

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA OPTIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Numerické metody difrakce optických vln a jejich
algoritmizace v softwaru Mathematica



Vypracoval: Štěpán Venos
ve 3. ročníku

Studijní program: N1701 Fyzika

Studijní obor: Optika a optoelektronika

Forma studia: Prezenční

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Bohumil Stoklasa, Ph.D.

Olomouc 2018

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Štěpán Venos

Název práce: Numerické metody difrakce optických vln a jejich algoritmizace v softwaru Mathematica

Typ práce: Magisterská

Pracoviště: Katedra optiky

Vedoucí práce: Mgr. Bohumil Stoklasa, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: Cílem diplomové práce je vytvoření dostatečně robustního numerického aparátu pro řešení difrakčních úloh v jazyku Mathematica. Jelikož jen málo difrakčních úloh lze vyřešit analyticky, numerické řešení této klasické optické úlohy nachází praktické uplatnění v mnoha oblastech optiky. Firma Meopta-optika využívá pro své numerické simulace software Mathematica a má proto zájem o vytvoření zázemí pro difrakční jevy v tomto jazyku. Z důvodu omezených prostředků je numerické řešení difrakční úlohy pouze aproximační a vyvstává tedy otázka, nakolik je významná chyba tohoto řešení. Existují různé algoritmizace úlohy s různou mírou aproximace a je tedy užitečné provést analýzu jednotlivých přístupů. Diplomant by měl v rámci řešení zpracovat problematiku difrakce na numerické úrovni, provést rešerši dostupných algoritmů s diskuzí jejich vlastností a omezení, připravit jejich algoritmizaci v jazyce Mathematica a to ideálně ve formě přídatného package. Tento package by měl na základě zadáných vstupních parametrů aplikovat optimální algoritmus pro řešení úlohy.

Klíčová slova: skalární difrakce, Fresnel, Rayleigh-Sommerfeld, úhlové spektrum, vzorkování, aliasing, numerické artefakty, Wolfram Mathematica

Počet stran: 69

Počet příloh: 2

Jazyk: Český

Bibliographic identification

Autor's first name and surname: Štěpán Venos

Title: Numerical aspects of optical waves diffraction and the Mathematica software realization

Type of thesis: Master

Department: Department of Optics

Supervisor: Mgr. Bohumil Stoklasa, Ph.D.

The year of presentation: 2018

Abstract: The goal of the thesis is to create a robust numerical apparatus for solving diffraction tasks in Mathematica's Wolfram Language. Only a few diffraction tasks can be solved analytically, the numerical solution of this classical optical task finds practical application in many areas of optics. Meopta-optika company uses Mathematica software for its numerical simulations and is therefore interested in creating the background for diffraction phenomena in this language. Because of the limited resources, the numerical solution of the diffraction task is only approximate and the question of significance of error of this solution arises. There are different algorithms of the task with different degrees of approximation, so it is useful to analyze individual approaches. The diplomat should perform numerical level of diffraction, a search of available algorithms with discussion of their properties and limitations, prepare their algorithmization in Mathematica ideally in the form of an additional package. This package should apply the optimal algorithm based on input parameters.

Keywords: scalar diffraction, Fresnel, Rayleigh-Sommerfeld, angular spectrum, sampling, aliasing, numerical artifacts, Wolfram Mathematica

Number of pages: 69

Number of appendices: 2

Language: Czech

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením
Mgr. Bohumila Stoklasy, Ph.D., a výhradně s použitím citovaných zdrojů.

V Olomouci dne 2. ledna 2018

.....

Štěpán Venos

Děkuji panu Mgr. Bohumilovi Stoklasovi, Ph.D. za odborné vedení při psaní kvalifikační práce, věnovaný čas, trpělivost, poskytnutí literatury a příležitost pracovat na zajímavých úlohách.

Obsah

Úvod	9
1 Teorie skalární difrakce	11
1.1 Kirchhoffův difrakční integrál	12
1.2 Rayleigh-Sommerfeldův difrakční integrál 1	12
1.3 Fresnelův difrakční integrál	14
1.4 Fraunhoferův difrakční integrál	16
2 Numerická realizace difrakčních úloh a přidružené problémy	17
2.1 Diskretizace skalárních difrakčních integrálů	18
2.1.1 Diskretizovaný Rayleigh-Sommerfeldův integrál 1 ve formě úhlového spektra	18
2.1.2 Diskretizovaný Fresnelův integrál ve formě jediné Fourierovy transformace	18
2.1.3 Diskretizovaný Fraunhoferův integrál	19
2.2 Numerické chyby při DFT	19
2.2.1 Aliasing	19
2.2.2 Spektrální prosakování	21
2.2.3 Technika doplňování nulami	21
2.3 Vzorkovací strategie	21
3 Difrakční algoritmy	23
3.1 Metoda Fraunhoferova integrálu	25
3.2 Jednokroková metoda Fresnelova integrálu	26
3.3 Dvoukroková metoda Fresnelova integrálu	28
3.4 Škálované úhlové spektrum Fresnelova integrálu	29
3.5 Požadavky na vzorkování při výpočetní difrakci v paraxiální aproximaci . .	30
3.5.1 Požadavky vycházející z difrakční geometrie	30
3.5.2 Požadavky na vzorkování kvadratické chirp funkce	31

3.5.3	Jednokroková metoda Fresnelova integrálu	32
3.5.4	Dvoukroková metoda Fresnelova integrálu	33
3.5.5	Škálované úhlové spektrum Fresnelova integrálu	33
3.6	Metoda úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1	35
3.7	Low-pass filtrované úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1	36
3.8	Úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1 šířeného z/do zakřivené geometrie	36
3.9	Vzorkování úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1	37
3.9.1	Low-pass filtrované úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1	38
4	Balíček OpticalWavesDiffraction pro software Wolfram Mathematica	41
4.1	Vybrané funkce Wolfram Mathematicy	41
4.2	Optimalizace kódu, nastavení Wolfram Mathematicy a praktické tipy	42
4.3	Instalace balíčku OpticalWavesDiffraction	42
4.4	Package OpticalWavesDiffraction	43
4.4.1	Analytické výrazy	43
4.4.2	Pomocné funkce	50
4.4.3	Nástroje	51
4.4.4	Základní numerické difrakční algoritmy	54
4.4.5	Pokročilé numerické difrakční algoritmy	55
4.5	Ukázka použití	56
5	Výsledky a ověření	58
5.1	Srovnání numerických metod s analytickým řešením	58
5.1.1	Fresnelova difrakce na čtvercové apertuře	58
5.2	Metoda úhlového spektra RS1	61
5.3	Demonstrace numerických chyb při špatně zvolených propagačních parametrech	62
	Závěr	64
	Seznam použité literatury a zdrojů	65

Úvod

Základním předpokladem návrhu moderních optických systémů je schopnost jimi věrně simulovat šíření světla. Hlavním výpočetním nástrojem optimalizace systému zůstává paprskové trasování. Existuje však spousta případů, kdy paprskové trasování není pro popis systému dostatečné a je nezbytné implementovat modely umožňující simulovat difrakční efekty. Numerická implementace vlnových projevů světla je nezbytnou součástí moderních optických oblastí, jako je například interferometrie, holografické a difrakční zobrazování, difrakční tomografie.

Numerická implementace vlnové optiky spočívá v implementaci difrakčních integrálů. Existují sice jiné techniky, jako např. metoda konečných diferencí v časové doméně, které řeší nejobecnější Maxwellovy rovnice (formulované v diferenciálním tvaru), ale ty jsou výpočetně únosné jen pro struktury s malými rozměry.

V praktických úlohách je nejpoužívanější skalární teorie difrakce. Ačkoliv má tato teorie omezenou platnost, je pro většinu reálných aplikací postačující. Analytické řešení existuje pro pár úloh s jednoduchou geometrií. Pro praktické úlohy se využívají řešení numerická, která však přinášejí další problémy. Zejména je důležité kontrolovat přesnost výsledků a výpočetní nároky, a to pomocí důkladné numerické analýzy.

V této práci jsou diskutovány algoritmy skalární teorie difrakce v homogenním prostředí. Nejpoužívanějšími matematickými modely skalární difrakce jsou Rayleigh-Sommerfeldův integrál typu 1 a Fresnelova aproximace. Každý model má mnoho různých implementací, které se uplatňují v různých případech. V práci jsou diskutovány numerické požadavky na počet vzorků a velikost pole komplexní amplitudy reprezentující propagované světelné pole. Cílem této práce je vytvoření zásuvného modulu (package) pro softwarové prostředí Wolfram Mathematica, který implementuje vybrané algoritmy skalární difrakce včetně systému podmínek a dalších pomocných funkcí, často používaných v optických výpočtech a při zpracování optických dat. Software Wolfram Mathematica byl vybrán z důvodu možnosti rychlé implementace matematických modelů, uživatelské přívětivosti a schopnosti rychle realizovat a otestovat zkoumanou metodu. Motivací pro tvorbu takového package je kontrola výstupů komerčních softwarů simulujících vlnovou optiku (např. VirtualLab Fusion) a testování nových numerických metod vhodných na simulaci optických úloh řešených

v průmyslu, které umožňují flexibilní volbu parametrů ovlivňujících počítané světelné pole. Mezi tyto parametry se řadí např. velikost matice a rozteč mezi body pole komplexní amplitudy v cílové rovině, mimoosový posuv studované oblasti a možnosti zmírnění výpočetní náročnosti. V diplomové práci je popsána struktura package, jsou detailně popsány vytvořené funkce a uvedeny příklady použití.

Kapitola 1

Teorie skalární difrakce

Cesta ke skalárním difrakčním integrálům začíná u základů teorie elektromagnetismu a kladením podmínek. V materiálovém prostředí, které je lineární, homogenní, izotropní, nedisperzní, nemagnetické a bez volných nábojů, se z Maxwellových rovnic (MR) odvodí elektromagnetická vlnová rovnice (VR). Skalární vlnová rovnice (SVR) platí, pokud je vlnová délka záření mnohem větší než velikosti difrakčních struktur. V případě monochromatického záření odvodíme ze SVR Helmholtzovu rovnici (HR). Tu řešíme Greenovou větou, která umožňuje nahradit objemový integrál integrálem na uzavřené ploše. Jedná se o okrajovou úlohu (boundary value problem). Helmholtzův a Kirchhoffův integrální teorém chytře vybírá funkci (která může být libovolná spojitá se spojitými 1. a 2. derivacemi a splňující HR) a to sférickou vlnu. Jedná se o Greenovu funkci propagace volným prostorem. Spolu s integrálním teorémem se aplikují Kirchhoffovy hraniční podmínky a Sommerfeldova radiační podmínka, která nuluje integraci velké části uzavřené plochy. Kirchhoffovy hraniční podmínky jsou nekonzistentní s teorií potenciálů z matematické analýzy, přesto bylo ověřeno, že Kirchhoffův difrakční integrál dává přesné výsledky. Rayleigh-Sommerfeldův difrakční integrál (RS) řeší tyto nekonzistence jiným výběrem Greenovy funkce, která navíc obsahuje zrcadlový obraz studovaného bodu. Není tedy nutné klást podmínky pro počáteční pole U i derivaci pole ve směru normály $\partial U/\partial n$. Rozlišujeme Rayleigh-Sommerfeldův difrakční integrál prvního a druhého typu. Pro numerické výpočty je praktický typ první.

Všechny zmiňované integrály lze srovnat např. v případě osvětlení apertury sférickou vlnou. Pak se liší v tzv. činiteli šikmosti (obliquity factor), který vytváří odlišnosti pouze pokud je průměr apertury srovnatelný s vlnovou délkou nebo pokud se studovaný bod nachází v blízkosti apertury. Fyzikální interpretací je konvoluce počátečního pole se sekundárními zdroji (Huygens-Fresnelův princip), které jsou pováženy směrovými kosiny. Skalární teorie dává dobré výsledky pro numerické apertury do hodnoty 0,5 [2].

Pro úplnost jsou uvedeny příklady, kdy se projevuje vektorová povaha světla. V nehomogenním médiu dochází k vázání složek vektorových polí \vec{E} a \vec{H} . Např. na tlusté difrakční

mřížce je nutné použít vektorový popis. Dále hraniční podmínky na rozhraní mezi dvěma homogenními prostředími vážou elektrické pole s magnetickým i jejich jednotlivé složky navzájem. Zde skalární aproximace zavádí chybu, která je však malá, jelikož rozhraní ovlivňuje malou oblast optického pole. Oproti skalární difrakci je vektorové pole na apertuře porušené hraničními podmínkami na okrajích apertury. Efekt se projevuje několik vlnových délek od okrajů apertury. Pole je navíc nenulové několik vlnových délek mimo aperturu.

Aby vynikly vztahy mezi aproximacemi a různými přístupy k výpočtu difrakce byl vytvořen diagram 1.1.

Následující podkapitola shrnuje základní rovnice teorie skalární difrakce. Odvození je dostupné v [1, 2].

1.1 Kirchhoffův difrakční integrál

Rovnice Kirchhoffova integrálu [2], která platí pro propagační vzdálenosti Δz mnohem větší než vlnová délka λ , představuje plný skalární popis difrakce a má tvar

$$U(x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (1.1)$$

kde U je pole komplexní amplitudy na ploše S , $G = \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}}$ je Greenova funkce, r_{12} je vzdálenost mezi studovaným bodem a bodem na ploše S . Veličiny jsou znázorněny na obrázku 1.2. Za předpokladu, že vlnový vektor splňuje $k \gg 1/r_{12}$ lze tuto rovnici zjednodušit

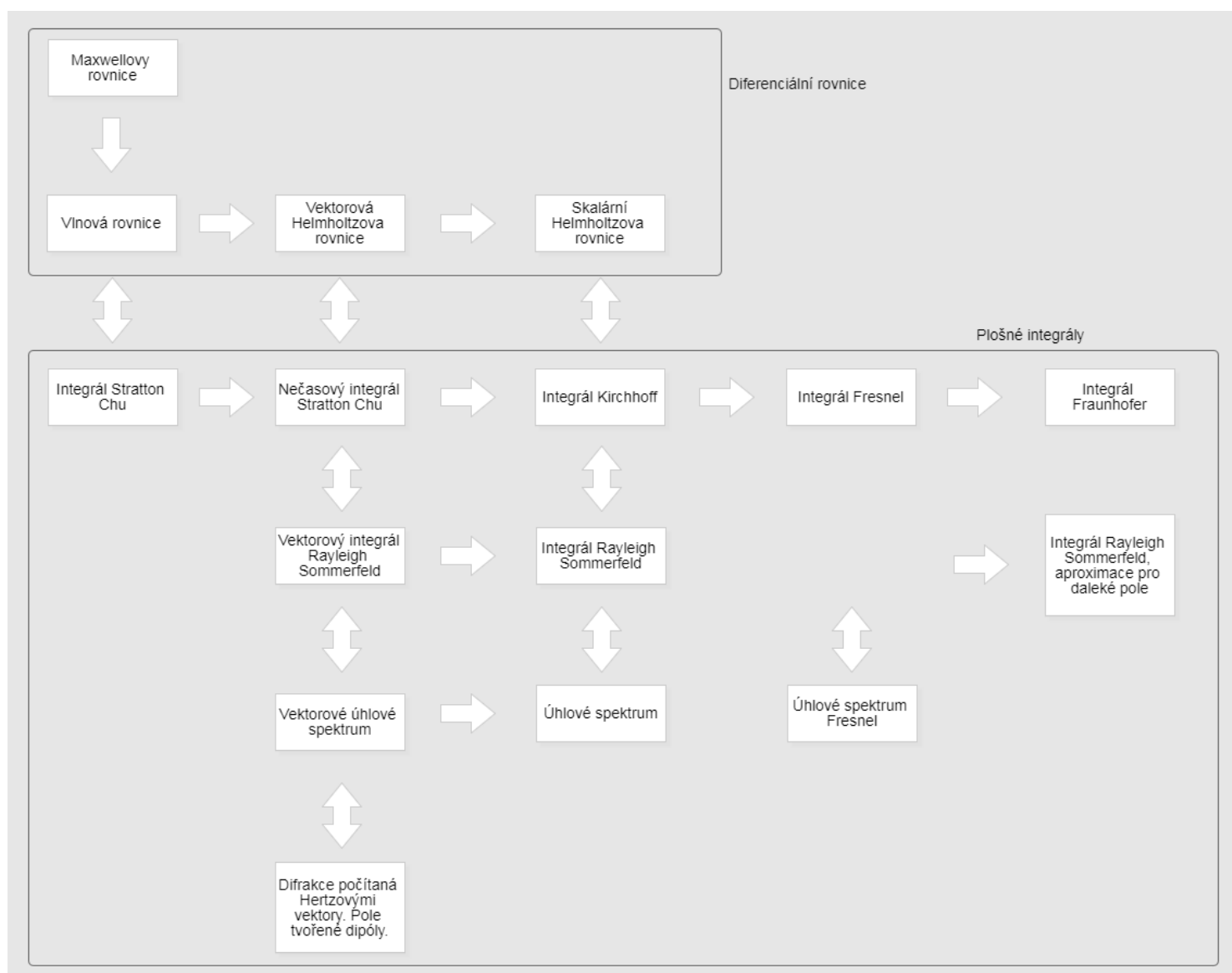
$$U(x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{12}) \right] \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}} ds. \quad (1.2)$$

1.2 Rayleigh-Sommerfeldův difrakční integrál 1

Jedná se o opět skalární difrakční integrál bez paraxiální aproximace [2] a platí stejná podmínka na propagační vzdálenost jako u Kirchhoffova integrálu. Je integrálním vyjádřením skalární Helmholtzovy rovnice. Integrační plochou musí být vždy rovina. Jeho rovnice je

$$U(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) \frac{e^{ikr_{12}}}{r_{12}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{12}) dx_1 dy_1. \quad (1.3)$$

Tento integrál je možné formulovat jako konvoluci a pomocí konvolučního teorému jako propagaci úhlového spektra $A(f_{x1}, f_{y1})$ [2]



Obrázek 1.1: Mapa teorie difrakce. Je zobrazen vývoj aproximací od nejobecnějších Maxwellových rovnic. Šipky s jednou hlavičkou znamenají vztah „odvozeno z“ a šipky s dvěma hlavičkami znamenají vztah „ekvivalentní fyzikální aproximace“.

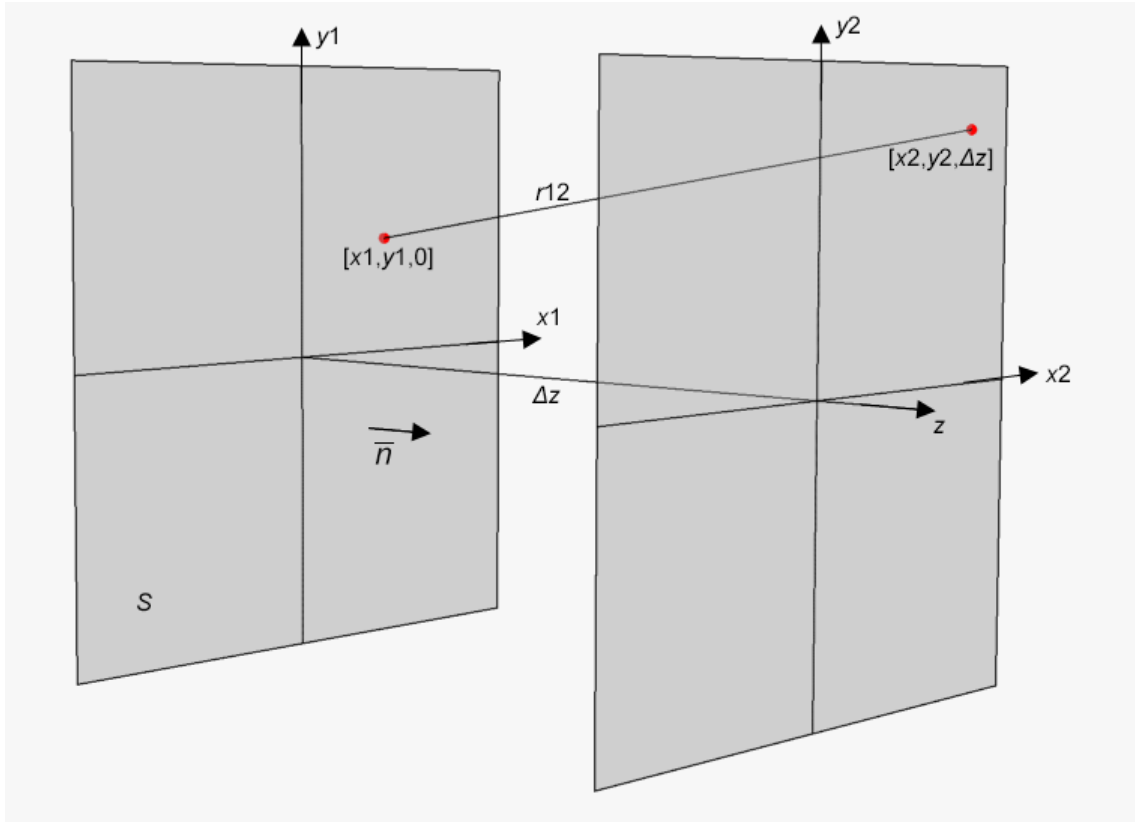
$$A(f_{x1}, f_{y1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-i2\pi(f_{x1}x_1 + f_{y1}y_1)} dx_1 dy_1, \quad (1.4)$$

což je rovnice spojitě Fourierovy transformace. Úhlové spektrum v počáteční rovině je vynásobeno přenosovou *chirp* funkcí šíření volným prostorem v analytickém tvaru

$$H(f_{x1}, f_{y1}, \Delta z) = e^{i2\pi\Delta z \sqrt{\lambda^{-2} - f_{x1}^2 - f_{y1}^2}}. \quad (1.5)$$

Zpětnou spojitou Fourierovou transformací nakonec je spočítáno hledané pole

$$U(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(f_{x1}, f_{y1}) H(f_{x1}, f_{y1}, \Delta z) e^{i2\pi(f_{x1}x_2 + f_{y1}y_2)} df_{x1} df_{y1}. \quad (1.6)$$



Obrázek 1.2: Veličiny popisující geometrii skalární difrakce. Ve zdrojové rovině $z = 0$ s příčnými souřadnicemi x_1 a y_1 je vymezena oblast S , přes kterou se integruje. Optická osa z je rovnoběžná s normálovým vektorem \vec{n} . Cílová rovina difrakčního šíření, která je vzdálená $z = \Delta z$, má příčné souřadnice x_2 a y_2 . r_{12} je vzdálenost mezi bodem $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$.

1.3 Fresnelův difrakční integrál

Propagaci optických vln ve středně dalekém poli lze aproximovat Fresnelovým difrakčním integrálem, který je exaktním řešením paraxiálního Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1. Integrál je platný od propagační vzdálenosti $(\Delta z)^3 > [25(D_1/2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2})^4] / \lambda$ [1], kde D_1 je průměr apertury nebo rozměr signálu a x_2, y_2 jsou souřadnice v cílové rovině. Fresnelův difrakční integrál má tvar [3]

$$U(x_2, y_2) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i\lambda\Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2\Delta z}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} dx_1 dy_1. \quad (1.7)$$

Tento integrál může mít formu přeškálované Fourierovy transformace komplexní amplitudy vynásobené kvadratickou *chirp* funkcí [3]

$$U(x_2, y_2) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i\lambda\Delta z} e^{i\frac{k}{2\Delta z}(x_2^2+y_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2\Delta z}(x_1^2+y_1^2)} e^{-i\frac{k}{\Delta z}(x_2x_1+y_2y_1)} dx_1 dy_1 \quad (1.8)$$

nebo konvoluce [3]

$$U(x_2, y_2) = U(x_1, y_1) \otimes \left[\frac{e^{ik\Delta z}}{i\lambda\Delta z} e^{i\frac{k}{2\Delta z}(x_1^2+y_1^2)} \right], \quad (1.9)$$

kdy při použití konvolučního teorému a numerické Fourierovy transformace impulzové odezvy mluvíme o metodě impulzové odezvy a při použití analytické přenosové funkce o úhlovém spektru Fresnelova integrálu. Tyto metody jsou sice matematicky ekvivalentní, ale chovají se rozdílně při numerickém výpočtu. Přenosová funkce je v tomto případě

$$H(f_{x1}, f_{y1}) = e^{ik\Delta z} e^{-i\pi\lambda\Delta z(f_{x1}^2+f_{y1}^2)}. \quad (1.10)$$

Tabulka 1.1: Omezení geometrických parametrů pro platnost aproximací difrakce.

Fraunhoferova aproximace	Platná vzdálenost: $\Delta z > \frac{2D_1^2}{\lambda}$
Fresnelova aproximace	Platná vzdálenost: $\Delta z^3 > (25(D_1/2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2})^4)/\lambda$
Skalární aproximace	Platná vzdálenost: $\Delta z \gg \lambda$ a navíc $D_1 \gg \lambda$

1.4 Fraunhoferův difrakční integrál

Integrál (1.7) se zjednoduší, pokud je propagační vzdálenost $\Delta z > 2D_1^2/\lambda$ [2]. Rozdělení aproximací podle propagačních vzdáleností je shrnuto v tabulce 1.1. Kvadratický fázový člen je nahrazen plochou fází. Mluví se o dalekém poli, kde je platná Fraunhoferova aproximace [3]

$$U(x_2, y_2) = \frac{e^{ik\Delta z} e^{i\frac{k}{2\Delta z}(x_2^2 + y_2^2)}}{i\lambda\Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{-i\frac{k}{\Delta z}(x_2 x_1 + y_2 y_1)} dx_1 dy_1. \quad (1.11)$$

Jednoduchý výpočet Fraunhoferova difrakčního integrálu se skládá z jediné Fourierovy transformace.

Kapitola 2

Numerická realizace difrakčních úloh a přidružené problémy

Chceme-li zpracovávat signál pomocí výpočetní techniky, musíme pracovat s jeho diskrétní reprezentací - tzn. s konečnou velikostí vzorků signálu, konečným počtem vzorků a konečnou reprezentací hodnot vzorků. Konečná velikost vzorku a konečný počet vzorků představují nejzásadnější problémy při numerických výpočtech a jsou zdrojem významných numerických chyb, které jsou diskutovány níže. Numerika se snaží napodobovat analytické operace a řešit úlohy, u kterých analytické řešení není známo. V rámci této práce je nutné pochopit a pracovat s numerickým integrováním.

Realizace numerické integrace je možná s tzv. přímou integrací, která využívá různá kvadrurní pravidla (lichoběžníkové, Simpsonovo, Gaussovo atd.). Pokud je možné integrální rovnice formulovat ve tvaru Fourierovy transformace (1.4), je možné výpočty urychlit rychlou Fourierovou transformací (FFT). Je to algoritmus počítající diskrétní Fourierovu transformaci (DFT). V teorii výpočetní difrakce se FFT používá pro numerické řešení Fraunhoferova, Fresnelova a Rayleigh-Sommerfeldova integrálu.

Pokud je možné integrální rovnici vyjádřit jako konvoluci, její výpočet lze urychlit pomocí dvou, nebo tří FFT. Diskrétní Fourierova transformace součinu dvou vektorů s čísly je kruhovou (periodickou) konvolucí diskrétních Fourierových transformací individuálních vektorů. Kruhová konvoluce je definována jako konvoluce funkce s periodickou sumací druhé funkce. Převod kruhové konvoluce na lineární lze zdvojnásobením velikosti jednoho vektoru (pokud se jedná o matici, učiní se tak v ose x i y). Na nová místa v matici jsou umístěny nuly. Po provedení konvoluce je potřeba ponechat středovou oblast s původní velikostí [4].

2.1 Diskretizace skalárních difrakčních integrálů

V praxi se nejvíce pracuje s integrály Rayleigh-Sommerfeld 1 (RS1), Fresnel a Fraunhofer. Je uveden jejich diskrétní zápis, který je také použit v příloženém zásuvném modulu OpticalWavesDiffraction pro Wolfram Mathematicu.

2.1.1 Diskretizovaný Rayleigh-Sommerfeldův integrál 1 ve formě úhlového spektra

Do rovnic (1.4) a (1.6) dosadíme substituci

$$\begin{aligned}x_1 &= m\delta x_1, y_1 = n\delta y_1, \\f_{x1} &= u\delta f_{x1}, f_{y1} = v\delta f_{y1}, \\x_2 &= p\delta x_2, y_2 = q\delta y_2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde m, n jsou indexy prvků 2D matice se vstupní komplexní amplitudou, u, v jsou indexy prvků 2D matice se signálem ve spektru a p, q jsou indexy prvků 2D matice s výstupní komplexní amplitudou. $\delta x_1, \delta y_1, \delta f_{x1}, \delta f_{y1}, \delta x_2, \delta y_2$ jsou velikosti vzorků. Obdržíme rovnice

$$\begin{aligned}A(u, v) &= \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} U(m, n) e^{-i2\pi(u\delta f_{x1}m\delta x_1 + v\delta f_{y1}n\delta y_1)}, \\U(p, q) &= \sum_{u=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{v=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} U(u, v) e^{i2\pi\Delta z \sqrt{\lambda^{-2} - u^2\delta f_{x1}^2 - v^2\delta f_{y1}^2}} e^{i2\pi(u\delta f_{x1}p\delta x_2 + v\delta f_{y1}q\delta y_2)}.\end{aligned}$$

2.1.2 Diskretizovaný Fresnelův integrál ve formě jediné Fourierovy transformace

Do rovnice (1.8) dosadíme substituci

$$\begin{aligned}x_1 &= m\delta x_1, y_1 = n\delta y_1, \\x_2 &= p\delta x_2, y_2 = q\delta y_2,\end{aligned}\tag{2.2}$$

kde m, n jsou indexy prvků 2D matice se vstupní komplexní amplitudou a p, q jsou indexy prvků 2D matice s výstupní komplexní amplitudou. $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$ jsou velikosti vzorků. Obdržíme rovnici

$$U(p, q) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i\lambda\Delta z} e^{i\frac{k}{2\Delta z}(p^2\delta x_2^2 + q^2\delta y_2^2)} \times \\ \times \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} U(m, n) e^{i\frac{k}{2\Delta z}(m^2\delta x_1^2 + n^2\delta y_1^2)} e^{-i\frac{k}{\Delta z}(p\delta x_2 m\delta x_1 + q\delta y_2 n\delta y_1)}. \quad (2.3)$$

2.1.3 Diskretizovaný Fraunhoferův integrál

Do rovnice (1.11) dosadíme substituci

$$x_1 = m\delta x_1, y_1 = n\delta y_1, \\ x_2 = p\delta x_2, y_2 = q\delta y_2, \quad (2.4)$$

kde m, n jsou indexy prvků 2D matice se vstupní komplexní amplitudou a p, q jsou indexy prvků 2D matice s výstupní komplexní amplitudou. $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$ jsou velikosti vzorků. Obdržíme rovnici

$$U(p, q) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i\lambda\Delta z} e^{i\frac{k}{2\Delta z}(p^2\delta x_2^2 + q^2\delta y_2^2)} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} U(m, n) e^{-i\frac{k}{\Delta z}(p\delta x_2 m\delta x_1 + q\delta y_2 n\delta y_1)}. \quad (2.5)$$

2.2 Numerické chyby při DFT

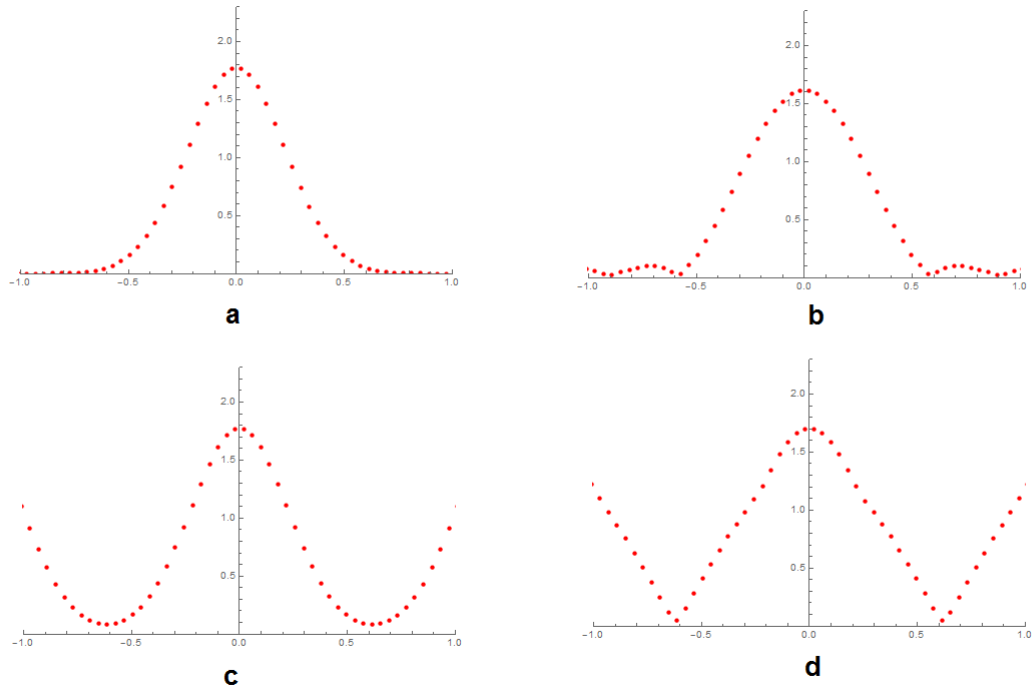
Konečná velikost pixelu neboli vzorku způsobuje periodické kopie originálního spektra při výpočtu DFT. Pokud se tyto kopie překrývají vzniká jev, kterému se říká *aliasing*.

Nekonečně rozlehlé fyzikální pole může být reprezentováno pouze maticí s konečnými rozměry. Dochází ke zkrácení signálu, a tudíž k tzv. prosakování ve spektrální oblasti.

Mezi numerické chyby se dále řadí chyba zaokrouhlení při konečné reprezentaci čísel v počítači. Je formou kvantizační chyby, která vzniká v oboru hodnot signálu.

2.2.1 Aliasing

Aliasing vzniká při diskretizaci neboli vzorkování definičního oboru spojitého signálu a je důsledkem konečné velikosti vzorku. Energie u frekvencí vyšších než vzorkovací frekvence se přelije do frekvencí nižších než vzorkovací frekvence viz obrázky 2.1 a P.1. Proces diskretizace se zapíše jako vynásobení funkce hřebene se spojitým signálem. U obecného



Obrázek 2.1: Chyby vznikající při diskrétní Fourierově transformaci. a) spektrum ve tvaru Gaussovy funkce, b) ořez signálu v prostoru má za následek spektrální prosakování c) aliasing d) aliasing včetně spektrálního prosakování způsobeného ořezem

signálu není jeho spektrum známé. Pomocí lokálních prostorových frekvencí definovaných v [2] jako

$$\vec{f}_{\text{loc}} = \frac{1}{2\pi} \nabla \phi, \quad (2.6)$$

kde ϕ je studovaný signál, je možné dobře odhadnout spektrum „pomalu“ se měnícího signálu a odhadnout vzorkovací krok, který bude *aliasing* eliminovat.

Čím je velikost vzorku větší, tím je rozestup mezi klony originálního spektra menší. *Aliasing* je také možné interpretovat jako konvoluci originálního spektra s funkcí hřebene nebo jako kruhovou konvoluci originálního spektra s delta funkcí.

S *aliasingem* je možné se vypořádat mnoha způsoby. Např. při podezření na *aliasing* v signálu lze navýšit vzorkovací frekvenci a určit rozdíl signálů nebo jejich energií. Pokud se blíží nule, je vzorkování dostatečné [5].

2.2.2 Spektrální prosakování

Vzniku nových frekvencí ve spektru se říká spektrální prosakování (anglicky *spectral leakage*). Technicky vzato sem patří i *aliasing*, ale častěji se jedná o efekt při zkrácení signálu v časové nebo prostorové oblasti pomocí tzv. funkce tvarovacího okna. Běžnými okny jsou obdélníkové, gaussovské, supergaussovské, kosinové, Hann, Lanczos atd. Pokud je zkrácení provedeno např. rektangulární funkcí, spektrum je konvolvováno s funkcí *sinc*. Vhodným tvarem okna může být prosakování pro danou aplikaci minimalizováno.

Analogií prosakování je Gibbsův jev. V tomto případě je zkráceno spektrum a v časové nebo prostorové oblastí je možné pozorovat oscilace, které „zkreslují“ originální signál.

2.2.3 Technika doplňování nulami

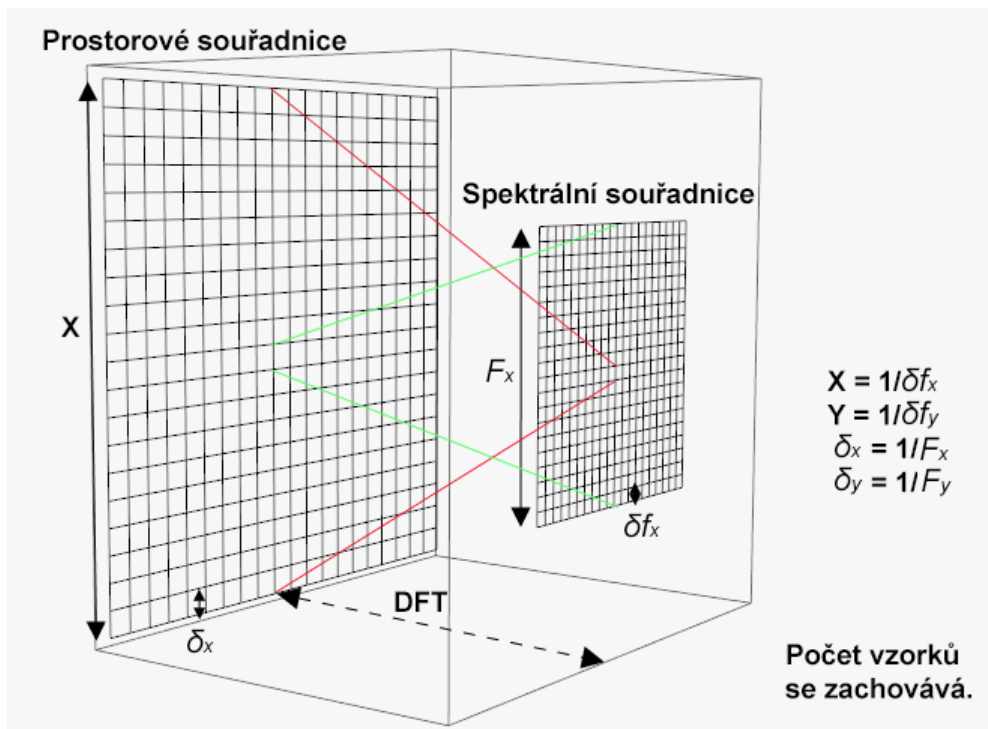
Matici se signálem je možné před DFT obložit nulami (anglicky *zeropadding*). Při diskrétní Fourierově transformaci vyšší počet prvků zpracovávané matice znamená zvětšování rozlišení ve frekvenční oblasti, jelikož platí vztah pro velikost vzorku pro diskrétní spektrum $\delta f_x = \frac{1}{X}$, kde X je fyzický rozměr přímého prostoru viz obrázek 2.2.

U metody úhlového spektra (viz podkapitola 3.9) tato technika potlačuje *aliasing* při propagacích na dlouhé vzdálenosti. Zvětšením výpočetního okna je zabráněno dopadu replikovaného spektra do oblasti zájmu v cílové rovině. Toto je však výpočetně náročné, a proto byly vymyšleny alternativní postupy na potlačení *aliasingu*, např. metoda low-pass filtrovaného úhlového spektra.

Existuje ještě jedna méně běžná technika předzpracování signálu, která vkládá nuly (anglicky *inserting zeros*) mezi hodnoty signálu. Zvětší velikost matice, replikuje spektrum, ale rozlišení ve spektru neovlivní [6].

2.3 Vzorkovací strategie

Různí autoři se opírají o různé vzorkovací strategie při výpočtu skalární difrakce. Tyto strategie jsou založeny na geometrii úlohy, která omezuje maximální přenesenou frekvenci při šíření volným prostorem [3, 4, 7], na součinu šířky spektra s prostorovou šířkou signálu a následné analýze pomocí Wignerovy distribuční funkce [8], na celkové energii pole komplexní amplitudy [5] nebo na Nyquistově kritériu pro *chirp* funkce vyskytující se uvnitř DFT [3, 4, 7, 9]. V této práci je vzorkování postaveno na geometrii, tzn. na velikosti zdrojového



Obrázek 2.2: Vztahy mezi souřadnicemi Fourierovského prostoru a prostoru přímého. X , Y jsou příčné rozměry konečné velikosti výpočetní oblasti. F_x , F_y jsou rozměry spektrálního definičního oboru. Všechny tyto rozměry jsou vztaženy k rozměrům roztečí, které jsou značeny s počátečním symbolem δ viz rovnice napravo.

pole neboli výpočetního okna, propagační vzdálenosti a velikosti oblasti zájmu v cílové rovině, a také na „dobrém samplování“ chirp funkcí.

Kapitola 3

Difrakční algoritmy

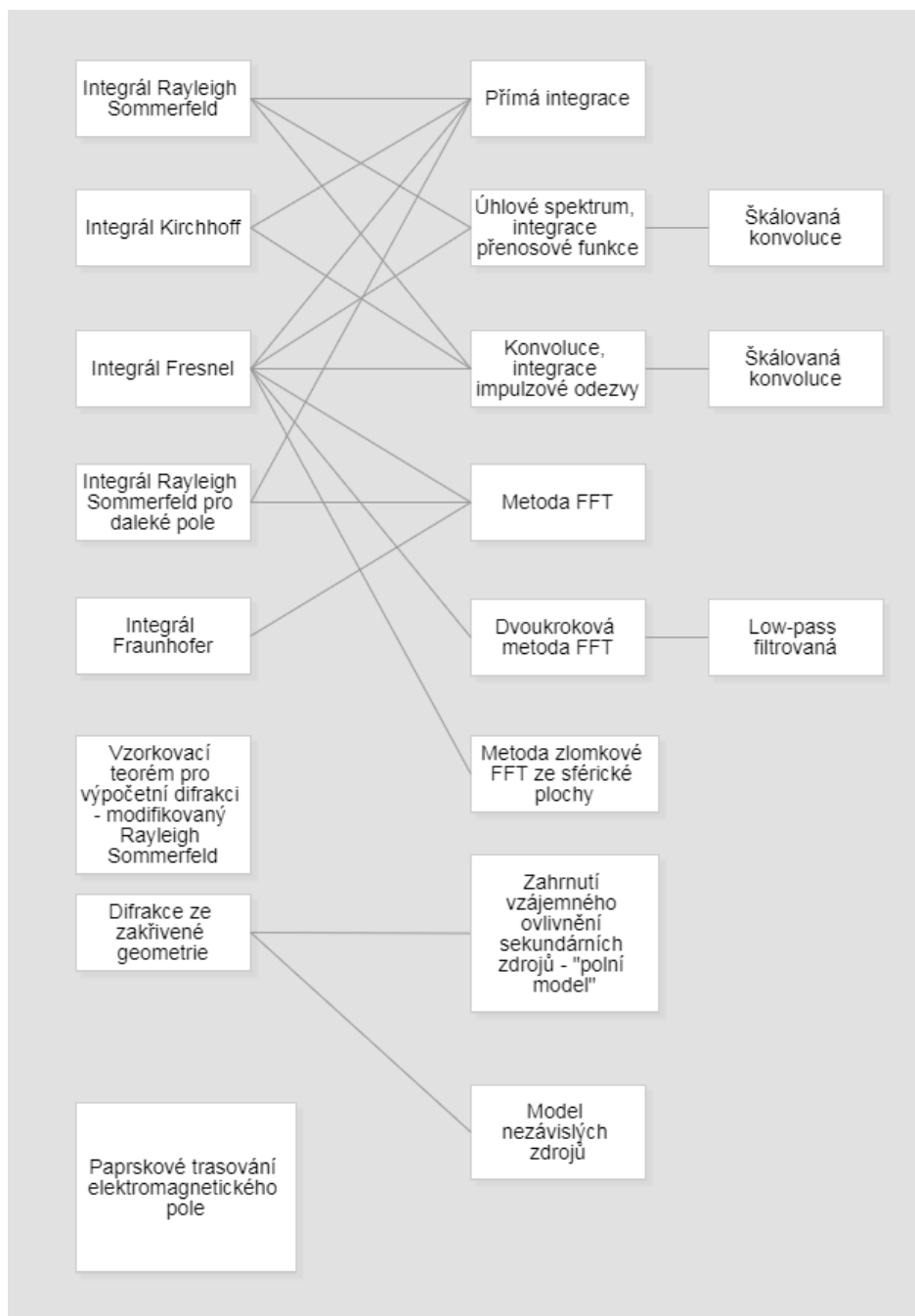
V posledním desetiletí vzniklo mnoho užitečných metod (viz schéma 3.1), které řeší numericky skalární difrakci. Především se objevila rozšíření metody úhlového spektra s četnými aplikacemi hlavně v oboru digitální holografie. Po intenzivní rešerši vzniklo shrnutí ve formě stromu na obrázku 3.2.

Difrakční algoritmy je tedy možné rozdělit do několika kategorií. Podle typu aproximace, počtu propagací, zda je pole šířeno mimo osu nebo na nakloněnou či zakřivenou plochu, zda je možné si zvolit velikost vzorku v cílové rovině atd.

Snahou bylo vybrat metody přesné a pro praxi nejpoužitelnější. Jsou popsány a implementovány **Fraunhoferova metoda** pro daleké pole a **Fresnelova metoda** pro blízké i daleké pole využívající jedinou FFT. Následuje **dvoukroková metoda Fresnelova integrálu**. Velikost vzorku v cílové rovině je přizpůsobována různými propagačními vzdálenostmi. Je vhodná na delší vzdálenosti. Další metodou je **škálované úhlové spektrum Fresnelova integrálu**. Forma konvoluce umožňuje algebraickou manipulací zavést volný parametr, který přímo nastavuje velikost vzorku v cílové rovině. Je vhodná pro kratší vzdálenosti. Tato metoda je dále modifikována a simuluje šíření paraxiálním optickým systémem popsaným **ABCD maticí**. Výčet pokračuje s **úhlovým spektrem RS1** pro extrémně blízké pole, **low-pass filtrovaným úhlovým spektrem RS1**, **low-pass filtrovaným úhlovým spektrem RS1 s volitelnou velikostí i počtem vzorků** a **úhlovým spektrem RS1 šířeného z/do zakřivené geometrie**.

Vyloučen byl konvoluční integrál impulzové odezvy Rayleigh-Sommerfelda i Kirchhoffa, jelikož je platný pro větší vzdálenosti než metoda úhlového spektra RS1 a právě v dalekém poli dochází k low-pass filtrování jádra integrálu, a tudíž k distorzi signálu. Další nevhodnou metodou je kaskádové úhlové spektrum, která se snaží mnoha propagacemi rozšířit platnost úhlového spektra do dalekého pole. Problémem je distorze signálu při mnohonásobném užití tvarovacích oken jako low-pass filtrů.

Pro úplnost je zmíněno, že při výpočtu šíření světla v nehomogenním prostředí jsou běžné



Obrázek 3.1: Shrnutí dostupných metod řešících skalární difrakci. Čáry vyjadřují vztah „způsob řešení“. Navíc je zmíněna metoda využívaná např. v softwaru VirtualLab Fusion, která řeší vektorovou difrakci pomocí geometrického trasování paprsků, které si s sebou nesou informace o polních veličinách.

tzv. metody šíření svazku (anglicky *beam propagation methods*).

Pro zjednodušení zápisu numerických difrakčních metod je zavedena operátorová notace, která klade důraz na použité operace [3]:

$$\text{Škálování: } \mathcal{V}[b, \vec{r}]\{U(\vec{r})\} \equiv bU(b\vec{r}), \quad (3.1)$$

$$\text{Kvadratický fázový faktor: } \mathcal{Q}[c, \vec{r}]\{U(\vec{r})\} \equiv e^{i\frac{k}{2}c|\vec{r}|^2}U(\vec{r}), \quad (3.2)$$

$$\text{FT: } \mathcal{F}[\vec{r}, \vec{f}]\{U(\vec{r})\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r})e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{r}}d\vec{r}, \quad (3.3)$$

$$\text{IFT: } \mathcal{F}^{-1}[\vec{f}, \vec{r}]\{U(\vec{f})\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{f})e^{i2\pi\vec{f}\cdot\vec{r}}d\vec{f}. \quad (3.4)$$

3.1 Metoda Fraunhoferova integrálu

Fraunhoferova difrakce spektrálně omezeného a věrně navzorkovaného pole komplexní amplitudy s prostorovými frekvencemi $\leq f_{x1,\max} = \frac{x_{2,\max}}{\lambda\Delta z}$ a $\leq f_{y1,\max} = \frac{y_{2,\max}}{\lambda\Delta z}$ pomocí rychlé Fourierovy transformace dá v dalekém poli přesný výsledek. $x_{2,\max}$ a $y_{2,\max}$ ohraničují oblast zájmu v cílové rovině [3]. V operátorové notaci se Fraunhoferův difrakční integrál (1.11) zapíše jako

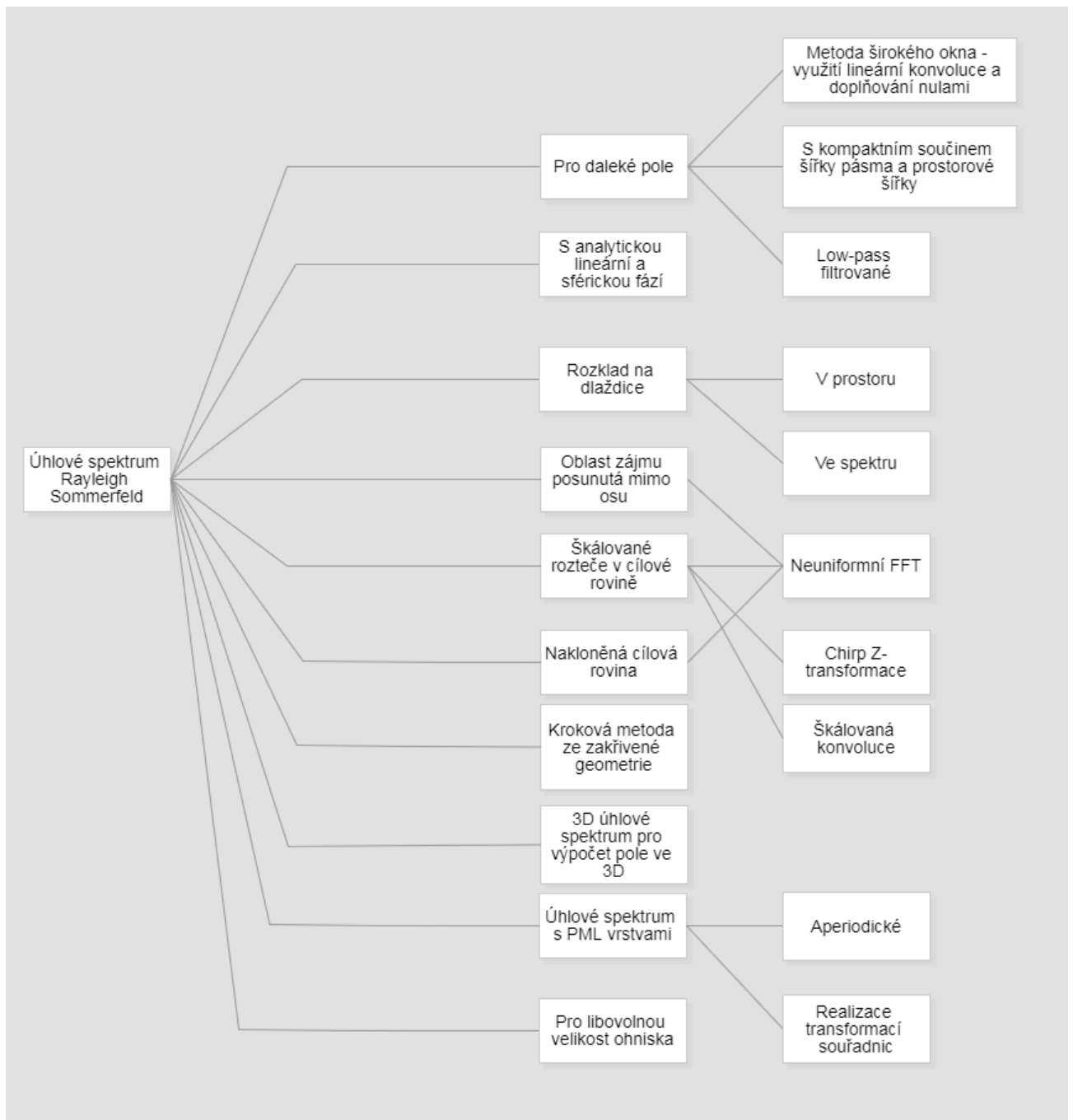
$$U(\vec{r}_2) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{\Delta z}, \vec{r}_2\right] \mathcal{V}\left[\frac{1}{\lambda\Delta z}, \vec{r}_2\right] \mathcal{F}[\vec{r}_1, \vec{f}_1] \mathcal{Q}\left[\frac{1}{\Delta z}, \vec{r}_1\right] \{U(\vec{r}_1)\}. \quad (3.5)$$

Rozteč v pozorované rovině je fixně dána

$$\delta_2 = \frac{\lambda\Delta z}{N\delta_1}, \quad (3.6)$$

jelikož škálování DFT svazuje souřadnice ve spektru podle $\vec{f}_1 = \frac{\vec{r}_2}{\lambda\Delta z}$. Rozteče v obou rovinách tedy mají reciprokový vztah.

+	Výpočet pomocí jediné FFT. Není nutné vzorkovat fázovou <i>chirp</i> funkci.
-	Pouze pro daleké pole. Fixní velikost vzorku v cílové rovině.



Obrázek 3.2: Dostupné metody úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1 v odborných člancích. Obdélníky úplně vpravo popisují způsob řešení nebo vlastnost metody.

3.2 Jednokroková metoda Fresnelova integrálu

Jednokroková propagace vychází z rovnice (1.8). Spočítá se pomocí jediné Fourierovy transformace zdrojového pole vynásobeného kvadratickou *chirp* funkcí. Rozteč v cílové ro-

vině je opět rovna (3.6).

V operátorové notaci je jednokroková propagace vyjádřena jako [3]

$$U(\vec{r}_2) = \frac{e^{ik\Delta z}}{i} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z}, \vec{r}_2 \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda \Delta z}, \vec{r}_2 \right] \mathcal{F} \left[\vec{r}_1, \vec{f}_1 \right] \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z}, \vec{r}_1 \right] \{U(\vec{r}_1)\}. \quad (3.7)$$

+	Výpočet pomocí jediné FFT.
-	Není vhodná pro extrémně blízké pole. Fixní velikost vzorku v cílové rovině.

Tabulka 3.1: *Shrnutí veličin dvoukrokové propagace. Převzato z [3] a upraveno.*

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$	Prostorové souřadnice ve zdrojové rovině umístěné v z_1 na optické ose.
$\vec{r}_{1a} = (x_{1a}, y_{1a})$	Prostorové souřadnice v mezilehlé rovině umístěné v z_{1a} na optické ose.
$\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$	Prostorové souřadnice v cílové rovině umístěné v z_2 na optické ose.
$\vec{f}_i = (f_{xi}, f_{yi})$	Prostorové frekvence v rovině umístěné v bodě z_i na optické ose.
$\Delta z = z_2 - z_1$	Vzdálenost mezi zdrojovou a cílovou rovinou.
$\Delta z_1 = z_{1a} - z_1$	Vzdálenost mezi zdrojovou a mezilehlou rovinou.
$\Delta z_2 = z_2 - z_{1a}$	Vzdálenost mezi mezilehlou a cílovou rovinou.
δ_1	Rozteč vzorkovací mřížky ve zdrojové rovině.
$\delta_{1a} = \frac{\lambda \Delta z_1 }{N \delta_1}$	Rozteč vzorkovací mřížky v mezilehlé rovině.
$\delta_2 = \frac{\lambda \Delta z_2 }{N \delta_{1a}}$	Rozteč vzorkovací mřížky v cílové rovině.
δ_{fi}	Rozteč vzorkovací mřížky prostorových frekvencí v rovině umístěné v bodě z_i na optické ose.
$m = \delta_2 / \delta_1$	Škálovací parametr.

3.3 Dvukroková metoda Fresnelova integrálu

V literatuře [3] je zaveden škálovací parametr $m = \delta_2/\delta_1$, který upravuje rozteč mřížky v cílové rovině bez nutnosti většího počtu vzorků N . Pole se šíří ze zdrojové roviny umístěné v z_1 přes mezilehlou rovinu umístěnou v z_{1a} do pozorované roviny v z_2 . Vzdálenost z_{1a} určí m . Parametry geometrického uspořádání jsou specifikovány v tabulce 3.1.

Dvukroková propagace je zapsána jako

$$U(\vec{r}_2) = \frac{e^{ik\Delta z_2}}{i} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z_2}, \vec{r}_2 \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda \Delta z_2}, \vec{r}_2 \right] \mathcal{F} \left[\vec{r}_{1a}, \vec{f}_{1a} \right] \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z_2}, \vec{r}_{1a} \right] \times \\ \times \frac{e^{ik\Delta z_1}}{i} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z_1}, \vec{r}_{1a} \right] \mathcal{V} \left[\frac{1}{\lambda \Delta z_1}, \vec{r}_{1a} \right] \mathcal{F} \left[\vec{r}_1, \vec{f}_1 \right] \mathcal{Q} \left[\frac{1}{\Delta z_1}, \vec{r}_1 \right] \{U(\vec{r}_1)\}. \quad (3.8)$$

Dvukrokovou propagaci je možné low-pass filtrovat. Jednou z možností je použít rektangulární okno se šířkou [10]

$$2f_{1,\max} = 2N\delta_1 \left| \frac{\Delta z_2}{\Delta z} \right|. \quad (3.9)$$

Tímto oknem se vynásobí druhý řádek rovnice (3.8).

Úpravy δ_2 vedou k určení škálovacího parametru

$$\delta_2 = \frac{\lambda |\Delta z_2|}{N\delta_{1a}} = \frac{\lambda |\Delta z_2|}{N \left(\frac{\lambda |\Delta z_1|}{N\delta_1} \right)} = \left| \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} \right| \delta_1 = |m| \delta_1. \quad (3.10)$$

Vzdálenosti Δz_1 a Δz_2 mohou být kladné i záporné a musí splňovat podmínku platné vzdálenosti pro Fresnelovu aproximaci, a tudíž m nelze libovolně zvyšovat viz tabulka 3.2.

+	Relativně rychlý výpočet pomocí dvou FFT. Volitelná velikost vzorku v cílové rovině.
–	Vhodná pouze pro delší propagační vzdálenosti. Komplikovaný systém podmínek pro „dobré“ navzorkování.

Tabulka 3.2: Příklady hodnot škálovacího parametru v dvoukrokovém výpočtu Fresnelova integrálu. Převzato z [3] a upraveno.

m	$\Delta z_1^+/\Delta z$	$\Delta z_2^+/\Delta z$	$\Delta z_1^-/\Delta z$	$\Delta z_2^-/\Delta z$
	$\frac{1}{1+m}$	$\frac{m}{1+m}$	$\frac{1}{1-m}$	$\frac{-m}{1-m}$
10	1/11	10/11	-1/9	10/9
2	1/3	2/3	-1	2
1	1/2	1/2	$\pm\infty$	$\mp\infty$
1/2	2/3	1/3	2	-1

3.4 Škálované úhlové spektrum Fresnelova integrálu

Do rovnice (1.7) se zavede škálovací parametr m ovlivňující poměr roztečí analogicky (3.10), který může být kladný, resp. záporný. To je realizováno rozšířením rozdílů polohových vektorů umocněného na druhou [3] jako

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 &= r_2^2 - 2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 + r_1^2 = \\
 &= \left(r_2^2 + \frac{r_2^2}{\pm m} - \frac{r_2^2}{\pm m} \right) - 2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 + (r_1^2 \pm mr_1^2 \mp mr_1^2) = \\
 &= \frac{r_2^2}{\pm m} + \left(1 - \frac{1}{\pm m} \right) r_2^2 - 2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 \pm mr_1^2 + (1 \mp m)r_1^2 = \\
 &= \pm m \left[\left(\frac{r_2}{\pm m} \right)^2 - 2 \left(\frac{\vec{r}_2}{\pm m} \right) \cdot \vec{r}_1 + r_1^2 \right] + \left(1 - \frac{1}{\pm m} \right) r_2^2 + (1 \mp m)r_1^2 = \\
 &= \pm m \left| \frac{\vec{r}_2}{\pm m} - \vec{r}_1 \right|^2 + \left(1 - \frac{1}{\pm m} \right) r_2^2 + (1 \mp m)r_1^2. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Dále pro přehlednost dále pracujeme s m se znaménkem plus. Do kteréhokoliv následujícího výsledku, který se týká škálovaného úhlového spektra Fresnelova integrálu, lze substitovat $m := -m$.

Po dosažení výrazu (3.11) do rovnice (1.7) je obdržena forma konvoluce

$$U(\vec{r}_2) = \frac{e^{ik\Delta z} e^{-i\frac{k}{2\Delta z} \left(\frac{1-m}{m}\right) r_2^2}}{i\lambda\Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r}_1) e^{i\frac{k}{2\Delta z} (1-m)r_1^2} e^{i\frac{km}{2\Delta z} \left| \frac{\vec{r}_2}{m} - \vec{r}_1 \right|^2} d\vec{r}_1. \tag{3.12}$$

Po úpravách [3] vychází rovnice Fresnelova škálovaného úhlového spektra

$$U(\vec{r}_2) = e^{-i\frac{k}{2\Delta z}(\frac{1-m}{m})r_2^2} \mathcal{F} \left[\vec{f}_1, \frac{\vec{r}_2}{m} \right] e^{-i\pi\lambda \frac{\Delta z}{m} f_1^2} \times \\ \times \mathcal{F}^{-1} \left[\vec{r}_1, \vec{f}_1 \right] \left\{ \frac{1}{m} U(\vec{r}_1) e^{i\frac{k}{2\Delta z}(\frac{1-m}{m})r_1^2} \right\}. \quad (3.13)$$

Tato rovnice je formulována v operátorové notaci jako

$$U(\vec{r}_2) = \mathcal{Q} \left[\frac{m-1}{m\Delta z}, \vec{r}_2 \right] \mathcal{F}^{-1} \left[\vec{f}_1, \frac{\vec{r}_2}{m} \right] \mathcal{Q} \left[-\frac{4\pi^2\Delta z}{mk^2}, \vec{f}_1 \right] \times \\ \times \mathcal{F} \left[\vec{r}_1, \vec{f}_1 \right] \mathcal{Q} \left[\frac{1-m}{\Delta z}, \vec{r}_1 \right] \left\{ \frac{1}{m} U(\vec{r}_1) \right\}. \quad (3.14)$$

Pro rozteče kvůli vlastnostem DFT platí

$$\delta_2 = \frac{m}{N\delta_{f1}} = \frac{m}{N\left(\frac{1}{N\delta_1}\right)} = m\delta_1. \quad (3.15)$$

+	Relativně rychlý výpočet pomocí dvou FFT. Volitelná velikost vzorku v cílové rovině.
-	Není vhodná pro dlouhé propagační vzdálenosti. Komplikovaný systém podmínek pro „dobré“ navzorkování.

3.5 Požadavky na vzorkování při výpočetní difrakci v para- raxiální aproximaci

3.5.1 Požadavky vycházející z difrakční geometrie

Vzorkování komplexní amplitudy musí splňovat Nyquistův-Shannonův vzorkovací teo-
rém

$$\delta_1 \leq \frac{1}{2f_{1,\max}}, \quad (3.16)$$

kde $f_{1,\max}$ je nejvyšší prostorová frekvence obsažená v signálu. Prostorové frekvence se zobrazují na kosiny úhlů odklonu $\alpha = f_1\lambda$ [2] od optické osy rovinných vln, které rozkládají optický signál. Z geometrie se stanoví maximální odklon rovinných vln, které dopadají do

oblasti zájmu v cílové rovině D_2 a vytvářejí výstupní signál. Propagační geometrie tedy z fyzikální podstaty určuje velikost maximální prostorové frekvence zdrojového pole, které se ještě projeví v cílové rovině a tím udává i podmínky na minimální počet vzorků a velikosti roztečí ve zdrojové i cílové rovině [3].

Huygens-Fresnelův princip umožňuje zdrojové pole matematicky popsat jako pole sekundárních bodových zdrojů. Lze si představit, že paprsky vycházející z každého bodového zdroje osvětlují celou oblast zájmu v pozorované rovině. Maximální úhel odpovídá úhlu rozbíhání paprsků bodových zdrojů. Kosinus tohoto úhlu je označen α_{\max} . Z této úvahy [3] lze nalézt vztah platný pro paraxiální oblasti

$$\alpha_{\max} = \frac{D_1 \delta_2 / \delta_1 + D_2}{2\Delta z}. \quad (3.17)$$

S pomocí rovnice, která je obdobou (3.16)

$$\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{2\delta_1}, \quad (3.18)$$

lze nalézt podmínku pro rozteč v pozorované rovině

$$\delta_2 \leq -\frac{D_2}{D_1} \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1}. \quad (3.19)$$

Další podmínkou je rozměr mřížky $D_{\text{mřížka}}$ v pozorované rovině. *Aliasing* nesmí zasahovat do oblasti zájmu. Bude-li mít mřížka menší rozměry, než osvětlená oblast $D_{\text{osvět}}$ (obrázek 3.3), energie na okrajích osvětlené oblasti se přeliže na opačné strany mřížky viz obrázek P.1(d) vlevo i vpravo. Platí [3]

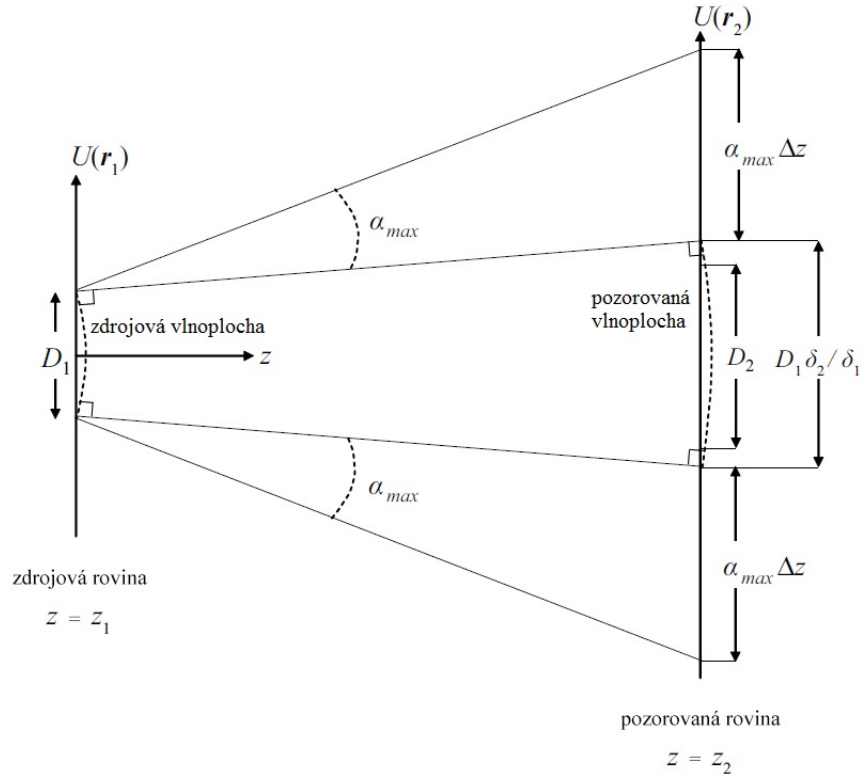
$$D_{\text{mřížka}} \geq \frac{D_{\text{osvět}} + D_2}{2} = \frac{D_1 \delta_2 / \delta_1 + \lambda \Delta z / \delta_1 + D_2}{2}. \quad (3.20)$$

Celkový počet vzorků (v pozorované rovině) musí tedy být [3]

$$N = \frac{D_{\text{mřížka}}}{\delta_2} \geq \frac{D_1}{2\delta_1} + \frac{D_2}{2\delta_2} + \frac{\lambda \Delta z}{2\delta_1 \delta_2}. \quad (3.21)$$

3.5.2 Požadavky na vzorkování kvadratické chirp funkce

Vedle splnění geometrických podmínek musí být zamezeno *aliasingu* kvadratického fázového faktoru (kvadratické *chirp* funkce) uvnitř DFT.



Obrázek 3.3: Osvětlená oblast cílové roviny $D_{osvět}$, která je ovlivněna maximální úhlovou složkou. Převzato z [3] a upraveno.

3.5.3 Jednokroková metoda Fresnelova integrálu

Při jednokrokové metodě je rozteč δ_2 v cílové rovině fixní (3.6). Podmínka pro počet vzorků se získá její substitucí do rovnice (3.19)

$$N \geq \frac{D_1 \lambda \Delta z}{\delta_1 (\lambda \Delta z - D_2 \delta_1)}. \quad (3.22)$$

Dále se δ_2 substituuje do rovnice (3.21). Výsledkem je však stejná podmínka jako (3.22).

Kvadratický fázový faktor uvnitř Fresnelova integrálu má maximální prostorovou frekvenci λ^{-1} . Snahou tedy není tento faktor „dobře“ nasamplovat, ale postarat se o to, aby všechny frekvence přítomné na mřížce zdrojové roviny byly reprezentovány správně. Je odvozen přibližný návod pro dostatečné vzorkování, kdy je zdroj modelován jako apodizovaný svazek s průměrem D_1 a parabolickou vlnoplochou s poloměrem R . Tento poloměr se dá určit fitem na astigmatický paraboloid. Tento zdroj se dosadí do Fresnelova integrálu a hledají se maximální lokální prostorové frekvence [3].

Po úpravách dostáváme přibližné podmínky

$$\Delta z \geq \frac{D_1 \delta_1 R}{\lambda R - D_1 \delta_1} \quad \text{pro konečné } R, \quad (3.23)$$

$$\Delta z \geq \frac{D_1 \delta_1}{\lambda} \quad \text{pro nekonečné } R. \quad (3.24)$$

3.5.4 Dvoukroková metoda Fresnelova integrálu

Pro dvoukrokovou propagaci využijeme podmínku pro rozteč (3.19) a počet vzorků (3.21). V literatuře [3] není vyjasněno, zda tyto podmínky aplikovat jednotlivě na dílčí propagace, nebo na dvoukrokovou propagaci jako celek. V package je implementován druhý způsob. Dále se využijí podmínky (3.23) nebo (3.24) pro jednotlivé propagační vzdálenosti.

3.5.5 Škálované úhlové spektrum Fresnelova integrálu

Rozteče δ_1 , δ_2 mohou být zvoleny nezávisle, takže rovnice (3.19) a (3.21) se pro úhlové spektrum nezjednoduší. U metody úhlové spektra Fresnelova integrálu jsou navíc dva kvadratické faktory, u nichž je potřeba hledat maximální lokální prostorové frekvence. Pro odvození podmínek se použije stejný model jako u jednokrokové propagace.

Pro přesnou propagaci úhlového spektra [3] se musí splnit čtyři nerovnosti

1. $\delta_2 \leq -\frac{D_2}{D_1} \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1},$
2. $N \geq \frac{D_1}{2\delta_1} + \frac{D_2}{2\delta_2} + \frac{\lambda \Delta z}{2\delta_1 \delta_2},$
3. $\left(1 + \frac{\Delta z}{R}\right) \delta_1 - \frac{\lambda \Delta z}{D_1} \leq \delta_2 \leq \left(1 + \frac{\Delta z}{R}\right) \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1},$
4. $N \geq \frac{\lambda \Delta z}{\delta_1 \delta_2}.$

(3.25)

Řešení čtyř nerovnic je komplikované. V tomto případě lze nalézt geometrické řešení v definičním oboru (δ_1, δ_2) . Do jednoho grafu lze zobrazit nerovnice 1, 2, 3 a do druhého nerovnice 1, 3 a 4.

Je-li geometrický svazek obsažen uvnitř oblasti o rozměru D_2 , což je matematicky vyjádřeno jako

$$\left|1 + \frac{\Delta z}{R}\right| < \frac{D_2}{D_1}, \quad (3.26)$$

může se 3. nerovnice z (3.25) vypustit.

Vzorkování kvadratických fázových faktorů ve výpočetní optice představuje náročný úkol, který musí být pečlivě řešen. Tato podkapitola slouží pouze jako vodítko převzaté z literatury [3]. Výsledky by měly být nejlépe porovnány s analytickým řešením s podobným chováním. Všechny zmíněné podmínky jsou shrnuty v tabulce 3.3.

Tabulka 3.3: *Souhrn podmínek pro parametry metod výpočtů paraxiálních integrálů.*

Fraunhoferův difrakční integrál (1×FFT)	Omezení geometrické: $N \geq \frac{D_1 \lambda \Delta z}{\delta_1 (\lambda \Delta z - D_2 \delta_1)}$ Rozměr oblasti zájmu: $D_2 \leq D_2, \text{mřížka} = \frac{\lambda \Delta z}{\delta_1}$
Jednokroková metoda Fresnelova difrakčního integrálu (1×FFT)	Omezení geometrické: $N \geq \frac{D_1 \lambda \Delta z}{\delta_1 (\lambda \Delta z - D_2 \delta_1)}$ Omezení kvadratického fázového faktoru: $\Delta z \geq \frac{D_1 \delta_1 R}{\lambda R - D_1 \delta_1}$ pro konečnou křivost R $\Delta z \geq \frac{D_1 \delta_1}{\lambda}$ pro nekonečnou křivost R Rozměr oblasti zájmu: $D_2 \leq D_2, \text{mřížka} = \frac{\lambda \Delta z}{\delta_1}$
Dvoukroková metoda Fresnelova difrakčního integrálu (2×FFT)	Platné vzdálenosti šíření Δz , Δz_1 a Δz_2 v rámci Fresnelovy aproximace. Omezení geometrické: $\delta_2 \leq -\frac{D_2}{D_1} \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1}$, $N \geq \frac{D_1}{2\delta_1} + \frac{D_2}{2\delta_2} + \frac{\lambda \Delta z}{2\delta_1 \delta_2}$ Omezení kvadratických fázových faktorů jako u jednokrokové metody pro Δz_1 a Δz_2 Rozměr oblasti zájmu: $D_2 \leq D_2, \text{mřížka} = \frac{\lambda \Delta z}{\delta_{1a}}$
Škálované úhlové spektrum Fresnelova difrakčního integrálu (1×FFT a 1×IFFT)	Omezení geometrické: $\delta_2 \leq -\frac{D_2}{D_1} \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1}$, $N \geq \frac{D_1}{2\delta_1} + \frac{D_2}{2\delta_2} + \frac{\lambda \Delta z}{2\delta_1 \delta_2}$ Omezení kvadratických fázových faktorů: $(1 + \frac{\Delta z}{R}) \delta_1 - \frac{\lambda \Delta z}{D_1} \leq \delta_2 \leq (1 + \frac{\Delta z}{R}) \delta_1 + \frac{\lambda \Delta z}{D_1}$, $N \geq \frac{\lambda \Delta z}{\delta_1 \delta_2}$ Rozměr oblasti zájmu: $D_2 \leq D_2, \text{mřížka} = N \delta_2$

3.6 Metoda úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1

Rovnice propagace úhlového spektra volným prostorem (1.6), která je reformulací Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1, je zde vyjádřena v operátorové notaci jako

$$U(\vec{r}_2) = \mathcal{F}^{-1} \left[\vec{f}_1, \vec{r}_2 \right] e^{i2\pi\Delta z \sqrt{\lambda^{-2} - f_{x1}^2 - f_{y1}^2}} \mathcal{F} \left[\vec{r}_1, \vec{f}_1 \right] \{U(\vec{r}_1)\}, \quad (3.27)$$

kde komplexní exponenciála představuje funkci přenosu volným prostorem. Metoda je vhodná pro extrémně blízké až blízké pole. Pro simulaci dalekého pole se musí uplatnit dodatečný *zeropadding* nebo spektrálně omezit přenosovou funkci low-pass filtrem. V každém případě je nutný *zeropadding* o poloviční velikosti vstupního pole na všechny strany, který zajistí převedení kruhové konvoluce na lineární. Potom musí následovat ořezání dat na původní velikost.

+ Řešení skalární difrakce bez aproximace. Vhodná pro extrémně blízké pole.
– Není vhodná pro dlouhé propagační vzdálenosti. Fixní velikost vzorku v cílové rovině. Je stejná jako ve zdrojové rovině.

3.7 Low-pass filtrované úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1

Kvůli přenosové funkci z (3.27) vzniká ve výstupním signálu *aliasing*, pokud je propagační vzdálenost Δz větší než desetinásobek rozměru signálu [4, 7]. Tento problém je řešen low-pass filtrováním rektangulárním oknem

$$H' = e^{i2\pi\Delta z\sqrt{\lambda^{-2}-f_{x1}^2-f_{y1}^2}} \cdot \text{rect}\left(\frac{f_{x1}}{2f_{x1,\text{limit}}}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f_{y1}}{2f_{y1,\text{limit}}}\right), \quad (3.28)$$

s mezními frekvencemi

$$f_{x1,\text{limit}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{(2\delta f_{x1}\Delta z)^2 + 1}},$$

$$f_{y1,\text{limit}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{(2\delta f_{y1}\Delta z)^2 + 1}}. \quad (3.29)$$

Tuto metodu lze vylepšit zavedením škálovacího parametru, který umožní zvolit velikost vzorku v cílové rovině [7]. Metoda využívá jedné FFT pro výpočet úhlového spektra ve zdrojové rovině a tří FFT pro výpočet konvoluce. Výstupní matice díky konvoluci může mít volitelný počet vzorků než matice zdrojového pole.

+	Řešení skalární difrakce bez aproximace. Vhodná pro extrémně blízké i blízké pole. Velikost vzorku v cílové rovině může být volitelná za cenu dalších dvou FFT.
-	Není vhodná pro dlouhé propagační vzdálenosti.

3.8 Úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1 šířeného z/do zakřivené geometrie

Difrakci ze zakřivené geometrie [11] definované analytickou funkcí je možné realizovat pomocí úpravy přenosové funkce

$$H'' = e^{i2\pi(\Delta z - g(m\Delta x, n\Delta y))\sqrt{\lambda^{-2}-f_{x1}^2-f_{y1}^2}}, \quad (3.30)$$

kde Δx , resp. Δy je uniformní transverzální rozměr jedné podoblasti zakřivené geometrie definované funkcí $g(x, y)$ ve směru x , resp. y a m , resp. n je číslo podoblasti. Dalším krokem je vybrat část matice zdrojové komplexní amplitudy odpovídající každé podoblasti zakřivené geometrie pomocí tvarovacího okna. Autoři používají gaussovské okno

$$w = e^{-\pi\left(\frac{x-m\Delta x}{\Delta x}\right)^2} \cdot e^{-\pi\left(\frac{y-n\Delta y}{\Delta y}\right)^2}. \quad (3.31)$$

Potom proběhne násobení okna s fázovým faktorem, který zesiluje efekt lokálního zakřivení geometrie a zlepšuje přesnost výsledku při menším počtu podoblastí

$$g_p = e^{ik(g(m\Delta x, n\Delta y) - g(x, y))}. \quad (3.32)$$

Všechny podoblasti se nakonec sečtou a přispějí do výsledného optického pole v cílové rovině. Úlohu lze invertovat a šířit z roviny na zakřivenou plochu.

+	Řešení skalární difrakce bez aproximace z/do zakřivené geometrie. Vhodná pro extrémně blízké pole.
–	Není vhodná pro dlouhé propagační vzdálenosti. Výpočetně náročná.

3.9 Vzorkování úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1

Podkapitola 3.5 se zabývala požadavky na vzorkování pro difrakci v paraxiální aproximaci. Zde budou ve stručnosti zmíněny požadavky na vzorkování úhlového spektra Rayleigh-Sommerfeldova integrálu a logika jejich odvození. Pro jednoduchost jsou úvahy provedeny v 1D. Zobecnění do 2D je přímočaré.

Simulaci základního úhlového spektra bez *aliasingu* zajistí dobře navzorkovaný součin signálu s přenosovou funkcí uvnitř DFT [9]. Součin dvou dobře navzorkovaných funkcí nemusí být dobře navzorkovaný. Maximální frekvence součinu je součtem maximálních frekvencí jednotlivých členů součinu. Z této úvahy pomocí konceptu lokálních prostorových frekvencí vznikly podmínky pro počet vzorků N_0 signálu (bez *zeropaddingu*), velikost

vzorku δ_{x1} a podíl $\mu_0 = N/N_0$, kde N je celkový počet prvků výpočetního okna (tzn. vzorky signálu plus *zeropadding*)

$$\frac{N_0 \delta_{x1}}{2} + \left| \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df_{x1}} \left[2\pi \Delta z \sqrt{\lambda^{-2} - f_{x1}^2} \right]_{\max} \right| \leq \frac{1}{2\delta_{x1}}, \quad (3.33)$$

kde $f_{x1,\max} = 1/(2\delta_{x1})$. Odtud vychází

$$\Delta z \leq \frac{N_0 \delta_{x1}}{2} (\mu_0 - 1) \sqrt{\frac{4\delta_{x1}^2}{\lambda^2} - 1}. \quad (3.34)$$

Z této nerovnice vyplývají, že musí být splněny i následující dílčí nerovnice

$$\begin{aligned} \mu_0 &> 1, \\ \delta_{x1} &> \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nyní je užitečné porovnat podmínky pro samplování kvadratického fázového faktoru Fresnelovy jedнокrokové metody a přenosové funkce úhlového spektra RS1. Podmínka (3.34) vyjadřuje, že úhlové spektrum je vhodné pro kratší vzdálenosti, i když lze platnou propagační vzdálenost Δz při fixní velikosti vzorku zdrojového pole zvětšovat zvětšováním μ_0 . Z podmínek (3.23) a (3.24) vyplývá, že kvadratický fázový faktor omezuje Fresnelovu jedнокrokovou metodu pouze na delší vzdálenosti. Zmenšování vzorku by však mohlo rozšířit oblast platnosti.

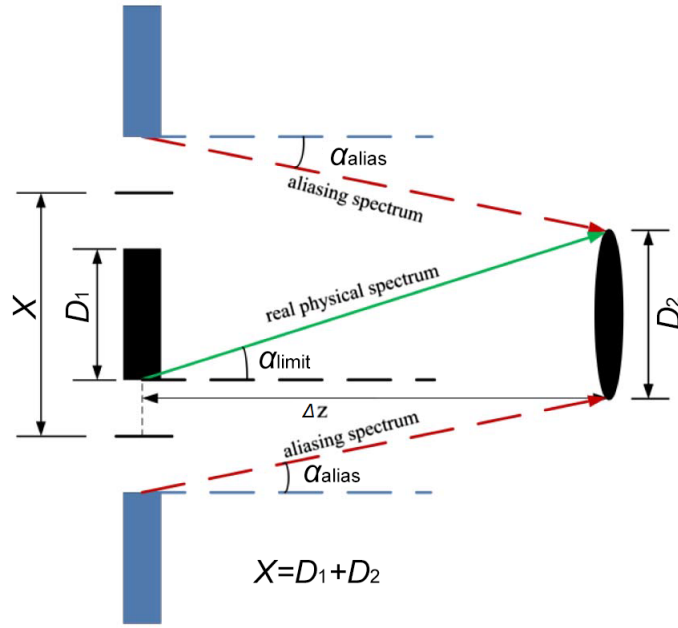
3.9.1 Low-pass filtrované úhlové spektrum Rayleigh-Sommerfeldova integrálu 1

Důležitou podmínkou je minimální velikost výpočetního okna. Aby bylo zabráněno *aliasingu* šířícího se z replikovaných oken (obrázek 3.4) musí platit

$$X = D_1 + D_2, \quad (3.36)$$

kde se rozměr X výpočetního okna získá *zeropaddingem*.

Aby se navíc zabránilo spektrálnímu prosakování kvůli konečné velikosti signálu, je (3.36) upravena jako



Obrázek 3.4: Aliasing šířící se z replik výpočetního okna. Převzato z [7] a upraveno.

$$X = \max(D_1 + D_2, h \cdot D_1), \quad (3.37)$$

kde $h = 2$ nebo 3 [7].

Oblast zájmu D_2 v cílové rovině je konečná a díky tomu je potřeba k přesné simulaci pouze část z celkového spektra zdrojového signálu, a je tedy možné použít low-pass filtr na přenosovou funkci. Maximální frekvence, která ještě ovlivňuje pole v oblasti zájmu D_2 (mezní frekvence při low-pass filtrování), se určí z geometrie (obrázek 3.4)

$$f_{x1, \text{limit}} = \frac{\sin(\alpha_{\text{limit}})}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\left(\frac{2\Delta z}{D_1 + D_2}\right)^2 + 1}}, \quad (3.38)$$

kde mezní úhel $\alpha_{\text{limit}} = \alpha_{\text{alias}}$ je určen dolním okrajem signálu ve zdrojové rovině a horním okrajem oblasti zájmu v cílové rovině.

S danou roztečí $\delta f_{x1} = 1/X$ a Nyquistovým vzorkovacím teorémem, který je aplikován na přenosovou chirp funkci úhlového spektra RS1, lze vyjádřit pološířku spektra [7], které je ještě dobře navzorkováno

$$f_{x1, \text{max}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{(2\Delta z \delta f_{x1})^2 + 1}}. \quad (3.39)$$

Pro eliminaci *aliasingu* musí platit

$$f_{x1,\max} \geq f_{x1,\text{limit}}. \quad (3.40)$$

Ze srovnání rovnic (3.37), (3.38) a (3.39) vyplývá, že podmínka (3.40) je vždy splněna. V praxi se však ukázalo, že pokud je propagační vzdálenost Δz relativně velká, klesá efektivní počet vzorků definovaný jako [12]

$$N_{\text{eff}} = \frac{2f_{x1,\text{limit}}}{\delta f_{x1}} \quad (3.41)$$

a tím klesá přesnost simulace. Řešením může být neomezovat dále přenosovou funkci (nastavit si horní hranici Δz_{\max} , která nahradí všechna $\Delta z > \Delta z_{\max}$ v rovnici (3.38)) a zvětšovat *zeropadding*. Lze si také zvolit některou metodu Fresnelova integrálu nebo metodu úhlového spektra se širokým oknem [12], metodu úhlového spektra s analytickou lineární a sférickou fází [13] nebo metodu úhlového spektra s širokým dosahem pomocí neuniformního vzorkování [14].

Kapitola 4

Balíček `OpticalWavesDiffraction` pro software Wolfram Mathematica

Software Wolfram Mathematica se řadí do kategorie počítačových algebraických systémů. Jejimi přednostmi jsou symbolické a numerické výpočty, bohatost funkcí pro všechny vědní obory a flexibilní vysokoúrovňový jazyk Wolfram Language. V tomto prostředí byl vytvořen balíček funkcí (package) s názvem `OpticalWavesDiffraction` (OWD) určený pro numerickou simulaci difrakce a pomocné optické výpočty.

4.1 Vybrané funkce Wolfram Mathematicy

`Fourier[list]`

Implementace rychlé Fourierovy transformace (FFT). Argumentem je n -dimenzionální seznam `list`. Konvence Fourierovy transformace, která je používána v této práci, se v Mathematice nastaví pomocí volby `FourierParameters` $\rightarrow \{1, -1\}$. Tato konvence je běžná v oboru zpracování signálu. Zvláštností je, že stejná konvence pro spojitou analytickou `FourierTransform` má jiné nastavení `FourierParameters` $\rightarrow \{0, -2\pi\}$.

`NIntegrate[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`

V případě přímé integrace (direct integration) je užitečné sáhnout po této funkci, která implementuje integrační strategie, které estimují výsledek splňující `PrecisionGoal` a `AccuracyGoal`. Integrační strategie používají integrační pravidla, která určují, jakým způsobem se bude integrand `f[x, y]` vzorkovat. Vzorkování může být neadaptivní a adaptivní. Adaptivní vzorkování identifikuje a chytře zachází s problematickými oblastmi (singularity a nespojitosti). Významnými nastaveními této funkce jsou `PrecisionGoal`, `AccuracyGoal`, `WorkingPrecision`, `MinRecursion`, `MaxRecursion`, `Method`.

4.2 Optimalizace kódu, nastavení Wolfram Mathematicy a praktické tipy

Nevhodně napsaný kód může řádově prodloužit výpočetní čas, a tak je užitečné dodržovat zásady pro psaní optimálního kódu. Mathematica je optimalizována pro funkcionální programování, a tak např. funkce `Map` bude provedena rychleji než procedurální `For` pro velký počet iterací. Paměťově úspornější a rychlejší variantou n -dimenzionálního seznamu `List` je `PackedArray`. Pokud počítáme s čísly jako symboly, dostaneme exaktní výsledky, ale pro numerické výpočty jsou vhodnější čísla `Real`. Tato čísla se zapisují s desetinnou tečkou. Dalším užitečným nastavením je `$HistoryLength=0`, které zabraňuje ukládání výsledků z předchozích řádků do RAM. Rozsáhlý průvodce pro psaní optimalizovaného kódu je k nalezení v [15].

Z hlediska rychlosti je lepší vytvářet tzv. čisté funkce. Funkce definované pomocí opožďené evaluace se mohou používat, pokud nejsou opakovaně volány při dlouhých iteracích nebo aplikování na data.

Dalším postřehem je, že funkce `ListPlot3D` spotřebuje enormní množství paměti pro větší pole. Obvyklou volbou je `MaxPlotPoints` s hodnotou menší než je počet prvků v seznamu. Alternativou je funkce `ArrayPlot`.

Další možností zrychlení výpočtů je použít grafickou kartu. Aby bylo možné provádět obecné výpočty na grafických procesorech (GPGPU), je nutné propojit Mathematicu s API CUDA (nebo OpenCL, není-li k dispozici grafická karta od firmy NVIDIA). To provede příkaz z příložené knihovny `CUDACheck[]`.

Dále se musí správně nastavit následující proměnné kernelu Mathematicy podle typu přítomného operačního systému (viz nápověda F1):

```
GPUTools`Internal`$NVIDIADriverLibraryPath  
GPUTools`Internal`$CUDALibraryPath
```

Pokud však uživatel vlastní CPU s více jádry není zrychlení díky GPU znatelné.

4.3 Instalace balíčku `OpticalWavesDiffraction`

Pro automatické načítání balíčku při startu Mathematicy se vloží soubor "`OpticalWavesDiffraction.m`" do složky "Applications", která se otevře pomocí příkazu:

```
SystemOpen[FileNameJoin[{$UserBaseDirectory, "Applications"}]] .
```

Do souboru "init.m", který se nachází ve složce "Kernel":

```
SystemOpen[FileNameJoin[{$UserBaseDirectory, "Kernel"}]] ,
```

se přepíše následující kód:

```
Needs["OpticalWavesDiffraction`"];
```

4.4 Package OpticalWavesDiffraction

Struktura kódu package OWD začíná formálními příkazy Mathematicy, následuje anglický popis použití funkcí přístupný pomocí příkazu `?`, který se píše před funkcí nebo `Definition`, chybová hlášení, systémem podmínek platnosti difrakčních algoritmů a vlastní kód s difrakčními algoritmy.

Package navíc obsahuje oddíl analytických výrazů pro hojně užívané funkce v optice včetně variant gaussovského svazku, analytická řešení jednoduchých difrakčních úloh, která slouží jako reference pro určení přesností numerických metod, utility pro práci s daty, pomocné funkce pro fyzikální analýzy.

Strukturovaný seznam funkcí s českým popisem použití je v následujícím oddílu. Dvojtečka v hlavičce funkce znamená volitelný parametr se standardní hodnotou za dvojtečkou. Všechny rozměry jsou v mm.

4.4.1 Analytické výrazy

`Rect`

reprezentuje obdélníkovou funkci. V 1D má rovnici

$$\text{Rect}[x] = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.1)$$

která je zobecněna pro nD jako

$$\text{Rect}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \text{Rect}[x_1] \cdot \text{Rect}[x_2] \cdots \text{Rect}[x_n] \quad (4.2)$$

Lanczos

reprezentuje Lanczosovu funkci tvarovacího okna. Je aproximací *sinc* filtru s konečnou nosnou množinou. V 1D má rovnici

$$\text{Lanczos}[a, x] = \begin{cases} \text{Sinc}(x) \cdot \text{Sinc}\left(\frac{x}{a}\right) & |x| < a \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.3)$$

která je zobecněna pro nD jako

$$\text{Lanczos}[a, x_1, \dots, x_n] = \text{Lanczos}[a, x_1] \cdots \text{Lanczos}[a, x_n] \quad (4.4)$$

Tri

reprezentuje trojúhelníkovou funkci. V 1D má rovnici

$$\text{Tri}[x] = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.5)$$

která je zobecněna pro nD jako

$$\text{Tri}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \text{Tri}[x_1] \cdot \text{Tri}[x_2] \cdots \text{Tri}[x_n] \quad (4.6)$$

Circ

reprezentuje kruhovou funkci. Ve 2D má rovnici

$$\text{Circ}[x, y] = \begin{cases} 1 & x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4.7)$$

která je zobecněna pro nD jako

$$\text{Circ}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \begin{cases} 1 & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Jinc

dává podíl Besselovy funkce prvního druhu a prvního řádu a jejího argumentu

$$\text{Jinc}[x] = \frac{2 \cdot \text{BesselJ}[1, x]}{x} = \frac{2 \cdot J_1(x)}{x}. \quad (4.9)$$

Tvar Jinc funkce běžně používaný v optice je $\text{Jinc}[\pi \cdot x]$.

Jinc funkce pro nD je zobecněna jako

$$\text{Jinc}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \text{Jinc}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\right). \quad (4.10)$$

Comb

reprezentuje funkci Diracův hřeben s rozestupem d

$$\text{Comb}[x, d] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot d) \quad (4.11)$$

který je zobecněn pro nD jako

$$\text{Comb}[x_1, x_2, \dots, x_n, d] = \text{Comb}[x_1, d] \cdots \text{Comb}[x_n, d]. \quad (4.12)$$

Gauss1D[$x, \Delta z, \lambda, w_0$]

je rovnice pro gaussovský svazek s 1D profilem s pološířkou pasu w_0 umístěném v $[0, 0]$ a vlnovou délkou λ . Rovnice má tvar

$$\begin{aligned} \text{Gauss1D}[x, \Delta z, \lambda, w0] &= \frac{1}{\sqrt{w0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{x^2}{w0^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2}\right)^2\right)} - i \left(\frac{\pi x^2}{\Delta z \lambda \left(1 + \left(\frac{\pi w0^2}{\Delta z \lambda}\right)^2\right)} - \frac{2\pi}{\lambda} - \text{atan} \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

`Gauss2D[x, y, Δz, λ, w0]`

je rovnice pro gaussovský svazek s 2D profilem s pološířkou pasu `w0` umístěném v `[0, 0, 0]` a vlnovou délkou `λ`. Rovnice má tvar

$$\begin{aligned} \text{Gauss2D}[x, y, \Delta z, \lambda, w0] &= \frac{1}{w0 \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w0^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2}\right)^2\right)} - i \left(\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\Delta z \lambda \left(1 + \left(\frac{\pi w0^2}{\Delta z \lambda}\right)^2\right)} - \frac{2\pi}{\lambda} - \text{atan} \left(\frac{\Delta z \lambda}{\pi w0^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

`Gauss2DStoppedNorm[w0, Dx, Dy]`

vypočítá celkovou intenzitu gaussovského svazku s 2D profilem, pološířkou pasu `w0` umístěném v `[0, 0, 0]` s centrálním obdélníkovým cloněním s rozměry `Dx` a `Dy`.

`Gauss2DStopped[x, y, Δz, λ, w0, Dx, Dy, Gauss2DStoppedNorm:1]`

je rovnice pro gaussovský svazek s 2D profilem s pološířkou pasu `w0` umístěném v `[0, 0, 0]` s centrálním obdélníkovým cloněním s rozměry `Dx` a `Dy`. Rovnice je založena na Fresnelově šíření volným prostorem. Rovnici je možné normovat dosazením hodnoty z funkce `Gauss2DStoppedNorm`.

`RayleighSommerfeldIntegral[U, x2, y2, Δz, λ]`

je rovnicí Rayleigh-Sommerfeldovy difrakce (1.8). Provádí přímou numerickou integraci analytické funkce `U[x1, y1]` pomocí `NIntegrate`. Kvůli způsobu implementace se do-

sazuje čistá funkce U .

`FresnelIntegral[U, x2, y2, Δz, λ]`

je rovnicí Fresnelovy difrakce (1.9). Provádí přímou numerickou integraci analytické funkce $U[x1, y1]$ pomocí `NIntegrate`. Kvůli způsobu implementace se dosazuje čistá funkce U .

`FraunhoferIntegral[U, x2, y2, Δz, λ]`

je rovnicí Fraunhoferovy difrakce (1.9). Provádí přímou numerickou integraci analytické funkce $U[x1, y1]$ pomocí `NIntegrate`. Kvůli způsobu implementace se dosazuje čistá funkce U .

`FraunhoferRect[x2, y2, Δz, λ, a, b, A : 1]`

je analytickým řešením Fraunhoferova integrálu pro obdélníkovou aperturu s pološířkami a a b . Navrací komplexní amplitudu v rovině x_2 - y_2 vzdálené Δz od roviny obdélníkové apertury, která je osvětlená polem s konstantní komplexní amplitudou A s výchozí hodnotou 1 [2, s. 76] a má rovnici

$$U(x_2, y_2) = \frac{e^{ik\Delta z} e^{\frac{ik}{2\Delta z}(x_2^2 + y_2^2)}}{i\lambda\Delta z} A(4ab) \text{Sinc} \left[\frac{2ax_2}{\lambda\Delta z} \right] \text{Sinc} \left[\frac{2by_2}{\lambda\Delta z} \right]. \quad (4.15)$$

`FraunhoferCirc[x2, y2, Δz, λ, r, A : 1]`

je analytickým řešením Fraunhoferova integrálu pro kruhovou aperturu s poloměrem r . Navrací komplexní amplitudu v rovině x_2 - y_2 vzdálené Δz od roviny kruhové apertury, která je osvětlená polem s konstantní komplexní amplitudou A s výchozí hodnotou 1 [2, s. 78]. Řešení má rovnici

$$U(x_2, y_2) = \frac{e^{ik\Delta z} e^{\frac{ik}{2\Delta z}(x_2^2 + y_2^2)}}{i\lambda\Delta z} A(\pi r^2) 2 \text{Jinc} \left[\frac{2\pi r \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\lambda\Delta z} \right]. \quad (4.16)$$

`FresnelEdge` [$x_2, y_2, \Delta z, \lambda, a, A : 1$]

je analytickým řešením Fresnelova difrakčního integrálu pro nekonečnou hranu posunutou o vzdálenost a od počátku na ose x . Navrací tedy komplexní amplitudu v rovině x_2 - y_2 vzdálené Δz od roviny hrany. Apertura je osvětlena polem s konstantní komplexní amplitudou A s výchozí hodnotou 1 [1, s. 481]. Řešení má tvar

$$U(x_2, y_2) = A \frac{e^{ik\Delta z}}{2i} \{ [C(\infty) - C(\alpha_1)] + i[S(\infty) - S(\alpha_1)] \} \quad (4.17)$$

s Fresnelovy integrály C a S , které lze vyhodnotit s libovolnou numerickou precizností.

`FresnelRect` [$x_2, y_2, \Delta z, \lambda, a, b, A : 1$]

je analytickým řešením Fresnelova difrakčního integrálu pro obdélníkovou aperturu s pološířkami a a b . Navrací tedy komplexní amplitudu v rovině x_2 - y_2 vzdálené Δz od roviny obdélníkové apertury, která je osvětlena polem s konstantní komplexní amplitudou A s výchozí hodnotou 1 [2, s. 86]. Řešení má tvar

$$U(x_2, y_2) = A \frac{e^{ik\Delta z}}{2i} \{ [C(\alpha_2) - C(\alpha_1)] + i[S(\alpha_2) - S(\alpha_1)] \} \times \\ \times \{ [C(\beta_2) - C(\beta_1)] + i[S(\beta_2) - S(\beta_1)] \}, \quad (4.18)$$

kde C a S jsou Fresnelovy integrály a

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda\Delta z}}(a+x_1) \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda\Delta z}}(a-x_1) \\ \beta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda\Delta z}}(b+y_1) \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda\Delta z}}(b-y_1). \quad (4.19)$$

`PointSource` [$x_1, y_1, x_p, y_p, \Delta z, \lambda, D_2, A : 1$]

reprezentuje bodový zdroj [3] se souřadnicemi x_p a y_p v rovině x_1 - y_1 , který bude propagován na detektor s průměrem D_2 . Nahrazuje Diracovu delta funkci s nekonečným prostorovým spektrem. Odvozen pomocí analytického výrazu Fresnelovy difrakce bodového zdroje, aplikací okna s tvarem detektoru a zpětné analytické Fresnelovy difrakce (1.8). Celý výraz se vynásobí Gaussovou funkcí $\exp\left[-\left(\frac{D}{4\lambda\Delta z}\right)^2 r_1^2\right]$. Gaussova funkce částečně zredukuje *aliasing* ve fázi. Efektem je redukce postranních výběžků, a tak se vyhladí intenzitní profil v

pozorované rovině.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{pt}}(\vec{r}_1) &= A e^{-i\frac{k}{2\Delta z}r_1^2} e^{i\frac{k}{2\Delta z}r_p^2} e^{-i\frac{k}{\Delta z}\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_p} \times \\ &\times \left(\frac{D_2}{\lambda\Delta z}\right)^2 \text{Sinc}\left[\frac{D_2(x_1-x_p)}{\lambda\Delta z}\right] \text{Sinc}\left[\frac{D_2(y_1-y_p)}{\lambda\Delta z}\right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Volitelným parametrem je velikost amplitudy A .

`RSCircOnAxis` [Δz , λ , r , $A:1$]

je analytickým řešením Rayleigh-Sommerfeldova integrálu pro kruhovou aperturu s poloměrem r . Navrací komplexní amplitudu v bodě na ose vzdálené Δz od roviny kruhové apertury, která je osvětlená polem s konstantní komplexní amplitudou A s výchozí hodnotou 1 [16]. Řešení má tvar

$$U = A\Delta z \left(\frac{e^{ik\Delta z}}{\Delta z} - \frac{e^{ik\sqrt{\Delta z^2+r^2}}}{\sqrt{\Delta z^2+r^2}} \right). \quad (4.21)$$

4.4.2 Pomocné funkce

`SincWidth` [Δz , λ , $D1$]

vypočítá šířku hlavního píku Sinc funkce v dalekém Fraunhoferově poli. Čtvercová apertura má průměr $D1$. $W = \lambda \Delta z / (D1/2)$.

`JincWidth` [Δz , λ , $D1$]

vypočítá šířku hlavního píku Jinc funkce v dalekém Fraunhoferově poli. Kruhová apertura má průměr $D1$. $W = 1,21966989 \lambda \Delta z / (D1/2)$.

`Intensity` [m]

vrací matici intenzity z matice komplexní amplitudy m .

`MaxIntensity` [m]

vrací hodnotu maximální intenzity matice komplexní amplitudy m .

`TotalPower` [m , $\delta x \cdot \delta y$]

vypočítá celkový výkon matice m komplexní amplitudy s velikostmi vzorků δx a δy (dosazuje se součin).

`FresnelNumber` [Δz , λ , $D1$]

vypočítá Fresnelovo číslo $N_F = D1^2 / (4\lambda \Delta z)$.

`PreprocessingIllustration` []

miniaplikace, která názorným způsobem demonstruje efekty technik předzpracování signálu *zeropadding* a *inserting zeros*.

4.4.3 Nástroje

`is1D[m]`

ověřuje, zda je pole m jednodimenzionální.

`isSquare[m]`

ověřuje, zda je pole m čtvercové.

`hasEvenDimensions[m]`

ověřuje, zda má 1D nebo 2D pole m sudé rozměry.

`hasPowerOfTwoDimensions[m]`

ověřuje, zda má 1D nebo 2D pole m rozměry rovné mocninám dvou.

`Refinement[m, n]`

replikuje každý prvek matice m $n \times n$. Jinými slovy zjemní vzorkování.

`RegularPolygonMatrix[n]`

vrací matici vyplněnou nulami s pravidelným n -gonem tvořeným jedničkami.

`Unwrap[m]`

vrátí rozbalenou fázi matice komplexní amplitudy m pomocí metody prediktor-korektor.

`GetRadius[m]`

pomocí funkcí `Unwrap` a `NonlinearModelFit` vrátí menší poloměr ze dvou oskulačnických kružnic na ploše rozbalené fáze matice komplexní amplitudy m . Záporná hodnota R odpovídá divergentní vlně, kladná konvergentní podle konvence zavedené v difrakčních algoritmech.

`MaxFrequency[$\phi[x]$, x , $D1$]`

vrací hodnotu a místo nejvyšší lokální prostorové frekvence (a tudíž i místo nejvyššího gradientu) analytické fáze (nebo libovolné analytické funkce) $\phi[x]$ s nosnou množinou s velikostí $D1$.

`PartExpression[x]`

vrací výraz, na který byla aplikována funkce `Part`.

Např. `PartExpression[x[[2]]]==x`.

`ToPure[f, x1, ..., xn]`

převede funkci `f` s opožděným vyhodnocením s argumenty `x1, ..., xn` na tzv. čistou funkci.

`ShowTiming`

zapne zobrazování doby výpočtu poslední buňky na spodní liště `StatusBar`.

`HighPerformance`

snaží se zefektivnit Mathematicu. Vymaže historii příkazů.

`CUDACheck[]`

zkontroluje, jestli je GPU nastavení pro Mathematicu správné.

`VirtualLabLoad[file]`

importuje datový soubor ze softwaru `VirtualLab Fusion` `file` a vytvoří z něj matici s daty.

`ZeroPad[m]`, `ZeroPad[m, EvenQ]`, `ZeroPad[m, 2]`

Obkládá matici `m` nulami `0`. a vytvoří čtvercovou matici se sudými rozměry. Volba `EvenQ` vytvoří matici nejbližší obdélníkovou matici se sudými rozměry. Volba `2` vytvoří čtvercovou matici s rozměry rovnými nejbližším mocninám dvou.

`FFTShift[m]`, resp. `IFFTShift[m]`

v matici `m` prohodí kvadrant první se čtvrtým a druhý se třetím. Používá se před a po FFT, resp. IFFT.

`FT[m, $\delta_x \cdot \delta_y$]`

provede prohození kvadrantů (kvůli centrování počátku souřadnic signálu), rychlou Fourierovu transformaci s konvencí `{1, -1}` matice `m` s prohozenými kvadranty a velikostmi

vzorků δ_x a δ_y (dosazuje se součin).

`IFT[m, $\delta_x \cdot \delta_y$]`

provede prohození kvadrantů (kvůli centrování počátku souřadnic signálu), rychlou zpětnou Fourierovu transformaci s konvencí `{1, -1}` matice `m` s prohozenými kvadranty a velikostmi vzorků δ_x a δ_y (dosazuje se součin).

`NConvolve[x, y], CircleTimes[x, y], $x \otimes y$`

provede numerickou konvoluci matic `x` a `y` pomocí konvolučního teorému a FFT.

`NConvolveIntegral[f[x], g[x], x, y, min, max]`

provede numerickou konvoluci analytických funkcí `f[x]` a `g[x]` pomocí `NIntegrate`. Vrací funkci argumentu `y`, za kterou je nutné dosadit numerickou hodnotu. Integrační meze jsou `min` a `max`.

`FourierCUDA[m, $\delta_x \cdot \delta_y$]`

provede pouze rychlou Fourierovu transformaci s konvencí `{1, -1}` matice `m` s velikostmi vzorků δ_x a δ_y (dosazuje se součin) paralelizovanou na GPU NVidia.

`InverseFourierCUDA[m, $\delta_x \cdot \delta_y$]`

provede pouze rychlou zpětnou Fourierovu transformaci s konvencí `{1, -1}` matice `m` s velikostmi vzorků δ_x a δ_y (dosazuje se součin) paralelizovanou na GPU NVidia.

`XFT2D[m]`

provede přesnější DFT pro aperiodické signály pomocí dvou FFT. Algoritmus je popsán v [17].

`FrFTIntegral[α , f[x], u]`, resp. `FrFTIntegral[α , f[x, y], u, v]`

provede zlomkovou Fourierovu transformaci s úhlem α analytické funkce `f[x]`, resp. `f[x, y]` pomocí `NIntegrate`. Rovnice je převzata z [18].

`ArgThreshold[m, ratio]`

vrací fázová data matice komplexní amplitudy `m` s vynulovanou fází tam, kde je relativní

intenzita menší než `ratio`. Relativní intenzita je vypočítána z maximální intenzity v matici.

```
ArrayPlotOWD[input]
```

je modifikací funkce `ArrayPlot` pro funkce z balíčku `OWD`.

```
DensityPlotOWD[input, minmax:{0, 1}]
```

je modifikací funkce `DensityPlot` pro funkce z balíčku `OWD`. `minmax` nastavuje meze funkce barevnosti `GrayTones`.

4.4.4 Základní numerické difrakční algoritmy

Funkce v tomto oddíle navrácí hodnotu podle zvoleného „klíče“. Následuje výčet klíčů společných pro všechny funkce počítající difrakci numericky: `Abs`, `Intensity`, `Arg`, `ArgThreshold`, `ratio`, `Default`, `MaxIntensity`, `TotalPower`, `FresnelNumber`, `DataRange`, `AspectRatio`, `AxesLabel` a `FrameLabel`. Tyto klíče se vkládají do hranatých závorek za funkcemi. Je možné klíč vynechat a nechat hranatou závorku prázdnou. Funkce potom navrátí matici komplexní amplitudy. Tato volba je ekvivalentní volbě `Default`. V oddíle 4.5 jsou uvedeny příklady použití.

```
Fraunhofer[UIn, Δz, λ, D1, D2:"Default"] []
```

Vypočítá Fraunhoferovu difrakci pro vstupní matici komplexní amplitudy `UIn` na vzdálenost `Δz`. Vlnová délka je `λ`, rozměr vstupního signálu `D1` a oblast zájmu `D2`.

```
Fresnel[UIn, Δz, λ, D1, D2:"Default"] []
```

Vypočítá Fresnelovu difrakci pro vstupní matici komplexní amplitudy `UIn` na vzdálenost `Δz`. Vlnová délka je `λ`, rozměr vstupního signálu `D1` a oblast zájmu `D2`.

```
FresnelTwoStep[UIn, Δz, λ, D1, δ2, D2] []
```

Vypočítá Fresnelovu dvoukrokovou difrakci s low-pass filtrací pro vstupní matici komplexní amplitudy `UIn` na vzdálenost `Δz`. Vlnová délka je `λ`, rozměr vstupního signálu `D1`, volba velikosti vzorku v pozorované rovině `δ2` a oblast zájmu `D2`. Znaménko `δ2` se přenesse na škálovací parametr `m`. Volba `"Lowpass" -> False` vypne low-pass filtrování.

`FresnelAngularScaled[UI n , Δz , λ , $D1$, $\delta 2$, $D2$] []`

Vypočítá difrakci úhlového spektra pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na vzdálenost `Δz` . Vlnová délka je `λ` , rozměr vstupního signálu `$D1$` , volba velikosti vzorku v pozorované rovině `$\delta 2$` a oblast zájmu `$D2$` . Znaménko `$\delta 2$` se přenesse na škálovací parametr `m` .

`FresnelAngularScaledABCD[UI n , $ABCD$, Δz , λ , $D1$, $\delta 2$, $D2$] []`

Vypočítá difrakci úhlového spektra přes ABCD optický systém reprezentovaný maticí `$ABCD$` pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na vzdálenost `Δz` . Vlnová délka je `λ` , rozměr vstupního signálu `$D1$` , volba velikosti vzorku v pozorované rovině `$\delta 2$` a oblast zájmu `$D2$` . Determinant matice `$ABCD$` musí být roven 1. Znaménko `$\delta 2$` se přenesse na škálovací parametr `m` .

4.4.5 Pokročilé numerické difrakční algoritmy

`Angular[UI n , Δz , λ , $D1$] []`

Vypočítá difrakci úhlového spektra pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na vzdálenost `Δz` . Vlnová délka je `λ` , rozměr vstupního signálu `$D1$` je identický s rozměrem oblasti zájmu.

`BLAS[UI n , Δz , λ , $D1$, $D2$] []`

Vypočítá low-pass filtrované úhlové spektrum pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na vzdálenost `Δz` . Vlnová délka je `λ` , rozměr vstupního signálu `$D1$` a oblast zájmu `$D2$` .

`BLASScaled[UI n , Δz , λ , $D1$, $\delta 2$, $Ns2$, $D2$] []`

Vypočítá low-pass filtrované úhlové spektrum pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na vzdálenost `Δz` . Vlnová délka je `λ` , rozměr vstupního signálu `$D1$` , volba velikosti vzorku v pozorované rovině `$\delta 2$` , počet vzorků výstupní matice `$Ns2$` a oblast zájmu `$D2$` .

`AngularCurved[UI n , Δz , λ , $D1$, g , n] []`

Vypočítá difrakci úhlového spektra ze zakřivené geometrie definované analytickou funkcí `g` , která je rozsekána na `n` podoblastí, pro vstupní matici komplexní amplitudy `UI n` na-

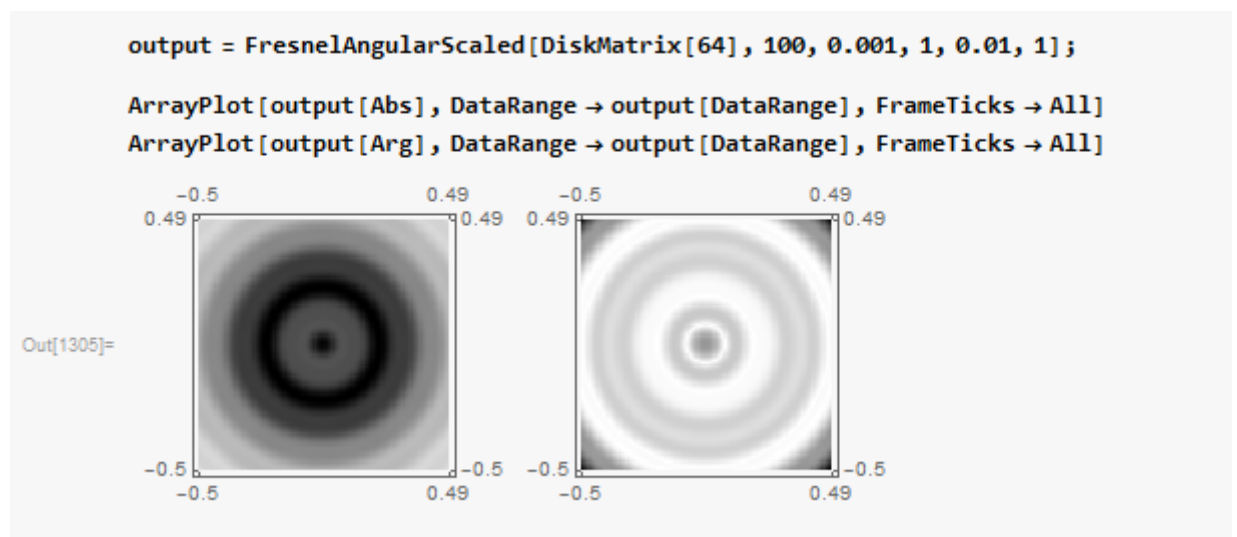
mapovanou na zakřivenou geometrii. Vzdálenost šíření je Δz . Vlnová délka je λ a příčný rozměr geometrie a zároveň optického pole $D1$.

V balíčku jsou dále implementovány podmínky platnosti algoritmů. Názvy těchto funkcí se skládají z názvů algoritmů, které kontrolují, a slova `Conditions`. Nechybí ani podmínky platnosti aproximací (např.: `ValidFresnelRegionQ`).

4.5 Ukázka použití

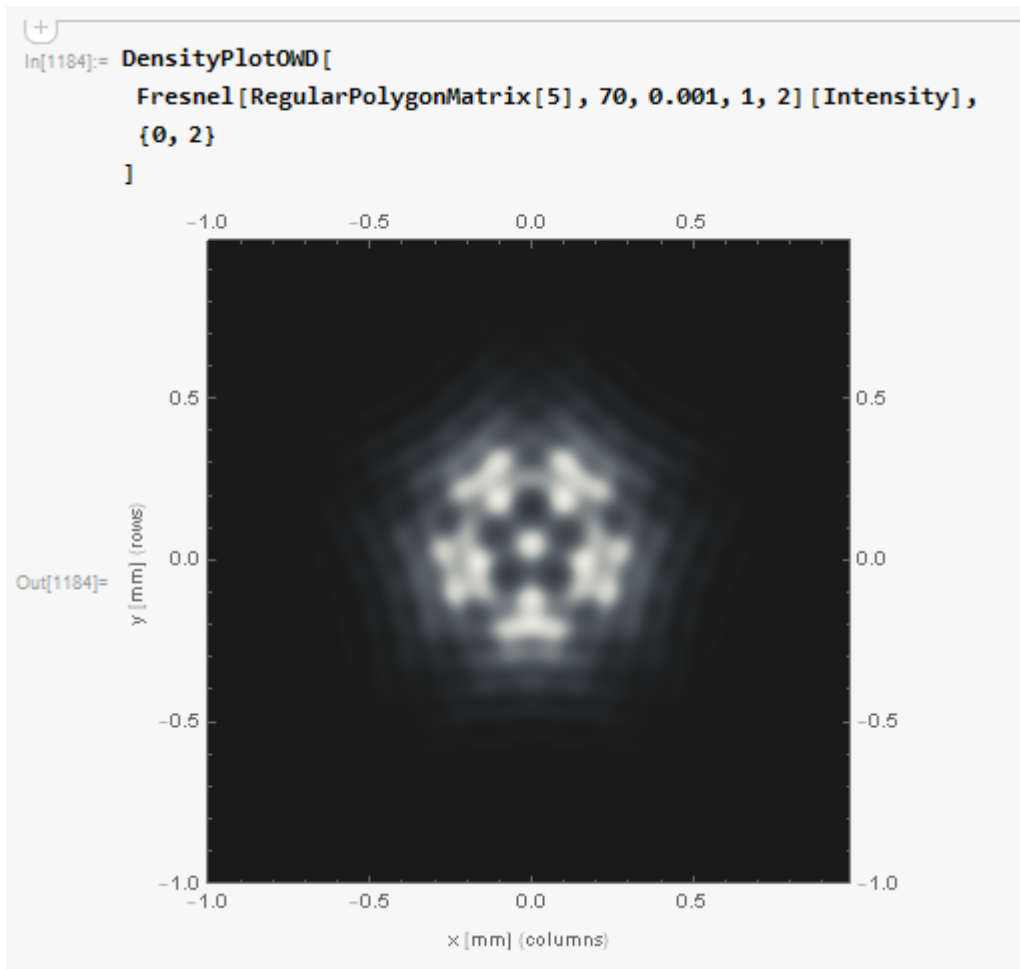
Všechny zde uvedené ukázky jsou dostupné v CD příloze v souboru s názvem *Package/Exhibition.nb*.

1. Použití algoritmu Fresnelova úhlového spektra se zvolenou roztečí v cílové rovině. Je vybrána amplituda a fáze klíči `Abs` a `Arg`, které jsou vykresleny s příčnými rozměry v mm (obrázek 4.1).

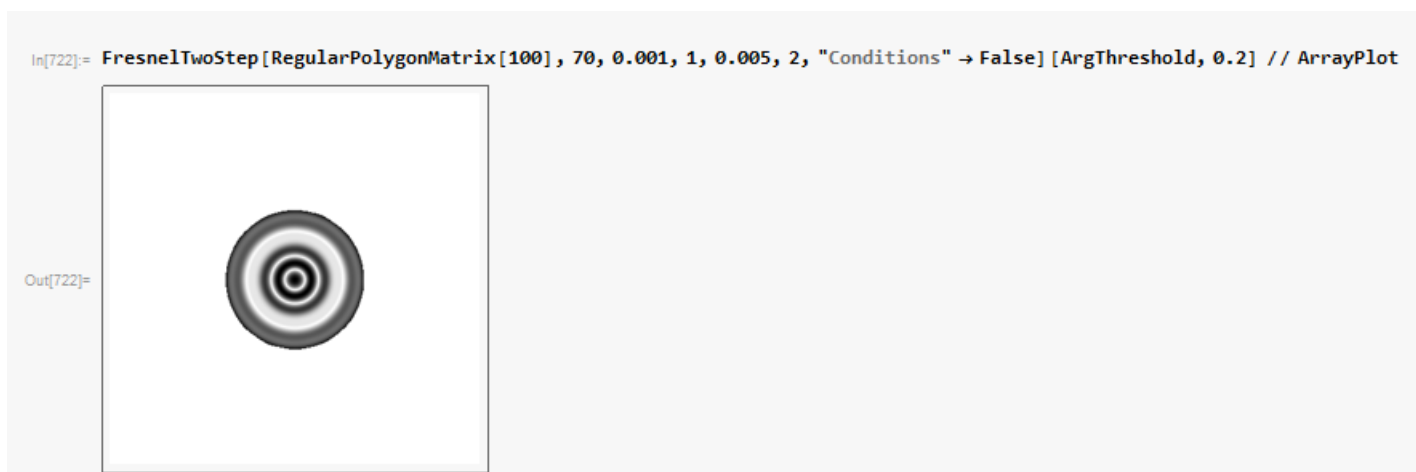


Obrázek 4.1: Příklad použití funkce `FresnelAngularScaled` s klíči `Abs`, `Arg` a `DataRange`.

2. Šíření světla skrze pentagonální aperturu jedнокrokovým Fresnelovým algoritmem. Výsledek je vykreslen funkcí `DensityPlotOWD` (obrázek 4.2).
3. Ověřování podmínek na vzorkování může několik vteřin trvat. Nejnáročnější částí ověřování vzorkovacích podmínek je výpočet funkce `GetRadius`. Pokud chceme zkrátit čas výpočtu, můžeme využít volbu `"Conditions" -> False`. Klíč `[ArgThreshold, 0.2]` vybere fázi na místech, kde je intenzita větší než 0,2 maximální intenzity (obrázek 4.3).



Obrázek 4.2: Příklad použití funkce *Fresnel* s klíčem *Intensity* a funkce *DensityPlotOWD*.



Obrázek 4.3: Příklad použití volby "*Conditions*" -> *False*.

Kapitola 5

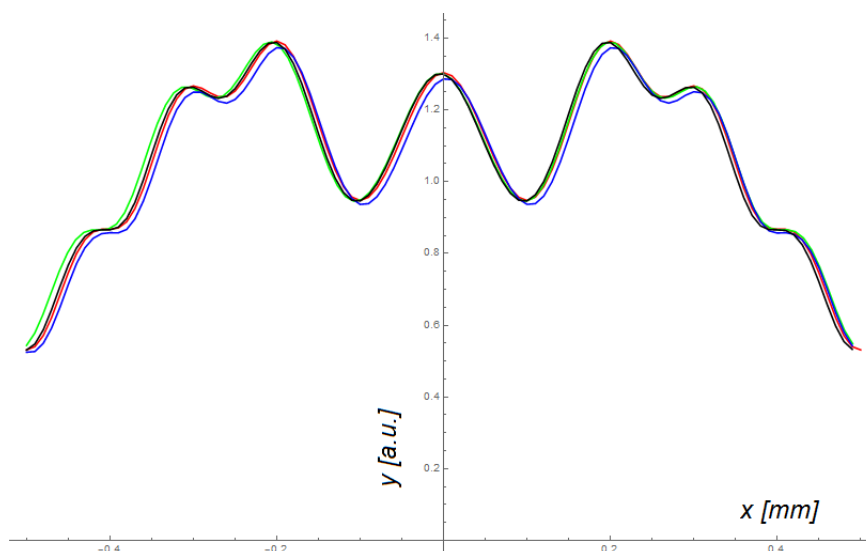
Výsledky a ověření

Implementované numerické metody jsou v této kapitole srovnány mezi sebou a s exaktními analytickými výsledky a je ověřena jejich platnost.

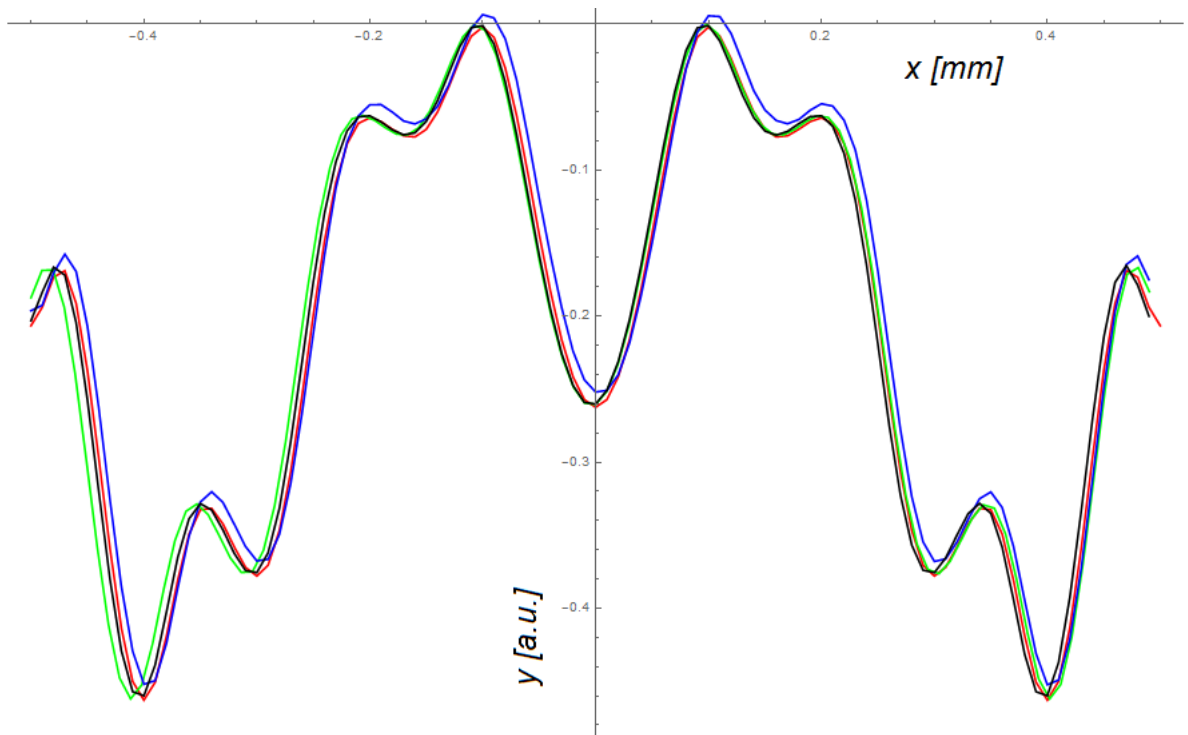
5.1 Srovnání numerických metod s analytickým řešením

5.1.1 Fresnelova difrakce na čtvercové apertuře

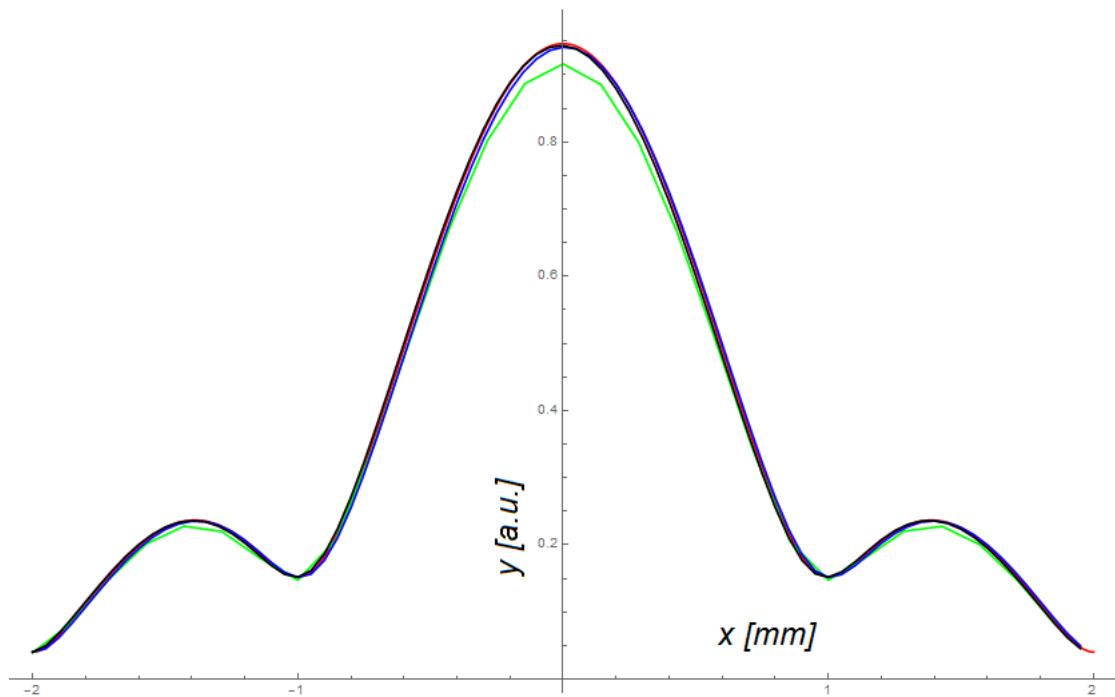
Jsou prezentovány výsledky metod `Fresnel`, `FresnelTwoStep`, `FresnelAngularScaled` a analytického `FresnelRect` na obrázcích 5.1-5.6 při splnění vzorkovacích požadavků. Vlnová délka $\lambda = 0,001$ mm, $D_1 = 1$ mm, propagační vzdálenosti Δz byly 100, 1000 a 10000 mm.



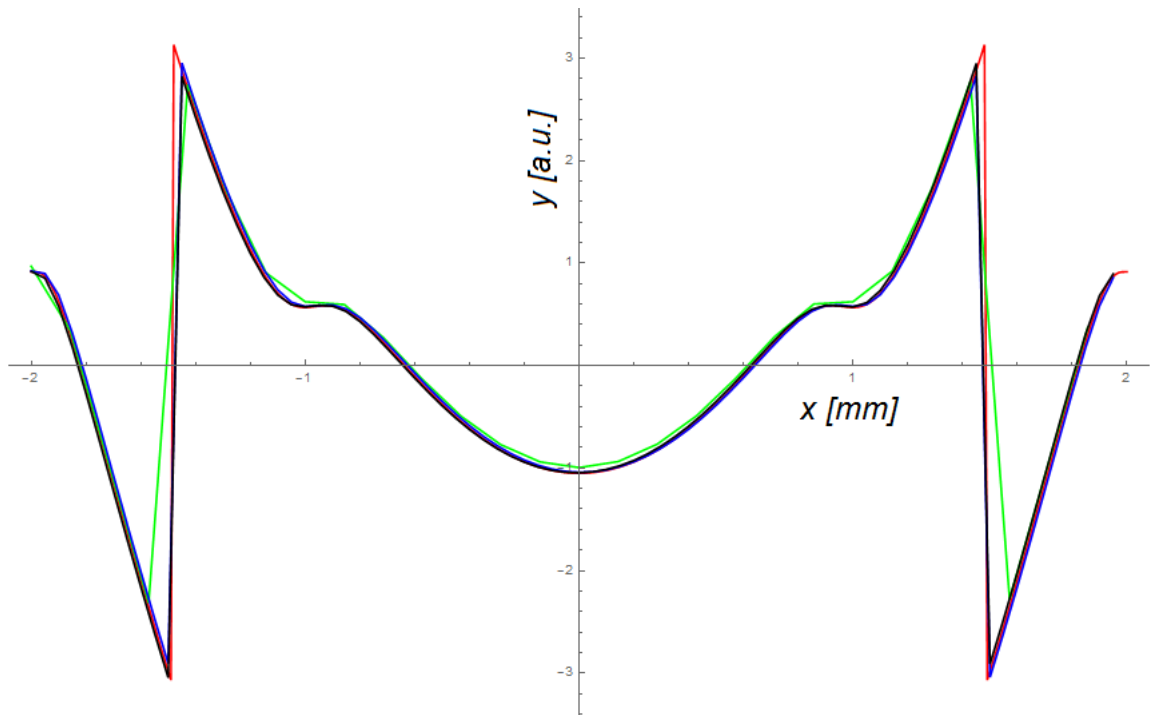
Obrázek 5.1: Srovnání amplitud metod *Fresnel* - zelená, *FresnelTwoStep* - modrá, *FresnelAngularScaled* - černá a *FresnelRect* - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 100$ mm.



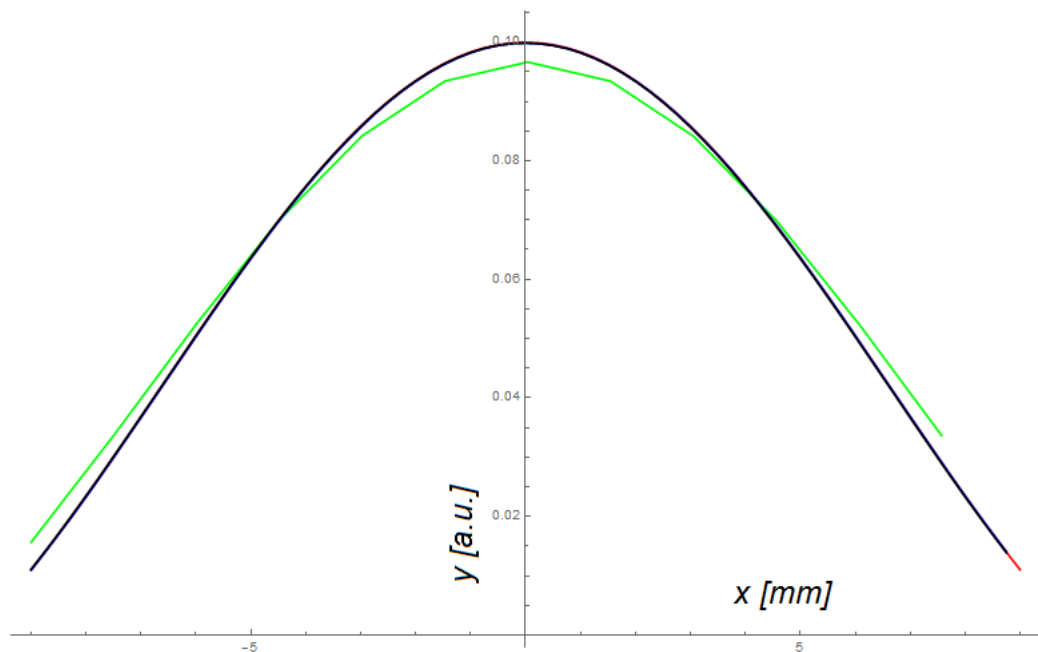
Obrázek 5.2: Srovnání fází metod Fresnel - zelená, FresnelTwoStep - modrá, FresnelAngularScaled - černá a FresnelRect - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 100$ mm.



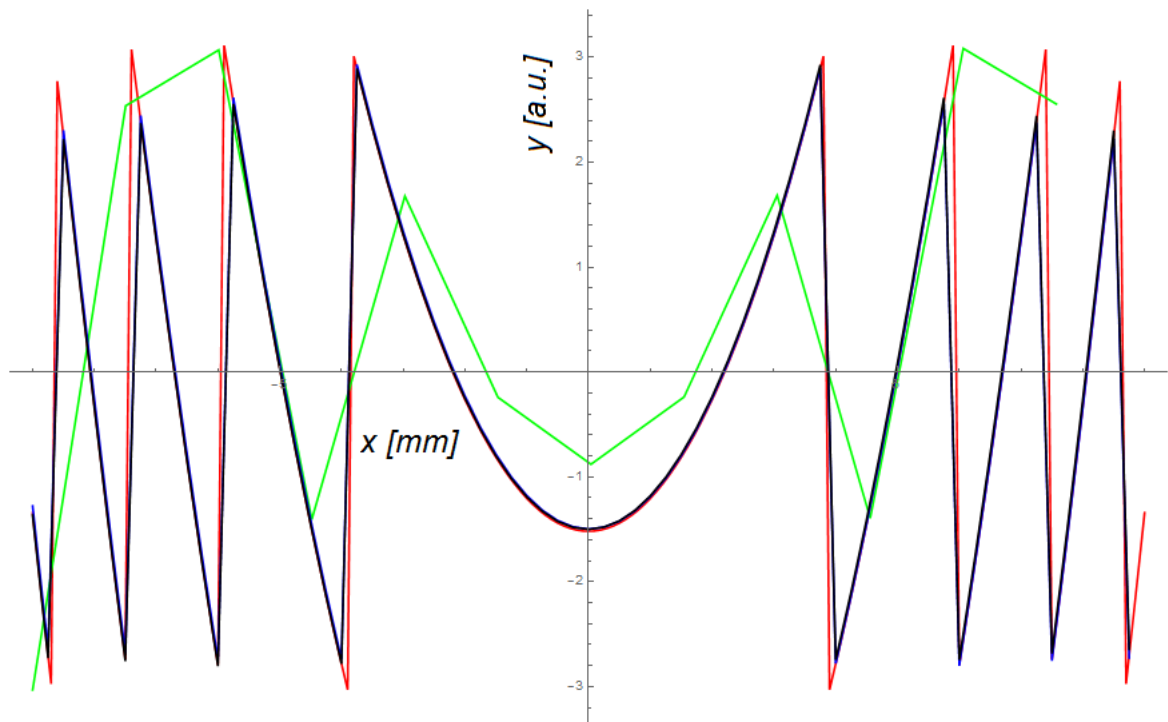
Obrázek 5.3: Srovnání amplitud metod Fresnel - zelená, FresnelTwoStep - modrá, FresnelAngularScaled - černá a FresnelRect - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 1000$ mm.



Obrázek 5.4: Srovnání fází metod Fresnel - zelená, FresnelTwoStep - modrá, FresnelAngularScaled - černá a FresnelRect - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 1000$ mm.



Obrázek 5.5: Srovnání amplitud metod Fresnel - zelená, FresnelTwoStep - modrá, FresnelAngularScaled - černá a FresnelRect - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 10000$ mm. V této vzdálenosti trpí metoda Fresnel příliš velkou roztečí v cílové rovině.



Obrázek 5.6: Srovnání fází metod *Fresnel* - zelená, *FresnelTwoStep* - modrá, *FresnelAngularScaled* - černá a *FresnelRect* - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 10000$ mm. V této vzdálenosti trpí metoda *Fresnel* příliš velkou roztečí v cílové rovině.

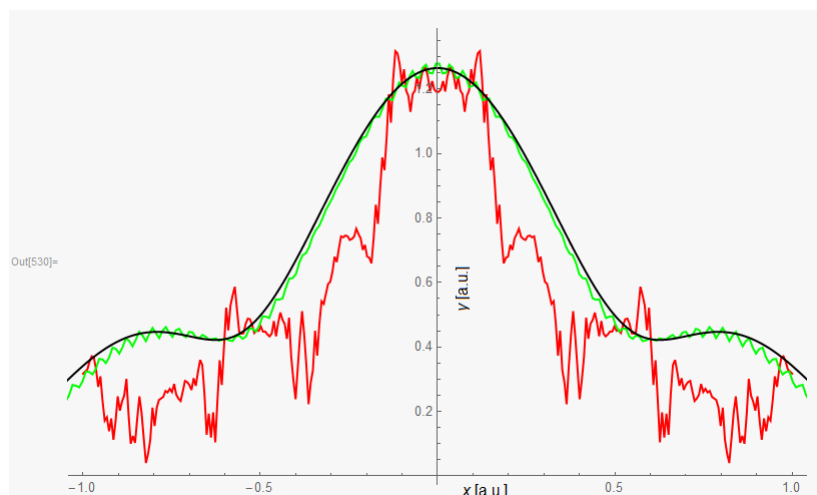
Byla potvrzena přesnost všech implementovaných numerických metod při dodržení vzorkovacích požadavků.

5.2 Metoda úhlového spektra RS1

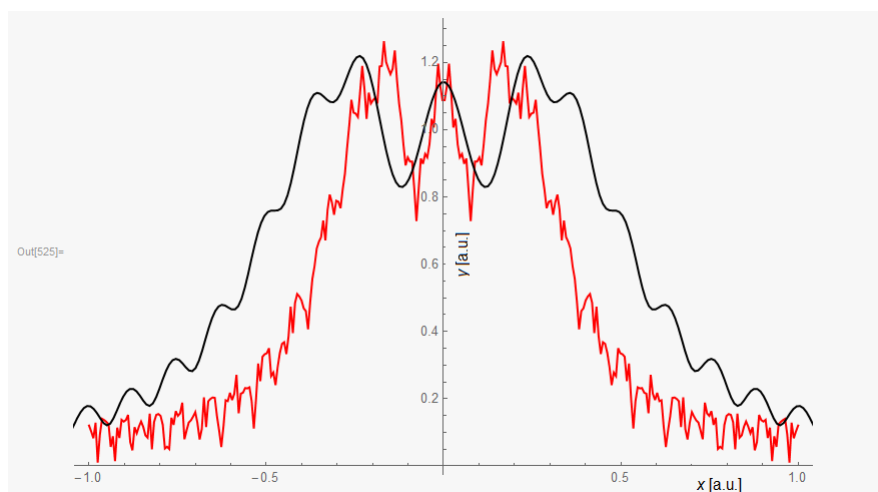
Metoda `Angular` (bez vylepšení) propaguje rovinnou vlnu 500 mm od čtvercové apertury se stranou $D_1 = 1$ mm. Vlnová délka je $\lambda = 0,001$ mm. Nejprve je aplikováno 100 nul *zeropaddingu* v jedné ose. Potom je *zeropadding* navýšen na 1000 nul v jedné ose. Správného výsledku bez *aliasingu* je dosaženo až se *zeropaddingem* 3000 nul v jedné ose (obrázek 5.7).

Při propagaci na 100 mm při stejných difrakčních parametrech je proveden *zeropadding* se 100 nulami. Správného výsledku je dosaženo už při 800 nulách v jedné ose (obrázek 5.8).

Z výsledků je tedy zřejmé, že při větších propagačních vzdálenostech začíná být úhlové spektrum výpočetně náročné. Počet nul *zeropaddingu* pro správný sampling roste podle teorie (3.34) lineárně se vzdáleností.



Obrázek 5.7: Různé hodnoty zeropaddingu u metody Angular při propagační vzdálenosti $\Delta z = 500$ mm. Černá křivka - 3000 nul, zelená křivka - 1000 nul a červená - 100 nul.

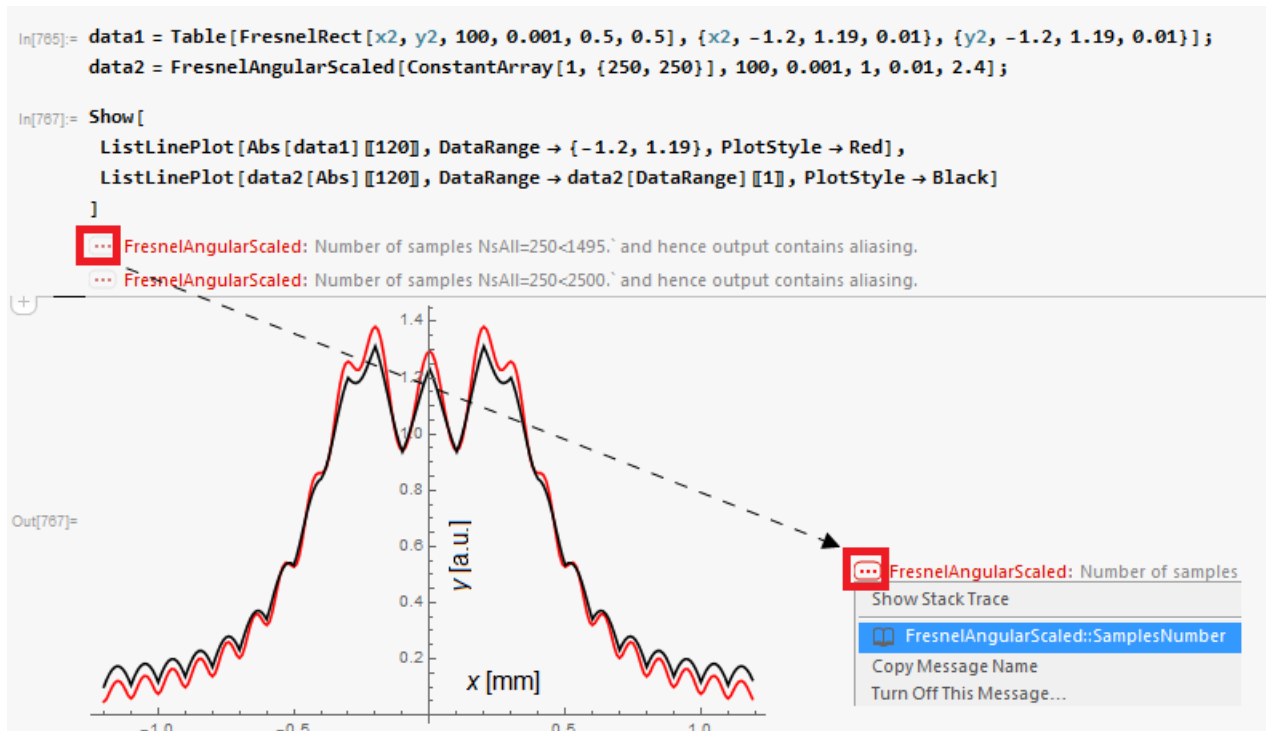


Obrázek 5.8: Různé hodnoty zeropaddingu u metody Angular při propagační vzdálenosti $\Delta z = 100$ mm. Černá křivka - 800 nul a červená - 100 nul.

5.3 Demonstrace numerických chyb při špatně zvolených propagačních parametrech

Pro tuto ukázkou je znovu zvolena rektangulární apertura s vlnovou délkou $\lambda = 0,001$ mm, $D_1 = 1$ mm a propagační vzdáleností $\Delta z = 100$ mm. Jsou porušeny vzorkovací požadavky metody `FresnelAngularScaled`, platnost fyzikálních aproximací zůstává. Na obrázku 5.9) je vidět odchylení černého signálu s *aliasingem* od červeného exaktního signálu. V signálu jsou zesíleny vysoké frekvence a je to patrné na ostrých hranách. Implemento-

vané algoritmy vždy upozorní, jestli je porušena podmínka pro rozteče, počty vzorků nebo propagační vzdálenosti.



Obrázek 5.9: Srovnání amplitud metody *FresnelAngularScaled* - modrá a *FresnelRect* - červená. Propagační vzdálenost $\Delta z = 100$ mm. Algoritmus upozornil na nedostatečný počet vzorků (zde byl záměrně vypnut automatický "ZeroPadding"->False). Upozornění na chybu je možné rozkliknout a zjistit jméno porušené podmínky.

Závěr

V diplomové práci je stručně zmíněna teorie difrakce a především skalární difrakce spolu s diskretizací skalárních difrakčních integrálů Rayleigh-Sommerfeld 1 ve formě úhlového spektra, Fresnel ve formě jediné Fourierovy transformace a Fraunhofer. Byla provedena rešerše a prezentováno bohaté spektrum moderních metod pro numerický výpočet skalárních difrakčních integrálů. Bylo vybráno a implementováno několik praktických metod. Zdůrazněny byly výhody a nevýhody implementovaných metod. Důležitou částí byla diskuse podmínek pro bezchybné vzorkování skalárních difrakčních integrálů a byly klasifikovány numerické chyby, které se mohou při porušení vzorkovacích podmínek objevit ve výstupech algoritmů. Hlavním přínosem je naprogramování, *debugging* a vytvoření návodu k balíčku funkcí s názvem `OpticalWavesDiffraction` pro software Wolfram Mathematica pro oddělení vývoje měřících metod ve společnosti Meopta. Balíček prozatím obsahuje více než šedesát funkcí. Všechny se netýkají pouze výpočetní difrakce, účelem ostatních je alespoň drobné zefektivnění některých úkonů na vývojovém oddělení. Příkladem můžou být jednoduché funkce FT a IFT realizující FFT a IFFT včetně centrování počátku souřadnic zpracovávaného signálu.

Implementované numerické difrakční metody obsahují vnitřní funkce, které kontrolují správnost vzorkování podle předpisu z odborné literatury. Namísto původně plánované automatizace výběru optimálních parametrů, každá metoda upozorní formou chybového hlášení, pokud zvolené parametry porušují vzorkovací podmínky. Metody řešící Fresnelovu difrakci byly srovnány s analytickým řešením na čtvercové apertuře a byla ověřena přesnost obdržených výsledků. Ukázka vhodnosti základního úhlového spektra pro kratší vzdálenosti byla demonstrována.

Přehledná struktura balíčku je připravena na budoucí snadné rozšiřování o nové funkce a metody.

Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] BORN, Max a Emil WOLF. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, c1999. ISBN 0-521-64222-1.
- [2] GOODMAN, Joseph W. *Introduction to Fourier optics*. 3rd ed. Englewood, Colo.: Roberts & Co., c2005. ISBN 9780974707723.
- [3] SCHMIDT, Jason Daniel. *Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB*. Bellingham, Wash.: SPIE, c2010. ISBN 0819483265.
- [4] MATSUSHIMA, Kyoji a Tomoyoshi SHIMOBABA. Band-limited angular spectrum method for numerical simulation of free-space propagation in far and near fields. *Optics Express* [online]. 2009, **17**(22), 19662- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/OE.17.019662. ISSN 1094-4087. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-17-22-19662>
- [5] LI, Jun-chang, Caojin YUAN, Patrice TANKAM a Pascal PICART. The calculation research of classical diffraction formulas in convolution form. *Optics Communications* [online]. 2011, **284**(13), 3202-3206 [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1016/j.optcom.2011.03.024. ISSN 00304018. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0030401811002951>
- [6] KELLY, Damien P. Numerical calculation of the Fresnel transform. *Journal of the Optical Society of America A* [online]. 2014, 31(4), 755- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000755. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-31-4-755>
- [7] YU, Xiao, Tang XIAHUI, Qin YINGXIONG, Peng HAO a Wang WEI. Band-limited angular spectrum numerical propagation method with selective scaling of observation window size and sample number. *Journal of the Optical Society of America A* [online]. 2012, 29(11), 2415- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/JOSAA.29.002415. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-11-2415>

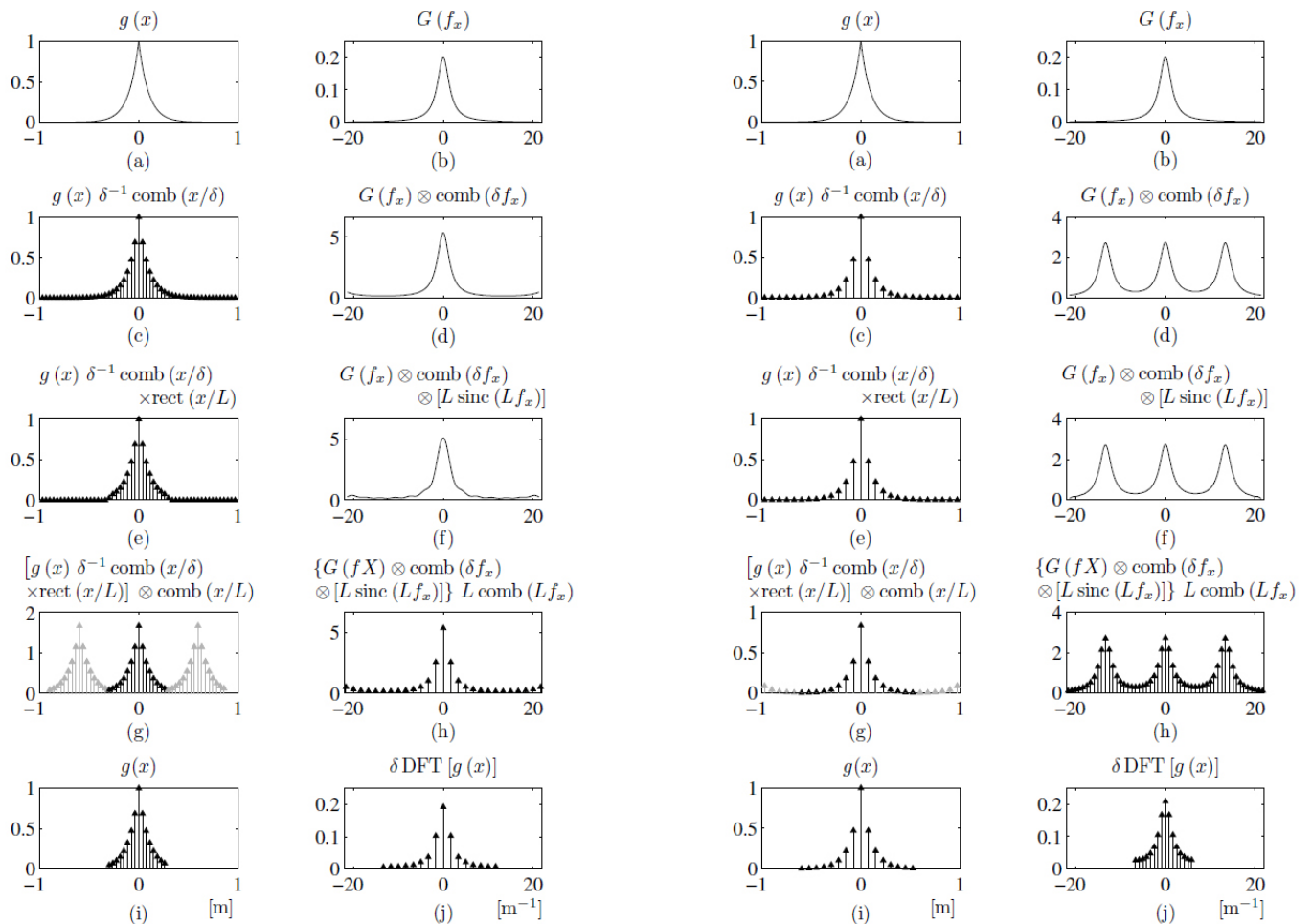
- [8] STERN, Adrian a Bahram JAVIDI. Sampling in the light of Wigner distribution. *Journal of the Optical Society of America A* [online]. 2004, 21(3), 360- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/JOSAA.21.000360. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-21-3-360>
- [9] LIU, Jung-Ping. Controlling the aliasing by zero-padding in the digital calculation of the scalar diffraction. *Journal of the Optical Society of America A* [online]. 2012, 29(9), 1956- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/JOSAA.29.001956. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-29-9-1956>
- [10] OKADA, Naohisa, Tomoyoshi SHIMOBABA, Yasuyuki ICHIHASHI, et al. Band-limited double-step Fresnel diffraction and its application to computer-generated holograms. *Optics Express* [online]. 2013, 21(7), 9192- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/OE.21.009192. ISSN 1094-4087. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-21-7-9192>
- [11] HWANG, Chi-Young, Seungtaik OH, Il-Kwon JEONG a Hwi KIM. Stepwise angular spectrum method for curved surface diffraction. *Optics Express* [online]. 2014, 22(10), 12659- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/OE.22.012659. ISSN 1094-4087. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-22-10-12659>
- [12] YU, Xiao, Tang XIAHUI, Qin Ying XIONG, Peng HAO a Wang WEI. Wide-window angular spectrum method for diffraction propagation in far and near field. *Optics Letters* [online]. 2012, 37(23), 4943- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/OL.37.004943. ISSN 0146-9592. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ol-37-23-4943>
- [13] ASOUBAR, Daniel, Site ZHANG, Frank WYROWSKI a Michael KUHN. Efficient semi-analytical propagation techniques for electromagnetic fields. *Journal of the Optical Society of America A* [online]. 2014, 31(3), 591- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000591. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-31-3-591>
- [14] KIM, Yong-Hae, Chun-Won BYUN, Himchan OH, et al. Non-uniform sampling and wide range angular spectrum method. *Journal of Optics* [online]. 2014, 16(12), 125710- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1088/2040-

8978/16/12/125710. ISSN 2040-8978. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/2040-8986/16/i=12/a=125710?key=crossref.4f396dfa9590c91fabb2f5c920afc442>

- [15] *10 Tips for Writing Fast Mathematica Code* [online]. [cit. 2017-07-22]. Dostupné z: <http://blog.wolfram.com/2011/12/07/10-tips-for-writing-fast-mathematica-code/>
- [16] SHEN, Fabin a Anbo WANG. Fast-Fourier-transform based numerical integration method for the Rayleigh-Sommerfeld diffraction formula. *Applied Optics* [online]. 2006, 45(6), 1102- [cit. 2018-01-07]. DOI: 10.1364/AO.45.001102. ISSN 0003-6935. Dostupné z: <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=ao-45-6-1102>
- [17] *XFT2D: A 2D Fast Fourier Transform* [online]. [cit. 2018-01-01]. Dostupné z: <http://demonstrations.wolfram.com/XFT2DA2DFastFourierTransform/>
- [18] Fractional Fourier Transform. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Wikimedia Foundation. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_Fourier_transform

Příloha

Obrázková příloha



Obrázek P.1: Vlevo je grafický vývoj DFT z analytické FT. Vpravo to stejné, ale s větší velikostí vzorku. Převzato z [3].

Obsah CD-ROM

/Package/

- OpticalWavesDiffraction.m
- OpticalWavesDiffraction.nb
- Exhibition.nb

/Kvalifikační práce/

- Dp_Stepan_Venos.pdf