr by měla přijít kontrola a odpověď na položenou otázku, zda je odpověď reálná, tato fáze je označená jako **pohled zpět**. Podle Budínové (2018) je potřeba dbát na to, aby při řešení slovních úloh byly zaznamenávány jednotky. Uvádí, že existují dva možné postupy. První možnost je, že nejprve bude úloha matematizována, to znamená, že v průběhu řešení se počítá pouze s čísly a jednotky budou uvedeny až ve slovní odpovědi, nebo druhá možnost, která spočívá v důsledném zapisování jednotek v průběhu celého řešení.

3.2 ZPŮSOBY ŘEŠENÍ

Do oblasti slovních úloh spadá velké množství strategií řešení, které se dají blíže klasifikovat. Každá kategorie má svoje typické znaky, a také se každá řeší odlišně.

Vyšín (1962) rozděluje způsoby řešení do dvou kategorií. Jednou z nich je to, že řešitel využívá **úsudku** a druhé, že řeší úlohu použitím **rovnic**. Toto dělení se však týkalo jenom malého okruhu úloh, které byly řešitelné pouze algebraicky. Proto se Vyšín (1962) pokusil toto členění zobecnit a vznikly tedy dvě kategorie, kdy žák použije nějaký **kalkul** (výpočet) nebo pracuje **bez kalkulu** z důvodu toho, že není k dispozici. Vhodnější k použití je řešení kalkulem, které bývá úspornější a přesnější. Nicméně i řešení bez kalkulu přináší možnost vniknout do podstaty úlohy, ale není vhodné při řešení složitějších úloh. Vyšín se dále zabývá dvěma metodami – analytickou a syntetickou. Pro **analytickou metodu** je typické, že se vychází z otázky a úkolem je nalézt takové údaje, které jsou potřebné k tomu, aby se dalo na položenou otázku odpovědět. Kdežto **syntetická metoda** funguje naprosto obráceně, kdy se vychází ze zadaných údajů, a poté se dojde k odpovědi na otázku.

Divíšek (1989) uvádí další dvě metody řešení, a to **matematicky** nebo **v realitě**. Stěžejním pro řešitele je umění přeformulovat problém z reality do jazyka matematiky, ať už jde původně o aritmetickou nebo algebraickou úlohu. Popisuje fáze, kterými řešitel během řešení prochází. V první fázi shromažďuje údaje, vztahy, podmínky a formuluje dílčí úlohy. Následuje druhá fáze, která se nazývá syntetická a Divíšek zmiňuje, že úkolem pro řešitele je vyřešit dílčí i hlavní úlohu, ověřit správnost získaných výsledků a zapsat slovní odpověď. Dále, stejně jako Vyšín, rozděluje metodiku postupu na **analytickou** a **syntetickou**. Analytický postup definuje následovně: *„vyjdeme z otázky a sestavíme jednoduchou slovní úlohu, pomocí níž lze na otázku odpovědět. Přitom však aspoň jeden potřebný údaj k řešení této úlohy není znám. K určení tohoto údaje sestavíme další jednoduchou slovní úlohu, a tak pokračujeme, dokud všechny údaje ještě neznáme.“* (Divíšek, 1989, s. 143) Naopak pro syntetický postup je charakteristické: *„Při syntetickém postupu vycházíme naopak z daných údajů a ze dvou z nich vhodně zvolených vypočteme v jednoduché slovní úloze další potřebný údaj. Z tohoto nového údaje a dalšího údaje z textu úlohy sestavíme pak další úlohu, a tak pokračujeme, dokud nezískáme údaj potřebný k odpovědi na otázku celé úlohy.“* (Divíšek, 1989, s. 143)

Řešením slovních úloh se zabýval také Květoň, který v knize Kapitoly z didaktiky matematiky (1982) rozděluje řešení žáků podle typu myšlení, které při řešení úlohy dominuje. Konkrétně jde tedy o úlohy **algoritmické**, tzn. k řešení se používají vžité ustálené postupy a pravidla, dále jsou to úlohy **heuristické**, u kterých nelze použít zažitý postup, ale řešitel musí na postup přijít sám.

Kuřina (1990) dělí slovní úlohy do dvou kategorií. První pojmenovává **experimentování v** realitě, avšak sám zmiňuje, že tento postup není vhodný do všech úloh a zároveň řešitelům zabere mnoho času. Druhou kategorii řešení úloh označuje jako **modelování slovní úlohy**, kdy je pro řešení nutné vytvořit model. Tato kategorie bývá častější, protože umožňuje: *„myšlenkově proniknout k podstatě souvislostí. Sestavení modelu úlohy vlastně znamená překlad jejího textu do jazyka, který umožňuje snáze úlohu řešit."* (Kuřina, 1990, s. 62) Jak sám zmiňuje, je důležité sestavení modelu, který je možné rozčlenit do následujících skupin:

- Činnostní model – řešitel používá k řešení aritmetických operací různé pomůcky ke znázornění jako například kamínky, počítadla, kuličky či jiné
- Ikonický model – pro tento model je typické použití tabulek nebo schémat, která nahrazují slovní zadání
- Symbolický model – popisuje matematicky reálnou situaci, konkrétně to bývají rovnice nebo soustavy rovnic

Novotná (2000) uvádí, že je nutné zohlednit při analýze žákovských strategií různé pohledy na celou situaci při řešení. Proto tyto strategie rozčleňuje do více kategorií. Do první kategorie patří správné řešení úlohy, kdy řešitel zcela náhodně odhalil správný výsledek, anebo získal potřebný vhled do podstaty celé úlohy. Pokud žák řešil úlohu pomocí aritmetické nebo algebraické operace, tak by patřil do druhé kategorie. Další kategorii tvoří žáci, kteří v zadání rozpoznali slova, která jsou považována za signál pro použití vzorce nebo postupu. Do poslední kategorie dle Novotné patří řešitelé, kteří správně porozuměli úloze a během postupu si celou matematickou slovní úlohu převedli na jednu nebo více jednodušších úloh, které umí vyřešit.

Veškeré strategie řešení mají svůj historický původ. Hejný (1990) uvádí například metodu pokus – omyl, která byla využívána Babyloňany, kteří uměli využít svoji intuici a zápis prováděli na hliněné destičky. Naopak Řekové se zabývali pochopením kauzality a Arabové začali používat při řešení úloh aritmetické, algebraické či geometrické poznatky.

3.2.1 Pokus – omyl

Metodou, kterou žáci využívají při svém řešení, je metoda tzv. pokus – omyl, která by se dala dle Budínové (2018) nazvat strategií **neřízeného experimentu**. Tato strategie se dá považovat za velmi jednoduchou a patří mezi historicky nejstarší. Pokud žáci nedokážou přijít na správný postup řešení, mohou náhodně odhadnout výsledek. Podle Novotné (2000) mohou vzniknout následující tři možnosti, pokud žák uhodne správný výsledek:

- S výsledkem již dále nepracuje. Považuje ho za jediný správný, tudíž neověřuje správnost výsledku pomocí zkoušky, nehledá další možná řešení a neuvádí ani slovní odpověď.
- Po uhodnutí si ověří správnost zkouškou. Pokud zkouška potvrdí, že má výsledek správně, tak buď nepokračuje ve své činnosti hledání výsledku a považuje ho za jediný správný, nebo se naopak pustí do hledání dalších možných řešení, ať už pomocí pokusu – omylu nebo jinak.
- Následuje zkouška, která otestuje, jestli je výsledek správný. Dochází ke zjištění, že výsledek je nevyhovující kvůli tomu, že nesplňuje podmínky zadání. Poté jsou dvě možnosti. Buď žák nehledá nové řešení a celkově svoji snahu vzdá, nebo se rozhodne pro další hledání správného výsledku za použití jakékoli strategie.

Avšak Novotná (2000) uvádí, že tato strategie není příliš vhodná do vyučování matematiky, jelikož žák neuvažuje nad zadanými údaji. Řešitel pouze získá pocit, že úlohy stačí řešit náhodně, a tudíž se nerozvíjí jeho strategické myšlení.

3.2.2 Řízený experiment

Opakem neřízeného experimentu můžeme označit experiment řízený, kdy žáci postupují systematicky. Jak uvádí Budínová (2018), žáci nejdříve provedou odhad výsledku, poté ho ověří, a následně upřesní svůj původní předpoklad, než se přiblíží ke správnému výsledku. Novotná (2000) tento řízený experiment nazývá systematickým pokusem, kdy předchozí výsledek ovlivňuje volbu dalšího pokusu. Proto je velmi důležité, aby byly výsledky zaznamenávány a řešitelé mohli hledat vztahy mezi jednotlivými případy.

3.2.3 Grafické znázornění

Mezi další typy řešení slovních úloh bychom mohli započítat řešení, které obsahuje navíc grafické znázornění daného problému. Dle Malinové (1983) přináší grafické vyobrazení úlohy žákům oporu pro řešení celé situace. Divíšek (1989) uvádí, že toto znázornění pomáhá k vytvoření představy o reálné situaci, která je schématická. Typicky to nebývá celé řešení úlohy, ale spíše opěrný bod, který blíže napomáhá pochopení úlohy. Nejčastěji bývá používána forma obrázků, tabulek, grafů atp.

3.2.4 Strategie signálem

Novotná (2000) uvádí, že je stěžejní nejdříve identifikovat, co je v dané úloze signálním slovem. Obecně by se dalo říct, že se jedná o slova nebo slovní spojení, která naznačují svým významem, jak má žák při řešení postupovat. Často se však objevují i úlohy, které jsou zadány s antisignálním slovem, což jsou slova, která navádí řešitele na operaci opačnou, než je ta, která navádí ke správnému řešení.

3.2.5 Aritmetická strategie

Za aritmetickou strategii se považují řešení, při kterých řešitel nepoužívá rovnice k získání výsledků. Podle Novotné (2000) se vyskytuje rozdělení této strategie do čtyř podskupin, a to podle toho, jak řešitel nalézá výsledek – grafické řešení, činnostní řešení, experimentální řešení a úvahové řešení. Budínová (2018) uvádí: *„úlohy, kde se má doplnit neúplný algoritmus některého početního výkonu, nebo určit algoritmus, v němž jsou jednotlivé číslice nahrazeny písmeny; jde tedy o úlohy, které slovně popisují určité vztahy mezi čísly.* Pro tuto strategii je typické, že žák musí nalézt vztah mezi údaji a správně zvolit matematickou operaci, která ho dovede k hledanému výsledku. Existuje i možnost, že aritmetické řešení obsahuje navíc i grafické znázornění, které žákům přináší lepší pochopení vztahů mezi zadanými veličinami. Aritmetická strategie řešení se zejména používá na první stupni, a také v 6. a 7. třídě druhého stupně, tudíž by měli všichni žáci umět řešit úlohy aritmeticky, avšak pokud se tomu tak nestane, tak může algebraické řešení činit žákům problém. (Budínová, 2018) K důležitému přechodu mezi aritmetikou a algebrou se vyjadřuje Žalská (2015, s. 321) takto: *„Schopnost vytvořit algebraickou reprezentaci úlohy se zakládá na zkušenosti s izolovanými modely vytváření této reprezentace a na postupném vytváření generických modelů vztahů. Začátky algebraického modelování se u žáků silně opírají o zkušenosti s modelováním v aritmetice a jejich dalším zobecňováním.“*

3.2.6 Algebraická strategie

Podle Novotné (2000) bývá algebraická strategie neboli řešení pomocí rovnic či soustavy rovnic jednou z nejčastěji používaných metod řešení slovních úloh v případě, že již žáci umí počítat s rovnicemi a jejich soustavami. Řešení pomocí algebraického aparátu bývá žáky často používáno z důvodu toho, že má jasně stanovená pravidla výpočtu. Typicky se algebraický postup řešení vyučuje v osmém ročníku základní školy.

Výše zmíněné strategie řešení nejsou však jediné správné. Existuje mnoho dalších metod, které definují Břehovský, Eisenmann, Novotná a Přibyl (2015):

- Využití analogie – žák při svém řešení vychází z úlohy, u které zná řešení a používá ho analogicky v novém příkladu
- Přeformulování problému – zjednodušení zadání úlohy tak, aby ho žák dokázal vyřešit například se zmenšenými čísly, a poté se vrací k původnímu zadání
- Postup od konce – velmi často postupuje řešitel od koncového stavu k počátku úlohy, kdy se snaží najít, jakým postupem se dostane do počátečního bodu
- Vypuštění podmínky – řešitel není schopný vyřešit celou slovní úlohu, proto vynechá nějakou část podmínky a pokusí se řešit „zjednodušenou úlohu“. Pokud se mu to povede, tak se vrací k vypuštěné podmínce a pokouší se dořešit celou úlohu.
- Zobecnění a konkretizace – někdy je řešitel schopen pomocí konkretizace vyřešit úlohu, a poté to dokáže aplikovat na původní zadání, nebo naopak zobecněním se dostane k úloze, ve které je schopen dojít k výsledku, a poté řeší původní předložené zadání.

3.3 CHYBY A JEJICH KLASIFIKACE

„Řešení slovních úloh v matematice je pro žáky obtížné. Často už samotná zkušenost, že žák má řešit slovní úlohu, je základní příčinou jeho neúspěchu při řešení.“ (Novotná, 2000, s. 13) Při řešení slovních úloh často dochází k tomu, že výsledná řešení nejsou správná, tudíž dochází k chybám. S chybami v libovolných oblastech se člověk setkává celý život, avšak hodnocení ve škole je založené na hodnocení chyb, podle kterých jsou žáci klasifikováni. Co však je považováno za chybu blíže specifikuje Kulič (1971, s. 14) a to takto: *„V pedagogice a pedagogické psychologii výkony (jednotlivé reakce, odpovědi, řešení úloh, výtvory), které se odchylují od vzorového průběhu či zadaného cíle, nedostačují požadavkům, jsou nesprávné. Za přesně definovaných podmínek chyba nemusí ohrozit žákovo učení (detekce chyby, identifikace, interpretace, korekce).“* Chyba tedy informuje učitele o vědomostech, avšak nepřináší celkový pohled na učení žáka. Kulič (1971) rozdělil práci s chybou do čtyř kroků, které je potřeba dodržet. Prvním krokem je detekce chyby, což znamená, že je nejdříve potřeba odhalit výskyt chyby, následuje identifikace, což znamená, že se specifikuje, o jakou chybu jde. Dále dochází k interpretaci, což je zjištění toho, proč se žák chyby dopustil a jaká je podstata chybovosti a poslední část je korekce chyby, kdy dochází k nápravě chybného postupu. Kulič (1971) zastává názor, že chybovost v počáteční fázi řešení by měla být co nejmenší. Novotná (2004, s. 23) označuje jako chybu: *„soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem.“* Další autor Polák (2004) rozděluje práci s chybou do několika etap. Nejprve je důležité vyhledání chyby, konkrétně to znamená kontrolu své práce, následuje určení typu chyby, vysvětlení a oprava chyby. Polák (2004) rozlišuje několik druhů chyb, může to být chyba náhodná – omyl, nebo chyba na základě špatného pochopení zadání, což označuje jako chybu zákonitou, dále chyby, které významně ovlivní výsledek práce, nazývá závažné, naopak chyby, které nemají vliv na celkový výsledek práce, patří do kategorie nepodstatných. Selz (Kulič, 1971) uvedl pouze dvě kategorie: chyby vnější a vnitřní. Kategorie vnějších chyb je označována jako úplné, tedy takové, které vzniknou z nepozornosti, nicméně vnitřní chyby, které jsou také označovány jako dobré, jsou chyby, které lze zdůvodnit a interpretovat. Kulič představuje svojí typologii chyb, a to konkrétně chyby smysluplné a nesmysluplné (dělení na základě kognitivní hodnoty), pravidelné nebo nahodilé (organizovanost), individuální nebo hromadné (podle typu nositele), dále chyby běžné nebo neobvyklé, podstatné nebo hromadné (podle závažnosti) a v neposlední řadě deklarativní a procedurální.

Proč se v práci studentů vyskytují chyby, je velmi těžké zodpovědět, neboť existuje celá řada možných příčin. Existuje však mnoho důvodů, proč tomu tak může být. Vytyčením nejproblematičtějších míst se zabývala řada autorů již v minulosti. Divíšek (1989) spatřuje největší problém ve správném porozumění textu. Je velmi důležité, aby bylo zadání pro žáky srozumitelné a nenacházelo se v něm nějaké neznámé slovo. Hejný se také zabýval identifikací různých příčin chyb a rozčleňuje je do třech kategorií: neukončený poznávací proces, narušení konvence terminologie nebo záznamu a interpretační nesoulad. První typ chyby vzniká, pokud už žák má částečnou znalost dané problematiky, avšak nedokáže ji bezchybně aplikovat do nové situace. Druhá kategorie chyb vzniká na základě toho, že žák použije dosavadní znalosti a na novou situaci a tím vytvoří vlastní postup řešení, což nemusí být správné a poslední skupina chyb vzniká na základě jiného porozumění zadání úlohy mezi učitelem a žákem. V následujících kapitolách budou uvedeny nejproblematičtější místa v řešení žáků podle Vondrové (2022).

3.3.1 Zadání slovní úlohy

Jako první oblast, která může patřit mezi příčiny obtíží při řešeních slovních úloh, se dá považovat slovní zadání úlohy. Konkrétně jde o slova, kterými je slovní úloha napsána. Je důležité, aby žáci pochopili zadání úlohy, které jim musí být jasné, srozumitelné a musí rozumět všem pojmům, které se v zadání vyskytují. Tudíž by se v zadání neměla vyskytovat slova, která jsou zastaralá nebo odborná. Někdy však mívají problém s pochopením zadání úlohy žáci, kteří nesplňují důležitý předpoklad pro řešení slovních úloh, a tím je nedostatečná matematická a čtenářská gramotnost. Podle Pavlíčkové a Bidmanové (2019, s. 1) se matematická čtenářská gramotnost definuje jako *„schopnost rozeznat, pochopit, používat a zhodnotit psaný matematický text, který může být zadaný různou formou a můžeme ho využívat ve všech etapách každodenního života. Forma textu může být slovní nebo může být doplněna či zadána tabulkou, grafem, diagramem nebo dalšími vizualizacemi.“* Nicméně i žáci, kteří dokážou přečíst text, nemusí mít rozvinutou schopnost nalézt stěžejní pojmy pro vytvoření matematického modelu. Pokud se žák pouští rovnou do vytváření matematického modelu, tak hovoříme o povrchové strategii, neboť se nepokouší vytvářet situační model. Za žáka řešícího povrchovou strategií můžeme podle Vondrové (2022) považovat například: *„žáka, který úlohu řeší na základě podobnosti se známou úlohou nebo ze zadání slovní úlohy vybere čísla a snaží se na* *základě klíčových slov (signálů) usoudit povahu matematického modelu."* (Vondrová, 2022, s. 20)

3.3.2 Nadbytečné informace

Matematická slovní úloha obsahuje nejen pojmy, které jsou důležité k řešení celé úlohy, ale někdy také nadbytečné údaje. Těmito údaji může dojít k prodloužení celého textu úlohy, což dle Vondrové (2013, s. 51–64) ovlivňuje ochotu žáků tuto úlohu řešit, protože žáci: *„nejsou ochotni a často ani schopni delší text úlohy přečíst a porozumět mu, což ovlivňuje i výuku matematiky."* Avšak zmiňuje, že se nedá obecně říct, že čím delší je text, tím těžší je na porozumění, leckdy delší zadání přináší lehčí porozumění celému problému. Jak Vondrová (2022) zmiňuje, nejdůležitější je charakter přidaného textu. Slovní úloha musí bezpodmínečně obsahovat údaje potřebné k řešení a zároveň informace o situaci, aby si řešitel dokázal vytvořit reálnou představu. Obě tyto složky jsou potřebné k vytvoření situačního modelu. Ve slovních úlohách můžeme také často nalézt další informace o vztazích mezi údaji, které pomáhají ke tvorbě matematického modelu. Ostatní informace jsou považovány za nadbytečné. Jako další faktor by se dalo započítat to, jakého typu nadbytečný údaj je. Může to být nadbytečný údaj, který se týká obsahu, tudíž jde o jeho upřesnění, anebo může jít o numerický údaj. Podle různých výzkumů se prokázalo, že úlohy, které obsahovaly nadbytečný numerický údaj, jsou pro žáky obtížnější.

Celkově se dá tedy shrnout, že vliv nadbytečných informací na úspěšnost řešení závisí na tom, jakou pozornost věnuje žák zadanému textu, jestli dokáže rozlišit stěžejní pojmy a identifikuje, které údaje jsou nadbytečné a zároveň, jakého typu tyto údaje jsou. Podle různých studií nelze jednoznačně určit, jestli tento vliv nadbytečných údajů se s věkem snižuje nebo zvyšuje.

3.3.3 Verbální a neverbální složka

Existují slovní úlohy, které obsahují nejen slovní formu zadání, ale mohou obsahovat různé obrázky, grafy, náčrty a slovně zapsaná čísla. Obrázky jsou do úloh začleňovány s určitým záměrem. Rozlišují se tedy obrázky dekorativní, informační, reprezentační a organizační. Dekorativním obrázkem nejsou reprezentovány důležité informace a plní pouze ilustrační funkci. Vondrová (2022) uvádí, že pomocí reprezentačních obrázků bývá doplňována struktura celé nebo její části popsané ve slovní úloze. *„Obrázky informační obsahují důležitou informaci nutnou k řešení, která ale není obsažena v textu."* (Vondrová, 2022, s. 123) Obrázky, které navádí řešitele ke způsobu řešení, bývají označovány za organizační.

Podle výzkumu, který vedla Vondrová se svým kolektivem (2022), se dá konstatovat, že ilustrační obrázek nemá vliv na úspěšnost žáků při počítání zadané úlohy. Zároveň došli ke zjištění, že ilustrační obrázek může mít na neúspěšné řešení žáků vliv, a to takový, že mohou vyčíst z obrázku informace, které nemusí být pro danou úlohu relevantní. Jádro tohoto problému se dá nalézt v tom, že berou obrázek jako samostatný objekt. Vždy záleží na tom, jakého typu obrázek je, takže mohou nastat situace, kdy obrázek výrazně zjednoduší celé porozumění, a tudíž i řešení úlohy. Vondrová (2022, s. 155) uvádí: *„pokud si žáci udělali grafické schéma, zvýšily se jejich šance na správné řešení úlohy šestkrát. Toto schéma však muselo zachycovat situaci v úloze přesně."* Pro reprezentační typ obrázku se ukázalo dle jejího výzkumu, že je jednodušší vyčíst informace z textu, proto špatné porozumění obrázku může vést k nesprávnému výsledku a je potřeba dát pozor na to, jakého typu ilustrace je.

3.3.4 Pořadí informací v zadání

Další oblastí, která se dá považovat za problémovou, je pořadí informací v zadání. Obecně by se dalo říci, že řešitel postupuje od začátku textu ke konci, což by se dalo považovat za srovnatelné se čtením v češtině, kdy se postupuje odleva doprava. Tudíž i řazení informací systematicky od lehčích ke složitějším se dá považovat za přirozenější a snazší, tudíž i toto může napomáhat eliminaci chyb při řešení. Pokud však není řazení informací systematické, může to žákům působit větší problémy. Typicky však nastávají dvě situace, a to, že žák řeší úlohu tak, že nalezne stěžejní pojem a zařadí ho na správné místo, anebo si celou úlohu přeformuluje tak, aby pro něj byla srozumitelná. Avšak při realizaci těchto dvou situací se zvyšuje pravděpodobnost, že ve výsledku bude chyba. Může to být způsobeno špatným přeformulováním nebo chybným určením vztahů mezi jednotlivými prvky. Ukázalo se dle výzkumu Vondrové a kolektivu (2022), že má vliv na úspěšnost žáků to, jaký je reálný kontext úlohy. Pokud tedy jde o reálnou situaci popsanou v úloze, zvyšuje se šance na správné vyřešení úlohy.

3.3.5 Návodnosti

Jedním z parametrů ovlivňující správnost výsledku může být tzv. návodnost. Podle Vondrové (2022, s. 321) se dá za návodnost považovat to: *„zda je daná slovní úloha v souladu s tím, co od ní řešitel očekává.“* Nejvíce se tento nesoulad objevuje v řešení, kdy žák nevytváří tzv. situační model, ale pracuje s úlohou pouze povrchově, kdy se snaží nalézt podobnost s již dříve řešenou úlohou. U výběru slovních úloh je tedy nutné se zaměřit na to, aby byla správně zvolena obtížnost. Pokud je úloha příliš snadná, žáci typicky volí řešení pomocí paralely mezi již dříve spočítanými příklady, tudíž pracují povrchově a může dojít k chybnému řešení. Naopak u obtížných úloh může návodnost často pomoci v řešení celé úlohy.

3.3.6 Operátor a přítomnost stavu

Typickou chybou v řešení žáků bývá problém s nepřítomností čísla, které označuje stav. Vondrová (2022) uvádí, že pokud není číslo přesně interpretováno, často se stává, že se žáci ani nepokusí o řešení zadané úlohy. Jestliže se žáci pokusili úlohu řešit, tak často došlo k záměně operátoru za stav, čím se celá úloha změní a dojde k chybnému řešení. Málokdy se stává, že řešitelé zvolí za chybějící stav nějaké libovolné číslo, a tím vyřeší úlohu, což ale neznamená, že jejich řešení je správné.

3.3.7 Antisignál

Specifická skupina slovních úloh jsou úlohy, které ve svém zadání obsahují antisignální slovo. Signální slova používáme v běžné komunikaci bez větší pozornosti, používáme je automaticky ke zjednodušení a zrychlení komunikace. Tato slova jsou však používána i v matematice. Avšak za problematičtější oblast bývají označovány slovní úlohy s antisignálem, který Vondrová (2022, s. 322) definuje jako: *„situace, kdy jazykové ztvárnění úlohy navádí k opačné matematické operaci, než signalizuje význam slova, které de facto určuje matematickou operaci.“* Podobné vysvětlení uvádí i Rendl (2015, s. 57) a to takové: *„slovo, které implikuje inverzní operaci k té, která se má provést.“* V praxi se žáci setkávají s oběma typy úloh, avšak je pro ně snazší řešit úlohy, ve kterých si vyhledají signální slovo a podle toho počítají. Nicméně signální slova navádí žáky pouze k formální znalosti, a ne k hlubšímu pochopení, proto je vhodné do výuky zařazovat úlohy s antisignálem, které nutí žáky k hlubšímu zamyšlení a práci s matematickými operacemi. Význam antisignálu obohacuje žáky o citlivost na antisignál, zároveň schopnost zpracovat úlohu tohoto typu a případně opravit její nesprávné pochopení.

4 VÝZKUM O SLOVNÍCH ÚLOHÁCH

Vondrová a kolektiv (2015) se zaměřili na oblasti matematiky základní školy, která jsou pro žáky nejproblematičtější a často brání k pochopení následujících matematických celků nebo se stanou nedostatkem pro další studium. Za kritické místo určuje také slovní úlohy, ve kterých dochází k propojení matematické a čtenářské složky. Zároveň se dají slovní úlohy považovat za propojení školní matematiky s reálnými oblastmi, avšak žáci při jejich řešení často selhávají, a to v jakékoli fázi řešení. Autorka zmiňuje, že: *„může být problémem pochopení textu, ať se slovem nebo frází nebo pro ně může být obtížná představa, tedy situační model, který si nedovedou vytvořit. Nebo mohou selhat během tvorby matematického modelu či jeho řešení.“* (Vondrová, 2022, s. 18) V knize Matematická slovní úloha (2022) se Vondrová zabývá pouze tématem slovních úloh, kde zkoumá, proč se žáci uchýlí povrchovým strategiím řešení, u kterých nedochází k vytvoření situačního modelu, ale pouze vytváří model matematický. Zmiňuje také, že v takových situacích hledají žáci čísla a tzv. signální slova, která vedou ke konkrétní operaci. Pokud je však v úloze použito antisignální slovo, tzn. slovo, které navádí k opačné operaci, tak řešitelé často chybují. Dalším faktorem, který zmiňuje to, že si žáci snaží vytvořit nějaký zápis hned po přečtení první věty, aniž by si přečetli celé zadání, a usilují o to, aby z každé věty napsali to nejdůležitější, např. čísla, což může ztížit pochopení celého zadání úlohy. Ze všeho nejdříve je potřeba, aby pochopili, o čem daná úloha je. K tomu může pomoci to, že žáci danou úlohu převypráví svými slovy, mohou pokládat další otázky či si zapsat úlohu jinak než pomocí slov a čísel jako třeba dramatizovat celou situaci z reálného života nebo zakreslit pomocí obrázku. Dále uvádí, že je potřeba pracovat se žáky tak, aby po přečtení zadání přešli automaticky na tvorbu matematického modelu.

Belgický výzkumník v oblasti matematického vzdělávání Verschaffel (2020) se také zabývá problematikou slovních úloh, které definuje jako *„slovní popisy problémových situací, které jsou prezentovány ve školním prostředí a v nichž je položena jedna nebo více otázek, na něž lze získat odpověď aplikací matematických operací.“* (Verschaffel, 2020, s. 2) Ve svém článku popisuje to, že slovní úlohy se dají řešit různými metodami řešení. Často typ řešení souvisí s věkem řešitelů, kdy nejprve děti na prvním stupni základní školy řeší úlohy zejména neformálně, což se poté mění na druhém stupni na formálně-matematické řešení, což spočívá ve správném výběru a realizaci konkrétní aritmetické operace. Se zvyšujícími vědomostmi a dovednostmi žáků se později přidává i abstraktní algebraická metoda. Ale zároveň je třeba si uvědomit, že úlohy řešené typicky algebraicky, dokážou žáci řešit i aritmeticky. Dále se v článku zabývá tím, že pomoc při řešení přináší i grafické znázornění, ať už vlastní nebo poskytnuté. Slovní úlohy však považuje za účinný prostředek, ve kterém je zobrazena realita a zároveň možnost procvičení matematiky.

Další výsledky studia slovních úloh představila Budínová (2018), která se zabývala řešitelskými strategiemi studentů u úloh rovnicového charakteru, a to konkrétně v řešení nadaných žáků. Pro zkoumání řešitelských dovedností se rozhodla z důvodu toho, že u dětí nadaných v předškolním vzdělávání dochází k problémům po přechodu na základní školu. Mnohokrát se stalo, že se tyto děti dále nerozvíjely a ztrácely zájem o vyučování. Proto podrobněji zkoumá, jaké úlohy by měli nadaní žáci řešit, aby byl využit jejich potenciál a jaké strategie řešení se dají od takových žáků očekávat. Zpracovávala kvantitativně i kvalitativně data od žáků, kteří byli označeni za nadprůměrné, ať odborným pracovištěm, tak učiteli. Její výzkum potvrdil, že žáci druhého stupně, kteří jsou nadaní, používají ve svých řešeních algebraický aparát dříve, než jak je uvedeno v kurikulu. Považují za přirozenost použít místo neznámé hodnoty písmeno, které vede ke zjednodušení celého výpočtu. Budínová zastává názor, že je vhodné žákům při řešení slovních úloh, které jsou typicky řešené pomocí algebry, ukázat různé strategie řešení, protože ukázání více strategií může žákům v jejich počítání pomoci.

5 VLASTNÍ ŠETŘENÍ

Druhá část diplomové práce bude věnována vyhodnocení výzkumu, který byl realizován ve školním prostředí. Výběr úloh pro oblast zkoumání byl záměrně zúžen na úlohy o pohybu, ve kterých se pohybují dva subjekty proti sobě, a to z důvodu, aby byl poskytnut komplexní přehled strategií řešení tohoto typu úloh.

První kapitola je věnována metodologii výzkumu, ve kterém jsou vysloveny výzkumné otázky, a také celý cíl výzkumu. Následuje kapitola, která popisuje účastníky výzkumného šetření. V návaznosti na popis výzkumného vzorku následuje kapitola, která přibližuje design výzkumu, který je zasazen do matematického kontextu. Nedílnou součástí této diplomové práce je vyhodnocení získaných dat.

5.1 VÝZKUMNÁ OTÁZKA

Výzkumné šetření bylo záměrně zúženo na jeden konkrétní typ matematických slovních úloh, kdy jsem se zaměřila na různá alternativní řešení úloh v žákovských pracích. První část této práce přináší teoretické zázemí do této problematiky. Nejprve je vysvětleno, co se skrývá pod pojmem matematické slovní úlohy, která je typicky součástí výuky matematiky. Jak uvádí ve své definici matematické slovní úlohy Vondrová a kolektiv (2022, s. 15), tak jde o *„takovou slovně formulovanou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají.“* Následující kapitola přibližuje různá dělení slovních úloh dle různých kritérií. Celý výzkum byl orientován na skupinu slovních úloh o pohybu proti sobě, které bývají často v řešení žáků problematické. Nedílnou součástí teoretické části tvoří popis typických chyb v řešení žáků, a také důvody, které mohou nesprávná řešení způsobovat. Analýza chyb byla stěžejní i pro samotný výzkum této diplomové práce, kdy poskytla potřebné zázemí pro správnou identifikaci problému v řešení žáků. Podle identifikace chyb bylo možné žákovské práce rozdělit do různých kategorií. Poslední kapitola úvodní části se věnuje matematickým výzkumům o slovních úlohách, které byly dosud realizovány. Poznatky získané z těchto výzkumných šetření jsou velmi podstatné pro vznik této práce, kdy díky výsledkům z výzkumů Vondrové (2022), která se blíže zabývá slovními úlohami a typickými chybami, Verschaffela (2020) a jeho popisem různých metod řešení a Budínové (2018), která se zabývala řešitelskými dovednostmi nadaných žáků, naváže výzkum na jejich poznatky a doplní je o dosud nestudované aspekty.

Cílem mé diplomové práce je ověření, zda jsou žáci schopni aplikovat představené řešitelské strategie z první úlohy v předložených úlohách o pohybu, což se dá považovat za hlavní výzkumnou otázku:

> VO: Jsou žáci schopni aplikovat představenou experimentální, aritmetickou a algebraickou strategii v předložených úlohách o pohybu?

K tomu byla definována i dílčí výzkumná otázka, která může být na základě analýzy žákovských prací, zodpovězena:

> VO1: Jaké chyby se nejčastěji v řešení objevují?

Odpovědi na tyto výzkumné otázky budou následovat v kapitole 6 a 7, které se věnují podrobné analýze pracovních listů a kategorizací chyb.

5.2 METODOLOGIE A DESIGN VÝZKUMU

Po stanovení výzkumného problému, a tedy i hlavní výzkumné otázky a následně dílčí výzkumné otázky, byl zvolen styl, jakým byl celý výzkum realizován. Záměrně byl zvolen kvalitativní přístup z důvodu toho, aby získaná data pocházela z jedné konzistentní skupiny, která má stejnou úroveň získaných poznatků z oblasti matematického vzdělávání. Zároveň je studována oblast, která na základě dostupných publikací nebyla výzkumně řešena. Byly proto stanoveny jisté výzkumné otázky, které je možné zodpovědět kvalitativním přístupem k datům, neboť je dotazováno, zda jsou žáci schopni aplikovat představené strategie řešení do dalších úloh, a jakých chyb se dopouštějí. Hendl (2008, s. 50) definuje kvalitativní výzkum takto: *„V typickém případě kvalitativní výzkumník vybírá na začátku výzkumu téma a určí základní výzkumné otázky. Otázky může modifikovat nebo doplňovat v průběhu výzkumu, během sběru a analýzy dat. Výzkumník vyhledává a analyzuje jakékoliv informace, které přispívají k osvětlení výzkumných otázek a provádí deduktivní a induktivní závěry.“*

Kvalitativní výzkum se dále dělí do dalších kategorií, které jsou označovány za design výzkumu, tedy jakým způsobem byl výzkum realizován. V kvalitativním výzkumu se dá rozlišit mnoho designů, jakým lze výzkum provádět. Jelikož jsem chtěla získat podrobné informace k mé výzkumné otázce, rozhodla jsem se pro design případové studie. Obecně se dá říci, že případová studie je studiem jednoho konkrétního případu, který je zaměřený na jeden konkrétní problém. Podle Yina (2003) je případová studie metoda, která je kvalitativní, protože dokáže splnit všechny cíle, které má za úkol. V rámci toho, že se zabýváme konkrétním případem do hloubky, tak získáváme potřebné porozumění v obecném smyslu. Podle Yina (2003) celá případová studie probíhá ve fázích: plán, projekt, příprava na sběr dat, sběr dat, analýza a publikace výsledků. Případovou studii definoval i Hendl (2005, s. 104) následovně: *„jde o detailní studium jednoho nebo několika málo případů, jimiž se snažíme zachytit složitost případu a popsat vztahy v jejich celistvosti. Předpokládá se, že důkladným prozkoumáním jednoho případu lépe porozumíme jiným podobným případům.“*

5.3 SBĚR DAT A PARTICIPANTI VÝZKUMU

Zvoleným designem celého výzkumu byla případová studie, pro kterou je typický záměrný výběr respondentů, kteří splňují již předem nastavená kritéria. Jako první kritérium bylo zvoleno to, že musí jít o žáky s dokončeným matematickým vzděláním základní školy. Tento výběr byl učiněn záměrně, neboť pro můj výzkum do diplomové práce je velmi důležité, aby žáci měli dokončené studium základní školy. Cílem výzkumu není naučit žáky řešit úlohy různými způsoby, ale jde zejména o analýzu jejich řešitelských dovedností.

Kvalitativní výzkum je možné realizovat pomocí různých metod, avšak v této studované problematice jsem se rozhodla pro přípravu pracovního listu. Petty (2013, s. 212) uvádí následující definici: *„Pracovní listy obsahují sérii příkladů, otázek či praktických úkolů, někdy i shrnutí probírané látky.“* Tyto listy, které tvoří přílohu této diplomové práce, obsahují čtyři slovní úlohy, kde první dvě úlohy mají naznačené aritmetické znázornění. Úlohy obsahují doplňující otázky, zejména na vysvětlení principu jejich řešení. Zpravidla se slovní úlohy o pohybu učí již v osmé třídě. Aby byla vyloučena neznalost žáků dané problematiky, byli respondenti zvoleni z třetího ročníku šestiletého gymnázia, což znamená, že se jedná o první ročník střední školy, tedy jde o studenty, kteří mají již dokončené vzdělání základní školy. Tento výběr byl učiněn na základě dostupnosti. Výzkum probíhal se žáky, kteří se dopředu nepřipravovali na zkoumanou problematiku. Testování se realizovalo ve dvou termínech v říjnu roku 2022. Celkem se tedy zúčastnilo 29 žáků, kteří byli rozděleni do menších skupin na dané termíny. Na realizaci výzkumu byly poskytnuty dvě vyučovací hodiny pro jednotlivé skupiny. Žáci nejprve obdrželi první úlohu zvlášť na papíře, která byla řešena společně a můžeme ji považovat jako vzorovou. Poté byly rozdány pracovní listy, které obsahovaly tři úlohy, které žáci vypracovávali sami. Ještě předtím byli informováni o tom, že toto testování je realizováno do výzkumné části diplomové práce a že za správná řešení všech úloh mohou získat jedničku, která bude započítána do průběžné klasifikace, což můžeme považovat za motivační prvek. K řešení daných pracovních listů mohli používat pouze psací potřeby. Závěrem byli žáci požádáni, aby si na řešení úloh dali záležet, jelikož získaná data budou dále zpracovávána.

5.4 VÝBĚR ÚLOH

Jak již bylo zmíněno v předchozích kapitolách, výzkum byl realizován ve škole pomocí pracovních listů. Celkově by se dala jejich práce rozdělit do dvou etap. První etapu tvoří úloha číslo jedna, která je řešená společně a druhou etapu tvoří úlohy řešené samostatně. Úkolem je nalézt řešení k zadaným úlohám pomocí různých strategií řešení. První úloha se zabývá pohybem chodce a cyklisty proti sobě, kdy jsou známy, jak jejich průměrné rychlosti, tak celková vzdálenost mezi nimi. Tato úloha má za úkol ukázat žákům různé strategie řešení. V následujícím rámečku je uvedeno znění první slovní úlohy:

1. Mezi Hradcem Králové a Kuksem vede podél Labe známá stezka pro pěší a cyklisty, má délku 30 km. Ve stejný okamžik po ní proti sobě vyrazí z Kuksu chodec rychlostí 6 km/h a z Hradce cyklista rychlostí 24 km/h. Za jak dlouho a kde se setkají?

První úloha zadaná se všemi potřebnými údaji pro výpočet času a vzdálenosti místa setkání se dá řešit několika způsoby. První řešení může být pomocí experimentu, který může být neřízený nebo řízený. Předpřipravená tabulka však napovídá, že ke správnému určení výsledku použijeme v tomto případě experiment řízený. Kdy je podle Budínové (2018) nejdříve realizován odhad, a poté dochází k upřesnění. Do tabulky se zaznamenávají vzdálenosti, které osoby za určitý čas urazí. Pro správné určení je zapotřebí, aby si žáci uvědomili, že zadaná průměrná rychlost v kilometrech za hodinu je vzdálenost, kterou daná osoba urazí za jednu hodinu. Nejprve žáci doplní první sloupec po uběhnutí 30 minut času, a tím získají následující tabulku 1.

Tabulka 1

Experimentální řešení úlohy č. 1 – dílčí výpočet

	30 minut	1 hodina
Chodec	3 km	
Cyklista	12 km	
Celkem kilometrů	15 km	

První doplnění tabulky nám ukazuje, že počet kilometrů celkem nesouhlasí se zadáním úlohy, a tudíž by mělo dojít k upřesnění našeho odhadu, jestli se musí pohybovat delší nebo kratší čas. Následně se opakuje stejný princip pro výpočet dráhy, akorát s rozdílem, že se dané osoby pohybují jednu hodinu, což ukazuje následující tabulka 2.

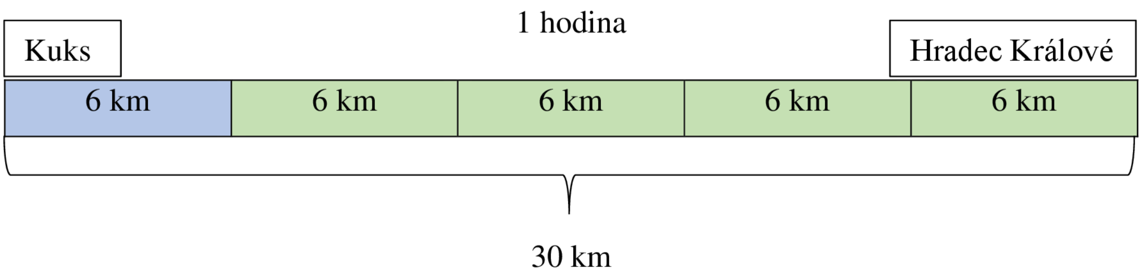
Tabulka 2

Experimentální řešení úlohy č. 1 – dokončený výpočet

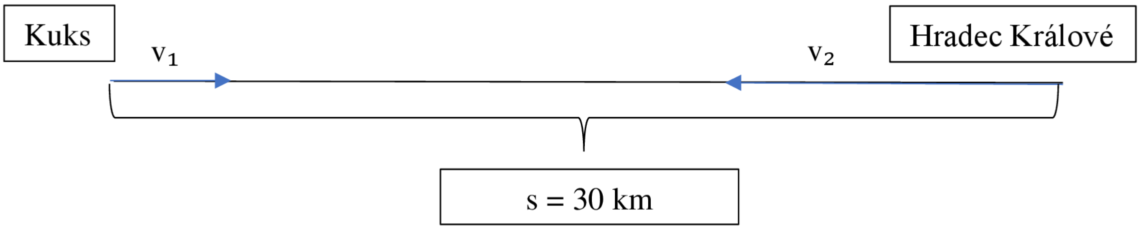
	30 minut	1 hodina
Chodec	3 km	6 km
Cyklista	12 km	24 km
Celkem kilometrů	15 km	30 km

Po provedení druhého výpočtu opět dochází k porovnání získaného výsledku a zadání úlohy, kdy se potvrzuje to, že celková vzdálenost ze zadání je rovna celkovému počtu kilometrů.

Další strategií, kterou je možné tuto úlohu vyřešit, je aritmetické řešení, které je blíže popsáno v podkapitole 2.2.5. Pro stanovení správného postupu celé úlohy je nutné určit poměr, a to poměr rychlostí daných osob, protože celková dráha je rozdělena tímto poměrem. Konkrétně je tedy poměr 6:24, kdy je vhodné tento poměr zkrátit na 1:4 a v tomto poměru celkovou vzdálenost rozdělit. U tohoto řešení je vhodné si celou situaci znázornit pomocí grafického schématu.



Algebraické řešení je třetí metodou řešení, kterou se dá tato slovní úloha spočítat. Podle Novotné (2000) jde o řešení pomocí rovnic. Tato strategie je založena na znalosti vztahu mezi dráhou, rychlostí a časem a současně vztahem mezi dílčími dráhami s_1 a s_2. I zde si mohou žáci pomoci schématem celé situace.



$v_1 = 6$ km/h $\qquad$ $v_2 = 24$ km/h

$t_1 = t_2$ $\qquad$ $t_1 = t_2$

Následuje sestavení rovnice pro řešení zadané slovní úlohy a dopočítání vzdálenosti:

$$s_1 + s_2 = s$$
$$v_1 {*} t + v_2 {*} t = s$$
$$6 {*} t + 24 {*} t = 30$$
$$30 {*} t = 30$$
$$t = 1$$

$$s_1 = v_1 {*} t$$
$$s_1 = 6 {*} 1$$
$$s_1 = 6$$

Získané řešení je ještě potřeba ověřit pomocí zkoušky, která by měla být provedena dvakrát, jak je uvedeno v teoretické části práce. Ověření správnosti výpočtu a zároveň ověření takové, jestli toto řešení zapadá do kontextu celé úlohy. Na závěr by měla být uvedena slovní odpověď na položenou otázku v zadání.

Zadání druhé slovní úlohy, které se nacházelo v pracovním listu, je uvedeno v následujícím rámečku, se zabývá pohybem dvou vlaků, které jedou proti sobě z Prahy a Ostravy.

2. Mezi Prahou a Ostravou je to po železnici přibližně 300 km. Tuto vzdálenost jezdí Pendolino s průměrnou rychlostí 100 km/h a nákladní vlaky s průměrnou rychlostí 50 km/h. Za jak dlouho a kde se potká Pendolino jedoucí z Ostravy a nákladní vlak z Prahy, pokud vyrazí proti sobě současně?

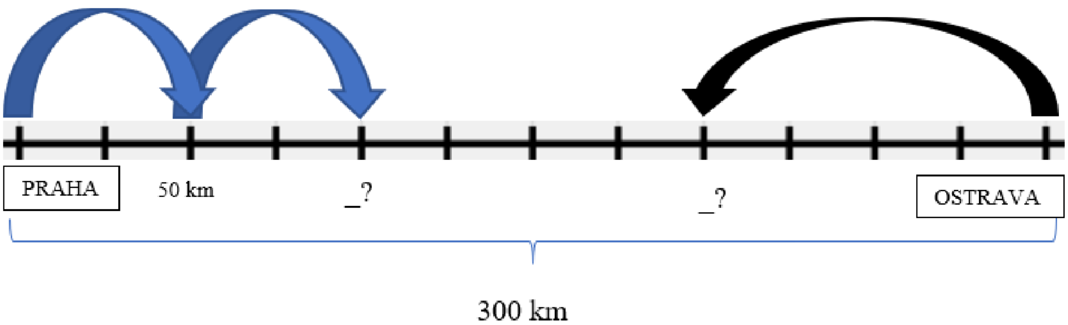
U tohoto příkladu jsou známé průměrné rychlosti, a i vzdálenost mezi těmito dvěma městy. V této úloze by se mělo zjistit, kdy a kde se vlaky potkají. První strategií řešení je opět řízený experiment, pro který je připravena tištěná tabulka, tudíž je opět důležité uvědomění si souvislosti mezi průměrnou rychlostí a vzdáleností. Nejprve se doplní první sloupec, a poté dochází ke zjištění, že celkem ujeté kilometry se nerovnají celkové vzdálenosti, proto dochází k upřesnění celého výpočtu, dokud není počet ujetých kilometrů roven vzdálenosti, kterou oba vlaky musí ujet, což zobrazuje tabulka 3.

Tabulka 3

Experimentální řešení úlohy č. 2 – dokončený výpočet

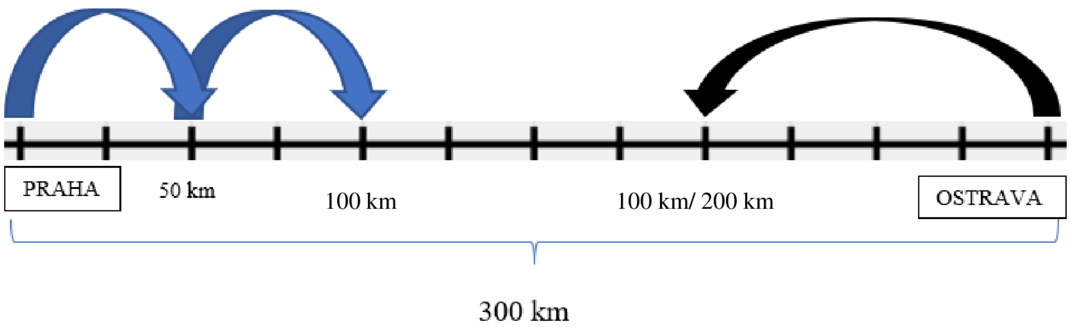
	30 minut	1 hodina	2 hodiny
Pendolino	50 km	100 km	200 km
Nákladní vlak	25 km	50 km	100 km
Celkem kilometrů	75 km	150 km	300 km

Řešení aritmetické má v pracovním listu předpřipravené schéma, které má dopomoci ke správnému vyřešení zadané úlohy. Podstatné je však nejdříve stanovit poměr rychlostí obou vlaků, konkrétně tedy 50:100, které se zkrátí na 1:2. Následně je zapotřebí doplnit schéma pohybu vlaků, ve kterém je již naznačené rozdělení celé dráhy v příslušném poměru.



Jak naznačuje schéma, modré šipky znázorňují pohyb nákladního vlaku z Prahy. Jedna modrá šipka ukazuje vzdálenost, kterou za jednu hodinu ujel, konkrétně tedy 50 km, což jsou dva dílky číselné osy.

Je tedy snadné doplnit první chybějící údaj, a to ten, ve kterém končí druhá modrá šipka, která znázorňuje dvouhodinový pohyb vlaku z Prahy. Existují dvě možnosti, jak k chybějícímu údaji dojít. Je možné sečíst dvakrát vzdálenost, kterou ujede za hodinu tzn. 50 + 50 = 100, anebo dojde k uvědomění, že dva dílky znázorňují 50 km, tudíž čtyři dílky musí znázorňovat 100 km. Zbývá tedy doplnit chybějící údaj u Pendolina, kde černá šipka ukazuje jeho pohyb za hodinu jízdy, je to tedy 100 km (4 dílky z číselné osy). Tím, že ještě není vyčerpána šipkami celková vzdálenost, je zapotřebí doplnit zbývající část celkové dráhy. Vzhledem k tomu, že vlak z Prahy se podle naznačených šipek pohybuje již dvě hodiny, je nutné, aby se i vlak z Ostravy pohyboval stejný čas, protože vyjížděli stejně. Doplněním druhé černé šipky, která zabírá další čtyři dílky, dostáváme řešení celé úlohy.



Řešení pomocí algebraického aparátu funguje na stejném principu jako algebraické řešení u prvního příkladu. Je tedy nutné si uvědomit fyzikální vztahy mezi dráhou, časem a rychlostí, a dále sestavit rovnici.

$\boxed{s = 300 \text{ km}}$

$v_1 = 50$ km/h $v_2 = 100$ km/h

$t_1 = t_2$ $t_1 = t_2$

$$s_1 + s_2 = s$$

$$v_1 * t + v_2 * t = s$$

$$50 * t + 100 * t = 300$$

$$150 * t = 300$$

$$t = 2$$

$$s_1 = v_1 * t$$

$$s_1 = 50 * 2$$

$$s_1 = 100$$

Po dopočítání všech získaných řešení je nutné ověřit správnost řešení a uvést slovní odpověď.

Slovní úloha zabývající se pohybem dvou studentů, a to studenta na kole a studentky na koloběžce, byla uvedena jako třetí v pracovním listě a její znění je zapsáno v následujícím rámečku:

> 3. Studentka jezdí každé ráno na gymnázium na koloběžce a jede průměrně 12 km/h. Student tam jezdí na kole a je o polovinu rychlejší než studentka. Vzdálenost mezi jejich bydlišti je 5 km, škola leží mezi nimi. Jak daleko od gymnázia bydlí studentka a jak daleko student, pokud ráno vyráží ve stejný čas a ke škole oba dorazí v 7:45? V kolik hodin musí vyjet z domova?

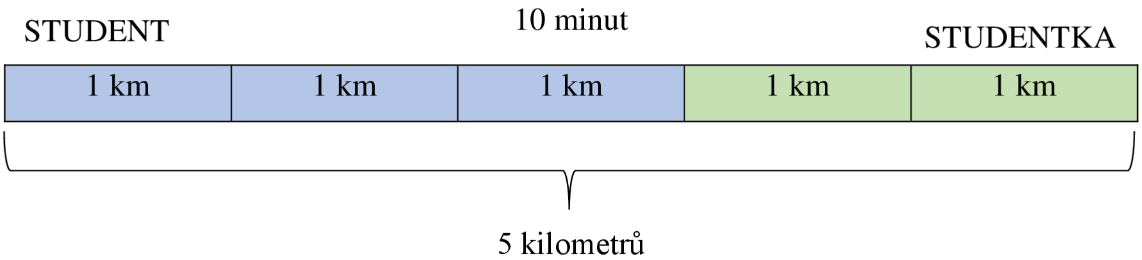
Po přečtení této slovní úlohy je zřejmé, jakou rychlostí se pohybuje studentka, nicméně je nejdříve nutné stanovit, jakou rychlostí se pohybuje student na kole. Je zde přesně řečeno, že je o polovinu rychlejší než studentka. Tudíž 12: 2 = 6, což je polovina rychlosti dívky, abychom dostali rychlost studenta, tak musíme tuto polovinu přičíst k její průměrné rychlosti, což konkrétně znamená 12 + 6 = 18. Student se pohybuje rychlostí 18 km/h. Známá je i vzdálenost mezi nimi. Nicméně úkolem je zjistit, v kolik hodin musí vyjet z domu, aby se sešli v 7:45 u školy a zároveň, jak daleko bydlí studentka od školy. Sestavení tabulky a následné upřesňování původního odhadu tvoří první strategii řešení, a to řízený experiment. Jak ukazuje následující tabulka, nejdříve byl stanoven první odhad, kdy je zřejmé, že se studenti budou pohybovat méně než jednu hodinu, a tak prvním odhadem byla půlhodina, pro kterou byly dopočítány všechny údaje. Za půl hodiny by tedy ujeli 15 kilometrů, což je víc, než je zadaná celková vzdálenost, tudíž se musí pohybovat kratší čas než půl hodiny, proto byl zvolen čas 15 minut. Za tento čas by urazili 7,5 kilometru, což je pořád víc než vzdálenost mezi jejich bydlišti, tudíž musí dojít ke zkrácení času. Konkrétně se tedy ověřuje doba pohybu trvající 10 minut. Po dopočítání je zřejmé, že součet kilometrů, které urazí oba studenti za 10 minut, je roven vzdálenosti mezi jejich bydlišti, jak je zapsáno v tabulce 4.

Tabulka 4

Experimentální řešení úlohy č. 3 – dokončený výpočet

	30 minut	15 minut	10 minut
Studentka	6 km	3 km	2 km
Student	9 km	4,5 km	3 km
Celkem kilometrů	15 km	7,5 km	5 km

Pro aritmetické řešení je nutné sestrojit schéma, které zobrazuje vzdálenost mezi bydlišti studentů. Tuto vzdálenost je nutné rozdělit v poměru rychlostí obou studentů, tedy 18:12, což je po zkrácení 3:2. Jelikož je vzdálenost mezi nimi 5 kilometrů, jeden díl schématu bude znázorňovat jeden kilometr. Vzhledem k tomu, že student se pohybuje větší rychlostí, musí urazit on větší část cesty, což jsou 3 dílky. Zbývá určit, za jak dlouho ujede student 3 kilometry, vzhledem k tomu, že za šedesát minut, by ujel 18 kilometrů. Tím pádem 3 kilometry jsou 1/6 jeho dráhy, tudíž je ujede za 1/6 jeho času, což je 10 minut.



Další možnost, jak tuto úlohu řešit je algebraicky, kde je nutné správně vytvořit rovnici k výpočtu času a vzdálenosti. Konkrétně tedy:

$\boxed{s = 5\ km}$

$v_1 = 12$ km/h

$t_1 = t_2$

$v_2 = 18$ km/h

$t_1 = t_2$

$s_1 + s_2 = s$

$v_1 * t + v_2 * t = s$

$12 * t + 18 * t = 5$

$30 * t = 5$

$t = 1/6$

$s_1 = v_1 * t$

$s_1 = 12 * 1/6$

$s_1 = 2$

U algebraického řešení je nutné ověřit výsledky pomocí zkoušky. Zároveň je nutné u všech strategií řešení určit čas, ve kterém musí vyrazit oba studenti z domu, protože zjištěný čas 10 minut znamená, že 10 minut jim bude trvat cesta do školy. Podle zadání je tedy jasné, že musí vyrazit v 7:35, aby oba dojeli ke škole ve stejný čas v 7:45. Na závěr je nutné zapsat slovní odpověď na položené otázky.

Úloha pojednávající o pohybu letadel při přeletu mezi Evropou a Amerikou tvoří poslední část pracovního listu a text této úlohy je zapsán v následujícím rámečku:

4. Z Ameriky do Evropy létají letadla rychleji než opačným směrem. Víte proč? Je to díky převažujícím západním větrům. Zkrátka letadlo letící z New Yorku do Bruselu má vítr v zádech, vůči zemi letí průměrně 960 km/h. V opačném směru letadlo letí proti větru, průměrně jen 840 km/h vůči zemi. Vzdálenost Bruselu a New Yorku je přibližně 6000 km. V jaké vzdálenosti od těchto měst by se potkala dvě letadla, kdyby vystartovala ve stejný čas proti sobě?

K řešení této úlohy máme zadány průměrné rychlosti letících letadel, jak z Evropy, tak z Ameriky, a také přibližnou vzdálenost mezi dvěma městy. Pro experimentální řešení nejprve odhadneme, jaký čas přibližně jim může cesta trvat, a poté se upřesňováním původního odhadu dostáváme k řešení celé úlohy. Je dobré si pro řešení této úlohy připravit tabulku, do které budou odhady zaznamenávány a na základě jednotlivých vyhodnocení bude původní odhad upřesněn, než dojde ke zjištění správného výsledku, což zobrazuje tabulka 5.

Tabulka 5

Experimentální řešení úlohy č. 4 – dokončený výpočet

	1 hodina	3 hodiny	3 hodiny 30 minut	3 hodiny 20 minut
Letadlo z New Yorku do Bruselu	960 km	2880 km	3360 km	3200 km
Letadlo z Bruselu do New Yorku	840 km	2520 km	2940 km	2800 km
Celkem kilometrů	1800 km	5400 km	6300 km	6000 km

Pro aritmetické řešení si vytvoříme grafické schéma, ve kterém bude rozdělena vzdálenost obou měst v určitém poměru rychlostí. Zde konkrétně 960:840, což se dá zkrátit na poměr 16:14 a to jde ještě zkrátit na poměr 8:7. Získáme tedy schéma s 15 stejnými dílky, kdy jeden dílek zobrazuje velikost 400 kilometrů.

New York Brusel

400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km	400 km

6000 kilometrů

Zbývá určit, za jak dlouho uletí letadlo z New Yorku vzdálenost 3200 km. Vzhledem k tomu, že za jednu hodinu uletí 960 km, tak stačí vydělit vzdálenost 3200 kilometrů kilometry, které uletí za hodinu. Což znamená 3200: 960 = 3 zbytek 320, z toho vyplývá, že poletí 3 celé hodiny a dopočítáme zbytek na minuty (320: 960) * 60 = 20. Tedy jde o čas 3 hodin a 20 minut.

Algebraické řešení se určí pomocí rovnice jako v předchozích příkladech.

$\boxed{s = 6000 \text{ km}}$

$v_1 = 840$ km/h $\quad v_2 = 960$ km/h

$t_1 = t_2 \quad t_1 = t_2$

$$s_1 + s_2 = s$$
$$v_1 * t + v_2 * t = s$$
$$840 * t + 960 * t = 6000$$
$$1800 * t = 6000$$
$$t = 10/3$$

$$s_1 = v_1 * t$$
$$s_1 = 840 * (10/3)$$
$$s_1 = 2800$$

Zbývá dokončit tento příklad ověřením pomocí zkoušky a zapsáním slovní odpovědi.

6 ANALÝZA DAT

V této kapitole budou analyzovány výsledky výzkumu, který byl realizován ve školním prostředí. Každá úloha byla analyzována zvlášť, kdy řešení získaná od žáků byla rozdělena do čtyř podkategorií – bezchybné řešení, řešení s numerickou chybou, řešení s nesprávnou interpretací zadání a řešení s koncepční chybou. Následující podkapitoly se věnují analýze jednotlivých úloh v řešení žáků, kde jsou podrobněji rozebrány chyby, které se v řešení objevily.

6.1 Úloha č. 2

Ve většině žákovských řešeních se u této úlohy neobjevovaly problémy. Žáci dokázali tuto úlohu, kde byly přesně vyjádřeny průměrné rychlosti a vzdálenost, řešit všemi třemi předloženými strategiemi bezchybně. Pro experimentální řešení stačilo žákům vyplnit předloženou tabulku. Následující obrázek 6.1 ukazuje řešení žákyně šestiletého gymnázia, který byl bezchybný.

a) EXPERIMENT – Doplňte chybějící údaje do tabulky a vyřešte tuto úlohu:

	30 minut	1 hodina	2 hodiny
Pendolino	50 km	100 km	200 km
Nákladní vlak	25 km	50 km	100 km
Celkem km	75 km	150 km	300 km

Potkají se za 2hod 200 km od Ostravy.

Obrázek 6.1: Bezchybné experimentální řešení úlohy č. 2

Do kategorie chyb s nesprávnou interpretací výsledků se u dvou žáků objevila chyba ve formulaci slovní odpovědi na položenou otázku, i přesto, že tabulka byla doplněna správně, což konkrétně ukazuje obrázek 6.2.

a) EXPERIMENT – Doplňte chybějící údaje do tabulky a vyřešte tuto úlohu:

	30 minut	1 hodina	2 hodiny
Pendolino	50	100	200
Nákladní vlak	25	50	100
Celkem km	75	150	300

Potkají se za 2hodiny a potkají se 200km od Prahy.

Obrázek 6.2: Experimentální řešení úlohy č.2 s chybně formulovanou slovní odpovědí

Dále se vyskytla chyba ve vyplnění tabulky, což by se dalo považovat za numerickou chybu, avšak tato chyba se vyskytla pouze v jednom pracovním listu, kdy žákyně špatně sečetla celkový počet kilometrů, což na výsledek celé úlohy nemělo vliv, protože zapomněla napsat 0 a místo 300 zapsala 30. Ve slovní odpovědi se tato chyba neopakovala, tudíž jde pouze o numerickou chybu v součtu ujetých kilometrů, což je vidět na obrázku 6.3.

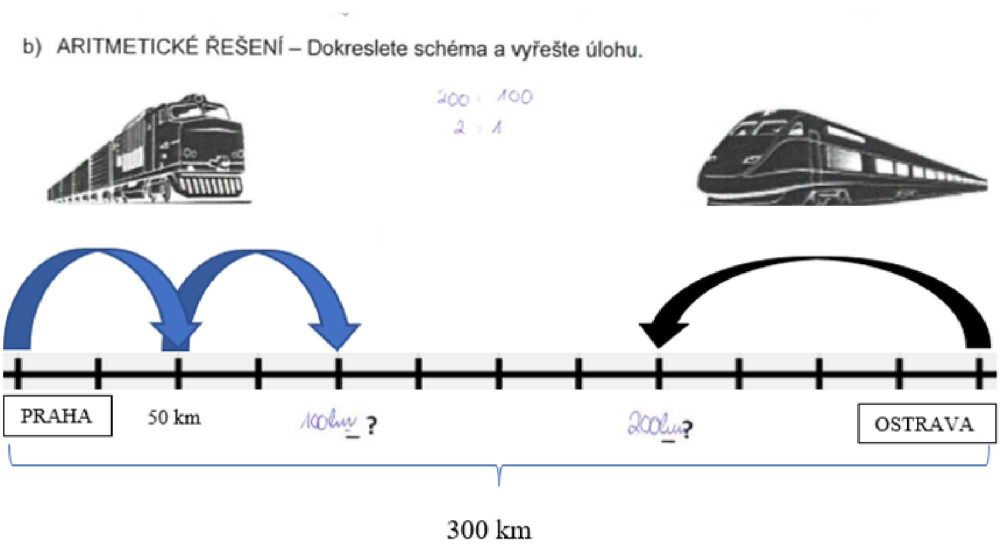
a) EXPERIMENT – Doplňte chybějící údaje do tabulky a vyřešte tuto úlohu:

	30 minut	1 hodina	2 hodiny
Pendolino	50 km	100 km	200 km
Nákladní vlak	25 km	50 km	100 km
Celkem km	75 km	150 km	30 km

Potkají se za 2 hodiny 100 km od Prahy.

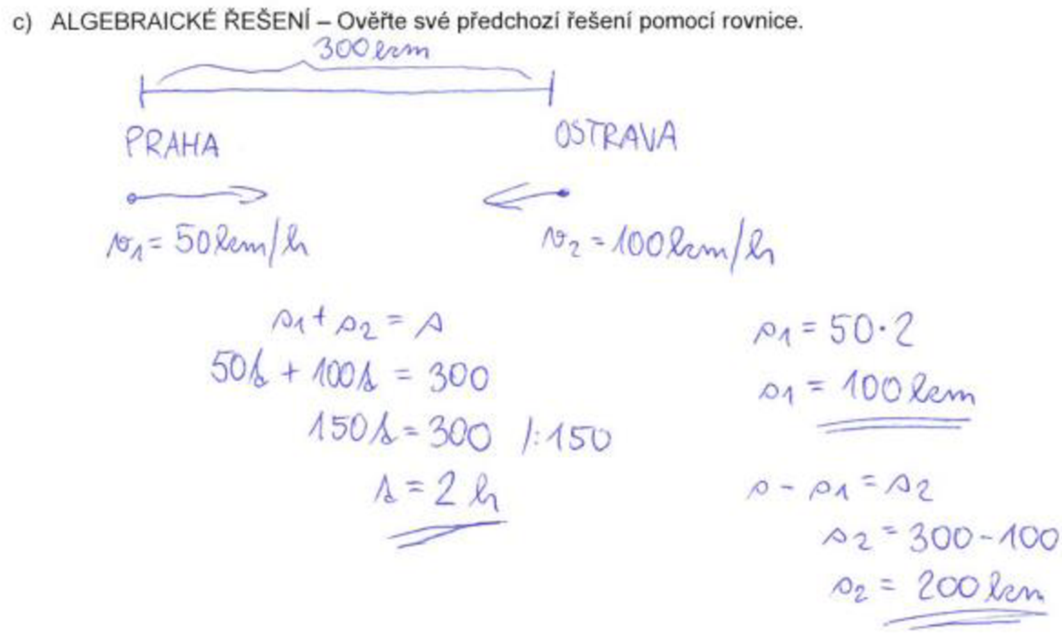
Obrázek 6.3: Experimentální řešení úlohy č. 2 s chybou ve vyplnění tabulky

Pro výpočet pomocí aritmetické strategie bylo předpřipravené schéma k řešení celé úlohy. Toto schéma naznačovalo žákům, jak se vlaky pohybují, takže jejich úkolem bylo schéma doplnit. Všechna řešení včetně vyjádření poměrů byla správná, jako příklad zde uvádím obrázek 6.4, který ukazuje bezchybné aritmetické řešení této úlohy v žákovském podání.



Obrázek 6.4: Bezchybné aritmetické řešení č.2

Třetí strategie řešení pomocí algebraického aparátu byla téměř bezchybná, za možnou příčinu můžeme považovat i to, že tato strategie se nejčastěji učí na základních školách k řešení těchto úloh. Celkově tedy 19 respondentů mělo toto řešení kompletní, jako příklad je zde uveden obrázek 6.5, ve kterém je ukázané bezchybné řešení v podání respondentky.



Obrázek 6.5: Bezchybné algebraické řešení úlohy č.2

V řešení devíti respondentů chybí slovní odpověď na položenou otázku, tudíž nelze jednoznačně říci, že pochopili a správně našli odpověď na položenou otázku. Pouze jeden respondent se ani nepokusil tuto úlohu řešit algebraicky.

6.2 Úloha č. 3

K tomu, aby žáci kompletně vyřešili třetí úlohu, museli si nejdříve správně vyjádřit průměrnou rychlost žáka, který jel na koloběžce. Z odpovědí získaných od respondentů je patrné, že určení této rychlosti nebylo pro všechny snadné. Konkrétně tedy dva respondenti udělali chybu hned na začátku při tomto výpočtu, tudíž i všechny následující kroky, které podnikly, nevedly ke správnému řešení. Tyto dva respondenty započítávám do kategorie numerických chyb, protože chybné vyjádření rychlosti studenta na počátku nevede ke správnému výsledku, avšak naznačený postup s nesprávnými výsledky ukazuje, že pochopili princip, jakým se dají slovní pohybové úlohy řešit. Tato chybná řešení pomocí experimentu jsou zobrazena na obrázcích 6.6 a 6.7.

a) EXPERIMENT – Sestavte tabulku pro tuto situaci.

	1h	30 min	10 min
studentka	12	6	2
student	24	12	4
celkem km	36	18	6

a) EXPERIMENT – Sestavte tabulku pro tuto situaci.

	1 hod	30 min	20 min
studentka	12	6	4
student	6	3	2
celkem km	18	9	6

Obrázek 6.6 a obrázek 6.7: Chybné určení rychlosti u úlohy č. 3

V rámci experimentálního řešení této úlohy se objevily způsob pokusu a omylu, který byl blíže definován v teoretické části podle Budínové (2018) a současně řízeného experimentu. Pro neřízený experiment, což je pokus – omyl, je typické náhodné zkoušení výsledků bez počátečního odhadu, což můžeme vidět v následujícím obrázku 6.8.

a) EXPERIMENT – Sestavte tabulku pro tuto situaci.

	30 min	1 hodina	20 min	10 min
Studentka	6 km	12 km	4 km	2 km
Student	9 km	12 + 6 = 18	6 km	3 km
Celkem km	15 km	30 km	10 km	5 km

Obrázek 6.8: Bezchybné experimentální řešení úlohy č.2 pomocí neřízeného experimentu

Zastoupení neřízeného experimentu v sesbíraných pracovních listech bylo však menšinové a většina žáků si udělala nejdříve odhad, tedy to, že určila, že celkový čas musí být kratší než jedna hodina. Nejčastěji začínali svůj výpočet pro čas půl hodiny, který později upřesňovali. Tato metoda řešení se označuje jako strategie řešení pomocí řízeného experimentu, který bývá dle Novotné (2000) označován jako systematický pokus. Na obrázku 6.9 je zobrazeno řešení řízeným experimentem, které je bez chyb.

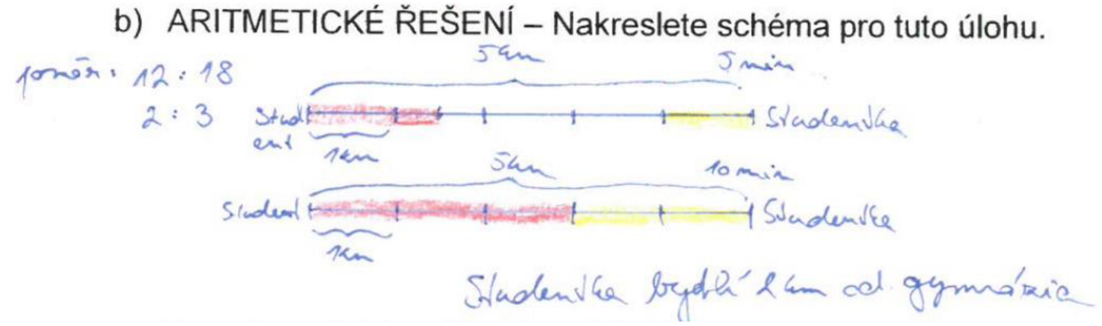
a) EXPERIMENT – Sestavte tabulku pro tuto situaci.

	30 min	15 min	10 min
studentka	6	3	2
student	9	4,5	3
celkem km	15	7,5	5

student 3km
studentka 2km

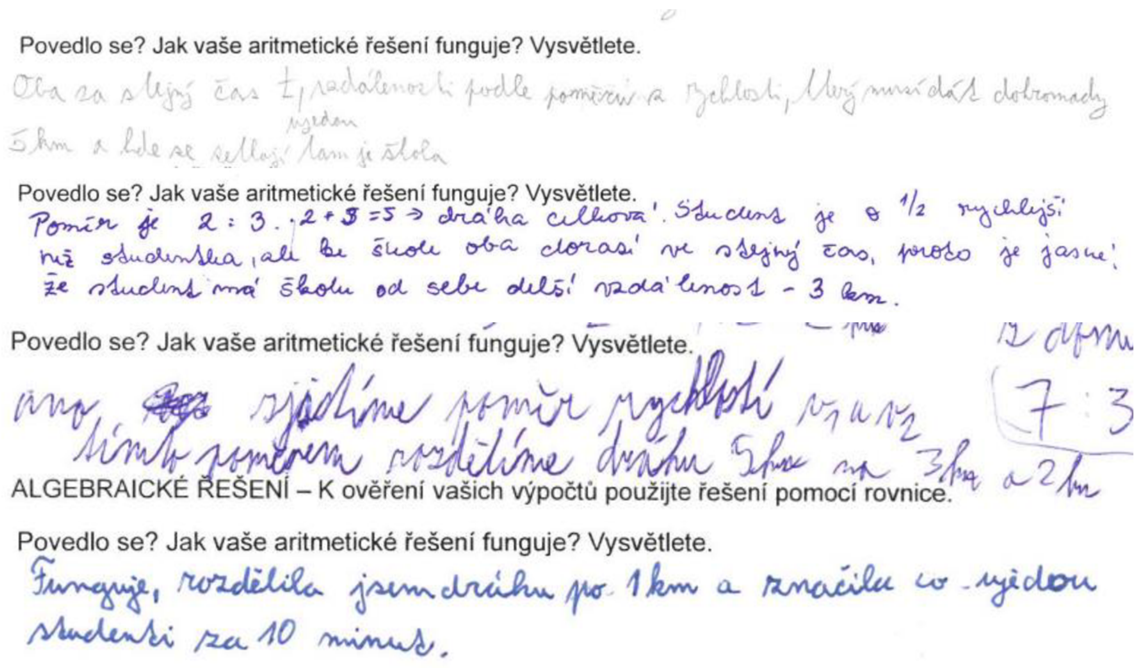
Obrázek 6.9: Bezchybné experimentální řešení úlohy č.2 pomocí řízeného experimentu

Samotné aritmetické řešení této úlohy nečinilo většině respondentů problém, konkrétně 20 respondentům, kdy si museli vytvořit schéma dráhy, které celou situaci znázorňovalo a samozřejmě ji rozdělit v poměru rychlostí. Schéma a aritmetické řešení je zobrazeno na obrázku 6.10.



Obrázek 6.10: Bezchybné aritmetické řešení úlohy č.3

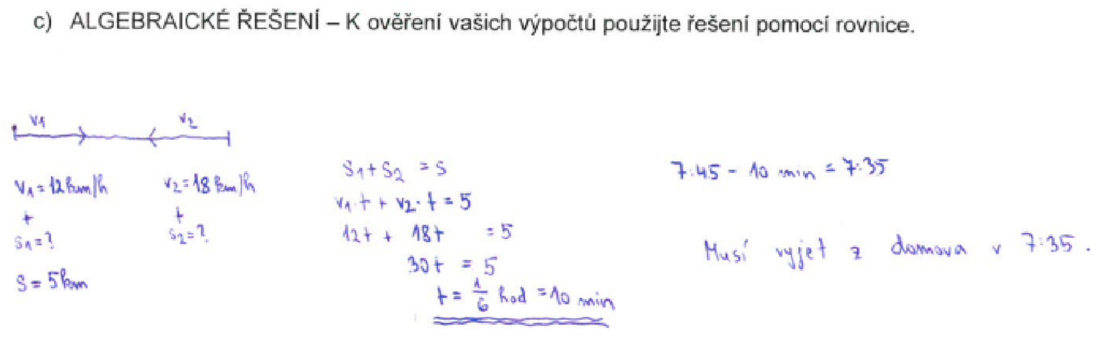
V této úloze byla položena doplňující otázka, která se dotazovala žáků, jak jejich řešení funguje. Měli tedy popsat slovy postup, kterým došli k tomuto výsledku. Prokázalo se, že většině žáků dělá problém popsat, jak o úloze přemýšleli a postupovali. Proto u šestnácti pracovních listů zůstal komentář k této úloze prázdný bez pokusu o detailnější vysvětlení celého procesu výpočtu, i přesto, že nakreslené schéma měli správně. Pouze čtyři žáci se pokusili vyjádřit svůj postup slovy, jak ukazují následující výstřižky (obrázek 6.11) z pracovních listů.



Obrázek 6.11: Komentáře k postupu aritmetického řešení u úlohy č. 3

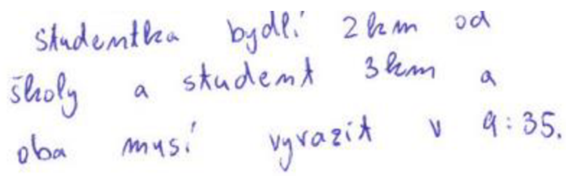
Všichni tito žáci upřesňují svůj postup a odkrývají to, že pracují na základě poměru rychlostí a následným rozdělením celé vzdálenosti.

Řešení pomocí algebraického aparátu se dá podle vypracovaných pracovních listů považovat téměř za bezchybné. Avšak v řešení šesti respondentů chybí dopočítání vzdálenosti, jak daleko bydlí oba studenti gymnázia, což ukazuje i následující obrázek 6.12, kde je i vidět, že vzdálenost není dopočítána a ani zapsána ve slovní odpovědi.



Obrázek 6.12: Správné algebraické řešení úlohy č. 3

Ve dvou případech se objevila chyba ve slovní odpovědi, kde byl špatně uvedený čas (obrázek 6.13), ve kterém musí oba studenti vyrazit a zároveň pouze ve dvou případech celá slovní odpověď chybí.

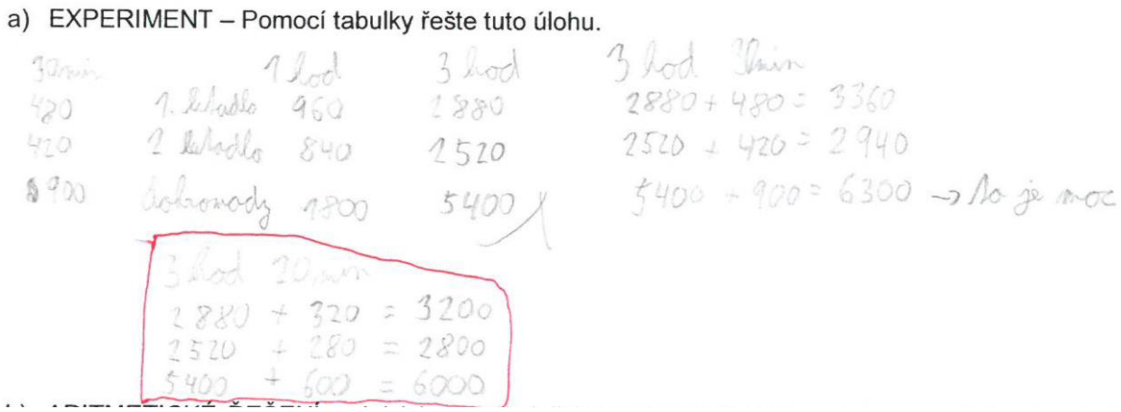


Obrázek 6.13: Chybně zapsaná slovní odpověď u úlohy č. 3

V podrobnější analýze všech 29 prací respondentů došlo k odhalení pěti studentů, kteří nebyli schopni vyřešit tuto úlohu žádnou z nabízených strategií. Dva z nich si špatně určili rychlost studenta, tudíž i jejich následná snaha o vyřešení nebyla správná a u těchto respondentů je patrné, že nebyli schopni tuto rychlost určit a pokusili se řešit úlohu experimentálně. Vzhledem k tomu, že nedospěli k žádnému výsledku, tak se ani nepokoušeli řešit tuto úlohu jinak nebo pomocí jiné strategie řešení. Další tři studenti, bez jakéhokoli správného řešení a snahy řešit úlohu jinak než experimentálně, jsou zařazeni do kategorie koncepčních chyb.

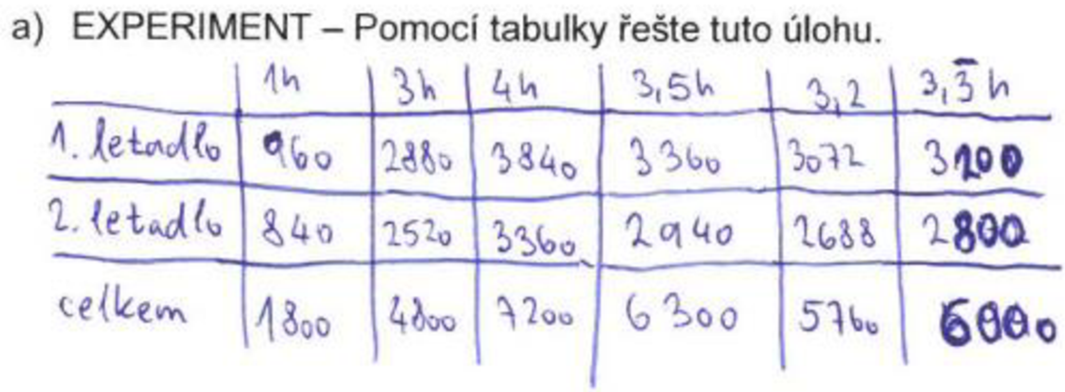
6.3 Úloha č. 4

Slovní úloha o pohybu dvou letadel byla pro žáky nejkomplikovanější. Dokazují to i výsledky, kdy pouze dva respondenti vyřešili všechny strategie řešení včetně okomentování aritmetického postupu. Při experimentálním postupu většina řešitelů využila metodu řízeného experimentu, kde začínali nejdříve na určení vzdálenosti, kterou urazí za jednu hodinu jejich letu. Poté upřesnili svůj odhad a vytvořili tabulku, do které si své postupy zapisovali, což ukazuje následující obrázek 6.14.



Obrázek 6.14: Správné experimentální řešení úlohy č. 4 s hodinami a minutami

U řešení tohoto respondenta je vidět uvědomění si, že upřesnění času na tři hodiny letu je nedostatečné, ale další hodina letu by byla příliš, proto zkouší časy s minutami, až dojde ke správnému výsledku. Několika studentům dělalo problém zejména to, aby si správně vyjádřili čas. To znamená, že museli čas převést na hodiny a minuty. V jejich řešení se často objevovaly výsledky s desetinným číslem, což můžeme vidět na následujícím obrázku 6.15.



Obrázek 6.15: Experimentální řešení úlohy č. 4 s desetinnými čísly

Z výsledků jejich řešení je patrné nepropojení souvislostí u převodu času a častokrát se ve slovní odpovědi vyskytuje čas uvedený desetinným periodickým číslem, což ukazuje, že žáci nedokáží vyjádřit čas srozumitelným časovým údajem. V osmi případech experimentálního řešení nedošli respondenti k řešení, avšak u všech byla snaha na počátku úlohu vyřešit, jelikož si vytvořili tabulku a pokusili se jí doplnit. Bohužel jejich snaha často skončila po třech pokusech, kdy nedošli ke správnému součtu drah, které za daný čas uletí letadla, proto svůj pokus o vyřešení vzdali a úlohu nedořešili, jak ukazuje obrázek 6.16.

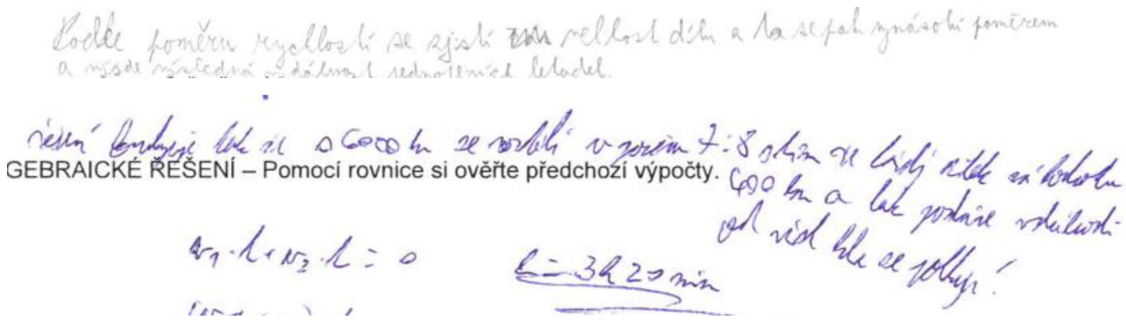
Obrázek 6.16: Nedokončené experimentální řešení úlohy č. 4

U třech respondentů vedlo nevyřešení pomocí první strategie k vzdání všech snah a následně neřešili zadanou úlohu žádnou jinou strategií.

Aritmetická strategie řešení dávala žákům za úkol určit poměr průměrných rychlostí, vytvoření schématu a zároveň popis jejich řešení, což se prokázalo jako značně problematické. U 21 respondentů se ukázalo, že jim nečiní problém vyjádřit správně poměr rychlostí a v tomto poměru rozdělit celkovou dráhu. Vytvořené schéma, které vede ke správnému výsledku, je ukázáno na obrázku 6.17.

Obrázek 6.17: Správné aritmetické řešení úlohy č. 4

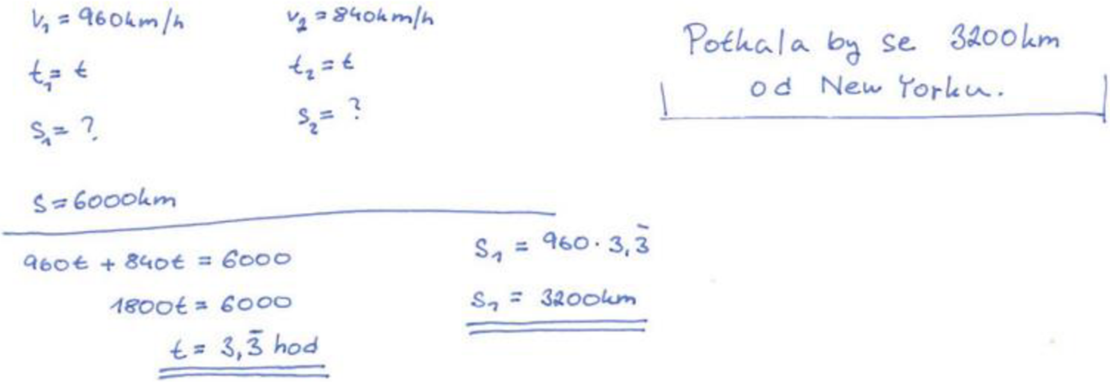
Nicméně okomentování postupu řešení se prokázalo jako problematické, jelikož ze všech studentů pouze dva respondenti se o vysvětlení pokusili. Žákovské komentáře zobrazuje obrázek 6.18.



Obrázek 6.18: Komentáře k aritmetickému řešení úlohy č. 4

V řešení obou respondentů se ukázalo, že si uvědomují spojitost mezi poměrem průměrných rychlostí obou letadel a dráhy, což ve svých komentářích zapsali.

Algebraické řešení v podání žáků bylo ve většině případů bezchybné, v sedmi pracovních listech chybí dopočítání vzdálenosti, žáci určili pouze dobu, kterou obě letadla poletí. Pouze dva respondenti nezapsali slovní odpověď. Následující obrázek 6.19 zobrazuje bezchybné algebraické řešení této úlohy v pracovním listu.



Obrázek 6.19: Bezchybné algebraické řešení úlohy č. 4

6.4 CHYBY V ŘEŠENÍ ŽÁKŮ

Kapitola navazující na předchozí analýzu pracovních listů vyplněných od žáků zobrazuje získané výsledky přehledně v tabulce a grafech. Nejprve je uvedena celková tabulka s podrobným rozdělením, a to na jednotlivé úlohy, a také na druh chyb, který se v daném řešení vyskytl. Po první vzorové úloze, na které byly představeny všechny strategie, byly žákům rozdány pracovní listy se třemi slovními úlohami. Výzkumného šetření se zúčastnilo 29 respondentů a následující tabulka 6 zobrazuje získaná data.

Tabulka 6

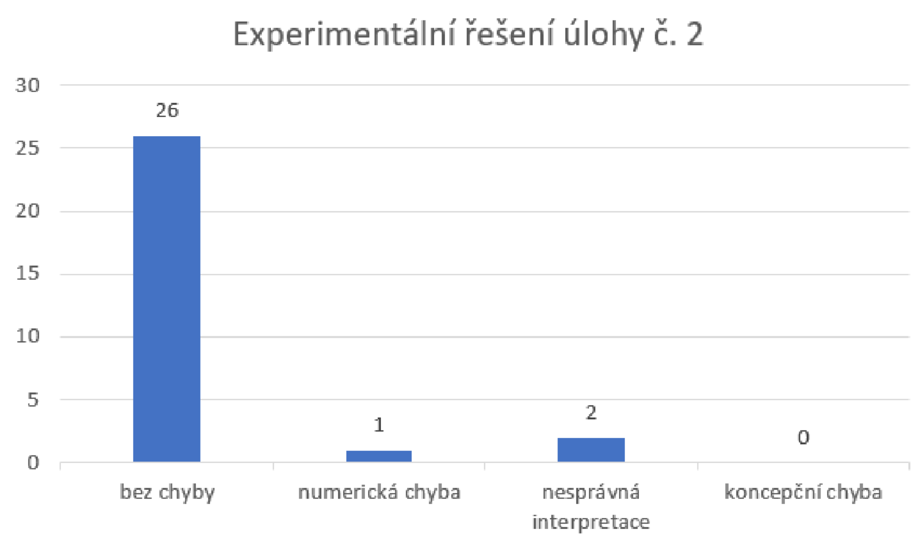
Zastoupení respondentů v jednotlivých kategoriích chyb

	Bez chyby	Numerická chyba	Nesprávná interpretace	Koncepční chyba
Úloha 2				
Experimentální řešení	26	1	2	0
Aritmetické řešení	29	0	0	0
Algebraické řešení	19	0	9	1

Úloha 3				
Experimentální řešení	23	2	1	3
Aritmetické řešení	4	2	21	3
Algebraické řešení	18	2	6	3
Úloha 4				
Experimentální řešení	21	0	0	8
Aritmetické řešení	2	1	21	5
Algebraické řešení	14	2	9	4

6.4.1 Chyby v řešení úlohy č. 2

Tato podkapitola se zabývá konkrétními chybami a jejich příčinami ve druhé úloze, která byla předmětem zkoumání. Následující graf 1 zobrazuje zastoupení žáků v jednotlivých kategoriích chyb při experimentálním řešení.

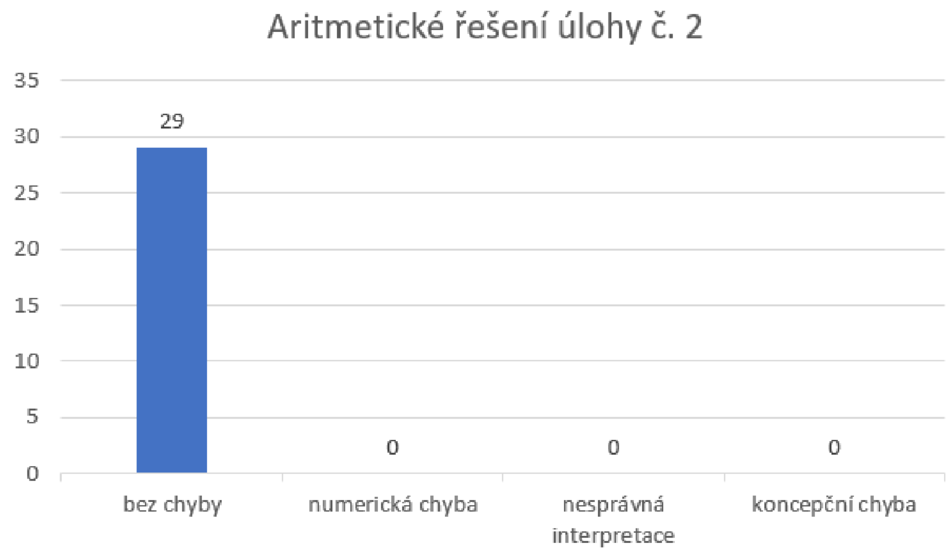


Graf 1

Experimentální řešení úlohy č. 2 zastoupení žáků v kategoriích chyb

Podle grafu 26 respondentů patří do skupiny bezchybné, avšak jeden respondent patří do kategorie numerických chyb. Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole jedná se o nesprávné vyplnění tabulky, chyba v součtu. Příčina této chyby by se dala nalézt v nepozornosti a nesoustředěnosti respondenta. Kategorie nesprávné interpretace je spojena s chybou v odpovědi, jak bylo uvedeno v předchozí kapitole. Tato chyba by mohla mít příčinu v zadání slovní úlohy, kterému se blíže věnuje kapitola 2.3.1 v teoretické části. V těchto řešeních je patrné, že žáci pochopili podstatu celé úlohy, avšak nevrátili se k zadání a došlo k záměně údajů ve slovní odpovědi.

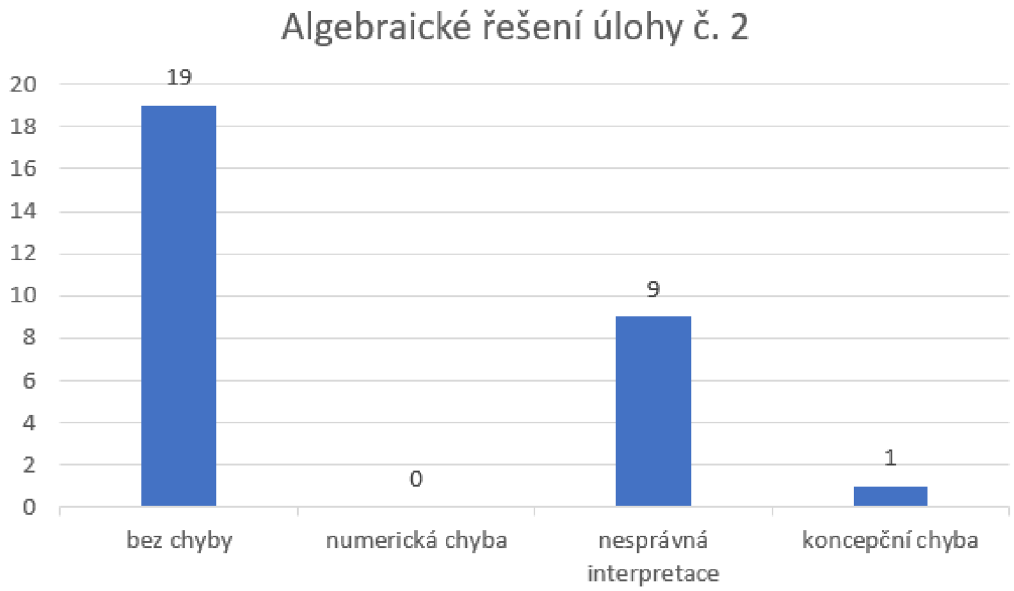
Aritmetické řešení druhé úlohy bylo v řešení všech žáků bezproblémové, což ukazuje i následující graf 2.



Graf 2

Aritmetické řešení úlohy č. 2 zastoupení žáků v kategoriích chyb

V řešení pomocí algebraického aparátu se již vyskytlo vícero chyb. Graf 3 zobrazující data k této úloze ukazuje, že 19 respondentů vypracovalo bezchybně tuto úlohu. Nicméně do kategorie nesprávné interpretace patří již 9 žáků. Jejich chyby spočívaly zejména v nedopočítání všech požadovaných údajů, konkrétně tedy vzdálenosti, kterou ujedou za daný čas. Kategorie koncepčních chyb je zastoupena pouze jedním pracovním listem, ve kterém se respondent nepokusil o algebraické řešení této úlohy. Kategorie numerických chyb není v této úloze zastoupena. Příčiny těchto chyb mohou být různého charakteru, nejvíce se však přikláním k možnosti, že chyby vznikly nesoustředěním respondentů. Za další možnou příčinu se dá považovat zadání, které může být pro řadu studentů komplikovanější, jelikož se proti sobě pohybují dva vlaky, je složitější se zorientovat v tom, odkud který vlak jede, tudíž srozumitelnost zadání může být ovlivňujícím



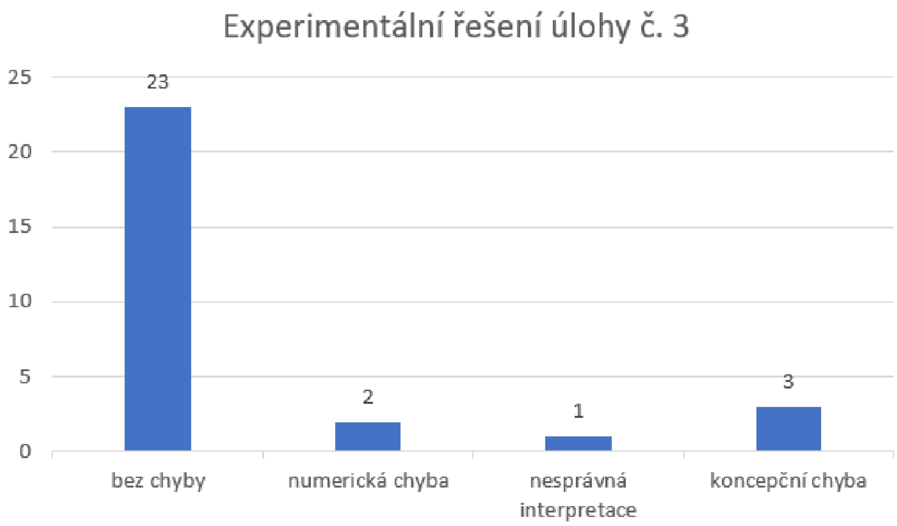
faktorem.

Graf 3

Algebraické řešení úlohy č. 2 zastoupení žáků v kategoriích chyb

6.4.2 Chyby v řešení úlohy č. 3

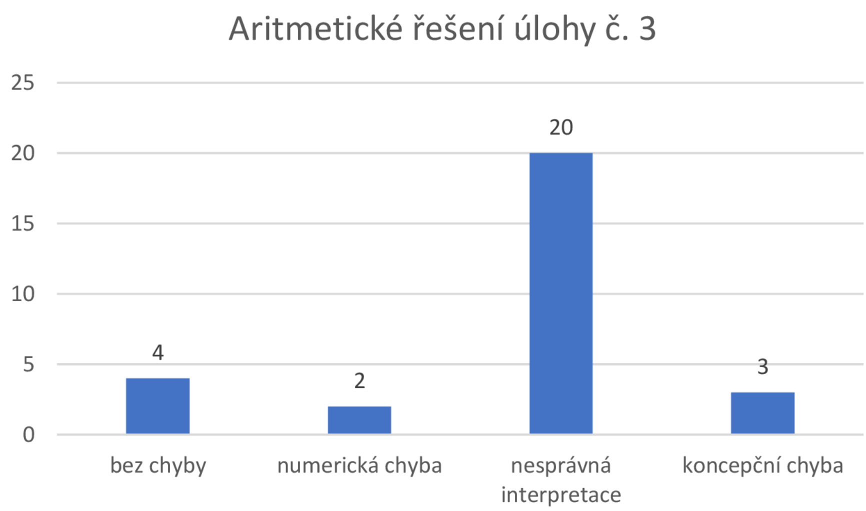
Analýza zabývající se chybami v řešení třetí úlohy v podání žáků tvoří další podkapitolu této práce. Graf 4 vytvořený pro experimentální řešení ukazuje, že v tomto typu řešení se vyskytly všechny tři kategorie chyb. Nejprve však je potřeba zmínit, že 23 respondentů vyřešilo úlohu bezchybně. Do druhé kategorie, tedy kategorie numerických chyb, patří dvě žákovské práce, ve kterých byla chybně určena rychlost daného studenta na kole. Příčinu této chyby můžeme vidět ve srozumitelnosti zadání, které může být pro žáky již komplikovanější. Jelikož zde není přesně vyjádřena rychlost, ale musí si jí žáci sami vyjádřit, můžeme to považovat za kritické místo při řešení. Interpretační chyba je zde zastoupena pouze v jedné práci, kdy je špatně vyjádřen čas, ve který musí oba studenti vyrazit.



Graf 4

Experimentální řešení úlohy č. 3 zastoupení žáků v kategoriích chyb

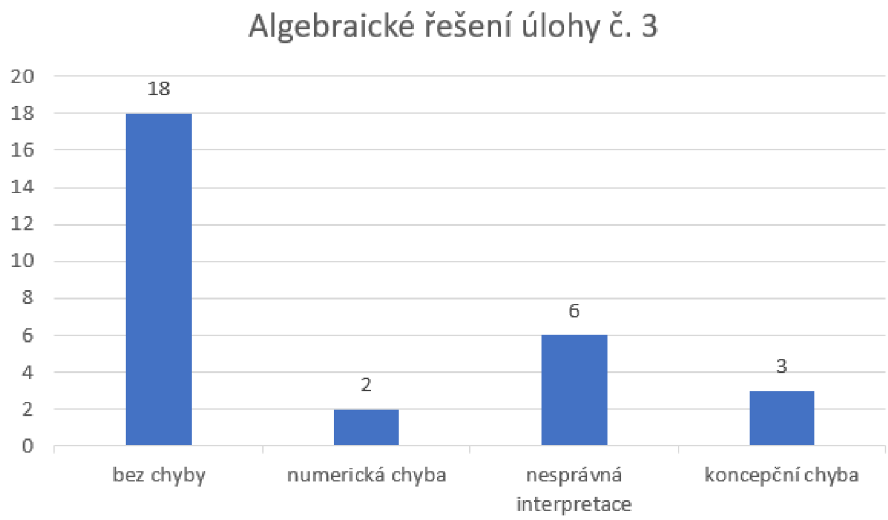
V aritmetickém řešení se zvýšil počet žáků s interpretační chybou, jelikož nebyly zodpovězeny všechny položené otázky. Za největší problém se dá považovat to, že žáci nedokážou slovně okomentovat a vysvětlit svůj postup, který je správný. Možnou příčinu můžeme vidět i v pořadí informací a položených otázek, protože pokyn k okomentování jejich postupu je zmíněn, až později u aritmetického výpočtu, tudíž ho nemuseli všichni studenti zaznamenat. Kategorie numerických chyb je zastoupena stále dvěma respondenty, kteří počítají s nesprávnou rychlostí studenta. Koncepční chyby se dopustili pouze dva žáci, kteří se nepokusili o toto řešení. Všechny tyto údaje ukazuje následující graf 5.



Graf 5

Aritmetické řešení úlohy č. 3 zastoupení žáků v kategoriích chyb

V algebraickém řešení je nejvíce zastoupena kategorie bezchybných řešení, následuje kategorie interpretačních chyb, které spočívají zejména v nedopočítání času, ve který musí oba studenti vyrazit. Příčina této chyby může být opět nesoustředěností respondentů nebo problematickým zadáním, které může být pro některé studenty delší a složitější na pochopení, protože je zde položeno víc otázek. Tři studenti patří do kategorie koncepčního řešení, protože se nepokouší o řešení této úlohy. Následující graf 6 zobrazuje zastoupení v jednotlivých kategoriích chyb.

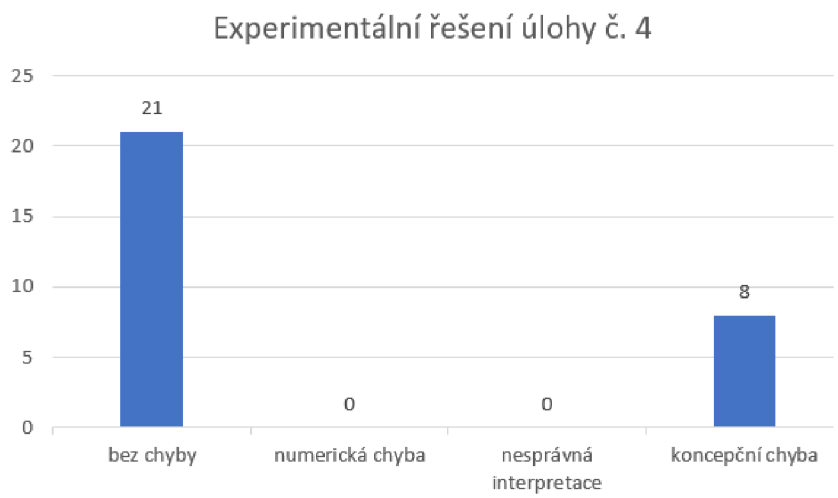


Graf 6

Algebraické řešení úlohy č. 3 zastoupení žáků v kategoriích chyb

6.4.3 Chyby v řešení úlohy č. 4

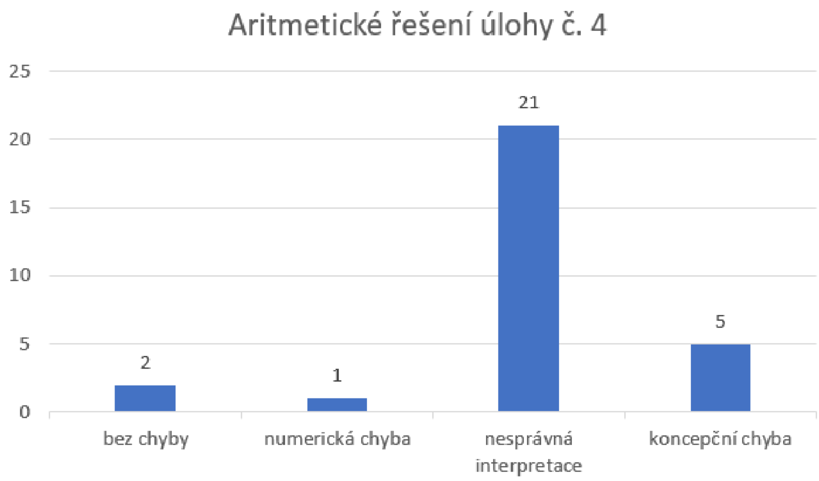
Chyby a jejich kategorizace čtvrté úlohy tvoří následující podkapitolu. V experimentálním řešení má největší zastoupení bezchybné řešení, další kategorie jako numerické chyby a nesprávná interpretace zde zastoupena není, avšak poslední kategorie chyb – koncepční chyby – jsou zastoupeny v osmi žákovských pracích. Tito respondenti nedokázali dojít k výsledku této úlohy. Příčin zde můžeme vidět hned několik, první možností je složitost zadání, které je nejdelší ze všech čtyř předložených úloh, proto nemusí všichni správně porozumět zadání. Další možnou příčinou mohou být nadbytečné informace, které jsou zde uváděny (informace ohledně vlivu větru na letící letadlo). Tyto údaje mohou zvyšovat složitost předložené úlohy. Další vliv na úspěšnost řešení může mít také pořadí uváděných informací. Následující graf 7 ukazuje zastoupení jednotlivých kategorií chyb u experimentálního řešení čtvrté úlohy.



Graf 7

Experimentální řešení úlohy č. 4 zastoupení žáků v kategoriích chyb

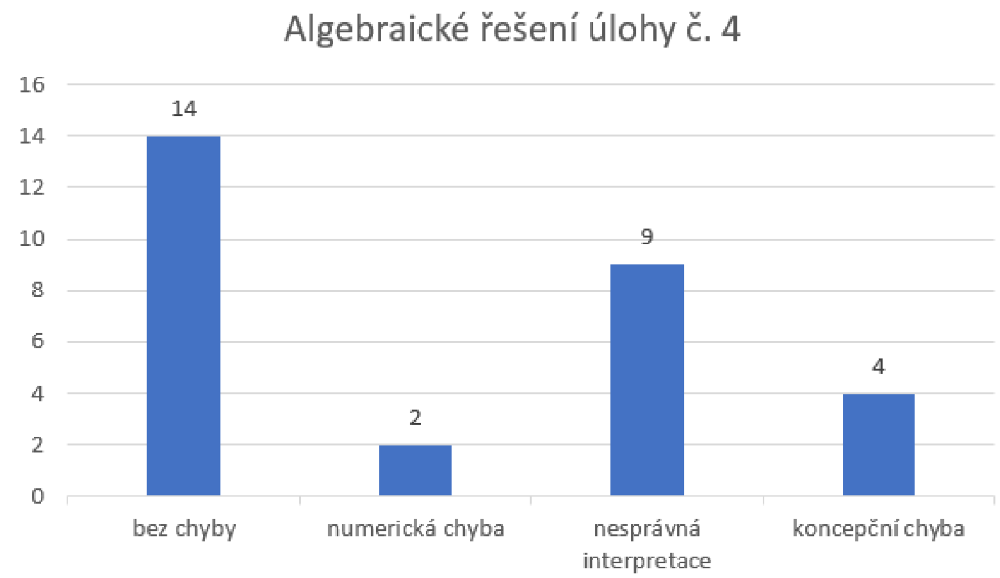
V aritmetickém řešení se objevily všechny kategorie stanovených chyb. Pouze dva respondenti zvládli toto řešení bezchybně, a to včetně komentáře k postupu. Druhá kategorie numerických chyb je zastoupena jedním respondentem, který si špatně stanovil velikost jednoho dílku v grafickém schématu. Tato chyba může být nejspíše způsobena nesoustředěností žáka. Největší zastoupení má kategorie nesprávné interpretace, která obsahuje všechny pracovní listy, které nebyly doplněny o slovní komentář k postupu. Příčiny jsou zde nejasné, avšak mohla by být skrytá příčina v tom, že se ve školním prostředí neklade velký důraz na slovní vysvětlování postupu řešení. Chyby koncepční jsou zde zastoupeny čtyřmi pracovními listy, kde nebyly tyto úlohy dopočítány. Graf 8 zobrazuje zastoupení v jednotlivých kategoriích.



Graf 8

Aritmetické řešení úlohy č. 4 zastoupení žáků v kategoriích chyb

Řešení pomocí algebraické strategie zobrazuje následující graf 9, kdy použití algebraického aparátu bylo ve 14 případech bezchybné, avšak dva respondenti patří do kategorie numerických chyb, jelikož špatně určili čas, který obě letadla poletí. Jedná se o chybu, která se stala z nepozornosti žáků, protože postup i konkrétní numerické údaje mají správné. Kategorie nesprávné interpretace je zastoupena devíti žáky, kteří nedopočítali vše potřebné k odpovědím na položené otázky. Příčina může být v délce textu, srozumitelnosti a nadbytečných informacích.



Graf 9

Algebraické řešení úlohy č. 4 zastoupení žáků v kategoriích chyb

7 DISKUSE

Pro vypracování této diplomové práce, která se zabývá alternativním řešením slovních úloh o pohybu dvou subjektů proti sobě, byla stanovena tato hlavní výzkumná otázka pro kvalitativní výzkum: Jsou žáci schopni aplikovat představenou experimentální, aritmetickou a algebraickou strategii v předložených úlohách o pohybu? K tomu byla vyslovena dílčí výzkumná otázka zabývající se chybami, které se v pracovních listech vyskytly. Konkrétně tedy: Jaké chyby se nejčastěji v řešení objevují?

Realizovaný výzkum ve škole ukázal, že tito vybraní žáci jsou schopni aplikovat představené strategie na jiné úlohy, které jim byly dány v pracovním listě. Pouze malá část ze získaných dat byla s chybou, která byla blíže kategorizována v předchozí kapitole. Za odpověď na dílčí výzkumnou otázku můžeme považovat tabulku 6, která zobrazuje kategorie chyb v jednotlivých strategiích řešení. Celkově se dá tedy říci, že tato výběrová skupina měla chyby z kategorie nesprávné interpretace, numerických chyb a koncepčních chyb.

Hlavní výzkumná otázka byla stanovena záměrně tak, aby navázala na výzkumy, které již byly realizovány. Konkrétně Vondrová se svým kolektivem (2022) vedla výzkum, který se týkal problematiky slovních úloh, které nebyly blíže specifikované tím, o jaký druh úloh se mělo jednat. Tudíž nepracovala s vybranými žáky, ale se všemi žáky ze třídy a s různým druhem slovních úloh. V mém realizovaném výzkumu, který měl za úkol zjištění, zda žáci dokážou aplikovat představené metody na jiné případy, jsem zvolila záměrně gymnázium, tedy výběrovou školu, z důvodu toho, že tamní žáci mají dokončené vzdělání základní školy. Jsou na stejné úrovni s probíranou látkou, tudíž i proto byl zvolen třetí ročník víceletého gymnázia. Typické chyby, které Vondrová (2022) popisovala ze svého realizovaného výzkumu, se potvrdily i v mém výzkumném šetření. Tudíž můžu souhlasit s tím, že slovní úlohy dělají žákům problémy a jsou tam typická úskalí pro neúspěch jako zadání slovní úlohy, délka či srozumitelnost textu. Podle vícero autorů a Verschaffela (2020) zároveň byly představeny různé strategie řešení, které je možné žákům předvést pro řešení slovních úloh. Na základě jeho členění jsem zkusila tyto metody aplikovat na slovní úlohy o pohybu proti sobě. Vzhledem k tomu, že tyto strategie byly ověřeny ve školním prostředí, můžeme říci, že je možné je používat i pro oblast slovních úloh o pohybu. K výzkumu vedený Budínovou (2018) můžeme vyjádřit souhlas se smyslem rozšiřování různých strategií řešení, jelikož se prokázalo, že žáci, kteří ovládají víc strategií řešení mohou zkusit úlohu řešit více způsoby, což jim může pomoci, jak k získání výsledku jakýmkoli způsobem výpočtu, tak k ověření nebo ušetření času.

Výzkum kvalitativního zaměření byl realizován pouze s jednou vybranou skupinou žáků z výběrové školy, což značně limituje zobecnění celého výzkumu. Pro důslednější a podrobnější zkoumání by bylo vhodné udělat výzkumné šetření s vícero skupinami z různých škol a analyzovat jejich výsledky nebo zároveň doplnit pracovní listy o rozhovory se žáky, kteří by mohli okomentovat jejich postupy. Dále by bylo možné připravit více úloh pro takovéto řešení nebo obohatit výzkum o další úlohy s pohybem obou subjektů stejným směrem.

Rozvíjení různých metod řešení slovních úloh o pohybu můžeme považovat za podnětné pro současné matematické vzdělávání. Můžeme tím umožnit řešit slovní úlohy těmi studenty, kteří mají obtíže při aplikování algebraického řešení. Zároveň tím můžeme podpořit jejich tvořivost, správný vhled do zadání úloh a v neposlední řadě diskusi o efektivnosti různých metod výpočtu. Takový rozvoj matematických dovedností můžeme realizovat představenými pracovními listy, které slouží k vysvětlení postupů řešení a k následnému zadání problémů, které mohou být řešeny různými způsoby. Cílíme tím na naplnění výstupů z RVP, které předpokládají, že studenti budou nejen řešit reálné situace pomocí rovnic a jejich soustav, tedy algebraicky, ale také kombinovat různé logické úsudky a nalézat různá řešení předkládaných situací.

8 ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zabývala alternativními řešeními matematických slovních úloh. V teoretickém zázemí celé práce byl nejprve definován pojem slovní úlohy, jeho ukotvení v Rámcově vzdělávacím programu pro základní školy. Dále byly popsány druhy slovních úloh, typy a fáze řešení, které byly blíže charakterizovány. Na tuto úvodní charakteristiku navázala podkapitola o typických chybách vyskytujících se při řešení slovních úloh a následně kapitola shrnující poznatky získané z doposud realizovaných výzkumů týkajících se slovních úloh. Na tuto úvodní teoretickou část navázalo výzkumné šetření, ve kterém byla analyzována data získaná z připravených pracovních listů, které byly zadány žákům prvního ročníku šestiletého gymnázia. Prokázalo se, že žáci dokážou řešit zadané úlohy představenými strategiemi řešení, avšak jejich řešení nebyla bezchybná a ukázala se místa, která činí žákům problémy. Nejčastěji šlo o chyby, které byly spojené s nesprávnou interpretací, ať už to byly špatné odpovědi nebo nezodpovězení položených otázek. Některé jiné chyby zejména numerické vznikly nejspíše z nesoustředěnosti žáků, anebo nedostatečnou znalostí předchozí látky. V několika případech se objevily i koncepční chyby, že žáci neporozuměli zadání a celou úlohu nebyli schopni vyřešit. Toto úskalí neporozumění zadání zmiňovala ve svém výzkumu Vondrová (2022), že je jedním z nejčastějších problematických míst. K určení příčin neúspěchu žákovských řešení by bylo možné realizovat rozhovory s respondenty, což by mohlo pomoci k bližší specifikaci problémů, se kterými se žáci potýkají. Tento výzkum by mohl být vzorem pro zpracování jiného druhu slovních úloh a alternativních metod řešení, neboť různé strategie řešení přináší žákům vyšší možnost úspěšného řešení a zároveň dávají větší volnost, tím pádem je to může motivovat a bavit. Studium literatury týkající se této problematiky posloužilo zejména pro lepší orientaci v celém kontextu studované oblasti, což mi pomohlo při vytváření slovních úloh do pracovního listu a zároveň to pro mě bylo velmi obohacující. To, že se prokázalo, že žáci dokážou řešit úlohy i jinými metodami, které jim dokážu představit, považuji za velmi přínosné pro moje budoucí učitelské povolání a zamyšlení nad možnými příčinami chybovosti je jednou z oblastí, nad kterou by měl učitel přemýšlet, když vyučuje. Měl by být schopen vysvětlit studovanou oblast různými způsoby, proto pevně věřím, že tyto nově získané znalosti a zkušenosti budu využívat ve své pedagogické praxi.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

Bidmanová, P., Pavlíčková, L. (2019). *Matematická čtenářská dovednost.* [Website]. Dostupné z https://kap.kr-jihomoravsky.cz/uploads/ckeditor/attachments/1/3_matematicka_ctenarska_gramotnost.pdf.

Blažková, R. Matematická gramotnost absolventů základní školy. In: Janík, Tomáš. *Absolvent základní školy: sborník z pracovního semináře konaného dne 20. – 21. června 2007 na Pedagogické fakultě MU*. (2007). Brno: Masarykova univerzita.

Blažková, R., Matoušková, K. (1993). *K problematice výuky řešení slovních úloh na základní škole*. In: Sborník prací PdF MU v Brně. Brno: Masarykova univerzita, s. 17-30.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M. (2002). *Kapitoly z didaktiky matematiky slovní úlohy, projekty*. Brno: Masarykova univerzita.

Břehovský, J., Eisenmann, P., Novotná, J. & Přibyl, J. (2015). Solving problems using experimental strategies. In Novotná, Jarmila & Moraová, Hana (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT ´15, Proceedings. Developing mathematical language and reasoning*, pp. 72-81. Praha: UK-PedF.

Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice.* Masarykova univerzita.

Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Státní pedagogické nakladatelství.

Fridman, L. M. (1980). Fridmanova teorie učebních úloh. In Mareš, J. *Fridmanova teorie učebních úloh.* Pedagogika.

Hejný, M. (1990). *Teoria vyučovania matematiky 2* (2. vyd). Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Helus, Z. (1979). *Psychologie školní úspěšnosti žáků.* Státní pedagogické nakladatelství.

Hendl, J. (2008). *Kvalitativní výzkum: základní teorie, metody a* aplikace (2., aktualiz. vyd). Portál.

Hruša, K. (1967) *Úvod do studia matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství.

Kalhous, Z., & Obst, O. (2002). *Školní didaktika*. Portál.

Kluvánek, I., Mišík, L., & Švec, M. (1971). *Matematika I: pre štúdium technických vied* (4. vyd). Alfa.

Komprsová, T. *Způsoby řešení vybraných slovních úloh rovnicového charakteru na 2. stupni základní školy*. Brno: Pedagogická fakulta Masarykovy Univerzity v Brně, 2020, 88 s. Diplomová závěrečná práce.

Kuchařová, L. *Přístupy k řešení slovních úloh z reálného života žáky základních škol a víceletých gymnázií.* Brno: Pedagogická fakulta Masarykovy Univerzity v Brně, 2018, 83 s. Diplomová závěrečná práce.

Kulič, V. (1971). *Chyba a učení: Funkce chybného výkonu v učení a v jeho řízení*. Státní pedagogické nakladatelství.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Státní pedagogické nakladatelství.

Květoň, P. (1982). *Kapitoly z didaktiky matematiky.* Ostrava: Pedagogická fakulta v Ostravě.

Malinová, E. (1983). *Didaktika matematiky na prvním stupni základní školy*. Univerzita Karlova.

Metodický portál RVP.CZ (2015, 9. října). Vzdělávací oblast – Matematika a její aplikace – úvod. https://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=10289.

Novotná, J. (2004). Zpracování informací při řešení slovních úloh. In: Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, s. 367–377.

Novotná, J., & Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Univerzita Karlova.

Odvárko, O. (1990). *Metody řešení matematických úloh*. Státní pedagogické nakladatelství.

Petty, G., & Foltýn, J. (2013). *Moderní vyučování* (Vyd. 6., rozš. a přeprac). Portál.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus.

Pólya, G., Conway, J. H., & Kowalski, O. (2016). *Jak to řešit? překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. MatfyzPress.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2017 [cit. 2022-04-15]. Dostupné z: https://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2017.pdf

Rendl, M., Vondrová N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben.* Bern: Universität Bern.

Skalková, J. (1999). *Obecná didaktika*. ISV.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). *Word problems in mathematics education*: a survey. ZDM, 52(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4.

Vondrová, N. (2022). *Matematická slovní úloha Mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Karolinum.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum.

Vondrová, N., & Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vyšín, J. (1962). *Metodická řešení matematických úloh*. Státní pedagogické nakladatelství.

Yin, R. K. (2003). Case study research: design and methods. Thousand Oaks: SAGE.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Vondrová, N. & Rendl, M.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků,* s. 319-400. Praha: Karolinum.

PŘÍLOHA

1. Mezi Hradcem Králové a Kuksem vede podél Labe známá stezka pro pěší a cyklisty, má délku 30 km. Ve stejný okamžik po ní proti sobě vyrazí z Kuksu chodec rychlostí 6 km/h a z Hradce cyklista rychlostí 24 km/h. Za jak dlouho a kde se setkají?

a) EXPERIMENT – Doplňte tabulku a vyřešte úlohu.

	30 minut	1 hodina
Chodec		
Cyklista		
Celkem km		

b) ARITMETICKÉ ŘEŠENÍ – Nakreslete schéma k řešení této úlohy.

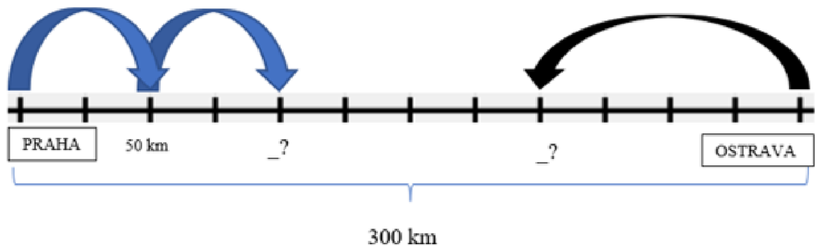
c) ALGEBRAICKÉ ŘEŠENÍ – Vaše výsledky můžete ověřit pomocí rovnice.

2. Mezi Prahou a Ostravou je to po železnici přibližně 300 km. Tuto vzdálenost jezdí Pendolino s průměrnou rychlostí 100 km/h a nákladní vlaky s průměrnou rychlostí 50 km/h. Za jak dlouho a kde se potká Pendolino jedoucí z Ostravy a nákladní vlak z Prahy, pokud vyrazí proti sobě současně?

a) EXPERIMENT – Doplňte chybějící údaje do tabulky a vyřešte tuto úlohu:

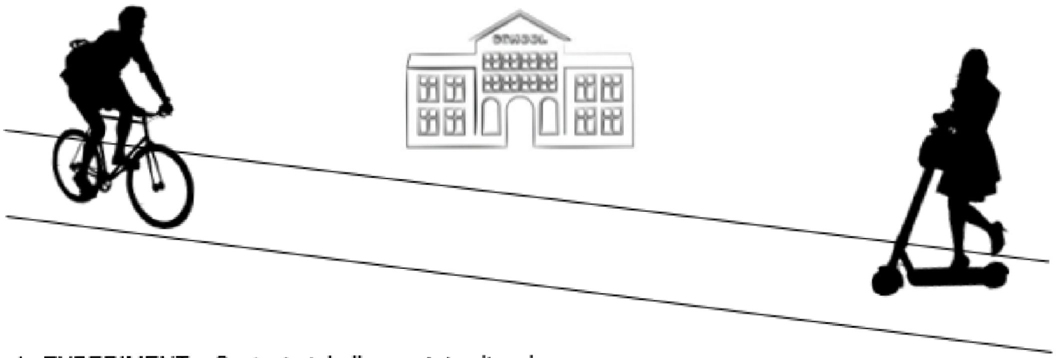
	30 minut	1 hodina	2 hodiny
Pendolino			
Nákladní vlak			
Celkem km			

b) ARITMETICKÉ ŘEŠENÍ – Dokreslete schéma a vyřešte úlohu.



c) ALGEBRAICKÉ ŘEŠENÍ – Ověřte své předchozí řešení pomocí rovnice.

3. Studentka jezdí každé ráno na gymnázium na koloběžce a jede průměrně 12 km/h. Student tam jezdí na kole a je o polovinu rychlejší než studentka. Vzdálenost mezi jejich bydlišti je 5 km, škola leží mezi nimi. Jak daleko od gymnázia bydlí studentka a jak daleko student, pokud ráno vyráží ve stejný čas a ke škole oba dorazí v 7:45? V kolik hodin musí vyjet z domova?



a) EXPERIMENT – Sestavte tabulku pro tuto situaci.

b) ARITMETICKÉ ŘEŠENÍ – Nakreslete schéma pro tuto úlohu.

Povedlo se? Jak vaše aritmetické řešení funguje? Vysvětlete.

c) ALGEBRAICKÉ ŘEŠENÍ – K ověření vašich výpočtů použijte řešení pomocí rovnice.

4. Z Ameriky do Evropy létají letadla rychleji než opačným směrem. Víte proč? Je to díky převažujícím západním větrům. Zkrátka letadlo letící z New Yorku do Bruselu má vítr v zádech, vůči zemi letí průměrně 960 km/h. V opačném směru letadlo letí proti větru, průměrně jen 840 km/h vůči zemi. Vzdálenost Bruselu a New Yorku je přibližně 6000 km. V jaké vzdálenosti od těchto měst by se potkala dvě letadla, kdyby vystartovala ve stejný čas proti sobě?

a) EXPERIMENT – Pomocí tabulky řešte tuto úlohu.

b) ARITMETICKÉ ŘEŠENÍ – Jaký je poměr jejich rychlostí? Vytvořte schéma pro tuto situaci. Jak toto řešení funguje?

c) ALGEBRAICKÉ ŘEŠENÍ – Pomocí rovnice si ověřte předchozí výpočty.