



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV POZEMNÍCH KOMUNIKACÍ

INSTITUTE OF ROAD STRUCTURES

## ALTERNATIVNÍ NÁVRH ČÁRY ZRNITOSTI

ALTERNATIVE AGGREGATE GRADATION

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Vojtěch Kozáček

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. PETR HOLCNER, Ph.D.

BRNO 2018



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

<b>Studijní program</b>	B3607 Stavební inženýrství
<b>Typ studijního programu</b>	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
<b>Studijní obor</b>	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
<b>Pracoviště</b>	Ústav pozemních komunikací

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

<b>Student</b>	Vojtěch Kozáček
<b>Název</b>	Alternativní návrh čáry zrnitosti
<b>Vedoucí práce</b>	doc. Ing. Petr Holcner, Ph.D.
<b>Datum zadání</b>	30. 11. 2017
<b>Datum odevzdání</b>	25. 5. 2018

V Brně dne 30. 11. 2017

---

doc. Dr. Ing. Michal Varaus  
Vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc.  
Děkan Fakulty stavební VUT

## **PODKLADY A LITERATURA**

William B. Fuller: The Laws or Proportioning Concrete

Sobolev, Amirjanov, Hermosillo, Lozano: The Modelling of Dense Packing of Aggregates

ČSN EN 13242 Kamenivo pro nestmelené směsi a směsi stmelené hydraulickými pojivky pro inženýrské stavby a pozemní komunikace

ČSN EN 13108 Asfaltové směsi - Specifikace pro materiály

Luboš Svoboda: O mísení frakcí kameniva, Beton TKS 4(1), 2004, s. 24-28. ISSN 1213-3116

## **ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ**

Ověřte požadavky na čáru zrnitosti pro návrh stmelených i nestmelených směsí. Popište používané postupy a doporučení, pokuste se zjistit a popsat jejich teoretické i empirické základy. Navrhňte alternativní postup a ověřte jej prakticky za použití ideálních kulových zrn. Proveďte porovnání alternativního návrhu se standardním postupem používajícím Fullerovu křivku.

## **STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).

2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

---

doc. Ing. Petr Holcner, Ph.D.

Vedoucí bakalářské práce

## **ABSTRAKT**

Bakalářská práce se zabývá návrhem křivky zrnitosti směsi s co nejmenší mezerovitostí. Popsána je zde Fullerova křivka a její původ. Je zde krátce popsána teorie sphere packingu. Stěžejním bodem této bakalářské práce je algoritmus náhodné volby zrn, s jehož pomocí byla navržena směs pro praktické ověření v laboratoři. Následuje laboratorní porovnání navržené směsi se směsí dle Fullerovy paraboly.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

čára zrnitosti, křivka zrnitosti, Fullerova parabola, sphere packing, algoritmus náhodné volby zrn

## **ABSTRACT**

The bachelor thesis deals with the design of the gradation curve of the mixture with the smallest gap. The Fuller curve and its origin is described here. A brief description of sphere packing theory is there. The main point of this bachelor's thesis is a random grain algorithm with which a mixture for practical verification in the laboratory was designed. Next point is a laboratory comparison between a designed mixture and the Fuller parabola.

## **KEYWORDS**

gradation line, gradation curve, Fuller parabola, sphere packing, random grain algorithm



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE VŠKP**

Vojtěch Kozáček *Alternativní návrh čáry zrnitosti*. Brno, 2018. 44 s. Bakalářská práce.  
Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav pozemních komunikací.  
Vedoucí práce doc. Ing. Petr Holcner, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 24. 5. 2018

---

Vojtěch Kozáček  
autor práce

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych touto cestou poděkoval mému vedoucímu bakalářské práce, doc. Ing. Petru Holcnerovi, Ph.D., za odborné vedení, ochotu a cenné rady při vypracování mé bakalářské práce.

Děkuji také své rodině a blízkým, kteří mě podporovali v průběhu celého studia.

# Obsah

1	ÚVOD.....	9
2	SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ .....	10
3	ČÁRA ZRNITOSTI.....	11
4	FULLEROVA PARABOLA .....	12
4.1	WILLIAM BARNARD FULLER .....	12
4.2	FULLEROVA PARABOLA .....	13
5	SPHERE PACKING .....	17
6	ALGORITMUS NÁHODNÉ VOLBY ZRN .....	24
6.1	PRINCIP ALGORITMU .....	24
6.2	VÝSLEDKY VÝPOČTU.....	27
6.3	ZÍSKÁNÍ KŘIVKY ZRNITOSTI Z VÝSLEDKŮ VÝPOČTU .....	31
7	PRAKTICKÉ POROVNÁNÍ KŘIVEK ZRNITOSTI .....	34
7.1	OBJEMOVÁ HMOTNOST .....	37
7.2	MEZEROVITOST .....	38
8	ZÁVĚR.....	40
9	REFERENCE .....	41
10	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	42
11	SEZNAM GRAFŮ .....	43
12	SEZNAM TABULEK .....	44

# 1 ÚVOD

Při návrhu vozovkových směsí s plynulou čarou zrnitosti se hojně využívá tzv. Fullerova parabola. Má představovat čáru zrnitosti s nejtěsnějším uspořádáním zrn. Odkud se tento pojem vzal a na jakých základech je postaven, není při zběžném pátrání úplně zřejmé.

Cílem této bakalářské práce je pátrat, kdy a proč se začala Fullerova parabola používat v dopravním stavitelství. Dále je cílem alternativní metodou najít postup návrhu čáry zrnitosti s nejtěsnějším uspořádáním zrn. A prakticky porovnat navržený postup se způsobem využívajícím Fullerovu parabolu.

Fullerova parabola se jeví jako přirozené řešení uspořádání různě velkých zrn v prostoru a alternativně navržený postup by mohl tuto domněnku potvrdit.

## 2 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ

Pro návrh různých druhů směsí se používají různé typy křivek zrnitosti. Požadavek na zrnitost směsi pro konkrétní použití najdeme ve skupině norem ČSN EN 13108.

Nás nejvíce zajímají směsi, které mají plynulou čáru zrnitosti. Nejběžněji to jsou asfaltové betony. V normě ČSN EN 13108-1: *Asfaltové směsi – specifikace pro materiály – Část 1: Asfaltový beton* nalezneme požadavky na zrnitost směsi.

ČSN EN 13108-1

**Tabulka 1 – Mezní hodnoty návrhového složení směsi – Základní řada sít plus řada 1**

D	4	5 (5,6)	8	11 (11,2)	16	22 (22,4)	32 (31,5)
Síto mm	Propad sítím % hmotnosti						
1,4 $D^a$	100	100	100	100	100	100	100
D	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100
2	50 až 85	15 až 72	10 až 72	10 až 60	10 až 50 <sup>b</sup>	10 až 50 <sup>b</sup>	10 až 50
0,063	5,0 až 17,0	2 až 15,0	2 až 13,0	2 až 12,0	0 až 12,0	0 až 11,0	0 až 11,0
<sup>a</sup> Pokud síto vypočtené jako 1,4 D neodpovídá přesné velikosti síta v ISO 565, série R 20, musí se použít nejbližší velikost síta v řadě. <sup>b</sup> Pro použití na letištních plochách se může maximální procento propadu sítím 2 mm zvýšit do 60 %.							

**Tabulka 2 – Mezní hodnoty návrhového složení směsi – Základní řada sít plus řada 2**

D	4	6 (6,3)	8	10	12 (12,5)	14	16	20	32 (31,5)
Síto mm	Propad sítím % hmotnosti								
1,4 $D^a$	100	100	100	100	100	100	100	100	100
D	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100	90 až 100
2	50 až 85	15 až 72	10 až 72	10 až 60	10 až 55	10 až 50 <sup>b</sup>	10 až 50 <sup>b</sup>	10 až 50 <sup>b</sup>	10 až 50
0,063	5,0 až 17,0	2,0 až 15,0	2,0 až 13,0	2,0 až 12,0	2,0 až 12,0	0 až 12,0	0 až 12,0	0 až 11,0	0 až 11,0
<sup>a</sup> Pokud síto vypočtené jako 1,4 D neodpovídá přesné velikosti v základní řadě sít plus řadě 2, musí se použít nejbližší velikost síta v řadě. <sup>b</sup> Pro použití na letištních plochách se může maximální procento propadu sítím 2 mm zvýšit do 60 %.									

Obrázek 1: Mezní hodnoty návrhového složení směsi asfaltových betonů [2]

V žádné normě jsem nenalezl požadavek na použití tzv. Fullerovy paraboly, kterou jsme pro návrh asfaltových betonů používali ve cvičeních. Je tedy s podivem, když v každé dostupné literatuře (články, skripta, studijní materiály, internet) lze nalézt, že pro návrh asfaltových betonů se používá právě Fullerova parabola.

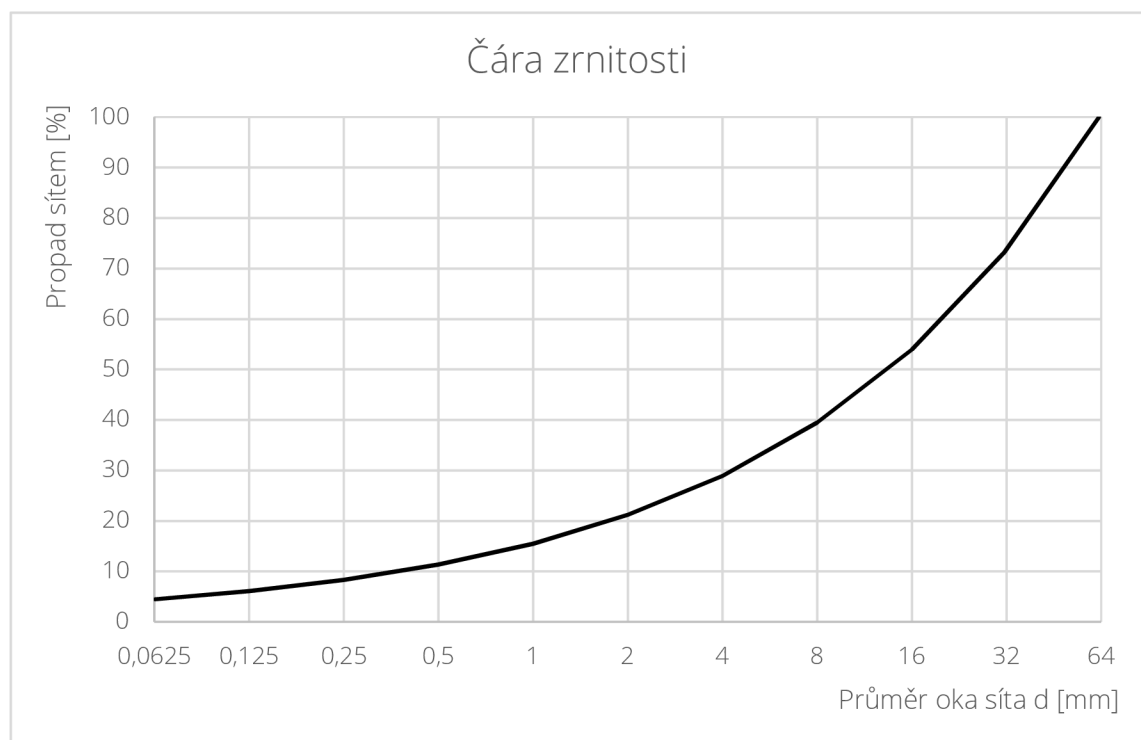
### 3 ČÁRA ZRNITOSTI

S čárou zrnitosti se v této práci budeme často setkávat, je tedy důležité si tento pojem blíže vysvětlit.

Čára (křivka) zrnitosti je grafické nebo tabelární vyjádření vztahu mezi velikostí zrn kameniva (nebo směsi kameniva) a propadem hmoty zrn na zvolené sadě sít. Je to součtová čára četnosti, kde nezávisle proměnnou je velikost zrna. [1]

Vykreslíme ji tak, že v grafu na osu  $x$  vyznačíme body odpovídající jednotlivým sítům (průměrům zrn kameniva) od nejmenšího po největší. Od osy  $x$  pak vynášíme ve směru osy  $y$  procentuální propad (hmotnostní) na daném sítu.

Měřítko osy  $x$  (horizontální) je často logaritmické pro snadnější a přesnější vynášení a odečítání propadů malých frakcí kameniva.



Obrázek 2: Čára zrnitosti v grafu s logaritmickou horizontální osou

## 4 FULLEROVA PARABOLA

### 4.1 WILLIAM BARNARD FULLER

W. B. Fuller byl americký stavební inženýr a vědec. Narodil se 12. listopadu 1863 ve Swampscott, Massachusetts (USA), zemřel 17. června 1923 v Eagle Rock, Californie (USA). Roku 1883 dokončil studium na MIT a následně pracoval jako poradce a inženýr na několika projektech. Od 18. července 1907 byl členem American Water Works Association. 12. února 1908 byl W. B. Fuller jmenován čestným členem American Society of Civil Engineers. Roku 1910 založili s Georgem Arthurem Johnsonem (1874 – 1934) poradenskou společnost *Johnson a Fuller*. [3]

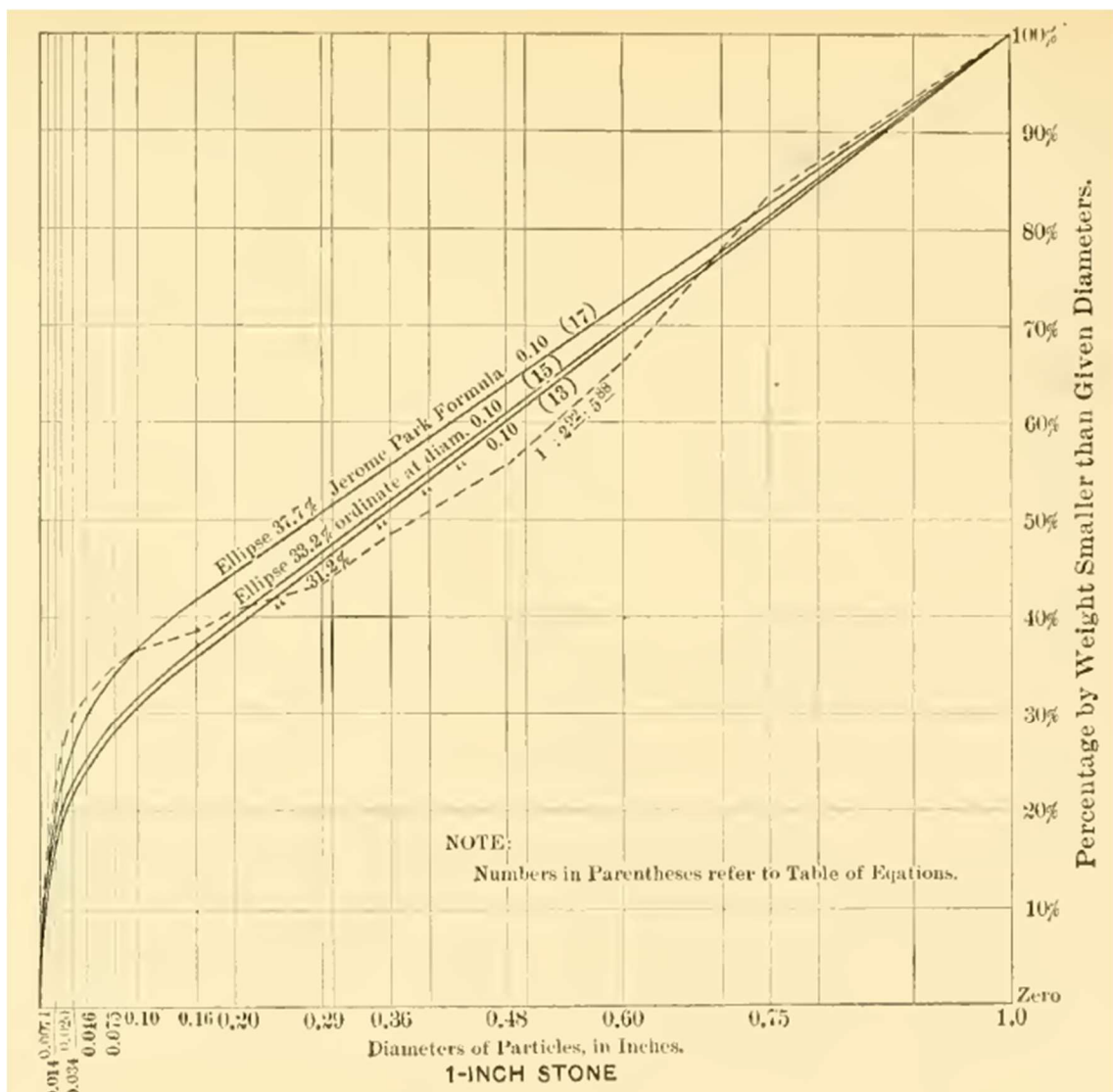
Známým se stal díky svým zkouškám na betonu, které od roku 1901 prováděl při stavbě filtračních nádrží v čistírně vody pro New Jersey Water Company v Little Falls. Dopracoval se ke složení vodotěsného betonu, které zároveň umožňuje zřídit co nejtenčí stěny nádrží. Zkoumal závislost mezi objemovou hmotností a pevností v tlaku pro beton s různým poměrem složek. Ze zkoušek vyplynulo, že opravdu existuje těsná závislost mezi pevností betonu v tlaku, obsahem cementu a objemovou hmotností betonové směsi. Při stejném obsahu cementu dosáhla směs betonu s největší objemovou hmotností i nejvyšší pevnosti v tlaku. Dále zjistil, že použitím kameniva s určitým poměrem frakcí zrn dosáhne vyšší pevnosti beton v tlaku. [3]

Rozsáhlé experimenty prováděné v letech 1903 až 1905 při výstavbě Jerome Park Reservoir v New Yorku ve spolupráci se Sanfordem E. Thompsonem mu potvrdily zjištěné zákonitosti. Fuller a Thompson společně zformulovali zákon tzv. Fullerovy křivky a Fullerovy rovnice. [3]



## 4.2 FULLEROVA PARABOLA

Na základě řady experimentů W. B. Fuller sestavil čáru zrnitosti kameniva, kterou považoval za ideální. Pro takto získanou čáru zrnitosti neměl k dispozici žádný teoretický základ a dopracoval se k ní čistě empiricky. Ideální čára zrnitosti je taková, která zaručí co nejmenší mezerovitost směsi kameniva, z čehož vyplývá i nejvyšší objemová hmotnost, a tedy i nejvyšší pevnost. Sám Fuller ji popisuje jako křivku připomínající parabolu, která se však skládá z eliptické a přímkové části. [12] Odtud se nejspíš vžil pojem Fullerova parabola.



Obrázek 3: Jeden z mnoha Fullerových grafů s křivkami zrnitosti [12]

Fullerova křivka (parabola) je vyjádřena vztahem:

$$y = 100 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^{0,5},$$

*Rovnice 1*

kde:  $y$  – procentuální propad sítím o průměru oka  $d$  [%]

$d$  – průměr oka síta [mm]

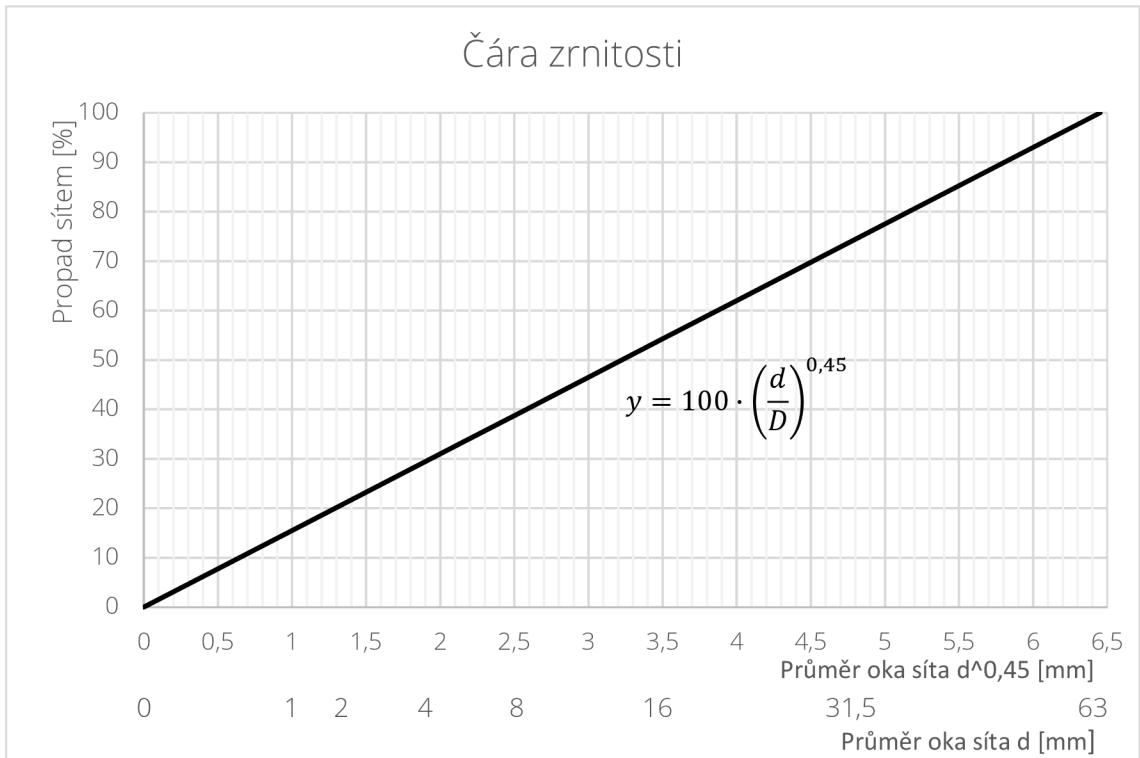
$D$  – maximální velikost oka v soustavě sít [mm]

V roce 1962 představila americká organizace Federal Highway Administration (FHWA) graf využívající Fullerovu rovnici, kde byl exponent 0,5 zaměněn za 0,45:

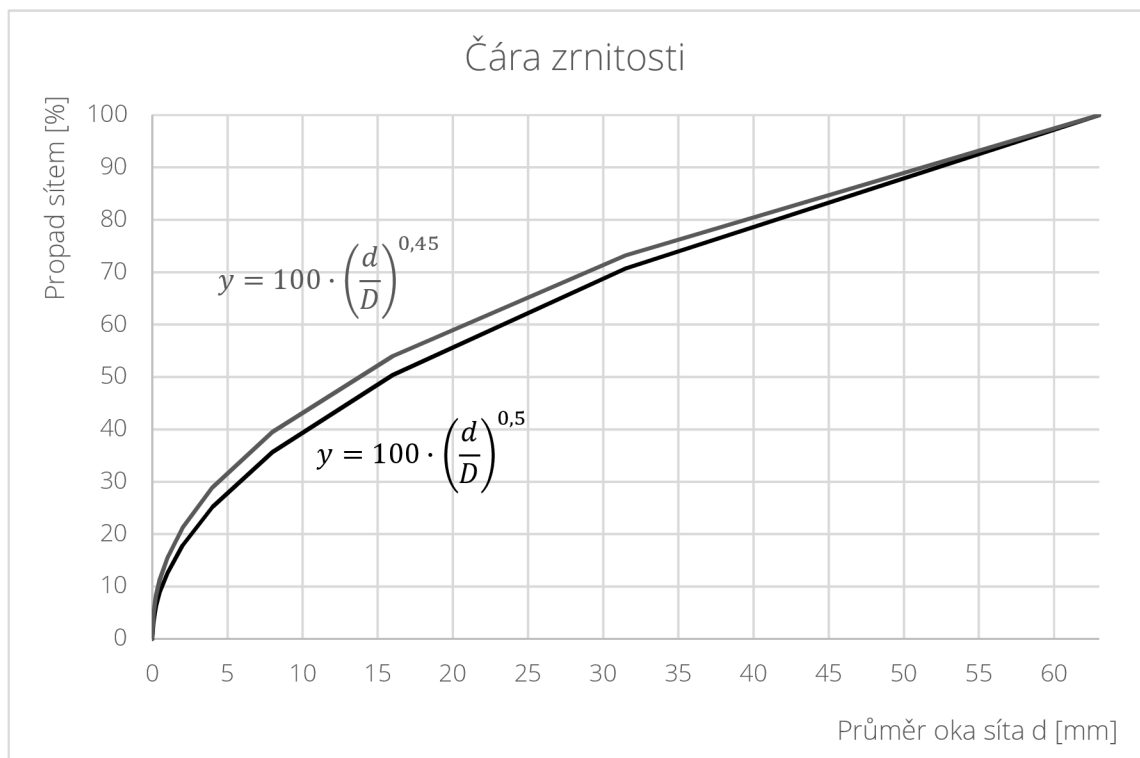
$$y = 100 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^{0,45}.$$

*Rovnice 2 [6]*

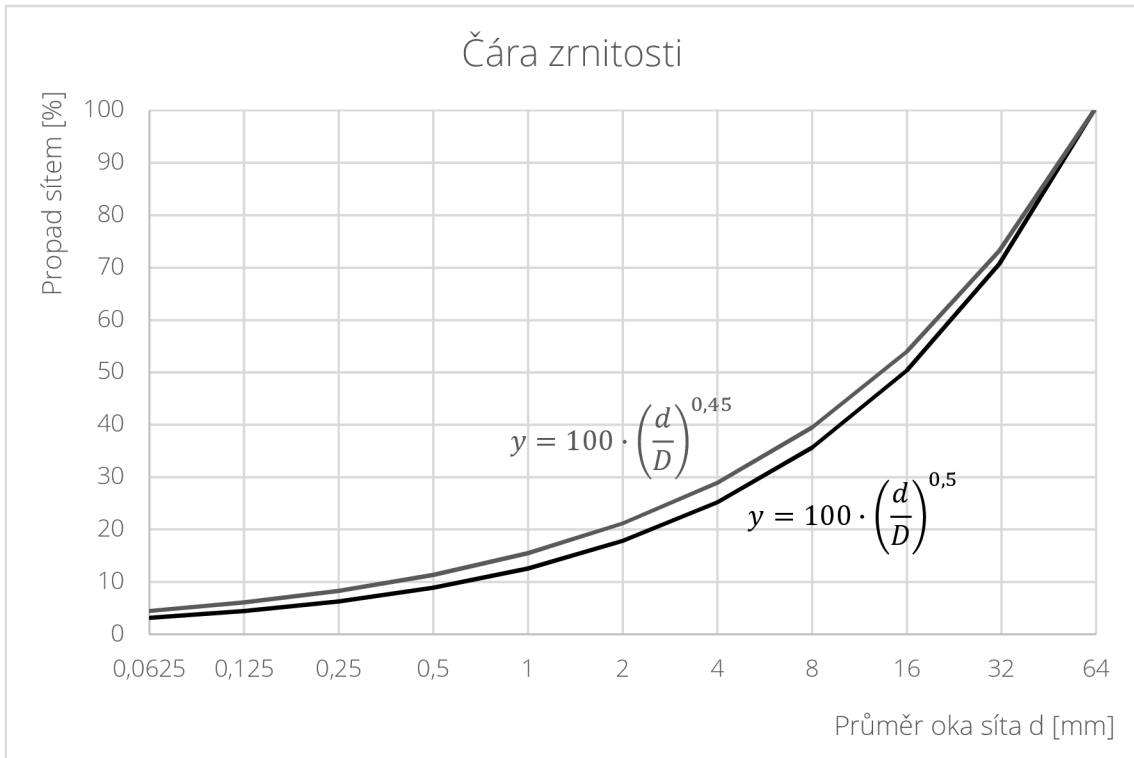
Použitím vztahu s exponentem 0,45 by mělo být dosaženo vyšší objemové hmotnosti směsi. Organizace navíc přizpůsobila horizontální osu  $x$  grafu tak, že výsledná čára zrnitosti (dle Fullerovy rovnice s exponentem 0,45) je přímka. V době, kdy nebyly kapesní kalkulátory, natož pak počítače na takové úrovni, na jakou jsme zvyklí dnes, bylo nejspíš mnohem jednodušší nakreslit do grafu přímku pomocí pravítka a mít tak snadno k dispozici kvalitní návrh čáry zrnitosti. Ovšem takto upravený graf stále představuje jednu a tu samou skutečnost a jedná se opravdu pouze o změnu zobrazení (viz. následující obrázky). Takto upravený vztah včetně jeho grafického vyjádření se dodnes v USA používá pro návrh směsí vrstev asfaltových betonů.



Obrázek 4: Ideální čára zrnitosti dle FHWA



Obrázek 5: Porovnání Fullerovy křivky při použití různého exponentu



Obrázek 6: Porovnání Fullerovy křivky při použití různého exponentu v grafu s logaritmickým měřítkem

Všechny grafy v předcházejících obrázcích vyjadřují v podstatě stejné křivky zrnitosti. Jediné, co se mění je způsob zobrazení, resp. měřítko horizontální osy grafu. Pro případné nezasvěcené čtenáře by toto mohlo být matoucí.

V každém následujícím grafu již budu používat nezkrácené měřítko horizontální osy, tak jak ho můžeme vidět v obrázku 5.

## 5 SPHERE PACKING

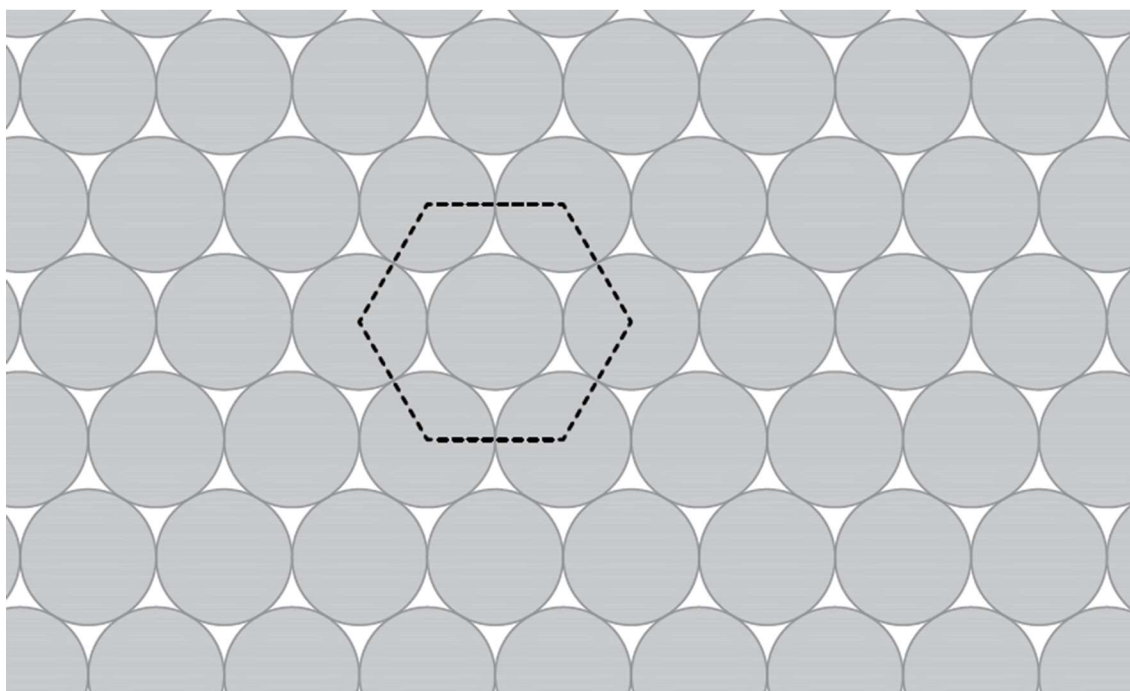
Jedou z teorií o zaplňování prostoru pomocí zrn (v tomto případě koulí) je sphere packing. Tato teorie pracuje pouze se stejně velkými koulemi a je tedy od počátku jasné, že je nepoužitelná pro praktické účely návrhu směsí vozovkových vrstev.

Skládání koulí o stejném poloměru do třírozměrného prostoru, tak aby ho vyplnily v co největší možné míře, je geometrický problém, jímž se zabýval již v 17. století Johannes Kepler, známý astronom. [11]



Obrázek 7: Ilustrativní snímek uspořádání tenisových míčků

Problém si lze zjednodušeně představit v dvourozměrném prostoru, který se snažíme vyplnit stejně velkými kruhy. Jako nejlepší a přirozené řešení se nabízí hexagonální uspořádání, kdy spojnice středů kruhů vytváří šestiúhelník (viz. obrázek 8).



Obrázek 8: Hexagonální uspořádání stejných kruhů v dvourozměrném prostoru

Takto vyplníme dvourozměrný prostor z 90,69 %.

$$\frac{A_{circle}}{A_{hexagon}} \cdot 100 \approx 90,69 \%,$$

Rovnice 3

kde:  $A_{circle}$  – součet ploch částí kruhů zasahujících do šestiúhelníku (hexagonu)

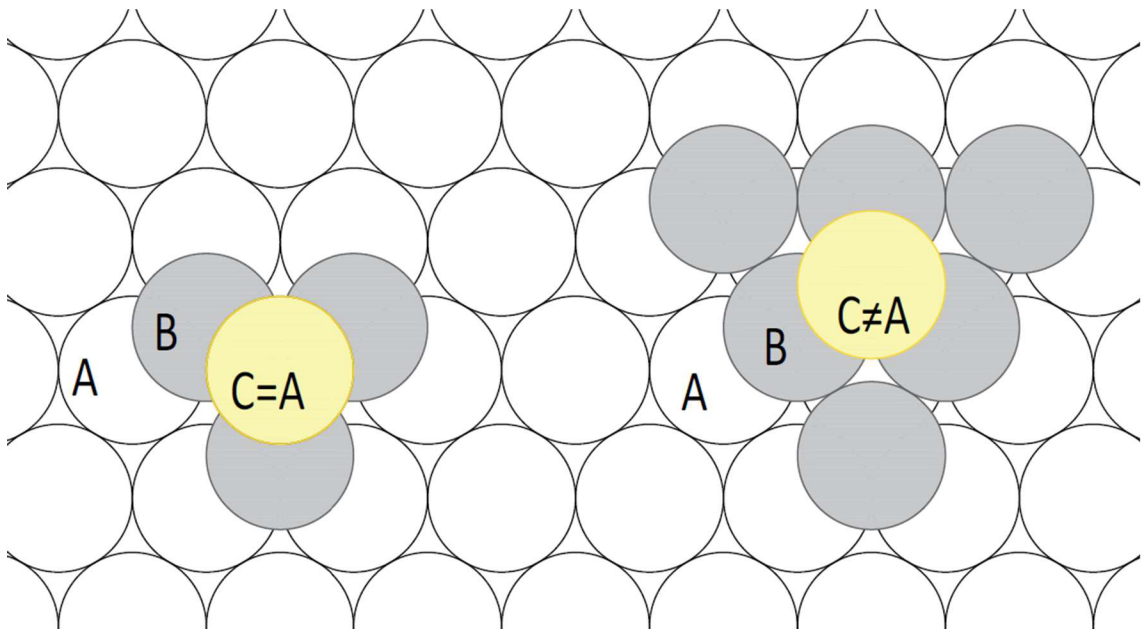
$A_{hexagon}$  – plocha vymezená šestiúhelníkem (hexagonem)

Bylo dokázáno, že hexagonální uspořádání kruhů vyplňuje dvourozměrný prostor nejlépe. Tedy neexistuje jiné uspořádání, které by dosáhlo vyššího poměru součtu ploch kruhů ku ploše prostoru.

Pokud se přesuneme z dvoudimenzionálního (2-D) do trojdimenzionálního (3-D) prostoru, problém se mírně zkomplikuje. Ovšem opět platí, že přirozené řešení vyhrává. Abychom dosáhli co nejvyššího vyplnění prostoru koulemi, nabízí se skládání koulí ve vrstvách, které při

pohledu shora připomínají hexagonální uspořádání kruhů v dvourozměrném prostoru:

- vrstva A: je „základ“, na který umístíme vrstvu B
- vrstva B: leží na vrstvě A tak, že středy koulí vrstvy B se nachází nad těžištěm trojúhelníků spojujících středy tří sousedních koulí vrstvy A
- vrstva C: může být půdorysně ve stejné poloze jako vrstva A, nebo může být posunuta tak, že středy koulí vrstvy C se nachází nad „prázdnými místy“ vrstvy A



Obrázek 9: Dva možné způsoby skládání vrstev stejných koulí na sebe

Nyní můžeme popsat poskládání koulí v prostoru následujícími kódy:

- ABABABABABAB (každá druhá vrstva je stejná)
- ABCABCABCABC (každá třetí vrstva je stejná)

Obě možnosti představují nejlepší způsob, jak lze trojrozměrný prostor vyplnit pomocí stejně velkých koulí. V obou případech dostáváme shodný výsledek.

$$\frac{V_{sphere}}{V_{space}} \cdot 100 \approx 74,05 \%,$$

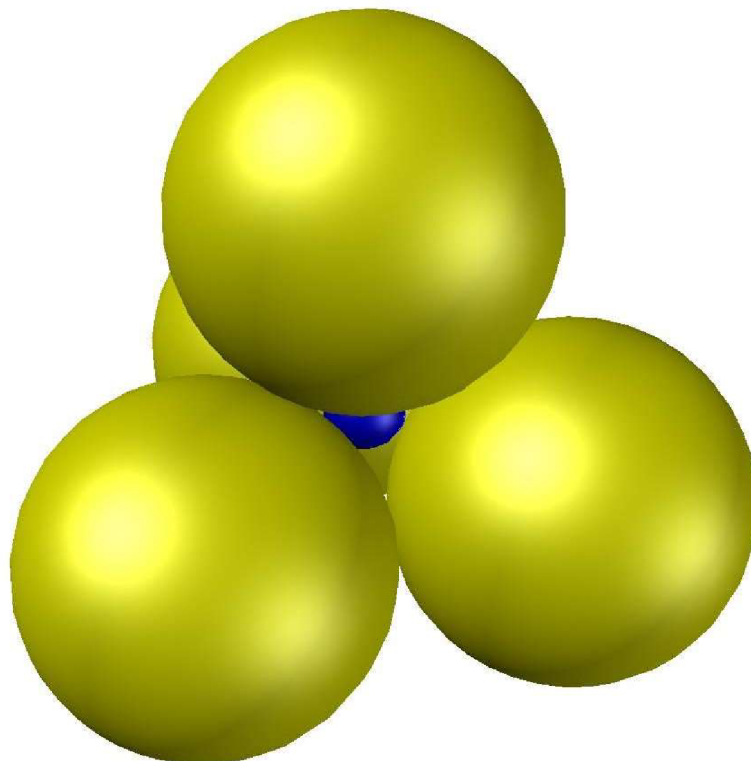
Rovnice 4

kde:  $V_{sphere}$  – součet objemů koulí

$V_{space}$  – objem prostoru

Už Johannes Kepler se domníval, že takto uspořádané koule vyplňují prostor nejlépe, ale teprve nedávno bylo dokázáno, že tomu tak opravdu je. V roce 1998 Thomas Callister Hales oznámil, že má důkazy o správnosti Keplerovy domněnky. A teprve v roce 2017 byl důkaz formálně přijat. [11]

Prostor takto vyplněný stejnými koulemi nadále obsahuje relativně hodně prázdného místa. Nabízí se otázka: Jakou největší možnou kouli lze vložit mezi již umístěné koule tak, aby se dotýkala právě 4 sousedních?

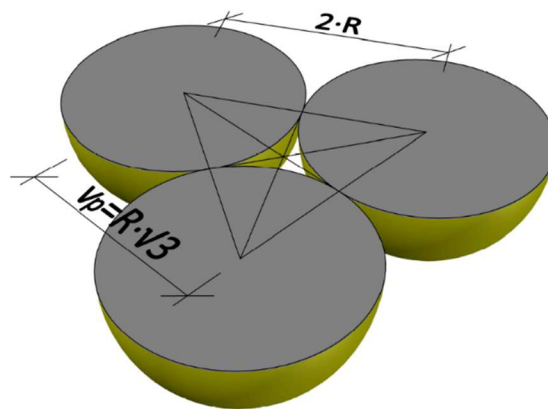


Obrázek 10: Největší možná (modrá) koule vložená mezi 4 stávající (žluté) koule

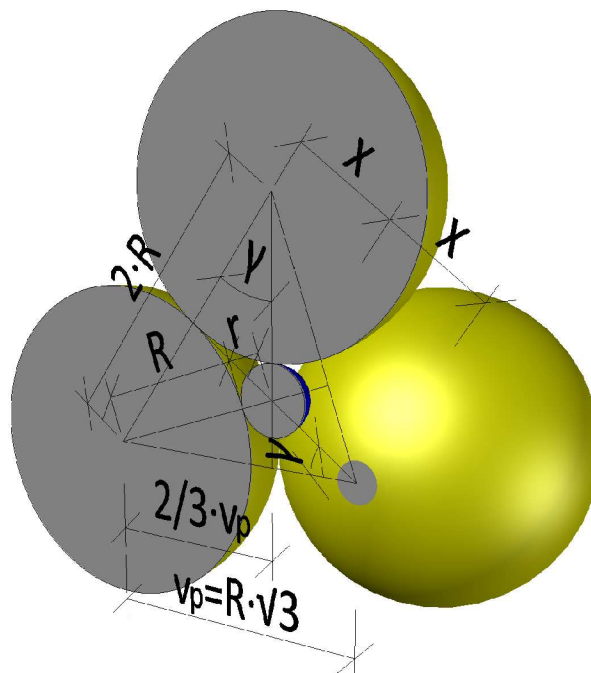


Výpočet maximálního poloměru menší koule, kterou lze vložit mezi stávající 4 větší koule, vychází z geometrické 2-D úlohy sestavené z těchto kroků:

1. Půdorys: určení výšky  $v_p$  rovnostranného trojúhelníku vzniklého spojením středů tří „spodních“ koulí.
2. Nárys: sestrojení trojúhelníku s využitím  $v_p$  a spojnicí středů jedné ze „spodních“ koulí a „horní“ koule. Víme, že střed horní koule musí ležet nad těžištěm půdorysného trojúhelníku.
3. Poloměr menší koule  $r$  spočítáme pomocí goniometrických funkcí.



Obrázek 11: Půdorysný rovnostranný trojúhelník



Obrázek 12: Nárysný trojúhelník

Výpočet poloměru  $r$  menší koule:

$\cos \gamma = \frac{R}{R+r}$ <p><i>Rovnice 5</i></p>	$\sin \gamma = \frac{x}{R+r}$ <p><i>Rovnice 6</i></p>
$\cos \gamma = \frac{2 \cdot x}{R \cdot \sqrt{3}}$ <p><i>Rovnice 7</i></p>	$\sin \gamma = \frac{R}{R \cdot \sqrt{3}}$ <p><i>Rovnice 8</i></p>
$\cos \gamma = \cos \gamma$ <p><i>Rovnice 9</i></p>	$\sin \gamma = \sin \gamma$ <p><i>Rovnice 10</i></p>
$\frac{R}{R+r} = \frac{2 \cdot x}{R \cdot \sqrt{3}}$ <p><i>Rovnice 11</i></p>	$\frac{x}{R+r} = \frac{R}{R \cdot \sqrt{3}}$ <p><i>Rovnice 12</i></p>
$x = \frac{R+r}{\sqrt{3}}$ <p><i>Rovnice 13</i></p>	
$r^2 + 2 \cdot r \cdot R - \frac{1}{2} \cdot R^2 = 0$ <p><i>Rovnice 14</i></p>	
$r_{1;2} = \frac{R \cdot (-2 \pm \sqrt{6})}{2}$ <p><i>Rovnice 15</i></p>	

Nyní, když víme, jak velké koule dokážeme vměstnat do volných míst původního uspořádání, je nutné určit nový poměr zaplnění prostoru dle rovnice 4. Toto bylo provedeno pomocí programu AutoCAD vymodelováním uspořádání koulí v charakteristickém tělese a zjištěním příslušných objemů.

$$\frac{V_{sphere}}{V_{space}} \cdot 100 \approx 75,73 \%$$

*Rovnice 4*

Všimněme si, že po vložení menších koulí do původního uskupení se zaplnění prostoru změní jen nepatrně, a to o 1,68 %. Stále je přítomno spoustu volného místa, které by bylo možné zaplnit dalšími koulemi o menším a menším poloměru. Nepříjemností vzniklou u vkládání dalších a dalších koulí je „generování“ dalších a dalších volných míst. Koule totiž přirozeně nedokáže stoprocentně zaplnit prostor a způsobuje vytvoření jakýchsi „prázdných rohů“. Snažit se zaplnit tyto prázdné rohy dalšími koulemi jen vede ke vzniku dalších prázdných rohů. V podstatě je nemožné za použití koulí, o stejném, ale i o různém poloměru, vyplnit ohraničený prostor stoprocentně.

Bylo by jistě zajímavé dopátrávat a dopočítávat další koule vložitelné do původního „keplerovského“ uspořádání. Je docela dost možné, že bychom tímto způsobem dokázali nalézt skutečně ideální křivku zrnitosti, která by téměř vylučovala mezerovitost směsi.

Ovšem narážíme na několik ale. Skutečná zrna kameniva rozhodně nejsou kulová. A i kdybychom dokázali zaručit jejich dokonalou kulovitost, určitě by se nám je nepodařilo přimět zaujmout pravidelné rozmístění, s jakým teorie sphere packingu pracuje od samotného začátku.

Skutečné kamenivo je náhodně neuspořádaná, nehomogenní a anizotropní směs, a teorie sphere packingu nám není schopna podat informace o tom, jak směs navrhnout.

## 6 ALGORITMUS NÁHODNÉ VOLBY ZRN

Jak bylo zmíněno výše, směs kameniva je náhodně neuspořádaná, a tedy klíč k jejímu návrhu možná leží právě v náhodnosti. Pokud necháme zrna náhodně generovat do prostoru, mohli bychom se tak přiblížit skutečnosti a objevit ideální čáru zrnitosti.

Alternativní návrh čáry zrnitosti bude tedy proveden algoritmem náhodné volby zrn.

Algoritmus byl napsán v programovacím jazyku JavaScript. Výpočet je tedy možné snadno spustit například ve webovém prohlížeči. Výpočet je také možné kdykoliv přerušit a získat aktuální hodnoty, následně je možné opět navázat v místě přerušení. Největším úskalím je čas potřebný k dosažení relevantních hodnot. Například v mém případě jsem nechal výpočet běžet cca 4 dny a za tento čas mi výpočet vygeneroval 4 miliony kulových zrn a prostor byl zaplněn pouze ze 72 %. Doufal jsem v pokoření hranice 10 milionů koulí, ale okolnostmi jsem byl donucen výpočet ukončit.

### 6.1 PRINCIP ALGORITMU

Je dán (zvolen) ohraničený prostor, do kterého se algoritmus snaží naskládat co největší kulová zrna. V našem případě byl za ohraničený prostor zvolen válec o rozměrech: 50,8 mm poloměr podstavy; 127 mm výška válce. To by mělo odpovídat 2 Marshallovým tělesům postaveným na sebe, což víceméně koresponduje se zvolenou nádobou pro následné praktické ověření navržené směsi.

Výpočet probíhá následujícím způsobem:

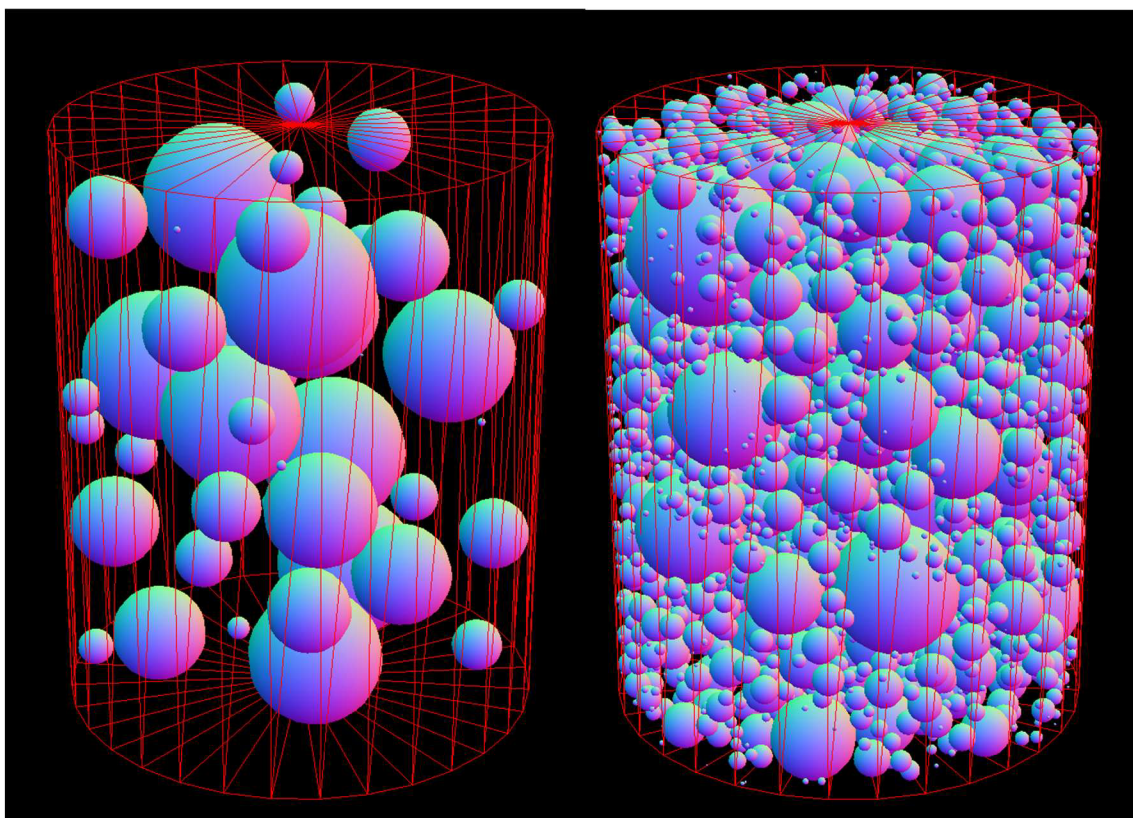
1. Algoritmus zcela náhodně vylosuje souřadnici  $[x;y;z]$  v ohraničeném prostoru a zkontroluje, že se vylosovaný bod nenachází v nějaké již existující kouli.
2. Do vylosované souřadnice je umístěn střed koule.
3. Algoritmus hledá největší možný poloměr koule, kterou lze ještě do prostoru umístit, a je při tom omezen takto:
  - a) je dán (zvolen uživatelem) maximální možný poloměr,
  - b) nová koule se maximálně může dotýkat nejbližší sousední existující koule,
  - c) nová koule se maximálně může dotýkat hranice zadaného ohraničeného prostoru.

Algoritmus v podstatě pouze počítá vzdálenost  $|AB|$  dvou bodů A  $[x_A; y_A; z_A]$ , B  $[x_B; y_B; z_B]$  v prostoru.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

*Rovnice 16*

S narůstajícím počtem vložených koulí ovšem narůstá i čas potřebný pro vložení nové koule, protože algoritmus takto musí propočítat vzdálenosti pro každou již existující kouli. Tento neduh se projeví nejvíce při vyplňování prostoru těmi nejmenšími koulemi, kdy by algoritmus potřeboval nesččetně více času, než kolik jsme mu schopni a ochotni poskytnout. Důsledkem je zdeformování křivky zrnitosti, tak jak je patrné např. v grafu 1 na straně 29 (dolní konec grafu), kde je patrná tendence křivky zrnitosti získané algoritmem přiblížit se Fullerově parabole, ale v důsledku nedostatečného množství malých koulí je nucena se od ní odchýlit.



Obrázek 14: Náhled na vložené koule výpočtem algoritmu do zadaného prostoru (vlevo počátek výpočtu, vpravo zaplnění prostoru ze 46 %)

```

46     }
47 }
48
49 class Sphere {
50     constructor(r, x, y, z) {
51         this.r = r;
52         this.x = x;
53         this.y = y;
54         this.z = z;
55     }
56
57     getVolume() {
58         // lazily creates and returns volume of the sphere
59         if (!this.volume) {
60             this.volume = 4 / 3 * Math.PI * Math.pow(this.r, 3);
61         }
62         return this.volume;
63     }
64
65     static getDistance(sphere1, sphere2) {
66         // returns distance between centers of sphere1 and sphere2
67         return Math.sqrt(Math.pow(sphere1.x - sphere2.x, 2) + Math.pow(sphere1.y - sphere2.y, 2) + Math.pow(sphere1.z - sphere2.z, 2));
68     }
69
70     static getEdgeDistance(sphere1, sphere2) {
71         // returns distance between edges of spheres or 0 if they overlap
72         const distance = Sphere.getDistance(sphere1, sphere2);
73
74         if (distance >= (sphere1.r + sphere2.r)) {
75             return distance;
76         } else {
77             return 0;
78         }
79     }
80 }
81

```

Obrázek 13: Část zdrojového kódu algoritmu (výpočet objemu koule a výpočet vzdálenosti mezi koulemi)

```

113     addSphere(radiusMax){
114         const bottom = -this.height/2;
115         const top = this.height/2;
116         let x = getRandomArbitrary(-this.radius, this.radius);
117         let y = getRandomArbitrary(-this.radius, this.radius);
118         let z = getRandomArbitrary(bottom, top);
119
120         let newSphere = new Sphere(0, x, y, z);
121         let rr = Math.sqrt(x*x+y*y);
122         this.countAll++;
123
124         if (rr>=this.radius){//navrzeny stred je mimo valec
125             this.countOut++;
126             return false;
127
128         }
129
130         let radius = Math.min(this.radius-rr, z-bottom, top-z) ;//maximalni polomer uvnitr valce
131
132         for (let sphere of this.spheres) { //hledam ve vsech koulich, jestli nejsem v kouli
133             let distance = Sphere.getDistance(newSphere,sphere);
134
135             if (distance <= sphere.r) { // jsem v kouli
136                 this.countInSphere++;
137                 return false;
138             }
139
140
141             let newRadius = distance-sphere.r;
142             if (newRadius < radius) {
143                 radius = newRadius;
144             }
145         }
146
147         if (radius > radiusMax) {
148             radius = radiusMax;
149         }

```

Obrázek 15: Část zdrojového kódu algoritmu (podmínky pro maximální poloměr koule)

## 6.2 VÝSLEDKY VÝPOČTU

Výpočet trval přibližně 4 dny. Za tuto dobu byl zadáný prostor ze 72 % vyplněn koulemi. Podařilo se vložit 4 000 000 koulí.

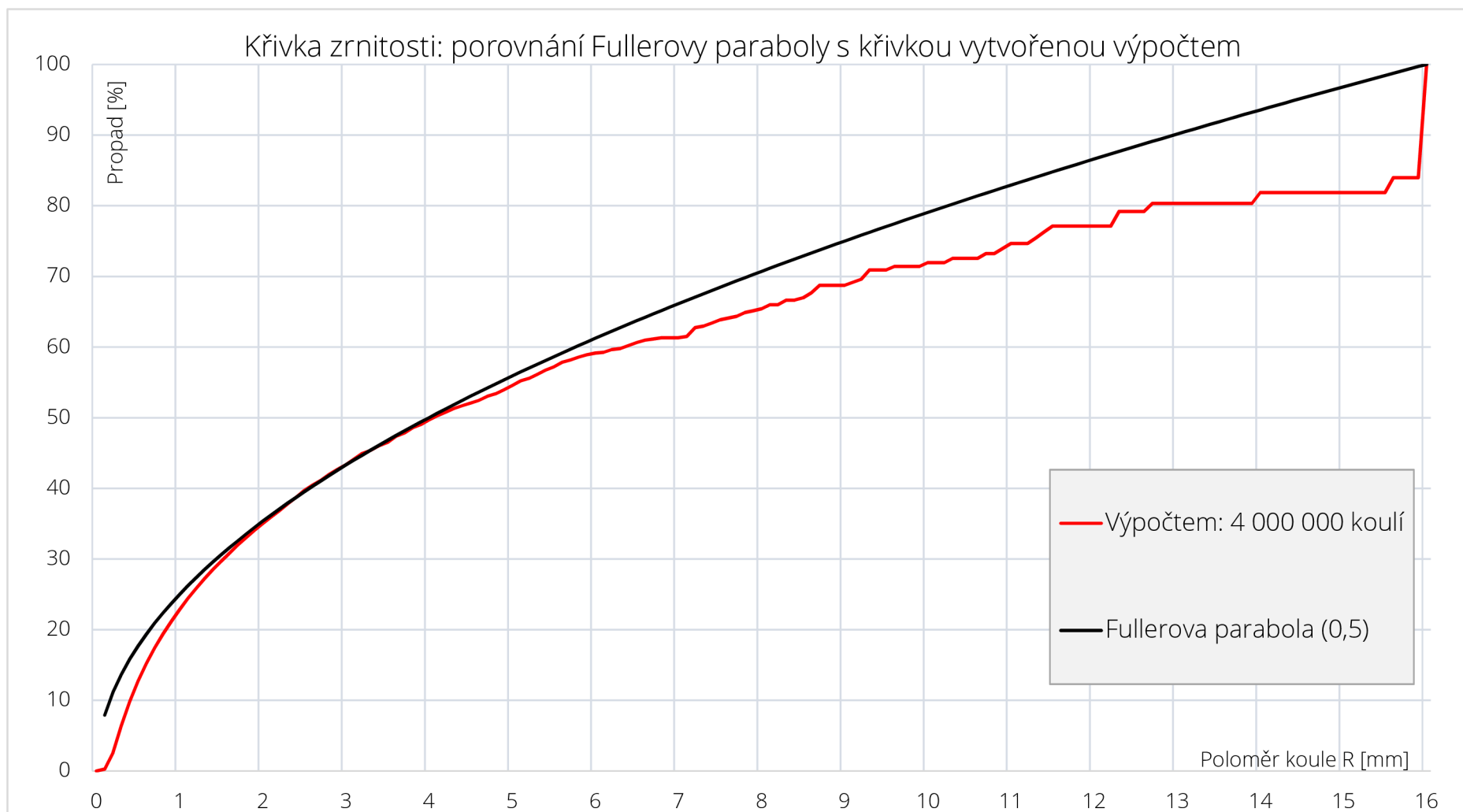
Data získaná výpočtem algoritmu náhodné volby zrn byla převedena do programu Excel a následně z nich byl vytvořen graf představující křivku zrnitosti.

Na straně 29 naleznete graf 1 porovnávající výsledky výpočtu s Fullerovou parabolou využívající rovnici 1, tedy vztahu pro Fullerovu parabolu s exponentem 0,5. Na horizontální ose grafu jsou vyneseny hodnoty poloměru koule (zrna).

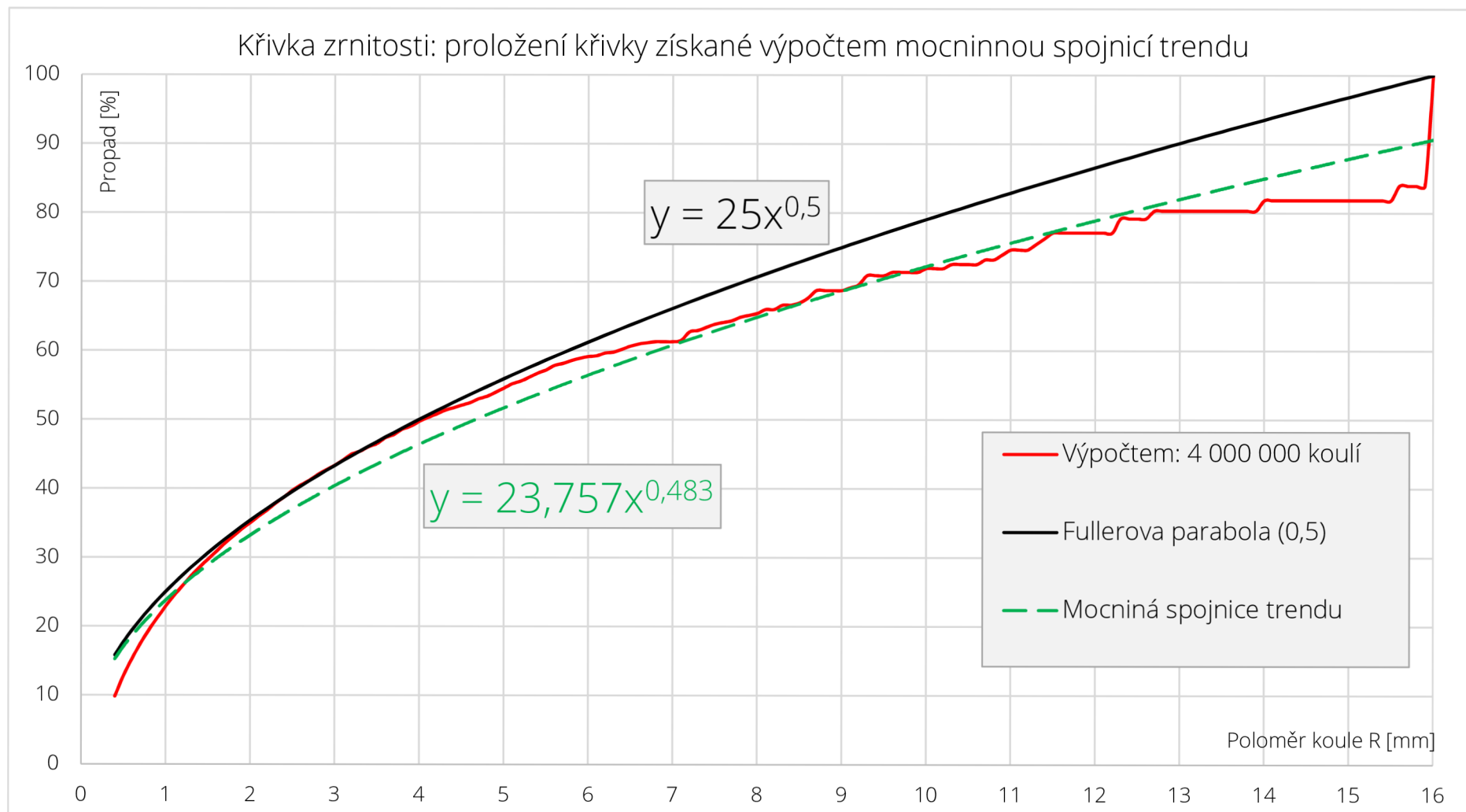
Následuje graf 2, ze kterého byly vypuštěny hodnoty pro malé poloměry koulí (konkrétně 0,1 až 0,3 mm včetně). Hodnoty pro tyto poloměry nelze považovat za relevantní, neboť výpočet neměl dostatek času, aby zbývající volný prostor důkladně vyplnil těmito kuličkami. Poté byla křivka zrnitosti získaná výpočtem dle algoritmu proložena mocninnou spojnicí trendu a opět je zde přítomna pro porovnání Fullerova parabola. Do grafu byly také vloženy explicitní rovnice pro Fullerovu parabolu a pro mocninnou spojnicí trendu, ve kterých  $y$  vyjadřuje propad v % a  $x$  je poloměr koule v mm.

V grafu 1 i v grafu 2 jsou patrné charakteristické „skoky“ křivky zrnitosti získané výpočtem dle algoritmu. Nejmarkantnější je skok u největších koulí (horní konec grafu). Ten je způsoben nedokonalostí algoritmu na samém začátku výpočtu, kdy výpočet má k dispozici spoustu volného místa, které se rozhodne zaplnit největšími možnými koulemi. Důsledkem je nedostatek místa pro o maličko menší koule a prostor je dále zaplňován koulemi, které mají podstatně odlišný poloměr od prvních vložených.





Graf 1: Křivka zrnitosti: porovnání Fullerovy paraboly s křivkou vytvořenou algoritmem



Graf 2: Křivka zrnitosti: proložení křivky získané algoritmem mocninou spojnicí trendu

### 6.3 ZÍSKÁNÍ KŘIVKY ZRNITOSTI Z VÝSLEDKŮ VÝPOČTU

Pro návrh křivky zrnitosti použijeme rovnici pro mocninnou spojnicí trendu z grafu 2. Součinitelem  $k$  si rovnici upravíme pro náš konkrétní případ, viz. rovnici 17. Pro praktické ověření máme k dispozici skleněné koule o maximálním průměru 35 mm. Do rovnice 17 tedy dosadíme  $y = 100 \%$  a  $x = 35 \text{ mm}$  a vyjádříme součinitel  $k$ , s jehož pomocí dokážeme dopočítat procentuální propady pro ostatní průměry koulí.

$$y = k \cdot 23,757 \cdot x^{0,483},$$

*Rovnice 17*

kde:  $y$  – procentuální propad [%]  
 $x$  – průměr koule [mm]  
 $k$  – součinitel [-]

$$100 = k \cdot 23,757 \cdot 35^{0,483}$$

$$k = \frac{100}{23,757 \cdot 35^{0,483}} = 0,7558$$

Nyní, když známe hodnotu součinitele  $k$ , jsme schopni spočítat a vykreslit křivku zrnitosti, kterou použijeme pro praktické ověření.

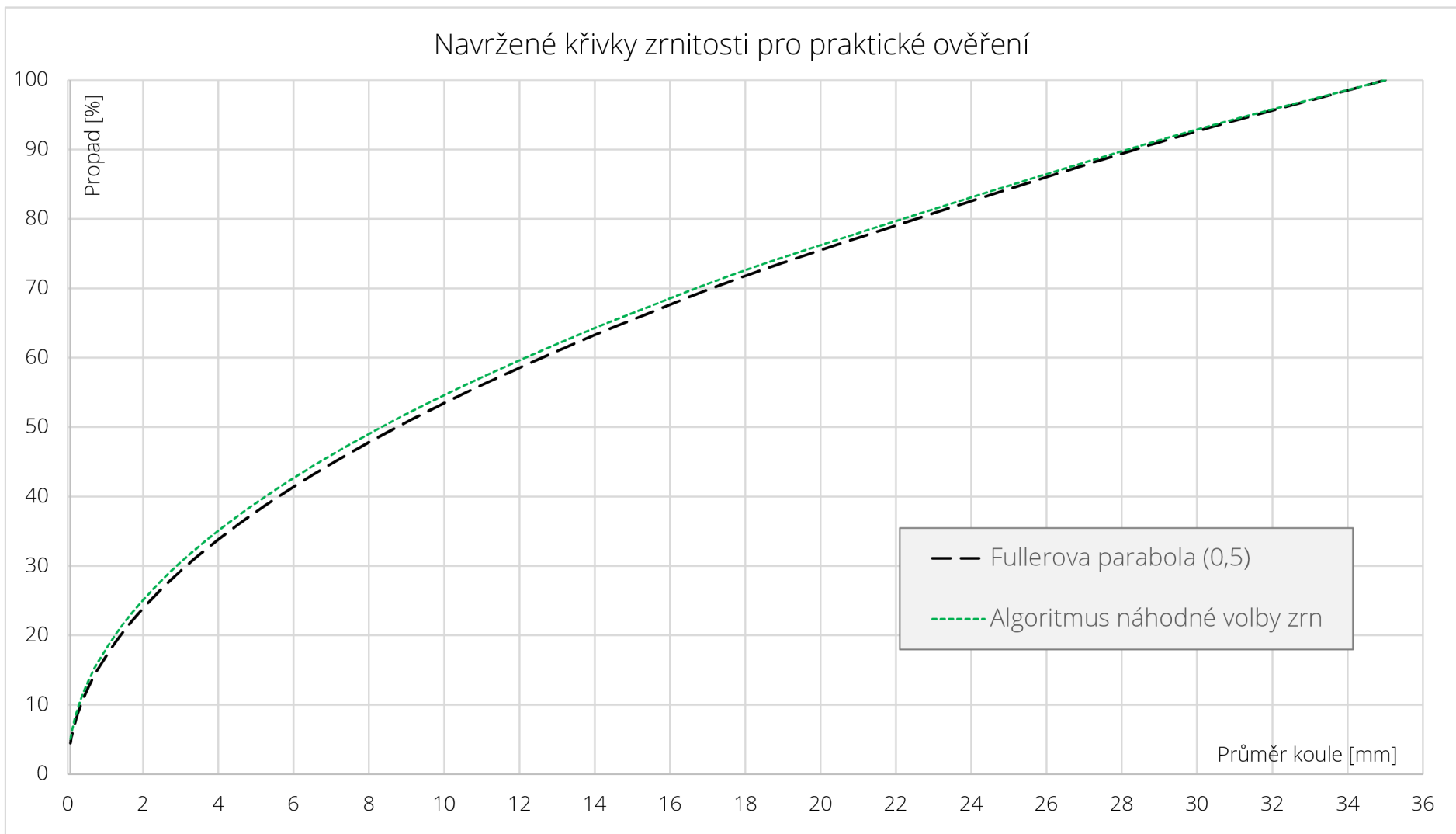
Pro praktické ověření návrhu směsi v laboratoři máme k dispozici skleněné koule následujících průměrů [mm]:

35\_\_22\_\_16\_\_14\_\_12\_\_10\_\_9\_\_8\_\_7\_\_6\_\_5\_\_4\_\_3\_\_2\_\_1,0-0,8\_\_0,8-0,6\_\_  
0,57-0,43\_\_0,43-0,32\_\_0,30-0,20\_\_0,20-0,10\_\_0,11-0,07\_\_0,05-0,001

Každému průměru (skupině průměrů) byl přiřazen interval, který bude průměr (skupina průměrů) reprezentovat při návrhu směsi.

Tabulka 1: Návrh křivek zrnitosti pro praktické ověření

Reprezentující průměr [mm]	Interval [mm]	Hraniční (výpočetní) průměr [mm]	Fullerova parabola (0,5)		Algoritmus náhodné volby zrn	
			Propad [%]	Zastoupení intervalu ve směsi [%]	Propad [%]	Zastoupení intervalu ve směsi [%]
35	35-28,5	35	100,00	9,76	100,00	9,45
22	28,5-19	28,5	90,24	16,56	90,55	16,11
16	19-15	19	73,68	8,21	74,45	8,03
14	15-13	15	65,47	4,52	66,42	4,44
12	13-11	13	60,94	4,88	61,98	4,80
10	11-9,5	11	56,06	3,96	57,18	3,91
9	9,5-8,5	9,5	52,10	2,82	53,27	2,79
8	8,5-7,5	8,5	49,28	2,99	50,48	2,96
7	7,5-6,5	7,5	46,29	3,20	47,52	3,17
6	6,5-5,5	6,5	43,09	3,45	44,35	3,44
5	5,5-4,5	5,5	39,64	3,78	40,91	3,78
4	4,5-3,5	4,5	35,86	4,23	37,13	4,24
3	3,5-2,5	3,5	31,62	4,90	32,89	4,93
2	2,5-1,5	2,5	26,73	6,02	27,95	6,11
0,8-1,0	1,5-0,8	1,5	20,70	5,58	21,84	5,72
0,6-0,8	0,8-0,6	0,8	15,12	2,03	16,12	2,09
0,43-0,57	0,43-0,6	0,6	13,09	2,01	14,03	2,09
0,32-0,43	0,32-0,43	0,43	11,08	1,52	11,94	1,59
0,20-0,30	0,20-0,32	0,32	9,56	2,00	10,36	2,10
0,10-0,20	0,11-0,20	0,2	7,56	2,21	8,25	2,35
0,07-0,11	0,07-0,11	0,1	5,35	0,87	5,90	0,93
0,001-0,050	0-0,070	0,07	4,47	4,47	4,97	4,97



Graf 3: Navržené křivky zrnitosti pro praktické ověření

## 7 PRAKTICKÉ POROVNÁNÍ KŘIVEK ZRNITOSTI

Porovnání křivek zrnitosti provedeme v laboratoři za použití ideálních skleněných kulových zrn. Směsi umícháme podle procentuálních hodnot propadů, resp. dle procentuálních hodnot zastoupení intervalů ve směsi, uvedených v tabulce 1.

Kritériem hodnocení návrhu pro nás bude sypná hmotnost setřeseného „kameniva“. Směs s vyšší objemovou hmotností má větší předpoklady stát se kvalitnějším výrobkem.

Navážování jednotlivých složek směsi nebylo možné uskutečnit přesně podle navržených křivek zrnitosti, ale byla vynaložena snaha, co nejvíce se jim přiblížit. Skutečně navážené hodnoty jednotlivých složek a skutečné procentuální zastoupení jednotlivých intervalů jsou uvedeny v tabulce 2.

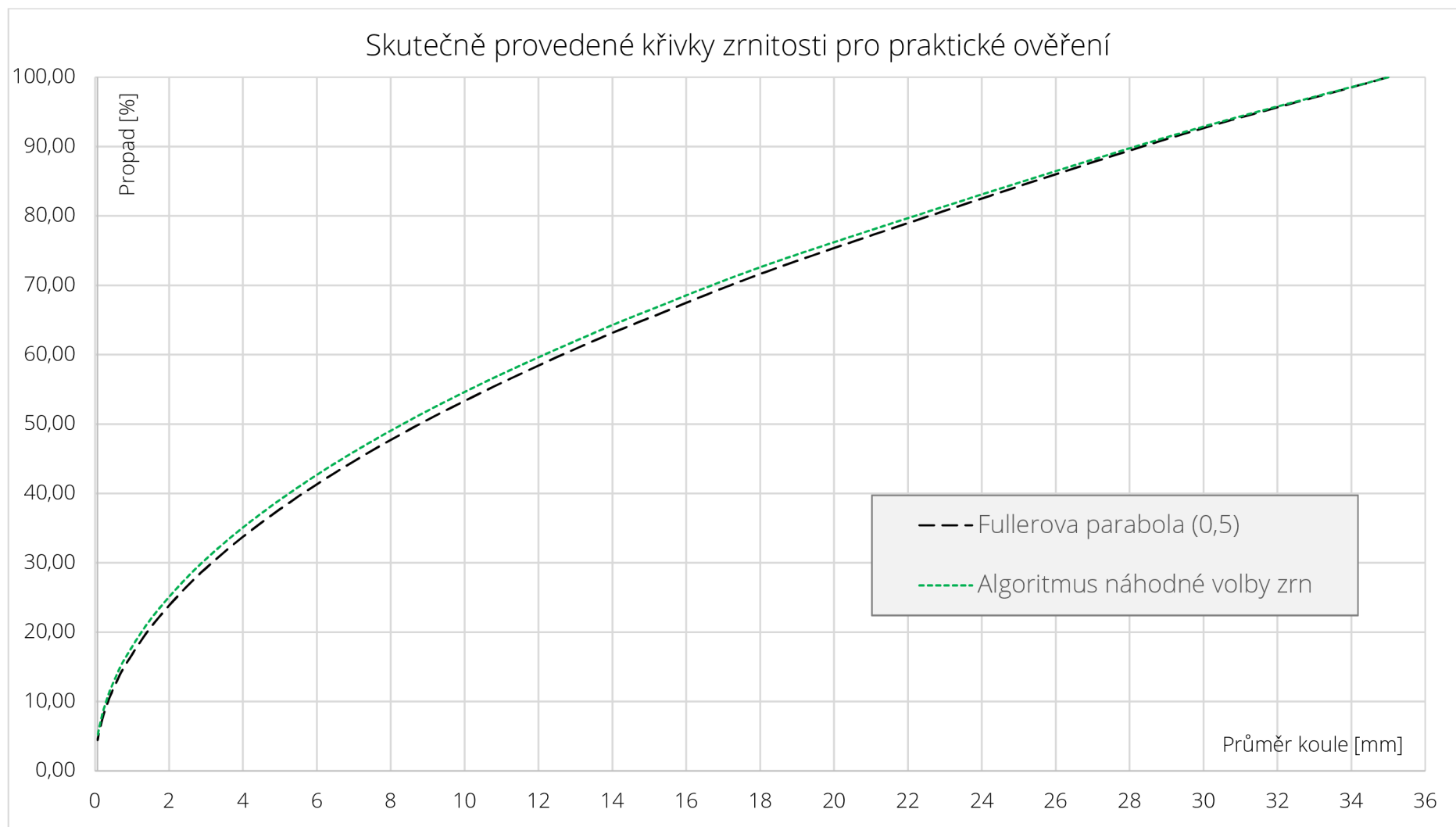


Obrázek 16: Navážené směsi pro praktické porovnání (vlevo směs dle Fullerovy paraboly, vpravo směs dle algoritmu náhodné volby zrn)

Nakonec se skutečně navážené hodnoty liší od teoretických jen v řádu setin procenta.

*Tabulka 2: Skutečné křivky zrnitosti pro praktické ověření*

Reprezentující průměr [mm]	Fullerova parabola (0,5)			Algoritmus náhodné volby zrn		
	Propad [%]	Zastoupení intervalu ve směsi [%]	Navážená hmotnost intervalu [g]	Propad [%]	Zastoupení intervalu ve směsi [%]	Navážená hmotnost intervalu [g]
35	100,00	9,74	221,8	100,00	9,45	216,6
22	90,26	16,73	380,9	90,55	16,11	369,3
16	73,53	8,23	187,4	74,44	8,03	184,1
14	65,30	4,46	101,5	66,41	4,44	101,8
12	60,84	4,90	111,6	61,97	4,78	109,6
10	55,94	3,94	89,8	57,19	3,90	89,5
9	51,99	2,81	64,0	53,29	2,79	64
8	49,18	2,98	67,8	50,50	2,96	67,8
7	46,20	3,20	72,9	47,54	3,18	72,9
6	43,00	3,44	78,4	44,36	3,45	79
5	39,56	3,77	85,9	40,91	3,78	86,6
4	35,78	4,23	96,2	37,13	4,24	97,3
3	31,56	4,89	111,3	32,89	4,93	113,1
2	26,67	6,01	136,9	27,96	6,11	140,1
0,8-1,0	20,66	5,57	126,9	21,85	5,72	131,1
0,6-0,8	15,08	2,02	46,0	16,13	2,09	48
0,43-0,57	13,06	2,00	45,6	14,03	2,09	47,8
0,32-0,43	11,06	1,52	34,6	11,95	1,59	36,4
0,20-0,30	9,54	2,00	45,5	10,36	2,10	48,2
0,10-0,20	7,54	2,21	50,3	8,26	2,35	53,8
0,07-0,11	5,33	0,87	19,8	5,91	0,94	21,5
0,001-0,050	4,46	4,46	101,6	4,97	4,97	114



Graf 4: Skutečně provedené (navážené) křivky zrnitosti pro praktické ověření



## 7.1 OBJEMOVÁ HMOTNOST

Před samotným zjištěním objemové hmotnosti byly směsi důkladně promíseny. Následně byla směs ukládána do zkušební nádoby a průběžně setřásána a „hutněna“ rukou. Směsí byla zkušební nádoba naplněna až po okraj. Na digitálních vahách byla odečtena hmotnost směsi v zaplněné zkušební nádobě. Byla zjištěna mezerovitost. Postup byl opakován pro druhou směs. Použita byla stejná zkušební nádoba.

Jako zkušební nádoba mi posloužila plechovka, která se v laboratoři PKO používá na uchování vzorků asfaltu. Plechovka válcového tvaru měla vnitřní rozměry: výška 116,3 mm a průměr podstavy 98,7 mm. Měřením pomocí odměrného válce byl objem nádoby stanoven na cca 905 ml.



Obrázek 17: Naplněná zkušební nádoba směsí (v tomto případě směs dle algoritmu náhodné volby zrn)

Určení skutečné objemové hmotnosti směsi pro náš případ není důležité a vzhledem k nepřesnosti měření objemu nádoby bychom nejspíš nedostali správné hodnoty. Postačí zjistit, která směs má vyšší hodnotu objemové hmotnosti než druhá navážka. Tedy stačí zjistit hmotnost směsi v zaplněné zkušební nádobě.

*Tabulka 3: Hmotnost směsi ve zkušební nádobě*

Směs	Hmotnost směsi ve zkušební nádobě $m_1$ [g]
dle Fullerovy paraboly	1921,9
dle algoritmu náhodné volby zrn	1903,0

Z hodnot uvedených v tabulce 3 lze stanovit, že směs navržená dle Fullerovy paraboly bude mít vyšší hodnotu objemové hmotnosti. Ovšem rozdíl mezi směsmi není markantní, což bylo možné vyvodit již z navržených křivek zrnitosti.

## 7.2 MEZEROVITOST

Mezerovitost byla zjištěna vyplněním vzduchových mezer ve směsi vodou a následným určením hmotnosti této dodané vody. Voda byla do zkušební nádoby opatrně nalévána dokud ze směsi unikaly vzduchové bubliny. Zkušební nádoba byla v průběhu doplňování vody opatrně naklápěna a protřepávána, aby bylo uvolněno co nejvíce vzduchových bublin.

$$M = \frac{m_2 - m_1}{V} \cdot 100,$$

*Rovnice 18*

kde: M – mezerovitost [%]

V – objem zkušební nádoby (cca 905 ml)

Tabulka 4: Mezerovitost směsi

Směs	Hmotnost směsi a vody ve zkušební nádobě $m_2$ [g]	Hmotnost (objem) dodané vody do vzorku $m_2 - m_1$ [g] ([ml])	Mezerovitost M [%]
dle Fullerovy paraboly	2015,7	93,8	10,4
dle algoritmu náhodné volby zrn	2006,5	103,5	11,4

Hustota vody byla uvažována v hodnotě  $\rho_w = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , neboť uvažovat ji v absolutně správné hodnotě by nemělo velký význam na přesnost celého experimentu.

Dle měření vychází pro směs dle Fullerovy paraboly o 1,0 % nižší hodnota mezerovitosti než pro směs dle algoritmu náhodné volby zrn. Hodnoty bych nepovažoval za stoprocentně přesné, vzhledem k možné nepřesnosti měření objemu zkušební nádoby a také není úplně vyloučeno, že ve směsi nezůstaly některé vzduchové mezery.

Měření mezerovitosti slouží spíše k porovnání s mezerovitostí, vypočítanou dle algoritmu náhodné volby zrn. Výpočet při naskládání 4 milionů koulí ukazoval zaplnění prostoru pouze 72 %, tedy mezerovitost 28 %. Toto je možné přičítat způsobu skládání koulí k sobě navzájem, kdy se dotýkají pouze v jednom bodě. Algoritmus není schopen vložené koule žádným způsobem přerovnat, resp. setřást. Realita je od výpočtu odlišná a dokazuje to i toto měření.

## 8 ZÁVĚR

Nepodařilo se vypátrat, kdy se Fullerova parabola začala využívat v dopravním stavitelství. Původně byla empiricky navržena pro směsi cementových betonů. Propátral jsem nesčetně materiálů a pročetl jsem několik technických norem, ale nikde jsem nenalezl pevně daný rok (nebo alespoň dekádu), kdy se zavedlo použití Fullerovy paraboly do návrhu vozovkových směsí.

Alternativně, pomocí algoritmu náhodné volby zrn jsem sestavil křivku zrnitosti, která se velmi blíží Fullerově parabole.

Z praktického laboratorního porovnání vyplynulo, že směs navržená pomocí Fullerovy paraboly má nižší mezerovitost než směs navržená dle algoritmu náhodné volby zrn. Ovšem z důvodu nedostatku materiálu byl zhotoven pouze 1 vzorek pro každou směs a při vyhodnocování experimentu nelze použít statistiku, která by nám poskytla věrohodnější výsledek.

Postup návrhu křivky zrnitosti pomocí algoritmu náhodné volby zrn je použitelný i pro praktické účely.

Je pro mě velmi překvapující, že jsem byl schopen čistě náhodným způsobem sestavit křivku zrnitosti, která se velmi blíží zavedenému postupu využívajícímu Fullerovu parabolu.

Pro další zkoumání bych doporučil upravit algoritmus, tak aby bylo možné vložené koule zhutnit/setřást už při výpočtu.

## 9 REFERENCE

- [1] ČSN 73 6160 *Zkoušení asfaltových směsí*. Praha: Český normalizační institut, 2008.
- [2] ČSN EN 13108 *Asfaltové směsi - Specifikace pro materiály*. Praha: Český normalizační institut, 2008.
- [3] Fuller, William Barnard. *Beton.Wiki* [online]. [cit. 2018-04-22]. Dostupné z: [http://www.beton.wiki/index.php?title=Fuller,\\_William\\_Barnard](http://www.beton.wiki/index.php?title=Fuller,_William_Barnard)
- [4] Gradation test. *Pavement Interactiv* [online]. [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: <http://www.pavementinteractive.org/gradation-test/>
- [5] SVOBODA, Luboš. O mísení frakcí kameniva. *Beton TKS*. 2004, 4(1), s. 24-28. ISSN 1213-3116.
- [6] YIDETI, Tatek Fekadu. Road Aggregates Characterization. *KTH.se* [online]. [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: <https://www.kth.se/social/upload/514b3ac6f2765412f7cb69e3/Lecture.pdf>
- [7] Sphere packing. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere\\_packing](https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing)
- [8] Close-packing of equal spheres. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Close-packing\\_of\\_equal\\_spheres](https://en.wikipedia.org/wiki/Close-packing_of_equal_spheres)
- [9] COHN, Henry. Sphere packing. *Math.mit.edu* [online]. 2015 [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: [http://math.mit.edu/classes/18.095/2015IAP/lecture6/lect\\_notes.pdf](http://math.mit.edu/classes/18.095/2015IAP/lecture6/lect_notes.pdf)
- [10] WEISSTEIN, Eric W. Sphere Packing. *MathWorld* [online]. [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/SpherePacking.html>
- [11] DEVLIN, Keith. Kepler's Sphere Packing Problem Solved. *Mathematical Association of America* [online]. [cit. 2018-05-22]. Dostupné z: [https://www.maa.org/external\\_archive/devlin/devlin\\_9\\_98.html](https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_9_98.html)
- [12] FULLER, W. B. a S. E. THOMPSON. The laws of proportioning concrete. In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1907, s 67-143.

## 10 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Mezní hodnoty návrhového složení směsi asfaltových betonů [2] .....	10
Obrázek 2: Čára zrnitosti v grafu s logaritmickou horizontální osou.....	11
Obrázek 3: Jeden z mnoha Fullerových grafů s křivkami zrnitosti [12].....	13
Obrázek 4: Ideální čára zrnitosti dle FHWA.....	15
Obrázek 5: Porovnání Fullerovy křivky při použití různého exponentu .....	15
Obrázek 6: Porovnání Fullerovy křivky při použití různého exponentu v grafu s logaritmickým měřítkem .....	16
Obrázek 7: Ilustrativní snímek uspořádání tenisových míčků .....	17
Obrázek 8: Hexagonální uspořádání stejných kruhů v dvourozměrném prostoru..	18
Obrázek 9: Dva možné způsoby skládání vrstev stejných koulí na sebe.....	19
Obrázek 10: Největší možná (modrá) koule vložená mezi 4 stávající (žluté) koule..	20
Obrázek 11: Půdorysný rovnostranný trojúhelník.....	21
Obrázek 12: Narysný trojúhelník.....	21
Obrázek 14: Část zdrojového kódu algoritmu (výpočet objemu koule a výpočet vzdálenosti mezi koulemi).....	26
Obrázek 13: Náhled na vložené koule výpočtem algoritmu do zadaného prostoru (vlevo počátek výpočtu, vpravo zaplnění prostoru ze 46 %).....	26
Obrázek 15: Část zdrojového kódu algoritmu (podmínky pro maximální poloměr koule).....	27
Obrázek 16: Navážené směsi pro praktické porovnání (vlevo směs dle Fullerovy paraboly, vpravo směs dle algoritmu náhodné volby zrn).....	34
Obrázek 17: Naplněná zkušební nádoba směsí (v tomto případě směs dle algoritmu náhodné volby zrn) .....	37

## 11 SEZNAM GRAFŮ

Graf 1: Křivka zrnitosti: porovnání Fullerovy paraboly s křivkou vytvořenou algoritmem.....	29
Graf 2: Křivka zrnitosti: proložení křivky získané algoritmem mocninou spojnicí trendu .....	30
Graf 3: Navržené křivky zrnitosti pro praktické ověření.....	33
Graf 4: Skutečně provedené (navážené) křivky zrnitosti pro praktické ověření.....	36

## 12 SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Návrh křivek zrnitosti pro praktické ověření .....	32
Tabulka 2: Skutečné křivky zrnitosti pro praktické ověření.....	35
Tabulka 3: Hmotnost směsi ve zkušební nádobě .....	38
Tabulka 4: Mezerovitost směsi .....	39