Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Lineární programování
Diplomová práce

Autor: Bc. Veronika Zelená
Studijní program: N1407/Chemie
Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství chemie pro střední školy

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové červen 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 1. 6. 2017 Veronika Zelená

Poděkování:

Tímto bych ráda poděkovala své vedoucí, paní Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D., za odborné vedení, čas strávený při konzultacích, trpělivost, cenné rady, připomínky a pomoc při zpracování diplomové práce.

Anotace

ZELENÁ, V. *Lineární programování.* Hradec Králové, 2017. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, Fakulta přírodovědecká, Katedra matematiky. Vedoucí práce Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D..

Diplomová práce v první části zahrnuje historii a motivaci, druhá část je věnována konvexní analýze v $\mathbb{R}^n$. Třetí část se soustředí na teorii lineárního programování. Čtvrtá část se zabývá metodami řešení lineárního programování a poslední pátá část je sbírka úloh vyřešených pomocí metod řešení.

Klíčová slova: Konvexní množina, konvexní polyedr, množina přípustných řešení, geometrická metoda, simplexová metoda.

Annotation

ZELENÁ, V. *Linear programming.* Hradec Králové, 2017. Master's thesis. University of Hradec Králové, Faculty of Science, Department of Mathematics. Thesis Supervisor Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D..

Master's thesis in the first part includes a history and motivation, the second part is devoted to convex analysis in $\mathbb{R}^n$. The third part focuses on the theory of linear programming. The fourth part deals with the methods of linear programming and the last part is a collection of examples solved using the methods of linear programming.

Keywords:
Convex set, convex polyhedron, set of permissible solutions, geometric method, simplex method.

Obsah

Úvod

Lineární programování je soubor metod umožňující výběr optimální varianty při daném kritériu optimality a daných omezujících podmínkách. Má dlouholetou historii. Jeho počátky sahají až do první poloviny 19. století. Za tu dlouhou dobu si získalo široké uplatnění při řešení nejrůznějších problémů, setkáme se s ním v mnoha oblastech vědy i techniky, v neposlední řadě i v ekonomii.

Diplomová práce je rozdělena na část teoretickou a praktickou. Teoretická část je prezentována čtyřmi kapitolami, z nichž ve čtvrté jsou uvedeny ilustrativní příklady. Jsou zde popsány postupy, se kterými se můžeme v oblasti lineárního programování setkat. V teoretické části je nejvíce čerpáno z [3], [6], [7], [10], [11], [13], [15] a v praktické z [1], [4], [5], [14]. Obrázky, které jsou v diplomové práci zobrazeny, jsou zkonstruovány v programu GEOGEBRA. Praktickou část tvoří sbírka řešených příkladů.

Cílem práce je přehledně zpracovat základní pojmy konvexní analýzy v $\mathbb{R}^n$ potřebné pro definování úlohy lineárního programování, zabývat se geometrickou a simplexovou metodou lineárního programování a vytvořit sbírku příkladů zaměřenou na geometrickou a simplexovou metodu.

Kapitola 1

Úvod do lineárního programování

1.1 Přehled historie

Matematické úvahy vztahující se k lineárnímu programování se objevily už počátkem 19. století. Například v pracích Fouriera, který v roce 1827 přišel s algoritmem pro řešení soustav lineárních nerovnic. Jedním ze základů teorie lineárního programování byla teorie soustav lineárních nerovnic, kterou vypracoval maďarský matematik Farkas na přelomu 19. a 20. století. Výzkum v této oblasti probíhal intenzivně zejména mezi lety 1870 až 1930 a kromě Farkase se mu věnovala řada matematiků, například Minkowski či Carathodory.

Ve 30. letech 20. století byl řešen přiřazovací a dopravní problém, což jsou z dnešního pohledu speciální úlohy lineárního programování. Tyto metody byly založeny spíše na kombinatorických úvahách, stejně tzv. maďarská metoda vytvořená v roce 1954 H. Kuhnem, pojmenovaná na počest maďarských matematiků Koniga a Egerváryho, na které ve své práci navazoval. Obecnou metodu pro řešení dopravního problému vytvořil až v roce 1941 Američan Hitchcock.

Obecná úloha lineárního programování byla předmětem intenzivního výzkumu až v době druhé světové války a zejména těsně po ní. Bylo to způsobeno nutností efektivního řízení a plánování válečných a poválečných ekonomik. V té době se tímto problémem zabývala řada známých osobností matematiky i ekonomie, např. Kantorovič, T. Koopmans, J. von Neumann, W. Leontiev a další. Kantorovič při studiu speciální podúlohy lineárního programování pro optimální alokaci zdrojů v centrálně řízené ekonomice již v roce 1939 vytvořil algoritmus pro její řešení. Rozvoj teorie a aplikací lineárního programování v tomto období vyústil v obecnou formulaci úlohy lineárního programování a v návrh algoritmu pro její řešení *tzv. simplexovou metodu*, obojí vytvořené Dantzignem v roce 1947. Tato dodnes používaná metoda zcela nezpochybnitelně dominovala v lineárním programování po dobu 40 let. Přínos Kantoroviče a Koopmanse byl v roce 1975 oceněn Nobelovou cenou za ekonomii, paradoxně Dantzig se Nobelovy ceny nikdy nedočkal.

Přestože byly občas zkoušeny i metody jiného typu, žádná nedokázala efektivitou konkurovat simplexové metodě, která v případě reálných problémů počítá velmi efektivně a obvykle vyžaduje takový počet iterací, který je pouze malým násobkem dimenze problému.

K vývoji nových algoritmů pro úlohu lineárního programování proto paradoxně nevedlo praktické nasazení simplexové metody, ale její teoretické vlastnosti v oblasti výpočetní složitosti. Je sice známo, že počet iterací je vždy konečný, ale v nejhorších případech tento počet může záviset na dimenzi úlohy exponenciálně. Dodnes není známo, zda existuje varianta simplexové metody s polynomiální výpočetní složitostí (pro většinu variant jsou známy příklady s exponenciální výpočetní složitostí). Tato vlastnost vedla v 70. letech 20. století k zaměření bádání na nalezení metody s polynomiální výpočetní složitostí.

První takovou metodu publikoval L. Kchachian v roce 1979. Ani jeho *elipsoidová metoda* se ovšem simplexové metodě nedokázala ani zdaleka přiblížit v efektivitě výpočtů pro praktické úlohy, proto hledání pokračovalo. Průlom znamenala teprve Karmarkarova metoda vnitřních bodů zveřejněná v roce 1984, jejíž autor avizoval 50krát větší rychlost než u simplexové metody (pro některé velmi velké úlohy). Tento objev odstartoval intenzivní vývoj řady metod tohoto typu.

Desetiletí trvající dominance simplexové metody kontrastuje s oblastí nelineárního programování, která se začala rozvíjet v 50. letech 20. století. V této oblasti byla vyvinuta celá řada značně odlišných metod. V 60. letech se zájem soustředil zejména na penalizační a bariérové metody založené na převodu optimalizační úlohy s omezeními na úlohu bez omezení. V 70. letech 20. století se pozornost přesunula např. k tzv. sekvenciálnímu kvadratickému programování, které je založeno na řešení posloupnosti úloh kvadratického programování aproximujících původní úlohu. Od 60. let byly také studovány úlohy nehladké optimalizace, k jejichž řešení se používají subdiferenciály a zobecněné derivace.

Dalším rozdílem je to, že zejména z historických důvodů simplexová metoda používá speciální terminologii a často byla (či bývá) také vykládána jiným způsobem (tabulkový výpočet) než ostatní optimalizační metody. A přestože simplexová metoda patří mezi metody aktivní množiny (která se v jiné formulaci používá pro úlohy kvadratického programování), tak důsledkem tohoto vývoje bylo jakési rozštěpení oblasti optimalizace s omezeními na dvě odlišné oblasti, na lineární programování a nelineární programování, přičemž každá z těchto oblastí používala vlastní terminologii.

Tuto mezeru aspoň částečně překlenuly až metody vnitřních bodů, které byly totiž na rozdíl od simplexové metody zobecněny pro úlohy nelineárního programování. Brzy se totiž ukázala příbuznost této metody s již zavrženou bariérovou metodou. V současnosti jsou metody vnitřních bodů pro lineární a nelineární optimalizační úlohy zkoumány řadou matematiků zabývajících se optimalizačními metodami.[15]

1.2 Co je to lineární programování

Lineární programování je aplikovaná matematická disciplína, která je poměrně mladá a vznikla z především ekonomické praxe. Má široké uplatnění při vědeckém řízení podniků i celého národního hospodářství. Výrobní program závodu je obvykle záležitost mnoha faktorů, převážně omezujícího charakteru. Tato omezení nejdou však nikdy tak daleko, aby neponechala možnost výběru z celé řady variant. Nyní jde o to vybrat tu, která optimálně zaručuje plnění daného cíle: dosažení maximálního zisku nebo minimálních výrobních nákladů, největší úsporu surovin, energie apod. Optimální řešení je pak výsledkem složitých myšlenkových konstrukcí, které používají při řešení matematické metody.

V praktických úlohách tohoto a podobného charakteru je typické velké množství omezení a parametrů, na nichž řešení závisí. V této souvislosti vystupuje jako prvořadý důležitý úkol tzv. matematická formulace úlohy, která vytvoří matematický model úlohy. Je důležité, aby obsahoval všechny pro řešení důležité prvky a svou formou byl vhodný pro použití matematických metod při řešení.

Matematická disciplína, která řeší problémy podobné povahy jako ve výše vybraném příkladě, se nazývá *matematické programování*. I když se praktické úlohy této disciplíny řeší nejčastěji za použití počítačů, slovo „programování“ znamená spíše nalezení efektivního postupu pro řešení než sestavení programu pro počítač. Obsahem a cílem matematického programování, které je součástí operační analýzy, je vybudovat teorii a vypracovat výpočetní postupy, jež by sloužily k praktickému řešení třídy úloh. Potřebujeme nalézt vázaný extrém funkcí více proměnných, tj. maximum či minimum funkce. Bude se tedy jednat o extrémy lineárních funkcí vázaných podmínkami ve tvaru lineárních rovnic a nerovnic. [13]

1.3 Motivace

Uveďme si nyní slovní zadání jednoduché slovní úlohy, na které si ukážeme, jak získat matematickou formulaci úlohy.

Příklad 1.1. V továrně chtějí vyrobit dva druhy hraček. Na větší hračku je potřeba 4 dm^2 překližky a 50 ml nátěrové barvy. Na menší hračku jsou potřeba 3 dm^2 překližky a pouze 20 ml nátěrové barvy. Na skladě mají 1 800 dm^2 překližky a 16 l nátěrové barvy. Jak mohou zkombinovat počet výrobků větší a menší hračky?

Řešení 1.1. Nechť x_1 a x_2 značí počet větších a menších hraček, které budou vyrobeny. Pak je požadavek na překližku je $4x_1 + 3x_2$ dm^2. Protože je k dispozici 1 800 dm^2 překližky, musí platit:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 1\,800.$$

Obdobné omezení pro nátěrovou barvu:

$$50x_1 + 20x_2 \leq 16\,000,$$

což po zkrácení dává

$$5x_1 + 2x_2 \leq 1\,600.$$

Protože x_1 a x_2 jsou nezáporná množství, musí ještě platit

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Kapitola 2

Základní pojmy

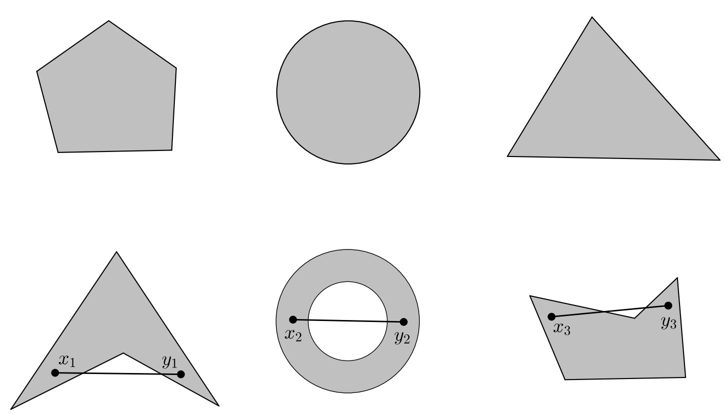
2.1 Konvexní analýza v $\mathbb{R}^n$

Převážná většina tvrzení v této podkapitole platí v libovolném vektorovém prostoru. My se však omezíme pouze na prostor $\mathbb{R}^n$. Je tomu tak proto, že při budování teorie lineárního a nelineárního programování se budeme pohybovat pouze v tomto prostoru.

Definice 2.1. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Množina A se nazývá *konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in A$ a pro každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ je $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Poznámka 2.1. Prázdná množina také vyhovuje definici a je tedy konvexní množinou.

Poznámka 2.2. Konvexní množina s každými dvěma svými body obsahuje i celou úsečku, která je spojuje. Příklady je možné vidět u Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Příklady konvexních množin (nahoře) a množin, které konvexní nejsou (dole).

Přímo z definice konvexní množiny plynou následující tvrzení:

Věta 2.1. *Nechť I je libovolná indexová množina a množiny X_i jsou konvexní pro každé $i \in I$. Pak průnik množin $X_i, i \in I$, $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$ je konvexní množina.*

Důkaz. Nechť $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} X_i$. Potom $x, y \in X_i$ pro každé $i \in I$, a tedy platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in X_i$ pro každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, protože X_i je konvexní. Z definice množinového průniku však plyne, že $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap\limits_{i\in I} X_i$. To znamená, že množina $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$ je konvexní. □

Věta 2.2. *Nechť $X_1, ..., X_m$ jsou konvexní množiny a $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$. Pak lineární kombinace těchto množin*

$$\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_m X_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, x_i \in X_i \right\}$$

je také konvexní množina.

Důkaz. Označme $Y = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, x_i \in X_i\}$. Nechť platí předpoklady věty a dále nechť $x, y \in Y, \lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Pak existují $x_1 \in X_1, ..., x_m \in X_m$ tak, že $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ a $y_1 \in X_1, ..., y_m \in X_m$ tak, že $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$, a tedy můžeme psát

$$\lambda x+(1-\lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i+(1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{m}(\lambda\alpha_i x_i+(1-\lambda)\alpha_i y_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\lambda x_i+(1-\lambda)y_i),$$

kde $x_i, y_i \in X_i$ a $(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) \in X_i$.
Označme $z_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i$. Potom $z_i \in X_i$, neboť X_i je konvexní, z čehož plyne, že $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i z_i \in Y$, a tedy Y je konvexní. □

Věta 2.3. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_k \in A$ a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in [0, 1]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ je bod $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \in A$. (Výraz $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ je tzv.* ***konvexní kombinace****.)*

Důkaz. Provedeme indukcí.

1. Pro $k = 1$ je $\lambda = 1$, poté $\lambda a = a \in A$.

2. Pro $k = 2$ tvrzení platí, jedná se přímo o definici konvexnosti množiny:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \lambda_1 a_1 + (1-\lambda_1)a_2 \in A$$

3. Nechť je tvrzení již dokázáno pro $k \in \mathbb{N}$. Vezměme $a_1, a_2, ..., a_{k+1} \in A$ a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k+1} \in \langle 0, 1\rangle$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \in A$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

   - Pokud $\lambda_{k+1} = 1$, pak $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = a_{k+1} \in A$.
   - Pokud $\lambda_{k+1} < 1$, pak můžeme psát

   $$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1}.$$

   Uvědomme si, že

   $$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$$
   $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1$$
   $$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 - \lambda_{k+1}$$
   $$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$
   $$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$

   Proto použitím indukčního předpokladu dostaneme, že $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} a_i \in A$.
   Studovaný bod je tedy konvexní lineární kombinací dvou bodů z množiny A.
   Označme $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = \varphi_i$, kde $i = 1, \ldots, k$.

   Tedy $(1 - \lambda_{k+1}) \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) \sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1}$.
   A protože $\sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i a_i \in A, a_{k+1} \in A$, proto $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i \in A$.
   Ukázali jsme tedy, že tvrzení platí i pro $k + 1$.

□

Věta 2.4. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom αA a $A + B$ jsou také konvexní množiny.*

Definice 2.2. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Pak **konvexním obalem množiny** A nazveme nejmenší konvexní množinu obsahující A, značíme $conv(A)$.

Věta 2.5. *Konvexní obal množiny existuje vždy.*

Důkaz. Berme $A \subset \mathbb{R}^n$ a položme $M = \{C : A \subset C \subset \mathbb{R}^n, C \text{ je konvexní množina}\}$. Množina M je neprázdná neboť $\mathbb{R}^n \in M$. Pak podle věty 2.1 je $\bigcap_{C \in M} C$ opět konvexní množinou obsahující množinu A. Tudíž je nejmenší konvexní množinou obsahující A, tj. konvexním obalem A. □

Věta 2.6. *Konvexní obal množiny $A \subset \mathbb{R}^n, conv(A)$, je roven množině všech konvexních kombinací konečně bodů A, tj.*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i : a_1, ..., a_k \in A, \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Označme M množinu všech konvexních kombinací konečně bodů z A. Množina M je konvexní, neboť vezmeme-li dva body $x, y \in M$, $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$, $a_i \in A$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ $y = \sum_{j=1}^{s} \varphi_j b_j$, $b_j \in A$, $\sum_{j=1}^{s} \varphi_j = 1$ a $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, pak dokážeme, že platí:

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

Vezmeme konvexní kombinaci x a y:

$$\alpha \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{s} \varphi_j b_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{s} (1 - \alpha) \varphi_j b_j = \sum_{i=1}^{r+s} \rho_i c_i.$$

Což je opět konvexní kombinace konečně bodů z A.
Ukážeme, že $\sum_{i=1}^{r+s} \rho_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{r+s} \rho_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha \lambda_i + \sum_{j=1}^{s} (1 - \alpha) \varphi_j = \alpha \sum_{i=1}^{r} \lambda_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^{s} \varphi_j = \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

Pro libovolnou konvexní množinu $B \supset A$ platí, že $B \supset M \supset A$ podle věty 2.3.

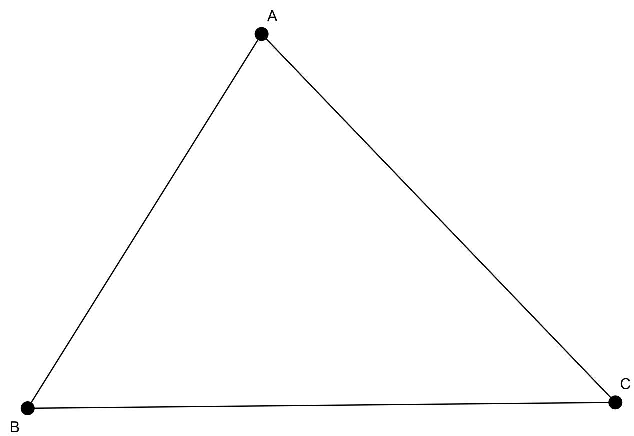
Tudíž $M = conv(A)$.

□

Věta 2.7. *(Caratheodory) Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in conv(A)$, pak existuje nejvýše $n + 1$ bodů z A takových, že bod x je jejich konvexní lineární kombinací.*

Důkaz. Zájemce odkazuji na [10]. □

Obrázek 2.2: Simplex v $\mathbb{R}$ je úsečka.



Obrázek 2.3: Simplex v $\mathbb{R}^2$ je trojúhelník.

Definice 2.3. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá

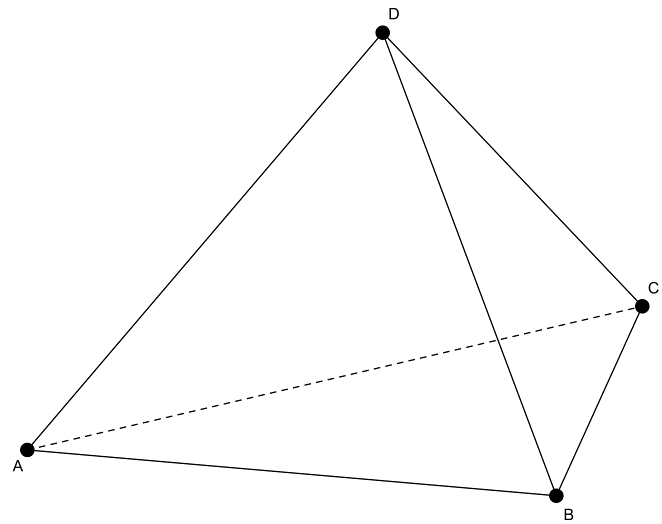
- **konvexní polyedrická množina**, existuje-li konečný počet uzavřených poloprostorů $H_1, H_2, ..., H_k \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $A = \bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$.
- **konvexní polyedr** (mnohoúhelník), existuje-li konečná množina $S \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A = conv(S)$. Příkladem konvexního polyedru je množina přípustných řešení na obrázku 4.1.

Definice 2.4. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Řekneme, že bod $s \in A$ je **krajním bodem** A, jestliže neexistují body $x, y \in A, x \neq y$ a $0 < \lambda < 1$ takové, aby $s = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Definice 2.5. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je **simplex**, jestliže je konvexní polyedr a každý její bod lze vyjádřit jako jednoznačně určenou konvexní lineární kombinaci jejích krajních bodů.

Příklad 2.1. Určete simplexy v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Řešení 2.1. Na následujících obrázcích jsou uvedeny příklady simplexu ze zadání. Na Obrázku 2.2 je simplex v $\mathbb{R}$, na Obrázku 2.3 simplex v $\mathbb{R}^2$ a na Obrázku 2.4 simplex v $\mathbb{R}^3$.



Obrázek 2.4: Simplex v $\mathbb{R}^3$ je čtyřstěn.

Definice 2.6. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **kužel** (s vrcholem v počátku), jestliže $0 \in A$ a pro každý bod $s \in A$ a $\alpha > 0$ je $\alpha s \in A$. Viz obrázek 2.5.
- **kužel s vrcholem v bodě p**, kde $p \in \mathbb{R}^n$, když $A - p$ je kužel.
- **konvexní kužel**, když je kužel a zároveň také konvexní množina.

Věta 2.8. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kužel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0, a_1, a_2, ..., a_k \in A$ a $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_k \geq 0$ je bod $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \in A$.*

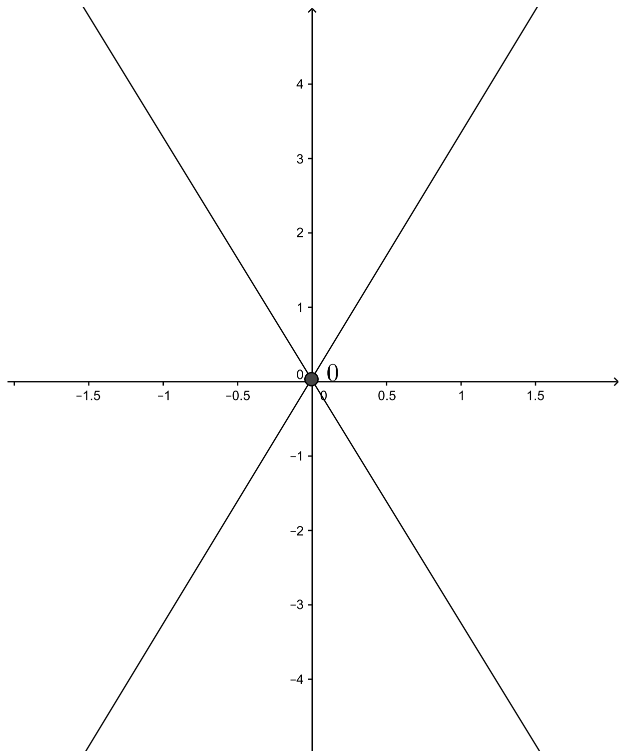
Důkaz.

1. Když $k = 0$, pak $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{0} \lambda_i a_i = 0 \in A$.
2. Když $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, pak $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0 \in A$.
3. Když $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 0$, pak $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\alpha} = 1$ a $\frac{\lambda_1}{\alpha} \geq 0, \frac{\lambda_2}{\alpha} \geq 0, ..., \frac{\lambda_k}{\alpha} \geq 0$.

   Pak z konvexnosti A plyne, že $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\alpha} a_i \in A$.

   Množina A je také kužel, a tak $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \alpha \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\alpha} a_i \in A$.

$\square$



Obrázek 2.5: Příklad kužele s vrcholem v počátku

Definice 2.7. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, pak nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu A, je **konvexní kužel generovaný množinou** A. Značíme jej $pos(A)$.

Věta 2.9. *Konvexní kužel generovaný množinou existuje vždy, tj. je dobře definován.*

Důkaz. Berme $A \subset \mathbb{R}^n$ a položme $M = \{C : A \subset C \subset \mathbb{R}^n, C \text{ je konvexní kužel}\}$. Množina M je neprázdná, neboť $\mathbb{R}^n \in M$. Pak podle věty 2.1 je $\bigcap\limits_{C \in M} C$ konvexní kužel obsahující množinu A. Tudíž je nejmenším konvexním kuželem obsahující A, tj. konvexním kuželem generovaným A. $\square$

Věta 2.10. *Konvexní kužel generovaný množinou $A \subset \mathbb{R}^n$ je roven množině všech nezáporných lineárních kombinací konečně bodů z A, tj.*

$$pos(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i : a_1, ..., a_k \in A, \lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_k \geq 0, k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Důkaz. Označme M množinu všech nezáporných lineárních kombinací konečně bodů z A. Množina M je evidentně kužel. Množina M je konvexní, neboť vezmeme-li dva body $x, y \in M$, $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$, $a_i \in A$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, y = \sum\limits_{j=1}^{s} \varphi_j b_j$, $b_j \in A$, $\sum\limits_{j=1}^{s} \varphi_j = 1$ a $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, pak dokážeme, že platí:

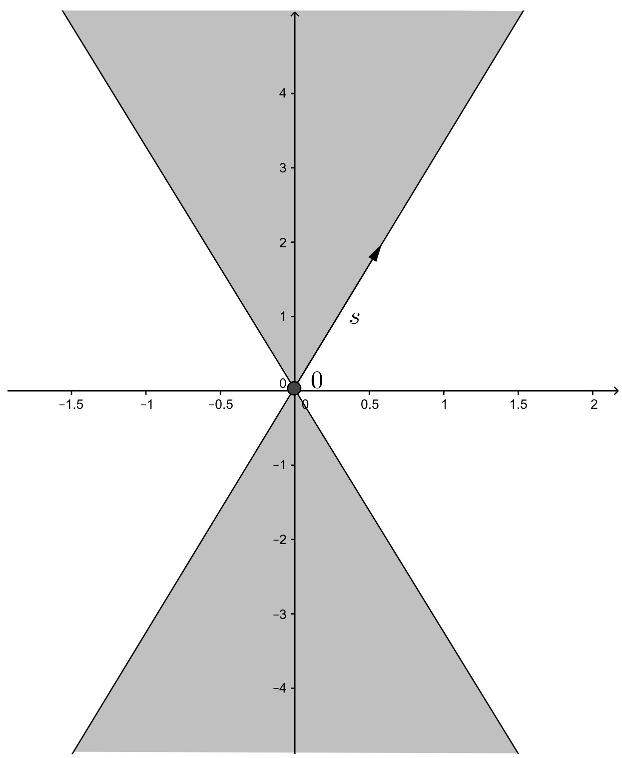
$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

Dále je důkaz analogický důkazu věty 2.6 □

Definice 2.8. Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní polyedrický kužel**, existuje-li konečná množina $A \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $K = pos(A)$.

Poznámka 2.3. Nejmenším kuželem a zároveň také nejmenším konvexním kuželem i nejmenším konvexním polyedrickým kuželem je kužel $pos(\emptyset) = \{0\}$.

Definice 2.9. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kužel. Řekneme, že bod $s \in A, s \neq 0$ je **krajním směrem** A, viz obrázek 2.6, jestliže neexistují body $x, y \in A, x, y \notin pos(\{s\})$ a $\lambda > 0, \varphi > 0$ takové, aby $s = \lambda x + \varphi y$.



Obrázek 2.6: Krajní směr

Věta 2.11. *Konvexní polyedr má konečný počet krajních bodů a je jejich konvexním obalem.*

Důkaz. Nechť $P = conv(S)$, kde $S \subset \mathbb{R}^n$ je konečná množina.
Z množiny S budeme postupně vylučovat body tak, že dostaneme posloupnost množin $S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset ... \supset S_k$ a body $s_i \in S_{i-1}$ tak, že $S_i = S_{i-1} \backslash \{s_i\}$. Bod $s_i \in S_{i-1}$ vybereme tak, aby byl konvexní lineární kombinací ostatních bodů z S_{i-1}. Pokud takový bod neexistuje, konstrukce končí, tj. $i - 1 = k$.

1. Uvědomme si, že platí $conv(S_0) = conv(S_1) = conv(S_2) = ... = conv(S_k) = P$. Přesvědčíme se o tom konečnou indukcí.

    - Pro $i = 0$ tvrzení platí, neboť $S_0 = S$.
    - Předpokládejme, že pro $1 \leq i \leq k$ platí $conv(S_{i-1}) = P$.
    Vezměme $x \in P$. Z indukčního předpokladu a z výběru bodu s_i víme, že $x = \sum_{s \in S_{i-1}} \lambda_s s, \quad s_i = \sum_{s \in S_i} \varphi_s s$, platí pro vhodná $\lambda \geq 0, \varphi \geq 0$, $\sum_{s \in S_{i-1}} \lambda_s = 1, \sum_{s \in S_i} \varphi_s = 1.$
    Tudíž
    $$x = \sum_{s \in S_{i-1}} \lambda_s s = \sum_{s \in S_i} \lambda_s s + \lambda_{s_i} \sum_{s \in S_i} \varphi_s s = \sum_{s \in S_i} (\lambda_s + \lambda_{s_i} \varphi_s) s \in conv(S_i).$$

2. Nyní ukážeme, že množina S_k je právě množina všech krajních bodů množiny P.

    - Ukažme, že žádný z bodů množiny $P \backslash S_k$ není krajním bodem P.
    Vezměme bod $x \in P \backslash S_k$. Pak existuje konvexní lineární kombinace taková, že $x = \sum_{s \in S_k} \lambda_s s$.
    Jistě existuje $\tilde{s} \in S_k$ takový, že $0 < \lambda_{\tilde{s}} < 1$, jinak by $x \in S_k$. Pak
    $$x = \lambda_{\tilde{s}} \tilde{s} + (1 - \lambda_{\tilde{s}}) \sum_{s \in S_k \backslash \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda_s}{1 - \lambda_s} s.$$
    Z konstrukce množiny S_k víme, že $\tilde{s} \in P$, $\sum_{s \in S_k \backslash \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda_s}{1 - \lambda_{\tilde{s}}} s \in P, \quad \tilde{s} \neq \sum_{s \in S_k \backslash \{\tilde{s}\}} \frac{\lambda_s}{1 - \lambda_{\tilde{s}}} s$
    a tudíž bod x není krajní bod P.
    - Ještě zbývá ověřit, že body z množiny S_k jsou krajními body.
    Předpokládejme proto, že $\tilde{s} \in S_k$ není krajní bod množiny P. Pak existují body
    $$y = \sum_{s \in S_k} \lambda_s s \in P, \quad z = \sum_{s \in S_k} \varphi_s s \in P, \quad y \neq z$$
    a
    $$0 < \alpha < 1$$

takové, že

$$\tilde{s} = \alpha y + (1-\alpha)z = \sum_{s \in S_k} (\alpha\lambda_s + (1-\alpha)\varphi_s)s.$$

Nyní rozlišme dva případy:

- Nechť $\alpha\lambda_{\tilde{s}} + (1-\alpha)\varphi_{\tilde{s}} = 1$. Potom $\lambda_{\tilde{s}} = \varphi_{\tilde{s}} = 1$, což je spor s tím, že $y \neq z$.
- Nechť $\alpha\lambda_{\tilde{s}} + (1-\alpha)\varphi_{\tilde{s}} < 1$. Potom ale

$$\tilde{s} = \sum_{s \in S_k \setminus \{\tilde{s}\}} \frac{\alpha\lambda_s + (1-\alpha)\varphi_s}{1 - \alpha\lambda_{\tilde{s}} + (1-\alpha)\varphi_{\tilde{s}}} s.$$

  To je spor s tím, že žádný z bodů množiny S_k nelze zapsat jako konvexní lineární kombinaci ostatních bodů z S_k.
  Ukázali jsme, že množina S_k je množinou všech krajních bodů konvexního polyedru P a $P = conv(S_k)$.

□

Věta 2.12. *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedr tehdy a jen tehdy, když je omezená konvexní polyedrická množina.*

Věta 2.13. *Když $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní polyedrický kužel, pak je konvexní polyedrická množina.*

Věta 2.14. *Konvexní polyedrický kužel má konečný počet krajních směrů a je roven kuželu, který je jimi generován.*

Bylo by potřeba definovat mnoho dalších pojmů a odvození, což je v rámci této práce zbytečné. Uvádíme tyto věty proto bez důkazů. Zájemce odkazuji na [11].

Kapitola 3

Teorie lineárního programování

V této kapitole budeme používat vektory, matice a jejich podvektory a podmatice. Uvažujme obecné konečné indexové množiny I, J :

- Vektorem rozumíme $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^I$ a jeho podvektor $\mathsf{a}_S = (a_i, i \in S) \in \mathbb{R}^S$ pro $S \subset I$.
- Maticí rozumíme $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ a její podmatici $\mathsf{A}_{S \times T} = (a_{i,j}, i \in S, j \in T) \in \mathbb{R}^{S \times T}$, pro $S \subset I, T \subset J$.
- Pokud $I = \{1, 2, ..., m\}, J = \{1, 2, ..., n\}$, pak budeme $\mathbb{R}^J$ a $\mathbb{R}^{I \times J}$ zkracovat na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Nechť $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $s \in \mathbb{R}$, pak výrazy $\mathsf{a} \leq s, \mathsf{a} \geq s, \mathsf{a} = s$ budeme chápat ve smyslu:

$$\mathsf{a} \leq s \Leftrightarrow a_i \leq s,$$

$$\mathsf{a} \geq s \Leftrightarrow a_i \geq s,$$

$$\mathsf{a} = s \Leftrightarrow a_i = s,$$

$$\text{pro všechny } i = 1, ..., n.$$

A výrazy $\mathsf{A} \leq s, \mathsf{A} \geq s, \mathsf{A} = s$ budeme chápat ve smyslu:

$$\mathsf{A} \leq s \Leftrightarrow a_{i,j} \leq s,$$

$$\mathsf{A} \geq s \Leftrightarrow a_{i,j} \geq s,$$

$$\mathsf{A} = s \Leftrightarrow a_{i,j} = s,$$

$$\text{pro všechny } i = 1, ..., m, j = 1 ... n.$$

3.1 Formulace a zápis úlohy

Úloha lineárního programování (LP):

$$\min\{\mathsf{c}^T\mathsf{x} \in \mathbb{R} : \mathsf{A}_{I_1\times J}\mathsf{x} \geq \mathsf{b}_{I_1}, \mathsf{A}_{I_2\times J}\mathsf{x} \leq \mathsf{b}_{I_2}, \mathsf{A}_{I_3\times J}\mathsf{x} = \mathsf{b}_{I_3}, \mathsf{x}_{J_1} \geq 0, \mathsf{x}_{J_2} \leq 0, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^J\}, \quad (3.1)$$

$$\max\{\mathsf{c}^T\mathsf{x} \in \mathbb{R} : \mathsf{A}_{I_1\times J}\mathsf{x} \geq \mathsf{b}_{I_1}, \mathsf{A}_{I_2\times J}\mathsf{x} \leq \mathsf{b}_{I_2}, \mathsf{A}_{I_3\times J}\mathsf{x} = \mathsf{b}_{I_3}, \mathsf{x}_{J_1} \geq 0, \mathsf{x}_{J_2} \leq 0, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^J\}, \quad (3.2)$$

kde $\mathsf{c} \in \mathbb{R}^J, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^I, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{I\times J}, card(I) = m,\ I_1, I_2, I_3 \subset I$ jsou disjunktní a $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$, $card(J) = n,\ J_1, J_2, J_3 \subset J$ jsou disjunktní a $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J$. Funkce $z(x) = \mathsf{c}^T\mathsf{x}$ se nazývá **účelová funkce**.

Označme $A = (a_{i,j})$ matici soustavy (3.3) typu $(m, n), b = (b_i)$ m-složkový vektor pravých stran, $c = (c_j)$ a $x = (x_j)$ n-složkové vektory koeficientů v účelové funkci $z(x) = \mathsf{c}^T\mathsf{x}$ a proměnných. Úlohu lineárního programování ve standardním tvaru zapíšeme maticově:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat (nebo maximalizovat)} \quad & \mathsf{c}^T\mathsf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Někdy je výhodné využít zápisu po složkách:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat (nebo maximalizovat)} \quad & \sum_{j\in J} c_j x_j \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j\in J} a_{i,j} x_j \geq b_i, \text{pro každé} \quad i \in I_1, \\ & \sum_{j\in J} a_{i,j} x_j = b_i, \text{pro každé} \quad i \in I_3, \qquad (3.3) \\ & x_j \geq 0, \text{pro každé} j \in J_1, \\ & x_j \leq 0, \text{pro každé} j \in J_2, \\ & x \in \mathbb{R}^J. \end{aligned}$$

Budeme říkat, že úloha lineárního programování je ve

- **standardním tvaru**, jestliže $I_1 = \emptyset, I_2 = \emptyset, J_2 = \emptyset, J_3 = \emptyset$;
- **tvaru nerovností**, jestliže buď $I_2 = \emptyset,\ I_3 = \emptyset,\ J_2 = \emptyset,\ J_3 = \emptyset$ nebo $I_1 = \emptyset$, $I_3 = \emptyset,\ J_2 = \emptyset,\ J_3 = \emptyset$
- **smíšeném tvaru** v ostatních případech.

V úloze lineárního programování lze jednoduchými transformacemi převádět rovnosti na nerovnosti, nerovnosti na rovnosti, nezápornost proměnných na nekladnost, atd. Těmito transformacemi jsou:

- vynásobením koeficientů v účelové funkci -1 lze zaměnit minimalizaci za maximalizaci a opačně;
- vynásobením nerovnosti koeficientem -1 lze „otáčet“ nerovnosti;
- vynásobením proměnné -1 lze nekladnost proměnných měnit na nezápornost a opačně;
- nerovnost $\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j \geq b_i$ změníme na rovnost zavedením **doplňkové (skluzové) proměnné**
$$\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j - v = b_i,\ v \geq 0.$$
V účelové funkci této nové proměnné přiřadíme nulový koeficient.
- nerovnost $\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j \leq b_i$ změníme na rovnost zavedením **doplňkové (skluzové) proměnné**
$$\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j + v = b_i,\ v \geq 0.$$
V účelové funkci této nové proměnné přiřadíme nulový koeficient.
- rovnost $\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j = b_i$ lze ekvivalentně vyjádřit jako dvě nerovnosti
$$\sum_{j \in J} a_{i,j} x_j \geq b_i,\ \sum_{j \in J} a_{i,j} x_j \leq b_i,$$
které musí být splněny současně;
- každou proměnnou x_j pro $j \in J_3$ můžeme zaměnit rozdílem dvou nezáporných proměnných
$$x_j = w^+ - w^-, w^+ \geq 0, w^- \geq 0;$$
- všechny uvedené transformace lze použít také obráceně.

Pomocí těchto transformací lze převádět jednotlivé typy úlohy lineárního programování jeden na druhý.

Definice 3.1. Množinu

$$M = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}_{I_1 \times J}\mathsf{x} \geq \mathsf{b}_{I_1}, \mathsf{A}_{I_2 \times J}\mathsf{x} \leq \mathsf{b}_{I_2}, \mathsf{A}_{I_3 \times J}\mathsf{x} = \mathsf{b}_{I_3}, \mathsf{x}_{J_1} \geq 0, \mathsf{x}_{J_2} \leq 0, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^J\}$$

budeme nazývat **množinou přípustných řešení** úlohy (3.1).

3.1.1 Struktura množiny přípustných řešení

Věta 3.1. *Množina* $M = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}, \mathsf{x} \geq 0\}$*, kde* $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$*, je konvexní polyedrická množina. Speciálně je konvexní a uzavřená.*

Důkaz. Zájemce odkazuji na [3]. □

Věta 3.2. *Množina*

$$K = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}\mathsf{x} = 0, \mathsf{x} \geq 0, \} \tag{3.4}$$

je konvexní polyedrický kužel.

Důkaz. Zájemce odkazuji na [3]. □

Definice 3.2. Pro $x \in M$ zavedeme množinu $N_x = \{i = 1, 2. \dots, n : x_i = 0\}$, které říkáme **množina nulových souřadnic** a množinu $P_x = \{i = 1, 2. \dots, n : x_i > 0\}$, tzv. **množina kladných souřadnic**.

Definice 3.3. Bod $x \in K$ nazveme **základní směr**, jestliže $h(A_{I\times P_x}) = card(P_x) - 1$. Přípustné řešení $x \in M$ nazveme **základní řešení**, jestliže $h(A_{I\times P_x}) = card(P_x)$.

Definice 3.4. Základní řešení nazveme **nedegenerované**, má-li právě $h(\mathsf{A})$ nenulových složek. Úloha lineárního programování ve standardním tvaru se nazývá **nedegenerovaná**, jestliže každé její základní řešení je nedegenerované.

Věta 3.3. *Úloha lineárního programování*

$$\min\{\mathsf{c}^T\mathsf{x} : \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.5}$$

má optimální řešení tehdy a jen tehdy, když

- $M = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}, \mathsf{x} \geq 0\} \neq \emptyset$.
- $\mathsf{c}^T\mathsf{y} \geq 0$ *pro každé* $\mathsf{y} \in K = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}\mathsf{x} = 0, \mathsf{x} \geq 0\}$.

Má-li úloha 3.5 optimální řešení, pak se ho nabývá v základním řešení této úlohy.

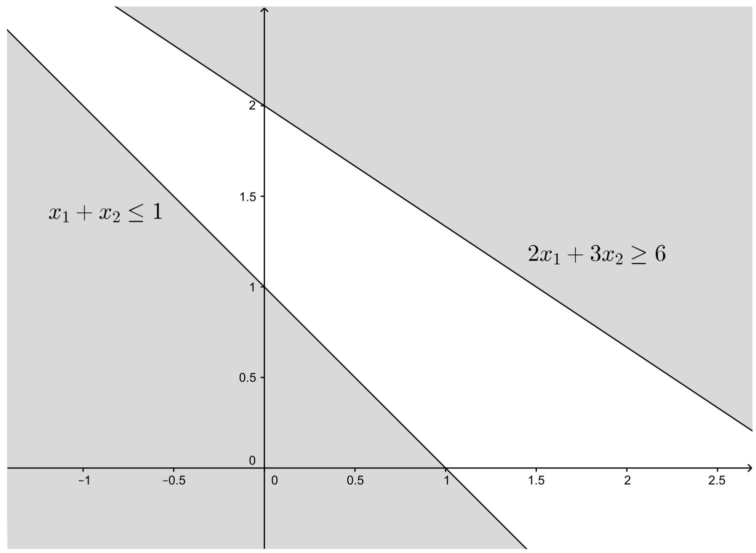
Důkaz. Odkazuji na [3]. □

3.2 Farkasova věta

Množina všech přípustných řešení úlohy (3.1) může být prázdná i tehdy, platí-li předpoklad $h(A) = m$ jak ukazuje následující příklad:

Příklad 3.1. Minimalizujte funkci $z = x_1 + x_2$ s množinou přípustných řešení

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\}$$



Obrázek 3.1: Množina přípustných řešení Příkladu 3.1

Řešení 3.1. Pro grafické znázornění si povšimněme toho, že obě rovnice mohly vzniknout pomocí transformací, s kterými jsme se seznámili již dříve. Vzhledem ke tvaru účelové funkce lze proměnné x_3, x_4 interpretovat jako doplňkové proměnné. První dvě složky libovolného přípustného řešení vyhovují tedy soustavě nerovnosti

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Z Obrázku 3.1 je jasné, že tato soustava nerovností nemá řešení. Množina přípustných řešení $M = \emptyset$, přestože $h(A) = 2$ a počet proměnných je větší než počet rovnic.

Nutnou a postačující podmínku k tomu, aby množina přípustných řešení byla neprázdná říká Farkasova věta:

Věta 3.4. *Nechť $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice a $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^m$ je vektor. Pak má soustava $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ nezáporné řešení tehdy a jen tehdy, když pro všechna $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^m$ splňují podmínku $\mathsf{A}^T \mathsf{u} \geq 0$ platí $\mathsf{b}^T \mathsf{u} \geq 0$.*

Důkaz. Zájemce odkazuji na [3]. □

Tvrzení Farkasovy věty udává, že buď má soustava $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ nezáporné řešení, nebo lze nalézt takovou lineární kombinaci rovnic soustavy, že na levé straně vznikne výraz s nezápornými koeficienty a na pravé straně záporné číslo.

Příklad 3.2. Vraťme se k příkladu 3.1:
Minimalizujte funkci $z = x_1 + x_2$ s množinou přípustných řešení

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\
2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6.
\end{aligned}
$$

Řešení 3.2. Vynásobíme-li například první rovnici třemi a odečteme-li od ní druhou rovnici, dostaneme

$$x_1 + 3x_3 + x_4 = -3.$$

Tudíž vektor $(3, -1)^T$ porušuje podmínku z Farkasovy věty 3.4.
Soustava proto nemá nezáporné řešení.

Poznámka 3.1. Samotná Farkasova věta však ještě neřeší otázku existence optimálního řešení příkladu 3.1. Snadno zkonstruujeme příklad, kdy je množina přípustných řešení neprázdná, ale optimální řešení úlohy neexistuje.

Příklad 3.3. Řešme úlohu

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & z = x_1 + x_2, \\
\text{za podmínek} \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Řešení 3.3. Při grafickém znázornění lze x_3, x_4 opět interpretovat jako doplňkové proměnné, takže první dvě složky libovolného přípustného řešení vyhovují soustavě lineárních nerovností

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\geq -2 \\
-x_1 + 2x_2 &\geq -1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Množina řešení této soustavy je neomezená (viz Obrázek 3.2) a funkce x_1+x_2 na ní nabývá libovolně velkých hodnot. Přitom však některé jiné účelové funkce na uvažované množině M nabývají konečného maxima.

Věta 3.5 (Existence optimálního řešení)**.** *Nechť množina*

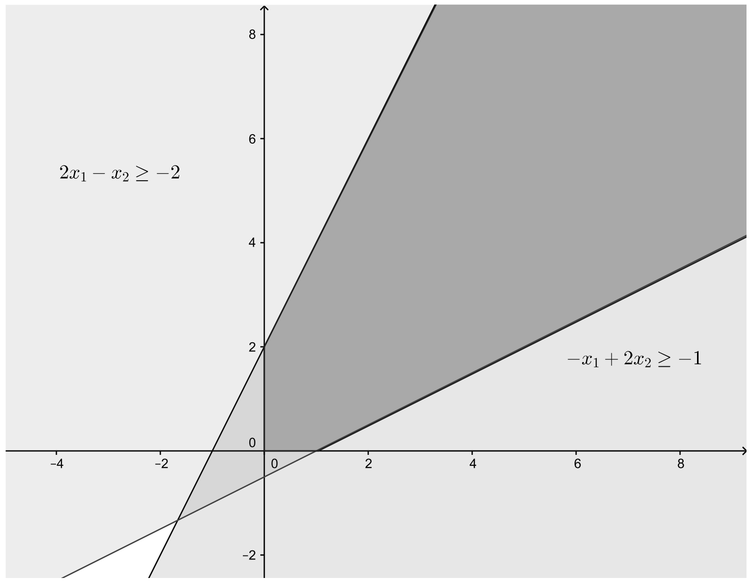
$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}, \mathsf{x} \geq 0\} \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Když existuje reálné číslo γ tak, že pro libovolné $\mathsf{x} \in M$ platí

$$\mathsf{c}^T\mathsf{x} \geq \gamma, \tag{3.7}$$

pak existuje optimální řešení úlohy

$$\min\{\mathsf{c}^T\mathsf{x} : \mathsf{x} \in M\}.$$



Obrázek 3.2: Množina přípustných řešení Příkladu 3.3

Důkaz. Označme $\vartheta = \inf\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in M\}$.
Z platnosti (3.6) a (3.7) víme, že $\vartheta \in \mathbb{R}$, speciálně $\vartheta \geq \gamma$.
Pomocí Farkasovy věty ukážeme neprázdnost množiny

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \vartheta, \quad \mathbf{x} \geq 0\}.$$

Množinu Q můžeme zapsat takto $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq 0\}$, kde $\mathbf{D} = (\mathbf{A}^T, \mathbf{c})^T$ a $\mathbf{d} = (\mathbf{b}^T, \vartheta)^T$.

Ověříme podmínku z Farkasovy věty 3.4.
Vezměme proto $\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T, t)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$, kde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ a $t \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\mathbf{D}^T\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} + t\mathbf{c} \geq 0.$$

Každé $\mathbf{x} \in M$ je nezáporné a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Proto pro ně platí

$$0 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} + \mathbf{x}^T t\mathbf{c} = \mathbf{b}^T\mathbf{u} + \mathbf{x}^T t\mathbf{c}.$$

Pak také

$$0 \leq \mathbf{b}^T\mathbf{u} + t\inf\{\mathbf{x}^T\mathbf{c} : \mathbf{x} \in M\} = \mathbf{b}^T\mathbf{u} + t\vartheta = \mathbf{d}^T\mathbf{v}.$$

Matice $\mathbf{D}$ a vektor $\mathbf{d}$ splňují podmínku z věty 3.4.
Tudíž množina $Q \neq \emptyset$, což znamená, že uvažovaná úloha má optimální řešení.

□

Poznámka 3.2. **Historie Farkasovy věty**
Farkasova věta je součástí teorie lineárních nerovností zpracované na počátku 20. století maďarským matematikem J. Farkasem. Dodnes je právem počítána k základním větám

lineární algebry. Její pomocí jsme ukázali prvou existenční větu, věta 3.5, pro úlohu lineárního programování ve standardním tvaru. Není však snadné ověřit podmínky (3.3) a (3.4). Dosud také nemáme žádnou představu, jak optimální řešení úlohy nalézt. Musíme proto hlouběji prostudovat strukturu množiny přípustných řešení.

3.3 Princip duality v lineárním programování

Budeme se zabývat **dvojicí duálních úloh** lineárního programování

$$\min\{c^T x \in \mathbb{R} : A_{I_1\times J}x \geq b_{I_1}, A_{I_2\times J}x \leq b_{I_2}, A_{I_3\times J}x = b_{I_3}, x_{J_1} \geq 0, x_{J_2} \leq 0, x \in \mathbb{R}^J\}, \quad (3.8)$$

$$\max\{b^T y \in \mathbb{R} : A^T_{I\times J_1}y \leq c_{J_1}, A^T_{I\times J_2}y \geq c_{J_2}, A^T_{I\times J_3}y = c_{J_3}, y_{I_1} \geq 0, y_{I_2} \leq 0, x \in \mathbb{R}^I\}, \quad (3.9)$$

kde $c \in \mathbb{R}^J, b \in \mathbb{R}^I, A \in \mathbb{R}^{I\times J}, card(I) = m,\ I_1, I_2, I_3 \subset I$ jsou disjunktní a $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$, $card(J) = n,\ J_1, J_2, J_3 \subset J$ jsou disjunktní a $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J$.
Povšimněme si, že k zadané úloze lineárního programování je jednoznačně přiřazena úloha, která s ní tvoří dvojici duálních úloh. Toto však není jediný vztah mezi těmito dvěma úlohami. Daleko důležitější je, že vyřešením jedné z nich, nalezneme také řešení druhé úlohy z tohoto páru. Na této vlastnosti je založena simplexová metoda, která umožňuje efektivní numerické řešení úloh lineárního programování. Každá z těchto úloh také vypovídá o stabilitě optimálního řešení druhé úlohy.
Jeden typ úloh lineárního programování lze převádět na jiný typ úloh, proto stačí uvažovat pouze dvojici tzv. **symetrických duálních úloh**.

$$\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^J\}, \quad (3.10)$$

$$\max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^I\}. \quad (3.11)$$

Poznámka 3.3. Zavedeme označení

$$\begin{aligned}
\gamma^* &= \inf\{c^T x \in \mathbb{R} : Ax \geq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^J\},\\
\delta^* &= \sup\{b^T y \in \mathbb{R} : A^T y \leq c, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^I\},\\
M &= \{x \in \mathbb{R}^J : Ax \geq b, x \geq 0\},\\
N &= \{y \in \mathbb{R}^I : A^T y \leq c, y \geq 0\},\\
M^* &= \{x : c^T x = \gamma^*, Ax \geq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^J\},\\
N^* &= \{y : b^T x = \delta^*, A^T y \leq c, y \geq 0, x \in \mathbb{R}^I\}.
\end{aligned}$$

Věta 3.6 (o slabé dualitě)**.** *Je dána dvojice symetrických duálních úloh* (3.10) *a* (3.11) *s množinami z poznámky 3.3. Pokud $x \in M$ a $y \in N$, pak $c^T x \geq b^T y$. Přičemž rovnost nastává pouze tehdy, když platí tzv.* ***podmínky komplementarity***

$$(y^T A - c^T)x = 0, \quad (3.12)$$

$$y^T(Ax - b) = 0. \quad (3.13)$$

Podmínky (3.12) a (3.13) mají ekvivalentní vyjádření.

Lemma 3.1. Nechť $x \in M$ a $y \in N$. Pak platí následující ekvivalence:

$$(3.12) \Leftrightarrow \forall j \in J : (y^T A - c^T)_j x_j = 0 \Leftrightarrow \forall j \in J : \text{buď} \quad (y^T A - c^T)x = 0, \text{nebo} \quad x_j = 0,$$
$$(3.13) \Leftrightarrow \forall i \in I : y_i^T (Ax - b)_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I : \text{buď} \quad y^T (Ax - b) = 0, \text{nebo} \quad y_i = 0.$$

Důkaz. Odkazuji na [3]. □

Věta 3.7 (o dualitě)**.** *Pokud $M \neq \emptyset$ a $N \neq \emptyset$, pak mají obě úlohy* (3.10) *i* (3.11) *optimální řešení.*

Důkaz. Když mají obě úlohy přípustné řešení, pak vzhledem k větě 3.6 jsou jejich účelové funkce omezené na příslušných množinách přípustných řešení.
Pak úloha

$$\min\{c^T x : Ax - v = b, \quad x \geq 0, v \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m\} \tag{3.14}$$

má účelovou funkci zdola omezenou na své množině přípustných řešení, která je neprázdná. podle věty 3.5 existuje $(\hat{x}, \hat{v})$ optimální řešení (3.14). Pak $\hat{x}$ je optimální řešení (3.10).
Dále také úloha

$$\min\{\text{-}b^T y : A^T y + u = b, \quad y \geq 0, u \geq 0, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.15}$$

má účelovou funkci zdola omezenou na své množině přípustných řešení, která je neprázdná. Podle věty 3.5 existuje $(\hat{y}, \hat{u})$ optimální řešení (3.14). Pak $\hat{y}$ je optimální řešení (3.11). □

Věta 3.8 (o silné dualitě)**.** *Úloha* (3.10) *má optimální řešení tehdy a jen tehdy, když úloha* (3.11) *má optimální řešení. Pokud jedna z těchto úloh má optimální řešení, pak platí rovnost $\gamma^* = \delta^*$.*

Důkaz. Větu stačí ukázat za předpokladu existence optimálního řešení úlohy (3.10). Druhý případ se ukáže analogicky.
Pak úloha

$$\min\{c^T x : Ax - v = b, \quad x \geq 0, v \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m\}$$

má optimální řešení. Podle věty 3.3 je

$$\{x : Ax - v = b, \quad x \geq 0, v \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m\} \neq \emptyset,$$

$$c^T z \geq 0 \quad \text{pro každé} \quad z \in \{y : Ax - v = 0, x \geq 0, v \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m\}$$

Z věty 3.6 víme, že $b^T y \leq \gamma^*$ pro každé $y \in N$.
Našim cílem je ukázat neprázdnost množiny

$$\{y : A^T y \leq c, b^T y \geq \gamma^*, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^m\}. \tag{3.16}$$

To je ekvivalentní s tím, ukázat neprázdnost množiny

$$\{(y,u,w) : A^T y + u = c, b^T y - w = \gamma^*, y \geq 0, u \geq 0, w \geq 0, y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}\}. \tag{3.17}$$

Pro tuto množinu ověříme Farkasovu podmínku z věty 3.4.
Vezměme proto $\mu \in \mathbb{R}^n$ a $\nu \in \mathbb{R}$ takové, že $A\mu + \nu b \geq 0, \mu \geq 0, -\nu \geq 0$.

1. <u>Nechť $\nu = 0$.</u>
   Pak $A\mu \geq 0, \mu \geq 0$. Tudíž μ leží v kuželi příslušném k (3.10). Tato úloha má optimální řešení a tak podle věty 3.3 platí $c^T \mu \geq 0$. V tomto případě tedy $c^T \mu + \gamma^* \nu \geq 0$.

2. <u>Nechť $\nu < 0$.</u>
   Pak $A\mu + \nu b \geq 0, \mu \geq 0$, neboli $A\frac{\mu}{|\nu|} \geq b, \mu \geq 0$. To znamená, že $\frac{\mu}{|\nu|} \in M$.
   Úloha (3.10) má optimální řešení a γ^* je její optimální hodnota.
   Proto $c^T \frac{\mu}{|\nu|} \geq \gamma^*$. Odtud $c^T \mu - \gamma^* |\nu| = c^T \mu + \gamma^* \nu \geq 0$.

Podle věty 3.4 je množina (3.17) neprázdná. Proto také (3.16) je neprázdná.
Tím jsme ukázali, že úloha (3.11) má optimální řešení a $\gamma^* = \delta^*$. □

Věta 3.9 (o komplementaritě:)**.** *Nechť $x \in M$ a $y \in N$. Pak x je optimální řešení úlohy* (3.10) *a y je optimální řešení úlohy* (3.11) *tehdy a jen tehdy, splňují-li podmínky komplementarity:*

$$(y^T A - c^T)x = 0,$$
$$y^T (Ax - b) = 0.$$

Důkaz. Pokud $x \in M$ a $y \in N$, pak věta 3.6 říká, že splnění podmínek komplementarity je nutné a postačující k tomu, aby $x \in M^*$ a $y \in N^*$. □

Shrňme zjištěná fakta do jedné věty a formulujme ji pro obecnou dvojici duálních úloh:

Věta 3.10. *Pro danou dvojici symetrických duálních úloh* (3.8)*,* (3.9) *nastává právě jedna ze čtyř možností:*

1. *Ani jedna z úloh* (3.8), (3.9) *nemá přípustné řešení, tj. $M = \emptyset, N = \emptyset, \gamma^* = +\infty, \delta^* = -\infty$.*

2. *Úloha* (3.8) *má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení a úloha* (3.9) *nemá přípustné řešení, tj. $M \neq \emptyset, N = \emptyset, \gamma^* = \delta^* = -\infty$.*

3. *Úloha* (3.8) *nemá přípustné řešení a úloha* (3.9) *má přípustné řešení, ale nemá optimální řešení, tj. $M = \emptyset, N \neq \emptyset, \gamma^* = \delta^* = +\infty$.*

4. *Obě úlohy* (3.8), (3.9) *mají optimální řešení, jejich optimální řešení splňují podmínky komplementarity* (3.12), (3.13) *a jejich optimální hodnoty jsou si rovny, tj. $M \neq \emptyset, N \neq \emptyset, \gamma^* = \delta^* \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Odkazuji na [3]. □

Příklad 3.4. K dané úloze lineárního programování přiřaďte příslušnou úlohu do duální dvojice:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{za podmínek} \quad & 3x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 4, \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Řešení 3.4. K obecné úloze lineárního programování je jednoznačně přiřazena úloha, která s ní tvoří dvojici duálních úloh. Sestavení příslušné úlohy lze dělat zcela mechanicky. Vhodnou pomůckou k tomu může být sestavení tabulky:

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	$\in \mathbb{R}$		
		3	6	-1	$\geq$	4
		2	-3	2	$\leq$	3
		1	-2	4	$=$	2
						max
		2	-1	3	min	

Do řádků omezení přidáme duální proměnné a pomocí pravidla, že při min převádíme $\geq \leftrightarrow \geq$, $\leq \leftrightarrow \leq$, $= \leftrightarrow \in \mathbb{R}$, a při max převádíme $\leq \leftrightarrow \geq$, $\geq \leftrightarrow \leq$, $\in \mathbb{R} \leftrightarrow =$, tabulku doplníme:

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	$\in \mathbb{R}$		
y_1	≥ 0	3	6	-1	$\geq$	4
y_2	≤ 0	2	-3	2	$\leq$	3
y_3	$\in \mathbb{R}$	1	-2	4	$=$	2
		$\leq$	$\leq$	$=$		max
		2	-1	3	min	

Čteme-li tabulku po sloupcích, dostáváme úlohu:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ \text{za podmínek} \quad & 3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ & 6y_1 - 3y_2 - 2y_3 \leq -1, \\ & -y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 3, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

která je duální úlohou k úloze (3.18).

Poznámka 3.4. Dualita úloh lineárního programování a Farkasova věta jsou ekvivalentní. Uvědomme si, že následující příklady jsou ekvivalentní:

- Existuje nezáporné řešení úlohy $Ax = b$.
- Úloha $\min\{0^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ má optimální řešení.
- Úloha $\max\{0^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ má optimální řešení.

Zapojením Farkasovy věty a duality tyto příklady doplníme ještě o další tři úlohy, které jsou s nimi ekvivalentní:

- Pro všechna $y \in \mathbb{R}^m$ splňující $A^T y \geq 0$ musí být $b^T y \geq 0$.
- Úloha $\max\{b^T y : A^T y \leq 0, y \in \mathbb{R}^m\}$ má optimální řešení.
- Úloha $\min\{b^T y : A^T y \geq 0, y \in \mathbb{R}^m\}$ má optimální řešení.

Kapitola 4

Metody řešení

4.1 Geometrická metoda řešení

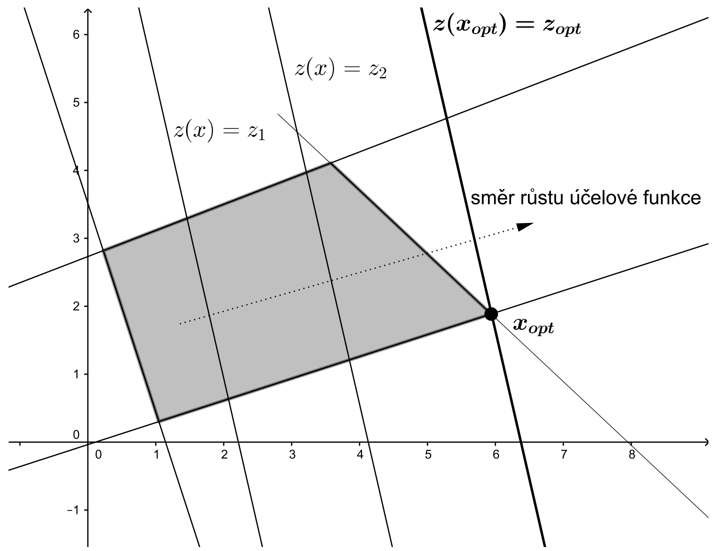
V případě jednoduché úlohy obsahující pouze dvě proměnné můžeme k řešení použít tzv. grafickou metodu. Je určena pro řešení úlohy lineárního programování se dvěma proměnnými nebo dvěma omezujícími podmínkami není příliš aplikovatelná, neboť v praxi se velmi málo vyskytují tak jednoduché problémy. Její význam je jednak historický, neboť s velkým zjednodušením bylo možno nalézt optimální řešení alespoň některých praktických problémů, jednak teoretický, neboť podává názorný pohled pro pochopení zákonitostí lineárních modelů a jejich řešení.

4.1.1 Grafické řešení v prostoru řešení

Prostorem řešení nazýváme prostor, ve kterém leží všechna přípustná řešení problému. Chceme-li v něm řešit lineární optimalizační úlohu, musíme zobrazit jak množinu přípustných řešení, tak vhodným způsobem účelovou funkci a její chování.

Grafické nalezení množiny přípustných řešení: Množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je průnikem poloprostorů, které představují jednotlivé omezující podmínky. Protože poloprostor je konvexní množina, je jejich průnik také konvexní množina. Je-li omezená, nazývá se **konvexní polyedr** (viz definice 2.3). Je-li neomezená, nazývá se **konvexní polyedrická množina** (viz definice 2.3).
Pro dvě proměnné tedy sestrojíme množinu přípustných řešení tak, že zobrazíme hraniční přímky jednotlivých polorovin, které představují jednotlivé omezující podmínky.

Grafické zobrazení účelové funkce: Graficky je lineární funkce představována v případě jedné proměnné přímkou, v případě dvou proměnných rovinou a v případě více proměnných nadrovinou.
Rovinu zobrazující lineární funkci dvou proměnných můžeme zobrazit buď pomocí svazku rovnoběžných přímek, nebo pomocí směrnice těchto přímek.
Zobrazíme-li účelovou funkci pro různé konstanty $z_k, k = 1, \dots, r$ jako soustavu



Obrázek 4.1: Grafické řešení úlohy lineárního programování

lineárních rovnic

$$z(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z_k, \quad k = 1, \ldots, r,$$

dostaneme soustavu rovnoběžných přímek, pro které platí, že ve směru jejich normály hodnoty konstant z_k odpovídající jednotlivým přímkám rostou a ve směru opačném klesají.
Účelovou funkci je možno také zobrazit pomocí jejího gradientu. Gradient účelové funkce je vektorem jejích prvních parciálních derivací, je tedy shodný s vektorem $\mathbf{c}$. Tento směr je kolmý na zobrazené přímky. Ve směru gradientu (směrnice) hodnota účelové funkce roste, ve směru opačném klesá.

Nalezení extrému účelové funkce: Aby bylo nalezeno řešení optimalizační úlohy, musíme najít takovou přímku zobrazující účelovou funkci ve směru růstu nebo poklesu její hodnoty, která má s množinou přípustných řešení aspoň jeden společný bod. Takový bod je vždy na hranici množiny přípustných řešení (ve vrcholu nebo hraně).
Souřadnice těchto bodů jsou hledané hodnoty proměnných optimálního řešení. Optimální hodnota účelové funkce se získá dosazením optimálních hodnot proměnných.

Optimální řešení: Účelová funkce nabývá své optimální hodnoty v krajním bodě množiny přípustných řešení úlohy lineárního programování. Jestliže účelová funkce nabývá optimální hodnoty ve více krajních bodech množiny přípustných řešení úlohy, potom optimální hodnoty nabývá i v každém bodě konvexní kombinace těchto krajních bodů.
Optimální řešení je takové přípustné řešení, které optimalizuje účelovou funkci (tj. ve kterém nabývá účelová funkce minima, případně maxima). Účelová funkce nabývá své optimální hodnoty vždy v některém krajním bodě množiny přípustných řešení.
Řešením je vždy konvexní množina (bod, úsečka,konvexní polyedr,...).

Pokud má úloha optimální řešení, je to jeden z vrcholů představujících základní přípustná řešení.

Příklad 4.1. Řešme graficky

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1+2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 4.1. Model obsahuje dvě rozhodovací proměnné a čtyři omezující podmínky, proto je nutné pro zobrazení zvolit prostor řešení.
Nejprve musíme vymezit prostor přípustných řešení. Ten tvoří geometrický útvar, který vznikne jako průnik grafického znázornění omezujících podmínek v I. kvadrantu.

Poznámka 4.1. Omezující podmínka ve tvaru nerovnice je reprezentována polorovinou. Pokud ji chceme zakreslit, musíme určit hraniční přímku a vymezit správnou polorovinu. Hraniční přímka je spojnice dvou bodů, pro které je omezující přímka splněna jako rovnice.

Pro konstrukci hraniční přímky můžeme použít dva libovolné body, které splňují výše uvedenou podmínku. Nejčastěji se používají průsečíky hledané hraniční přímky s oběma osami souřadnic.

Zakreslíme tedy hraniční přímku omezující podmínky

$$x_1 + 2x_2 \leq 6.$$

Pokud položíme $x_1 = 0$, z rovnice $2x_2 = 6$ zjistíme, že první průsečík má souřadnice $(0, 3)$.
Pokud položíme $x_2 = 0$, z rovnice $x_1 = 6$ zjistíme, že druhý průsečík má souřadnice $(6, 0)$.
Nyní musíme určit, která z polorovin vymezených hraniční přímkou obsahuje přípustná řešení úlohy. Obvykle je výhodné dosadit do omezující podmínky počátek souřadnic, bod $(0, 0)$. Pro naši podmínku dostaneme výraz $0 \leq 6$, což platí. Proto všechny body, které leží v počátku souřadnic, dané omezující podmínce vyhovují.
Stejným způsobem postupujeme při zakreslení ostatních podmínek.
Celou množinu přípustných řešení tvoří konvexní polyedr, který je zobrazen na obr. 4.2.
Nyní je již pouze potřeba určit, který bod z množiny přípustných řešení má nejlepší hodnotu pro maximalizaci účelové funkce $z = 3x_1 + 2x_2$.
K tomu jsou potřeba dva kroky. Nejprve zakreslíme libovolnou **přímku účelové funkce**, což je spojnice všech bodů (x_1, x_2) (kombinací proměnných), které vykazují stejnou hodnotu účelové funkce. Potom nalezneme takovou její rovnoběžku, která bude co nejdále od počátku souřadnic, ale která bude mít s množinou přípustných řešení společný alespoň jeden bod.

Poznámka 4.2. Pokud chceme zakreslit nějakou přímku účelové funkce, dosadíme za z libovolnou hodnotu a přímku zakreslíme.

Tedy položme např. $z = 4$, tedy

$$4 = 3x_1 + 2x_2.$$

Průsečíky s osami mají souřadnice $(0, 2)$ a $(\frac{4}{3}, 0)$.
Nyní je již snadné najít rovnoběžku přímky účelové funkce, která je nejdále od počátku (chceme její maximální hodnotu, při minimalizaci bychom ji požadovali nejblíže počátku) a která má stále s množinou přípustných řešení společný alespoň jeden bod.
Na závěr je potřeba stanovit hodnoty proměnných v optimálním řešení.

Poznámka 4.3. Pokud chceme stanovit hodnoty proměnných v optimálním řešení z grafu, podíváme se, na kterých přímkách omezujících podmínek tento bod leží. Hodnoty proměnných potom vypočteme jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

Náš bod optima x_{opt} leží na přímkách

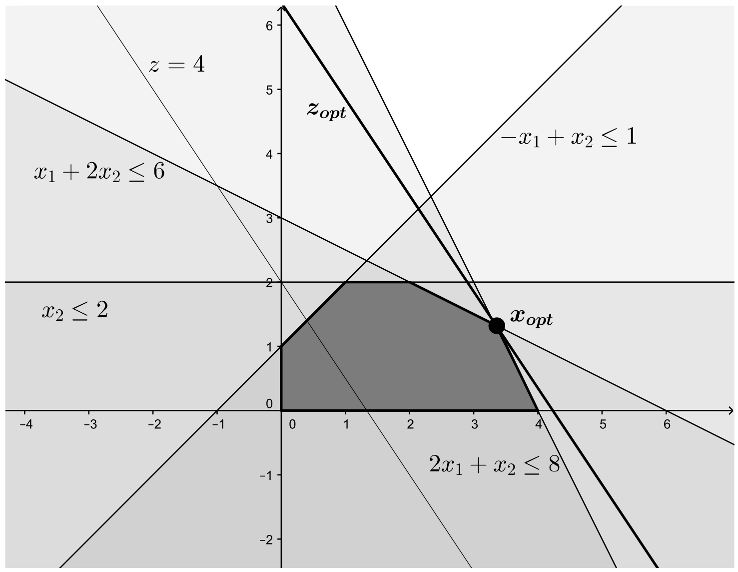
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8.$$

Po vyřešení této soustavy lineárních rovnic dostaneme, že $x_1 = \frac{10}{3}$ a $x_2 = \frac{4}{3}$.
Dosazením tohoto bodu do předpisu účelové funkce dostaneme její hodnotu, tedy:

$$z = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{38}{3}.$$

Odpověď: Funkce nabývá maximum v bodě $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $\frac{38}{3}$.



Obrázek 4.2: Množina přípustných řešení z příkladu 4.1

4.2 Simplexová metoda řešení

Úlohy lineárního programování, které obsahují více než dvě proměnné, nelze řešit geometrickou metodou řešení. Existují i jiné metody, které si poradí s větším počtem proměnných. Jedna z nejznámějších je tzv. simplexová metoda.
Pokud chceme k řešení úlohy lineárního programování použít simplexovou metodu, potřebujeme, aby:

1. úloha byla v rovnicovém tvaru,
2. čísla b_i, kde $i = 1, \ldots, m$ na pravé straně rovnic byla nezáporná,
3. matice A typu $m \times n$ dané soustavy rovnic obsahovala jednotkovou submatici rozměru m.

   Poznámka 4.4. Submaticí typu A rozumíme matici, která vznikne z A vynecháním některých řádků a sloupců.

Jak splnění těchto požadavků zařídíme:

ad 1. Všechny podmínky zadané nerovnicemi převedeme na rovnice pomocí tzv. skluzových proměnných.

ad 2. Pokud má některá rovnice na pravé straně záporné číslo, vynásobíme ji číslem -1.

ad 3. Neobsahuje-li matice A soustavy jednotkovou submatici (ani po přidání skluzových proměnných), doplníme uměle do rovnic tzv. pomocné proměnné, které jsou nezáporné, tak, abychom jednotkovou submatici vytvořili. Tohoto kroku využíváme ve dvojfázovém simplexovém algoritmu.

V této kapitole se seznámíme s algoritmy, které umožňují vyřešit danou úlohu lineárního programování v konečném počtu kroků. Budeme uvažovat úlohu LP ve standardním tvaru:

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^J\}, \tag{4.1}$$

kde $c \in \mathbb{R}^J, A \in \mathbb{R}^{I \times J}, b \in \mathbb{R}^I$.

Navíc požadujeme, aby matice A měla plnou řádkovou hodnost, tj. $h(A) = card(I)$.

Každou obecnou úlohu lineárního programování lze převést na tvar (4.1) a pokud má přípustné řešení, ale matice A nemá plnou řádkovou hodnost, pak lze vynecháním vhodných řádků docílit plné řádkové hodnosti.
K úloze (4.1) přísluší tzv. duální úloha

$$\max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0, x \in \mathbb{R}^I\} \tag{4.2}$$

Definice 4.1. Nechť úloha (4.1) splňuje $h(A) = card(I)$ a $L \subset J$.

1. L se nazývá **báze** úlohy (4.1), jestliže matice $A_{I \times L}$ je regulární.
2. Když L je báze, pak vektor $x_L \in \mathbb{R}^J$ splňující $N(x_L) = J - L, \quad A_{I \times L} x_L = b$ nazveme **primárně přípustná řešení** (úlohy (4.1) příslušné bázi L.)
3. Když L je báze a x_L je přípustným řešením úlohy (4.1), tj. $x_L \geq 0$, pak říkáme, že L je **primárně přípustná báze**.
4. Když L je báze a x_L je optimální řešení úlohy (4.1), pak říkáme, že L je **optimální báze**.
5. Když je L báze, pak vektor $y_L \in \mathbb{R}^I$ splňující $A_{I \times L} y_L = c_L$ nazveme **bazické duální řešení** (úlohy (4.1) příslušné bázi L.).
6. Když je L báze a y_L je přípustným řešením úlohy (4.2), tj. $A^T y_L \leq c_L$ pak říkáme, že L je **duálně přípustná báze**.

Uvědomme si, že báze L jednoznačně určuje jak bazické primární řešení x_L, tak i bazické duální řešení y_L. Je tomu tak proto, že obě jsou řešením soustavy rovnic s regulární maticí soustavy.

Lemma 4.1. Nechť úloha (4.1) splňuje podmínku plné řádkové hodnosti matice A a $x \in \mathbb{R}^J$. Pak x je základním řešením úlohy (4.1) tehdy a jen tehdy, existuje-li L primárně přípustná báze úlohy (4.1) taková, že $x = x_L$.

Věta 4.1. *Nechť je úloha* (4.1) *nedegenerovaná. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *Úloha* (4.1) *má optimální řešení.*
2. *Existuje optimální báze úlohy* (4.1).

3. *Existuje báze úlohy* (4.1)*, která je primárně i duálně přípustná.*

Důkaz. Zájemce odkazuji na [10]. □

Předchozí pozorování nám umožňuje vyřešit zadanou úlohu lineárního programování (4.1). Hlavní myšlenky tohoto postupu pojmenujeme jako simplexová metoda:

1. Nalezení primárně přípustného bazického řešení.
2. Postupně po hranách množiny přípustných řešení přecházíme od jednoho primárně přípustného bazického řešení ke druhému. Postupujeme tak, aby hodnota účelové funkce klesala.
3. Postup se po konečně krocích zastaví s primárně přípustným bazickým řešením, jehož báze je zároveň duálně přípustná. Nalezli jsme tedy optimální bazické řešení úlohy (4.1).

Nebo duálně:

1. Nalezení duálně přípustného bazického řešení.
2. Postupně po hranách množiny přípustných řešení duální úlohy přecházíme od jednoho primárně přípustného bazického řešení k druhému. Postupujeme tak, aby hodnota účelové funkce duální úlohy vzrůstala.
3. Postup se po konečně krocích zastaví s duálně přípustným bazickým řešením, jehož báze je zároveň primárně přípustná. Nalezli jsme tedy optimální bazické řešení úlohy (4.1).

4.2.1 Simplexový algoritmus

Nyní se seznámí s algoritmem, který řeší úlohu (4.1).

Simplexový algoritmus

KROK 0: Najdeme $L_0 \subset J$ primárně přípustnou bázi úlohy (4.1) a jdeme na **KROK 1**. Pokud žádná primárně přípustná báze úlohy (4.1) neexistuje, pak neexistuje přípustné řešení.

KROK 1: Mějme primárně přípustnou bázi $L_n \subset J$. Spočteme

$$\delta^T = (\mathsf{c}_{Ln})^T(\mathsf{A}^{-1}_{I\times Ln})\mathsf{A} - \mathsf{c}^T \in \mathbb{R}^J.$$

Pokud je $\delta^T \leq 0$, pak je vektor x_{Ln} optimálním řešením úlohy (4.1). Jinak pokračujeme na **KROK 2**.

KROK 2: Najdeme index $j \in J$ takový, že $\delta_j > 0$, a spočteme vektor $\varrho = (A_{I\times Ln})^{-1} A_{I\times\{j\}}$. Určíme složku, která bude zavedena do nové báze. Této složce báze odpovídá maximální rozdíl $z_k - c_k = \max(z_j - c_j)$. V případě existence více maximálních rozdílů $z_j - c_j$ lze vybrat kterýkoli z nich. Když $\varrho \leq 0$, pak účelová funkce neomezeně klesá. Jinak pokročíme na **KROK 3**.

KROK 3: Nalezneme index $i \in L_n, \varrho_i > 0$ takový, že

$$\frac{(x_{Ln})_i}{\varrho_i} = \min\left\{\frac{(x_{Ln})_u}{\varrho_u}; \quad \varrho_u > 0, u \in L_n\right\}.$$

Provedeme změnu báze $L_{n+1} = L_n \cup \{j\} - \{i\}$. Pak je L_{n+1} primárně přípustná báze. Zvýšíme $n := n + 1$ a přejdeme na **KROK 1**.

Věta 4.2. *Pokud je úloha* (4.1) *nedegenerovaná, pak se simplexový algoritmus po konečně krocích zastaví. Buď zjistí, že úloha* (4.1) *nemá přípustné řešení, nebo najde optimální bázi úlohy* (4.1), *případně zjistí, že účelová funkce neomezeně klesá.*

Důkaz. Zájemce odkazuji na [10]. □

Simplexový algoritmus můžeme realizovat v tabulce:

	J	
L_n	$(A_{I\times L_n})^{-1}A$	$(A_{I\times L_n})^{-1}b$
δ^T	$(c_{L_n})^T(A_{I\times L_n})^{-1}b - c^T$	$(c_{L_n})^T(A_{I\times L_n})^{-1}b$

Přechod od jedné báze ke druhé není pak nic jiného, než Gaussova eliminace s podmínkami, jak vybrat klíčový prvek, podle něhož se tabulka transformuje.

Poznámka 4.5. Podmínky simplexového algoritmu vyplývají z Gaussovy eliminační metody a z testu optimality (**KROK 2**) i přípustnosti (**KROK 3**) .
Test optimality: Nejjednodušší forma kritéria optimality řešení říká, že v daném kroku vypočítáme pro nebazické proměnné všechny rozdíly $(z_k - c_k)$ a z nich vybereme nejmenší, resp. největší podle směru optimalizace – maximalizace, resp. minimalizace. Pokud nejmenší hodnota $(z_s - c_s)_{min}$ je menší než nula, resp. největší hodnota $(z_s - c_s)_{max}$ je větší než nula, nalezené řešení není optimální a hodnota proměnné x_s by měla být nenulová, proměnná x_s by měla být zařazena do báze. Dále jen $z_j - c_j$. Odvození testu optimality a přípustnosti viz [2].

Poznámka 4.6. **Možnosti ukončení simplexového algoritmu pro minimalizační úlohu:**

1. V účelové funkci již není proměnná se zápornou relativní cenou. Poslední nalezené bazické přípustné řešení je optimální.

2. V účelové funkci je proměnná se zápornou relativní cenou, ale v příslušném sloupci matice není prvek s kladnou hodnotou. Poslední nalezené bazické přípustné řešení tedy není optimální. Další bazické přípustné řešení však vypočítat nemůžeme. Optimální řešení v tomto případě neexistuje, a to z důvodu neomezenosti množiny přípustných řešení.

3. Ve výsledné účelové funkci je některá z relativních cen nebazických proměnných rovna nule. Pokud bychom tedy příslušnou nebazickou proměnnou zvolili za novou bazickou proměnnou a dopočítali bychom nové bazické přípustné řešení, hodnota účelové funkce by zůstala stejná. V tomto případě má úloha nekonečně mnoho optimálních řešení.

4. Může dojít k zacyklení výpočtu, tj. pro nové bazické přípustné řešení dostaneme stejné bazické proměnné, které už jsme měli v některém z předchozích bazických přípustných řešení. Tento případ může nastat, pokud se v průběhu výpočtu vyskytne tzv. *degenerované bazické řešení*, tj. řešení v němž hodnoty jedné nebo více bazických proměnných jsou rovny nule. K zabránění zacyklení existují různá pravidla (viz [10]). My si zde uvedeme jedno z nich:

   Poznámka 4.7. Pravidlo nejmenších indexů:
   Zvolíme-li vždy ze všech možných nebazických proměnných x_s za novou bazickou proměnnou tu s nejmenším indexem s a nahradíme-li s ní ze všech možných bazických proměnných x_r tu s nejmenším indexem r, pak k zacyklení nedojde.

Vraťme se nyní k Příkladu 4.1 z geometrické metody řešení a vyřešme ji metodou simplexovou:

Příklad 4.2. Řešte úlohu simplexovou metodou:

$$
\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
& -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Řešení 4.2. Po zavedení čtyř skluzových proměnných s_1, s_2, s_3, s_4 dostáváme úlohu:

$$
\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\
\text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\
& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\
& x_2 + s_4 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Tato úloha je maximalizační úlohou LP ve standardním tvaru. Můžeme ji vyřešit pomocí simplexového algoritmu.
Do počáteční báze zařadíme skluzové proměnné s_1, s_2, s_3, s_4.

Poznámka 4.8. Pokud zadání nerovnic obsahuje $\leq$, znamená to, že skluzové proměnné přiřadíme znaménko $+$. Pokud je v zadání nerovnic $\geq$, skluzové proměnné přiřadíme znaménko $-$. Odvození viz [2].

Sestavíme výchozí simplexovou tabulku. Do prvního sloupce zapíšeme složku cen bazických proměnných c_B, do druhého jejich názvy x_B. Do záhlaví tabulky zapíšeme názvy všech proměnných a jejich ceny. Zvolený prvek v rozhodovacím řádku se volí dle indexu j v **KROK 2** a klíčový prvek je zvolen podle **KROK 3**.
Sloupce odpovídající skluzovým proměnným mají vždy jednu 1 a jinak samé 0. Takovéto sloupce se nazývají *základní sloupce* a odpovídající proměnné *základní proměnné* v simplexové tabulce.
Cílem našeho postupu je najít optimální základní přípustné řešení. Uvedenou konstrukcí, která využila skluzové proměnné, jsme vytvořili výchozí základní přípustné řešení.

Poznámka 4.9. Pokud chceme testovat výhodnost zařazení nebazické proměnné do báze, vypočteme skalární součin složky cen bazických proměnných a složky příslušné proměnné v matici soustavy. Od výsledku odečteme cenu testované proměnné.

Výsledky zapíšeme do řádku $z_j - c_j$, viz **KROK 1**.

		3	2	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	6
0	s_2	2	1	0	1	0	0	8
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	$z_j - c_j$	-3	-2	0	0	0	0	0

První základní přípustné řešení je $(0, 0, 6, 8, 1, 2)^T$ a hodnota účelové funkce z je $z = 0$.

Poznámka 4.10. Pokud chceme zjistit, zda je aktuální řešení optimální, podíváme se na hodnoty testu optimality. Pokud jsou při maximalizaci všechny hodnoty nezáporné (při minimalizaci nekladné), řešení je optimální.

Naše výchozí řešení optimální není. Pokud bychom zařadili do báze kteroukoliv z proměnných x_1, x_2, obdržíme řešení s lepší hodnotou účelové funkce.
Hodnotu účelové funkce také nalezneme na kriteriálním řádku (v pravém dolním rohu tabulky). Vypočítá se jako skalární součin složky cen bazických proměnných a složky hodnot pravých stran b.
Následuje výběr proměnné pro zařazení do báze.

Poznámka 4.11. Chceme-li zjistit, kterou proměnnou zařadit do báze, podívejme se na absolutní hodnoty proměnných. Z těchto proměnných vybereme tu, která má nejvyšší absolutní hodnotu testu optimality.

V našem případě test optimality jednoznačně určil, že do báze má být zařazena proměnná x_1 podle **KROK 2**.
Pokud jednu proměnnou do báze zařadíme, jiná musí bázi opustit. Není možné vyřadit proměnnou libovolně, neboť by mohlo dojít k porušení požadavku na nezápornost pravých stran v novém řešení. K tomu se používá test přípustnosti nového řešení podle **KROK 3**.

Poznámka 4.12. Jestliže chceme zjistit, kterou proměnnou z báze vyřadit, jednotlivé složky pravých stran vydělíme hodnotami z matice soustavy, které se nachází ve sloupci zařazované proměnné. Z báze vyřadíme proměnnou, pro niž vyjde hodnota tohoto podílu minimální. Uvažujme přitom pouze ty řádky, na kterých je ve sloupci zařazované proměnné kladná hodnota.

V našem případě je tedy nutno vyřadit proměnnou s_2, protože pro ni vychází hodnota podílu minimální. V bázi tedy proměnná x_1 nahradí proměnnou s_2. Ke změně báze použijeme jeden krok Gaussovy eliminační metody s klíčovým prvkem, který leží na průsečíku klíčového (prvního) řádku a základního (druhého) sloupce. Dostaváme tabulku:

		3	2	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
0	s_1	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
3	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
0	s_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	$z_j - c_j$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12

Pro toto základní přípustné řešení $(4, 0, 2, 0, 5, 2)^T$ dostáváme $z = 12$. Ale protože je koeficient u x_2 záporný, není nalezeno optimální řešení. Nyní se již celý postup opakuje. Test optimality určuje pro vstup do báze proměnnou x_2 dle **KROK 2**, test přípustnosti z báze vyřazuje proměnnou s_1 dle **KROK 3**. Pro přechod k nové bázi použijeme jeden krok Gaussovy eliminační metody s klíčovým prvkem, který leží na průsečíku klíčového (prvního) řádku a základního (druhého) sloupce. Dostaneme tabulku:

		3	2	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
2	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
3	x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
0	s_3	0	0	-1	1	1	0	3
0	s_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$

Simplexovým algoritmem jsme našli optimální řešení $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 3, \frac{2}{3})^T$ pro úlohu (4.4). To znamená, že původní úloha (4.3) má optimální řešení $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})^T$, jelikož v poslední tabulce jsou základní proměnné x_1, x_2.
Protože všechny koeficienty v simplexové tabulce jsou kladné, nemůžeme dostat zvětšováním nezákladních proměnných větší hodnotu funkce z.
Hodnota $\frac{38}{3}$ je proto optimální.

Odpověď: Maximální hodnotu nabývá funkce pro $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{4}{3}\right)^T$ a hodnota účelové funkce je $z = \dfrac{38}{3}$.

Poznámka 4.13. **Možnosti simplexového algoritmu pro maximalizační úlohu:**

1. V účelové funkci již není proměnná s kladnou relativní cenou. Poslední nalezené bazické přípustné řešení je optimální.

2. V účelové funkci je proměnná s kladnou relativní cenou, ale v příslušném sloupci matice není prvek s kladnou hodnotou. Poslední nalezené bazické přípustné řešení tudíž není optimální. Další bazické přípustné řešení však vypočítat nemůžeme. Tedy optimální řešení v tomto případě neexistuje, a to z důvodu neomezenosti množiny přípustných řešení.

3. Stejné jako u úlohy minimalizační.

4. Stejné jako u úlohy minimalizační.

4.2.2 Dvojfázový simplexový algoritmus

Problémem simplexového algoritmu je nalezení počáteční báze v **KROK 0**. Jednou z možností je sestavení pomocné úlohy a její vyřešení pomocí simplexového algoritmu. To je tedy v případě, že některá souřadnice řešení simplexové tabulky bude záporná a použijeme tzv. **dvoufázovou metodu**.

1. fáze: Nejdříve řešíme pomocnou úlohu

$$\min \left\{ \sum_{k \in K} \mathsf{p}_k : \mathsf{A}\mathsf{x} + \mathsf{Q}\mathsf{p} = \mathsf{b}, \mathsf{x} \geq 0, \mathsf{p} \geq 0, \mathsf{x} \in \mathbb{R}^J, \mathsf{z} \in \mathbb{R}^K \right\}. \tag{4.5}$$

Pomocné proměnné p a matice Q jsou přidány, aby vznikla báze $V = \{v_i, i \in I\} \subset J \cup K$ s vlastností, že pro každé $i \in I$ je $(\mathsf{A}|\mathsf{Q})_{v_i} = \text{sign } (\mathsf{b}_i)\mathbb{I}_{I \times \{i\}}$.
Úlohu (4.5) vyřešíme simplexovým algoritmem. Jako počáteční bázi použijeme bázi V.
Víme, že úloha (4.5) má přípustné řešení a hodnota její účelové funkce je nezáporná pro všechna přípustná řešení. Proto podle věty (3.5) má úloha (4.5) optimální řešení.

Simplexový algoritmus proto nalezne optimální bázi úlohy (4.5). Nyní jsou dvě možnosti. Buď je optimální hodnota kladná nebo nulová.
Když je optimální hodnota kladná, pak úloha (4.1) nemá přípustné řešení a algoritmus tímto zjištěním končí.
Když je optimální hodnota nulová, pak úloha (4.1) má přípustné řešení a algoritmus pokračuje na **druhou fázi**.

2. fáze: Pokud je úloha (4.5) nedegenerovaná, pak simplexový algoritmus v **první fázi** nalezne optimální bázi W, která neobsahuje žádnou pomocnou proměnnou p. Pokud by totiž některá pomocná proměnná zůstala v optimální bázi, pak by měla kladnou hodnotu a optimální hodnota úlohy (4.5) by byla kladná.
Pokud je úloha (4.5) degenerovaná, pak simplexový algoritmus v **první fázi** nalezne optimální bázi, která může obsahovat některou z pomocných proměnných p. Hodnota těchto proměnných je však nutně nulová. Pak, díky předpokladu o plné sloupcové hodnosti matice A, lze pro každou takovou proměnnou p vždy najít proměnnou z J, která má v řádku příslušejícím p nenulové číslo. Tuto proměnnou zařadíme do báze místo p. Vznikne tak W optimální báze úlohy (4.5), která již žádnou pomocnou proměnnou neobsahuje.

Nyní simplexovým algoritmem vyřešíme úlohu (4.1). Jako počáteční bázi použijeme bázi W. Uvědomme si, že prakticky začínáme s tabulkou, kterou jsme získali v první fázi algoritmu. Pouze jsme vyškrtli sloupce příslušející pomocným proměnným a koeficienty v účelové funkci pomocné úlohy jsme nahradili koeficienty v účelové funkci úlohy (4.1).
Pro ilustraci si spočteme příklad:

Příklad 4.3. Řešme dvoufázovým simplexovým algoritmem úlohu

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & -x_1 - 3x_3 + x_4 \\
\text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Řešení 4.3. V první fázi řešíme pomocnou úlohu

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & p_1 + p_2 \\
\text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + p_1 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 + p_2 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Do báze zařadíme proměnné p_1, p_2, x_4. Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	p_1	p_2	b
1	p_1	1	2	3	0	1	0	15
1	p_2	2	1	5	0	0	1	20
0	x_4	1	2	1	1	0	0	10
	$z_j - c_j$	3	3	8	0	0	0	35

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	p_1	p_2	b
1	p_1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	3
0	x_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	4
0	x_4	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	6
	$z_j - c_j$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	0	0	$-\frac{8}{5}$	3

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	p_1	p_2	b
0	x_2	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{15}{7}$
0	x_3	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{25}{7}$
0	x_4	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. V nalezené optimální bázi pomocné úlohy se nevyskytují žádné pomocné proměnné p. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		-1	0	-3	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_2	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{15}{7}$
-3	x_3	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{25}{7}$
1	x_4	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{15}{7}$
	$z_j - c_j$	$\frac{4}{7}$	0	0	0	$-\frac{60}{7}$

		-1	0	-3	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$
-3	x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
-1	x_1	1	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{2}$
	$z_j - c_j$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	-10

Odpověď: Optimální řešení zadané úlohy je $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^T$ a hodnota účelové funkce je $z = -10$.

4.2.3 Úskalí simplexové metody

Cyklus: Při řešení simplexové metody se můžeme dostat do cyklu – hodnota účelové funkce neklesá a po několika krocích se vrátíme k původnímu zadání. Tuto situaci řeší tzv. **Blandovo anticyklické pravidlo**, jenž upravuje volbu klíčového prvku tak, aby k zacyklení nedošlo:

- Jako klíčový sloupec bereme ten, který má v posledním řádku kladnou hodnotu a jeho index je nejnižší.
- Pokud neexistuje jednoznačná volba, který sloupec opustí bázi, vybereme ten, který má nejnižší index.

Degenerace: Bazická souřadnice řešení je rovna 0, tj. jednomu vrcholu množiny přípustných hodnot odpovídá více kroků simpexové tabulky. Speciálně zde může dojít k zacyklení. Znamená to, že některá omezení jsou zbytečná, ale nepoznáme která.

Více optimálních řešení: Nebazický koeficient ve spodním řádku je roven nule ve výstupní simplexové tabulce. Pokud s proměnnou příslušnou tomuto koeficientu vstoupíme do báze, příslušné řešení bude rovněž optimální.

Neomezené řešení: Všechny hodnoty ve vstupním sloupci v některém optimalizačním kroku jsou nekladné, tedy neexistuje žádná kladná změna pro daný sloupec.

Množina přípustných řešení je prázdná: V první fázi dvoufázové metody je optimální hodnota kladná.

4.2.4 Duální simplexová metoda řešení

Vraťme se nyní k podkapitole 3.3 a vypočítejme Příklad 4.1 pomocí duální simplexové metody.

Příklad 4.4. Řešte úlohu duální simplexovou metodou:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Řešení 4.4. K obecné úloze lineárního programování je jednoznačně přiřazena úloha, která s ní tvoří dvojici duálních úloh. Sestavení příslušné úlohy lze dělat zcela mechanicky. Vhodnou pomůckou k tomu může být sestavení tabulky:

		x_1	x_2		
		≥ 0	≥ 0		
		1	2	$\leq$	6
		2	1	$\leq$	8
		-1	1	$\leq$	1
		0	1	$\leq$	2
					min
		3	2	max	

Do řádků omezení přidáme duální proměnné a pomocí pravidla, že při min převádíme $\geq \leftrightarrow \geq$, $\leq \leftrightarrow \leq$, $= \leftrightarrow \in \mathbb{R}$, a při max převádíme $\leq \leftrightarrow \geq$, $\geq \leftrightarrow \leq$, $\in \mathbb{R} \leftrightarrow =$, tabulku doplníme:

		x_1	x_2		
		≥ 0	≥ 0		
y_1	≥ 0	1	2	$\leq$	6
y_2	≥ 0	2	1	$\leq$	8
y_3	≥ 0	-1	1	$\leq$	1
y_4	≥ 0	0	1	$\leq$	2
		$\geq$	$\geq$		min
		3	2	max	

Čteme-li tabulku po sloupcích, dostáváme úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \\ \text{za podmínek} \quad & y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3, \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \end{aligned}$$

která je duální úlohou k úloze (4.6).
Nyní daný příklad vyřešme pomocí simplexové metody.
Po zavedení dvou skluzových proměnných a dvou pomocných, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & p_1 + p_2 = 0 \\
\text{za podmínek} \quad & y_1 + 2y_2 - y_3 - s_1 + p_1 = 3, \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - s_2 + p_2 = 2, \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, s_1, s_2, p_1, p_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	2	-1	0	-1	0	1	0	3
1	p_2	2	1	1	1	0	-1	0	1	2
		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	2	-1	0	-1	0	1	0	3
1	p_2	2	1	1	1	0	-1	0	1	2
	$z_j - c_j$	3	3	0	1	-1	-1	0	0	5

Nyní v bázi nahradí proměnná x_1 proměnnou p_2.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
0	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	$z_j - c_j$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	p_1	p_2	b
0	x_2	0	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	x_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexové algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		0	0	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
0	x_2	0	1	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	x_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$z_j - c_j$	0	0	-3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{38}{3}$

Tímto jsme nalezli optimální řešení v bodě$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})^T$ a hodnota účelové funkce z v tomto bodě je $\frac{38}{3}$.
Pokud se podíváme na řešení simplexové metody tohoto příkladu u Příkladu 4.2, vidíme, že přesně tyto hodnoty jsou hodnoty s_1, s_2, s_3, s_4 v účelové funkci simplexové metody a hodnota účelové funkce z je stejná.

Odpověď: Maximální hodnotu nabývá funkce pro $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)^T$ a hodnota účelové funkce je $z = \dfrac{38}{3}$.

Kapitola 5

Sbírka úloh

5.1 Geometrická metoda

Příklad 5.1. Řešme graficky

$$\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
& x_1 \leq 8 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Řešení 5.1. Model obsahuje dvě rozhodovací proměnné a tři omezující podmínky, proto je nutné pro zobrazení zvolit prostor řešení.
Nejprve musíme vymezit prostor přípustných řešení. Ten tvoří geometrický útvar, který vznikne jako průnik grafického znázornění omezujících podmínek v I. kvadrantu.

Poznámka 5.1. Omezující podmínka ve tvaru nerovnice je reprezentována polorovinou. Pokud ji chceme zakreslit, musíme určit hraniční přímku a vymezit správnou polorovinu. Hraniční přímka je spojnice dvou bodů pro které je omezující přímka splněna jako rovnice.

Pro konstrukci hraniční přímky můžeme použít dva libovolné body, které splňují výše uvedenou podmínku. Nejčastěji se používají průsečíky hledané hraniční přímky s oběma osami souřadnic.

Zakreslíme tedy hraniční přímku omezující podmínky

$$x_1 + 2x_2 \leq 20.$$

Pokud položíme $x_1 = 0$, z rovnice $2x_2 = 20$ zjistíme, že první průsečík má souřadnice $[0, 10]$.
Pokud položíme $x_2 = 0$, z rovnice $x_1 = 20$ zjistíme, že druhý průsečík má souřadnice $[20, 0]$.

Nyní musíme určit, která z polorovin vymezených hraniční přímkou obsahuje přípustná řešení úlohy.
Stejným způsobem postupujeme při zakreslení podmínky $3x_1 + 4x_2 \geq 12$.
Třetí omezující podmínka je specifická, neboť obsahuje pouze jednu proměnnou. V takovém případě je hraniční přímka rovnoběžná s jednou z os souřadnic.
V našem případě třetí omezující podmínka

$$x_1 \leq 8$$

je tedy rovnoběžná s osou x_2 a osu x_1 protíná v bodě $x_1 = 8$. Přípustná polorovina je polorovina počátku souřadnic. Celou množinu přípustných řešení tvoří konvexní polyedr, který je zobrazen na obr. 5.1.
Nyní je již pouze potřeba určit, který bod z množiny přípustných řešení má nejlepší hodnotu pro maximalizaci účelové funkce $z = 2x_1 + x_2$.
K tomu jsou potřeba dva kroky. Nejprve zakreslíme libovolnou **přímku účelové funkce**, což je spojnice všech bodů $[x_1, x_2]$ (kombinací proměnných), které vykazují stejnou hodnotu účelové funkce. Potom nalezneme takovou její rovnoběžku, která bude co nejdále od počátku souřadnic, ale která bude mít s množinou přípustných řešení společný alespoň jeden bod.

Poznámka 5.2. Pokud chceme zakreslit nějakou přímku účelové funkce, dosadíme za z libovolnou hodnotu a přímku zakreslíme.

Tedy položme např. $z = 10$, tedy

$$10 = 2x_1 + x_2.$$

Průsečíky s osami mají souřadnice $[0, 10]$ a $[5, 0]$.
Nyní je již snadné najít rovnoběžku přímky účelové funkce, která je nejdále od počátku (chceme její maximální hodnotu, při minimalizaci bychom ji požadovali nejblíže počátku) a která má stále s množinou přípustných řešení společný alespoň jeden bod.
Na závěr je potřeba stanovit hodnoty proměnných v optimálním řešení.

Poznámka 5.3. Pokud chceme stanovit hodnoty proměnných v optimálním řešení z grafu, podíváme se, na kterých přímkách omezujících podmínek tento bod leží. Hodnoty proměnných potom vypočteme jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

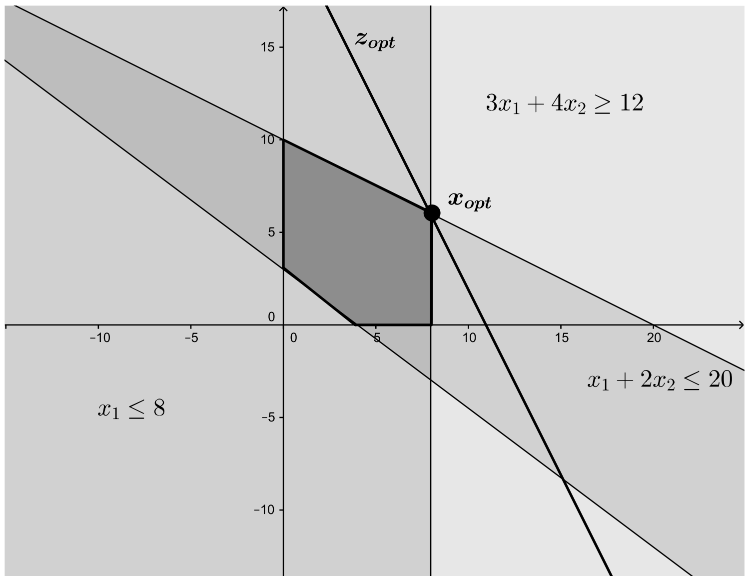
Náš bod optima x_{opt} leží na přímkách

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 20, \\ x_1 &= 8. \end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy lineárních rovnic dostaneme, že $x_1 = 8$ a $x_2 = 6$.
Dosazením tohoto bodu do předpisu účelové funkce dostaneme její hodnotu, tedy:

$$z = 2 \cdot 8 + 6 = 22.$$

Odpověď: Funkce nabývá maximum v bodě $(8, 6)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 22$.



Obrázek 5.1: Grafické řešení příkladu 5.1

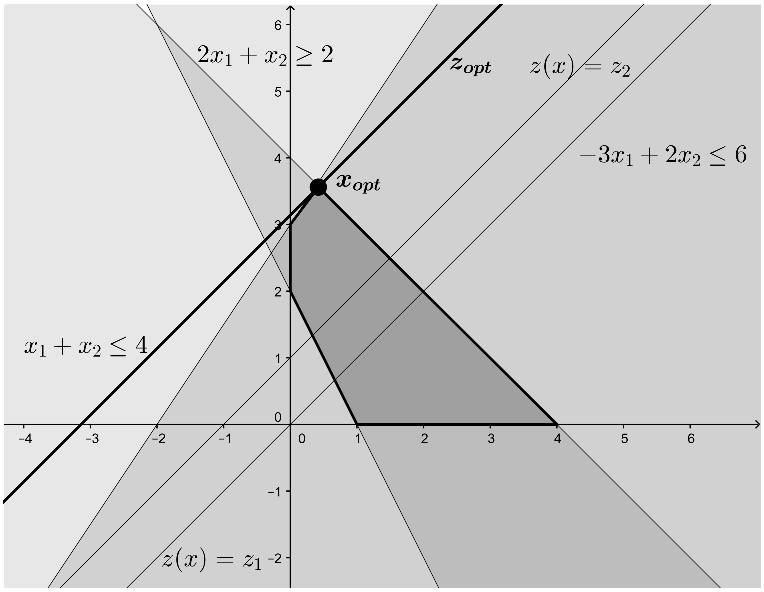
Příklad 5.2. Řešte graficky:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = x_1 - x_2, \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.2. Tuto úlohu vyřešíme graficky(viz obr. 5.2).
Funkce z nabývá svoji nejmenší hodnotu nad přípustnou oblastí K v krajním bodě $\left(\frac{2}{5}, \frac{18}{5}\right)^T$, jenž zároveň minimalizuje funkci f. Tento bod získáme jako průsečík přímek $-3x_1+2x_2 = 6$ a $x_1 + x_2 = 4$. Účelová funkce z splývá s hraniční přímkou $x_1 + x_2 = 4$. Hodnota funkce z v tomto bodě je

$$z = x_1 - x_2 = \frac{2}{5} - \frac{18}{5} = -\frac{16}{5}.$$

Odpověď: Funkce nabývá minimum v bodě $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{18}{5}\right)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = -\dfrac{16}{5}$.



Obrázek 5.2: Grafické řešení příkladu 5.2

Příklad 5.3. Řešte graficky

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ & 5x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

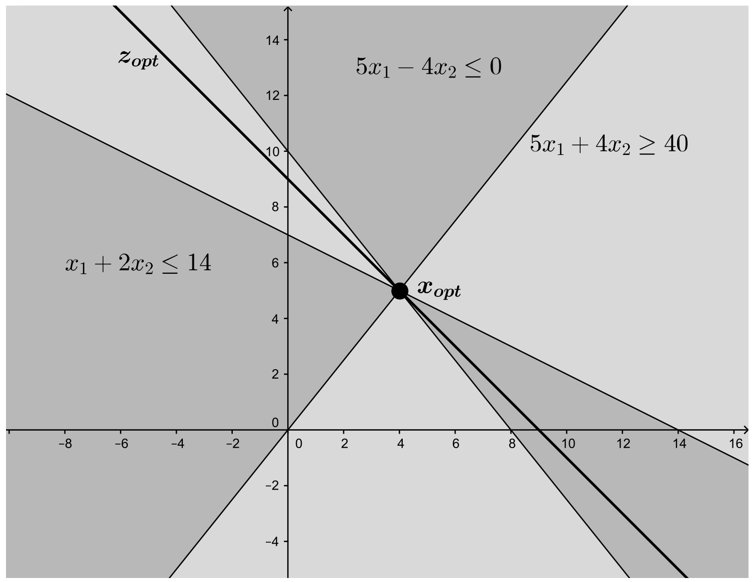
Řešení 5.3. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.3)
Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(4,5)^T$. Tento bod získáme jako průsečík přímek $x_1 + 2x_2 = 14$, $5x_1 + 4x_2 = 40$ a $5x_1 - 4x_2 = 0$. Hodnota funkce z v tomto bodě je

$$z = x_1 + x_2 = 4 + 5 = 9.$$

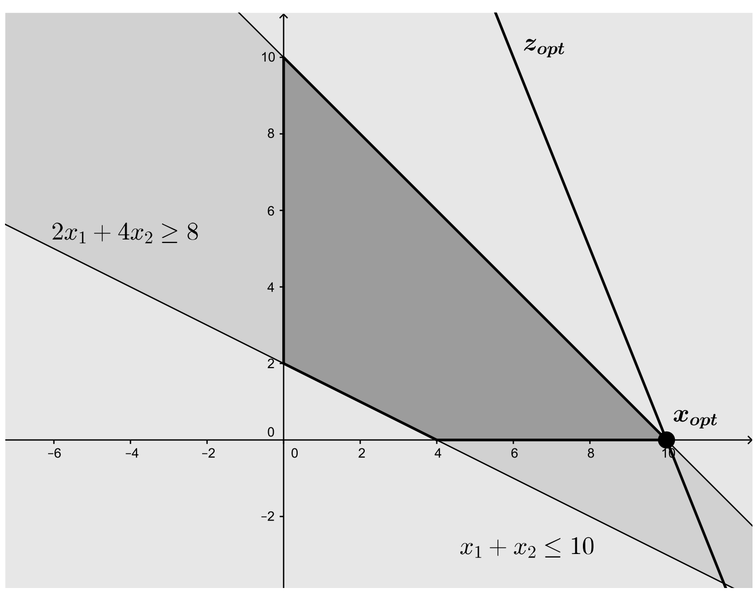
Odpověď: Množina přípustných řešení je v tomto případě tvořena pouze jediným bodem, tedy úloha má jedno optimální řešení $x_{opt} = (4,5)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 9$.

Příklad 5.4. Řešte graficky

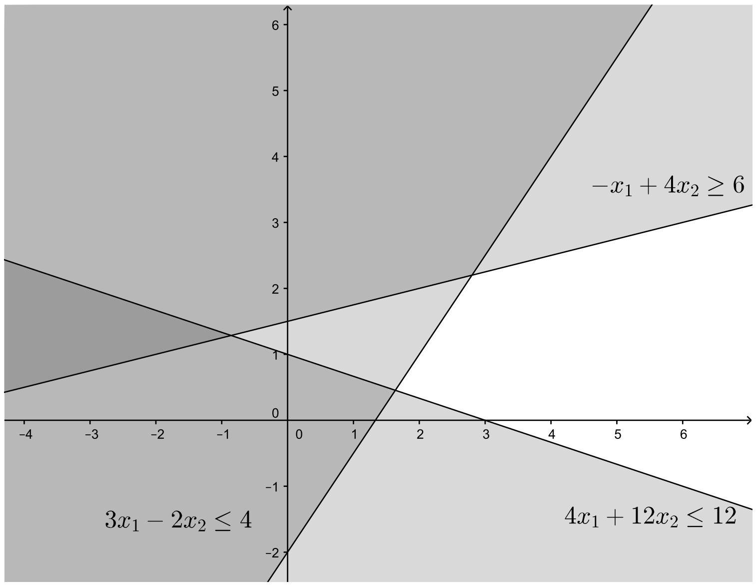
$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Obrázek 5.3: Grafické řešení příkladu 5.3



Obrázek 5.4: Grafické řešení příkladu 5.4



Obrázek 5.5: Grafické řešení příkladu 5.5

Řešení 5.4. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.4)
Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v krajním bodě $(10, 0)^T$, jenž zároveň maximalizuje funkci z. Tento bod získáme jako průsečík přímek $x_1 + x_2 = 10$ a $x_2 = 0$. Hodnota funkce z v tomto bodě je

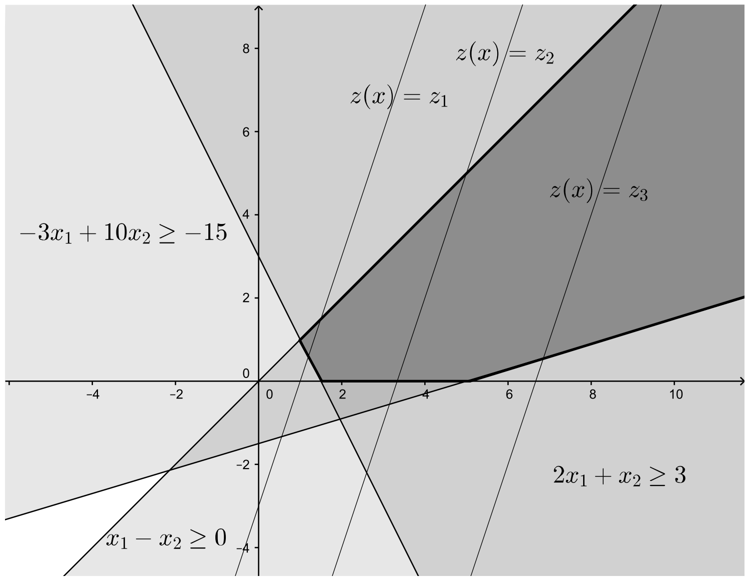
$$z = 5x_1 + 2x_2 = 5.10 + 0 = 50.$$

Odpověď: Funkce nabývá maximum v bodě $(10, 0)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 50$.

Příklad 5.5. Řešte graficky

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & -x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + 12x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.5. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.5)
Odpověď: Množina přípustných řešení je prázdná.



Obrázek 5.6: Grafické řešení příkladu 5.6

Příklad 5.6. Řešte graficky

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1 - x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & -3x_1 + 10x_2 \geq -15 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

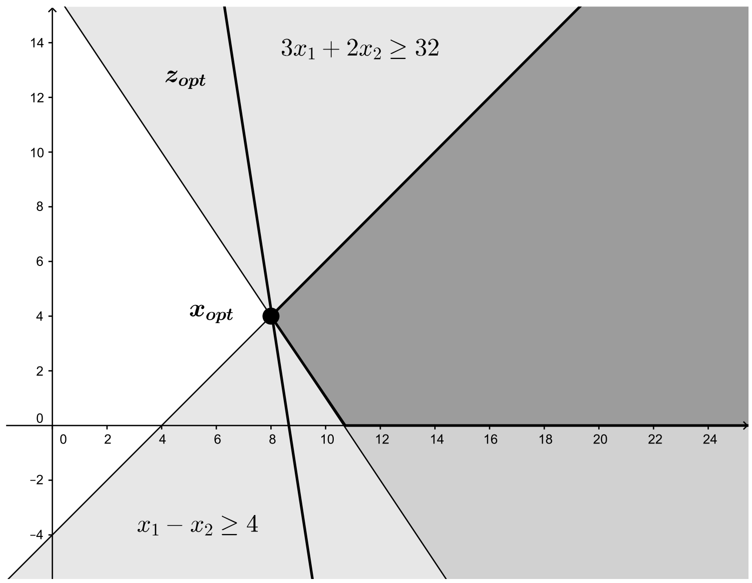
Řešení 5.6. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.6)

Zakreslíme množinu přípustných řešení. Dále zakreslíme účelovou funkci, kdy za z volíme např. $z = 3 = z_1, z = 6 = z_2, z = 20 = z_3$. Kritérium funkce je maximalizační, správný posun je tedy od nižší hodnoty z_1 k vyšší hodnotě účelové funkce z_3.
Odpověď: Množina přípustných řešení je neohraničená a účelovou funkci posouváme ve směru neohraničenosti této množiny. Proto úloha nemá konečné optimální řešení.

Příklad 5.7. Řešte graficky

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 26x_1 + 4x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 32 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.7. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.7)



Obrázek 5.7: Grafické řešení příkladu 5.7

Funkce z nabývá svoji nejmenší hodnotu nad přípustnou oblastí K v krajním bodě $(8,4)^T$, jenž zároveň minimalizuje funkci z. Tento bod získáme jako průsečík přímek $x_1 - x_2 = 4$ a $3x_1 + 2x_2 = 32$. Hodnota funkce z v tomto bodě je

$$z = 26x_1 + 4x_2 = 26.8 + 4.4 = 208 + 16 = 224.$$

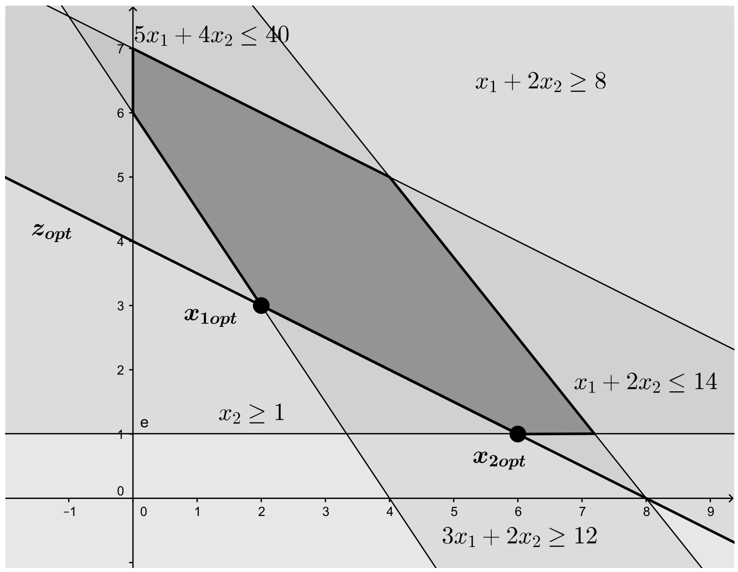
Odpověď: Funkce nabývá minima v krajním bodě $(8,4)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 224$.

Příklad 5.8. Řešte graficky

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 4x_1 + 8x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.8. Úlohu vyřešíme graficky (viz obr. 5.8)

Účelová funkce z splývá s hraniční přímkou $x_1 + 2x_2 = 8$. Optimální hodnoty nabývá účelová funkce ve dvou krajních bodech množiny přípustných řešení x_{1opt} a x_{2opt}.Účelová funkce musí nabývat optimální hodnoty i v každém bodě jejich konvexní kombinace. Konvexní kombinací dvou bodů jsou všechny body ležící na úsečce spojující tyto dva body. Bodů na úsečce je nekonečně mnoho.



Obrázek 5.8: Grafické řešení příkladu 5.8

Všechna optimální řešení úlohy budou body konvexní kombinace bodů x_{1opt} a x_{2opt}:
Bod x_{1opt} je průsečíkem přímek:

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

a tedy bod x_{1opt} má souřadnice $(2,3)^T$.
Bod x_{2opt} je průsečíkem přímek:

$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$x_1 = 1$$

a bod x_{2opt} má souřadnice $(6,1)^T$.
Určíme konvexní kombinaci bodů x_{1opt} a x_{2opt}:

$$\begin{aligned}
x_{opt} &= \alpha_1 x_{1opt} + \alpha_2 x_{2opt} \\
\alpha_1 + \alpha_2 = 1; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 &\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 1 \rangle \\
x_{opt} &= (x_{1opt}, x_{2opt})^T \\
(x_{1opt}, x_{2opt})^T &= \alpha_1 (2,3)^T + (1-\alpha_1)(6,1)^T \\
x_{1opt} &= 6 - 4\alpha_1 \\
x_{2opt} &= 1 + 2\alpha_1 \qquad \alpha_1 \in \langle 0, 1 \rangle
\end{aligned}$$

Odpověď: Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení, optimálními řešeními jsou všechny body x_{opt} ležící na úsečce danou dvěma body x_{1opt}, x_{2opt}. Všechna řešení lze tedy vyjádřit jako konvexní kombinaci (viz věta 2.3) bodů x_{1opt}, x_{2opt}. Hodnota účelové funkce optimálních řešení je $z = 32$.

5.2 Simplexová metoda

Budeme řešit všechny příklady, které jsme vyřešili grafickou metodou. Ukážeme si, jak se v různých situacích simplexová metoda chová.

Příklad 5.9. Řešme simplexovou metodou příklad 5.1

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ & x_1 \leq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.9. Po zavedení tří skluzových proměnných a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 20, \\ & 3x_1 + 4x_2 - s_2 + p_1 = 12, \\ & x_1 + s_3 = 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, p_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	20
1	p_1	3	4	0	-1	0	1	12
0	s_3	1	0	0	0	1	0	8
		0	0	0	0	0	-1	0

Nyní přičteme p_1 k účelové funkci:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	20
1	p_1	3	4	0	-1	0	1	12
0	s_3	1	0	0	0	1	0	8
	$z_j - c_j$	3	4	0	-1	0	0	12

Základní sloupec je x_2, základní řádek p_1.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	14
0	x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
0	s_3	1	0	0	0	1	0	8
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		2	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	14
1	x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	3
0	s_3	1	0	0	0	1	8
	$z_j - c_j$	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	3

Optimální řešení nalezeno není. Proto zvolíme základní sloupec x_1 a základní řádek x_2.

		2	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	16
2	x_1	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	4
0	s_3	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	4
	$z_j - c_j$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	8

Optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec s_2 a základní řádek s_3.

		2	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	2	1	0	-1	12
2	x_1	1	0	0	0	1	8
0	s_2	0	-4	0	1	3	12
	$z_j - c_j$	0	-1	0	0	2	16

Ani v tomto případě optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec x_2 a základní řádek s_1.

		2	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	6
2	x_1	1	0	0	0	1	8
0	s_2	0	0	2	1	1	36
	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	22

Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(8, 6, 0, 36, 0)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(8, 6)^T$ a hodnota funkce z v tomto bodě je 22.

Odpověď: Funkce nabývá maximum v bodě $(8, 6)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 22$.

Příklad 5.10. Řešme simplexovou metodou příklad 5.2

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = x_1 - x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.10. Po zavedení tří skluzových proměnných a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 - s_1 + p_1 = 2, \\ & -3x_1 + 2x_2 + s_2 = 6, \\ & x_1 + x_2 + s_3 = 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, p_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
1	p_1	2	1	-1	0	0	1	2
0	s_2	-3	2	0	1	0	0	6
0	s_3	1	1	0	0	1	0	4
		0	0	0	0	0	-1	0

Nyní přičteme p_1 k účelové funkci:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
1	p_1	2	1	-1	0	0	1	2
0	s_2	-3	2	0	1	0	0	6
0	s_3	1	1	0	0	1	0	4
	$z_j - c_j$	2	1	-1	0	0	0	2

Základní sloupec je x_1, základní řádek p_1.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
0	s_2	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$	9
0	s_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		1	-1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
0	s_2	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	9
0	s_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	3
	$z_j - c_j$	-1	1	0	0	0	0

Optimální řešení nalezeno není. Proto zvolíme základní sloupec x_2 a základní řádek x_1.

		1	-1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
-1	x_2	2	1	-1	0	0	2
0	s_2	-7	0	2	1	0	2
0	s_3	-1	0	1	0	1	2
	$z_j - c_j$	-3	0	1	0	0	-2

Optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec s_1 a základní řádek s_2.

		1	−1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
-1	x_2	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3
0	s_1	$-\frac{7}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1
0	s_3	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	1
	$z_j - c_j$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-3

Ani v tomto případě optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec x_1 a základní řádek s_3.

		1	−1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
-1	x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{18}{5}$
0	s_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{12}{5}$
1	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
	$z_j - c_j$	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{16}{5}$

Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(\frac{2}{5}, \frac{18}{5}, \frac{12}{5}, 0, 0)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(\frac{2}{5}, \frac{18}{5})^T$ a hodnota funkce z v tomto bodě je $-\frac{16}{5}$.

Odpověď: Funkce nabývá minimum v bodě $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{18}{5}\right)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = -\dfrac{16}{5}$.

Příklad 5.11. Řešme simplexovou metodou příklad 5.3

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \le 14, \\ & 5x_1 + 4x_2 \ge 40, \\ & 5x_1 - 4x_2 \le 0, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.11. Po zavedení tří skluzových proměnných a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 14, \\ & 5x_1 + 4x_2 - s_2 + p_1 = 40, \\ & 5x_1 - 4x_2 + s_3 = 0, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, p_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	14
1	p_1	5	4	0	-1	0	1	40
0	s_3	5	-4	0	0	1	0	0
		0	0	0	0	0	-1	0

Nyní přičteme p_1 k účelové funkci:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	14
1	p_1	5	4	0	-1	0	1	40
0	s_3	5	-4	0	0	1	0	0
	$z_j - c_j$	5	4	0	-1	0	0	40

Jelikož je řešení degenerované, vezmeme jako základní řádek třetí řádek a protože máme minimalizovat, základním sloupcem bude zahrnovat maximální kladný prvek z účelové funkce. V bázi tedy nahradí proměnná x_1 proměnnou s_3.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	0	$\frac{14}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	14
1	p_1	0	8	0	-1	-1	1	40
0	x_1	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0
	$z_j - c_j$	0	8	0	-1	-1	0	40

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	0	0	1	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{7}{20}$	0
0	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	5
0	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	4
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		1	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	0	0	1	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	0
1	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	5
1	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	4
		0	0	0	$-\frac{9}{40}$	$-\frac{1}{40}$	9

Optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec s_2 a základní řádek s_1.

		1	1	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_2	0	0	$\frac{20}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0
1	x_2	0	1	$\frac{5}{14}$	0	$-\frac{1}{14}$	5
1	x_1	1	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	4
		0	0	$\frac{9}{14}$	0	$\frac{1}{14}$	9

Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(4,5,0,0,0)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(4,5)^T$. Hodnota funkce z v tomto bodě je 9.

Odpověď: Množina přípustných řešení je v tomto případě tvořena pouze jediným bodem, tedy úloha má jedno optimální řešení $(4,5)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 9$.

Příklad 5.12. Řešme simplexovou metodou příklad 5.4

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 \leq 10, \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.12. Po zavedení dvou skluzových proměnných a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 10, \\ & 2x_1 + 4x_2 - s_2 + p_1 = 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, p_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme:

		0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	b
0	s_1	1	1	1	0	0	10
1	p_1	2	4	0	-1	1	8
		0	0	0	0	-1	0

Nyní přičteme p_1 k účelové funkci:

		0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	b
0	s_1	1	1	1	0	0	10
1	p_1	2	4	0	-1	1	8
	$z_j - c_j$	2	4	0	-1	0	8

Základní sloupec je x_2, základní řádek p_1.

		0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	b
0	s_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	8
0	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		5	2	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	s_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	8
2	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	2
	$z_j - c_j$	-4	0	0	$-\frac{1}{2}$	4

Optimální řešení nalezeno není. Proto zvolíme základní sloupec x_1 a základní řádek x_2.

		5	2	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	s_1	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	6
5	x_1	1	2	0	$-\frac{1}{2}$	4
	$z_j - c_j$	0	8	0	$-\frac{5}{2}$	20

Optimální řešení nalezeno není. Zvolíme základní sloupec s_2 a základní řádek s_1.

		5	2	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
0	s_2	0	-2	2	1	12
5	x_1	1	1	1	0	10
	$z_j - c_j$	0	3	5	0	50

Tímto jsme nalezli optimální řešení. Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(10, 0, 0, 12)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(10, 0)^T$ a hodnota funkce z v tomto bodě je 50.
Odpověď: Funkce nabývá maximum v bodě $(10, 0)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 50$.

Příklad 5.13. Řešme simplexovou metodou příklad 5.5

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{za podmínek} \quad & -x_1 + 4x_2 \geq 6, \\
& 3x_1 - 2x_2 \leq 4, \\
& 4x_1 + 12x_2 \leq 12, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Řešení 5.13. Po zavedení tří skluzových proměnných a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & -x_1 + 4x_2 - s_1 + p_1 = 6, \\ & 3x_1 - 2x_2 + s_2 = 4, \\ & 4x_1 + 12x_2 + s_3 = 12, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, p_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
1	p_1	-1	4	-1	0	0	1	6
0	s_2	3	-2	0	1	0	0	4
0	s_3	4	12	0	0	1	0	12
		0	0	0	0	0	-1	0

Nyní přičteme p_1 k účelové funkci:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
1	p_1	-1	4	-1	0	0	1	6
0	s_2	3	-2	0	1	0	0	4
0	s_3	4	12	0	0	1	0	12
	$z_j - c_j$	-1	4	-1	0	0	0	6

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou s_3.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
1	p_1	$-\frac{7}{3}$	0	-1	0	$-\frac{1}{3}$	1	2
0	s_2	$\frac{11}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{6}$	0	6
0	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{12}$	0	1
	$z_j - c_j$	$-\frac{7}{3}$	0	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2

V tomto kroku již není možno určit vstupující proměnnou, protože v řádku pomocné účelové funkce jsou všechny koeficienty záporné. Našli jsme tedy minimum pomocné účelové funkce, které je ale větší než nula. Pomocná proměnná $p_1 = 2$ má tedy stále kladnou hodnotu. Původní úloha proto nemá přípustné řešení a její optimum tedy neexistuje.

Odpověď: Množina přípustných řešení je v tomto případě prázdná.

Příklad 5.14. Řešme simplexovou metodou příklad 5.6

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 3x_1 - x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & -3x_1 + 10x_2 \geq -15, \\ & x_1 - x_2 \geq 0, \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.14. U první podmínky nastává problém – nikdy na pravé straně nemůže být záporné číslo. Tedy vynásobíme nerovnost číslem -1. Dostáváme:

$$3x_1 - 10x_2 \leq 15.$$

Potom po zavedení tří skluzových proměnných a dvou pomocných řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 + p_2 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & 3x_1 - 10x_2 + s_1 = 15, \\ & x_1 - x_2 - s_2 + p_1 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 - s_3 + p_2 = 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	p_2	b
0	s_1	3	-10	1	0	0	0	0	15
1	p_1	1	-1	0	-1	0	1	0	0
1	p_2	2	1	0	0	-1	0	1	3
		0	0	0	0	0	-1	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	p_2	b
0	s_1	3	-10	1	0	0	0	0	15
1	p_1	1	-1	0	-1	0	1	0	0
1	p_2	2	1	0	0	-1	0	1	3
	$z_j - c_j$	3	0	0	-1	-1	0	0	3

Jelikož je řešení degenerované, vezmeme jako základní řádek druhý řádek, a protože máme minimalizovat, základním sloupcem bude zahrnovat maximální kladný prvek z účelové funkce. V bázi tedy nahradí proměnná x_1 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	p_2	b
0	s_1	0	-7	1	3	0	-3	0	15
0	x_1	1	-1	0	-1	0	1	0	0
1	p_2	0	3	0	2	-1	-2	1	3
	$z_j - c_j$	0	3	0	2	-1	-3	0	3

Jelikož je opět řešení degenerované, vezmeme jako základní řádek druhý řádek, a protože máme minimalizovat, základním sloupcem bude zahrnovat maximální kladný prvek z účelové funkce. V bázi by tedy měla proměnná x_2 nahradit proměnnou x_1 a klíčový prvek by mělo být číslo -1, což nelze.
Odpověď: Úloha nemá konečné optimální řešení.

Příklad 5.15. Řešme simplexovou metodou příklad 5.7

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 26x_1 + 4x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_2 \geq 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 32, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.15. Po zavedení dvou skluzových proměnných a dvou pomocných, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 + p_2 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 - x_2 - s_1 + p_1 = 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 - s_2 + p_2 = 32, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	-1	-1	0	1	0	4
1	p_2	3	2	0	-1	0	1	32
		0	0	0	0	-1	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	-1	-1	0	1	0	4
1	p_2	3	2	0	-1	0	1	32
	$z_j - c_j$	4	1	-1	-1	0	0	36

Nyní v bázi nahradí proměnná x_1 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
0	x_1	1	-1	-1	0	1	0	4
1	p_2	0	5	3	-1	-3	1	20
	$z_j - c_j$	0	5	3	-1	-4	0	20

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou p_2.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
0	x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	8
0	x_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	4
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		26	4	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
26	x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	8
4	x_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	4
	$z_j - c_j$	0	0	-8	-6	224

Tímto jsme nalezli optimální řešení. Funkce z nabývá svoji největší hodnotu nad přípustnou oblastí K v bodě $(8,4,0,0)^T$ pro pomocnou úlohu. Původní úloha má optimální řešení $(8,4)^T$ a hodnota funkce z v tomto bodě je 224.

Odpověď: Funkce nabývá minimum v bodě $(8,4)^T$ a hodnota účelové funkce v tomto bodě je $z = 224$.

Příklad 5.16. Řešme simplexovou metodou příklad 5.8

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 4x_1 + 8x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení 5.16. Po zavedení čtyř skluzových proměnných a dvou pomocných, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 + p_2 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 14, \\ & 5x_1 + 4x_2 + s_2 = 40, \\ & x_1 + 2x_2 - s_3 + p_1 = 8, \\ & 3x_1 + 2x_2 - s_4 + p_2 = 12, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sestavme tabulku a počítejme.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	p_1	p_2	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	0	0	14
0	s_2	5	4	0	1	0	0	0	0	40
1	p_1	1	2	0	0	-1	0	1	0	8
1	p_2	3	2	0	0	0	-1	0	1	12
		0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	p_1	p_2	b
0	s_1	1	2	1	0	0	0	0	0	14
0	s_2	5	4	0	1	0	0	0	0	40
1	p_1	1	2	0	0	-1	0	1	0	8
1	p_2	3	2	0	0	0	-1	0	1	12
	$z_j - c_j$	4	4	0	0	-1	-1	0	0	20

Nyní v bázi proměnná x_1 nahradí proměnnou p_2.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	p_1	p_2	b
0	s_1	0	$\frac{4}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	10
0	s_2	0	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	20
1	p_1	0	$\frac{4}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	4
0	x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4
	$z_j - c_j$	0	$\frac{4}{3}$	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	4

Nyní v bázi proměnná x_2 nahradí proměnnou p_1.

		0	0	0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	p_1	p_2	b
0	s_1	0	0	1	0	1	0	-1	0	6
0	s_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
0	x_2	0	1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3
0	x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		4	8	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
0	s_1	0	0	1	0	1	0	6
0	s_2	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
8	x_2	0	1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
4	x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-4	0	32

Tímto jsme nalezli optimální řešení, ale není jediné. U skluzové proměnné s_4 je hodnota rovna nule. Znamená to, že hodnota této proměnné nezmění hodnotu účelové funkce. Existuje tedy další optimální řešení:

		4	8	0	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
0	s_1	0	0	1	0	1	0	6
0	s_4	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	12
8	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	0	0
4	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	8
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-4	0	32

Vidíme, že řešení je opět optimální a hodnota účelové z se nezměnila, ale hodnoty proměnných jsou jiné. Vypočetli jsme tedy dvě optimální řešení: $x_{1opt} = (2,3)^T$ a $x_{2opt} = (8,0)^T$. Všechna řešení lze vyjádřit jako konvexní kombinaci:

$$\begin{aligned}
x_{opt} &= \alpha_1 x_{1opt} + \alpha_2 x_{2opt} \\
\alpha_1 + \alpha_2 = 1; \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 &\in \langle 0,1 \rangle \\
x_{opt} &= (x_{1opt}, x_{2opt})^T \\
(x_{1opt}, x_{2opt})^T &= \alpha_1 (2,3)^T + (1-\alpha_1)(8,0)^T \\
x_{1opt} &= 8 - 6\alpha_1 \\
x_{2opt} &= 3\alpha_1 \qquad \alpha_1 \in \langle 0,1 \rangle
\end{aligned}$$

Odpověď: Tato úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení. Všechna řešení lze vyjádřit jako konvexní kombinaci (viz věta 2.3) bodů x_{1opt}, x_{2opt}. Hodnota účelové funkce optimálních řešení je $z = 32$.

5.3 Přehled základních typů modelů z praxe

Lineární programování má velmi široké použití. Mezi nejčastěji se vyskytující úlohy tohoto typu se řadí:

- problém skladby sortimentu (plánování výroby)
- úlohy o vytváření směsí (směšovací problém)
- řezný problém (úloha o dělení materiálu)
- dopravní problém.

5.3.1 Problém skladby sortimentu

Příklad 5.17. Podnik vyrábí tři výrobky a má omezení ve třech surovinách. Potřeba surovin na jednotku jednotlivých výrobků, disponsibilní množství surovin a ceny jednotlivých výrobků jsou uvedeny v následující tabulce:

Surovina	Potřeba surovin na jednotku výrobku			Disponsibilní množství surovin
	V_1	V_2	V_3	
S_1	2	1	3	600
S_2	1	1	2	1 200
S_3	2	2	1	800
Cena jednotky výrobku	20	25	30	

Stanovte výrobní program tak, aby hodnota odbytu byla maximální.

Řešení 5.17. Sestavení matematického modelu:

- Stanovení proměnných:
  Proměnné v této úloze budou tři a budou odpovídat třem typům výrobků. Budou vyjadřovat počet výrobků příslušného typu. Tento údaj bude uváděn v kusech.
  Použité proměnné udávající počet kusů jednotlivých výrobků V_i označíme x_i pro $i = 1, \dots, 3$.

- Účelová funkce (kritérium):
  Hodnota odbytu má být maximální. Budeme tedy hledat maximum ceny výrobků. Cena výrobku V_1 je 20 Kč, V_2 je 25 Kč a V_3 je 30 Kč. Účelová funkce vyjadčuje celkovou cenu výrobků.

$$z(x) = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3.$$

- Omezující podmínky:
  Omezující jsou v úloze zásoby jednotlivých surovin, podnik nemůže na výrobu spotřebovat více suroviny než množství, které má k dispozici.
  Na výrobu jednoho kusu výrobku V_1 se spotřebuje 2 kg suroviny S_1. Na výrobu všech výrobků V_1 (kterých je x_1) se tedy spotřebuje $2x_1$ kg suroviny S_1. Na všechny výrobky V_2 se spotřebuje $1x_2$ kg, na výrobky V_3 $3x_3$ kg. Celkové spotřebované množství suroviny S_1 nesmí být větší, než je zásoba této suroviny (600 kg).
  Podmínka pro celkovou spotřebu suroviny S_1:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 600.$$

  Obdobně sestavíme další omezující podmínky týkající se spotřeby surovin:
  Podmínka pro celkovou spotřebu suroviny S_2:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1\,200.$$

  Podmínka pro celkovou spotřebu suroviny S_3:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800.$$

- Podmínky nezápornosti proměnných:
  Všechny proměnné vyskytující se v této úloze musí splňovat podmínku nezápornosti. Protože proměnné vyjadřují počet kusů vyrobených výrobků, budou všechny proměnné i celočíselné:
$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{kde} \quad i = 1, \ldots, 3.$$

Výsledný matematický model úlohy:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 600, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1\,200, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800, \\ & x_1, x_2, x_3, \geq 0. \end{aligned}$$

Po zavedení tří skluzových proměnných s_1, s_2, s_3 dostáváme úlohu:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 600, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 1\,200, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 800, \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Zapišme výsledný matematický model pomocí simplexové tabulky a počítejme:

		20	25	30	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	2	1	3	1	0	0	600
0	s_2	1	1	2	0	1	0	1 200
0	s_3	2	2	1	0	0	1	800
	$z_j - c_j$	-20	-25	-30	0	0	0	0

Dostaváme bazické řešení $x_B = (0, 0, 0, 600, 1200, 800)^T$ a hodnotu účelové funkce $z = 0$, které není optimální.

		20	25	30	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
30	x_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	200
0	s_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	800
0	s_3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	600
	$z_j - c_j$	0	-15	0	10	0	0	6 000

Nyní je bazické řešení $x_B = (0, 0, 200, 0, 800, 600)^T$ a hodnota účelové funkce $z = 6000$, což není optimální řešení.

		20	25	30	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
30	x_3	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	80
0	s_2	$-\frac{3}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	680
25	x_2	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	360
	$z_j - c_j$	12	0	0	7	0	9	11 400

Bazické řešení je $x_B = (0, 360, 80)^T$ a hodnota účelové funkce je $z = 11\,400$. Řešení, které jsme získali je optimální.
Zjistili jsme, že vyrábět budeme výrobek V_2 v množství 360 ks a V_3 v množství 80 ks ($x_2 = 360$ a $x_3 = 80$ z poslední simplexové tabulky). Výrobek V_1 se vyrábět nebude (proměnná x_1 je nezákladní proměnnou, a proto nulová) a ušetříme 680 jednotek suroviny S_2 ($s_2 = 680$).

Odpověď: Optimální hodnota odbytu činí 11 400 Kč.

5.3.2 Směšovací problém

Příklad 5.18. Podnik má vyrobit směs, která by obsahovala alespoň 160 g látky L_1 a alespoň 500 g látky L_2. Jeden kilogram směsi S_1 obsahuje 1 g látky L_1, alespoň 1 g látky L_2 a stojí 30 Kč. Jeden kilogram směsi S_2 obsahuje 2 g látky L_1, alespoň 5 g látky L_2 a stojí 50 Kč. Úkolem je stanovit složení výsledné směsi tak, aby náklady na její pořízení, byly co nejmenší.

Řešení 5.18. Sestavení matematického modelu:

- Stanovení proměnných:
  $x_i \ldots$ množství zakoupené směsi $S_i, i = 1, 2$.
  Kvůli zjednodušení předpokládejme, že výrobní náklady jsou tvořeny pouze cenou zakoupených množství jednotlivých směsí.

- Účelová funkce (kritérium):
  V zadání úlohy je stanovena pořizovací cena jednotlivých složek. Kritériem tedy bude, aby celková pořizovací cena výsledné směsi byla co nejnižší.
  Účelová funkce vyjadřuje celkovou pořizovací cenu všech složek směsi:

$$\text{minimalizujte} \quad 30x_1 + 50x_2.$$

- Omezující podmínky:

$$\begin{aligned} \text{látka} \quad L_1: &\quad x_1 + x_2 \geq 160, \\ \text{látka} \quad L_2: &\quad 2x_1 + 5x_2 \geq 500. \end{aligned}$$

- Podmínky nezápornosti proměnných:
  Všechny proměnné vyskytující se v úloze musí splňovat podmínku nezápornosti:

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Výsledný matematický model úlohy:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 30x_1 + 50x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 \geq 160, \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 500, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Po zavedení dvou skluzových proměnných s_1, s_2 a dvou pomocných proměnných, dostáváme úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = p_1 + p_2 \\ \text{za podmínek} \quad & x_1 + x_2 - s_1 + p_1 = 160, \\ & 2x_1 + 5x_2 - s_2 + p_2 = 500, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, p_1, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zapišme výsledný matematický model pomocí simplexové tabulky a počítejme:

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	1	-1	0	1	0	160
1	p_2	2	5	0	-1	0	1	500
		0	0	0	0	-1	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	1	1	-1	0	1	0	160
1	p_2	2	5	0	-1	0	1	500
	$z_j - c_j$	3	6	-1	-1	0	0	660

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou p_2.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
1	p_1	$\frac{3}{5}$	0	-1	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	60
0	x_2	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	100
	$z_j - c_j$	$\frac{3}{5}$	0	-1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	60

Nyní v bázi nahradí proměnná x_1 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	1	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	p_1	p_2	b
0	x_1	1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	100
0	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	60
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		30	50	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
30	x_1	1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	100
50	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	60
	$z_j - c_j$	0	0	$-\frac{50}{3}$	$-\frac{20}{3}$	6 000

Bazické řešení je $x_B = (100, 60)^T$ a hodnota účelové funkce je 6 000. Řešení, které jsme získali, je optimální.
Odpověď: Složení výsledné směsi je, že musí obsahovat 100 g směsi S_1 a 60 g směsi S_2, aby náklady na její pořízení, byly co nejmenší.

5.3.3 Řezný problém

Příklad 5.19. Firma, která vyrábí parkety, potřebuje z 300 ks výchozího materiálu o délce 70 cm nařezat maximálně 260 parket dlouhých 20 cm a alespoň 400 parket délky 15 cm. Odpad, který vznikne při řezání každého kusu výchozího materiálu přitom nesmí být větší než 5 cm. Firma chce, aby byl celkový odpad minimální. Jak má firma výchozí materiál nařezat?

Řešení 5.19. Protože se jedná o řezný problém, je potřeba si nejprve sestavit řezné schéma. Kusy výchozího materiálu délky 70 cm můžeme na parkety rozřezat čtyřmi způsoby, které jsou i spolu s odpadem uvedeny v tabulce:

Řezný plán	R_1	R_2	R_3	R_4
Počet tyčí délky 20 cm (ks)	3	2	1	0
Počet tyčí délky 15 cm (ks)	0	2	3	4
Odpad (cm)	10	0	5	10

Ze zadání však připadají v úvahu pouze způsoby rozřezání R_2, R_3, protože je požadováno, aby odpad z každého kusu výchozího materiálu nebyl větší než 5 cm.
Označíme-li:

$$x_1 \dots \text{počet ks materiálu rozřezaných způsobem } R_2$$
$$x_2 \dots \text{počet ks materiálu rozřezaných způsobem } R_3$$
$$z \dots \text{celkový odpad (v cm)},$$

můžeme úlohu lineárního programování zapsat:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = 5x_2 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 260, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 400, \\ & x_1 + x_2 \leq 300, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vyřešme tuto úlohu simplexovou metodou:
Po zavedení tří skluzových podmínek a jedné pomocné, řešme pomocnou úlohu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & p_1 = 0 \\ \text{za podmínek} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 260, \\ & 2x_1 + 3x_2 - s_2 + p_1 = 400, \\ & x_1 + x_2 + s_3 = 300, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zapišme výsledný matematický model pomocí simplexové úlohy a počítejme:

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	2	1	1	0	0	0	260
1	p_1	2	3	0	-1	0	1	400
0	s_3	1	1	0	0	1	0	300
		0	0	0	0	0	-1	0

Nyní k účelové funkci přičteme složku báze $z_j - c_j$.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	2	1	1	0	0	0	260
1	p_1	2	3	0	-1	0	1	400
0	s_3	1	1	0	0	1	0	300
	$z_j - c_j$	2	3	0	-1	0	0	400

Nyní v bázi nahradí proměnná x_2 proměnnou p_1.

		0	0	0	0	0	1	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	p_1	b
0	s_1	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{380}{3}$
0	x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
0	s_3	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{500}{3}$
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1	0

Zjistili jsme, že optimální hodnota pomocné úlohy je nulová. První fáze dvoufázového simplexového algoritmu skončila nalezením přípustného řešení původní úlohy. Máme tedy přípustnou oblast původní úlohy a můžeme pokračovat druhou fází algoritmu.

		0	5	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	s_1	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{380}{3}$
5	x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{400}{3}$
0	s_3	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{500}{3}$
	$z_j - c_j$	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{2000}{3}$

Optimální řešení nalezeno není. Proto zvolíme základní sloupec x_1 a základní řádek s_1.

		0	5	0	0	0	0
c_B	x_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
0	x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	95
5	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	70
0	s_3	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	135
	$z_j - c_j$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	350

Řešení, které jsme nalezli je optimální. Toto řešení je $(95, 70, 0, 0, 135)^T$ pro pomocnou úlohu. Pro původní úlohu je řešení $(95, 70)^T$. Hodnota účelové funkce je 350.

Odpověď: Firma musí nařezat 95 kusů materiálu druhým a 70 kusů materiálu třetím způsobem, aby zbylo minimální množství odpadu, což je 350 cm.

5.3.4 Dopravní problém

Příklad 5.20. Ze skladů S_1, S_2, S_3 a S_4 je třeba rozvézt zboží do prodejen P_1, P_2, P_3, P_4 a P_5. V následující tabulce jsou uvedeny náklady na distribuci jedné jednotky zboží mezi jednotlivými sklady a prodejnami, dále tabulka obsahuje údaje o kapacitách všech skladů a požadavcích prodejen:

Sklady\Prodjeny	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Kapacity skladů (ks)
S_1	6	10	5	8	7	800
S_2	4	8	12	6	9	400
S_3	11	15	10	9	5	600
S_4	8	6	2	8	14	200
Požadavky prodejen (ks)	200	500	400	300	600	

Určete, jak má být zboží distribuováno do prodejen.

Řešení 5.20. Sestavení matematického modelu:

- Stanovení proměnných:
  Proměnné u dopravního problému budou vyjadřovat množství zboží přepraveného mezi jednotlivými sklady a prodejnami. Vyskytuje-li se v úloze m dodavatelů (v našem případě skladů) a n spotřebitelů (prodejen), bude mít úloha $m \cdot n$ proměnných.
  Použité proměnné:

  $$x_{ij} \ldots \text{množství zboží přepravené ze skladu} \quad S_i \quad \text{do prodejny} \quad P_j (\text{ks}),$$

  kde $i = 1, \ldots, 4; j = 1, \ldots, 5$.

- Účelová funkce (kritérium): Účelová funkce bude vyjadřovat celkové přepravní náklady na rozvoz zboží od všech dodavatelů všem spotřebitelům. Tyto náklady požadujeme co nejnižší. Přeprava jedné jednotky zboží ze skladu S_1 do prodejny P_1 stojí 6 Kč. Ze skladu S_1 se do prodejny P_1 přepravuje x_{11} jednotek zboží. Náklady na přepravu všech jednotek zboží ze skladu S_1 do prodejny P_1 tedy budou $6x_{11}$ (Kč), náklady na přepravu všech jednotek zboží ze skladu S_1 do prodejny P_2 budou $10x_{12}$ (Kč) atd.
  Účelová funkce:

  $$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad z = \quad & 6x_{11} + 10x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 7x_{15} + 4x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + \\ & 6x_{24} + 9x_{25} + 11x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} + 5x_{35} + 8x_{41} + \\ & 6x_{42} + 2x_{43} + 8x_{44} + 14x_{45}. \end{aligned}$$

- Omezující podmínky:
  Omezující jsou v úloze kapacity skladů a požadavky prodejen.
  Podmínka pro kapacitu skladu S_1:

  $$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 800$$

(Ze skladu S_1 se do prodejny P_1 přepraví x_{11} ks zboží, do prodejny P_2 se přepraví x_{12} ks zboží atd. Kapacita skladu S_1 je 800 ks zboží.)
Podmínka pro kapacitu skladu S_2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 400.$$

Podmínka pro kapacitu skladu S_3, S_4 je obdobná podmínkám pro S_1, S_2.

Podmínka pro požadavek prodejny P_1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200.$$

Podmínka pro požadavek prodejny P_2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 500.$$

Podmínky pro požadavky prodejen P_3, P_4, P_5 jsou obdobné podmínkám pro P_1, P_2.

- Podmínky nezápornosti:
  Všechny proměnné vyskytující se v úloze musí splňovat podmínku nezápornosti. Protože proměnné vyjadřují počet kusů přepravovaného zboží, budou všechny proměnné i celočíselné.
  $$x_{ij} \geq 0, \quad \text{kde} \quad i = 1, \ldots, 4; j = 1, \ldots, 5.$$

Výsledný matematický model úlohy:

$$\begin{aligned}
\text{minimalizovat} \quad z = \ & 6x_{11} + 10x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} + 7x_{15} + 4x_{21} + 8x_{22} + 12x_{23} + \\
& 6x_{24} + 9x_{25} + 11x_{31} + 15x_{32} + 10x_{33} + 9x_{34} + 5x_{35} + 8x_{41} + \\
& 6x_{42} + 2x_{43} + 8x_{44} + 14x_{45}. \\
\text{za podmínek} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 800 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 400 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 600 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 200 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 200 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 500 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 400 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 300 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 600 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad \text{kde} \quad i = 1, \ldots, 4; j = 1, \ldots, 5.
\end{aligned}$$

Řešení úloh typu *dopravní problém* je specifický a má své vlastní metody řešení, které jsou nad rámec této práce.

Závěr

V diplomové práci byly vysvětleny základní pojmy pro definování úlohy lineárního programování. Snahou bylo, aby práce byla přehledná a čtenář se v ní dobře orientoval. Ve sbírce úloh byly nejprve ukázány příklady řešené geometrickou a poté simplexovou metodou. Byly uvedeny různé typy příkladů, které se mohou v rámci úloh lineárního programování vyskytovat. V poslední části byly ukázány různé typy příkladů z praxe a např. směšovací problém, který by mohl být přínosem např. pro učitele chemie.

Literatura

[1] BRÁZDOVÁ, M.: Řešené úlohy lineárního programování. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2011. ISBN 978-80-7395-361-4.

[2] BROŽOVÁ, H., HOUŠKA, M.: Základní metody operační analýzy. Praha: Credit, 2002. ISBN 80-213-0951-2.

[3] DUPAČOVÁ, J.: Lineární programování. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. ISBN 17-230-82.

[4] HOUŠKA, M., BERÁNKOVÁ, M.: Lineární programování: cvičebnice. V Praze: Česká zemědělská univerzita, Provozně ekonomická fakulta, 2009. ISBN 978-80-213-1869-4.

[5] KLEE, V., MINTY, G. J. : How good is the simplex algorithm?, Proc. 3rd Symposium Inequalities: Academic Press, New York, 1972.

[6] KOLMAN, B., BECK, R. E. . Elementary linear programming with applications. International ed. New York: Academic Press, 1980. ISBN 0124178650.

[7] KOPKA, J.: Kapitoly z lineární algebry. V Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2011. ISBN 978-80-7414-436-3.

[8] LINDA, B., VOLEK, J.: Lineární programování. Vydání 6., opravené a doplněné. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2016. ISBN 978-80-7560-018-9.

[9] NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J.: Numerical optimization [online]. 2nd ed. New York: Springer, c2006 [cit. 2016-07-18]. Springer series in operations research. ISBN 03-873-0303-0. Dostupné z: $http : //home.agh.edu.pl/\ pba/pdfdoc/Numerical_Optimization.pdf$

[10] PLESNÍK, J., DUPAČOVÁ, J., VLACH, M.: Lineárne programovanie. Bratislava: Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1990. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. ISBN 80-05-00679-9.

[11] ROCKAFELLAR, R., T.: Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. ISBN 0-691-08069-0.

[12] SAMEK, J.: Lineární programování v příkladech. Vydání 3. Praha: SPN, 1978.

[13] ŠMARDA, B.: Lineární programování. 1/2 vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[14] ŠVRČEK, J.: Lineární programování v úlohách. 2. přeprac. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0705-1.

[15] ŽENČÁK, P.: Lineární programování. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013. ISBN 978-80-244-3414-8.