Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Využití matematického softwaru v hodinách matematické analýzy

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Gronych
Matematika a základy technických věd a informačních technologií

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jitka Laitochová CSC.**

Olomouc 2020

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně za použití uvedené literatury.

V Olomouci

Dne 13. května 2020 podpis:…………………………….

Děkuji Doc. RNDr. Jitce Laitochové CSc. za vedení mé bakalářské práce a za poskytování cenných rad. Dále bych chtěl moc poděkovat mé rodině za trpělivost v celém studiu.

OBSAH:

1. Úvod

Motto mé bakalářské práce je: „*Technologický rozvoj dvacátého století poznamenal stejně jako sociální instituce i školy. Tento vliv byl zřetelný ve dvou rovinách – jednak v rovině zavádění konkrétních technologických prostředků, jednak v rovině utopických projektů, které se zrodily z nadšení nad velkým potenciálem změn* [1].“

Tak jak jde čas, mění se i způsob vyučování. Vyučování jednoznačně prošlo mnohaletým vývojem. V každé době se snažila výchova udělat z dětí kvalitního a praktického člověka. Už v dřívějších dobách se při výuce používaly různé pomůcky a názorné příklady. Proč tedy v dnešní době plně nevyužít software při výuce? V sedmdesátých letech si pomalu, ale jistě začaly do škol prorážet cestu počítače. Od té doby se staly praktickou součástí každé školy a dnes si již žádná škola nedokáže práci bez počítačů ani představit. A zrovna dnešní doba nabízí široké možnosti jak učit pomocí různých programů. Proč to tedy nevyužít? Učitelé se mnohdy těmto metodám vzpírají, ale myslím si, že je to škoda a bylo by velice užitečné při jakékoliv výuce použít moderní technologii. Jednak to usnadní studentům práci, jednak studenti vše lépe pochopí a hlavně se mnohem lépe budou orientovat v dnešním technickém světě. To platí pro výuku jakéhokoliv předmětu, obzvláště pak matematiky a matematické analýzy. Protože sjednocením jednotlivých znalostí z matematiky se vytvoří komplexní soubor všech znalostí, a to by měl být cíl dnešní moderní výuky.

Toto všechno jsou důvody, proč zavést software do výuky jakéhokoliv předmětu. Pokud mám hovořit o zavedení softwaru do výuky matematické analýzy, zde vše platí dvojnásob a využití softwaru je pomalu nutností. Matematická analýza je v mnoha odvětvích velice abstraktní, proto je velice potřebné při její výuce vhodný software využít. Bez použití vhodného softwaru je matematická analýza zbytečně složitá a pro studenty těžko představitelná. Zavedením daného softwaru do hodin matematické analýzy zjednodušíme práci nejen učitelům, ale hlavně studentům, kteří budou matematickou analýzu mnohem lépe chápat a využívat, ale hlavně je budou hodiny matematické analýzy bavit.

Právě proto jsem si vybral toto téma pro svou bakalářskou práci. Budu se jednak snažit všeobecně popsat software pro výuku, ale především poté se zaměřím přímo na jeden jediný software, který dle mého názoru patří mezi nejvhodnější programy pro výuku matematické analýzy, a to Maple. A právě pomocí programu Maple budu v této práci demonstrovat některé vybrané kapitoly z matematické analýzy, které jsou vhodné pro použití programu Maple ve výuce matematiky.

2. Využití počítače ve výuce

V této kapitole bych rád všeobecně popsal využití počítače ve výuce a funkci počítačů ve výuce. Poté chci rozebrat rozdělení programů a následně popsat výukový software a jeho rozdělení. Vyzvednu výhody zavedení softwaru do výuky a samozřejmě uvedu i některá jeho úskalí. V závěru kapitoly rozdělím přímo matematický software a popíšu nejznámější programy pro výuku matematiky na základních a středních školách. Podrobněji rozepíšu programy, které se zaměřují především na odvětví matematické analýzy. Nejvíce se budu snažit všeobecně popsat program Maple, protože ten je pro mou bakalářskou práci stěžejní.

Jak je zřejmé, já osobně jsem pro používání výukového software při hodinách matematiky, ale i zde platí pravidlo všeho s mírou. Jsem toho názoru, že při nadměrném používání výukového softwaru by mohlo dojít k tomu, že pro studenty toto téma nebude zajímavé a nebudou se na tuto výuku těšit. Z luxusu se může stát standart, kterého si studenti přestanou vážit, a to je nežádoucí.

Využití počítače ve výuce lze do výuky zařadit dvěma způsoby [2]:

1. Výuka o počítači

   V tomto případě je předmětem výuky počítač. Výuka je zaměřena na jeho technické vybavení (hardware), obsluhu a údržbu, a na programové vybavení a tvorbu software.

2. Výuka s počítači

   Zahrnuje všechny způsoby využití počítače pro účely výuky. Počítač je pomůckou pro učitele a žáka. Tímto způsobem pojatá výuka může mít uplatnění ve všech vyučovacích předmětech. Je ovšem nutná určitá míra znalostí práce s počítačem. Výuku s počítači můžeme rozdělit do dvou oblastí:

   - Počítačem podporovaná výuka
     - Použití počítače jako doplňujícího média v rámci celkového řízení vyučování učitelem pro dílčí didaktické funkce slouží k výkladu látky, procvičování, testování, simulaci aj.
   - Počítačem řízená výuka

- Počítač je systémem, který zajištuje většinu funkcí vyučování. Mezi ně patří například: evidence studijních výsledků, nabídka lekcí, banka testových úloh, generátor testů, zadávání úkolů, vyhodnocování odpovědí apod. [2].

Využití počítačů ve výuce má daleko více možností než klasické pomůcky. Důvodem je velké množství všestranně zaměřených funkcí počítačů. Mezi nejdůležitější funkce řadíme tyto [4]:

1. Počítač jako učební pomůcka
   Jedná se o nejužívanější funkci, při které používáme počítač jako pomůcku při programování, obsluhy počítače, poznávání jednotlivých typů počítačů. Zvyšuje názornost pomocí modelování, nejrůznějších simulací, grafiky a animací. Jako učební pomůcka je počítač využíván k reprezentaci učební látky.

2. Počítač jako administrativní pracovní nástroj učitele
   Učiteli slouží počítač jako pracovní nástroj při přípravě a plánování pedagogického procesu, při řízení a hodnocení výuky. Pro vedení školní administrativy slouží nejznámější program Bakaláři, který pokrývá následující oblasti: evidence žáků a zaměstnanců, grafické zpracování klasifikace, třídní knihu, propojení školy s rodiči prostřednictvím webových stránek, tematické plány a rozvrhy hodin.

3. Počítač jako vnější aktivní paměť učitele
   Funkce je uskutečňována prostřednictvím e-learningu, který lze chápat jako formu vzdělávací činnosti, při níž vzdělávající a vzdělávání vstupují do určitých vztahů za aktivní účasti počítače jako technického prostředku pro dosažení předem stanoveného cíle.

4. Počítač jako didaktický prostředek
   Počítač je využíván ve výuce s didaktickými programy, při spojení s dataprojektorem a interaktivní tabulí. Pouze v předmětu informatika mají žáci možnost pracovat samostatně s počítačem. V ostatních předmětech tomu tak většinou není.

2.1 Software a jeho rozdělení

Software, který je možno použít při výuce se rozděluje takto [5]:

- Edukační software je jakékoliv programové vybavení počítače, které je předurčeno pro využití v situacích, kdy dochází k rozvoji osobnosti jedince.

- Výukový software je jakékoliv programové vybavení počítače, které je určeno k výukovým účelům a dokáže plnit alespoň některou z didaktických funkcí: motivace, expozice učiva, upevnění osvojených vědomostí a dovedností, kontrola získané úrovně vědomostí a dovedností.

Ve své bakalářské práci budu nejdříve podrobně rozebírat výukový software. K základním funkcím výukových programů řadíme: výklad látky, procvičování látky, řešení problémů, simulace problémů, simulační hry, opakování a automatické kontroly [3].

Výukový program je přehledný, názorný a umožnuje žákům se jednoduše v programu orientovat. Dá se využít jednak přímo v prezenční výuce, ale může sloužit také pro samostudium žáků.

Rozdělení výukových programů [3]:

1. programy zaměřené na výklad
   - jsou to především textové programy, které nahrazují tradiční učebnice. Výhodou těchto programů oproti klasickým učebnicím jsou odkazy, které propojují související témata v programu.

2. programy zaměřené na simulaci
   - simulační programy zobrazí daný problém v grafické podobě, jsou nejčastěji používány v matematice, fyzice nebo chemii. Jedná se o počítačovou simulaci, díky které si žák sám prozkoumá vzniklou situaci.

3. programy zaměřené na zkoušení a testování
   - tyto programy jsou nejrozšířenějším typem výukových programů. Jsou založeny na systému otázek a odpovědí tak, aby žák učivo co nejlépe zvládl. Programy zaměřené na zkoušení a testování poskytují okamžitě zpětnou vazbu a mohou

navrhovat i známkování. Dle Burianové (2003) v těchto programech existují otázky s různými typy odpovědí:

- otázky s výběrovou odpovědí (žák vybere správnou odpověď),
- otázky s tvořenou odpovědí (žák samostatně vytvoří odpověď),
- otázky přiřazovací (přiřazení správných odpovědí – několika pojmů k sobě),
- otázky seřazovací (uspořádání správných odpovědí dle určitého kritéria)
- otázky umísťovací.

4. programy zaměřené na procvičování látky
   - programy řídí procvičování daného učiva. Fungují na principu otázek a odpovědí. Programy rozvíjejí dovednosti žáků a také procvičují probírané učivo. Procvičování slouží jako samostudium pro žáky.

V praxi se ovšem často setkáváme s výukovými programy, které kombinují výše uvedené typy výukových programů [3].

2.2 Výhody zavedení software

Nyní si popíšeme řadu výhod, které nám výukové programy a jejich zařazení do výuky nabízí. Pomocí počítačů vytvoříme vhodné prostředí pro učení, které studenty nestresuje a naopak je přitahuje a baví. Studenti, pro které je klasický výklad nezajímavý, se díky počítačům ve výuce mohou pro učení znovu nadchnout. Ovšem aby nedošlo k nedorozumění, výukový software není určen jen pro podprůměrné studenty, právě naopak je určen pro celou škálu studentů, i pro nadprůměrné studenty má své výhody. Díky výukovým programům podporujeme ve studentech fantazii, kreativitu a vlastní myšlení studentů. Učení je interaktivní. Programy zajišťují studentům zpětnou vazbu, kontrolu a vyhodnocení jejich práce, což při běžné klasické výuce nemusí být pravidlem. A přitom zpětná vazba je nesmírně důležitá proto, aby si žák své chyby uvědomil a poučil se z nich. Velkou výhodou výukového softwaru je nezaujaté a spravedlivé hodnocení studentů, protože počítač si nevytvoří kladný či záporný osobní vztah ke studentovi a tudíž si na žádného studenta „nezasedne“. Výukové programy mohou studentům také poskytnout soukromí, respektují individualitu, požadavky, dovednosti a tempo studenta. Díky využití výukového softwaru student neztrácí během výuky koncentraci. Dále výukové programy velice dobře přispívají k názornému vyučování, čímž dochází ke zvýšení aktivity u studentů v hodinách a díky tomu také dochází ke zlepšování výsledků u jednotlivých studentů. Výukové programy mohou nahradit některé klasické didaktické pomůcky, protože díky využití výukového programu je výuka lépe představitelnější. Výuka díky výukovým programům je pro studenty zábavná, studenti si mnohdy ani neuvědomí, že se učí [3].

Mohou být také prostředkem ke zlepšení výuky pro studenty se speciálními vzdělávacími potřebami.

Mezi další nesporné výhody patří věci, které si člověk ani neuvědomí díky tomu, jak je bere automaticky, přirozeně a samozřejmě, např. již zmíněné využití informačních a komunikačních technologií v dnešním moderním světě a zařazení člověka do společnosti, která se bez využití počítačů dnes již neobejde. Tímto u studentů podporujeme informační gramotnost a celkově zařazení do moderního světa.

2.3 Nevýhody a rizika zavedení software

Je samozřejmostí, že i přes veškeré výše vyjmenované výhody, nesou výukové programy i nějaké nevýhody a rizika. Tyto nevýhody a rizika se pokusím nyní více rozvést. Je nutné si tyto nevýhody a rizika uvědomit, protože jedině tak je možné se tomuto vyhnout, popřípadě tyto aspekty co nejvíce eliminovat.

Významným rizikem je počáteční nadšení a poté zklamání učitele. Učitel může mít příliš vysoké očekávání od výukového programu, které pak není naplněno, přichází zklamání a učitel se často vrací k tradiční metodě výuky.

Dalším rizikem je, že využití výukových programů může vést k negativnímu názoru učitele na využití těchto programů. Učitele mohou přepadnout obavy, že je zbytečný, že jeho práci převzal počítač a učitel tak může ztrácet motivaci.

Velkou nevýhodou pro mnoho škol je finanční stránka této věci. Některé licence výukových programů jsou docela nákladné. Dále spousta výukových programů vyžaduje kvalitní technické vybavení. Některé výukové programy vyžadují nejen dobrý hardware počítače, ale také jiné technologické vybavení (např. dataprojektor, interaktivní tabule atd.), a to na většině škol chybí, tudíž to může být problém pro zařazení výukových programů do výuky.

V neposlední řadě musím hovořit o zdravotních komplikacích spojených s užíváním výukových programů a počítačů ve školách. Ať už se jedná o nadměrné využití zraku, přetížení šlach na rukou nebo vysoká zátěž pro záda či hrozba epilepsie, vždy je potřeba hlídat čas využitý pro práci s výukovým programem tak, aby míra těchto zdravotních komplikací byla co nejnižší a neprojevovalo se tak zde extrémní zatížení studentů při práci s těmito programy[3].

2.4 Rozdělení matematických programů

Matematických programů, které jsou určeny pro výuku matematiky, je široká škála. Většina těchto programů je určena pro výuku matematiky na základních nebo středních školách. Existuje řada výukových programů, které jsou určeny pro výuku či procvičování určité látky z matematiky. Programy pro výuku matematiky lze rozdělit podle toho, pro koho jsou určeny. Existují programy určené pro žáky na druhém stupni, programy určené pro první stupeň a dokonce jsou i programy určené pro jednotlivé ročníky na základních školách.

Programy pro výuku matematiky se mohou také rozdělovat podle toho, pro jaké odvětví matematiky jsou vytvořeny. Matematické programy se pak dělí na programy určené pro výuku např.:

- rovnic - jedním z programů určený na výuku rovnic je např. program Mistr rovnic, který je nejen určen pro výuku rovnic, ale i pro jejich procvičování,
- geometrie - pro výuku geometrie na školách je hojně využíván např. software Cabri Geometrie II Plus. Tento program je ovšem placený. Podobná bezplatná verze programu Cabri Geometrie II Plus se nazývá GEONExT. Dále je také používán program Corinth,
- aritmetiky – např. program Matematika zajímavě – Aritmetika,
- zlomků – jedná se např. o program Matematika zajímavě – Zlomky,
- matematické analýzy – zde patří programy Graph, GeoGebra a Maple, které podrobněji popíšu v následujících odstavcích.

2.4.1 Graph

Program Graph je velmi jednoduchý program s otevřeným zdrojovým kódem pro vykreslení grafů matematických funkcí v souřadnicovém systému. Autorem je dánský programátor Ivan Johansen. Velice jednoduše a rychle lze vložit funkci do jiného programu a grafy lze použít v jiných aplikacích. Je to standartní program pro operační systém Windows. Prostředí programu nabízí širokou škálu vlastního nastavení programu. Program Graph obsahuje systémové menu a dialogy. Pomocí velice jednoduchého ovládání lze snadno přidat popisy grafů, stínování a barvu tak, aby grafy byly přehledné a dobře rozvržené a orientační.

Program Graph pracuje s komplexními čísly, nabízí další funkce z infinitezimálního počtu, jako jsou derivace a integrace funkcí. Tento program není rozšířen a používán tak často pro výuku matematické analýzy na školách jako jiné programy. Nejčastěji používaný program na základních školách je GeoGebra, na středních školách se o vítězství dělí GeoGebra a Maple, které rozeberu v následujících odstavcích [6].

2.4.2 GeoGebra

Program GeoGebra patří mezi počítačové multiplatformní dynamické programy. Program je především určen pro výuku na školách. Jeho vývoj začal v roce 2001. Zakladatelem GeoGebry je Markus Hohenwarter. Program GeoGebra je dobře uspořádaný, pro studenty velice intuitivní. Používá se pomocí jednoduchého uživatelského prostředí, které obsahuje značný počet užitečných funkcí. Umožňuje studentům lépe chápat vztahy mezi geometrií a algebrou. GeoGebra je program v oblasti dynamické geometrie, který v sobě obsahuje i prvky algebry a infinitezimálního počtu.

Program GeoGebra umí z algebraického popisu objektu vytvořit geometrický objekt, to platí i naopak. Program GeoGebra je velice často používán pro geometrii, algebru, ale také pro matematickou analýzu ve školách. Má ve školách mnoho příznivců, a to nejen proto, že je zdarma volně ke stažení, ale má i velkou on-line podporu, jako je například webová stránka https://geogebra.org. Je dostupný miliónu uživatelů po celém světě. Má svůj vlastní kanál na portále Youtube - https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel. Program získal mnoho ocenění v Evropě i v USA jako vzdělávací software [7].

2.4.3 Maple

Systém Maple je počítačové prostředí určené pro zjednodušení výpočtů v matematice a také pro zrychlení těchto výpočtů. Slouží také k simulacím a k programování matematických algoritmů.

Hlavní využití tohoto programu je v řešení matematických problémů, rovnic a výrazů, umožňuje symbolické i numerické výpočty, výsledkem pak mohou být vzorce, výsledná hodnota nebo grafy. Systém Maple obsahuje komponenty, které podporují výuku matematiky. Má poměrně velký rozsah a přesnost zobrazení jak v reálných, tak v komplexních číslech. Výsledky lze zobrazit pomocí zlomků, odmocnin a symbolických konstant.

Systém byl vytvořen společností Waterloo Maple Ing., která byla založena v roce 1984. Ovšem první koncepce Maple byla vyvinuta na kanadské univerzitě Waterloo na začátku roku 1980. Od té doby vznikají každý rok nové verze, díky kterým je ovládání systému Maple jednodušší, snazší a více účelné. Využívá se na mnoha vysokých školách v ČR. Systém Maple je k dispozici pro různé operační systémy a je možné s ním pracovat různými způsoby.

Samotný systém a jeho funkce zahrnují širokou oblast matematiky – algebru, geometrii a matematickou analýzu, se kterou se v této práci blíže seznámíme. Základním kamenem práce tohoto systému jsou symbolické operace, které využívají výhod uchování čísel v přesném tvaru. Systém Maple je prvotně určen pro symbolické operace, numerické výpočty a zobrazování grafů, lze jej využít také na vytváření dokumentů vysoké kvality, umožňuje vytvářet interaktivní uživatelské nástroje a kvalitní prezentace. Webové stránky výrobce systému Maple poskytují velké množství informací o tomto systému a také obsahují vzorové programy, které ukazují použití systému Maple při řešení různých problémů z oblasti matematiky a techniky [15], [16].

Největšími výhodami systému Maple je prakticky neomezená velikost a přesnost čísel, mnoho funkcí pro statistické výpočty, jednoduchá práce s vektory a maticemi, zobrazení výsledků pomocí grafů. Samozřejmě má i nějaké nevýhody, např. chybí možnost dokonalejšího zobrazení grafů či export grafů do jiných programů. Ale výhody převažují nad nevýhodami, a proto je systém Maple velice vhodný pro výuku matematiky na školách. To byl jeden z hlavních důvodů, proč jsem si pro svou bakalářskou práci program Maple vybral. Dalším důvodem bylo to, že se jedná o nejrozšířenější matematický software na světě. Navíc práce s programem je velice intuitivní, jednoduchá a pro studenty lehce pochopitelná. Dalším důležitým aspektem pro výběr tohoto programu pro mou bakalářskou práci bylo, že verze

Maple 16 a vyšší verze nabízí matematickou aplikaci, tzv. učební pomůcku, která interaktivně demonstruje jednotlivé ilustrace z různých matematických odvětví, mezi které patří:

- algebra,
- geometrie,
- funkce,
- pravděpodobnost a statistika,
- trigonometrie,
- matematická analýza.

Maple nám nabízí velice kvalitní a intuitivní nápovědu všech jednotlivých funkcí a příkazů, o kterých můžeme snadno a rychle zjistit vše, co potřebujeme. V nápovědě lze také nalézt typové příklady daných funkcí a příkazů, díky kterým pochopíme, jak daná funkce pracuje a jak se používá [15], [16].

V následujících kapitolách budu demonstrovat program Maple v některých určitých odvětvích matematické analýzy, ve kterých lze tento program nejvíce využít a s jeho pomocí studentům co nejvíce objasnit danou tématiku. Ve 3. kapitole se budu zabývat derivacemi funkcí. Tuto látku poté uplatníme v následujících kapitolách. Ve 4. kapitole budeme procvičovat průběh funkce a v 5. kapitole se seznámíme s Taylorovým polynomem.

2.5 Vlastní praxe v edukačním procesu

Absolvoval jsem praxi na základní škole Jungmannova v Litovli. Škola je dobře vybavena. V každé třídě je dataprojektor s bílou magnetickou tabulí, na kterou je obraz přímo promítán. Škola využívá bezplatný matematický program GeoGebra. Na této škole je šest aprobovaných pedagogů, kteří vyučují matematiku na druhém stupni. Každému z nich jsem položil pár otázek. Jak často program využívá, především v jaké konkrétní látce matematiky. Zda je s tímto programem spokojen a jaké mi řekne výhody či nevýhody. Po těchto rozhovorech jsem došel k názoru, že se matematický software na druhém stupni využívá především pro výuku a názornou ukázku příkladů do geometrie.

Starší pedagogové software pro výuku nepoužívají vůbec, a to především kvůli dlouhé a náročné přípravě. Dále apelují na to, že je v hodinách příliš málo času na prezentaci, a že žáci látce s použitím software stejně moc neporozumí, proto raději preferují tradiční názorné vysvětlení jen na tabuli.

Mladší pedagogové tento program využívají několikrát do roka. Tito pedagogové tento program využívají hlavně na výklad nové látky z geometrie a názorné ukázky pro typové úlohy. Na své praxi jsem měl to štěstí, že jsem viděl využití tohoto programu přímo ve výuce. Nejvíce mě zaujala ukázka využití programu GeoGebra na výuku látky osové souměrnosti. GeoGebra zde umožnuje posouvání bodů a přímek. Tímto posunem žáci byli nadšeni a určitě lépe porozuměli vlastnostem osové souměrnosti.

3. Derivace funkce

Tato kapitola bude sloužit především studentům jako výukový text. Ovšem využít ho mohou i pedagogové při výuce dané látky. Budou se zde používat čísla v závorkách, která označují jednotlivé řádky výpočtu v programu Maple. Tyto výpočty jsou za každým textem v ohraničeném rámečku a na tyto výpočty se bude často pro přehlednost poukazovat v textu jednotlivých kapitol. Výsledky jsou uprostřed znázorněny modrou barvou, tak jako je to přímo v programu Maple. Stejný postup bude využit i v následujících dvou kapitolách.

Přímo v této kapitole si studenti procvičí zejména základní typy a pravidla derivací a mají zde možnost lépe pochopit derivace funkce. Program Maple disponuje několika zajímavými aplikacemi, ovšem tyto aplikace obsahuje až verze programu Maple 16. Já se však domnívám, že tyto aplikace jsou pro tento program stěžejní a studentům při studiu velice pomohou. Nejdříve si stručně připomeneme základní informace a pravidla pro derivování funkcí.

Definice 3.10. Nechť $x_0 \in D(f)$ Existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0. Je-li $\in R$, pak říkáme, že f má v bodě $x_0$vlastní derivaci. Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci.

3.1 Vzorce a pravidla pro derivování funkcí

Zde si uvedeme základní vzorce a pravidla pro derivování elementárních funkcí. Pro snadnější výpočty za pomocí derivací by bylo dobré, kdyby se tyto vzorce a pravidla studenti naučili nazpaměť.

- **Vzorce pro derivování základních funkcí**

$c' = 0$

$(x^c)' = cx^{c-1}$

$(c^x)' = c^x \ln(c), \qquad c > 0$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_c(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(c)}, \ c > 0 \wedge c \neq 0$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(\mathrm{x})$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$(\mathrm{cotan}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccotan}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

- **Pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu.**

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

- **Derivace složené funkce:**

Věta 3.11. Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládejme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

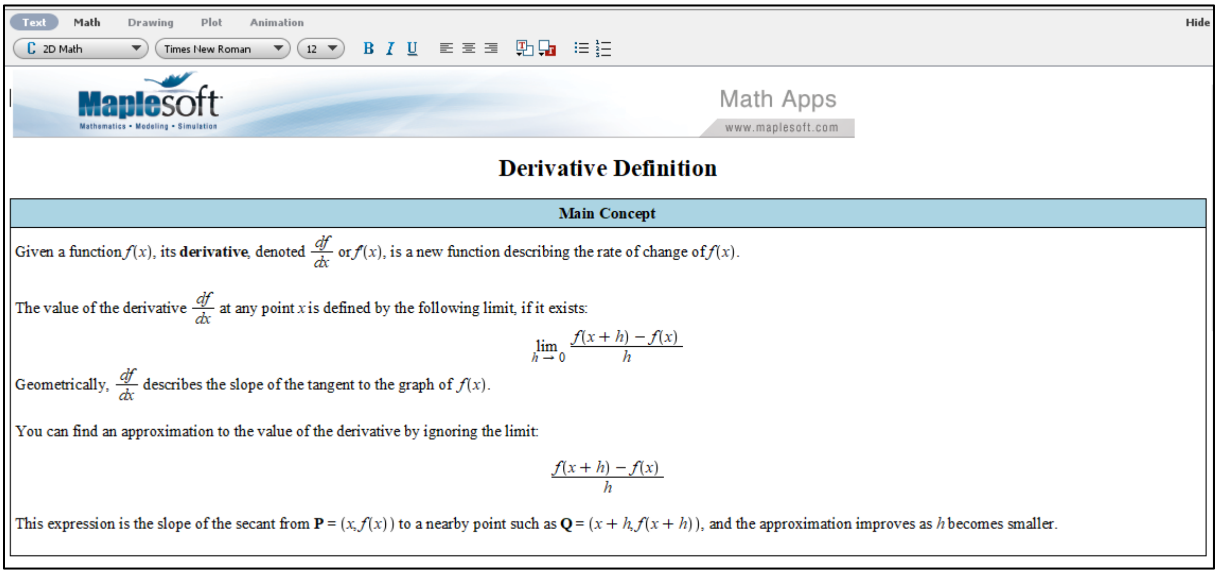
$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

Definice 3.12. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom n-tou derivací (nebo derivací n-tého řádu) funkce f rozumíme funkci, kterou označujeme $f^{(n)}$ a definujeme rovností

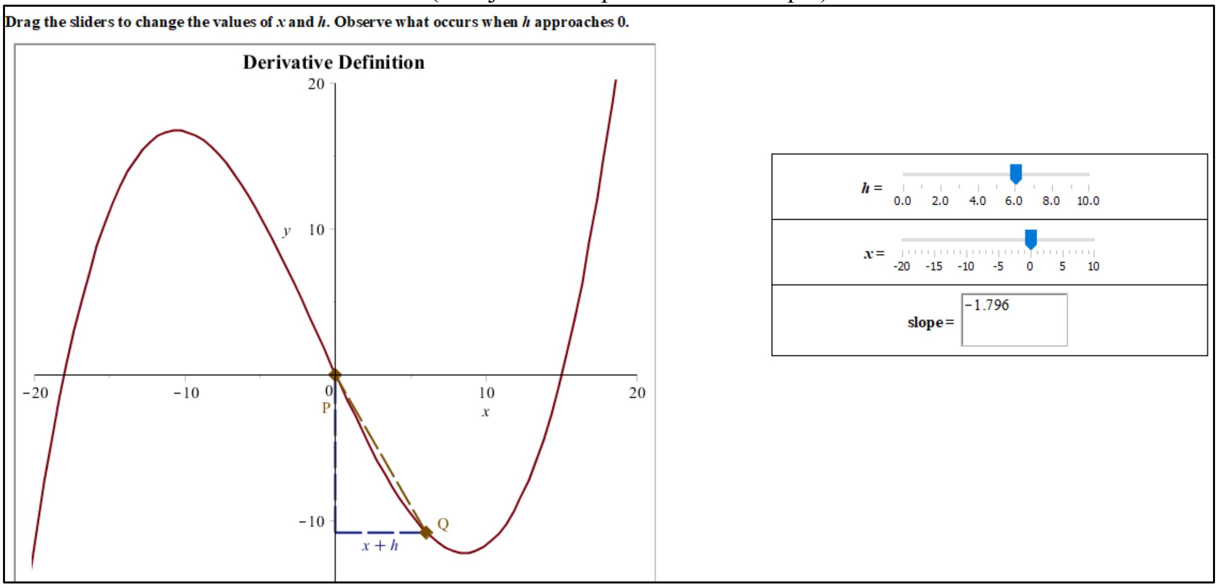
$$f^{(n)} = \left(f^{(n-)}\right)'.$$

3.2 Výpočet derivací pomocí programu Maple

Z hlavní nabídky zvolíme *Tools* → *Math Apps* a otevře se nám nové okno, kde zvolíme *Calculus,* v další nabídce dáme možnost *Derivative Definition*. Zde se můžeme seznámit s definicí derivace (obrázek 3.1). Můžeme si zde zkusit tuto definici názorně ukázat na příkladu (obrázek 3.2), kde můžeme neustále měnit jak počáteční hodnotu *x*, tak velikosti přírůstku *h*. Graf se nám automaticky ihned mění podle zadaných hodnot. Na tomto znázornění mohou studenti okamžitě vidět daný rozdíl, a tím pádem si uvědomit smysl derivace.

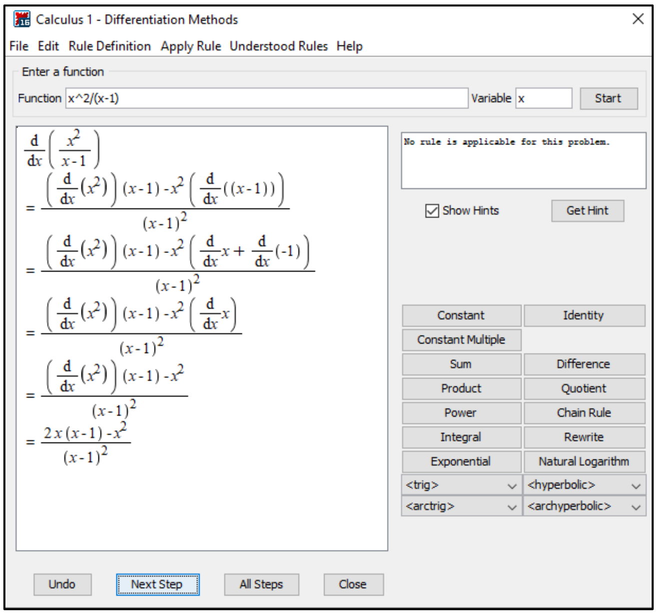


Obrázek 3.1: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)



Obrázek 3.2: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)

Pokud se budeme učit derivovat funkci, tak z programu Maple můžeme využít nástroj pro výpočet derivací pomocí jednotlivých kroků. Spustíme jej přes hlavní menu tlačítkem *Tools* → *Tutors* → *Single Variable* → *Differention Methods*. Otevře se nám nové okno (obrázek 3.3). Do políčka funkce zadáme funkci, kterou chceme derivovat. Do políčka *Variable* zadáme proměnnou, podle které chceme derivaci provést a stiskneme start. Nyní už jen přidáváme jednotlivé kroky výpočtu pomocí tlačítka *Next Step*. Tlačítkem *Undo* dáme krok zpět. Pokud chceme zobrazit všechny kroky najednou, použijeme tlačítko *All Steps*. Symbol $\frac{d}{dx}$ nám značí derivaci podle proměnné x.



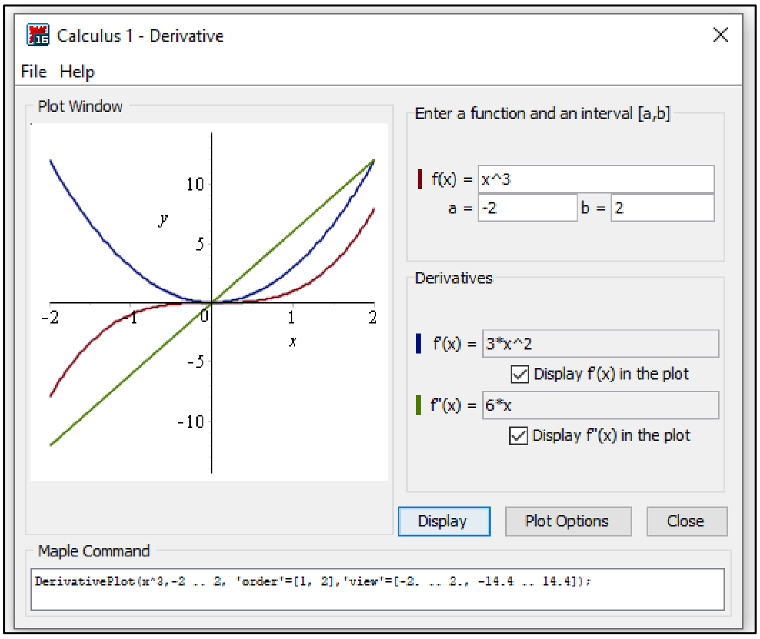
Obrázek 3.3: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)

Dále si ukážeme další užitečnou aplikaci v programu Maple, která nám vykreslí do jednoho grafu jak zadanou funkci, tak její první a druhou derivaci. Názorně můžeme pozorovat, jak se grafy od sebe liší. (obrázek 3.1).

Z hlavní nabídky zvolíme tlačítko *Tools* → *Tutors* → *Single Variable* → *Derivatives*…. Objeví se nám nové okno, kde si zadáme funkci, kterou budeme chtít derivovat. Maple nám ji umí vykreslit společně s její první a druhou derivací. Při jakékoliv změně parametrů v tomto oknu je třeba znovu stlačit tlačítko Display (obrázek 3.4).

V programu Maple nám pro derivování funkcí slouží tyto tři ekvivalentní příkazy: *diff, D(f),* $\frac{d}{dx}(x)$. [1]

[1] Pro první derivaci doporučuji používat jednoduchý příkaz *D(f)*, *f* značí funkci. Pokud chceme vypočítat funkční hodnoty, tak požijeme tento zápis *D(f)(x)*. Příkaz *diff(f(x),x)* použijeme při derivaci vyšších řádů. Takto se značí např. vypočet třetí derivace *diff(f(x),x,x,x).*



Obrázek 3.4: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)

3.3 Řešené příklady

Zde nalezneme příklady na derivace, které si rozebereme. Studenti je budou mít za úkol vypracovat samostatně a s pomocí programu Maple ověřit správnost výsledku. V případě nejasností při derivování mohou studenti použít aplikaci *Differentiation Methods* (obrázek 3.3).

Příklad 3.10. Máme zjistit první derivaci funkce $f\colon y = 2x^6 + 3x^3 - 15x + 20$. A vypočítat funkční hodnotu $f'(2)$.

Postup: Využijeme pravidla pro derivaci součtu dvou funkcí. A použijeme vzorec $(x^c)' = cx^{c-1}$. Funkční hodnotu $f'(2)$ získáme tak, že $x = 2$.

Pomocí programu Maple si na řádku (1) celou funkci f přiřadíme zápisu $f(x)$. Poté funkci derivujeme (2). A v posledním kroku získáme funkční hodnotu derivace v bodě $x = 2$. Vidíme, že s programem Maple je vše snadné a přehledné.

$f(x) := 2x^6 + 3x^3 - 15x + 20$ **(1)**

$$x \to 2x^6 + 3x^3 - 15x + 20$$

$D(f)(x)$ **(2)**

$$12x^5 + 9x^2 - 15$$

$D(f)(2)$ **(3)**

$$405$$

Příklad 3.11. Zjistěte třetí derivaci funkce $f: y = \frac{x+1}{x-2}$.

Postup: Využijeme pravidlo derivace podílu $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$. Určíme první derivaci. A z definice 3.13. víme, že třetí derivaci funkce zjistíme z druhé derivace funkce.

V programu Maple zadáme pouze příkaz pro třetí derivaci (2). Abychom dostali upravený výsledek v jednom zlomku, tak stačí použít navíc příkaz *normal* (3).

$f(x) := \frac{x+1}{x-2}$ **(1)**

$$x \to \frac{x+1}{x-2}$$

$diff(f(x), x, x, x)$ **(2)**

$$\frac{6}{(x-2)^3} - \frac{6(1+x)}{(x-2)^4}$$

$normal(diff(f(x), x, x, x))$ **(3)**

$$-\frac{18}{(x-2)^4}$$

3.4 Neřešené příklady

Příklad 3.12. Vypočítejte první derivaci f' funkce $f: y = 2\cos^3(2x)$. A poté ověřte pomocí programu Maple.

Příklad 3.13. Vypočítejte druhou derivaci f'' funkce $f: y = x^2 \sin\sqrt{x}$. A poté ověřte pomocí programu Maple.

Příklad 3.14. Vypočítejte první derivaci f' funkce $f: y = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + arctg(x)$. A poté ověřte pomocí programu Maple.

4. Vyšetření průběhu funkce

Tato obsáhlá kapitola bude sloužit nejen pedagogům, ale hlavně studentům, kteří si v této kapitole osvojí vyšetřování průběhu funkce. Kapitola obsahuje řešený příklad, který studenti měli samostatně vypracovat na papír. Program Maple jim bude sloužit pouze pro otestování dílčích výsledků. Pokud by studentům některý z dílčích výsledků vyšel špatně, pomocí programu Maple by okamžitě věděli chybu. Takto by se mohli studenti dopracovat ke správnému nákresu grafu funkce. Tak jako v předešlé kapitole se i v této budou používat čísla v závorkách, která označují jednotlivé řádky výpočtu v programu Maple. Tyto výpočty jsou za každým textem v ohraničeném rámečku a na tyto výpočty se bude často pro přehlednost poukazovat v textu. Výsledky jsou uprostřed znázorněny modrou barvou, tak jako je to přímo v programu Maple.

Vyšetřování funkce patří mezi základní úlohy diferenciálního počtu. Půjde nám o to získat o funkci co nejvíce informací, např. jak se funkce chová v různých intervalech, zda je rostoucí či klesající, kde má svoje maxima či minima, jak se funkce chová v nekonečnu apod. Zejména nám však půjde o to, jak správně využít tyto informace k vykreslení grafu funkce. Lze říci, že vyšetřování průběhu funkce je nesnadný a časově náročný proces. Tento proces si rozdělíme do devíti bodů, které si následně popíšeme a na konkrétním příkladu jej budeme demonstrovat pomocí programu Maple. K výuce bude zapotřebí počítačová učebna, kde každý student bude mít možnost sám používat Maple.

V programu Maple za pomocí příkazu *plot* je možné rychle zobrazit graf funkce. Nám však v této kapitole nepůjde pouze o to vytvořit graf funkce, ale především o cestu, jak ho vytvořit sám. Zároveň si touto cestou procvičíme vlastnosti funkcí, limity, derivování atd.

4.1 Postup při vyšetřování průběhu funkce

1) Definiční obor

Definice 4.10. Nechť $A \subset R$, A není množina prázdná. Zobrazení f množiny A do množiny $R(f: A \to R)$ nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále jen funkcí). Množina A se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$.

2) **Funkce sudá, lichá**

Definice 4.11. Funkce f se nazývá sudá, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí, $-x \in D(f)$ a $f(x) = f(-x)$. Funkce f se nazývá lichá, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí, $-x \in D(f)$ a $f(x) = -f(-x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y. A graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

3) **Důležité limity funkce**

- Vlastní limita ve vlastním bodě:

Definice 4.12. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

- Nevlastní limita ve vlastním bodě:

Definice 4.13. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu $M \in \mathbb{R}$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, platí $> M$ Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

- Vlastní limita v nevlastním bodě:

Definice 4.14 Řekneme, že funkce f má v $+\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x > K$ platí $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

- Nevlastní limita v nevlastním bodě:

Definice 4.15. Řekneme, že funkce f má v $+\infty$ limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu $M \in \mathbb{R}$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná $x > K$ platí $f(x) > M$ Píšeme:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Limita zleva:

Definice 4.16. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu zleva rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\varphi(A)$ bodu A existuje levé prstencové okolí $\psi^-(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \psi^-(x_0)$ platí $f(x) \in \varphi(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

- Limita zprava:

Definice 4.17. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu zprava rovnu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\varphi(A)$ bodu A existuje pravé prstencové okolí $\psi^+(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \psi^+(x_0)$ platí $f(x) \in \varphi(A)$. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

Věta 4.18. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné.

Věta 4.19. Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

4) **Průsečíky s osami**
5) **Výpočet první derivace a určení stacionárních bodů**

Viz. Kapitola 3. Derivace funkce

Definice 4.20. Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá stacionární bod.

6) **Lokální extrémy, intervaly monotónnosti**

Definice 4.21. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, jestliže existuje okolí $\psi(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \psi(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$ resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, jestliže existuje prstencové okolí $\varphi(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \varphi(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že f má v bodě x_0 lokální extrém.

Věta 4.22. Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta 4.23. Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a má derivaci v nějakém prstencovém okolí $\varphi(x_0)$ bodu x_0. Je-li

i) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \varphi^-(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \varphi^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

ii) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \varphi^-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \varphi^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

7) Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti

Definice 4.24. Řekneme, že funkce f je ryze konvexní na intervalu $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1)$$

Definice 4.25. Řekneme, že funkce f je ryze konkávní na intervalu $I \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2, x_3 \in I$ taková, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1)$$

Definice 4.26. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi, jestliže existuje $f'(x_0) \in R$ a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a v nějakém pravém okolí tohoto bodu ryze konkávní, resp. naopak.
Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi, pak bod $\left(x_0, f(x_0)\right)$ nazýváme inflexním bodem funkce f.

Věta 4.27. Nechť má funkce f v intervalu (a, b) druhou derivaci. Je-li

i) $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f ryze konvexní na (a, b),

ii) $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f ryze konkávní na (a, b),

iii) $f''(x) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$ a dále je f'' kladná v nějakém levém okolí bodu x_0 a záporná v nějakém pravém okolí bodu x_0, resp. naopak, pak má funkce f v bodě x_0 inflexi.

8) **Asymptoty**

Definice 4.28. Přímka $x = x_0, x_0 \in R$ se nazývá svislá asymptota grafu funkce f, jestliže je alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad nebo \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Pro svislé asymptoty se používá název asymptota bez směrnice.

Definice 4.29. Přímka $y = ax + b, a, b \in R$, se nazývají asymptota grafu funkce f v plus nekonečnu, resp. v minus nekonečnu, jestliže platí:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$, resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$

Pro asymptoty v $\pm\infty$se někdy používá název asymptoty se směrnicí nebo šikmé asymptoty.

Věta 4.30 Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f $+\infty$, právě když

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad a \in R \quad a \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b, \qquad b \in R$$

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce f v $-\infty$, právě když

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad a \in R \quad a \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b, \qquad b \in R$$

9) **Graf funkce**

4.2 Řešený příklad:

Příklad 4.10. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \frac{x^2}{x-1}$

Nyní si vše ukážeme na řešeném příkladu. Jednotlivá čísla či body v závorce na pravé straně příkazu značí řádky příkazů. Budou nám sloužit pro lepší orientaci.

V programu Maple si nejprve přiřadíme zadanou funkci pod názvem $f(x)$ na řádku (1). A to nejen proto, abychom ji stále nemuseli celou dokola opisovat, ale také proto, že můžeme dosadit za x číslo a vypočítat tak jednoduše funkční hodnoty.

$$f(x) := \frac{x^2}{x-1} \quad \textbf{(1)}$$

$$x \rightarrow \frac{x^2}{x-1}$$

4.2.1 Definiční obor

V našem případě je určení definičního oboru jednoduché. Nesmíme dělit nulou. Výraz $x - 1 \neq 0$. Definiční obor je tedy $D(f) = R \setminus 1$

Pomocí Maple zkusíme otestovat funkci s funkční hodnotou 1. V Maple se nám zobrazí chybové hlášení, že nelze dělit nulou (2). Tedy nám vyplývá, že nula do definičního oboru nepatří.

$f(1)$ **(2)**

Error, (in f) numeric exception: division by zero

4.2.2 Funkce lichá a sudá

Pro zjištění, zda je funkce lichá nebo sudá využijeme v programu Maple příkaz *evalb*.[2] V prvním případě budeme zjišťovat, zda je funkce lichá. Z definice 4.11 víme, že je lichá za předpokladu, že platí $f(x) = -f(-x)$. Maple nám v případě (3) vyhodnotil, že se zadané funkce nerovnají a tudíž funkce není lichá. Ve druhém případě budeme vyšetřovat, zda je funkce sudá. Tady nám z definice plyne, že funkce je sudá pokud platí $f(x) = f(-x)$. Po zadání příkazu do programu Maple v bodě (4) vidíme, že funkce se nerovnají. Funkce není sudá ani lichá. Graf nebude souměrný podle osy y, ani podle počátku soustavy souřadnic.

$evalb\big(f(x) = -f(-x)\big)$ **(3)**

$$false$$

$evalb\big(f(x) = f(-x)\big)$ **(4)**

$$false$$

[2] Příkaz *evalb* nám slouží pro určení rovnosti dvou funkcí. Dvě funkce se rovnají, je-li *evalb* vyhodnocen na *true*. Pokud je vyhodnocen na *false*, tak se funkce nerovnají. Když se nám zobrazí *fail*, tak program Maple není schopen určit, zda se rovnají či ne.

4.2.3 Důležité limity funkce

Nejdříve vyšetříme limity v nevlastních bodech. V tomto případě nás bude zajímat, jak se graf bude chovat v $\pm\infty$. Tyto dvě limity nalezneme v bodech (5) a (6). Dále určíme vlastní limitu v jediném bodě nespojitosti $x = 1$. Limita $x \to 1$ neexistuje (7). Poté vyšetříme v tomto bodě jednostranné limity (8),(9). Na tomto případě se můžeme přesvědčit o platnosti věty 4.18. Pokud se nerovnají jednostranné limity, pak limita v bodě neexistuje.

$$limit(f(x), x = \infty) \tag{5}$$

$$\infty$$

$$limit(f(x), x = -\infty) \tag{6}$$

$$-\infty$$

$$limit(f(x), x = 1) \tag{7}$$

$$undefined$$

$$limit(f(x), x = 1, right) \tag{8}$$

$$\infty$$

$$limit(f(x), x = 1, left) \tag{9}$$

$$-\infty$$

4.2.4 Průsečíky s osami

Průsečík grafu funkce s osou y získáme tak, že $x = 0$. V našem případě je průsečík v počátku souřadnic $O[0,0]$ jak můžeme vidět na řádku (10). Pokud hledáme průsečík s osou x, tak $y = 0$. Řešíme tak rovnici $\frac{x^2}{x-1} = 0$ a to na řádku (11).

$$f(0) \tag{10}$$

$$0$$

$$solve(f(x) = 0) \tag{11}$$

$$0$$

Nyní si získané výsledky dáme do tabulky a rozložíme je na jednotlivé intervaly. Na těchto intervalech určíme, kdy je funkce kladná nebo záporná. Zvolíme vždy libovolný bod v daném intervalu a pokud bude výsledek kladný (resp. záporný) funkce je rostoucí (resp. klesající).

$f(-1)$	**(12)**
$$\frac{-1}{2}$$	
$f(1/2)$	**(13)**
$$\frac{-1}{2}$$	
$f(2)$	**(14)**
$$4$$	

$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1, \infty)$
$f(x) < 0$	$f(x) < 0$	$f(x) > 0$

4.2.5 Výpočet první derivace a určení stacionárních bodů

Nejdříve vypočítáme první derivaci (15). Tuto derivaci následně upravíme pomocí příkazu normal[3] (16). Pro zjištění stacionárních bodů položíme první derivaci rovnu nule. Zjistíme dva stacionární body $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ (18).

$diff(f(x), x)$	**(15)**
$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2}$$	
$der1(x) := \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2}$	**(16)**
$$x \rightarrow \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2}$$	
$normal\big(der1(x)\big)$	**(17)**
$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$	
$solve(der1(x) = 0)$	**(18)**
$$0,2$$	

4.2.6 Lokální extrémy a intervaly monotónnosti

Stacionární body x_1, x_2 a $x = 1$, kde funkce není definovaná, jsou podezřelé z lokálních extrémů. Tyto tři body nám rozdělí reálná čísla na čtyři intervaly. V každém

[3] Příkaz *normal* nám upraví výraz do jednoho zlomku, a to v součinovém tvaru.

intervalu si zvolíme libovolný bod, abychom zjistili, zda je funkce na intervalu rostoucí nebo klesající. Když bude derivace funkce $f'(x)$ na daném intervalu kladná (resp. záporná), tak na tomto intervalu funkce $f(x)$ poroste (resp. bude klesat). Pokud funkce v intervalech bude přecházet z rostoucí na klesající (resp. z klesající na rostoucí), tak se zde nachází lokální maximu (resp. lokální minimum).

V programu Maple na řádcích (19-22) dosazujeme libovolné body z daných intervalů. Zde nás budou vlastně zajímat pouze znaménka funkčních hodnot. Na řádku (23) vypočítáme lokální maximum. A na řádku (24) lokální minimum. Všechny tyto hodnoty si zapíšeme do přehledné tabulky.

$der1(-1)$ **(19)**

$$\frac{3}{4}$$

$der1(1/2)$ **(20)**

$$-3$$

$der1(3/2)$ **(21)**

$$-3$$

$der1(3)$ **(22)**

$$\frac{3}{4}$$

$f(0)$ **(23)**

$$0$$

$f(2)$ **(24)**

$$4$$

$(-\infty, 0)$	(0,1)	(1,2)	(2,∞)
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
Lokální maximum [0,0]		Lokální minimum [2,4]	

4.2.7 Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti

V první řadě si určíme druhou derivaci. Získáme ji z derivace první na řádku (25). Dále určíme nulové body druhé derivace a to tak, že druhou derivaci položíme rovnu nule.

V našem případě vidíme, že nulové body druhá derivace nemá, protože čitatel se nikdy nemůže rovnat nule. Bude nás tedy zajímat pouze jediný bod a to bod, ve kterém není funkce definována $x = 1$. Tento bod nám vytvoří dva intervaly, na kterých budeme zkoumat, zda je druhá derivace kladná nebo záporná. Z věty 4.27 víme, že když je druhá derivace $f''(x)$ kladná, tak je na tomto intervalu funkce $f(x)$ konvexní. Pokud je druhá derivace $f''(x)$ záporná, tak je na daném intervalu funkce $f(x)$ konkávní. Inflexní bod funkce nemá, protože neexistuje žádné $x \in D(f)$, kdy by platila rovnost $f''(x) = 0$.

$normal\left(diff(der1(x), x)\right)$ **(25)**

$$\frac{2}{(x-1)^3}$$

$der2(x) := \frac{2}{(x-1)^3}$ **(26)**

$$x \to \frac{2}{(x-1)^3}$$

$der2(0)$ **(27)**

$$-2$$

$der2(2)$ **(28)**

$$2$$

$(-\infty, 1)$	$(1,\infty)$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
Konkávní ∪	Konvexní ∩

4.2.8 Asymptoty

Asymptota funkce je přímka, kdy se její vzdálenost od funkce limitně blíží k nule. Nejdříve vytvoříme svislou asymptotu neboli asymptotu bez směrnice. Graf bude obsahovat pouze jednu svislou asymptotu a to v bodě, kdy není funkce definovaná. Tato asymptota bude mít rovnici $x = 1$.

Poslední asymptota, kterou musíme vyšetřit je šikmá asymptota neboli asymptota se směrnicí. Víme, že obecná rovnice šikmé asymptoty je $y = ax + b$. Využijeme větu 4.30 a nejdříve vypočítáme konstantu a (29). A poté konstantu b. (30) Dosadíme do obecné rovnice (31). Funkce má tedy šikmou asymptotu danou rovnicí $y = x + 1$.

$a := limit\left(\frac{f(x)}{x}, x = \infty\right)$ **(29)**

$$1$$

$b := limit\big((f(x) - ax), x = \infty\big)$ **(30)**

$$1$$

$y = ax + b$ **(31)**

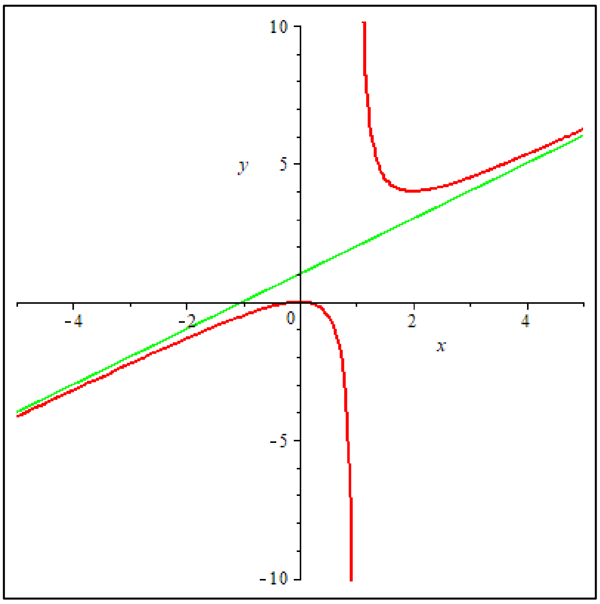
$$y = x + 1$$

4.2.9 Graf funkce

Posledním bodem této kapitoly bude vykreslení grafu funkce. Nejprve si načrtneme kartézskou soustavu souřadnic. Zde umístíme asymptoty z předešlé kapitoly. Vyznačíme body, jako jsou průsečíky s osami a lokální minima a maxima. Dále se podíváme do tabulky v kapitole 7, na kterých intervalech je funkce konkávní nebo konvexní. A nyní už můžeme načrtnout graf funkce. Graf funkce se nesmí nikdy dotýkat asymptot.

V programu Maple si ověříme graf funkce. Slouží nám na to jednoduchý příkaz *plot*[4]. Do jednoho grafu funkce vykreslíme asymptotu vybarvenou na zeleno, tak i funkci zbarvenou červeně (32).

$plot([f(x), x + 1,], x = -5..5, y = -10..10, thickness = [2,1])$ **(32)**



Obrázek 4.1: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)

[4] Příkaz *plot* nám slouží pro vykreslení grafů funkcí. Prvním parametrem zadáme do hranaté závorky jednotlivé funkce, které chceme vykreslit. Dalšími dvěma parametry uvedeme rozmezí os x,y. Parametr *thickness* nám slouží pro určení velikosti čar.

Pokud máme graf totožný s programem Maple, tak víme, že jsme postupovali správně. V této kapitole nám nešlo jen o zjištění grafu funkce, ale hlavně o postup, kde si studenti procvičí dosavadní znalosti a mohou se ujistit o praktickém významu derivací a limit.

4.3 Neřešené příklady

Aby studenti zjistili, zda látku opravdu ovládají, mají možnost si tímto způsobem sami procvičit následující neřešené úlohy. Řešený příklad z předchozí kapitoly může studentům posloužit jako vodítko. Navíc si mohou každý krok ověřit pomocí programu Maple, zda počítali správně.

Příklad 4.11. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = 2x^3 - x^2 + 4\mathrm{x} + 5$

Příklad 4.12. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \frac{x-2}{x+1}$

Příklad 4.13. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \frac{x^3}{x^2-1}$

Příklad 4.14. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = \ln(4 - x^2)$

5. Taylorův polynom

Tato kapitola bude určena nejen studentům, ale také pedagogům, kteří za její pomoci mohou lépe vysvětlit a názorně ukázat Taylorův polynom a vysvětlit rozdíl mezi Taylorovým vzorcem a polynomem. Tak jako v předešlých dvou kapitolách se i v této budou používat čísla v závorkách, která označují jednotlivé řádky výpočtu v programu Maple. Tyto výpočty jsou za každým textem v ohraničeném rámečku a na tyto výpočty se bude často pro přehlednost poukazovat v textu. Výsledky jsou uprostřed znázorněny modrou barvou, tak jako je to přímo v programu Maple.

Tato kapitola obsahuje dva řešené příklady. V prvním řešeném příkladu se naučíme používat Taylorův vzorec. Program Maple nám pomůže s dílčími výpočty. U druhého příkladu si procvičíme Maclaurinův polynom. Na tomto příkladu studenti vidí praktické využití.

Definice: Nechť funkce f má v bodě a derivace do řádu n. Pak se polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

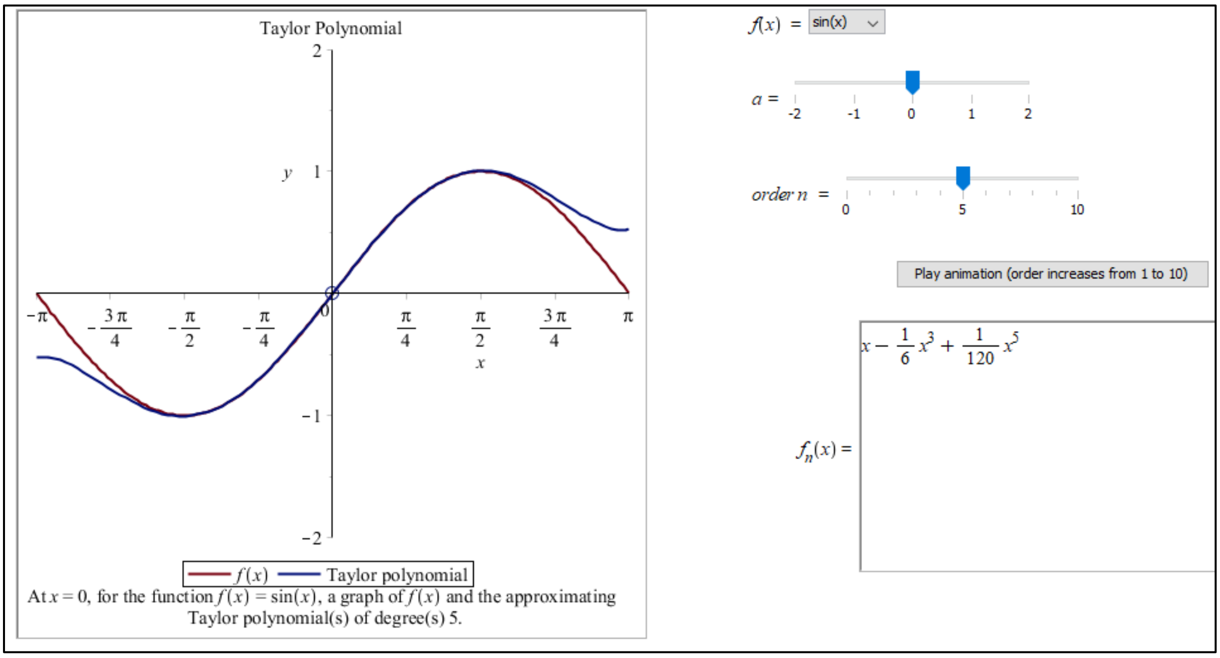
nazývá Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě a.

U Taylorova polynomu vzniká jistá chyba. Tuto chybu nazýváme Taylorův zbytek a označíme ji $R_n(x)$. Taylorův vzorec má tvar $T_n(x) + R_n(x)$. A platí

$$R_n(x) = T_n(x) - f(x)$$

Když položíme v Taylorově vzorci $a = 0$ budeme mluvit o Maclaurinově vzorci.

Program Maple ve verzi 16 rovněž obsahuje aplikaci s názvem Taylor's Theorem. Lze ji spustit pomocí tlačítka v kontextovém menu. Tools → Math Apps → Calculus - Taylor's Theorem. V první řadě se nám ukáže teorie o problému. Dále zde studentům můžeme názorně ukázat, jak vše funguje. Nejdříve zvolíme funkci $f(x) = \sin(x)$ v bodě $a = 0$. Poté budeme postupně zvyšovat číslo u n-tého stupně a ukážeme studentům, jak se mění graf Taylorova polynomu. Studenti názorně vidí, že postupným zvyšováním stupně n se graf neustále více podobá grafu funkce $f(x) = \sin(x)$.



Obrázek 5.1: (Zdroj: vlastní zpracování dle Maple)

Příklad 1:

Najděte Taylorův vzorce funkce f pro $n = 3, x_0 = 1$. $f: y = \ln(1+n), x > -1$

Řešení:

Program Maple umí tento problém vyřešit za pomocí jednoduchého příkazem *taylor*. My budeme příklad řešit postupně jako bychom tento nástroj neznali. Jelikož derivovat studenti už umí, tak se těmito dílčími výpočty nebudeme zdržovat a derivace si necháme spočítat pomocí programu Maple. Nalezneme první tři derivace (2-4). Dále vypočítáme funkční hodnoty v bodě $x = 1$ (8-10). A výsledky dosadíme do Taylorova vzorce (11). Zbytek označíme $R(x)$.

$f(x) := \ln(1 + x)$ **(1)**

$$x \rightarrow \ln(1 + x)$$

$diff(f(x), x)$ **(2)**

$$\frac{1}{1 + x}$$

$diff(f(x), x, x)$ **(3)**

$$-\frac{1}{(1 + x)^2}$$

$diff(f(x), x, x, x)$ **(4)**

$$\frac{2}{(1 + x)^3}$$

$der1(x) := \frac{1}{1+x}$ **(5)**

$$x \rightarrow \frac{1}{1 + x}$$

$der2(x) := -\frac{1}{(1+x)^2}$ **(6)**

$$x \rightarrow -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

$der3(x) := -\frac{1}{(1+x)^2}$ **(7)**

$$x \rightarrow \frac{2}{(1 + x)^3}$$

$der1(1)$ **(8)**

$$\frac{1}{2}$$

$der2(1)$ **(9)**

$$-\frac{1}{4}$$

$der3(1)$ **(10)**

$$-\frac{1}{4}$$

$f(1)+\frac{der1(1)\cdot(x-1)}{1!}+\frac{der2(1)\cdot(x-1)^2}{2!}+\frac{der3(1)\cdot(x-1)^3}{3!}+R(x)$ **(11)**

$$\ln(2)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{24}(x-1)^3+R(x)$$

Příklad 1:

Určete přibližnou hodnotu funkce Eulerova čísla e pomocí Maclaurinova polynomu stupně $n = 6$.

Řešení:

Využijeme funkci e^x. Příkazem *taylor*[5] vytvoříme Taylorův vzorec se zbytkem $O(x^7)$. Za pomocí příkazu *convert* a parametru *polynom* vytvoříme z Taylorova vzorce polynom. Do polynomu dosadíme $x = 1$ a tím zjistíme přibližnou hodnotu Eulerova čísla. Příkaz *Evalf se* nám číslo vyjádří v desetinném tvaru. Abychom zjistili chybu, tak nám stačí odečíst přibližnou hodnotu od skutečné hodnoty Eulerova čísla.

$mac := taylor(e^x, x = 0, 7)$ **(1)**

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+O(x^7)$$

$pol := convert(mac, polynom)$ **(2)**

$$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6$$

$p1 := evalf(pol(1))$ **(3)**

$$2.718055556$$

$p2 := evalf(e)$ **(4)**

$$2.718281828$$

$chyba := p1 - p2$ **(5)**

$$0.000226272$$

[5] Příkaz *taylor* nám slouží pro vytvoření Taylorova vzorce. První parametr je funkce. Ve druhém parametru zadáme bod, ve kterém Taylorův vzorec uvažujeme. A ve třetím zadáme stupeň polynomu.

6. Závěr

Téma této bakalářské práce jsem si vybral, protože využití moderních technologií začíná být naprostým standardem v dnešním školském systému, a vlastně i v běžném životě. Doba požaduje informační gramotnost po každém jednotlivém člověku a naštěstí na tuto skutečnost školy reagují a je tato skutečnost podporována na více a více školách. Jednotlivé školy začínají pořizovat interaktivní prostředky a software k výuce.

V této práci jsou na začátku každé kapitoly shrnuty teoretické poznatky. Cílem této práce bylo vytvořit podpůrný text pro studenty. Cíle bylo dosáhnuto a dokonce je možné, že jeho využití v některých pasážích najdou i pedagogové.

Po úvodní kapitole jsem se zaměřil na teoretické využití počítače při výuce, na software, jeho rozdělní a hlavně na výhody a nevýhody použití tohoto softwaru při výuce. Dále jsem se zaměřil na matematické programy, které se specializují na matematickou analýzu. Z těchto programů mě nejvíce zaujal program Maple, a to nejen díky velké rozšířenosti ve světě, ale hlavně díky novým aplikacím, které jsou ve verzi 16 a slouží nám pro lepší pochopení a kvalitnější výuku matematické analýzy. Poté jsem se zaměřil na vlastní praxi v edukačním procesu. Tuto praxi jsem v této kapitole zhodnotil.

V dalších kapitolách své bakalářské práce jsem se zaměřil na vytvoření studijního materiálu s využitím programu Maple. Vybral jsem si téma derivace funkce a její praktické využití. Z praktického využití jsem si zvolil vyšetřování průběhu funkce a Taylorův polynom, které jsem popsal v kapitole č. 4 a č. 5.

Doufám, že moje bakalářská práce by mohla být studentům prospěšná a že i já, jako budoucí učitel, bude z této práce jednou čerpat a využiji ji při výuce svých budoucích studentů.

Literatura:

[1] BERTRAND, Yves. *Soudobé teorie vzdělávání.* Praha: Portál, 1998, 248 s.

ISBN 80-7178-216-5.

[2] KROPÁČ, Jiří a Miroslav CHRÁSKA. *Výchova v obecně technických předmětech.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004, 190 s.

ISBN 80-244-0897-X.

[3] BURIANOVÁ, Eva. *Matematický a výukový software.* Vyd. 1. Ostrava: Ostravská univerzita, 2003, 74 s. Systém celoživotního vzdělávání Moravskoslezska. ISBN 80-704-2867-8.1

[4] DOSTÁL, Jiří. *Počítač ve vzdělávání.* 1. vyd. Olomouc: Votobia Olomouc, 2007, 2sv. ISBN 978-80-7220-295-912.

[5] DOSTÁL, Jiří. *Výukové programy.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2011, 67 s. ISBN 978-80-244-2782-9.

[6] *Graph / Plotting of mathematical functions* [online]. © 2001 [cit. 2020-3-25].

Dostupné z: http://www.padowan.dk

[7] *GeoGebra* [online]. © 2003 [cit. 2020-03-25].

Dostupné z: http://www.geogebra.org

[8] KUBEN, Jaromír a Petra ŠARMANOVÁ. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava: Technická univerzita Ostrava, 2006, 351 s. ISBN 80-248-1192-8

[9] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce.* 4. vyd. Academia, středisko společenských činností AV ČR, Praha 2006. ISBN 80-200-1448-9

[10] HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciálnía integrální počet.* Praha: Prometheus, Praha 2006, 210 s. ISBN 80-7196-210-4

[11] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce.* Praha: Prometheus, Praha 2002, 168 s. ISBN 80-7196-164-7

[12] TRÁVNÍČEK, Stanislav. *Matematická analýza 1: (pro učitelské obory).* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, 165 s. ISBN 978-80-244-4117-7

[13] PELANTOVÁ, Edita. *Matematická analýza 2.* Praha: České vysoké učení technické, 2014, 117 s. ISBN: 978-80-01-05632-5

[14] FIALKA, Miloslav. *Matematika 1: stručný výklad, řešené příklady, cvičení s aplikacemi, ukázky systému Maple.* Zlín: UTB, 2007. 107 s.

ISBN: 978-80-7318-584-8

[15] *Program Maple* [online]. [cit. 2020-4-5].

Dostupné z: https://maple.maplesoft.cz/

[16] *Program Maple* [online]. © 1999 [cit. 2020-4-10].

Dostupné z: http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/vyuka/PP1/maple/kap01.htm