VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TEORIE LIEOVÝCH GRUP V ROBOTICE
LIE GROUPS THEORY IN ROBOTICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE PETR HORNÍK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Mgr. JAROSLAV HRDINA, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Petr Horník

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Teorie Lieových grup v robotice

v anglickém jazyce:

Lie groups theory in robotics

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Lieova teorie je převážně teorií Lieových grup a Lieových algeber a jedná se o teorii na pomezí diferenciální geometrie a lineární (maticové) algebry. Popis kinematických systému aparátem Lieovy teorie umožňuje přehlednější popis kinematických systému a jejich následné řešení.

Cíle bakalářské práce:

Jako teoretický základ se rozvine aparát lineární algebry a osvojí se základy Lieových grup, Lieových algebry a jejich reprezentací. Důraz bude kladen na význam speciální ortogonální grupy a jejich podgrup pro prostorovou kinematiku. Pro konkrétní příklad grupy afinní transformací budou tyto poznatky následně aplikovány při popisu jednodušších robotických systému. Výpočty se budou realizovat ve zvoleném matematickém software (Mathematica, Maple, ...).

Seznam odborné literatury:

-- Karger A.,Kargerová M., Základy robotiky a prostorové kinematiky, ČVUT, 2000
-- Karger A.,Novak.J., Prostorová kinematika a Lieovy grupy.
TKI, SNTL, Praha 1978, 384 s.
-- Selig, J.M., Geometric Fundamentals of Robotics, Monographs in Computer Science, Springer, 2005, 398 s.
-- Stillwell, J, Naive Lie Theory, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008, 218 s.
--Rousseau Ch., Mathematics and Technology, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology Springer (2008)
-- Motl, L. - Zahradník, M. Pěstujeme lineární algebru, Praha : Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2002. 348 s.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 30.10.2012

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c. Děkan fakulty

Abstrakt
V této bakalářské práci se zaměříme na matematický popis dopředné kinematiky v trojrozměrném prostoru pomocí ortogonálních transformací a teorie matic. Užitím nabytých znalostí řešíme příklad metodou pohyblivého repéru, kdy mezi jednotlivými bázemi přecházíme pomocí matice přechodu a příklad implementujeme v prostředí programu MATLAB. Následně hledáme hlubší souvislosti s exponenciálními funkcemi a rozšíříme teorii o teorií Lieových grup a algeber. Zvláště si všímáme speciální ortogonální grupy $SO(3)$. Nakonec teorii obohatíme o homogenní transformaci a speciální Eukleidovskou grupu.

Summary
In this thesis we focus on the mathematical description of the forward kinematics in three-dimensional space using orthogonal transformations and matrix theory. Applying the acquired knowledge we solve an example using the method of moving frame. Between bases we pass using the passage matrix and we implement the example in the MATLAB environment. Consequently, we focus on deeper relation with exponential functions and extend the theory by the theory of Lie groups and algebras. Especially, we take notice of the special orthogonal group $SO(3)$. Finally, we enrich the theory with homogeneous transformation and special Euclidean group.

Klíčová slova
rotace, změna bází, pohyblivý repér, Lieova teorie, speciální ortogonální grupa, exponenciální funkce, homogenní transformace, polopřímý součin

Keywords
rotation, change of basis, moving frame, Lie theory, special orthogonal group, exponential function, homogeneous transformation, semi-direct product

HORNÍK, P. *Teorie Lieových grup v robotice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 47 s. Vedoucí Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Teorie Lieových grup v robotice*, vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Petr Horník

Děkuji svému školiteli Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za četné rady, připomínky a trpělivost při vedení mé bakalářské práce.

Petr Horník

Obsah

1 Úvod **13**

2 Matematické základy **15**
2.1 Shodnosti . . . 15
2.2 Ortogonální matice . . . 18
2.3 Matice přechodu . . . 24

3 Metoda pohyblivého repéru **28**

4 Lieova teorie **32**
4.1 Exponenciální funkce . . . 32
4.2 Lieovy algebry . . . 34
4.3 Lieovy grupy . . . 35

5 Afinní rozšíření **40**
5.1 Translace . . . 40
5.2 Homogenní transformace . . . 40
5.3 Eukleidovská Lieova grupa a algebra . . . 42

6 Závěr **44**

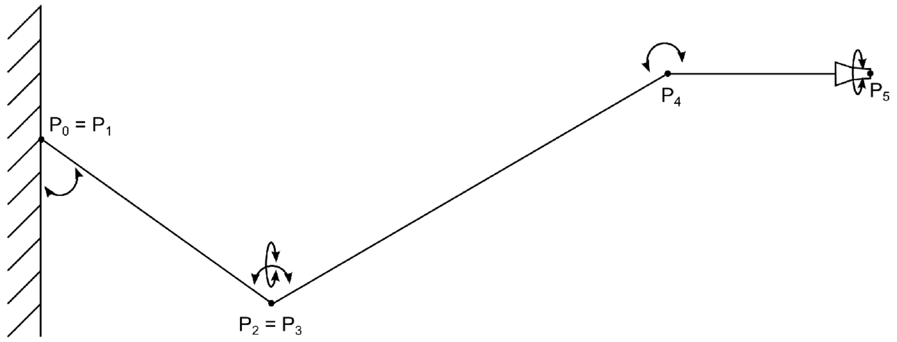
7 Seznam použitých zkratek a symbolů **46**

8 Seznam příloh **47**

1. Úvod

Obliba robotických systémů dnes stoupá. Roboti za nás mohou dělat monotónní úkony při pásové výrobě, navíc s přesností, které lidé nejsou schopni. Využívají se také v nebezpečných a těžko přístupných místech, ať se jedná o průzkum zřícených budov nebo vesmíru. Svoji nezastupitelnou roli mají také ve zdravotnictví a armádě. Většina těchto robotů má různá robotická ramena - analogie lidských končetin a právě ta nás budou v tomto textu zajímat.

Robotické rameno představuje *mechanismus*. Části, z nichž je tento mechanismus tvořen a které jsou vzájemně pohyblivě spojeny, se nazývají *kinematickými členy*. Dva členy, které jsou vzájemně spojeny a pohybují se vzhledem k sobě, se nazývají *kinematická dvojice*. Pohyblivé spojení se u robotů nazývá *kloub*. Kinematický člen, který se nepohybuje a je pevně spojen s prostředím, se nazývá *rám*. Podle něj se obvykle volí základní souřadný systém. Takový mechanismus se také nazývá *kinematický řetězec*. Vzájemná poloha dvou členů vázaných kloubem je jednoznačně stanovena určitým počtem údajů, nejmenší počet těchto údajů udává počet *stupňů volnosti* kinematické dvojice. Kinematické dvojice, z nichž jsou sestavena ramena průmyslových robotů, jsou téměř výhradně tvořeny členy spojenými *rotačními* nebo *translačními* (prizmatickými) klouby, které mají jeden stupeň volnosti.



Obrázek 1.1: Příklad robotického ramena

Z mechaniky je známo, že poloha a orientace tělesa v prostoru je charakterizována šesti údaji. Většinou jsou to hodnoty $[x, y, z]$ souřadnic nějakého referenčního bodu tělesa v základním kartézském souřadném systému a úhly $[\alpha, \beta, \gamma]$ natočení nějakého referenčního systému, pevně s tělesem spojeného, vzhledem k tomuto základnímu souřadnému systému. Říkáme, že volné těleso má v prostoru 6 stupňů volnosti. Je tedy zřejmé, že manipulátor musí mít nejméně 6 volně a snadno nastavitelných veličin - proměnných. Aby uchopený předmět dokázal volně polohovat, musí mít rovněž 6 *stupňů volnosti*. To je mechanicky zajišťováno *osami - klouby*, které jsou poháněny či nastavovány pohony. Poznamenejme, že u robotů je zvykem používat pojem kloub a u obráběcích strojů pojem osa.

I když má rameno 6 kloubů, nemusí být schopno s uchopeným předmětem volně manipulovat v prostoru. Šest kloubů je tedy pouze podmínka nutná, nikoliv postačující pro volnou - plnou manipulovatelnost s předmětem. Klouby zřejmě musí být vhodným způsobem uspořádány. Další omezení pohybu mohou být způsobena dorazy a geometrickými rozměry ramena. Tato omezení stanovují *pracovní prostor* ramena.

Je zřejmé, že znalost kloubových souřadnic nám umožňuje jednoznačně určit hodnoty souřadnic koncového členu manipulátoru v kartézském prostoru. Označíme-li si vektor kloubových souřadnic $q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$ u robota s vhodně zvolenými šesti klouby a vektor pozice koncového členu robota - *chapadla* $P = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$, pak existuje jednoznačné zobrazení z prostoru kloubových souřadnic do prostoru kartézských souřadnic $P = f(q)$, což představuje 6 rovnic, které jsme schopni sestavit na základě geometrie. Nalezení těchto rovnic je *dopředná kinematická úloha.* Pohyb robota tedy můžeme naprogramovat v prostoru kloubových souřadnic a robot vykoná příslušný pohyb v kartézských souřadnicích. Někdy ovšem musíme řešit obrácenou úlohu, tj. ze znalostí pozice P umět vypočítat hodnoty kloubových souřadnic, to je *inverzní kinematická úloha.* Tato úloha je mnohem složitější, než přímá úloha kinematiky a může mít nekonečně mnoho řešení.

Zaměříme se na matematický popis dopředné kinematiky v trojrozměrném prostoru, kdy známe parametry robota a ptáme se na polohu koncového chapadla. Musíme si uvědomit, že když pootočíme jedním kloubem, tak to ovlivní polohu všech následných prvků, zatímco předešlé zůstanou nezměněny. Polohu chapadla vyjádříme v konkrétním souřadném systému. K tomu budeme využívat transformaci souřadnic mezi zvolenými souřadnými systémy.

V kapitole Matematické základy si připomeneme potřebné základy lineární algebry, především teorii matic, protože rotace lze popsat ortogonálními maticemi. Pomocí nabytých znalostí vyřešíme vzorový příklad metodou pohyblivého repéru. Následně budeme hledat souvislosti s exponenciálními funkcemi a teorií Lieových grup.

2. Matematické základy

V této kapitole se seznámíme s poznatky z dopředné kinematiky robotického ramena a potřebnými definicemi. Nalezneme pohyby v prostoru zachovávající délky a úhly, kterým se obvykle říká shodnosti. Tyto vlastnosti jsou velmi důležité, protože zaručí, že jednotlivé kinematické členy v našem matematickém modelu nebudou měnit velikost a tvar stejně jako v reálném světě. Budeme při tom využívat vlastností ortogonálních matic, zavedeme různé vztažné soustavy pro popis robota a budeme mezi nimi přecházet pomocí matic přechodu. Poznatky budou ukázány na názorných příkladech. Následující kapitola vychází z [3] a [11], kde je úvod do problematiky přehledně zpracován a využívá poznatků lineární z algebry [6] a [9]. V citované literatuře lze dohledat případné chybějící důkazy uváděných tvrzení.

2.1. Shodnosti

Předpokládejme takovou lineární transformaci, která zachovává délky a úhly. Uvidíme, že jsou to takové transformace, jejichž matice je ortogonální a takové transformace se nazývají *ortogonální transformace*. Příkladem takové transformace v $\mathbb{R}^3$ je rotace kolem osy procházející počátkem.

Nyní si krátce připomeneme vlastnosti lineární transformace. Ačkoliv poznatky platí obecně v $\mathbb{R}^n$, tak nás bude zajímat především případ $\mathbb{R}^3$ a někdy pro jednoduchost jeho podprostor $\mathbb{R}^2$.

Poznámka. Souřadnice vektoru v budeme značit sloupcovou maticí $n \times 1$ jako $[v]$ pokud se jedná o souřadnice vektoru ve standardní bázi nebo $[v]_{\mathcal{B}}$, kde $\mathcal{B}$ značí konkrétní bázi. Později tento zápis budeme využívat při změnách bází. Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti však ze začátku využíváme pouze standardní bázi.

Věta 2.1. *Nechť $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární transformace, jinými slovy transformace splňující následující vlastnosti:*

$$\begin{aligned} T(v+w) &= T(v) + T(w), \quad && \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \\ T(\alpha v) &= \alpha T(v), && \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. *Existuje jediná matice A typu $n \times n$ taková, že souřadnice $T(v)$ ve standardní bázi jsou dány $A[v]$ pro $\forall v \in \mathbb{R}^n$:*
$$[T(v)] = A[v].$$
2. *Transformační matice A je zkonstruována tak, že sloupce A jsou souřadnice obrazů vektorů standardní báze $\mathbb{R}^n$ ve standardní bázi.*

Důkaz. Nejprve dokážeme druhou část tvrzení. Standardní bázi tvoří vektory

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Spočítáme $[T(e_1)]$:

$$[T(e_1)] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

a stejný postup opakujeme pro všechny vektory standardní báze a vidíme, že matice A je tvořena sloupci obsahujícími souřadnice $[T(e_i)]$. Je zřejmé, že platí první část tvrzení tj. $[T(v)] = A[v]$.

Skutečnost, že sloupec matice obsahuje souřadnice $[T(e_i)]$, které jsou dány jednoznačně, zajišťuje jednoznačnost matice A.

□

Definice 2.2. 1. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times n$. Matice transponovaná k matici A je $A^T = (b_{ij})$, kde*

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

2. *Matice A je ortogonální jestliže její inverzní matice se rovná transponované, tj. jestliže $A^T = A^{-1}$ nebo ekvivalentně*

$$AA^T = A^T A = I,$$

kde I je jednotková matice $n \times n$.

3. *Lineární transformace je ortogonální jestliže je její matice ve standardní bázi ortogonální.*

Definice 2.3. *Nechť $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor. Skalární součin dvou vektorů $v = (x_1, \dots, x_n)$ a $w = (y_1, \dots, y_n)$ z $\mathbb{R}^n$ definujeme jako*

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Definice 2.4. *Nechť $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$. Pro $v \in V$ položíme*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Číslo $\|v\|$ se nazývá norma nebo délka nebo někdy též velikost vektoru v.

Definice 2.5. *Nechť $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$. Úhel α dvou vektorů $v, w \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako*

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Tvrzení 2.6. 1. *Jestliže A je matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, pak platí*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

2. *Pro skalární součin dvou vektorů $v, w \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\langle v, w \rangle = [v]^T [w].$$

Definice 2.7. *Nechť $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\ ,\ \rangle$. Množina $\{e_1, \ldots, e_m\}$ je ortogonální jestliže*

1. $e_i \neq (0, \ldots, 0)$ *pro každé* $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$,
2. $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ *pro všechna* $i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq m, i \neq j$.

Jestliže platí i další podmínka

3. $\| e_i \| = 1$ *pro každé* $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$,

nazývá se množina $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormální množina.

Definice 2.8. *Báze $e_1, \ldots, e_n$ se nazývá ortogonální resp. ortonormální jestliže množina $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je ortogonální resp. ortonormální.*

Věta 2.9. 1. *Matice $n \times n$ je ortogonální právě tehdy, když její sloupcové vektory tvoří souřadnice ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$.*

2. *Lineární transformace $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachovává délky a úhly právě tehdy, když je její matice ortogonální.*

Důkaz. 1. Připomeňme, že sloupce A jsou dány $X_i = A[e_i], i = 1, \ldots, n$, kde X_i jsou $n \times 1$ matice. Píšeme

$$A = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n).$$

Potom transpozice $X_1^T, \ldots, X_n^T$ jsou řádkové $1 \times n$ matice. když vyjádříme matici A^T dostáváme

$$A^T = \begin{pmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{pmatrix}.$$

Nyní provedeme součin matic $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_n^T \end{pmatrix} (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n) = \begin{pmatrix} X_1^T X_1 & X_1^T X_2 & \cdots & X_1^T X_n \\ X_2^T X_1 & X_2^T X_2 & \cdots & X_2^T X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^T X_1 & X_n^T X_2 & \cdots & X_n^T X_n \end{pmatrix}.$$

Nechť T je lineární transformace s maticí A. Potom máme

$$X_i^T X_j = (A[e_i])^T A[e_j] = [T(e_i)]^T [T(e_j)] = \langle T(e_i), T(e_j) \rangle.$$

Matice A je ortogonální právě tehdy, když $A^T A = I$. To znamená, že čísla na diagonále jsou samé jedničky a tudíž skalární součin každého vektoru $T(e_i)$ se sebou samým je roven jedné. A protože skalární součin je roven druhé odmocnině délky vektoru, tak můžeme prohlásit, že vektory $T(e_i)$ mají délku jedna. Ostatní čísla mimo diagonálu jsou nuly právě tehdy, když $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = 0$ pro $i \neq j$. Tudíž matice A je ortogonální právě tehdy, když vektory $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ jsou ortogonální a každý má délku jedna, proto tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.

2. Nejprve začneme dokazovat opačný směr, který tvrdí, že jestliže T je lineární transformace s ortogonální maticí, potom T zachovává úhly. Podle důkazu první části tvoří obrazy vektorů standardní báze ortonormální bázi. Můžeme se snadno přesvědčit, že lineární transformace zachovává délky a úhly právě tehdy, když zachovává skalární součin, tj. $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ pro všechny vektory v, w. Pozorujme, že skalární součin je zachován, jestliže A je ortogonální:

$$\langle T(v), T(w)\rangle = (A[v])^T(A[w]) = ([v]^T A^T)(A[w]) =$$

$$= [v]^T(A^T A)[w] = [v]^T I[w] = [v]^T[w] = \langle v, w\rangle.$$

Protože délka i úhel je definovaný pomocí skalárního součinu, vidíme, že ortogonální transformace zachovává délky a úhly.

Druhý směr vychází z předpokladu, že T zachovává délky a úhly. Předpokládejme, že $A^t A = b_{ij}$. Nechť $v = e_i$ a $w = e_j$. Pak máme $[T(v)] = A[v]$ a $[T(w)] = A[w]$. Dále

$$\langle v, w\rangle = \langle T(v), T(w)\rangle = (A[v])^T(A[w]) = ([v]^T(A^T A))[w] = (b_{i1}, \dots, b_{in})[w] = b_{ij}.$$

Protože $\langle v, w\rangle = [v]^T[w] =$ dostáváme $[v]^T[w] = b_{ij}$. Což je ekvivalentní s tvrzením $A^T A = I$. Proto A je ortogonální.

$\square$

2.2. Ortogonální matice

Nyní se pokusíme ortogonální transformaci T popsat pomocí geometrických pojmů. Při pohledu na matici A je těžké si představit pohyb v $\mathbb{R}^n$. Víme jen, že matice je ortogonální a tedy transformace zachovává úhly a délky. Důležitým nástrojem pro zjištění chování T je diagonalizace matice A. Když provádíme diagonalizaci matice, tak vlastně měníme bázi lineární transformace na systém, ve kterém jsou koeficienty jednodušší a chování transformace snadněji pochopitelné. Než provedeme s maticí potřebné úpravy, zavedeme odpovídající definice.

Definice 2.10. *Nechť $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární transformace s maticí A. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo T (nebo matice A) jestliže existuje nenulový vektor $v \in \mathbb{C}^n$ takový, že $T(v) = \lambda v$ (nebo $A[v] = \lambda[v]$). Každý vektor v s touto vlastností se nazývá vlastní vektor vlastního čísla λ.*

Věta 2.11. *Nechť $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární transformace s maticí A.*

1. *Vlastní čísla lineární transformace jsou stejná jako vlastní čísla její matice transformace a nezáleží na volbě báze. Stejně tak vlastní vektory.*

2. *Množina vlastních vektorů vlastního čísla λ tvoří lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$, nazývaný vlastní podprostor vlastního čísla λ.*

3. *Vlastní čísla jsou kořeny polynomu*

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

stupně n. Polynom $P(\lambda)$ se nazývá charakteristický polynom transformace T (nebo matice A).

4. *Nechť $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak v je vlastní vektor λ právě tehdy když $[v]$ je řešením homogenního systému lineárních rovnic:*

$$(\lambda I - A)\,[v] = 0.$$

Poznámka. Pro symetrickou matici A existuje ortonormální matice podobnosti Q taková, že matice

$$D = Q^T A Q$$

je diagonální. Přičemž

$$Ax = \lambda x \Longleftrightarrow Dy = \lambda y, \quad x = Qy.$$

Tedy i-tý sloupec q_i matice $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu d_i matice $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Této skutečnosti se dá využít při výpočtu vlastních čísel a vektorů symetrických matic. Více o dané problematice např. v [2].

Příklad 2.12. Nechť T je ortogonální transformace s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

O její ortogonalitě se přesvědčíme snadno

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Abychom diagonizovali A, začneme s výpočtem charakteristického polynomu

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & \lambda + 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & \lambda + 2/3 \end{vmatrix}.$$

Máme

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

Z toho vidíme, že matice má dvě vlastní čísla 1 a -1.

Vlastní vektory náležející vlastnímu číslu $\lambda = 1$:
Abychom je našli, potřebujeme vyřešit systém $(I - A)[v] = 0$. Proto převedeme matici $I - A$ na schodovitý tvar. Použijeme Gaussovu eliminaci

$$I - A = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že všechna řešení jsou násobky vlastního vektoru $v_1 = (2, 1, 1)$.

Vlastní vektory náležející vlastnímu číslu $\lambda = -1$:
Jsou řešením systému $(-I - A)[v] = 0$, který je ekvivalentní systému $(I + A)[v] = 0$. Abychom je našli, převeďme matici opět na schodovitý tvar

$$I + A = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tady je řešením rovina generovaná dvěma vektory $v_2 = (1, -2, 0)$ a $v_3 = (1, 0, -2)$. A protože je užitečné pracovat s ortonormálními bázemi, nahradíme vektor v_3 vektorem $v_3' = (x, y, z)$, který je kolmý k v_2 a leží v rovině generované těmi dvěma vektory. Proto musí splňovat $2x + y + z = 0$, aby byl vlastním vektorem -1 a aby byl kolmý s v_2, tak musí splňovat $x - 2y = 0$. Řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

je $v_3' = (2, 1, -5)$. Aby báze byla ortonormální, podělíme každý vektor jeho délkou

$$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

Tato ortonormální báze dává matici

$$P = ([w_1], [w_2], [w_3]) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

a matice transformace T je dána

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geometricky máme $T(w_1) = w_1, T(w_2) = -w_2$ a $T(w_3) = -w_3$. Vidíme, že tato transformace je osová souměrnost podle podle osy w_1 nebo na ni můžeme také nahlížet jako rotaci kolem osy w_1 o úhel π. Vidíme, že nám diagonalizace může pomoci porozumět transformaci.

Tvrzení 2.13. *1. Nechť A je matice typu $n \times n$. Pak*

$$\det A^T = \det A.$$

2. Nechť A a B jsou matice typu $n \times n$. Pak

$$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

Věta 2.14. *Ortogonální matice má vždy determinant roven +1 nebo -1.*

Důkaz. Z tvrzení 2.13 máme

$$\det(AA^T) = (\det A)\,(\det A^T) = (\det A)^2$$

Navíc pro ortogonální matici platí $AA^T = I$ z čehož plyne $\det(AA^T) = 1$ a proto $(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$ $\square$

Shodnosti, pro které je $\det A = 1$ se nazývají přímé. Rotace a v afinním rozšíření i posunutí je shodnost přímá (převádí pravotočivé báze do pravotočivých). Je-li $\det A = -1$ nazývá se shodnost nepřímou. Příkladem je osová souměrnost. Nepřímá souměrnost orientaci prostoru mění a pohybem nelze převést pravotočivou bázi na levotočivou. Příkladem může být odraz ruky v zrcadle. Dále se budeme zabývat jen přímými shodnostmi, tj. shodnostmi s $\det A = 1$.

Vlastní čísla ortogonálních transformací však nemusí být nutně pouze reálná, obecně jsou komplexní.

Připomenutí komplexních čísel

- Komplexní čísla jsou tvaru $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$.
- Sdruženým číslem ke komplexnímu číslu $z = x + iy$ je komplexní číslo $\overline{z} = x - iy$.
- Když z_1 a z_2 jsou komplexní čísla, tak platí

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2}. \end{aligned}$$

- Číslo z je reálné právě tehdy, když $z = \overline{z}$.
- Absolutní hodnota, také nazývaná norma nebo modul komplexního čísla $z = x + iy$ je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Tvrzení 2.15. *Jestliže A je reálná matice a $\lambda = a + ib$ s $b \neq 0$ je komplexní vlastní číslo matice A s vlastním vektorem v, pak $\overline{\lambda} = a - ib$ je také vlastní číslo A s vlastním vektorem $\overline{v}$.*

Důkaz. Nechť v je vlastní vektor komplexního čísla λ, tj. $A[v] = \lambda[v]$. Vezměme sdružený výraz $\overline{A[v]} = \overline{A}\,\overline{[v]} = \overline{A}\,[\overline{v}] = \overline{\lambda}\,[\overline{v}]$. Protože A je reálná, máme $\overline{A} = A$. Z toho plyne

$$A[\overline{v}] = \overline{\lambda}\,[\overline{v}],$$

což ukazuje, že $\overline{\lambda}$ je vlastním číslem A s vlastním vektorem $\overline{v}$, přičemž vlastnost $\overline{[v]} = [\overline{v}]$ platí pro standardní bázi triviálně. $\square$

Naším cílem je ukázat, že každá 3×3 ortogonální matice s determinantem 1 odpovídá rotacím o nějaký úhel kolem nějaké osy. Prvně rozebere případ 2×2 ortogonálních matic.

Tvrzení 2.16. *Jestliže A je ortogonální matice typu 2×2 s $\det A = 1$, pak A je matice rotace o úhel θ*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

pro $\theta \in \langle 0, 2\pi)$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = a + ib$ a $\lambda_2 = a - ib$ kde $a = \cos\theta$ a $b = \sin\theta$. Obě jsou reálná právě tehdy když $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi$. V případě $\theta = 0$ obdržíme $a = 1$, $b = 0$ a A je jednotková matice. V případě $\theta = \pi$ obdržíme $a = -1$, $b = 0$ a A je matice rotace o úhel π (dostaneme středovou souměrnost podle počátku).

Důkaz. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Pak, protože $AA^T = I$, pro každý sloupcový vektor musí platit $a^2 + b^2 = 1$ a můžeme zavést

$$\begin{aligned} a &= \cos\theta \\ b &= \sin\theta \end{aligned}$$

Protože jsou oba sloupcové vektory ortogonální, platí $c \cos\theta + d \sin\theta = 0$ a dostáváme

$$\begin{aligned} c &= -C\sin\theta \\ d &= C\cos\theta \end{aligned}$$

pro $C \in \mathbb{R}$. Jelikož druhý sloupcový vektor je také jednotkový, tak z $c^2 + d^2 = 1$ plyne $C^2 = 1$, tzn. $C = \pm 1$. Nakonec máme $\det A = C$ z čehož plyne $C = 1$.
Charakteristický polynom matice A je $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2a\lambda + 1$ s kořeny $a \pm \sqrt{a^2 - 1} = a \pm \sqrt{\cos\theta^2 - 1} = a \pm \sqrt{-(1 - \cos\theta^2)} = a \pm i \sin\theta = a \pm ib$.

□

Tvrzení 2.17. *Všechna reálná vlastní čísla ortogonální matice A jsou rovna ± 1.*

Důkaz. Nechť λ je reálné vlastní číslo a nechť v je odpovídající vlastní vektor. Nechť T je ortogonální transformace s maticí A. Protože T zachovává délky a úhly, máme $\langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle$. Ale $T(v) = \lambda v$, proto $\langle T(v), T(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$. Nakonec $\lambda^2 = 1$. □

Tvrzení 2.18. *Jestliže A je ortogonální matice typu 3×3 s determinantem 1, potom 1 je vždy vlastní číslo matice A. Navíc všechna komplexní vlastní čísla $\lambda = a + ib$ mají normu 1.*

Důkaz. Charakteristický polynom matice A, $\det(\lambda I - A)$, je třetího stupně. Proto má vždy alespoň jeden reálný kořen λ_1, který může nabývat (podle předchozí věty) jen hodnoty 1 nebo -1. Zbylá dvě vlastní čísla λ_2 a λ_3 jsou buď obě reálná nebo komplexní sdružená. Determinant je součin vlastních čísel, proto $1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Jestliže λ_2 a λ_3 jsou reálné, potom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{1, -1\}$. Aby byl jejich součin roven jedné, musí být všechna rovné 1 nebo dvě rovna -1 zbylé rovno 1. Z toho vidíme, že vždy je jedno vlastní číslo rovno jedné. Když λ_2 a λ_3 je komplexní pak $\lambda_2 = a + ib$ a $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = a - ib$ z čehož plyne, že $\lambda_2\lambda_3 = |\lambda_2|^2 = a^2 + b^2$. Jestliže $1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, pak $\lambda_1 = 1$ a $a^2 + b^2 = 1$

□

Věta 2.19. *Jestliže A je ortogonální matice typu 3×3 s determinantem 1, potom A je matice rotace T o úhel θ kolem osy rotace. Jestliže A není jednotková matice, potom osa rotace koresponduje s vlastním vektorem přidruženým k vlastnímu číslu 1.*

Důkaz. Nechť T je ortogonální transformace s maticí A a nechť v_1 je jednotkový vektor vlastního čísla 1. uvažujme podprostor kolmý k v_1:

$$E = \{w \in \mathbb{R}^3 | \langle v_1, w \rangle = 0\},$$

což je podprostor dimenze 2. Protože T zachovává skalární součin máme $T(v_1) = v_1$, a když $w \in E$ pak $\langle T(w), v_1 \rangle = \langle T(w), T(v_1) \rangle = \langle w, v_1 \rangle = 0$ a tedy $T(w) \in E$. Můžeme uvažovat zúžení T_E, transformace T na E. Nechť $\mathcal{B}' = \{v_2, v_3\}$ je ortonormální báze podprostoru E a uvažujme matici B ortonormální transformace T_E v bázi $\mathcal{B}'$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{array}{l} T(v_2) = b_{22}v_2 + b_{32}v_3 \\ T(v_3) = b_{23}v_2 + b_{33}v_3 \end{array}.$$

Protože T_E zachovává skalární součin, pak B musí být ortogonální matice a uvažujme matici $[T]_{\mathcal{B}}$ transformace T vyjádřené v bázi $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, která je ortonormální bází z $\mathbb{R}^3$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{B}} \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je roven determinantu submatice B a determinant matice se nezmění změnou báze. Proto $\det B = \det A = 1$. Z věty 2.16 navíc vyplývá, že matice B je maticí rotace, z čehož plyne

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka. Pokud A je jednotková matice, jedná se o rotaci o nulový úhel a tedy identitu $A = I$.

Věta 2.19 říká, že ortogonální matice A s $\det A = 1$ je maticí rotace. Pro výpočet úhlu rotace můžeme využít stopu matice.

Definice 2.20. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice $n \times n$. Stopa matice A je rovna součtu jejích prvků na diagonále*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Věta 2.21. *Stopa matice je rovna součtu jejích vlastních čísel.*

Idea důkazu. Matice jsou diagonalizovatelné nad $\mathbb{C}$ a na diagonále takové matice leží vlastní čísla. Blíže např. [2]. □

Věta 2.22. *Nechť $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace s maticí A. Pak úhel rotace θ je*

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(A) - 1}{2}. \tag{2.1}$$

Důkaz. Když se podíváme na důkaz 2.16, tak vidíme, že ve výpočtu charakteristického polynomu $[T]_\mathcal{B}$ jsou vlastní čísla $\cos\theta \pm i\sin\theta$ a součet vlastních čísel je $1 + 2\cos\theta$. Podle 2.21 je to také rovno stopě matice $\operatorname{tr}(A)$. □

Definice 2.23. *Vektorový součin dvou vektorů $v = (x_1, y_1, z_1)$ a $w = (x_2, y_2, z_2)$ je*

$$[v, w] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Analýza ortogonální transformace v $\mathbb{R}^3$

Věty 2.19 a 2.22 navrhují postup:

- Nejprve spočítáme $\det A$. Jestliže $\det(A) = 1$, máme jistotu, že 1 je jedním z vlastních čísel A a že transformace je rotace. Jestliže $\det A = -1$, jedná se o kompozici zrcadlení a rotace. Vynásobíme-li matici A maticí zrcadlení $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pak $\det(JA) = \det J \det A = -1 \cdot (-1) = 1$. Pak $A' = JA$ a $\det A' = 1$. Zbytek diskuze se zaměří na případ, kdy $\det A = 1$.
- Zjistíme osu rotace tak, že najdeme vlastní vektor v_1 přidružený k vlastnímu číslu 1.
- Spočítáme úhel rotace pomocí rovnice 2.1.
- Máme dvě možná řešení, protože $\cos\theta = \cos(-\theta)$. Abychom mohli rozhodnout, které řešení je správné, musíme provést test. Zvolíme si vektor w, který je kolmý k vektoru v_1 a spočítáme $T(w)$. Poté spočítáme vektorový součin w a $T(w)$. Výsledkem bude násobek Cv_1, kde $|C| = |\sin\theta|$. Pro úhel θ platí $C = \sin\theta$.

Poznámka. Pro úhel rotace platí pravidlo pravé ruky. Palec ukazuje směr vektoru v_1, kladné úhly jsou ve směru zahnutí zbylých prstů. Proto úhel θ závisí na směru osy rotace. Rotace je tedy určena vektorem v_1 a úhlem θ a je stejná jako rotace kolem osy $-v_1$ o úhel $-\theta$.

2.3. Matice přechodu

Uvažujme lineární transformaci $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{B}$ je bází v $\mathbb{R}^3$. Vyjádřeme vektor v pomocí jeho souřadnic v bázi $\mathcal{B}$

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tj. jestliže $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, pak $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ znamená $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Nechť A je matice popisující transformaci T v bázi $\mathcal{B}$, značíme $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Souřadnice $T(v)$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou určeny

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Stejně jako v případě standardní báze viz věta (2.1) byly sloupce matice A dány souřadnicemi transformovaných vektorů ve standardní bázi, tak v tomto případě jsou sloupce matice A dány souřadnicemi transformovaných vektorů báze $\mathcal{B}$ zapsaných v bázi $\mathcal{B}$. Stačí si uvědomit, že $[v_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0)^T$ atd.

Definice 2.24. *Jestliže máme dvě báze $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, pak matice P taková že:*

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = P[v]_{\mathcal{B}_1},$$

se nazývá matice přechodu z $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$.

Vlastnosti matice přechodu

1. Sloupce matice P jsou souřadnice vektorů báze $\mathcal{B}_1$ v bázi $\mathcal{B}_2$. V případě, že jsou obě báze ortonormální, tak P je ortogonální.

2. Jestliže Q je matice přechodu z $\mathcal{B}_2$ do $\mathcal{B}_1$, pak $Q = P^{-1}$. Sloupce Q jsou souřadnice vektorů $\mathcal{B}_2$ v bázi $\mathcal{B}_1$. Pokud jsou obě báze ortonormální, tak $Q = P^T$ a sloupce matice Q jsou řádky v matici P.

Věta 2.25. *Nechť T je lineární transformace a nechť $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ jsou dvě báze v $\mathbb{R}^n$. Nechť P je matice přechodu z $\mathcal{B}_1$ do $\mathcal{B}_2$. Pak*

$$[T]_{\mathcal{B}_2} = P\,[T]_{\mathcal{B}_1}\,P^{-1}.$$

Důkaz. Nechť $v \in \mathbb{R}^n$. Pro

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2}\,[v]_{\mathcal{B}_2}\,.$$

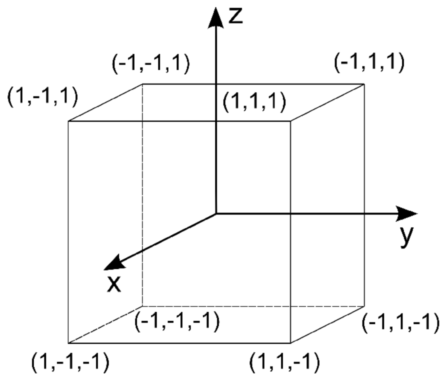
máme

$$\begin{aligned}[T(v)]_{\mathcal{B}_2} &= P[T(v)]_{\mathcal{B}_1} = P([T]_{\mathcal{B}_1}[v]_{\mathcal{B}_1}) = \\ &= P[T]_{\mathcal{B}_1}(P^{-1}[v]_{\mathcal{B}_2}) = (P[T]_{\mathcal{B}_1}P^{-1})[v]_{\mathcal{B}_2}.\end{aligned}$$

Výsledek plyne přímo z těchto rovnic a jednoznačnosti matice $[T(v)]_{\mathcal{B}_i}$, tj. zobrazení T v bázi $\mathcal{B}_i,\ i = 1, 2$. □

Používání různých bází nám dovolí vyřešit složité problémy. Ukázali jsme si, jak nám diagonalizace může pomoci porozumět struktuře lineární transformace. Můžeme postupovat i obráceně, konstruovat transformační matici podle pohybu, jakého chceme dosáhnout. Ukážeme to na příkladu, který byl pro svou názornost převzat z [11].

Příklad 2.26. Uvažujme krychli, jejíž vrcholy jsou umístěny v souřadnicích $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ viz obrázek 2.1. Hledáme dvě matice rotací o úhel $\pm\frac{2\pi}{3}$ kolem osy procházející vrcholy $(-1, -1, -1)$ a $(1, 1, 1)$. Sledujme, že obě rotace zobrazí krychli samu na sebe.



Obrázek 2.1: Krychle

Začneme výběrem báze $\mathcal{B}$, která je vhodná pro problém. Směr prvního vektoru báze je dán osou rotace $w_1 = (1, 1, 1)$. Zbylé dva vektory musí být kolmé k w_1, proto musí splňovat rovnici $x + y + z = 0$. Řešením je například $w_2 = (-1, 0, 1)$. Třetí vektor musí být kolmý k oběma předchozím, proto máme soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

jejímž řešením je například $w_3 = (1, -2, 1)$. A protože chceme pracovat s ortonormální bází, podělíme každý vektor jeho délkou $v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$. Výsledná báze je

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

V této bázi jsou obě transformace rotace kolem osy v_1. Jelikož $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ a $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, jsou rotace $T_\pm$ (v bázi $\mathcal{B}$) dány

$$[T_\pm]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & \pm\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \pm\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní převedeme matici $T_\pm$ do standardní báze $\mathcal{C}$. Použijeme Tvrzení 2.25 a vidíme, že žádaná matice je dána vztahem

$$[T_\pm]_{\mathcal{C}} = P^{-1} \, [T_\pm]_{\mathcal{B}} \, P,$$

kde P je matice přechodu z báze $\mathcal{C}$ do $\mathcal{B}$. Tedy P^{-1} je matice přechodu z báze $\mathcal{B}$ do $\mathcal{C}$, jejíž sloupce obsahují vektory báze $\mathcal{B}$ napsané v bázi $\mathcal{C}$, tj. vektory v_i. A protože $P^{-1} = P^T$, dostáváme

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Z toho plyne, že

$$[T_+]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [T_-]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformace T_+ představuje rotaci kolem osy v_1 o úhel $\frac{2\pi}{3}$. Dochází ke změně vrcholů $(1, 1, -1) \mapsto (-1, 1, 1) \mapsto (1, -1, 1)$ nebo též ekvivalentně $(-1, -1, 1) \mapsto (1, -1, -1) \mapsto (-1, 1, -1)$, zatímco zbylé dva vrcholy zůstávají nezměněny.

Poznámka. $[T_+]_{\mathcal{C}}$ je ortogonální a $T_- = T_+^{-1}$, protože $[T_-]_{\mathcal{C}} = [T_+]_{\mathcal{C}}^{-1} = [T_+]_{\mathcal{C}}^T$.

3. Metoda pohyblivého repéru

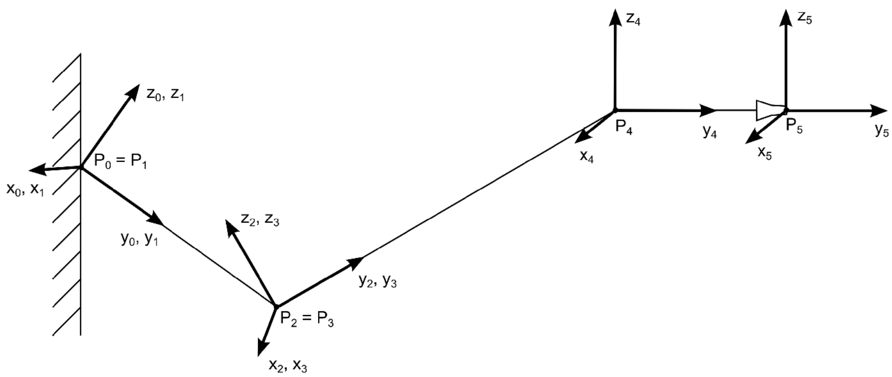
Ukažme si na příkladu, jak využít různé báze a jejich vzájemné transformace při řešení pohybů robotického ramena. Této metodě se také říká metoda pohyblivého repéru.

Definice 3.1. *Vztažná soustava v prostoru se skládá z bodu $P \in \mathbb{R}^3$ nazývaný počátek a báze $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ v $\mathbb{R}^3$. Čtveřice $R = \{P, v_1, v_2, v_3\}$ se také stručně nazývá repérem v $\mathbb{R}^3$.*

Věta 3.2. *Označme přechod z báze $\mathcal{B}_{i+k}$ do $\mathcal{B}_i$ maticí M_i^{i+k}. Pak platí*

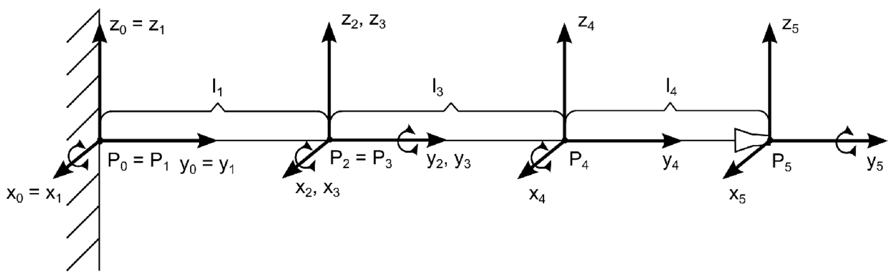
$$M_i^{i+k} = M_i^{i+1} M_{i+1}^{i+2} \dots M_{i+k-1}^{i+k}.$$

Příklad 3.3. Mějme robotické rameno stejné jako na obrázku 1.1 a zvolme si jednotlivé vztažné soustavy (repéry).



Obrázek 3.1: Robotické rameno s repéry

Nyní vztažný systém překresleme pro rameno v napřímené pozici. Jako referenční souřadný systém zvolíme systém s počátkem P_0 a bází $\mathcal{B}_0$. Osy jednotlivých bází $\mathcal{B}_i$ jsou orientovány stejně jako vektory báze $\mathcal{B}_0$. Bázové vektory jsou voleny jednotkové.



Obrázek 3.2: Napřímené robotické rameno s repéry

Ve skutečnosti se jednotlivé repéry budou pohybovat spolu s ramenem. Pohyb v jednom bodě P_i ovlivní všechny následující repéry $R_{i+1}, \dots, R_5$, zatímco repéry $R_1, \dots, R_i$ jsou nezávislé. Pokusme se nyní popsat posloupnost pohybů robota.

První pohyb se skládá z rotace T_1 o úhel θ_1 kolem osy x_0 ve vztažné soustavě R_0. Toto je lineární transformace v bázi $\mathcal{B}_0$ popsaná maticí

$$M_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Následující vztažný systém R_1 je tímto pohybem ovlivněn a získáme ho aplikováním transformace T_1 na R_0. Jako další prvek se v rameni nachází sférický kloub se dvěma stupni volnosti. Rozložíme ho na dva pohyby. Druhým pohybem je rotace T_2 o úhel θ_2 kolem osy y_2 popsána maticí

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Jako třetí pohyb budeme uvažovat rotaci T_3 o úhel θ_3 kolem osy x_3 s maticí

$$M_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}.$$

Čtvrtým pohybem je rotace T_4 o úhel θ_4 kolem osy x_4 daný maticí

$$M_3^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 \\ 0 & \sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}.$$

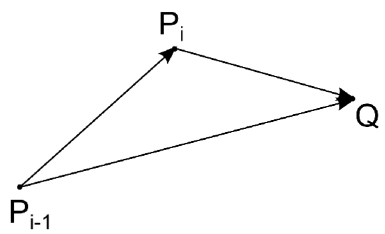
Za pátý pohyb se uvažuje rotace chapadla popsaná maticí

$$M_4^5 = \begin{pmatrix} \cos\theta_5 & 0 & -\sin\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & \cos\theta_5 \end{pmatrix}.$$

Chceme vyjádřit pozici bodu s ohledem na různé vztažné soustavy. Konkrétně pozici bodu Q, kterou známe v bázi $\mathcal{B}_5$ a chceme ji vyjádřit v bázi $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$. Proto budeme počítat, jak se souřadnice mění, budeme-li se postupně pohybovat od jedné vztažné soustavy ke druhé.

Nechť Q je bod v prostoru. Hledání jeho pozice ve vztažné soustavě R_i znamená hledání vektoru $\overrightarrow{P_iQ}$ v bázi $\mathcal{B}_i$, jinými slovy $[\overrightarrow{P_iQ}]_{\mathcal{B}_i}$. Jeho pozice ve vztažné soustavě R_{i-1} je dána

$$[\overrightarrow{P_{i-1}Q}]_{\mathcal{B}_{i-1}} = [\overrightarrow{P_{i-1}P_i}]_{\mathcal{B}_{i-1}} + [\overrightarrow{P_{i-1}Q}]_{\mathcal{B}_{i-1}} = [\overrightarrow{P_{i-1}P_i}]_{\mathcal{B}_{i-1}} + M_{i-1}^i[\overrightarrow{P_{i-1}Q}]_{\mathcal{B}_i}.$$



Použijeme tento přístup postupně pro všechny body P_i, $i = 1, \ldots, 5$ a dostaneme polohu bodu Q závislou na úhlech $\theta_1, \ldots, \theta_5$. Předpokládejme, že známe polohu Q ve vztažné soustavě R_5 označenou $[\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}$:

$$[\overrightarrow{P_4Q}]_{\mathcal{B}_4} = [\overrightarrow{P_4P_5}]_{\mathcal{B}_4} + [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^5[\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}$$

kde l_4 je délka chapadla robota,

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_3Q}]_{\mathcal{B}_3} &= [\overrightarrow{P_3P_4}]_{\mathcal{B}_3} + [\overrightarrow{P_4Q}]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^4 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_4^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}\end{aligned}$$

kde l_3 je délka druhé části robota. V následující transformaci což je vlastně druhá složka sférického pohybu, uvažujeme délku (l_2) jako nulovou a píšeme

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{P_2Q}]_{\mathcal{B}_2} &= [\overrightarrow{P_3Q}]_{\mathcal{B}_2} = M_2^3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5} \right) = \\ &= M_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2^4 \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}\end{aligned}$$

dalším pohybem je

$$[\overrightarrow{P_1Q}]_{\mathcal{B}_1} = [\overrightarrow{P_1P_2}]_{\mathcal{B}_1} + [\overrightarrow{P_2Q}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^3 \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^4 \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_1^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}$$

a nakonec, protože $P_0 = P_1$, dostáváme polohu v souřadné soustavě

$$[\overrightarrow{P_0Q}]_{\mathcal{B}_0} = M_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^3 \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^4 \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}.$$

Protože délky l_0 a l_2 jsou nulové, lze kráceně lze zapsat jako

$$[\overrightarrow{P_0Q}]_{\mathcal{B}_0} = \sum_{i=0}^{4} M_0^i \begin{pmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^5 [\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5}.$$

Inverzně platí

$$[\overrightarrow{P_5Q}]_{\mathcal{B}_5} = M_5^0 [\overrightarrow{P_0Q}]_{\mathcal{B}_0} - \sum_{i=0}^{4} M_5^i \begin{pmatrix} 0 \\ l_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde M_5^i je matice přechodu od $\mathcal{B}_i$ k $\mathcal{B}_5$ a platí $M_5^i = (M_i^5)^{-1} = (M_i^5)^T$.

Součástí příkladu je také jeho realizace v programu MATLAB. Celý skript `Poloha.m` lze nalézt na přiloženém CD, kde lze nastavit konkrétní hodnoty pro rameno se stejnou geometrickou konfigurací jako v příkladu. Vstupem jsou délky jednotlivých kinematických členů a úhly natočení. Výchozí poloha, tj. s nulovými úhly, je v napřímené pozici (obrázek 3.2). Nejprve se předpočítají transformační matice.

```
M01=[1 0 0
   0 cos(theta1) -sin(theta1)
   0 sin(theta1) cos(theta1)];
M12=[cos(theta2) 0 -sin(theta2)
   0 1 0
   sin(theta2) 0 cos(theta2)];
M23=[1 0 0
   0 cos(theta3) -sin(theta3)
   0 sin(theta3) cos(theta3)];
M34=[1 0 0
   0 cos(theta4) -sin(theta4)
   0 sin(theta4) cos(theta4)];
M45=[cos(theta5) 0 -sin(theta5)
   0 1 0
   sin(theta5) 0 cos(theta5)];
M02=M01*M12;
M03=M01*M12*M23;
M04=M01*M12*M23*M34;
M05=M01*M12*M23*M34*M45;
```

Dále je možno zadat polohu uvažovaného bodu Q vyjádřenou v bázi $\mathcal{B}_5$, tj. $[Q]\mathcal{B}_5$. Ve výchozím stavu má nulové souřadnice, tudíž je to poloha koncového bodu chapadla vyjádřená v $\mathcal{B}_5$. Na základě těchto údajů se spočítají poloha bodu Q a jednotlivých kloubů vyjádřených v referenční vztažné soustavě R_0 podle následujícího algoritmu a výsledky vypíši v Command Window.

```
P0 = [0; 0; 0]
P1 = [0; 0; 0]
P2 = M01*[0;L1;0]
P3 = M01*[0;L1;0] + M02*[0;L2;0]
P4 = M01*[0;L1;0] + M02*[0;L2;0] + M03*[0;L3;0]
P5 = M01*[0;L1;0] + M02*[0;L2;0] + M03*[0;L3;0] + M04*[0;L4;0]
Q = M01*[0;L1;0] + M02*[0;L2;0] + M03*[0;L3;0] + M04*[0;L4;0] + M05*Q_B5
```

4. Lieova teorie

Z hlediska geometrie má mimořádný význam speciální třída grup, které se říká Lieovy grupy. Jde o objekty, ve kterých se slučují dva různé aspekty - algebraický (jsou to grupy) a geometrický, resp. diferenciálně-topologický (jsou to hladké variety). Tyto dvě složky se navzájem omezují, ale na druhé straně i nesmírně obohacují - bohatství geometrie na Lieových grupách má svůj původ právě v existenci algebraické struktury grupy.

Obě struktury musí být navzájem kompatibilní. Jedna ze struktur je hladká struktura na varietě. Ta požaduje, aby všechna zobrazení, se kterými přichází do styku, byla hladká. Grupa zase vyžaduje tři základní zobrazení. Požadavek hladkosti se tedy z definice týká právě těchto třech. Následující kapitola čerpá z [7], [8], [14], [1] a [13].

4.1. Exponenciální funkce

Rozšíříme teorii pohybu robotického ramena pomocí exponenciálních funkcí. Jelikož pracujeme s maticemi, tak budeme muset zavést exponenciální funkci pro maticový argument.

Pokud rozvineme Taylorovu řadu funkce $f(x) = e^x$ kolem počátku, dostáváme

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.1}$$

pro všechna reálná x. Zobecníme-li vztah 4.1 i pro matice, můžeme pro každou čtvercovou matici A stupně n definovat matici

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n. \tag{4.2}$$

Řada konverguje absolutně pro jakoukoliv čtvercovou matici A. To je důsledek skutečnosti, že v prostoru čtvercových matic stupně n lze definovat normu matice A, vzhledem ke které řada absolutně konverguje, viz [7].

Vzorec 4.2 nám dává návod, jak numericky maticovou exponenciální funkci spočítat.

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Na jeho základě lze napsat MATLABovskou funkci $Exp(A, k)$, kde A je čtvercová matice a k počet členů řady, které chceme sečíst.

```
function B = Exp(A,k)
[radky,sloupce]=size(A);
switch radky
   case sloupce
      B = zeros(radky);
      for i=0:k-1
         B = B + A^i./faktorial(i);
```

```
      end
   otherwise
      disp('Zadaná matice musí být čtvercová');
end
end

function f = faktorial(n)
f = 1;
for i = 2 : n
   f = f * i;
end
end
```

MATLAB sice obsahuje funkci $expm(A)$, která počítá exponenciální maticovou funkci, ta však neumožňuje sečíst jen určitý počet členů a navíc funguje na jiném principu. Dále je potřeba vzít na vědomí, že existuje i MATLABovská funkce $exp(A)$, která počítá exponenciální funkci po prvcích matice a dostaneme tedy zcela odlišný výsledek. Soubor `Exp.m` lze nalést na přiloženém CD.

Tvrzení 4.1. *Pro matici* $\exp(A)$ *platí:*

1. *Je-li* $AB = BA$*, pak je* $\exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B) = \exp(B)\cdot\exp(A)$.
2. $\exp(-A) = \exp^{-1}(A)$.
3. *Pro každou regulární matici* g *stupně* n *platí* $\exp(gAg^{-1}) = g\exp(A)g^{-1}$.

Důkaz. Tvzení (1) plyne z toho, že absolutně konvergentní řady můžeme libovolně přerovnávat aniž bychom změnili jejich součet, máme

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\binom{n}{i}A^iB^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}A^iB^{n-i} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=0}^{n}\frac{1}{i!j!}A^iB^j = \sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}B^j = \exp(A)\cdot\exp(B).$$

Z prvního tvrzení dále plyne

$$\exp(A-A) = \exp(A)\cdot\exp(-A) = \exp(0) = I,$$

pak dostáváme

$$\exp(-A) = \exp^{-1}(A),$$

tj. tvrzení (2). Dále uvažujme

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}(gAg^{-1})^n = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}(gAg^{-1})\cdot(gAg^{-1})\dots(gAg^{-1}) = g(\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}A^n)g^{-1}.$$

Přechod k limitě dává tvrzení (3). □

Uvažujme dále maticovou funkci $\exp(tA)$ pro danou reálnou proměnnou t. Tato funkce je definována pro každé reálné t mocninnou řadou

$$\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n, \tag{4.3}$$

která je konvergentní pro každé t. Takovou řadu můžeme derivovat člen po členu podle t a dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(tA) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n n t^{n-1} = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1} t^{n-1} \right) = A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \right) = A \cdot \exp(tA).$$

Máme tedy vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(tA) = A \cdot \exp(tA) \tag{4.4}$$

Matici A na prvé straně se říká matice rychlosti.

4.2. Lieovy algebry

Definice 4.2. *Lieova algebra A_L se skládá z vektorového prostoru V (konečné dimenze) nad polem $\mathbb{F}$ a bilineárního zobrazení $[\, , \,] : V \times V \to V$ s vlastnostmi*

1. $[X, X] = 0, \qquad \forall X \in V$
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \qquad \forall X, Y, Z \in V$

Operaci se také říká Lieova závorka. Z vlastnosti (1) okamžitě plyne, že Lieova závorka je antisymetrická

1'. $[X, Y] = -[Y, X], \qquad \forall X, Y \in V,$

protože

$$\begin{aligned} [X+Y, X+Y] &= 0 \\ [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y] &= 0 \\ [X, Y] + [Y, X] &= 0 \\ [X, Y] &= -[Y, X]. \end{aligned}$$

Vlastnost (2) se nazývá Jacobiho identita a nahrazuje standardní asociativní zákon. Lieovy algebry obvykle značíme malými gotickými písmeny $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{g}, \ldots$

Poznámka. Definici Lieovy algebry by pro naše účely stačilo zavést i konkrétně pro vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, ale byla by škoda takto ji zúžit. Naopak ji lze ještě zobecnit pro vektorový prostor nekonečné dimenze tím, že „vektorový prostor nad polem“ nahradíme „modulem nad okruhem“. Definice pole a vektorového prostoru lze nalézt například v [6].

Příklady Lieových algeber.

Nechť A je lineární algebra nad $\mathbb{F}$ (vektorový prostor s asociativním násobením $X \cdot Y$). Uděláme z A Lieovu algebru A_L tím, že definujeme $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$. Jacobiho identita se v tomto případě lehce ověří $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = [X, (YZ - ZY)] + [Y, (ZX - XZ)] + [Z, (XY - YX)] = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ = 0$.

Pokud za A vezmeme lineární algebru všech operátorů na vektorovém prostoru V. Algebra korespondující s A_L se pak nazývá *obecná Lieova algebra* vektorového prostoru V, značíme ji $\mathfrak{gl}(V)$. Pokud zvolíme $\mathbb{R}^n$ za prostor V, dostáváme *obecnou lineární Lieovu algebru* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ všech $n \times n$ reálných matic s operací $[X, Y] = XY - YX$. Podobně $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Nyní se dostáváme k příkladům, které, jak později uvidíme, mají využití v robotice při popisu pohybu robotického ramene.

Když V vezmeme konkrétně jako $\mathbb{R}^n$, můžeme hovořit o *Speciální lineární Lieově algebře* $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, která se skládá ze všech $n \times n$ reálných matic se stopou 0 a s operací $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$. Podobně můžeme zavést i pro $\mathbb{C}$. Je to vlastně Lieova podalgebra algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Další příklad Lieovy algebry získáme, pokud si vezmeme vektorový prostor V a nedegenerativní symetrickou bilineární formu b na V. *Ortogonální Lieova algebra* $\mathfrak{o}(V, b)$ nebo jen $\mathfrak{o}(V)$, pokud je jasné, které b se myslí, se skládá ze všech operátorů T na V, pod kterými je forma b infinitezimálně invariantní, tj. $b(Tv, w) + b(v, Tw) = 0$ pro všechny $v, w \in V$ nebo ekvivalentně $b(Tv, v) = 0$ pro všechny $v \in V$, lineární a závorkové operace jsou stejné jako v $\mathfrak{gl}(V)$. Musí se ovšem zkontrolovat, zda ST nechává b infinitezimálně invariantní, jestliže S i T nechává.

V případě $V = \mathbb{F}^n$ obvykle bereme pro $b(X, Y)$ formu $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T \cdot Y$ kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Pro odpovídající lineární algebru píšeme $\mathfrak{o}(n, \mathbb{F})$. Infinitesimálně invariantní vlastnost teď vypadá $X^T(M^T + M)Y = 0$ a tak se $\mathfrak{o}(n, \mathbb{F})$ skládá z matic M nad $\mathbb{F}$, které splňují $M^T + M = 0$. Těmto maticím říkáme antisymetrické. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ můžeme psát jen $\mathfrak{o}(n)$. Další Lieovy algebry a jejich příklady lze nalézt v [13].

Podíváme se nyní na Lieovu algebru ortogonálních matic $\mathfrak{o}(3)$ více z blízka. Nechť R_x,R_y,R_z jsou matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Později uvidíme, že to jsou tři „infinitezimální rotace“ kolem os x,y a z. Zřejmě vidíme, že jsou bází Lieovy algebry $\mathfrak{o}(3)$, protože jsou 3×3 reálné antisymetrické matice. Jsou však i bází nad $\mathbb{C}$ pro algebru $\mathfrak{o}(3, \mathbb{C})$. Platí

$$[R_y, R_z] = R_x, \quad [R_z, R_x] = R_y, \quad [R_x, R_y] = R_z.$$

4.3. Lieovy grupy

Nejprve zavedeme pojem grupa podle sktipt [6]. Místo zápisu zobrazení jako $\omega(a, b)$ budeme používat kratší zápis $a\omega b$, kde příslušnou operaci budeme značit $*, \cdot, +, \ldots$ *atd.*

Definice 4.3. *Grupa je množina G s operací $*$, která splňuje následující axiomy:*

- *Pro* $a, b, c \in G$ *platí*
$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$
- *Existuje prvek* $e \in G$ *tak, že pro každý prvek* $g \in G$ *platí*
$$g * e = e * g = g.$$
- *Pro každý prvek* $g \in G$ *existuje prvek* $g' \in G$ *tak, že platí*
$$g * g' = g' * g = e.$$

Pokud navíc platí komutativní zákon, tj. pro $a, b \in G$ *platí*
$$a * b = b * a$$
nazývá se grupa komutativní nebo také abelovská.

První axiom je asociativní zákon, druhý ukazuje existenci neutrálního prvku a třetí existenci inverzního prvku. Grupu značíme $(G, *)$ nebo jen G, pokud je operace na G zřejmá nebo se označuje multiplikativně. Pro naše účely budeme G nejčastěji volit jako množinu reálných matic, operací bude násobení matic a neutrálním prvkem jednotková matice.

Definice 4.4. *Buďte* G_1, G_2 *dvě grupy s operací označenou* $\star$ *a* $\circ$. *Homomorfismus* f *grup* G_1 G_2 *je zobrazení* $f : G_1 \to G_2$ *takové, že platí* $f(g \star h) = f(g) \circ f(h)$ *pro všechna* $g, h \in G_1$.

Z tvrzení 4.1 plyne
$$\exp((t+s)A) = \exp(tA) \cdot \exp(sA) = \exp(sA) \cdot \exp(tA).$$

Označíme-li $g(t) = \exp(tA)$ pro danou matici A, máme $g(t+s) = g(t)g(s)$ pro všechna $t, s \in \mathbb{R}$. To znamená, že všechny matice $g(t)$ tvoří komutativní grupu.

Tato grupa se nazývá jednoparametrická podgrupa generovaná maticí A. Zobrazení definované vztahem $t \to \exp(tA)$ je homomorfismus grupy reálných čísel (operace je sčítání) do grupy všech regulárních matic stupně n (operace je násobení).

Definice 4.5. *Lieova grupa je množina* $n \times n$ *matic (pro pevné* n*), která je uzavřená vzhledem k součinu, inverzi a nesingulárním limitám. Třetí podmínka uzavření znamená, že jestliže* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *je konvergentní posloupnost matic v* G *a* $A = lim_{k\to\infty} A_k$ *má inverzi, pak* A *je v* G.

Všechny námi zavedené grupy splňují definici maticové Lieovy grupy, ale pro důkaz tohoto tvrzení je nutné hlubší studium Lieovy teorie (viz [14]).

Poznámka. Klasicky se Lieova grupa definuje jako hladká varieta vybavena strukturou grupy taková, že příslušné grupové operace jsou hladké, tj.

- Existuje neutrální prvek
$$e \in G$$

- Existují dvě hladké operace $*: G \times G \to G; \quad ': G \to G$, takové, že

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= (a * b) * c, \\ a * e &= e * a = a, \\ a * a' &= a' * a = e, \end{aligned}$$

  pro každé $a, b, c \in G$.

S příklady Lieových algeber popsaných výše korespondují

Příklady Lieových grup

Obecná lineární (Lieova) grupa $GL(n, \mathbb{F})$ se skládá ze všech $n \times n$ matic nad $\mathbb{F}$ mající inverzi.

Speciální lineární (Lieova) grupa $SL(n, \mathbb{F})$ se skládá ze prvků $GL(n, \mathbb{F})$ s determinantem 1.

Ortogonální (reálná Lieova) grupa $O(n, \mathbb{R})$ nebo jen $O(n)$se skládá z reálných $n \times n$ matic M s vlastností $M^T \cdot M = I$. Analogicky lze definovat i *komplexní ortogonální (Lieovu) grupu* $O(n, \mathbb{C})$.

Speciální ortogonální (Lieova) grupa $SO(n, \mathbb{R}) = SO(n)$ je $O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$. Analogicky i pro $\mathbb{C}$.

Poznámka. Přímé shodnosti tvoří grupu, která je izomorfní grupě $SO(3)$ všech ortogonálních matic s determinantem rovným jedné. Nepřímé shodnosti ale grupu netvoří, protože složení dvou nepřímých shodností je přímá shodnost.

Příklad 4.6. Protože platí výraz 4.4, můžeme funkce $\exp(tA)$chápat jako řešení maticové diferenciální rovnice $X' = XA$ nebo $X' = AX$ pro hledanou maticovou funkci X, která vyhovuje počáteční podmínce $X(0) = E$. Exponenciální funkci lze tedy určit řešením příslušné soustavy diferenciálních rovnic. Uvažujme antisymetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

počáteční podmínka nám říká, že

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a označme

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21}(t) & -a_{22}(t) \\ a_{11}(t) & a_{12}(t) \end{pmatrix}.$$

Nyní řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a'_{11}(t) &= -a_{21}(t), \\ a'_{12}(t) &= -a_{22}(t), \\ a'_{21}(t) &= a_{11}(t), \\ a'_{22}(t) &= a_{12}(t). \end{aligned}$$

Zderivováním a dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} a''_{11}(t) + a_{11} &= 0, \\ a''_{12}(t) + a_{12} &= 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $a_{11}(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ a pro počáteční podmínku $a_{11}(0) = 1$ máme $A_{11} = \cos(t)$ stejně tak $a_{12}(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ a počáteční podmínka $a_{11}(0) = 0$ dá řešení $A_{12} = \sin(t)$. Podobně dostaneme i $a_{21} = \sin(t)$ a $a_{22}(0) = \cos(t)$.
Řešení tedy je

$$\exp(tA) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že se jedná o nám již dobře známou matici popisující rotaci v rovině a tedy i matici A, respektive její maticovou funkci $\exp(tA)$ lze použít pro popis rotace.

Jelikož naším cílem je popis robota v prostoru, pokusíme se dále výsledek přenést z roviny do prostoru.

Příklad 4.7. Mějme opět diferenciální rovnice $X' = XA$ s počáteční podmínkou $X(0) = E$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Musíme opět vyřešit soustavy diferenciálních rovnic. Všimněme si však, že rovnice

$$\begin{aligned} a'_{11}(t) &= -a_{21}(t) \\ a'_{12}(t) &= -a_{22}(t) \\ a'_{21}(t) &= a_{11}(t) \\ a'_{22}(t) &= a_{12}(t). \end{aligned}$$

jsme již řešili v příkladu 4.6, jejich řešení tedy známe. Dále máme rovnici

$$a'_{33}(t) = 0$$

která nám říká $a_{33}(t) = C$ a z počáteční podmínky $X(0) = E$ máme $a_{33}(t) = 1$. Zbylé rovnice nám dají po použití počáteční podmínky, že jejich řešení jsou nulová. Zapíšeme opět do matice

$$\exp(tA) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skutečně jsme obdrželi opět matici rotace, tentokrát v prostoru. Zbylé dvě rotace bychom analogicky získali pro volbu matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak tušíme z předcházejícího příkladu, tak lze Lieovy grupy lze vnořovat do sebe, pojednává o tom například [4]. Na definovaných Lieových grupách můžeme ukázat dva důležité homomorfismy Lieových grup. Protože jsme speciální ortogonální grupu zadefinovali jako podmnožinu ortogonální grupy, můžeme následně definovat příslušné vložení

$$SO(n) \hookrightarrow O(n).$$

Při maticové reprezentaci Lieových grup můžeme speciální ortogonální grupu řádu n vložit do speciální ortogonální grupy řádu $n+1$,

$$SO(n) \hookrightarrow SO(n+1).$$

Mějme $M \in SO(n)$ a ukažme si, že i $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1)$.

Důkaz. Stačí ověřit, že $M^T M = I$, kde I je jednotková matice, tj.

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^T M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

a že hodnota determinantu je rovna jedné. Z Laplaceova rozvoje podle posledního řádku dostáváme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(M) \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} = 1 \cdot (-1)^{2n+2} = 1.$$

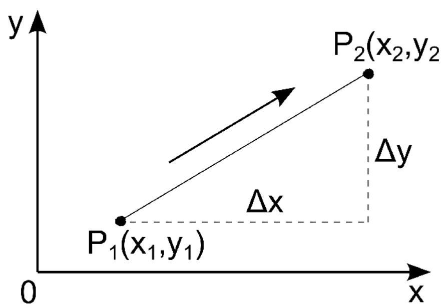
□

5. Afinní rozšíření

Při popisu robotického ramena můžeme kromě rotačního pohybu vyjádřit i pohyb translační. Pokusíme se takovou transformační matici nalézt. Dále nás bude zajímat zda lze sestavit i takovou transformační matici, která v sobě zahrnuje rotační i translační pohyb tělesa v prostoru. Na získané výsledky se podíváme i z hlediska Lieovy teorie. Kapitola vychází z [15], [5], [10], a [12].

5.1. Translace

Představme si situaci v rovině



kdy chceme posunout po přímé trajektorii bod z $P_1 = (x, y)$ do $P_2 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. Bod změní souřadnice o $(\Delta x, \Delta y)$. Souřadnice bodu rozšíříme ještě o jednu prostorovou souřadnici, její význam vysvětlíme později. Musíme najít takovou transformaci, která splňuje

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T_2^1 \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aby platilo předcházející, tak transformační matice musí být tvaru

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici translace v rovině. Analogicky získáme translaci i pro třírozměrný prostor.

5.2. Homogenní transformace

Definice 5.1. *Uspořádanou čtveřici čísel* $(x, y, z, w), w \neq 0$ *nazveme pravoúhlé homogenní souřadnice bodu* $P[x_k, y_k, z_k]$ *v prostoru, platí-li:*

$$x_k = \frac{x}{w}, \qquad y_k = \frac{y}{w}, \qquad z_k = \frac{z}{w},$$

kde čísla x_k, y_k, z_k *jsou kartézské souřadnice bodu* P*. Body, pro které je* $w = 0$*, odpovídají vektorům v rovině. Tyto body nelze určit kartézskými souřadnicemi a nazýváme je nevlastní body.*

Z definice je patrné, jak lze převádět homogenní souřadnice na kartézské a naopak. Aby převod byl triviální, volíme často za homogenní souřadnice bodu čtveřici čísel $(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1)$.

Obecný pohyb tělesa si můžeme představit jako kombinaci rotačního (sférického) a translačního pohybu. Takový pohyb lze popsat rovnicí

$$p_0 = t_0 + R_0^1 p_1 \tag{5.1}$$

kde p_0 je vektor polohy bodu P_0, p_1 polohový vektor bodu P_1, t_0 je vektor posunutí a R_0^1 je matice rotace.

Více informací o vzájemné poloze a orientaci jednotlivých repérů lze ukrýt do matice homogenní transformace. V robotice jsou homogenní transformace nejčastěji používány pro popis robotických ramen a při zpracování obrazu. Rovnici 5.1 zapíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde matice

$$H_i^j = \begin{pmatrix} R_i^j & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice homogenní transformace* a sloupcové matice se nazývají *homogenní souřadnice* vektoru p. Jak vidíme, matice homogenní transformace v sobě obsahuje nám již známou matici rotace a vektor posunutí, což jsou informace potřebné k popisu polohy a orientace.

Homogenní matice může v našem případě popisovat tři pohyby:

- *rotační pohyb* pro $R \neq I$ a $t = (0,0,0)^T$
- *translační pohyb* pro $R = I$ a $t \neq (0,0,0)^T$
- *šroubový pohyb* pro $R \neq I$ a $t \neq (0,0,0)^T$.

V třírozměrném prostoru dostáváme šroubový pohyb, tj. posunutí o Δp a rotaci kolem os o úhel θ pomocí matic

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & \Delta y \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 5.2. *Pohyby zachovávající délky a úhly v $\mathbb{R}^n$ jsou složením translací a ortogonálních transformací.*

Důkaz. Uvažujme pohyb $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ který zachovává délky a úhly. Nechť $F(0) = Q$ a nechť T je translace $T(v) = v - Q$. Potom $T(Q) = 0$ a proto $T \circ F(0) = 0$. Nechť $G = T \circ F$. Toto je transformace, která zachovává délky a úhly a má pevný bod v počátku. Jestliže G zachovává délky a úhly, pak musí být lineární a ortogonální transformací. Máme také že $F = T^{-1} \circ G$. Neboť T^{-1} je také translace, pak bylo ukázáno, že F je složením ortogonální transformace a translace.

□

Poznámka. V našem případě bude poslední řádek vždy obsahovat jen jedničky a nuly, ale v počítačové grafice nebo při zpracování obrazu z kamer slouží k uchování informace o perspektivě a měřítku.

$$H = \begin{pmatrix} Rotace & Translace \\ Perspektiva & Měřítko \end{pmatrix}$$

5.3. Eukleidovská Lieova grupa a algebra

S grupami lze dělat různé operace, například je vnořovat do sebe, jak jsme již viděli. Můžeme je ale i podle daných pravidel spojovat, abychom obdrželi grupu novou. Nejjednodušší je přímý součin grup.

Definice 5.3. *Mějme grupy $(G, \bullet)$ a $(H, \circ)$. Přímý součin, zapisovaný jako $(G \times H, *)$ jsou dvojice prvků (g, h), určených operací*

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 \circ h_2),$$

kde $g \in G$ a $h \in H$.

Přímý součin se někdy označuje jako *diskrétní* nebo také *kartézský součin*. Počet prvků nové grupy je tedy roven součinu počtů prvků grup G a H, v případě spojitých grup je její dimenze rovna součtu dimenzí grup G a H.

Příklad 5.4. Máme dvě homogenní transformace H_1 a H_2. Proveďme nyní jejich složení, tj. vynásobme matice

$$H_1H_2 = \begin{pmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1R_2 & R_1t_2 + t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.5. Proveďme nyní přímý součin dvojic (R_1, t_1) a (R_2, t_2), kde $R_1, R_2 \in (SO(3), \cdot)$ a $t_1, t_2 \in (\mathbb{R}^3, +)$, dostáváme

$$(R_1, t_1)(R_2, t_2) = (R_2R_1, t_1 + t_2),$$

což neodpovídá složení dvou homogenních transformací z příkladu 5.4. Přímý $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ součin tedy nevyhovuje našim potřebám.

Definice 5.6. *Reprezentace Grupy na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ je hladké zobrazení $a : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že*

$$\begin{aligned} a(e, x) &= x, & \forall x \in \mathbb{R}^n, e \in G \\ a(g_1, a(g_2, x)) &= a(g_1g_2, x), & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall g_1, g_2 \in G \end{aligned}$$

Definice 5.7. *Nechť $(G, \bullet)$ je grupa, $(H, +)$ vektorový prostor a nechť a je reprezentace G na H. Polopřímý součin, zapisovaný jako $(G \ltimes H, *)$ jsou dvojice prvků (g, h), spolu s operací*

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 + a(g_1, h_2)) = (g_1 \bullet g_2, a(g_1, h_2) + h_1),$$

kde $g_1, g_2 \in G$ a $h_1, h_2 \in H$.

Příklad 5.8. Zkusme nyní provést součin, tentokrát polopřímý, dvojic (R_1, t_1) a (R_2, t_2), kde $R_1, R_2 \in (SO(3), \cdot)$, $t_1, t_2 \in (\mathbb{R}^3, +)$ a reprezentace $SO(3)$ na $\mathbb{R}$ je násobení maticí, dostaneme

$$(R_1, t_1)(R_2, t_2) = (R_2 R_1, t_1 + R_1 t_2),$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 5.4. Polopřímý součin $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ tedy vyhovuje našim potřebám. Označme $SE(3) = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ a dostáváme *speciální Eukleidovskou grupu* $SE(3)$. Pokud navíc povedeme rozšíření (injektivní homomorfismus)

$$SE(3) \longrightarrow GL(4)$$

dané

$$(R, t) \longmapsto \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dostaneme výsledek zapsaný v homogenních souřadnicích a tedy naprosto shodný s příkladem 5.4.

Lieovu algebru $\mathfrak{se}(3)$ tedy tvoří uspořádané dvojice prvků Lieovy algebry $\mathfrak{so}(3)$ a Lieovy algebry grupy translací. Protože

$$\exp(tA) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se zbylé členy vynulovaly, dostali jsme translaci ve směru x-ové osy. Analogicky bychom dostali i translaci ve směru osy y a z. Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří Lieovu algebru grupy translací a spolu s maticemi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří Lieovu algebru $\mathfrak{se}(3)$.

6. Závěr

Zjistili jsme, že ortogonální transformace zachovávají úhly a délky, říká se jim také shodnosti. Přímé shodnosti mají determinant roven jedné a patří mezi ně rotace a translace.

Pro snadnější představení rotace v prostoru můžeme vhodnou volbou báze její transformační matici upravit a zjistit z ní osu a úhel rotace. Osou rotace je vektor přidružený k vlastnímu číslu 1 a úhel můžeme zjistit pomoci vztahu 2.1.

Úlohou dopředné kinematiky je zjištění polohy koncového chapadla vyjádřené v referenční vztažné soustavě. Tato úloha se dá řešit pomocí metody pohyblivého repéru, kdy si zavedeme více souřadných systémů a polohu bodů v nich přepočítáváme pomocí matic přechodu a lze ji jednoduše naprogramovat. V našem případě byl zvolen program MATLAB, kde se s výhodou použilo jeho zaměření na maticový počet.

Dále jsme ukázali, že matice rotací lze vyjádřit pomocí exponenciálních funkcí. Přičemž se dá využít faktu, že je lze napsat ve formě Taylorovy řady. Na tomto principu lze vytvořit jednoduchou MATLABovskou funkci pro výpočet exponenciální maticové funkce.

Dále jsme se seznámili s teorií Lieových grup, která je na pomezí diferenciální geometrie a lineární algebry a spojuje poznatky z obou oborů. Zvláště jsme se zaměřili na speciální ortogonální grupu $SO(3)$. Zjistili jsme, že takovou grupu můžeme získat řešením diferenciální rovnice, že ji tvoří matice rotace a že může být výhodné vnořovat grupy do sebe.

Nakonec jsme nalezli i transformační matici translací, body jsme vyjadřovali v homogenních souřadnicích a spojili ji s maticí rotace tak, že jsme matici rotace rozšířili pomocí homogenní transformace. Výsledná transformační matice je schopná popsat zároveň rotační i translační pohyb a pomocí polopřímého součinu ukážeme, že tvoří grupu $SE(3)$, respektive $GL(4)$, pokud ji zapíšeme v homogenních souřadnicích.

Literatura

[1] FECKO, Marián. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* Bratislava: Iris, 2004, 722 s. ISBN 80-890-1810-6.

[2] GOLUB, Gene H. *Matrix computations.* 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, c1996, xxvii, 694 s. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. ISBN 08-018-5414-8.

[3] GREPL, Robert. *Kinematika a dynamika mechatronických systémů.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. 158 s. ISBN 978-80-214-3530-8.

[4] HRDINA, Jaroslav. *Některé kinematické dvojice.* In: Kvaternion: Časopis o matematice pro aplikace. Brno: Ústav matematiky FSI VUT v Brně, 2012, s. 9-19. ISBN 1805-1324. ISSN 1805-1324.

[5] JEŽEK, F. *Geometrické a počítačové modelování.* Pomocný učební text, ZČU Plzeň, 2000.

[6] KARÁSEK, Jiří a Ladislav SKULA. *Lineární algebra: teoretická část.* 1. vyd.. Brno: CERM, 2005, 179 s. ISBN 80-214-3100-8.

[7] KARGER, Adolf. *Základy robotiky a prostorové kinematiky.* 1. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000, 265 s. ISBN 80-010-2183-1.

[8] KARGER, Adolf. *Prostorová kinematika a Lieovy grupy.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 383 s.

[9] MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru.* Praha: Karolinum, 2003, 348 s. ISBN 80-246-0421-3.

[10] PIVOVARNÍK, M. *Mathematics principles in robotics.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 84 s.

[11] ROUSSEAU, Christiane a Yvan SAINT-AUBIN. *Mathematics and technology.* New York: Springer, 2008, s. 85-116.

[12] SELIG, J. *Geometric fundamentals of robotics.* New York: Springer, 2005, xv, 398 s. Monographs in computer science. ISBN 03-872-0874-7

[13] SAMELSON, Hans. *Notes on Lie algebras.* New York: Springer Verlag, 1990, xii, 162 s. Universitext.

[14] STILLWELL, John. *Naive Lie theory.* New York: Springer, 2008, xiii, 217 s. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 978-038-7782-140.

[15] ŠOLC, F., ŽALUD, L., *Robotika.* Brno, VUT Brno, 2002, 61 s.

7. Seznam použitých zkratek a symbolů

$u, v, w, \dots$	vektory
$A, B, C, \dots$	matice
$\|v\|$	délka vektoru v
$[v], v^T$	sloupcová matice typu $n \times 1$, sloupcový vektor
$[v]_{\mathcal{B}}$	vektor v vyjádřený v souřadnicích báze $\mathcal{B}$
$[T]_{\mathcal{B}}$	transformační matice T vzhledem k bázi $\mathcal{B}$
M_j^k	matice přechodu z báze $\mathcal{B}_j$ do báze $\mathcal{B}_k$
$\langle v, w \rangle$	skalární součin vektorů v a w
$[v, w]$	vektorový součin vektorů v a w
A^T	transponovaná matice k matici A
I	jednotková matice
$\det A, \lvert A \rvert$	determinant matice A
$diag(d_1, \dots, d_n)$	diagonální matice s diagonálou $d_1, d_2, \dots, d_n$

8. Seznam příloh

Součástí práce je přiložené CD, které obsahuje:

- MATLAB m-file: `Exp.m`
- MATLAB m-file: `Poloha.m`
- bakalářskou práci ve formátu PDF