

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Spojité modely typu multiplikátor-akcelerátor



Vedoucí bakalářské práce:  
**prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**  
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:  
**Žaneta Vančurová**  
ME, III. ročník

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení paní prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 12. dubna 2013

## **Poděkování**

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce paní prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále děkuji svým rodičům za podporu při studiu na vysoké škole.

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Matematické modelování</b>	<b>5</b>
1.1 Klasifikace matematických modelů . . . . .	6
1.2 Konstrukce matematických modelů . . . . .	6
<b>2 Odvození ekonomických modelů</b>	<b>8</b>
2.1 IS-LM ekonomický model . . . . .	8
2.2 Spojitý model typu multiplikátor-akcelerátor . . . . .	11
<b>3 Dynamické systémy</b>	<b>14</b>
3.1 Spojité dynamické systémy . . . . .	14
3.2 Stabilita kritických bodů . . . . .	18
<b>4 Systémy diferenciálních rovnic 1.řádu s konstantními koeficienty</b>	<b>20</b>
<b>5 Vyšetření modelu multiplikátor - akcelerátor</b>	<b>26</b>
Závěr	33
Literatura	34

# Úvod

Cílem mojí bakalářské práce je odvození a vyšetření ekonomického modelu typu multiplikátor-akcelerátor. Tento ekonomický model byl poprvé použit ekonomem Paulem A. Samuelsonem v roce 1939.

Nejprve se seznámíme s pojmem matematický model obecně, kde také uvedeme klasifikaci matematických modelů a postup při jejich konstrukci. V následující kapitole se budeme zabývat odvozením ekonomických modelů - modelu IS-LM a modelu multiplikátor-akcelerátor. U uvedených modelů vyslovíme hypotézy, na nichž jsou ekonomické modely založeny a odvodíme tyto modely ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic. Ve 3. kapitole se budeme věnovat teorii dynamických systémů, konkrétně pro případ  $n = 2$ , pro které si zavedeme základní pojmy, definice a věty. Dále se budeme zabývat stabilitou kritických bodů a uvedeme si definice pro případ, kdy je kritický bod stabilní a pro případ, kdy je nestabilní. V této kapitole se budeme věnovat také izoklinám. Zavedeme si dva speciální případy - horizontální a vertikální izokliny. Ve 4. kapitole budeme studovat systémy diferenciálních rovnic 1.řádu s konstantními koeficienty a uvedeme jednotlivé případy pro situaci, kdy kritický bod je počátek.

Pomocí uvedené teorie provedeme vyšetření modelu multiplikátor-akcelerátor pomocí klasifikace kritických bodů a metody izoklin.

# 1 Matematické modelování

Matematické modelování lze chápat jako předmět bez hranic. Modelování bylo a stále je hybnou silou pro rozvoj matematiky samotné. Je to proces, ve kterém se začalo odvíjet odvětví některých matematických disciplín, dokonce i v geometrických problémech, na které narazili Řekové před mnoha staletími.

Matematické modelování je součástí vědních a technických oblastí, proto si zaslouží pozornost všech vědců. S modelováním se můžeme setkat v oblasti fyziky, chemie, biologie, ve strojírenství a ve spoustě dalších oblastí vědy a techniky.

Díky metodám matematického modelování se v současné době rozvíjí i jiné oblasti. Jedná se např. o rozvoj antropologie, architektury, astronomie, ekonomie, hudby, kriminalistiky atd.

Cílem matematického modelování je převádění různých systémů z reálného světa do matematického jazyka. To znamená, že tyto systémy lze popsat pomocí matematických modelů. S jejich pomocí chceme vysvětlit chování studovaného problému, co způsobuje změny v chování v systému a také jakou má systém citlivost na změny parametrů. Kromě toho chceme pomocí matematických modelů předpovědět, jaké změny v chování systému nastanou a kdy tyto změny nastanou.

Matematický model se skládá ze 3 základních skupin objektů:

- proměnné a parametry;
- matematické struktury;
- řešení.

Proměnné zde reprezentují nějaké vlastnosti systému. Model lze chápat jako množinu funkcí, která popisuje vztahy mezi různými proměnnými.

## 1.1 Klasifikace matematických modelů

Matematické modely lze rozdělit na:

- stochastické, kdy do modelu zahrnujeme náhodné veličiny;
- deterministické, kdy náhodné veličiny do modelu nezahrnujeme.

Tyto skupiny můžeme dále rozdělit:

1. Podle toho, zda je nutné v modelech zohledňovat čas

- statické modely, které nezohledňují faktor času;
- dynamické modely, kdy faktor času opomenout nelze.

2. Z hlediska spojitosti

- spojité modely, ve kterých vystupují spojité veličiny;
- diskrétní modely, ve kterých vystupují diskrétní veličiny.

3. Z hlediska účelu

- deskriptivní modely, kdy nás zajímá, jaké je cílové chování systému;
- normativní modely, kdy nás zajímá samotný systém.

Existuje velké množství modelů, přičemž významnou skupinou jsou matematické modely ve tvaru diferenciálních rovnic.

## 1.2 Konstrukce matematických modelů

1. Formulujeme problém reálného světa a vyslovíme hypotézy.
2. Určíme studované proměnné. Jejich změna je vyjádřena derivací.

3. Hypotézy převedeme na matematické vzorce vyjadřující vztahy mezi proměnnými a odvodíme matematický model - v našem případě diferenciální rovnici.
4. Studujeme model matematickými metodami. V našem případě uvažujeme kritické body, periodické a další významné orbity a sestavujeme fázový portrét.
5. Provedeme interpretaci fázového portréту, tj. popíšeme pomocí něho chování reálného systému.
6. Ověříme v praxi. Tj. vyhodnotíme, zda jsme dostali podrobné informace. Zda mají tyto informace reálný smysl. Zda odpovídají empirickým výsledkům. Zda jsou dostatečně přesné, atd. Pokud ne, je nutné model buď změnit nebo zpřesnit. Např. lineární nahradit nelineárním, přidat další hypotézy, atd.

Při konstrukci matematického modelu si musíme dát pozor, abychom do ní nezahrnuli méně významné informace. Jinak by se mohlo stát, že model bude příliš složitý a těžko řešitelný.



## 2 Odvození ekonomických modelů

V následující kapitole jsem čerpala z literatury [1], [4] a [6]. Představme si jednoduchou uzavřenou ekonomiku. Budeme sledovat vývoj těchto funkcí:

$Y = Y(t)$  ..... národní důchod (příjem);

$D = D(t)$  ..... souhrnná (agregátní) poptávka;

$S = S(t)$  ..... souhrnná (agregátní) nabídka;

$C = C(t)$  ..... spotřeba;

$I = I(t)$  ..... investice, akumulace kapitálu;

$L = L(t)$  ..... poptávka po penězích, likvidita;

$r = r(t)$  ..... úroky.

Tyto funkce se mění v čase  $t$  a jejich změnu (růst nebo klesání) vyjádříme pomocí derivace

$$\dot{Y} = \frac{dY(t)}{dt}, \dot{D} = \frac{dD(t)}{dt}, \text{ atd.}$$

### 2.1 IS-LM ekonomický model

Jedná se o makroekonomický model zobrazující vztah peněžního trhu a trhu zboží a služeb pomocí křivek IS a LM. Základy tohoto modelu byly poprvé zveřejněny v roce 1937. Autorem je britský ekonom, profesor univerzity v Oxfordu a zastánce keynesiánské ekonomie Hicks John Richard. V současné době je tento model jedním ze stavebních kamenů makroekonomické teorie. Přináší nové možnosti analýzy, ukazuje vliv monetární politiky na ekonomiku a vliv fiskální politiky na rozdělení agregátní poptávky mezi spotřebu a investici.

Je založen na následujících hypotézách:

H1: Změna národního důchodu  $\dot{Y}$  závisí na vzájemném vztahu mezi souhrnnou nabídkou  $S$  a souhrnnou poptávkou  $D$ .

Vyjádříme rovnicí:

$$\dot{Y} = h(D - S), \quad (1)$$

kde  $h > 0$  je parametr, o němž v dalším budeme předpokládat  $h = 1$ .

Z (1) vidíme, že převyšuje-li v čase  $t$  poptávka  $D(t)$  nad nabídkou  $S(t)$ , je  $\dot{Y}(t) > 0$  a národní důchod roste. V opačném případě, je-li přebytek nabídky nad poptávkou, národní důchod klesá.

H2: Změna úroků  $\dot{r}$  závisí na vzájemném vztahu mezi poptávkou po penězích  $L$  a zásobami peněz  $M$ , které zajišťuje Centrální banka, a o nichž předpokládáme, že jsou konstantní.

Vyjádříme rovnicí:

$$\dot{r} = m(L - M), \quad (2)$$

kde  $m > 0$  je parametr, o němž v dalším budeme předpokládat  $m = 1$ .

Z (2) vidíme, že pokud v čase  $t$  poptávka po penězích  $L(t)$  převyšuje zásoby peněz  $M$ , úroky  $r(t)$  rostou.

H3: Souhrnná poptávka  $D$  se skládá ze spotřeby  $C$  a investic  $I$ .

Vyjádříme rovnicí:

$$D = C + I. \quad (3)$$

H4: Spotřeba  $C$  je lineární funkcí národního důchodu  $Y$ .

Vyjádříme rovnicí:

$$C = cY, \quad (4)$$

kde  $c \in (0, 1)$  je koeficient tendence ke spotřebě.

H5: Investice  $I$  jsou lineární funkcí úroků  $r$ .

Vyjádříme rovnicí:

$$I = -ar + I_0, \quad (5)$$

kde  $a > 0$  je koeficient tendence k investování a  $I_0$  jsou autonomní konstantní investice.

H6: Poptávka po penězích  $L$  je lineární funkcí národního důchodu  $Y$ .

Vyjádříme rovnicí:

$$L = kY, \quad (6)$$

kde koeficient  $k > 0$ .

H7: Souhrnná nabídka  $S$  je rovna národnímu důchodu  $Y$ , tj.

$$S = Y. \quad (7)$$

Z hypotéz H1 - H7 odvodíme matematický model.

Položme  $h = 1$  a dosadíme (3),(4),(5) a (7) do rovnice (1).

Dostáváme

$$\dot{Y} = (c - 1)Y - ar + I_0. \quad (8)$$

Označíme-li

$$s = 1 - c,$$

pak  $s$  nazýváme koeficientem tendence k úsporám a rovnice (8) má pak tvar

$$\dot{Y} = -sY - ar + I_0. \quad (9)$$

Položme  $m = 1$  a dosadíme (6) do rovnice (2).

Dostáváme

$$\dot{r} = kY - M. \quad (10)$$

Matematickým modelem popisujícím ekonomiku, v níž platí předpoklady H1-H7, je soustava dvou diferenciálních rovnic 1.řádu

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= -sY - ar + I_0, \\ \dot{r} &= Y - M. \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 Spojitý model typu multiplikátor-akcelerátor

Model multiplikátor-akcelerátor je podle svých autorů nazýván Hicksovým-Samuelsonovým modelem nebo také (neo)keynesovským modelem ekonomického cyklu. V roce 1939 použil tento mechanismus Paul A. Samuelson, jako jeden z prvních ekonomů, k vysvětlení cyklických výkyvů tržních ekonomik. V roce 1950 doplnil tento model jeho britský kolega Sir John Richard Hicks, který stanovil mantinely, v jejichž rámci se ekonomické cykly pohybují.

Je založen na následujících hypotézách:

H1: Národní důchod  $Y$  roste v reakci na nadbytečnou agregátní poptávku  $D$ .  
Vyjádříme rovnicí:

$$\dot{Y} = h(D - Y), \quad (12)$$

kde  $h > 0$  je parametr.

H2: Agregátní poptávka  $D$  se skládá ze spotřeby  $C$  a investic  $I$ . Vyjádříme rovnicí:

$$D = C + I. \quad (13)$$

H3: Změna investic  $\dot{I}$  závisí na rozdílu aktuálních investic  $I$  a jejich požadované (optimální) hladiny  $I^*$ . Vyjádříme rovnicí:

$$\dot{I} = k(I^* - I), \quad (14)$$

kde  $k > 0$  je parametr.

H4: Požadovaná hladina investic  $I^*$  je úměrná růstu národního důchodu. Vyjádříme ve tvaru:

$$I^* = v\dot{Y}, \quad (15)$$

kde koeficient  $v$  se nazývá akcelerátor.

H5: Spotřeba  $C$  je lineární funkcí národního důchodu  $Y$ . Vyjádříme rovnicí:

$$C = (1 - s)Y + c_0, \quad (16)$$

kde  $c_0$  je autonomní konstantní spotřeba a  $s$  je koeficient tendence k úsporám,  $s \in (0, 1)$ . Koeficient  $\frac{1}{s}$  nazýváme multiplikátor.

Z hypotéz H1 - H5 odvodíme matematický model. Dosadíme-li (13) a (16) do (12), dostáváme

$$\dot{Y} = h[(1 - s)Y + I + c_0 - Y]. \quad (17)$$

Úpravou obdržíme rovnici

$$\dot{Y} = h(-sY + I + c_0). \quad (18)$$

Dosaďme (15) do (14) a dostáváme

$$\dot{I} = k(v\dot{Y} - I). \quad (19)$$

Pro jednoduchost budeme dále předpokládat  $k = h = 1$ . Jednoduchou úpravou převedeme (18) na rovnici ve tvaru

$$I = \dot{Y} + sY - c_0 \quad (20)$$

a derivováním dostáváme

$$\dot{I} = \ddot{Y} + s\dot{Y}. \quad (21)$$

Dosazením (21) do (19) obdržíme rovnici

$$\ddot{Y} + s\dot{Y} = v\dot{Y} \quad (22)$$

a následně dosazením  $I$  podle (20) dostaneme

$$\ddot{Y} + s\dot{Y} = v\dot{Y} - (\dot{Y} + sY - c_0). \quad (23)$$

Provedeme ve (23) jednoduché úpravy a výsledek bude ve tvaru

$$\ddot{Y} + \dot{Y}(s - v + 1) + sY = c_0. \quad (24)$$

V následujících kapitolách 3, 4 a 5 uvedeme výběr z teorie dynamických systémů a diferenciálních rovnic, který je čerpán z literatury [2], [3]. Pomocí této teorie pak v kapitole 6 vyšetříme model multiplikátor-akcelerátor.

### 3 Dynamické systémy

Dynamický systém lze definovat jako matematický model měnící se v čase podle jistých pravidel. Uveďme přesnou definici:

**Definice 3.1.** *Nechť  $n$  je přirozené číslo,  $G \subset \mathbf{R}^n$ ,  $J \subset \mathbf{R}$ ,  $\varphi \in C(J \times G)$ . Nechť zobrazení  $\varphi(t, \mathbf{x})$  má tyto vlastnosti:*

1.  $\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0$  pro  $(0, \mathbf{x}^0) \in J \times G$ ;
2.  $\varphi(t + s, \mathbf{x}^0) = \varphi(t, (s, \mathbf{x}^0))$  pro  $t, s \in J$ ,  $\mathbf{x}^0 \in G$  pro něž jsou obě strany definovány;
3. pro každé  $t \in J$  existuje k zobrazení  $\varphi(t, \cdot)$  inverzní zobrazení  $\varphi(-t, \cdot)$ .

Potom zobrazení  $\varphi : J \times G \rightarrow G$  nazveme tok. Pro každé pevné  $t \in J$  nazveme zobrazení  $\varphi(-t, \cdot) : G \rightarrow G$  dynamický systém.

Dynamické systémy dělíme na:

- spojité, kdy  $J$  je interval;
- diskrétní, kdy  $J$  je diskrétní množina (např. posloupnosti).

Dále budeme uvažovat dynamické systémy pro  $n = 2$ .

#### 3.1 Spojité dynamické systémy

Ve spojitých dynamických systémech předpokládáme, že čas  $t$  se spojitě mění a nabývá hodnot z intervalu  $J$ . Interval  $J$  obsahuje bod 0 a může být omezený i neomezený.

Tyto dynamické systémy lze generovat autonomními obyčejnými diferenciálními rovnicemi tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Rovnice (25) má složky

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned} \quad (26)$$

Vektorová funkce  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  má nezávisle proměnnou  $t$ , kterou obvykle nazýváme časovou proměnnou.

**Definice 3.2.** Řešením rovnice (25) na intervalu  $J \subset \mathbf{R}$  rozumíme funkci  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  takovou, že  $\mathbf{x} \in C^1(J)$  splňuje (25) pro každé  $t \in J$ .

Vzhledem k tomu, že rovnice (25) má obvykle nekonečně mnoho řešení, kládeme na řešení další podmínky. Základní podmínkou je tzv. počáteční podmínka, která je ve tvaru

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (27)$$

Podmínka (27) má složky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \\ x_2(0) &= x_2^0. \end{aligned} \quad (28)$$

Bod  $\mathbf{x}^0 \in G$  je tzv. počáteční bod řešení a z tohoto bodu vychází řešení v čase  $t = 0$ . Úloha (25),(27) se nazývá počáteční Cauchyova úloha. Úkolem je najít řešení rovnice (25), které vyhovuje podmínce (27). Řešení Cauchyovy úlohy (25),(27) budeme značit  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ . Tedy tato vektorová funkce splňuje (25), tj. platí

$$\dot{\varphi}(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}^0)), \quad t \in J \quad (29)$$

a také splňuje (27), tj. platí

$$\varphi(0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0. \quad (30)$$



**Věta 3.1.** (Základní úloha o existenci a jednoznačnosti)

Nechť  $G \subset \mathbf{R}^2$  je otevřená množina,  $\mathbf{f} \in C^1(G), \mathbf{x}^0 \in G$ . Potom úloha (25), (27) má jediné řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  definované na maximálním intervalu  $I_{\mathbf{x}^0} = (a_{\mathbf{x}^0}, b_{\mathbf{x}^0})$  obsahujícím 0. Navíc  $\varphi$  je  $C^2$ -funkce v  $t$  a  $C^1$ -funkce funkce v  $\mathbf{x}^0$ .

Budeme dále předpokládat, že v (25) je funkce  $f \in C^1(G)$ , tedy bude platit Věta 1.

**Věta 3.2.** (Generování dynamického systému)

Nechť  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je řešením úlohy (25), (27) na  $J$ . Pokud chápeme  $\varphi$  jako funkci 3 proměnných  $t, x_1^0, x_2^0$ , je  $\varphi$  tokem. Pro každé pevné  $t \in J$  je pak  $\varphi(t, \cdot) : G \rightarrow G$  dynamickým systémem.

Tzv. fázový portrét diferenciální rovnice (25) dává informaci o chování dynamického systému a lze z něj získat globální informace o chování množiny řešení diferenciální rovnice (25), která generuje dynamický systém (ve smyslu Věty 2).

Uveďme základní pojmy potřebné k definici fázového portréту diferenciální rovnice (25).

**Definice 3.3.** Graf řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina  $\{(t, \varphi(t, \mathbf{x}^0)) : t \in I_{\mathbf{x}^0}\} \subset \mathbf{R}^3$ .

Je to hladká křivka v  $\mathbf{R}^3$  s parametrickými rovnicemi

$$t = t, x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), t \in I_{\mathbf{x}^0},$$

kde  $\varphi(t, \mathbf{x}^0) = (x_1(t), x_2(t))$ .

**Definice 3.4.** Orbita řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina

$$\{\varphi(t, \mathbf{x}^0) : t \in I_{\mathbf{x}^0}\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Je to hladká křivka v  $\mathbf{R}^2$  s parametrickými rovnicemi

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), t \in I_{\mathbf{x}^0}.$$

Orbitu řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  dostaneme jako projekci grafu tohoto řešení do prostoru  $G \subset \mathbf{R}^2$ . Orbitu značíme  $\gamma(\mathbf{x}^0)$ .

**Definice 3.5.** *Kladná část orbity řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina*

$$\gamma_+(\mathbf{x}^0) = \{\varphi(t, \mathbf{x}^0) : t \in [0, b_x^0]\}$$

*a záporná část orbity řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  je množina*

$$\gamma_-(\mathbf{x}^0) = \{\varphi(t, \mathbf{x}^0) : t \in (a_x^0, 0]\}.$$

**Definice 3.6.** *Kritický bod diferenciální rovnice (25) je bod  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^2$  splňující rovnici*

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \tag{31}$$

*Tato rovnice má složky*

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= 0, \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Termín kritický bod je užíván ve více významech:

- bod  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^2$  splňující  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ;
- jednobodová orbita konstantního řešení  $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$ ;
- konstantní řešení  $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv \bar{\mathbf{x}}$ .

V aplikacích užíváme místo termínu kritický bod nejčastěji termín ekvilibrum nebo singulární bod nebo bod rovnováhy.

**Definice 3.7.** *Fázový portrét diferenciální rovnice (25) je množina všech orbit diferenciální rovnice (25) společně se šipkami na orbitách, které vyznačují pohyb bodu  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$  na orbitě pro rostoucí  $t$ .*

Při vyšetřování konkrétních modelů mají kritické body velký význam. Reprezentují rovnovážné stavy modelů, tj. stavy modelů, které se s probíhajícím časem nemění. Velmi důležitá je zde také otázka, zda stav modelu v čase  $t = 0$ , který se málo liší od rovnovážného stavu, se s rostoucím  $t$  bude přibližovat nebo vzdalovat od rovnovážného stavu. Tím se zabývá teorie stability.

## 3.2 Stabilita kritických bodů

Symbolem  $\|\cdot\|$  budeme značit Eukleidovskou normu v  $\mathbf{R}^2$ , tj.

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2.$$

**Definice 3.8.** *Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  diferenciální rovnice (25) nazveme stabilní, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

**Definice 3.9.** *Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  diferenciální rovnice (25) nazveme nestabilní, jestliže není stabilní.*

**Poznámka 3.1.** *Existuje takový  $\varepsilon$ -ový válec, který aspoň pro některé  $t > 0$  opustí graf každého řešení  $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ , ať volíme  $\mathbf{x}^0$  libovolně blízko  $\bar{\mathbf{x}}$ .*

**Definice 3.10.** *Kritický bod  $\bar{\mathbf{x}} \in G$  diferenciální rovnice (25) nazveme asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a*

$$\exists r > 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in G : \|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0.$$

Množina bodů  $\mathbf{x}^0 \in G$  splňujících podmínku  $\|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r$  se nazývá oblast přitažlivosti. Grafy řešení s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}^0$  v oblasti přitažlivosti konvergují k  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Při vyšetřování rovnice (25) lze s výhodou užít metodu izoklin. Izokliny rovnice (25) jsou křivky definované rovnicí

$$f_1(x_1, x_2) = cf_2(x_1, x_2),$$

kde  $c$  je nějaká pevná konstanta. My budeme pracovat se dvěma speciálními izoklinami - vertikální a horizontální izokliny.

Vertikální izoklina má rovnici

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

a je protínána vertikálně orbitami řešení rovnice (25).

Horizontální izoklina má rovnici

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

a je protínána orbitami řešení rovnice (25) horizontálně.

Průsečky vertikální a horizontální izokliny jsou kritické body rovnice (25). Uvedené izokliny dělí oblast  $G \subset \mathbf{R}^2$  na části, v nichž funkce  $\dot{x}_1$  a  $\dot{x}_2$  mají konstantní znaménko.

## 4 Systémy diferenciálních rovnic 1.řádu s konstantními koeficienty

Budeme studovat homogenní dvourozměrné systémy s konstantními koeficienty.

Nechť je dána rovnice

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (33)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbf{R}, \quad i, j = 1, 2,$$

je konstantní matice.

Ve složkách má rovnice (33) tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{aligned} \quad (34)$$

Rovnice (33) je tedy speciálním případem rovnice (25), kde

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ f_2(x_1, x_2) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Mohou nastat 2 případy -  $\det A = 0$  a  $\det A \neq 0$ .

Je-li  $\det A \neq 0$ , má rovnice (33) jediný kritický bod. Tento kritický bod je počátek. Je-li  $\det A = 0$ , má rovnice (33) nekonečně mnoho kritických bodů, které tvoří přímku procházející počátkem.

Rovnice

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (36)$$

se nazývá charakteristická rovnice matice  $A$ . Nulové body rovnice (36) jsou vlastní čísla matice  $A$ .

Je známo, že existuje vhodná reálná lineární transformace

$$\mathbf{x} = P\mathbf{w}$$

převádějící diferenciální rovnici (33) na tvar

$$\dot{\mathbf{w}} = B\mathbf{w}, \quad (37)$$

kde

$$B = P^{-1}AP$$

je Jordanův kanonický tvar matice  $A$ .

Určíme-li orbity rovnice (37), jsou orbity rovnice (33) dány vztahem

$$\mathbf{x} = P\mathbf{w}.$$

Obdržíme je z nich tedy lineární transformací. Každá regulární lineární transformace se dá rozložit na konečný počet elementárních transformací typu

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r \neq 0,$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

kde  $P_1$  provádí překlopení grafu křivky kolem osy 1. kvadrantu,  $P_2$  provádí protažení grafu křivky (a pro  $r < 0$  také překlopení grafu),  $P_3$  provádí zkosení grafu křivky.

Lineární transformace tedy nemění typ kritického bodu. Z toho vyplývá, že můžeme vyšetřování orbit rovnice (33) nahradit vyšetřováním orbit rovnice (37) v okolí počátku. Za tímto účelem označme

$$\mathbf{w} = (u, v).$$

Nyní se budeme zabývat případem, kdy  $\det A \neq 0$  a tedy rovnice (33) má jediný singulární bod.

**Případ 1:** Má-li charakteristická rovnice (36) reálné kořeny  $\mu \neq \nu$ , potom Jordanův kanonický tvar  $B$  matice  $A$  je

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Řešením autonomní rovnice (37) je vektorová funkce o složkách

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \exp(\mu t), \\ v(t) &= v_0 \exp(\nu t), \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

kde  $u_0, v_0 \in \mathbf{R}$  jsou libovolné konstanty, které určují bod na orbitě v čase  $t = 0$ .

Pokud  $u_0 = 0$  nebo  $v_0 = 0$ , jsou nedegenerované orbity otevřené polopřímky vycházející z počátku a ležící v přímce  $u = 0$  nebo  $v = 0$ .

Pokud  $u_0 \neq 0, v_0 \neq 0$ , potom platí

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^\nu = \exp(\mu\nu t) = \left(\frac{v}{v_0}\right)^\mu,$$

tedy každou orbitu rovnice (37) můžeme psát ve tvaru

$$v = v_0 |u_0|^{-\left(\frac{\nu}{\mu}\right)} |u|^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Platí-li

1.  $0 < \nu < \mu$ , potom kritický bod je typu uzel zřídlo;
2.  $\mu < \nu < 0$ , potom kritický bod je typu uzel výlevka;
3. jsou-li  $\mu$  a  $\nu$  opačných znamének, potom kritický bod je typu sedlo.

**Případ 2:** Má-li charakteristická rovnice (36) dvojnásobný kořen  $\mu \neq 0$  a  $|a_{12}| + |a_{21}| = 0$ , potom Jordanův kanonický tvar  $B$  matice  $A$  je

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Orbitami rovnice (37) jsou polopřímky vycházející z počátku. Pro zvolený bod  $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$  má taková orbita parametrické rovnice

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \exp(\mu t), \\ v(t) &= v_0 \exp(\mu t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Je-li např.  $u_0 \neq 0$  a  $v_0 \neq 0$ , vyloučíme z těchto rovnic parametr  $t$  a dostáváme rovnici

$$v = \frac{v_0}{u_0} u.$$

V tomto případě je kritický bod typu uzel zřídlo, je-li  $\mu > 0$  a uzel výlevka, je-li  $\mu < 0$ .

**Případ 3:** Má-li charakteristická rovnice (36) dvojnásobný kořen  $\mu \neq 0$  a  $|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0$ , potom Jordanův kanonický tvar  $B$  matice  $A$  je

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Orbity rovnice (37) jsou určeny rovnicemi

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_0 + v_0 t) \exp(\mu t), \\ v(t) &= v_0 \exp(\mu t), \end{aligned}$$

kde  $t \in \mathbf{R}$ .

Jestliže  $v_0 = 0$ , potom orbity leží v ose  $u$ .

Nechť  $v_0 \neq 0$ . Potom

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \frac{v}{v_0}.$$

Protože pro  $v_0 > 0$  je  $v(t) > 0$  pro  $t \in \mathbf{R}$ , a pro  $v_0 < 0$  je  $v(t) < 0$  pro  $t \in \mathbf{R}$ , je logaritmus vždy definován.

Rovnici orbity lze psát ve tvaru

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{v_0} (u_0 + v_0 t),$$

resp. ve tvaru

$$u = \frac{v}{v_0} \left( u_0 + \frac{v_0}{\mu} \ln \frac{v}{v_0} \right).$$

V tomto případě je kritický bod typu uzel zřídlo pro  $\mu > 0$  a uzel výlevka pro  $\mu < 0$ .



**Případ 4:** Má-li charakteristická rovnice (36) komplexně sdružené kořeny  $\mu, \nu$ , kde

$$\begin{aligned}\mu &= \alpha + i\beta, \\ \nu &= \alpha - i\beta,\end{aligned}$$

$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , potom reálný Jordanův kanonický tvar  $B$  matice  $A$  je

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Platí:

1. Je-li  $\alpha \neq 0$ , má (37) tvar

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha u + \beta v, \\ \dot{v} &= -\beta u + \alpha v.\end{aligned}\tag{38}$$

Zavedeme polární souřadnice

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t)\cos\varphi(t), \\ v(t) &= r(t)\sin\varphi(t), \quad t \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

Platí

$$u^2 + v^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

Derivováním rovnice

$$r^2(t) = u^2(t) + v^2(t)$$

a dosazením (38) dostaneme

$$2r\dot{r} = 2u\dot{u} + 2v\dot{v} = 2u(\alpha u + \beta v) + 2v(-\beta u + \alpha v) = 2\alpha(u^2 + v^2) = 2\alpha r^2.$$

Dále je

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Derivujeme rovnici

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{v(t)}{u(t)}$$

a máme

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot \frac{\dot{v}u - v\dot{u}}{u^2}.$$

Odtud dosazením (38) dostaneme

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{v}u - v\dot{u}}{u^2 + v^2} = \frac{(-\beta u + \alpha v)u - v(\alpha u + \beta v)}{u^2 + v^2} = -\beta.$$

Odvodili jsme tedy systém

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\varphi} = -\beta. \quad (39)$$

Řešením systému (39) jsou funkce

$$r(t) = r_0 \exp(\alpha t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \beta t, \quad t \in \mathbf{R},$$

kde  $r_0 \in [0, \infty)$ ,  $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ .

Pro  $r_0 \neq 0$  má orbita tvar spirály. Pro  $r_0 = 0$  je orbita kritickým bodem  $(0,0)$ , který je v tomto případě typu ohnisko.

2. Je-li  $\alpha = 0$ , má systém (39) tvar

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = -\beta. \quad (40)$$

Řešením systému (40) jsou funkce

$$r(t) = r_0, \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \beta t, \quad t \in \mathbf{R},$$

kde  $r_0 \in [0, \infty)$ ,  $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ .

Pro  $r_0 \neq 0$  má orbita tvar kružnice. Pro  $r_0 = 0$  je orbita kritickým bodem  $(0,0)$ , který je typu střed.

## 5 Vyšetření modelu multiplikátor - akcelerátor

Převedeme rovnici (24) na tvar (33). Nejprve uijeme substituci

$$x_1(t) = Y(t), \quad x_2(t) = \dot{Y}(t).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{Y}(t) = c_0 - sY(t) - (s - v + 1)\dot{Y} = c_0 - sx_1(t) - (s - v + 1)x_2(t). \end{aligned}$$

Odvodili jsme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -sx_1(t) - (s - v + 1)x_2(t) + c_0. \end{aligned} \tag{41}$$

Zvolme další substituci

$$y_1(t) = x_1 - \frac{c_0}{s}, \quad y_2 = x_2$$

a dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -s(y_1(t) + \frac{c_0}{s}) - (s - v + 1)y_2(t) + c_0 = -sy_1(t) - c_0 - (s - v + 1)y_2(t) + c_0, \end{aligned}$$

kde po úpravě obdržíme soustavu typu (33)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -sy_1(t) - (s - v + 1)y_2(t). \end{aligned} \tag{42}$$

Matice  $A$  má v tomto případě tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -s & -(1 - v + s) \end{pmatrix}.$$

Výpočtem zjistíme, že  $\det A \neq 0$  a z toho vyplývá, že počátek je jediný kritický bod rovnice (42).

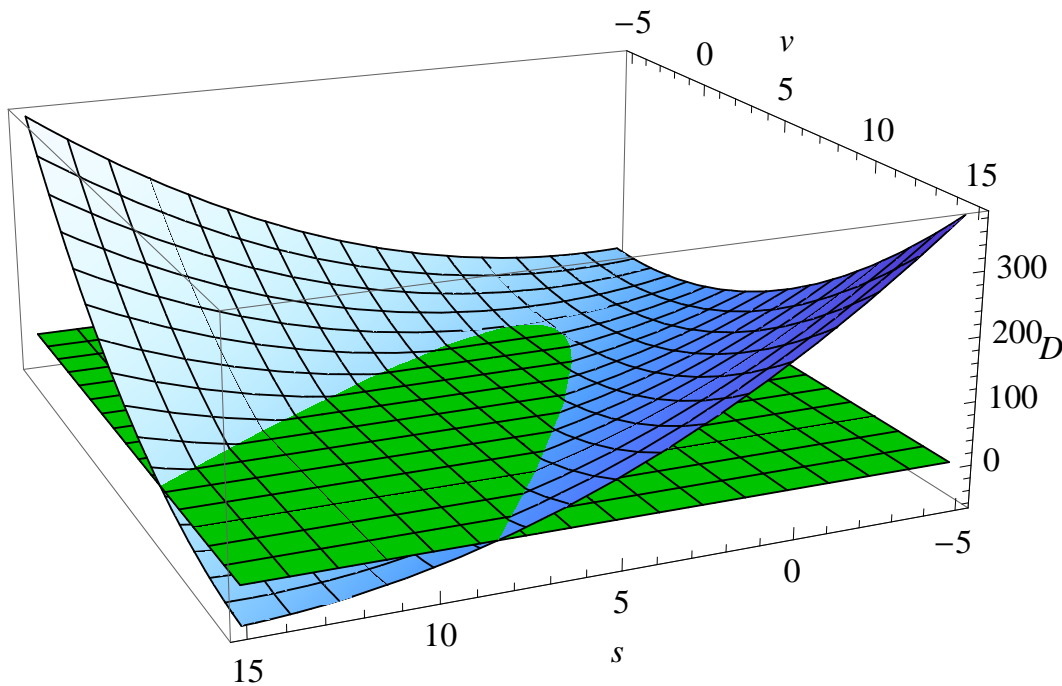
Z (36) plyne, že řešení charakteristické rovnice má tvar

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}, \quad (43)$$

kde  $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$  a  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

V našem případě je  $\operatorname{tr} A = -(1 - v + s)$ ,  $\det A = s$  a diskriminant  $D$  má tvar

$$D(s, v) = (1 - v + s)^2 - 4s = 1 - 2s - 2v - 2vs + s^2 + v^2.$$



Obrázek 1: Graf funkce  $D(s, v)$

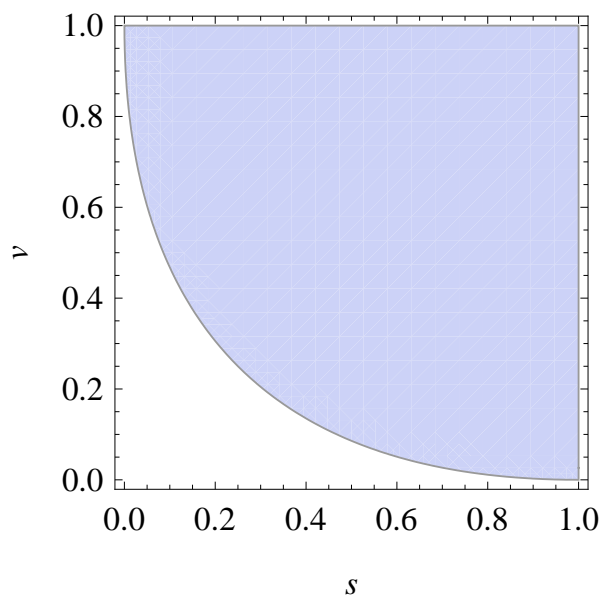
Pro dané parametry  $s, v$  obrázek 1 zobrazuje hodnotu diskriminantu  $D(s, v)$ . Názorně je vidět oblast, kde  $D(s, v)$  nabývá záporných, kladných a nulových hodnot.

Nyní budeme předpokládat  $s \in (0, 1)$  a  $v \in (0, 1)$ .

Z obrázku 2 vidíme, že pro  $D(s, v)$  mohou nastat následující varianty:

I. Nechť  $[s, v]$  je z modré oblasti, tj.  $D(s, v) < 0$ .

Charakteristická rovnice má v tomto případě komplexně sdružené kořeny



Obrázek 2: Oblasti, v nichž je  $D(s, v) > 0$  a  $D(s, v) < 0$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta,\end{aligned}$$

kde

$$\alpha = \frac{v - s - 1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{(1 + s - v)^2 - 4s}}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme  $s \in (0, 1)$  a  $v \in (0, 1)$ , platí vždy  $\alpha < 0$ .

Zavedeme polární souřadnice

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t)\cos\varphi(t), \\ v(t) &= r(t)\sin\varphi(t), \quad t \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

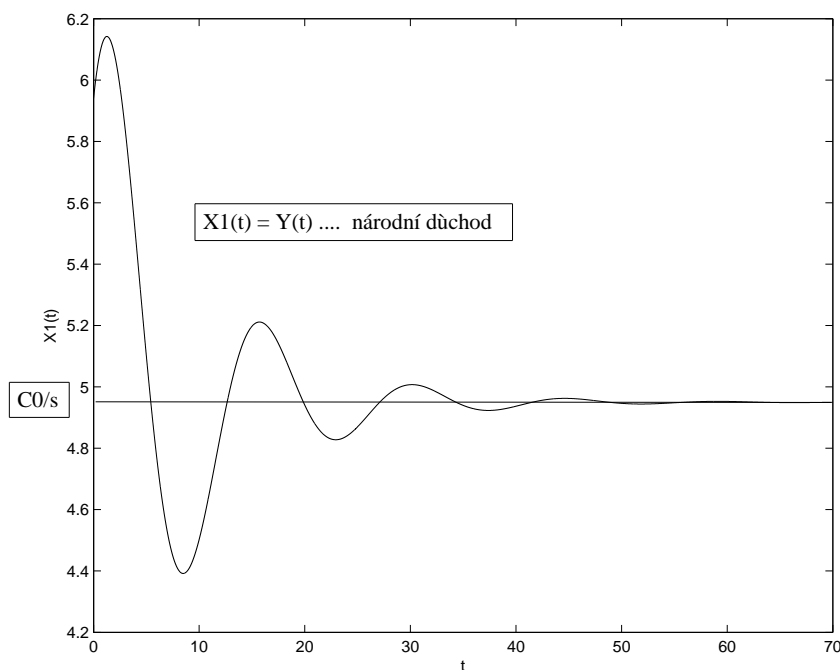
Pak podle Kapitoly 5, Případu 4 dostáváme, že řešením systému (42) jsou funkce

$$r(t) = r_0 \exp(\alpha t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \beta t, \quad t \in \mathbf{R},$$

kde  $r_0 \in [0, \infty)$ ,  $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ .

Pro  $r_0 \neq 0$  má orbita tvar spirály, která pro  $t \rightarrow \infty$  konverguje ke kritickému bodu  $(0, 0)$ . Přejdeme-li k soustavě (41), dostáváme pro libovolnou počáteční podmínku  $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{R}^2$  orbitu ve tvaru spirály, která pro

$t \rightarrow \infty$  konverguje ke kritickému bodu  $(\frac{c_0}{s}, 0)$ . Tento bod je proto asymptoticky stabilní ohnisko. Pro původní rovnici (24) dostáváme, že libovolné její řešení  $Y(t)$  konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  ke konstantnímu řešení  $\bar{Y} = \frac{c_0}{s}$ , přičemž  $Y(t)$  osciluje kolem  $\bar{Y}$ . Viz obrázek 3.



Obrázek 3: Graf funkce  $Y$  pro  $s = 0,2$ ,  $v = 0,99$ ,  $c_0 = 0,99$

$\bar{Y}$  je velikost národního důchodu, která se v probíhajícím čase nemění - rovnovážný stav národního důchodu.

II. Necht'  $[s, v]$  je z bílé oblasti, tj.  $D(s, v) > 0$ .

Charakteristická rovnice má v tomto případě 2 reálné kořeny  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , kde

$$\lambda_1 = \frac{v - s - 1 + \sqrt{(1 + s - v)^2 - 4s}}{2}$$

a

$$\lambda_2 = \frac{v - s - 1 - \sqrt{(1 + s - v)^2 - 4s}}{2}.$$

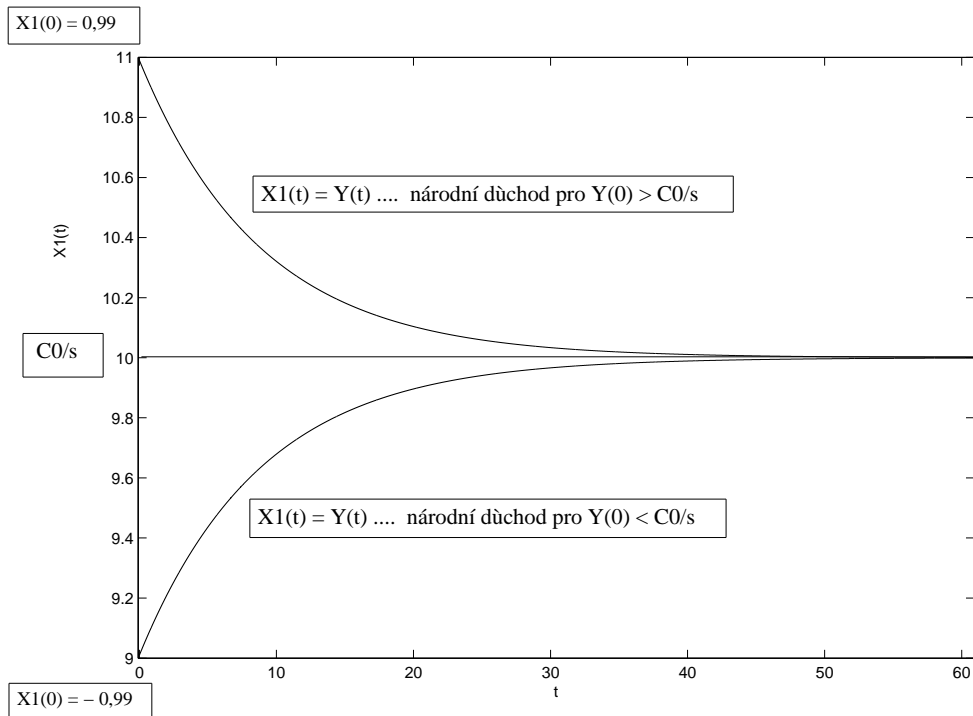
Řešením systému (42) je vektorová funkce o složkách

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1^0 \exp(\lambda_1 t), \\ y_2(t) &= y_2^0 \exp(\lambda_2 t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme  $s \in (0, 1)$  a  $v \in (0, 1)$ , bude platit případ, kdy  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  a tedy kritický bod je typu uzel výlevka (viz Kapitola 4, Příklad 1). To znamená, že pro libovolnou počáteční podmínku  $(y_1^0, y_2^0) \in \mathbf{R}^2$  má odpovídající orbita tvar křivky o rovnici

$$y_2 = y_2^0 |y_1^0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

která konverguje ke kritickému bodu  $(0,0)$ . Přejdeme-li k soustavě (41), dostáváme pro libovolnou počáteční podmínku  $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{R}^2$  orbitu ve stejném tvaru, která konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  ke kritickému bodu  $(\frac{c_0}{s}, 0)$ . Tento bod je asymptoticky stabilní uzel. Pro původní rovnici (24) dostáváme, že libovolné její řešení  $Y(t)$  konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  ke konstantnímu řešení  $\bar{Y} = \frac{c_0}{s}$ , přičemž  $Y(t)$  je monotonní, tj. pro  $Y(0) > \bar{Y}$  je klesající a pro  $Y(0) < \bar{Y}$  rostoucí. Viz obrázek 4.



Obrázek 4: Graf funkce  $Y$  pro  $s = 0, 1, v = 0, 1, c_0 = 1$

Nyní provedeme vyšetření modelu pomocí metody izoklin.

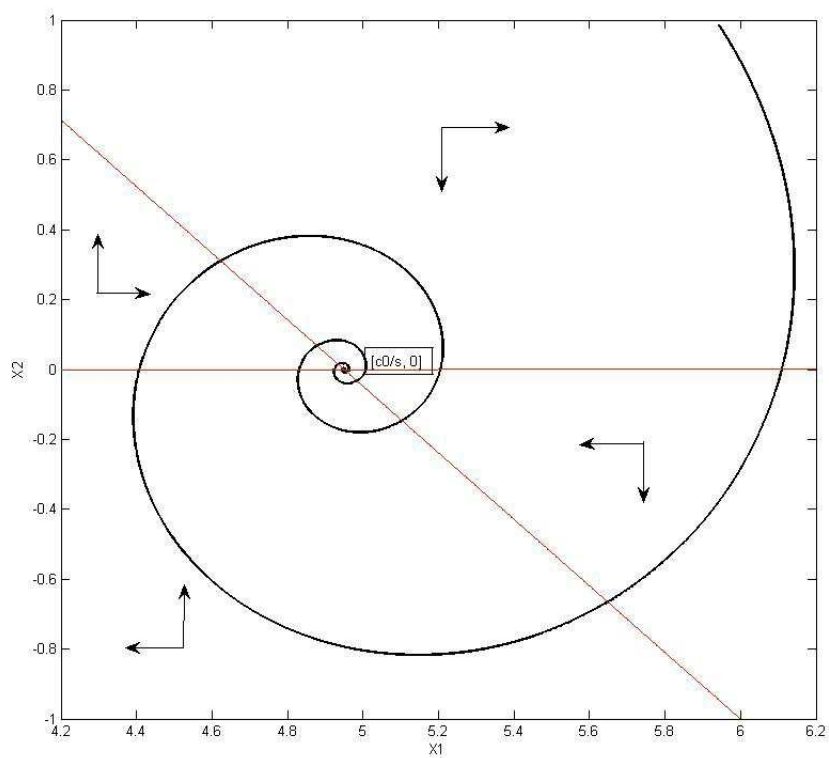
Z rovnice (41) plyne, že vertikální izoklina má tvar  $x_2 = 0$ , je to tedy osa  $x_1$ . Horizontální izoklina je přímka o rovnici

$$x_2 = \frac{c_0 - sx_1}{s - v + 1},$$

viz obrázek 5.

Tyto izokliny nám rozdělují fázovou rovinu na čtyři části, v nichž mají funkce  $\dot{x}_1$  a  $\dot{x}_2$  konstantní znaménko. To je na obrázku 5 vyznačeno dvojicí šipek. Například dvojice šipek doprava dolů vyjadřuje skutečnost, že první složka řešení, tj. funkce  $x_1(t)$ , roste a druhá složka řešení, tj. funkce  $x_2(t)$ , klesá. Orbita odpovídající tomuto řešení sleduje v každé části roviny směr vyznačený dvojicí šipek.





Obrázek 5: Orbita odpovídající řešení systému pro  $s = 0,2$ ,  $v = 0,99$ ,  $c_0 = 0,99$

## Závěr

Hlavním cílem této práce bylo odvození a vyšetření ekonomického modelu multiplikátor-akcelerátor. Nejprve jsme podrobně rozebrali každou jednotlivou hypotézu, ukázali, jaká rovnice z ní vyplývá a z těchto dílčích rovnic pak sestavili výsledný model ve tvaru diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Odvozený model jsme dále vyšetřovali pomocí klasifikace kritických bodů a následně pomocí metody izoklin. K tomuto účelu jsme diferenciální rovnici převedli na dvourozměrný homogenní diferenciální systém s konstantními koeficienty, které závisí na parametrech  $s$  a  $v$ , kde  $\frac{1}{s}$  je multiplikátor modelu a  $v$  je jeho akcelerátor. Stanovili jsme oblasti pro tyto parametry, v nichž je rovnovážný stav národního důchodu stabilním ohniskem a v nichž je stabilním uzlem.

Jednotlivé výsledky vyšetřování jsou vyjádřeny obrázky, ve kterých jsou zvoleny konkrétní hodnoty pro  $s$ ,  $v$  a pro autonomní spotřebu  $c_0$ .

Práce byla vysázena pomocí typografického programu  $\text{\TeX}$ .

## Literatura

- [1] Pierre, N. V. Tu: *Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [2] Hale, J., Kocak, H.: *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer, 1991.
- [3] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Masarykova univerzita, 1995.
- [4] Jurečka, V. a kol.: *Makroekonomie*. Praha: Grada Publishing, a. s., 2010.
- [5] Illner, R., a kol.: *Mathematical Modelling*. USA: AMS, 2005.
- [6] *Model IS-LM* [online], dostupné z: <http://www.orionsoft.cz/makro/ism/mislm.htm>, [citováno dne 11.4.2013].
- [7] Hřebíček, J., Škrdla, M.: *Úvod do matematického modelování* [online], dostupné z: <https://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/Bi3101/um/skripta.pdf>, [citováno dne 14.1.2013].