Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Sbírka úloh z matematiky inspirovaná historickými prameny

Vypracovala: Michaela Němečková
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Sbírka úloh z matematiky inspirovaná historickými prameny jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Michaela Němečková

Anotace

Práce přináší sbírku ukázkově řešených úloh inspirovaných historickými prameny. Předmětem výzkumu byly matematické učebnice, které vznikly v 17.-19. století. V práci je uveden jejich rozbor, který se skládá z informací o autorovi, popisu obsahu a zhodnocení pramene. Metoda, která byla aplikována při zkoumání pramenů, je znázorněna ve schématu a jednotlivé body postupu vytváření úloh jsou vysvětleny. Je připojen ukázkový příklad, na kterém je možné si tento postup vyzkoušet. Sbírka je sestavena z úloh, které se zabývají aplikací geometrických a trigonometrických poznatků při výpočtu pozemku, vzdáleností, hloubek a výšek objektů. U úloh je uvedeno řešení získané z pramenů, případně vlastní řešení a jsou připojeny ilustrační obrázky, zajímavosti a historické definice matematických pojmů. Řešení úloh je také zhotoveno v podobě GeoGebra apletů, ke kterým se lze dostat pomocí webového odkazu nebo QR kódu.

Abstract

This thesis shows a collection of exemplary solved exercises, inspired by historical sources. The focus of research were learning books for mathematics from the 17th to 19th century. In the thesis is an analysis about their author, their content and the source is being reviewed. The method, used to analyze the sources, is shown in the scheme and the steps in the making of the examples are explained. An example for the exercise is attached, on which the solution can be applied. The collection is made of exercises, which are made for tasks like, application of geometrical and trigonometrical functions by the calculation of estate, distance, depths and heights of objects. The exercises include the solution from the historical sources, alternatively own solution and illustration pictures are attached, together with interesting facts and historical definitions of mathematical terms. The solutions of the exercises are also made in the form of GeoGebra applets, which can be found with the links or QR code.

Poděkování

V první řadě bych chtěla poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a především věnovaný čas. Dále patří velké poděkování mé sestře, která je autorkou doplňujících obrázků v této práci. A v poslední řadě děkuji všem, kteří mi pomáhali ladit zadání úloh, aby bylo srozumitelné a jednoznačné.

Obsah

1 Úvod

Téma bakalářské práce jsem si zvolila na základě svého vysokoškolského studia. Studuji matematiku a historii na pedagogické fakultě a rozhodla jsem se oba obory propojit ve své práci. Mým cílem bylo vytvořit sbírku matematických úloh, jejichž zadání je inspirováno historickými prameny. Sbírka je určena především pro studenty základních (úlohy 4.1-4.4) a středních škol (úlohy 4.5-4.8), ale je vhodná také pro přípravu učitelů.

Ve škole se setkáváme s úlohami, jejichž zadání se objevuje v různých variantách a obměnách. Žák si osvojí řešení dané problematiky a při řešení obdobné úlohy ho pouze „překopíruje“. Když se pak setká s úlohou, jejíž zadání je typově odlišné, ukáže se, zda si s učivem osvojil i schopnost ho aplikovat. U složitějších úloh to může ukázat na žákův matematický talent. Proto je dobré těmto úlohám věnovat pozornost a hledat nevšední zadání. Zdrojem takových zadání mohou být historické prameny. Otázkami jejich vymezení a zpracování z hlediska cíle práce se zabývá kapitola 2.

Nejvhodnějšími prameny pro studium jsou matematické tisky, které mají vzdělávací charakter. Na základě tohoto kritéria byly vyhledávány matematické učebnice, učební příručky a časopisy. Po jejich kritickém zhodnocení byly zvoleny nejvhodnější prameny, které umožní naplnění stanoveného cíle. V kapitole 2 jsou uvedeny příklady uložení pramenů. Dále u vybraných pramenů provádím rozbor, který zahrnuje zjištěné informace o autorovi, stručný popis obsahu a hodnocení pramene.

Po selekci pramenů následuje jejich podrobné studium a interpretace zjištěných poznatků. Studium pramenů je poměrně náročná činnost a je důležité si najít efektivní metodu výzkumu, která povede k získání poznatků umožňujících dosažení vytyčeného cíle. V kapitole 3 uvádím postup, který jsem uplatnila při bádání, jehož jednotlivé kroky podrobněji komentuji. Připojila jsem rovněž příklad, na kterém si čtenář může práci badatele vyzkoušet. Ukázkový příklad zahrnuje úryvek z textu pramene, transkripční přepis úryvku a možnou formulaci zadání úlohy současným způsobem.

V kapitole 4 se nachází sbírka složená z úloh, jejichž zadání vzniklo díky poznatkům získaných odbornou rešerší pramenů. Úlohy se zabývají vyměřováním, zjišťováním vzdáleností mezi objekty a určováním výšky a hloubky objektů. Svým zaměřením patří úlohy do tematických oblastí planimetrie, funkčních vztahů a trigonometrie. Svou náročností pak úlohy pokrývají učivo základní (RVP ZV 2017) i střední školy (RVP G 2007). K úlohám je zpracováno řešení, které bylo uvedeno v pramenech, a případně vlastní řešení. Úlohy doplňuje „historické okénko, které obsahuje zajímavosti a historické definice matematických pojmů. Připojeny jsou ilustrující obrázky vytvořené v programu GeoGebra. Řešení je znázorněno také pomocí apletů vytvořených v GeoGebře, ke kterým se čtenář dostane pomocí webového odkazu nebo QR kódu. QR kód je užitečný především pro ty čtenáře, kteří mají v rukou tištěnou verzi práce, a díky němu se k apletu dostanou i bez přepisování odkazu do internetového vyhledávače.

2 Prameny jako zdroj inspirace

Podle Emila Bernheima se dá pramen definovat a vymezit v užším a širším pojetí. Širší pojetí pramene zahrnuje veškerý materiál, který může historie využít jako zdroj poznání. Užší vymezení pramene představuje pramen jako výsledek lidské činnosti, který je vhodný k poznání a rekonstrukci historických faktů (Hroch, 1985).

Za prameny lze proto považovat všechny dokumenty, které tu zanechali naši předchozí kolegové. Je pouze otázkou času, než se dnešním učebnicím bude také říkat „prameny“. Tato práce využívá matematické učebnice tak, jako byly využity u jiných kolegů v jejich pracích, s jediným rozdílem – jsou poměrně starší, hůře čitelné a náročnější na porozumění.

Prameny jsou uloženy především v knihovnách a archivech různých institucí. Mnoho pramenů je dokonce naskenováno a jsou dostupné na internetových stránkách. Například Národní knihovna spravuje internetový portál Kramerius (Kramerius), kde jsou zpřístupněny uživatelsky zajímavé a žádané historické dokumenty, a také portál Manuscriptorium (Manuscriptorium), kde se nachází digitalizované historické dokumenty. Pod záštitou Akademie věd ČR vznikl projekt České digitální matematické knihovny (DML-CZ), která zpřístupňuje českou odbornou matematickou literaturu. Nacházejí se zde monografie, sborníky, sbírky a časopisy, z nichž nejstarší datují svůj vznik do 2. poloviny 19. století.

Čím dále postupujeme do minulosti, tím více se zadání matematických úloh odlišuje od těch současných. Hledání nevšedních zadání bylo cílem bádání, a proto byly vybrány prameny, které jsou níže představeny. Svým vznikem spadají do 17.-19. století. V této době je převážná většina vědeckých děl psána v latinském nebo německém jazyce, avšak níže zmiňované prameny jsou psané česky. Latinsky a německy psané knihy jsou většinou určeny pro vědeckou a univerzitní komunitu, která nebyla příliš početná. Z toho důvodu vznikaly prameny v národním jazyce, jejichž záměrem bylo šířit matematické poznatky a vzdělávat širší spektrum české společnosti.

2.1 Knížka o měrách zemských a vysvětlení od kterého času míry a měření zemské v Království českém svůj začátek mají

Prvním pramenem je *Knížka o měrách zemských a vysvětlení od kterého času míry a měření zemské v Království českém svůj začátek mají* (Podolský, 1683) sepsaná v 17. století, jejímž autorem je Šimon Podolský z Podolí. Narodil se v roce 1562 a zemřel roku 1617. Podolský se vyučil zeměměřičem u Matouše Ornyse z Lindperka (Mikulčák, 2010) a poté se živil zhotovováním map šlechtických panství, například i panství Petra Voka z Rožmberka. Od roku 1597 působil jako správce pražského orloje a od roku 1599 jako královský zemský geometr. Své dílo *O měrách zemských* dokončil už v roce 1617, ale protože byl evangelík, bylo jeho dílo vydáno až v roce 1683 (Mikulčák, 2010).

Název samotné příručky napovídá o jejím obsahu. Podolského dílo se věnuje vývoji a proměnám měrných jednotek v Království českém. Toto dílo je strukturované od obecného úvodu po konkrétní problematiku, na kterou chce autor upozornit. Na tento problém, totiž na škodné a špatné užívání měr, autor nepřímo upozorňuje v textu celého díla, avšak vyslovuje ho až v poslední kapitole. Své tvrzení opírá o svědectví v Bibli nebo odkazuje na Hájkovu Kroniku českou. Připojuji poslední větu, kterou se se čtenářem loučí: „*Pán Bůh tomu své požehnání dáti rač, tak aby k mnohému prospěchu k zachování svornosti, lásky a spravedlnosti všem věrným Čechům jednoho práva i míry užívajícím touto skrovnou práci poslouženo býti mohlo*." (Podolský, 1683, s. 26)

Podolský tuto příručku sepsal především proto, že žádná příručka pro zeměměřiče v českých zemích neexistovala. Bylo nutné upozornit na problémy, které v těchto zemích neustále přetrvávaly a nikdo nebyl schopen je vyřešit. Největším problémem bylo užívání rozdílných měrných soustav. Dalo by se říct co kraj, to jiná měrná soustava. Docházelo k úmyslnému či neúmyslnému škodnému užívání měr a k hrubým chybám ve výpočtu obsahu plochy. Je nutné podotknout, že se jedná o první česky psanou příručku, čímž byla dostupná pro větší počet uživatelů. Tím se mohly její myšlenky rychleji šířit a napravit potřebné nedostatky.

2.2 Gruntovní počátek matematického umění (Geometria practica, trigonometria plana stereometria)

Dalším pramenem, který pro svou práci využívám, je dílo *Gruntovní počátek matematického umění* (Veselý, 1734) Václava Josefa Veselého z Veselí. Narodil se roku 1683 a byl přísežným zemským mlynářem a geometrem a zemřel roku 1736 (Mikulčák, 2010). Své dílo *Gruntovní počátek matematického umění* vydal v roce 1734.

Gruntovní počátek matematického umění je učebnice pro měřiče, a od toho se také odvíjí její obsah. Oproti předchozí příručce je značně obsáhlejší a propracovanější. Dílo je rozděleno na část teoretickou a praktickou. Nejprve se autor věnuje teoretickým poznatkům, které jsou nezbytné pro zvládnutí aplikačních úloh. Veselý uvádí stručné definice matematických pojmů a vztahů. Přínosné pro české čtenáře jsou latinské termíny, které jsou vysvětleny česky. V praktické části představuje autor reálné problémy, se kterými se může měřič setkat, a nastiňuje jejich řešení.

Veselý využil pro svou práci knihu J. C. Stahla z roku 1687, z které převzal a přeložil celé pasáže (Mikulčák, 2010). Z tohoto důvodu není jeho práce tolik významná a přínosná. Avšak můžeme zaznamenat, že přináší určitý posun ve vývoji odborné matematické terminologie. Můžeme vidět náznaky a tendence odborné názvosloví vytvářet a šířit ho obšírněji ve společnosti.

2.3 Základové měřictví čili Geometrie

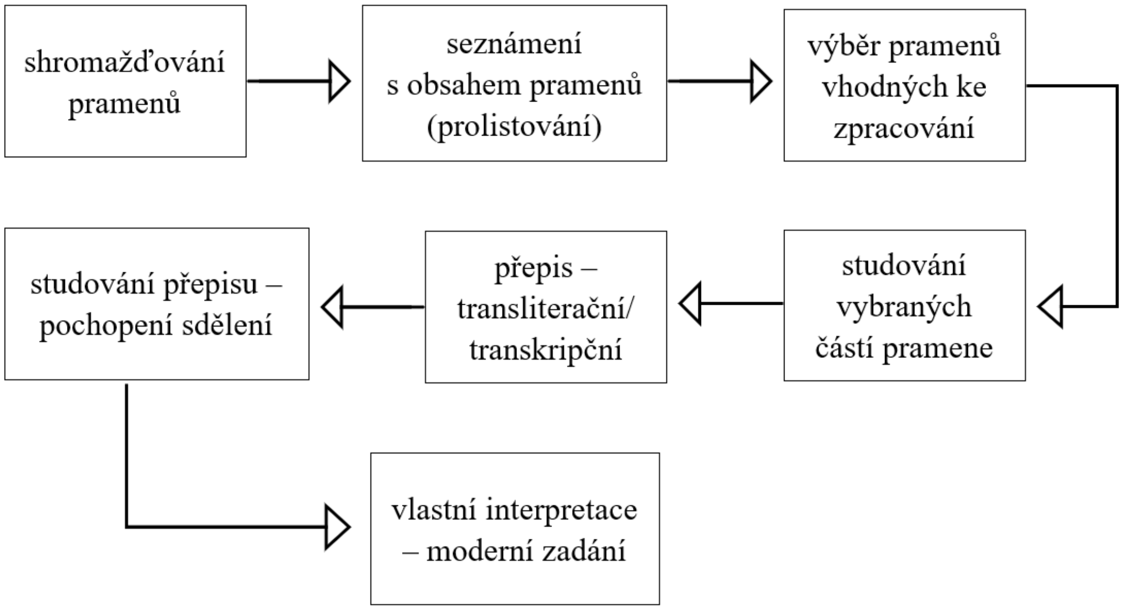
Třetím a posledním pramenem, který jsem pro svou práci využila, je vědecký spis vydaný roku 1822 Josefem Vojtěchem Sedláčkem. Tento kněz řádu premonstrátů se společně se Stanislavem Vydrou zasloužil o položení základů české matematické terminologie (Fuchs, Bečvář, 2001). Narodil se 24. 2. 1785 v Čelákovicích, kde také nastoupil do školy (Mikulčák, 2010). Školu musel opustit, když mu byl 11, protože jeho otec zemřel a on musel zabezpečit rodinu. Začal se učit řemeslu, ale byl velmi nadaný, a proto byl poslán dál na studia. Od roku 1798 navštěvoval gymnázium na Malé Straně v Praze a roku 1804 pokračoval dále studiem na pražské univerzitě (Fuchs, Bečvář, 2001). Zde se setkal s profesorem matematiky Janderou a zkoušku z filosofie a náboženství vykonal u Bernarda Bolzana. Mezi lety 1807-1810 se zabýval matematickými, fyzikálními a jazykozpytnými spisy v klášteře v Teplé (zde je dochována i kniha *Gruntovní počátek* *matematického umění* od Veselého). Po studiích se stal profesorem na filosofickém ústavu v Plzni, kde působil jako učitel matematiky a později i řečtiny a latinské filologie. Od roku 1817 zde přednášel čtyři hodiny týdně češtinu. Setkal se prostřednictvím Antonína Jaroslava Puchmajera s českými vlastenci, kteří ovlivnili jeho pozdější působení. Díky němu vznikla v Plzni normální škola (Ottův slovník naučný, 2003), kde se vyučovalo náboženství a praktické vědomosti v národním jazyce, a v plzeňském divadle se hrály české hry (Fuchs, Bečvář, 2001). Dalším vědeckým spisem, který vyšel ve dvou svazcích, *je Základové přírodnictví nebo Fysiky a Matematiky potažné neboli smíšené* (Ottův slovník naučný, 2003). Mimo vědeckých děl psal také básně, projevy a spisy. Z nichž asi nejznámější jsou *Citové Čechů, Na Plzeň* nebo *Vlastenec* (Fuchs, Bečvář, 2001).

Kniha *Základové měřictví čili Geometrie* (Sedláček, 1822) je obsáhlou publikací, která se skládá z pěti částí. Části jsou logicky řazeny a postupně prohlubují poznatky o praktickém využití geometrie. Publikace obsahuje řadu pojmů, u kterých jsou uvedeny jejich další česká synonyma, a také latinské i německé názvy. Definice a věty jsou doplněny důkazy a řadou příkladů, na nichž je učivo aplikováno. U příkladů je uvedeno jejich řešení, které autor zpravoval velmi podrobně a snaží se jej jednoduše vysvětlit. Nechybí ani odkazy na obrázky znázorňující zadání úloh. Obrázky se nachází na konci knihy za seznamem nejdůležitějších pojmů.

Myšlenkou knihy je zpřístupnit praktické znalosti v oblasti věd širší veřejnosti a položit základy české odborné terminologie. Sedláček není jediným autorem, který se o to ve svých dílech snaží. Dalšími takovými autory jsou Jan Svatopluk Presl (chemické názvosloví a terminologie), Magdalena Dobromila Rettigová (gastronomická terminologie), Antonín Jungmann (lékařská terminologie) a mnoho dalších osobností národního obrození (Macura, 2015). Mnoho Sedláčkových pojmů (např. velikost, sčítání, bod, kolmice, vrchol, výška, čtverec) se ujalo a používá dodnes, což svědčí o významu tohoto díla. Struktura a členění práce je podobná dnešním učebnicím, z čehož můžeme usuzovat, že byla vzorem a inspirací pro další generace.

3 Postup vytváření úloh

Práce s historickými prameny je poměrně obtížná a je důležité si najít postup, který je efektivní. Po prostudování značné části pramenů představených v kapitole 2 jsem si takový postup osvojila a v této kapitole bych ho chtěla čtenáři představit. Postup a jeho body jsou zaznamenány ve schématu na obrázku 1. 1 níže. Jednotlivé kroky jsou podrobněji okomentovány a celý postup si může čtenář vyzkoušet na ukázkovém příkladě.



Obrázek 1. 1: Schéma postupu práce

Shromažďování pramenů – V první řadě vyhledáme a shromáždíme prameny, které by mohly být vhodné pro zpracování zadaného tématu práce. Prameny vyhledáváme podle zvoleného klíče – např. učebnice matematiky, do roku 1945, česky psané, s tématem trigonometrie.

Seznámení s obsahem pramenů – V této fázi si letmo projdeme pramen. Není nutné ho studovat důkladně, ale alespoň natolik, abychom zjistili, zda obsahuje hledané skutečnosti.

Výběr pramenů – Ze shromážděných materiálů si vybereme pouze ty, které jsou vhodné pro další zpracování.

Studování vybraných částí pramene – Podrobněji se seznámíme s částmi pramene, které jsou pro nás důležité – např. definice matematických pojmů, úlohy, metody řešení úloh.

Přepis – Pro snadnější práci s textem pramene je vhodné si jeho znění přepsat. Existují dva typy přepisů – transkripční a transliterační. Transliterace je přesný přepis textu z jednoho písma do druhého. U transkripce jde o přepis textu s ohledem na dnešní pravidla pravopisu.

Studování přepisu – Přepsaný text budeme studovat s cílem pochopit myšlenku, jednotlivé postupy a zvolené metody. Mě se osvědčilo si zadání znázornit pomocí náčrtku a postupně si do něj zaznamenávat jednotlivé kroky postupu, který autor uvádí.

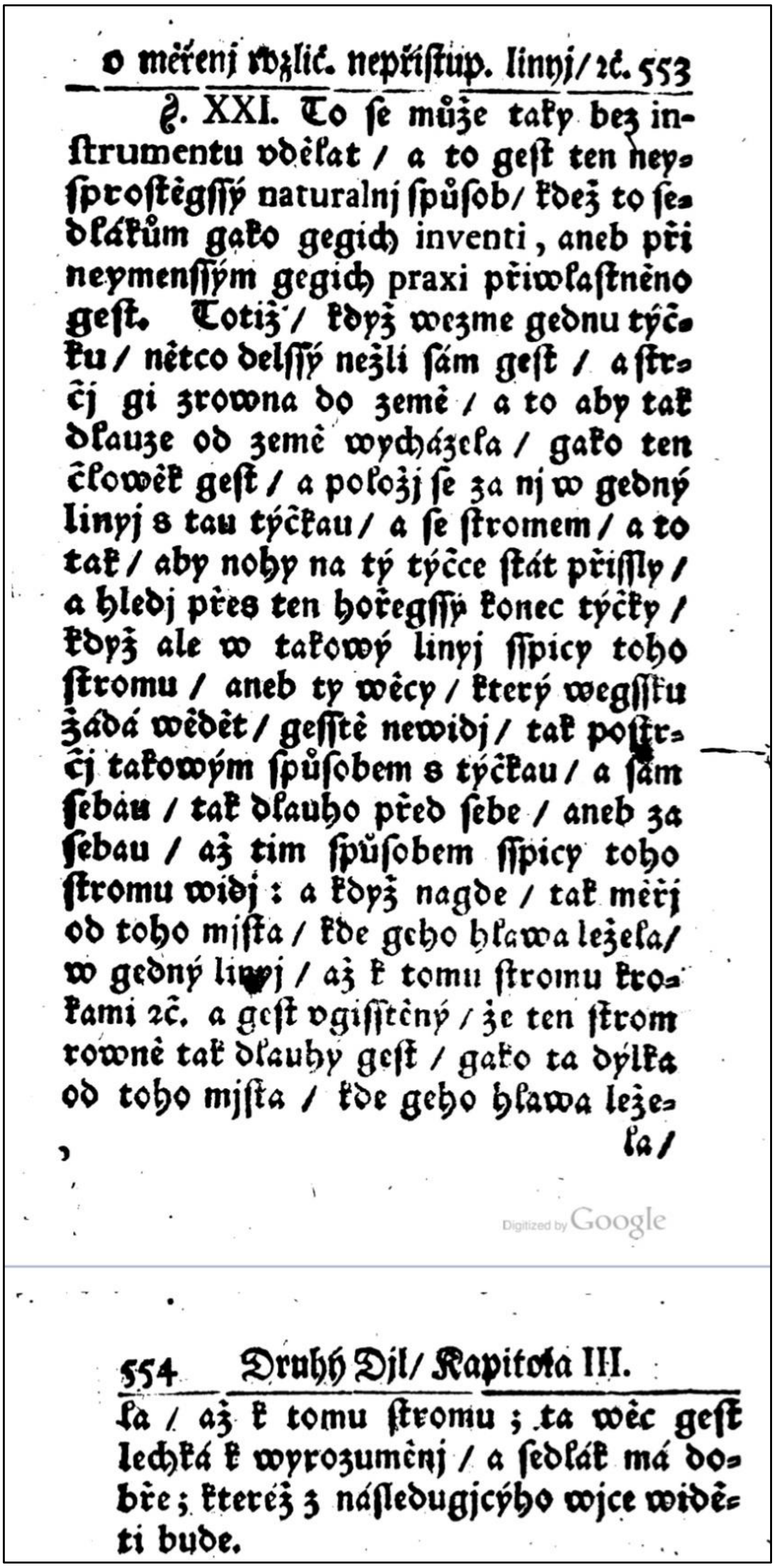
Vlastní interpretace – Následně využijeme osvojené informace k tvorbě vlastní formulace zadání úloh.

3.1 Ukázkový příklad

Úryvek textu pochází z učebnice Veselého (viz kapitola 2.2), který zde popisuje jednoduchý postup pro zjištění výšky nějakého objektu. Příklad je určen zejména pro ty uživatele, kteří nemají k dispozici měrné instrumenty. Veselý zmiňuje konkrétně sedláky nebo rolníky.

Pod úryvkem čtenář nalezne transkripční přepis uvedeného textu. Ten mu usnadní odhalení grafických pravidel, která platí pro psaní písmen v 18. století, a také poslouží jako kontrolní text pro čtenářův přepis. V závěru je pak uveden příklad zadání úlohy současným způsobem.

3.1.1 Úryvek textu pramene



o měřenj rozlič. nepřiſtup. linyj/ ꝛc. 553

§. XXI. To ſe může taky bez in-
ſtrumentu vdělat / a to geſt ten ney-
ſproſtěgſſý naturalnj ſpůſob/ kdež to ſe-
dlákům gako gegich inventi, aneb při
neymenſſým gegich praxi přiwlaſtněno
geſt. Totiž / když wezme gednu týč-
ku / něco delſſý nežli ſám geſt / a ſtr-
čj gi zrowna do země / a to aby tak
dlauze od země wycházela / gako ten
člowěk geſt / a položj ſe za nj w gedný
linyj s tau týčkau / a ſe ſtromem / a to
tak / aby nohy na tý týčce ſtát přiſſly /
a hledj přes ten hořegſſý konec týčky /
když ale w takowý linyj ſſpicy toho
ſtromu / aneb ty wěcy / který wegſſku
žádá wědět / geſſtě newidj / tak poſtr-
čj takowým ſpůſobem s týčkau / a ſám
ſebau / tak dlauho před ſebe / aneb za
ſebau / až tim ſpůſobem ſſpicy toho
ſtromu widj : a když nagde / tak měřj
od toho mjſta / kde geho hlawa ležela/
w gedný linyj / až k tomu ſtromu kro-
kami ꝛc. a geſt vgiſſtěný / že ten ſtrom
rowně tak dlauhy geſt / gako ta dýlka
od toho mjſta / kde geho hlawa leže-
la/

Digitized by Google

554 Druhý Djl/ Kapitola III.

la / až k tomu ſtromu ; ta wěc geſt
lechká k wyrozuměnj / a ſedlák má do-
bře ; kterež z náſledugjcýho wjce widě-
ti bude.

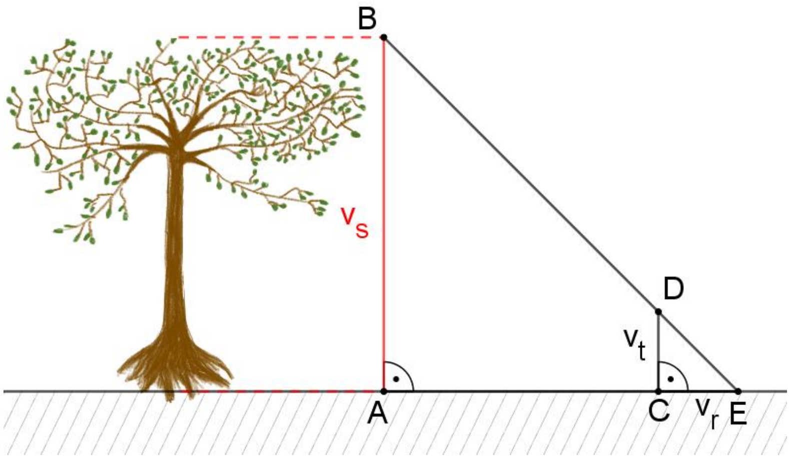
Obrázek 1. 2 (Veselý, 1734, s.553-554)

3.1.2 Transkripční přepis

Co se také může bez instrumentu udělat, a to jest ten nejsprostější naturální způsob. Kdež to sedlákům jako jejich inventi, aneb při nejmenším jejich praxi přivlastněno jest. Totiž, když vezme jednu tyčku, něco delší nežli sám jest, a strčí ji zrovna do země. A to, aby tak dlouze od země vycházela, jako ten člověk jest. A položí se za ni v jednu linii s tou tyčkou a se stromem a to tak, aby nohy na té tyčce stát přišly. A hledí se přes ten hořejší konec tyčky. Když ale v takový linii špici toho stromu, aneb věci, které výšku žádá vědět, ještě nevidí, tak postrčí takovým způsobem s tyčkou a sám sebou tak dlouho před sebe, aneb za sebou, až tím způsobem špici toho stromu vidí. A když najde, tak měří od toho místa, kde jeho hlava ležela, v jedné linii až k tomu stromu kroky *[?][1]. A jest ujištěný, že ten strom rovně tak dlouhý jest jako délka od toho místa, kde jeho hlava ležela až k tomu stromu. Ta věc jest lehká k vyrozumění a sedlák má dobře, kteréž z následujícího více viděti bude.*

3.1.3 Zadání

Rolník chce zjistit výšku stromu, který stojí na jeho pozemku. K dispozici má pouze tyčku, která je přibližně stejně vysoká jako on. Najde si vhodné místo a tyčku umístí do země tak, že z polohy v leže vidí současně špičku tyčky a stromu a jeho nohy se dotýkají tyčky. Jaká je výška stromu, jestliže rolník měří 187 cm a vzdálenost naměřená mezi stromem a tyčkou je 7 metrů?



Obrázek 1. 3: Znázornění zadání

[1] V hranatých závorkách se uvádí ty části textu, které nebyly čitelné.

4 Sbírka úloh

Sbírka se skládá z 8 úloh vytvořených pomocí postupu zmíněného v kapitole 3. Úlohy se zabývají vyměřováním pozemků, určováním vzdáleností mezi objekty, hledáním výšek a hloubek objektů. Na základě informací získaných studiem pramenů bylo zhotoveno řešení, které autor pramene uváděl. U některých úloh je uvedeno ještě druhé vlastní řešení. Úlohy obsahují „historické okénko“, kde jsou uvedeny zajímavosti a historické definice matematických pojmů. K úlohám jsou připojeny ilustrace a odkazy na aplety ve formě webového odkazu a QR kódu.

4.1 Výměra pozemku

4.1.1 Zadání

Pan Hynek Bořek Dohalský z Dohalic prodal r. 1651 panu Pertoldu Zárubovi z Hustiřan políčko k hospodaření ve vesnici Mokrovousy. Políčko je obdélníkovitého tvaru o rozměrech 1 a 2 provazce. Zeměměřič pana Hynka použil měrnou soustavu, kde je jeden provazec dlouhý 42 loktů. Avšak v kraji pana Pertolda se používá novější soustava, kde je jeden provazec dlouhý 52 loktů. Vypočítejte, jaký je rozdíl výměry tohoto pozemku. Kdo by se ošidil, kdyby se cena pozemku vypočítala podle soustavy pana Hynka.

https://www.geogebra.org/m/nz2naemk

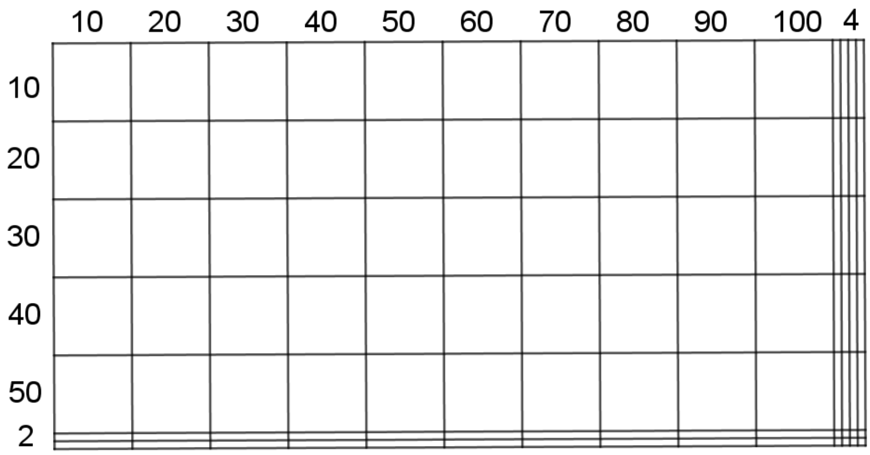
4.1.2 Řešení 1

Nyní si představíme řešení, které je zhotoveno podle postupu, který je demonstrován v Podolského příručce (viz kapitola 2.1). Políčko je obdélníkovitého tvaru s délkami stran a a b. Pro měrnou soustavu pana Hynka použijeme označení a_H a b_H a pro soustavu pana Pertolda a_P a b_P. Strana a je rovna délce jednoho provazce a strana b délce dvou provazců. Nyní si každou délku strany převedeme na lokte:

$a_H = 1 \text{ provazec} = 42 \text{ loktů}$ $a_P = 1 \text{ provazec} = 52 \text{ loktů}$

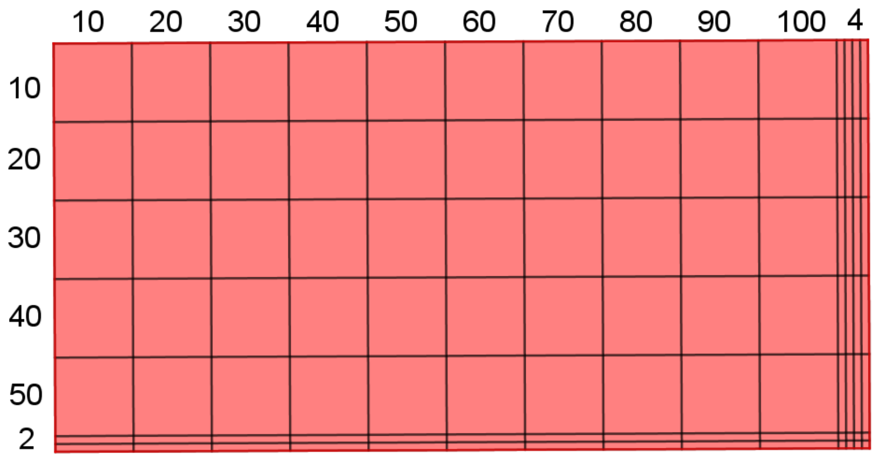
$b_H = 2 \text{ provazce} = 84 \text{ loktů}$ $b_P = 2 \text{ provazce} = 104 \text{ loktů.}$

Políčko si zakreslíme do čtvercové sítě s délkou 10 loktů na jednu stranu čtverce. Lokty, které nám zbydou, zakreslíme jako obdélníčky (viz obr. 2.1).



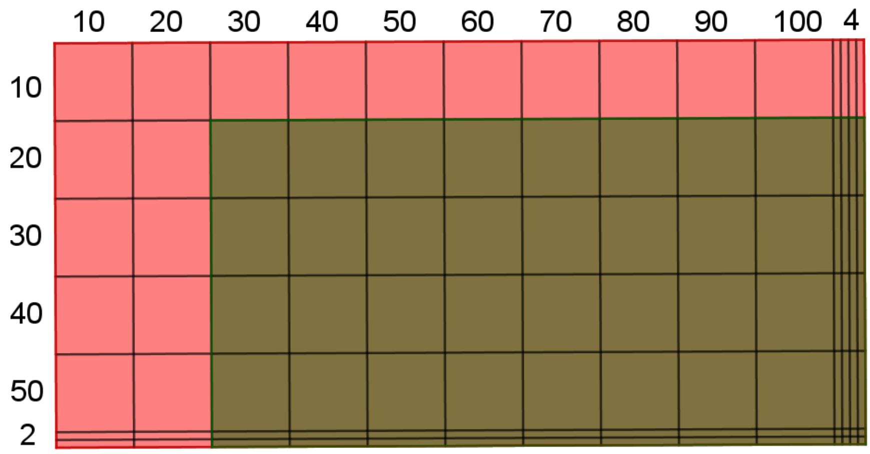
Obrázek 2. 1

Nejprve si nakreslíme políčko pro měrnou soustavu pana Pertolda, které je vybarveno červeně (viz obr. 2.2).



Obrázek 2. 2

Poté do téže sítě umístíme políčko vyměřené měřičem pana Hynka tak, že ho ukotvíme v pravém dolním rohu. Toto políčko si vybarvíme zeleně (viz obr. 2.3).



Obrázek 2. 3

Čtverce a obdélníčky, které zůstaly červené, dávají dohromady rozdíl výměry pozemku. Početně to provedeme tak, že sečteme obsahy všech těchto čtverců a obdélníčků. Což je 1880 loktů čtverečních. Z obrázku je patrné, že políčko vyměřené měřičem pana Pertolda je větší, tudíž i jeho cena bude vyšší. Cena políčka je stanovena na základě soustavy pana Hynka, tudíž cena bude nižší, než kterou by zaplatil pan Pertold, pokud by užil měrné soustavy svého zeměměřiče. Z toho usuzujeme, že se ošidil pan Hynek.

4.1.3 Řešení 2

Toto řešení znázorňuje postup, který by užil dnešní člověk znalý základů matematiky. Postup je u prvních dvou kroků stejný jako u přechozího řešení. Označíme si strany pro dvě měrné soustavy a převedeme jejich délku na lokte. Dále vypočteme obsahy obou políček pomocí vzorce:

$$S = a \cdot b$$

Pro políčko pana Hynka:

$$S_H = a_H \cdot b_H$$

Dosadíme

$$S_H = 42 \cdot 84 = 3\,528.$$

Pro políčko pana Pertolda:

$$S_P = a_P \cdot b_P$$

Dosadíme

$$S_P = 52 \cdot 104 = 5\,408.$$

Rozdíl výměry dostaneme odečtením menšího obsahu od většího:

$$S_P - S_H = 5\,408 - 3\,528 = 1\,880.$$

Dostáváme stejný výsledek jako v řešení 1 a to poté stejným způsobem vyhodnotíme.

4.1.4 Historické okénko

Zadání je inspirováno myšlenkou příručky Podolského a je zasazeno do historické události. Jména obou pánů jsou skutečná a daná koupě se skutečně uskutečnila roku 1651, avšak nešlo pouze o výše zmíněné políčko, nýbrž o celou vesnici Mokrovousy a přináležející statky (Ottův slovník naučný, 2003). Obec Mokrovousy leží v královehradeckém kraji.

V příručce je zmíněno staročeské přísloví, které říká: „*Prodej, dej zač dej, jen spravedlivou míru měj.*“

Loket je měrná jednotka délky, plochy i objemu. Pokud se jedná o délkovou jednotku hovoříme pouze o „loktu“. V souvislosti s plochou se jedná o „loket čtvereční“ a s objemem o „loket kubický“. Jak už bylo zmíněno obrovským problémem byla nejednotnost měr. To platí i pro loket, který byl na našem území definován mnoha rozdílnými délkami. V *Metrologické příručce pro Čechy, Moravu a Slezsko do zavedení metrické soustavy* je uvedeno dokonce 32 různých loktů (Hofmann, 1984).

4.1.5 Jak by to bylo dnes?

Dnes bychom zaplatili za m^2 v Mokrovousech 13,4 Kč.

Vezmeme v úvahu český loket, který má 59,27 cm.

Nyní si můžeme spočítat, o kolik korun bychom se mohli ošidit v dnešní době. Políčko by pana Hynka stálo 16 607, 46 Kč a pana Pertolda 25 457, 24 Kč. Pan Hynek by tedy prodělal 8 849, 78 Kč.

4.2 Hloubka studny

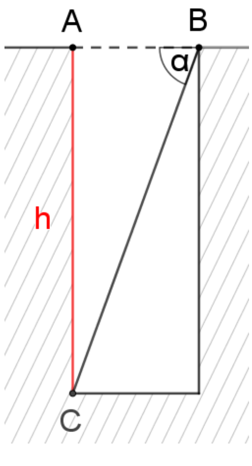
4.2.1 Zadání

Měřič má vypočítat hloubku studny. Ke studni přistoupí a změří si její otevření (průměr) a úhel, který svírá okraj otvoru studně s úsečkou vedoucí od okraje až ke dnu protější strany. Zjistil, že průměr otvoru studny je roven 1,5 m a patřičný úhel je velký 70°. Jak je studna hluboká?

https://www.geogebra.org/m/umkusqan

4.2.2 Náčrtek

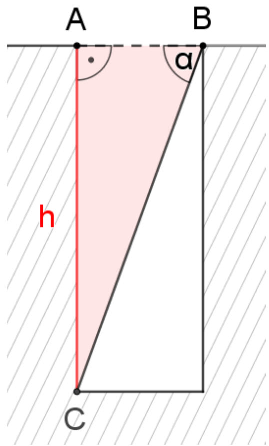
Pro lepší představu si zadání načrtneme. Průměr (otevření) studny si znázorníme jako úsečku *AB*. Písmenem *C* si označíme bod, ve kterém se dotýká dno se stěnou studny. Tímto bodem také prochází úsečka vedená z okraje studně. Příslušný naměřený úhel si označíme jako *α*. Hledanou hloubku studně si označíme *h*. Všechny tyto skutečnosti znázorňuje obr. 3.1 níže.



Obrázek 3. 1

4.2.3 Řešení

Po zhotovení náčrtku je patrné, že se tato úloha bude řešit pomocí goniometrických funkcí. V pravoúhlém trojúhelníku ABC leží pravý úhel při vrcholu A, tudíž je strana BC jeho přeponou a strany AC a AB jsou jeho odvěsnami (viz obr. 3.2).



Obrázek 3. 2

Na základě údajů, které máme k dispozici, si můžeme vybrat, zda použijeme funkci tangens nebo kotangens. Zvolíme si například funkci tangens. V pravoúhlém trojúhelníku je hodnota tangens úhlu definována jako poměr protilehlé a přilehlé odvěsny:

$$\tan \alpha = \frac{h}{|AB|}.$$

(více ke goniometrickým funkcím: Odvárko, Kadleček, 2004, s. 122-129.)

Vyjádříme si h:

$$h = \tan \alpha \cdot |AB|$$

Po dosazení dostáváme výslednou hodnotu:

$$h = \tan 70° \cdot 1{,}5$$

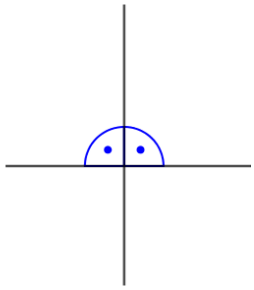
$$h \doteq 4{,}12\ m.$$

Měřič zjistil, že studna je hluboká přibližně 4,12 m.

4.2.4 Historické okénko

4.2.4.1 Pravý úhel

„*Když jedna rovná linie na druhou rovnou linii tak připadá, že dělá na obou stranách stejný kouty, tak jsou ty oba kouty rovný, aneb úhelný.*“ (Veselý, 1734, s. 17)

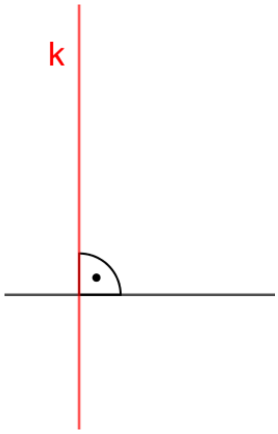


Obrázek 3. 3: Pravý úhel

4.2.4.2 Kolmá přímka

„*Přímka, která přímý úhel způsobuje, jmenuje se kolmá (kolmice, perpendicularis, závažní).*

Přímka kolmá jest, jenž na jiné tak stojí, že ani k jedné ani k druhé straně ni žádného naklonění nemá. A úhel přímý jest, jež dvě kolmé přímky působí.“ (Sedláček, 1822, s. 9)



Obrázek 3. 4: Kolmá přímka

4.2.4.3 Goniometrické funkce

přístava = sinus *styčná = tangens*

dostava = kosinus *dotyčná = kotangens*

(Sedláček, 1822, s.171)

4.3 Hloubka dolu

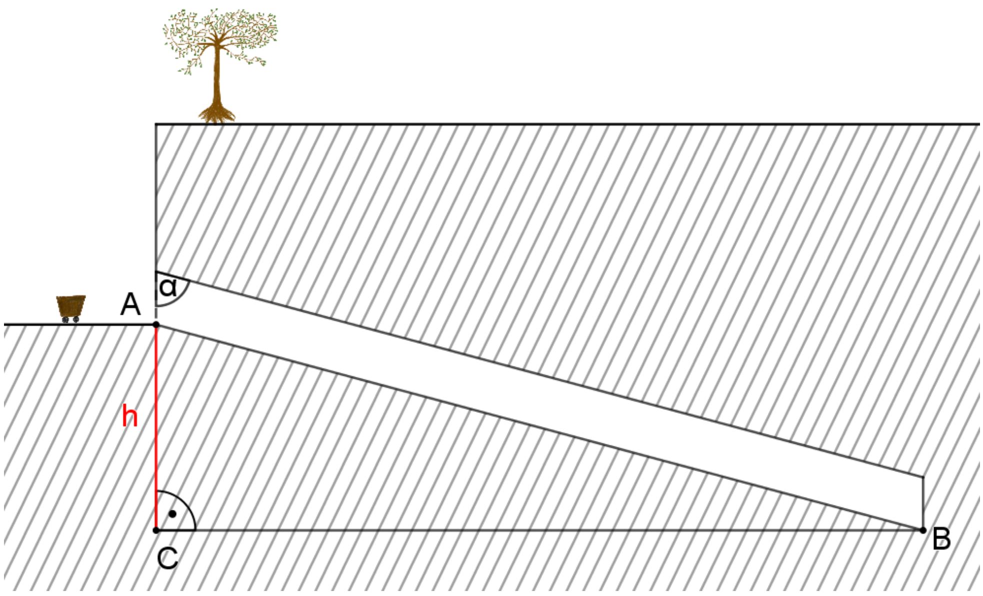
4.3.1 Zadání

Úkolem měřiče je vypočítat hloubku dolu. Předpokládáme, že štola dolu je vykopána pod stejným úhlem. Měřič použil šňůru, kterou natáhl přes celou délku štoly, a tím získal její délku. U vstupu do dolu zavěsil na strop provázek se závažím a změřil úhel mezi nimi. Kolik metrů pod zemí je nejhlubší část dolu, pokud naměřil délku štoly 150 m a úhel mezi stropem a provázkem 75°?

https://www.geogebra.org/m/xrp5rqby

4.3.2 Náčrtek

Situaci si načrtneme (viz obr. 4.1). Délka štoly je označena jako úsečka *AB*. Bod *A* je umístěn u vchodu do dolu. Úhel, který svírá strop se zavěšeným provázkem, se nazývá úhel α. Hledaná hloubka dolu *h* je velikost úsečky *AC*. Bod *C* je kolmý průmět bodu *A* do vodorovné roviny procházející nejnižším bodem štoly *B*.

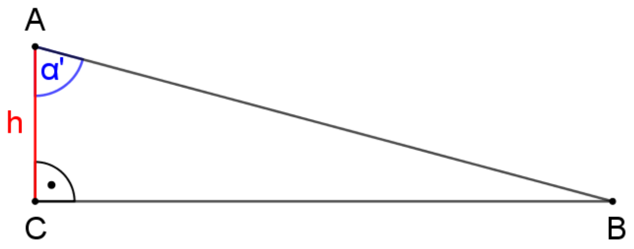


Obrázek 4. 1

4.3.3 Řešení

Z náčrtku je patrné, že se tento problém bude řešit pomocí trigonometrie. Strop a podlaha štoly jsou rovnoběžky. Tyto dvě rovnoběžky protíná třetí přímka, která prochází body *A* a C. Potom úhel CAB je totožný s úhlem α, jelikož se jedná o úhly souhlasné (více k souhlasným úhlům: Odvárko, Kadleček, 2004, s. 162.).

Trojúhelník ACB je pravoúhlý, jeho přeponou je strana AB a strany AC a CB jsou odvěsnami (viz obr. 4.2).



Obrázek 4. 2

Hodnota funkce kosinus je v tomto trojúhelníku definovaná jako poměr přilehlé odvěsny k přeponě:

$$\cos(\alpha') = \frac{h}{|AB|}$$

Vyjádříme si h:

$$h = \cos(\alpha') \cdot |AB|$$

a dosadíme příslušné hodnoty:

$$h = \cos 75° \cdot 150$$

$$h \doteq 38{,}82\ m.$$

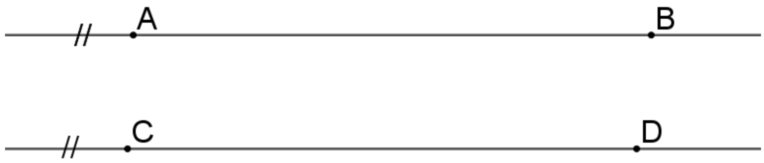
Nejhlubší část dolu se nachází přibližně 38,82 m pod povrchem země vzhledem ke vstupu do dolu.

4.3.4 Historické okénko

4.3.4.1 Rovnoběžné přímky

„Přímky rovnoběžné (parallelae) jsou přímky v též ploše položené, které, kdybychom je sobě v obrazotvornosti z obou stran třeba bezkonečně prodloužené představili, nikdy se

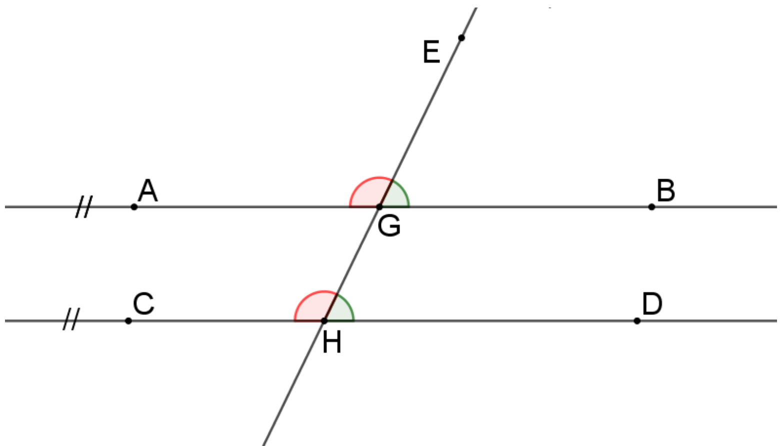
nesběhnou, žádný bod nemají pospolný. Znamení rovnoběžnosti jest ⋕. Např. přímka AB jest ⋕ k přímce CD.“ (Sedláček, 1822, s. 7)



Obrázek 4. 3: Rovnoběžné přímky

4.3.4.2 Souhlasné úhly

„*Úhlové, jenž na rovnoběžných přímkách třetí přímkou prořezaný uvnitř a zevnitř z též strany nadřečené třetí přímky povstanou, jmenují se vnitřní a zevnitřní protivný (exaequiternus et internus oppositus). Např. ∠EGB jest zevnitřní a jemu protivný vnitřní jest ∠DHG. Tak zase ∠CHG jest vnitřní a jemu protivný zevnitř jest ∠AGE atd.*“ (Sedláček, 1822, s. 10)



Obrázek 4. 4: Souhlasné úhly

4.4 Výška protějšího domu

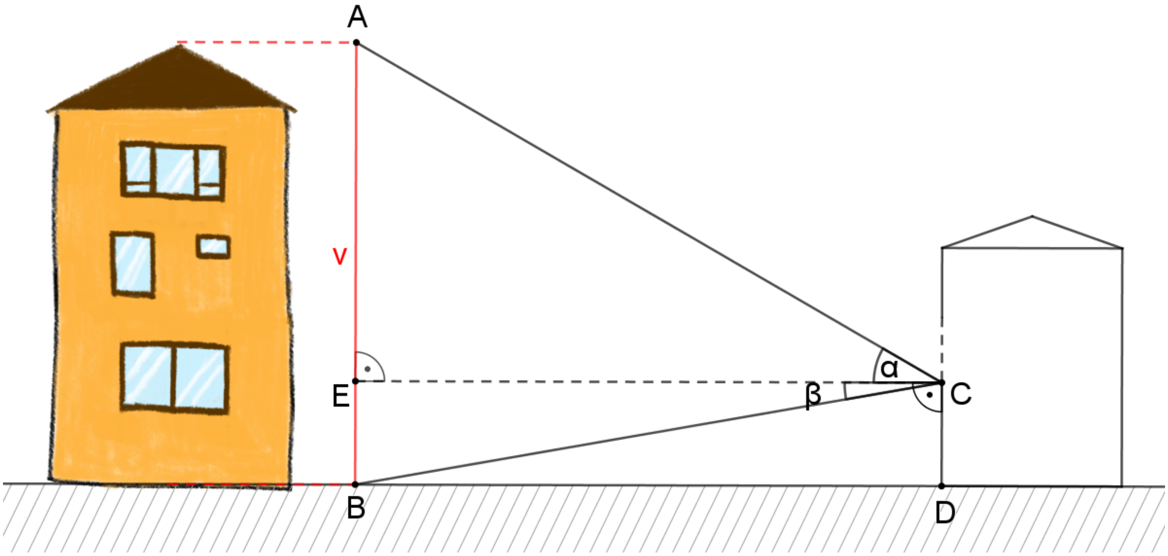
4.4.1 Zadání

Měřič chce zjistit výšku domu, který stojí naproti jeho domu. Svoji práci si chce ulehčit, a proto se rozhodl výšku vypočíst podle údajů zjištěných měřením z okna svého domu. Představí si kolmou linii, která vede od jeho okna na stěnu protějšího domu. Od této horizontální linie si změří dva úhly, úhel vedoucí ke špici domu a úhel vedoucí k zemi domu. První z těchto úhlů je velký 30° a druhý 10°. Okno, z kterého měří, je vzdáleno 4,11 metrů od země.

https://www.geogebra.org/m/xmnfef98

4.4.2 Náčrtek

V náčrtku (viz obr. 5.1) vidíme znázorněnou výchozí situaci. Pomyslná kolmá linie, kterou si měřic představil je úsečka *CE*. Prvním naměřeným úhlem o velikosti 30° je úhel α a druhým úhlem je β. Vzdálenost okna od země je rovna úsečce *CD*. Hledaná výška domu je v náčrtku označena červenou úsečkou *v*.



Obrázek 5. 1

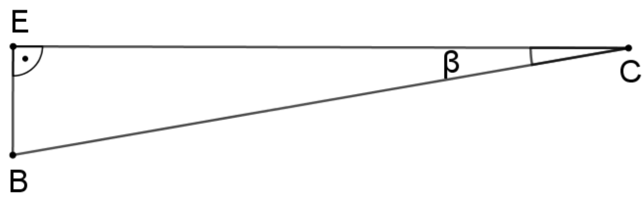
4.4.3 Řešení

Úsečka *BE* má stejnou velikost jako úsečka *CD*:

$$|BE| = |CD|$$

$$|BE| = 4{,}11\ m.$$

Pro výpočet velikosti strany *CE* v trojúhelníku *BCE* (viz obr. 5.2) využijeme funkci kotangens.



Obrázek 5. 2

Hodnota funkce kotangens je v pravoúhlém trojúhelníku definována jako poměr přilehlé odvěsny k protilehlé:

$$\cot \beta = \frac{|CE|}{|BE|},$$

vyjádříme si *CE:*

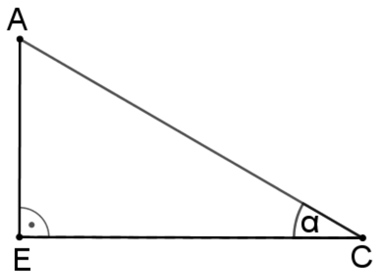
$$|CE| = \cot \beta \cdot |BE|.$$

Dosadíme zadané hodnoty:

$$|CE| = \cot(10°) \cdot 4{,}11$$

$$|CE| \doteq 23{,}31\ m.$$

Tímto způsobem budeme pokračovat i u trojúhelníku *ECA* (viz obr. 5.3).



Obrázek 5. 3

Můžeme využít tentokrát funkci tangens:

$$\tan \alpha = \frac{|AE|}{|EC|}.$$

Vyjádříme si *AE*:

$$|AE| = \tan \alpha \cdot |EC|,$$

dosadíme a dopočteme:

$$|AE| = \tan(30°) \cdot 23{,}31$$

$$|AE| \doteq 13{,}46\, m.$$

Velikost *v* úsečky *AB* se rovná součtu velikostí úseček *BE* a *AE*:

$$v = |BE| + |AE|$$

$$v = 4{,}11 + 13{,}46$$

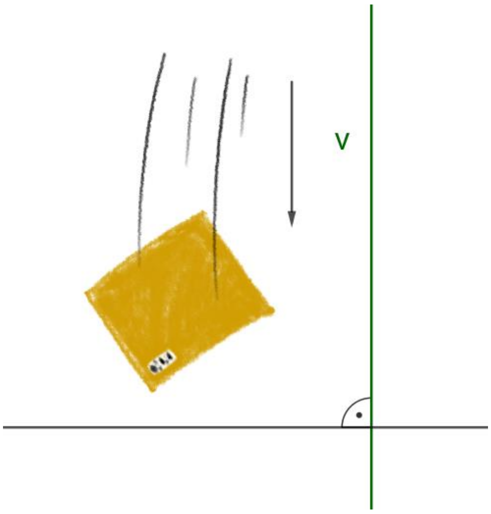
$$v = 17{,}57.$$

Výška protějšího domu je přibližně 17,57 m.

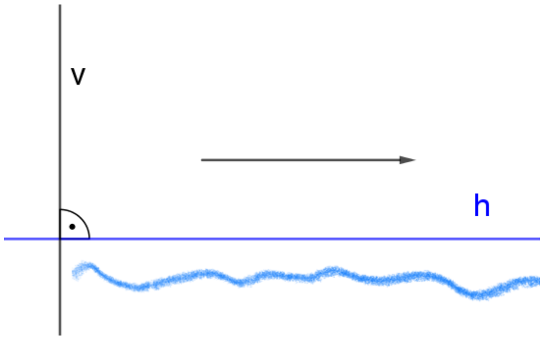
4.4.4 Historické okénko

4.4.4.1 Vertikální a horizontální přímka

„*V obyčejném životě nazývá se přímka, kterou opisuje tělo, jenž ve svobodném běhu z výšky na zem padá, přímka prostopádná (verticalis). Poněvadž ale tato prostopádná přímka, jak zkušenost učí, jest kolmo ku povrchnosti vody stojí. Jmenuje se přímka, jenž jest kolmá ku prostopádné, vodorovná (horizontalis)*." (Sedláček, 1822, s. 9)



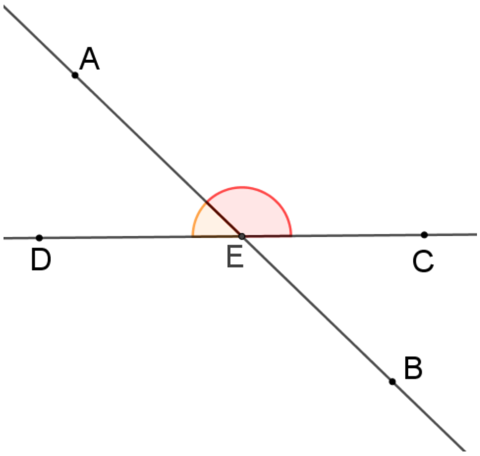
Obrázek 5. 4: Vertikální přímka



Obrázek 5. 5: Horizontální přímka

4.4.4.2 Vedlejší úhly

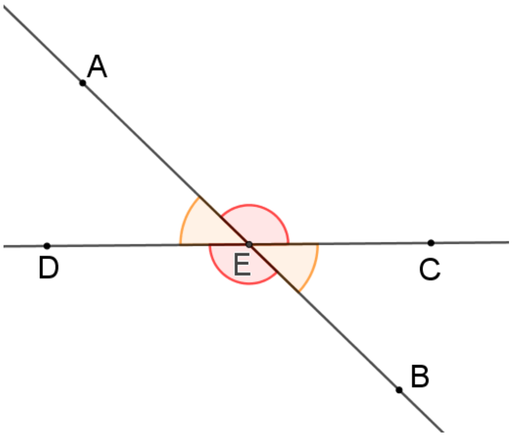
„*Úhlové sousední (deinceps positi) se jmenují ti dva úhlové, jenž povstanou na obojích stranách přímky, když ona se s některou jinou, ve kterémkoliv bodu sběhne neb řeže, k příkladu sousední úhlové jsou DEA a AEC, poněvadž se přímka AE, s přímkou DE sbíhá v bodu E.*“ (Sedláček, 1822, s. 8)



Obrázek 5. 6: Vedlejší úhly

4.4.4.3 Vrcholové úhly

„*Jestliže se obě ramena některého úhlů přes roh v jejich zamění prodlouží, jmenují se ti úhlové, jenž povstanou naprotivných stranách rohu neboli vrcholu, křížoví (verticales) úhlové. Např. ∠AED jest křížový úhel s ∠BEC. Pak ∠AEC jest křížový úhel s ∠DEB.*“ (Sedláček, 1822, s. 8)



Obrázek 5. 7: Vrcholové úhly

4.5 Vzdálenost kapličky a statku

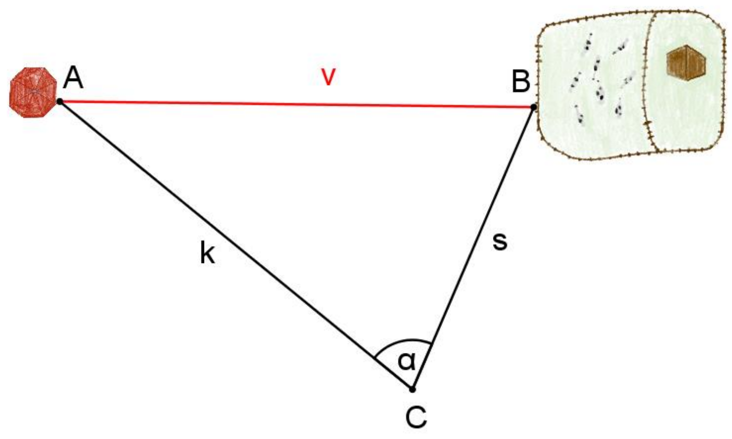
4.5.1 Zadání

Úkolem je zjistit vzdálenost mezi kapličkou a statkem. Měřič si najde místo v krajině, odkud vidí na oba objekty a změří si úhel, který svírají. Naměřil 74 stupňů. Poté si změří vzdálenost mezi tímto bodem a staveními. Kaplička je od tohoto bodu vzdálena 291 sáhů a statek je vzdálen 189 sáhů.

https://www.geogebra.org/m/z2afjkjf

4.5.2 Náčrtek

Kaplička je na obrázku 6.1 zobrazena jako bod *A*, statek je zobrazen jako bod *B*. Místo, které si měřič zvolil v krajině symbolizuje bod *C*. Vzdálenost *k* od bodu C ke kapličce je rovna velikosti úsečky *AC*, vzdálenost *s* ke statku je rovna velikosti úsečky *CB*. Hledaná vzdálenost *v* je velikost úsečky *AB*.

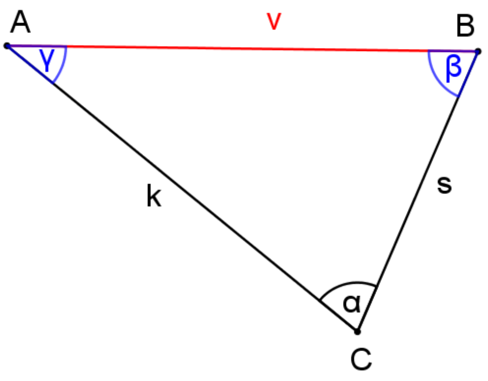


Obrázek 6. 1

4.5.3 Řešení 1

Pro získání úhlů β a γ (viz obr. 6.2) v trojúhelníku *ACB* využijeme tangentové věty:

$$\frac{k-s}{k+s}=\frac{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}.$$



Obrázek 6. 2

$$\frac{k-s}{k+s} \cdot \tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right),$$

vyjádříme si $\frac{\beta-\gamma}{2}$:

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{k-s}{k+s} \cdot \tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)$$

a rovnici vynásobíme číslem 2:

$$\beta-\gamma = \left[\tan^{-1}\left(\frac{k-s}{k+s} \cdot \tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)\right] \cdot 2 \tag{1}$$

Zjistíme si hodnotu výrazu $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Víme, že součet všech úhlů v obecném trojúhelníku je roven 180°:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180°.$$

Dosadíme hodnotu úhlu α a odečteme ji od obou stran rovnice:

$$\beta+\gamma = 106°.$$

Potom:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 53°.$$

Do rovnice (1) dosadíme hodnoty a dopočítáme:

$$\beta-\gamma = \left[\tan^{-1}\left(\frac{291-189}{291+189} \cdot \tan(53°)\right)\right] \cdot 2$$

$$\beta - \gamma \doteq 31{,}5° = 31°30'.$$

Pro úhly β a γ platí následující 2 rovnice:

$$\beta - \gamma = 31{,}5° \tag{2}$$

$$\beta + \gamma = 106°. \tag{3}$$

Z rovnice (3) si vyjádříme úhel β:

$$\beta = 106° - \gamma$$

a dosadíme do rovnice (2):

$$106° - \gamma - \gamma = 31{,}5°$$

$$-2\gamma = -74{,}5°.$$

Předchozí rovnici vynásobíme (-1):

$$2\gamma = 74{,}5°$$

a každou stranu vydělíme číslem 2:

$$\gamma = 37{,}25° = 37°15'.$$

Hodnotu úhlu γ dosadíme do rovnice (3) a dopočítáme hodnotu β:

$$\beta + 37{,}25° = 106°$$

$$\beta = 68{,}75° = 68°45'.$$

Velikost v strany AB vypočítáme pomocí sinové věty:

$$\frac{v}{k} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Vyjádříme si v:

$$v = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot k$$

a dosadíme:

$$v = \frac{\sin(74°)}{\sin(68{,}75°)} \cdot 291$$

$$v \doteq 300{,}13\ sáhů.$$

Kaplička a statek jsou vzdáleny zhruba 300, 13 sáhů.

4.5.4 Řešení 2

Velikost strany *v* v trojúhelníku *ACB* zjistíme pomocí kosinové věty:

$$v^2 = k^2 + s^2 - 2ks \cdot \cos\alpha.$$

Vyjádříme si *v*:

$$v = \sqrt{k^2 + s^2 - 2ks \cdot \cos\alpha}$$

Dosadíme hodnoty:

$$v = \sqrt{291^2 + 189^2 - 2 \cdot 291 \cdot 189 \cdot \cos(74°)}$$

$$v \doteq 300{,}14\ sáhů.$$

Kaplička je vzdálena přibližně 300,14 sáhů od statku.

4.5.5 Historické okénko

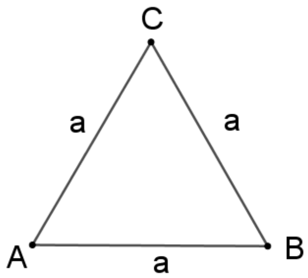
Sedláček ve své publikaci *Základové měřictví* (viz kapitola 2.3) používá jako jednotku délky sáh. Sáh je také jednotkou plochy a objemu, obdobně jako tomu je u lokte. Český sáh byl roven 3 loktům a přibližně 177,78 cm (Hofmann, 1984).

4.5.5.1 Trojúhelník

„*Trojúhelník (trojhraník, triangulum) jest plocha třemi stranami obmezená*." (Sedláček, 1822, s. 10)

4.5.5.2 Rovnostranný trojúhelník

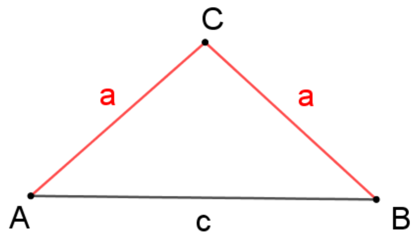
„*Trojúhelník stejnostranný (aequilaterum) jest, jehož všechny strany mezi sebou stejné jsou.*" (Sedláček, 1822, s.10)



Obrázek 6. 3: Rovnostranný trojúhelník

4.5.5.3 Rovnoramenný trojúhelník

„*Trojúhelník stejnoramenný (aequicrurum), jehož jen dvě strany stejné jsou*." (Sedláček, 1822, s. 10)



Obrázek 6. 4: Rovnoramenný trojúhelník

4.5.5.4 Obecný trojúhelník

„*Trojúhelník lichostranný (scalenum), jehož všechny tři strany mezi sebou nestejné*." (Sedláček, 1822, s. 10)

4.5.5.5 Trojúhelník kosoúhlý, tupoúhlý, ostroúhlý

„*Trojhraník kosoúhelný (obliquangulum), v němž žádný přímý úhel. Jmenovitě tříhraník tupoúhelný (obtusangulum), v němž jeden úhel tupý. Trojhraník ostroúhelný (acutangulum), v němž všichni tři úhlové jsou ostří*." (Sedláček, 1822, s. 11)

4.6 Výška majáku

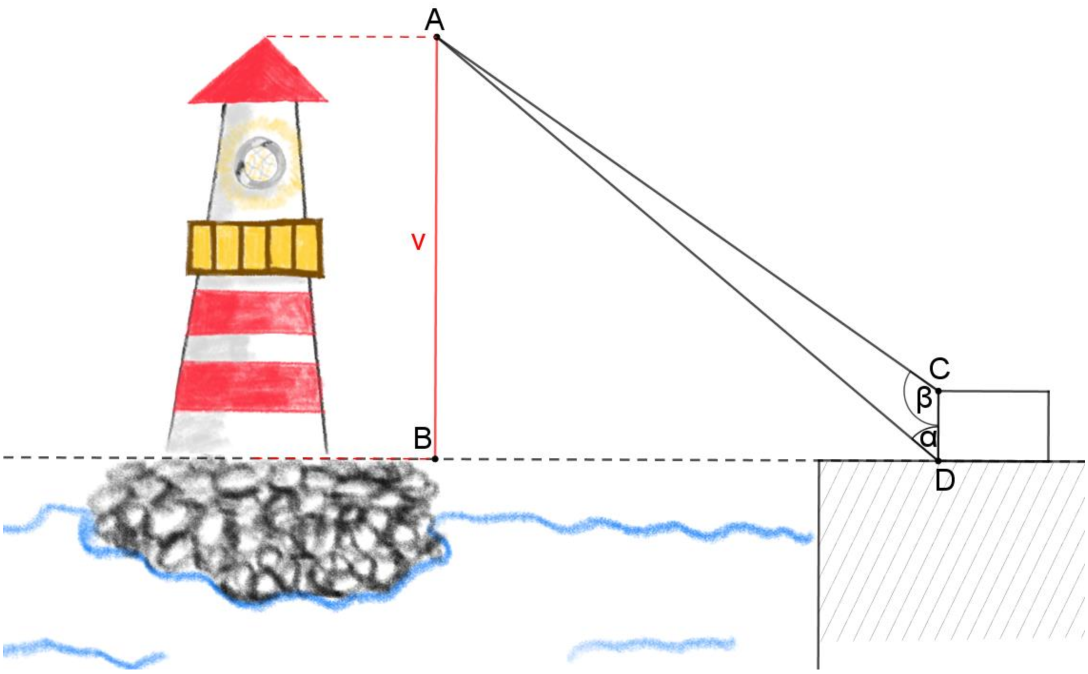
4.6.1 Zadání

Úkolem je změřit výšku majáku na skalnatém ostrůvku u pobřeží. Nejdříve si měřič najde nějaký objekt, jehož výšku zná nebo si ji může změřit. Příkladem může být rybářská bouda. Změří si dvakrát úhel mezi boudou a špicí majáku, nejprve od dolního rohu boudy a poté ze střechy boudy. U prvního z úhlů naměří 50° a u druhého 125°. Rybářská bouda je vysoká 3 metry. Předpokládáme že maják i rybářská bouda leží ve stejné nadmořské výšce.

https://www.geogebra.org/m/suj8nqp5

4.6.2 Náčrtek

Hledaná výška majáku *v* je na náčrtku (viz obr. 7.1) zobrazena jako úsečka *AB*. Úhel o velikosti 50° je zde označen řeckým písmenem α. Druhý z naměřených úhlů je označen β. Velikost úsečky *CD* je ve skutečnosti výška rybářské boudy. Body *D* a *B* leží ve stejné nadmořské výšce a prochází jimi přímka, která je kolmá na boudu i maják.



Obrázek 7. 1

4.6.3 Řešení

Nejprve si dopočítáme zbývající úhel γ v trojúhelníku *ADC*:

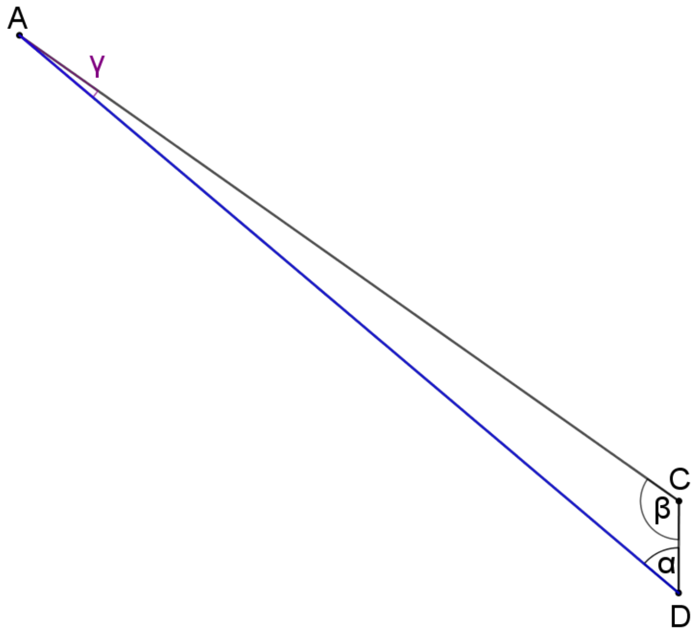
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180° - 50° - 125° = 5°.$$

Po dopočítání tohoto úhlu můžeme u trojúhelníku využít sinovou větu a tím si zjistit velikost strany *AD*, která je na obr. 7.2 znázorněna modře. Pro sinovou větu v trojúhelníku platí, že poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí příslušných protilehlých úhlů:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

(více k sinové větě: Polák, 1995, s. 397.)



Obrázek 7. 2

Dále si z rovnice vyjádříme stranu *AD*:

$$AD = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot |CD|$$

a dosadíme:

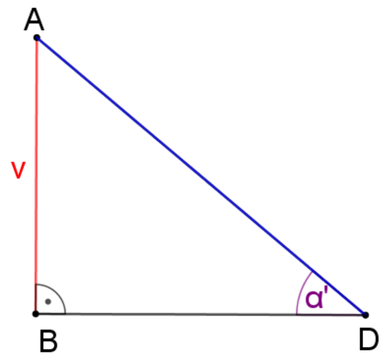
$$AD = \frac{\sin(50°)}{\sin(5°)} \cdot 3$$

$$AD \doteq 26{,}37\ m.$$

V dalším kroku využijeme trojúhelník *ABD* (viz obr. 7.3), ve kterém leží při vrcholu *B* pravý úhel. Úhel α' ležící při vrcholu *D* si dopočteme:

$$\alpha' = 90° - \alpha$$

$$\alpha' = 90° - 50° = 40°.$$



Obrázek 7. 3

Velikost *v* strany *AB* zjistíme pomocí hodnoty funkce sinus, která je rovna poměru protilehlé odvěsny k přeponě:

$$\sin \alpha' = \frac{v}{|AD|}.$$

Vyjádříme si *v*:

$$v = \sin \alpha' \cdot |AD|$$

a dosadíme příslušné hodnoty:

$$v = \sin(40°) \cdot 26{,}37$$

$$v \doteq 16{,}95\ m.$$

Maják je vysoký přibližně 16,95 m.

4.6.4 Úvaha o nadmořské výšce

U tohoto příkladu lze zhotovit jeho obměnu. Liší se od původního zadání rozšířenou úvahou o poloze rybářské boudy vůči majáku. V předchozím zadání se předpokládalo, že oba tyto objekty leží ve stejné nadmořské výšce. Nyní se budeme věnovat situaci, kdy se objekty v této ideální situaci nenacházejí.

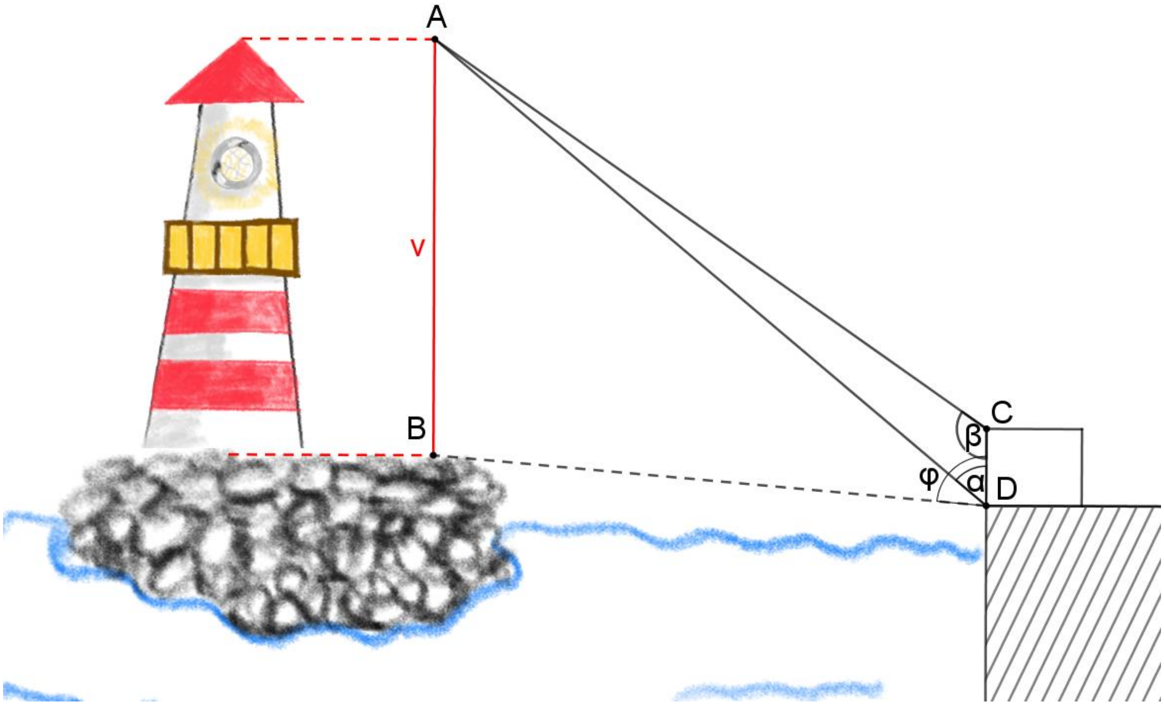
4.6.4.1 Zadání

Zadání je totožné s předchozím s jediným rozdílem, maják a bouda neleží ve stejné nadmořské výšce. Aby tento problém mohl měřič vyřešit, změří si ještě úhel mezi stěnou boudy a majákem. U tohoto úhlu naměří 85°.

https://www.geogebra.org/m/zktcyxnw

4.6.4.2 Náčrtek

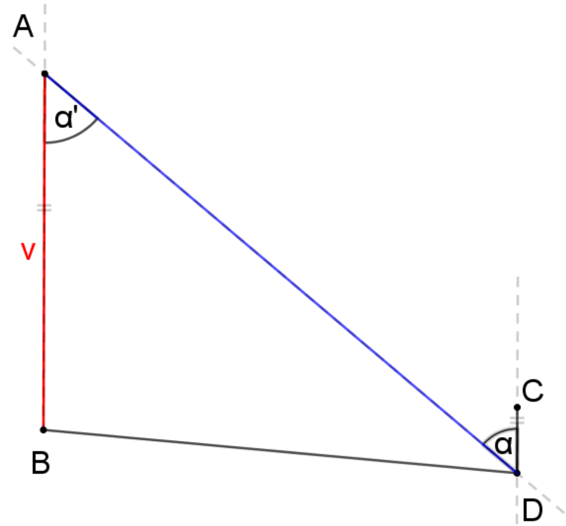
Náčrtek tohoto problému (viz obr. 7.4) je taktéž téměř totožný s předchozím. Změna nadmořské výšky ostrůvku vůči pevnině s majákem se promítne do náčrtku situace a přibude třetí naměřený úhel φ.



Obrázek 7. 4

4.6.4.3 Řešení

Postup řešení je totožný s předchozím do bodu, u kterého zjišťujeme velikost úsečky *AD*. Úsečky *AB*, *CD* a *AD* si prodloužíme v přímky a zjistíme, že *AB* a *CD* jsou rovnoběžné a protíná je přímka *AD*. Potom je ∢ *BAD* roven úhlu α (viz obr. 7.5).



Obrázek 7. 5

Úhel ε při vrcholu *D* si dopočítáme takto:

$$\varepsilon = \varphi - \alpha$$

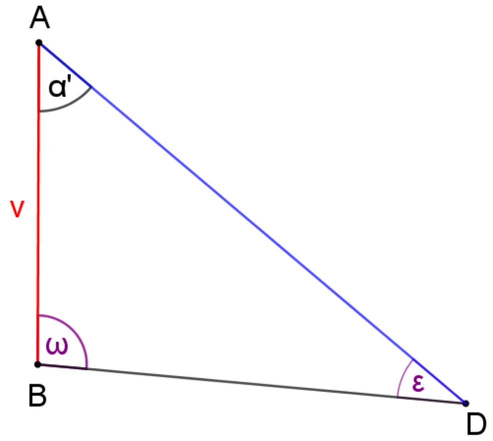
$$\varepsilon = 85° - 50° = 35°.$$

Zbývající úhel ω při vrcholu *B* zjistíme takto:

$$\omega = 180° - \alpha' - \varepsilon$$

$$\omega = 180° - 50° - 35° = 95°.$$

Nyní už máme všechny potřebné hodnoty k dopočtení velikosti strany *AB* pomocí sinové věty a trojúhelníku *ABD*. Následující obrázek 7.6 znázorňuje trojúhelník se všemi prvky, které máme k dispozici.



Obrázek 7. 6

Vhodnou dvojici úhlů a jejich protilehlých stran si zapíšeme do vztahu, který odpovídá sinové větě:

$$\frac{v}{|AD|} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \omega},$$

vyjádříme si *v:*

$$v = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \omega} \cdot |AD|$$

a dosadíme hodnoty:

$$v = \frac{\sin(35°)}{\sin(95°)} \cdot 26{,}37$$

$$v \doteq 15{,}18\, m.$$

Maják je vysoký zhruba 15,18 m.

4.6.5 Historické okénko

4.6.5.1 Shodnost trojúhelníků

„*Dva trojúhelníkové jsou shodný, tj. jsou stejný a podobný "≅", když všecky tři strany (každá strana jednotlivě vzatá) jednoho trojúhelníka jsou stejné s třemi stranami druhého trojúhelníka.* (Sedláček, 1822, s. 32)

Dva trojúhelníkové jsou shodný, tj. stejný a podobný ("≅"), když jedna strana, pak přiležící dva úhlové jednoho trojúhelníka se shodují, tj. jsou = s jednou stranou a dvěma přiležící úhly druhého trojúhelníka. (Sedláček, 1822, s. 33)

Dva trojúhelníkové jsou shodný, tj. stejný a podobný ("≅"), když dvě ramena a mezi nimi zasazený úhel jednoho trojúhelníka jsou stejná a podobná ("≅") s dvěma rameny a mezi nimi obsaženým úhlem druhého trojúhelníka." (Sedláček, 1822, s. 34)

4.6.5.2 Sinová věta

„*V každém kosoúhelném trojúhelníku stojí k sobě přístavy dvou kterýkoliv úhlů tak, jako dvě strany těm vzatým úhlům naprotilehlé. A tak rovněž každé dvě strany stojí k sobě v takovém poměru, v jakém jsou přístavy úhlů těm stranám naprotilehlým.*

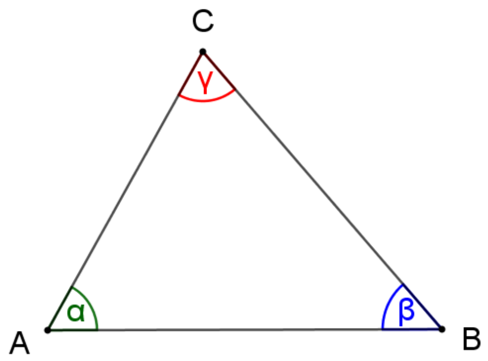
V trojhranu kosoúhelném:

I. příst. <C : příst. <B = AB : AC $\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{|AC|}\right)$

II. příst. <C : příst. <A = AB : BC $\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{|BC|}\right)$

III. příst. <B : příst. <A = AC : BC." $\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{|BC|}\right)$

(Sedláček, 1822, s. 237)



Obrázek 7. 7: Sinová věta

4.7 Výška hradní věže

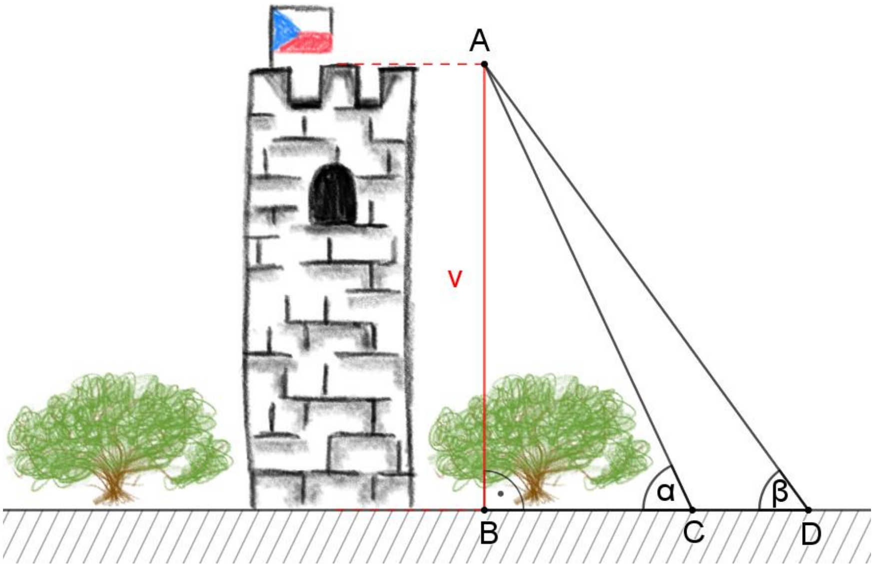
4.7.1 Zadání

Měřič potřebuje zjistit výšku hradní věže. K této věži nemůže přímo přistoupit, protože je obrostlá neprostupným houštím. Na zemi si vyznačí úsečku libovolné, ale jemu známé délky, která směřuje k věži. Zvolil si 5,5 m dlouhou úsečku. Z obou koncových bodů úsečky si změří úhel, který svírá horní okraj věže se zemí. V bodě blíže k věži naměřil 65° a v druhém 54°.

https://www.geogebra.org/m/etdqg9uu

4.7.2 Náčrtek

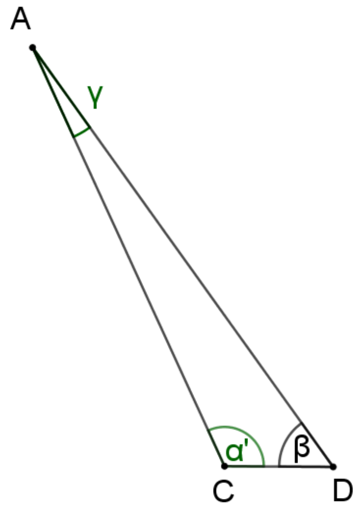
Hledaná výška hradní věže *v* je na obrázku 8.1 znázorněna jako úsečka *AB*. Z bodů *C* a *D* jsou měřeny příslušné úhly α a β.



Obrázek 8. 1

4.7.3 Řešení 1

V trojúhelníku *ACD* si dopočteme zbylé dva úhly (viz obr. 8.2).



Obrázek 8. 2

Nejprve úhel α' při vrcholu C:

$$\alpha' = 180° - \alpha$$

$$\alpha' = 180° - 65° = 115°,$$

a poté úhel γ při vrcholu A:

$$\gamma = 180° - \alpha' - \beta$$

$$\gamma = 180° - 115° - 54° = 11°.$$

Pro zjištění velikosti strany AC aplikujeme na tento trojúhelník sinovou větu:

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

vyjádříme si AC:

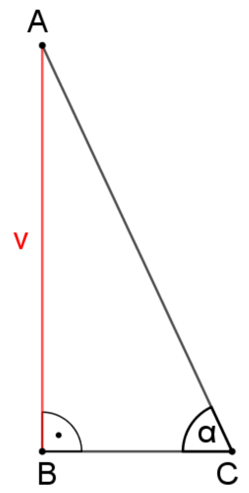
$$|AC| = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot |CD|$$

a dosadíme hodnoty:

$$|AC| = \frac{\sin(54°)}{\sin(11°)} \cdot 5{,}5$$

$$|AC| \doteq 23{,}32\ m.$$

Hledanou velikost strany *AB* zjistíme pomocí funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku *ABC* (viz obr. 8.3).



Obrázek 8. 3

Hodnota této funkce je v pravoúhlém trojúhelníku rovna poměru protilehlé odvěsny k přeponě:

$$\sin \alpha = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Vyjádříme si stranu *AB*:

$$|AB| = \sin \alpha \cdot |AC|,$$

dosadíme a dopočteme:

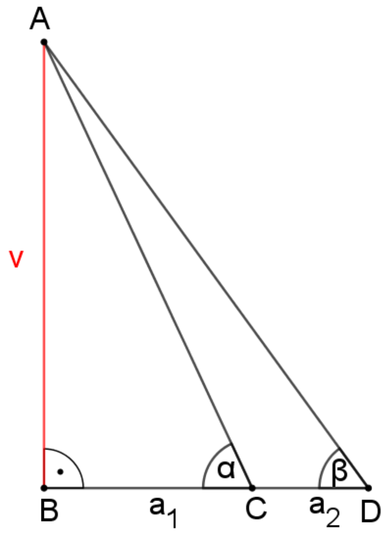
$$|AB| = \sin(65°) \cdot 23{,}32$$

$$|AB| \doteq 21{,}14\, m.$$

Hradní věž je vysoká přibližně 21,14 m.

4.7.4 Řešení 2

Trojúhelníky *ABC* a *ABD* jsou pravoúhlé a v každém z nich nám je znám jeden jejich úhel svírající jedno rameno a základnu. Velikost strany *BC* si označíme jako neznámou a_1 a velikost strany *CD* jako a_2 (viz obr. 8.4).



Obrázek 8. 4

Hodnotu tangens těchto úhlů si pro každý trojúhelník zapíšeme do rovnice a z té si vyjádříme neznámou a_1. Pro trojúhelník *ABC* platí:

$$\tan\alpha = \frac{v}{a_1}$$

$$a_1 = \frac{v}{\tan\alpha}.$$

U trojúhelníku *ABD* postupujeme obdobně:

$$\tan\beta = \frac{v}{a_1 + a_2}.$$

$$a_1 + a_2 = \frac{v}{\tan\beta}$$

$$a_1 = \frac{v}{\tan\beta} - a_2.$$

Potom:

$$\frac{v}{\tan\alpha} = \frac{v}{\tan\beta} - a_2.$$

Rovnici budeme upravovat tak, abychom si mohli vyjádřit *v*. Výraz $\frac{v}{\tan\beta}$ odečteme od obou stran rovnice a dostáváme:

$$\frac{v}{\tan\alpha}-\frac{v}{\tan\beta}=-a_2.$$

Obě strany rovnice vynásobíme (-1):

$$\frac{v}{\tan\beta}-\frac{v}{\tan\alpha}=a_2$$

a vytkneme *v*:

$$v\cdot\left(\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}\right)=a_2.$$

Sečteme výrazy v závorce:

$$v\cdot\left(\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\beta\cdot\tan\alpha}\right)=a_2$$

a obě strany rovnice vynásobíme výrazem $\frac{\tan\beta\cdot\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$:

$$v=a_2\cdot\left(\frac{\tan\beta\cdot\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}\right). \tag{1}$$

Hodnota tangens je definována jako poměr sinu a kosinu též hodnoty. Potom platí:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Tyto hodnoty dosadíme do rovnice (1):

$$v=a_2\cdot\left(\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\right). \tag{2}$$

Výraz $\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$ upravíme:

$$\left(\frac{\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}\right)=\frac{\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}. \tag{3}$$

Pro goniometrické funkce platí následující součtový vzorec:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha.$$

(více k vzorcům goniometrických funkcí: Polák, 1995, s. 162)

Tento vztah použijeme k úpravě výrazu (3):

$$\frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Takto upravený výraz dosadíme zpět do rovnice (2):

$$v = a_2 \cdot \left(\frac{\sin\beta \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}\right).$$

Dosadíme příslušné hodnoty a vypočteme v:

$$v = 5{,}5 \cdot \left(\frac{\sin(54°) \cdot \sin(65°)}{\sin(11°)}\right)$$

$$v \doteq 21{,}13\ m.$$

Věž je vysoká přibližně 21,13 m.

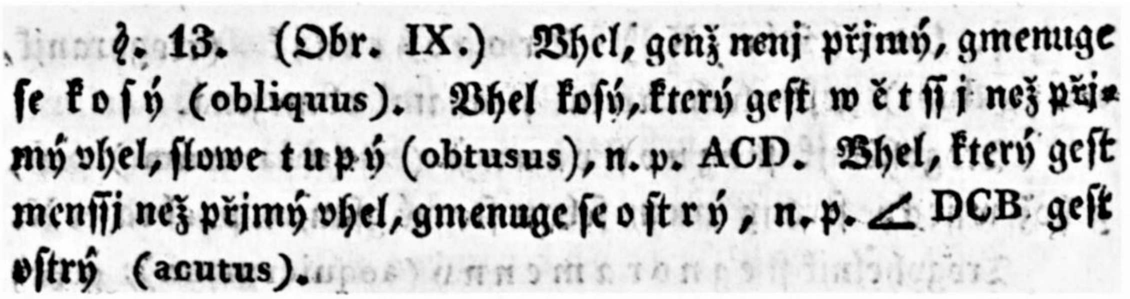
4.7.5 Historické okénko

4.7.5.1 Shodné úhly

„*Úhlové jsou stejný, kteří, když se roh jednoho na roh druhého, pak ramena jednoho na ramena druhého položí, se shodují (congrunt), na sebe připadají, se kryjí. Znamení stejnosti jest následující: =. Např. ∠ABC = ∠DEF to jest úhel ABC stejný s úhlem DEF, jestli, když roh E na roh B, rameno DE na rameno AB, rameno EF na rameno BC vložíme, ti úhlové úplně se kryjí.*“ (Sedláček, 1822, s. 8)

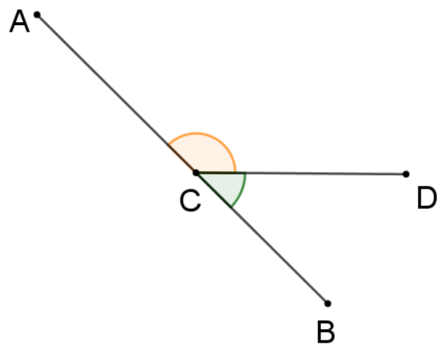
4.7.5.2 Úhel tupý a ostrý

„Úhel, jenž není přímý jmenuje se kosý (obliquus). Úhel kosý, který jest větší než přímý úhel, slovem tupý (obtusus), např. ACD. Úhel, který jest menší než přímý úhel, jmenuje se ostrý, např. ∠DCB jest ostrý (acutus).“ (Sedláček, 1822, s. 9)



§. 13. (Obr. IX.) Uhel, genž neni přjmý, gmenuge se kosý (obliquus). Uhel kosý, který gest wětšj než přjmý uhel, slowe tupý (obtusus), n. p. ACD. Uhel, který gest menšj než přjmý uhel, gmenuge se ostrý, n. p. ∠ DCB gest ostrý (acutus).

Obrázek 8. 5: Originální podoba textu (Sedláček, 1822, s. 9)



Obrázek 8. 6: Tupý a ostrý úhel

4.8 Výška hradeb

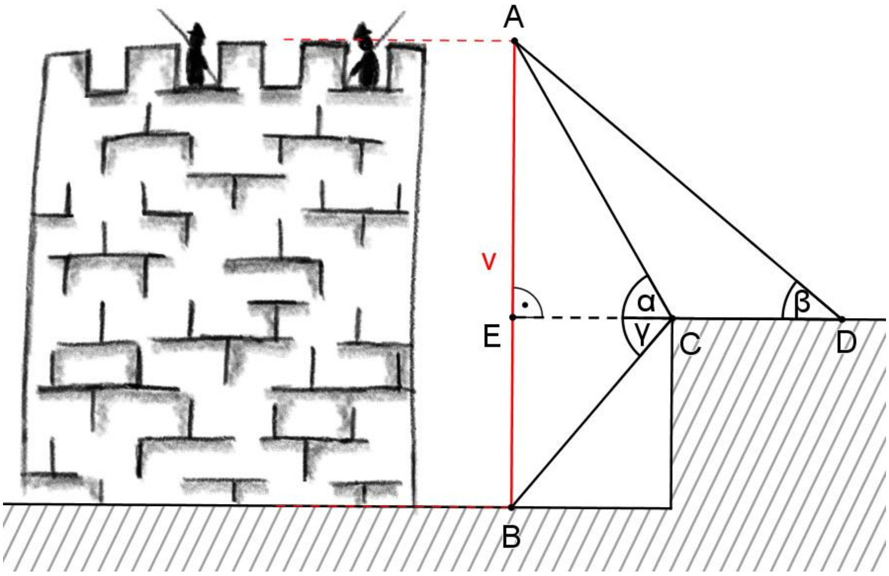
4.8.1 Zadání

Úkolem měřiče je zjistit výšku hradeb, které jsou lemovány hradním příkopem. Hradby bude měřit zvenčí. Představí si horizontální linii vedoucí od okraje příkopu k hradbám a změří si úhly, které tato linie svírá s horním okrajem hradeb a dnem příkopu. První z úhlů je roven 60° a druhý 50°. Dále si od tohoto okraje změří úsek, který je dlouhý 5 metrů a směřuje od hradeb. Z druhého konce úseku si opět změří úhel s horním okrajem hradeb, který činí 40°.

https://www.geogebra.org/m/zyfphwva

4.8.2 Náčrtek

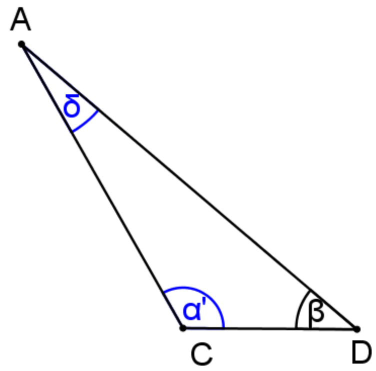
Hledaná výška *v* je rovna velikosti úsečky *AB*. Úhel α svírá horní hranu hradeb s okrajem příkopu. Úsečka *CD* znázorňuje naměřený úsek dlouhý 5 metrů. Úhel β je roven 40° a úhel γ činí 50°. Úsečka *EC* je pomocná horizontální linie, která je kolmá na stěnu hradeb. Všechny prvky úlohy jsou zobrazeny na obrázku 9.1.



Obrázek 9. 1

4.8.3 Řešení

Dopočteme si úhly v trojúhelníku *ACD* (viz obr. 9.2).



Obrázek 9. 2

V první řadě si zjistíme úhel α':

$$\alpha' = 180° - \alpha$$

$$\alpha' = 180° - 60° = 120°$$

a poté i úhel γ:

$$\gamma = 180° - \alpha' - \beta$$

$$\gamma = 180° - 120° - 40° = 20°.$$

Získané hodnoty zapíšeme do vztahu, který platí pro sinovou větu:

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

a vyjádříme si z něj AC

$$|AC| = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot |CD|.$$

Dosadíme

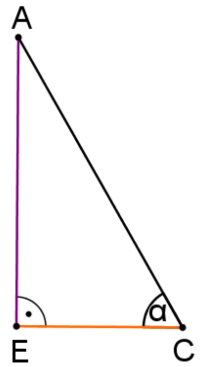
$$|AC| = \frac{\sin(40°)}{\sin(20°)} \cdot 5$$

a dopočítáme

$$|AC| \doteq 9{,}4\,m.$$

Hodnota funkce sinus je v pravoúhlém trojúhelníku *AEC* (viz obr. 9.3) definována jako poměr protilehlé odvěsny *AE* k přeponě *AC*:

$$\sin \alpha = \frac{|AE|}{|AC|}.$$



Obrázek 9. 3

Z této rovnice si vyjádříme *AE*:

$$|AE| = \sin \alpha \cdot |AC|,$$

dosadíme a dopočítáme:

$$|AE| = \sin(60°) \cdot 9{,}4$$

$$|AE| \doteq 8{,}14\ m.$$

Zbylou stranu *EC* si můžeme zjistit pomocí Pythagorovy věty. Součet obsahů čtverců sestrojených nad odvěsnami trojúhelníku je roven obsahu čtverce sestrojeného nad jeho přeponou:

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2.$$

Provedeme úpravy k osamocení *EC*:

$$|EC|^2 = |AC|^2 - |AE|^2$$

$$|EC| = \sqrt{|AC|^2 - |AE|^2}$$

a dosadíme

$$|EC| = \sqrt{(9{,}4)^2 - (8{,}14)^2}$$

$$|EC| = \sqrt{88{,}36 - 66{,}2596}$$

$$|EC| = \sqrt{22{,}1004}$$

$$|EC| \doteq 4{,}7\ m.$$

Pro výpočet velikosti *EB* v trojúhelníku *EBC* (viz obr. 9.4) použijeme hodnotu tangens, která udává poměr protilehlé odvěsny k přilehlé:

$$\tan\gamma = \frac{|EB|}{|EC|},$$

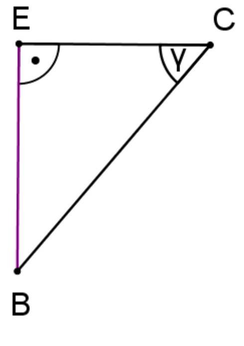
vyjádříme si *EB:*

$$|EB| = \tan\gamma \cdot |EC|$$

a dosadíme:

$$|EB| = \tan(50°) \cdot 4{,}7$$

$$|EB| \doteq 5{,}6\ m.$$



Obrázek 9. 4

Celková výška hradeb je rovna součtu velikostí úseček *AE* a *EB*:

$$v = |AE| + |EB|$$

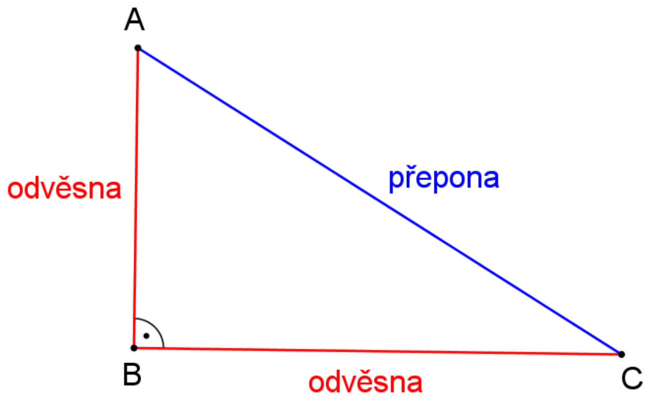
$$v = 8{,}14 + 5{,}6 = 13{,}74\ m.$$

Hradby jsou vysoké přibližně 13,74 m.

4.8.4 Historické okénko

4.8.4.1 Pravoúhlý trojúhelník

„*Trojhraník přímoúhelný (rectangulum) jest, v kterém jeden úhel jest přímý, např. úhel ABC. A pak se jmenuje strana, jenž proti přímému úhlu stojí, přepona (hypothenusa), např. strana AC, a každá ostatní kolmá jmenuje se odvěsna (cathetus) např. kolmé AB a BC.*“ (Sedláček, 1822, s. 11)

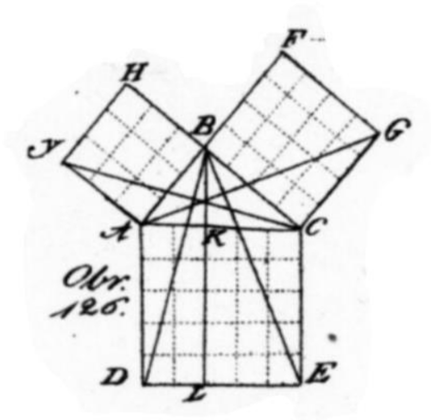


Obrázek 9. 5: Pravoúhlý trojúhelník

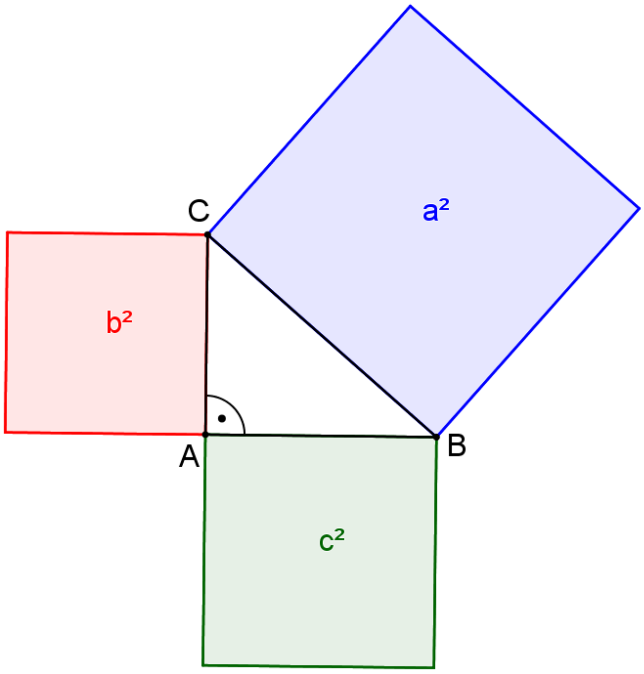
4.8.4.2 Pythagorova věta

„*V každém přímoúhelném trojúhelníku, kdybychom jak na přeponě, tak na odvěsnách sestrojili čtverce. Ploskost čtverce na přeponě vystaveného sama pro sebe obsahuje již zaúplna tolik jako ploskosti čtverců na obou odvěsnách vystavených součtem vzaté. To jest čtverec přepony jest stejný s čtverci obou odvěsen součtem vzatými.*

Poučku tu nazýváme Pythagorickou, poněvadž ji onen veliký filosof Pythagoras téměř 500 let před narozením Krista pána nalezl.“ (Sedláček, 1822, s. 90-91)



Obrázek 9. 6 (Sedláček, 1822)



Obrázek 9. 7: Pythagorova věta

5 Závěr

Ve své práci jsem zkoumala historické prameny s cílem získat podklady pro tvorbu zadání matematických úloh. Studium pramenů bylo pro mne v mnoha ohledech poučné a přínosné. Procvičila jsem si práci s prameny, získala nové poznatky o struktuře matematických učebnic v 17.-19. století a rozšířila slovní zásobu o pár zastaralých matematických pojmů. Ze získaných dat jsem vytvořila sbírku složenou z 8 úloh, ukázkově řešených a doplněných dynamickými online aplety vytvořenými v programu GeoGebra. Byla by škoda nepodělit se o řadu historických definic, kterou jsem získala bádáním, a tak jsem některé definice připojila k úlohám v rámci tzv. „historického okénka“.

Téma, kterým se práce zabývá, stojí za další studium, a proto by se dalo rozšířit o další úlohy, které se v pramenech vyskytovaly, a také o kapitolu zabývající se měřickými nástroji a pomůckami. Matematickým definicím a pojmům by se dalo věnovat daleko obsáhleji a bylo by užitečné sestavit jejich přehled. Historické texty a úlohy se nabízejí k využití ve výuce nebo v projektovém vyučování zaměřeným na mezipředmětové vztahy matematiky a historie.

6 Seznam pramenů a literatury

6.1 Prameny

PODOLSKÝ Z PODOLÍ, Šimon. *Knižka O Měrách Zemských: A wyswětlenj, Od kterého Czasu Mjry, a Měřenj Zemské, W Králowstwj Cžeském swůg začátek magj*. Wytisstěná w Praze, 1683. Dostupné také z: http://www.manuscriptorium.com/apps/index.php?direct=record&pid=NKCR___-NKCR___54_E_002132_0H8KDQF-cs#search.

SEDLÁČEK, Josef Vojtěch. *Základowé měřictwj, čili, Geometrye*. W Praze: U wdowy Jozefy Fetterlowé z Wildenbrunu w knjžecý arcybiskupské knihtiskárně w Semináryum, 1822. Dostupné také z: https://kramerius5.nkp.cz/uuid/uuid:0c25f160-bdd1-11dc-964a-000d606f5dc6.

VESELÝ, Václav Josef. *Gruntownj Počátek Mathematického Vměnj Geometria Practica, Trigonometria Plana Stereometria. Vžjwánj Tabellarum, Sinuum, A Logarithmorum*. Wytisstěno w Praze, 1734. Dostupné také z: http://www.manuscriptorium.com/apps/index.php?direct=record&pid=NKCR___-NKCR___54_D_000147_15930R2-cs#search.

6.2 Literatura

FUCHS, Eduard a Jindřich BEČVÁŘ, ed. *Matematika v proměnách věků II*. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-218-x.

HOFMANN, Gustav. *Metrologická příručka: pro Čechy, Moravu a Slezsko do zavedení metrické soustavy.* Plzeň: Státní oblastní archiv, 1984.

HROCH, Miroslav. *Úvod do studia dějepisu: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických a filozofických fakult studijního oboru učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů - dějepis*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

Kramerius [online]. Praha: Národní knihovna ČR. [cit. 2020-05-08]. Dostupné z: http://kramerius5.nkp.cz/.

MACURA, Vladimír. *Znamení zrodu a české sny*. Praha: Academia, 2015. ISBN 978-80-200-2506-7.

MIKULČÁK, Jiří, BEČVÁŘ, Jindřich, ed. *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*. Praha: Matfyzpress, 2010. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-112-5.

MŠMT. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, 2017. [cit. 2020-05-10]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/41216/.

Manuscriptorium [online]. Národní knihovna ČR. [cit. 2020-05-08]. Dostupné z: http://www.manuscriptorium.com/cs.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-276-7.

Ottův slovník naučný: illustrovaná encyklopaedie obecných vědomostí. Praha: Paseka, 2003. ISBN 80-7203-007-8.

Ottův slovník naučný: illustrovaná encyklopaedie obecných vědomostí: Díl dvacátý druhý Rozkošný-Schloppe. Praha: Paseka, 2003. ISBN 80-7203-007-8.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-78-x.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. Praha: VÚP, 2007. [cit. 2020-05-10]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159.