UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Daniel Pařenica

Učitelství matematiky (maior)

Písmena v matematice základní školy

Olomouc 2021

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně, pouze za pomocí vedoucího práce. Veškeré uvedené informace jsem čerpal z uvedených zdrojů v použité literatuře na konci dokumentu. Práce byla vypracována na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky, vstřícný a ochotný přístup a trpělivost při vypracovávání práce. Děkuji své rodině, přátelům a spolužákům, kteří mě podporovali a stáli za mnou.

V Olomouci: …………………… ……………………

Bc. Daniel Pařenica

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Bc. Daniel Pařenica

Název práce: Písmena v matematice základní školy

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Studijní program: N0114A300001: PE-NMgr-PE-ZP, IA18-NMgr-Matematika (maior) (verze: NA19), IA18-NMgr-Učitelství techniky (minor) (verze: NA19)

Studovaný obor: UMma - UTEmi

Forma studia: Prezenční

Rok obhajoby práce: 2021

Klíčová slova: písmena, didaktika, pedagogika, matematika

Počet stran: 68

Počet příloh: 0

Jazyk: Čeština

Bibliographical identification

Author's first name and surname: Bc. Daniel Pařenica

Title: Letters in mathematics at elementary school

Type of thesis: Diploma thesis

Department: Departmen of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc

Supervisor: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Study program: N0114A300001: PE-NMgr-PE-ZP, IA18-NMgr-Matematika (maior) (verze: NA19), IA18-NMgr-Učitelství techniky (minor) (verze: NA19)

Field of study: UMma - UTEmi

Form of study: Daily

Year of presentation: 2021

Key words: letters, didactics, pedagogy, matematics

Number of pages: 68

Number of appendices: 0

Language: Czech

Obsah

Úvod

Během povinné školní docházky v předmětu matematika se žáci učí počítat, nejprve se na prvním stupni seznamují s čísly a učí se malou násobilku. Matematika ale není jen o počítání s čísly a malé násobilce, na druhém stupni se seznamují s písmeny, zkratkami či slovy, které mají v matematice svůj význam. Podstatné informace přináší počtáři jednotky veličin či předpony SI soustavy. Později se do příkladů s čísly přidávají písmena, pro počítání s nimi platí určitá pravidla a žáci se s nimi učí pracovat. Na základní škole se žáci učí především základy a po ukončení základního vzdělávání většina žáků pokračuje na střední školu, kde se seznamují s komplikovanějšími výrazy. Pro žáky je obtížné používat písmena v matematice a je nutné využívat při vysvětlování různé metafory a opakovaně zdůrazňovat význam písmen. Tato část matematiky je pro ně nejabstraktnější [1],[6].

Matematika je exaktní věda, která se zabývá prostorovými a kvantitativními vztahy reálného světa. Před 2 500 lety to možná byla věda jen o číslech, a to v éře starobylého Egypta a Babylonu. Aritmetika sloužila k ryze praktickým účelům. Starověké Řecko chápalo čísla spíš jako prostředek a kladlo důraz spíš na geometrii. Chtěli popsat svět, ale i když znali už zlomky, dělal jim problém výpočet úhlopříčky, protože narazili na iracionální číslo $\sqrt{2}$ [7]. Už tehdy Řekové zjistili, že matematika není jen o počítání, ale že matematika je něco víc, co lze chápat v širším smyslu. Jednalo se o matematiku, na kterou se pohlíželo jako na intelektuální hledání, a už v té době v systému dokazování a axiomatizace vzniká pojem matematická věta. Dnes je matematika na vysoké úrovni a snaží se pochopit a nalézt vlastnosti velkých dynamických objektů jako je například internet a funkce mozku [36]. Zabývá se také rozsáhlou algoritmizací.

Tato práce si dává za cíl představit aktuální tematické okruhy matematiky vyučované na druhém stupni základní školy, ve kterých se pracuje s písmeny, zkratkami či slovy nutných ke zvládnutí očekávaných výstupů RVP. Uvádí se zde historické aspekty, které vedly k současnému užívání vybraných písmen (znaků) v matematice a vybraná témata s písmeny užívána na druhém stupni základní školy. V praktické části je zde prezentován výzkum a sbírka příkladů vybraných témat s řešením.

Teoretická část práce

1 Aktuální tematické okruhy z RVP ZV využívající písmena

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je rozdělena do čtyř tematických okruhů, a to Číslo a proměnná, Závislosti, vztahy, práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy [39]. Každý okruh má své formulace očekávaných výstupů, které jsou závazné pro školní vzdělávací instituce. Dále je zde stručně vymezeno učivo. Nedílnou součástí jsou podrobně zpracované Standardy, ve kterých jsou indikátory, konkretizující očekávané výstupy. Jsou přikládány do přílohy k RVP ZV. Zde uvádím použití písmen v konkrétním okruhu matematiky pro 2. stupeň a konkrétní očekávané vstupy, které jsou citovány z RVP ZV 2021 [39].

Dnes užívání písmen jako matematických značek stanovuje platná norma ČSN EN ISO 80000-2 (011300) [34] s datem účinnosti 1. 12. 2020. Na základní škole jsou to písmenná označení:

- Množinové značení velkými tučnými (dvojitými) písmeny (**N** – množina přirozených čísel, **Z** – množina celých čísel, **Q** – množina racionálních čísel, **R** – množina reálných čísel)
- Součet řady velkým řeckým písmenem sigma Σ
- Součin řady velkým řeckým písmenem pi Π
- Aritmetický průměr značený $\bar{x}$.

1.1 Číslo a proměnná

Mimo počtů s čísly je zde problematika proměnné a algebraických výrazů (algebry), které spočívají na třech pilířích [6]. Algebraický výraz je konečná posloupnost čísel a písmen vyjadřující proměnné, operace ($+$, $-$, $\cdot$, : , umocňování a odmocňování) a závorky, tvořená podle jistých pravidel [5]. Prvním pilířem jsou číselné výrazy a práce s nimi. Algebra není zobecněná aritmetika, jen se jí podobá. Například v aritmetice se v příkladu $2 \cdot (8 + 6)$ postupuje, dle znalosti přednosti operací, prvně závorkou a poté se násobí součet závorky dvojkou. V algebře se u příkladu $2 \cdot (x + 6)$ tímto pravidlem postupovat nelze, zde je jen možné násobit. Operaci sčítání lze provést až po dosazení konkrétního čísla.

Geometrie je druhým pilířem algebry. Žáci pracují se vztahy mezi obrazci a vzorci pro výpočet obvodu, obsahu, objemu apod. Proměnné sice jsou abstraktní, ale ve vztahu s grafickými obrazci si lze účinně všimnout platných vztahů. Častěji se pracuje s konkrétními rozměry a konkrétními obrázky, což může přispět k jejímu lepšímu pochopení.

Posledním pilířem jsou úlohy na zobecňování opakujících se číselných řad. Žák sám vyjádří obecné vyjádření libovolného členu. Je si vědom, že symbolický zápis je nutný, a používá ho zcela přirozeně.

Základem algebraického uvažování je pochopení korespondence mezi určitou slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen [6]. Pokud žák samostatně vyřeší slovní úlohu a používá u toho algebraickou symboliku, pochopil využití tohoto aparátu.

Ke zvládnutí tohoto tematického okruhu žák absolvuje učivo:

- dělitelnost přirozených čísel – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti
- celá čísla – čísla navzájem opačná, číselná osa
- desetinná čísla, zlomky – rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě; převrácené číslo, smíšené číslo, složený zlomek
- poměr – měřítko, úměra, trojčlenka
- procenta – procento, promile; základ, procentová část, počet procent; jednoduché úrokování
- mocniny a odmocniny – druhá mocnina a odmocnina
- výrazy – číselný výraz a jeho hodnota; proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny
- rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámým

M-9-1-01 Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel.

Dle očekávaného výstupu se žáci seznamují s označením číselných množin $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ a později $\boldsymbol{R}$.

M-9-1-03 Žák modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

Do učiva dělitelnosti se řadí značení pro největší společný dělitel čísel a a b NSD (a, b) nebo D (a, b). Nejmenší společný násobek čísel a a b se značí NSN (a, b) nebo n (a, b). Pro zadávání k výpočtu v matematickém softwaru se často využívá syntax anglického značení pro největšího společného dělitele gcd (a, b) z greatest common divisor, a pro nejmenšího společného násobku lcm (a, b) z least common multiple.

M-9-1-05 Žák řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů

Aby mohli žáci dobře určit měřítko, musí umět pracovat s převodem jednotek pro vzdálenost. Například 1 : 20 000 na mapě znamená, že 1 cm na mapě znázorňuje 20 000 cm ve skutečnosti.

M-9-1-06 Žák řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

V rámci výuky procent se žáci učí vzorec $z \cdot p = č$, kde z je základ, p je koeficient reprezentující procenta a $č$ je procentuální část. Symbol procenta se kdysi vyvinul ze znaku, který byl tvořen písmeny (P cento) [38].

M-9-1-07 Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

Daná proměnná se vyjadřuje nejčastěji písmeny latinské abecedy. Pro tři různé neznámé x, y, a z a pro tři různé koeficienty a, b, a c. Písmenko v roli neznámé se objevuje v izolovaných případech už na prvním stupni, těžiště výuky proměnné je však na stupni druhém [6]. Reálné situace se matematizují, které napodobují konkrétní matematické formule. Například úlohy na trojčlenku vypadají odlišně, ale každá úloha má daný vztah, ze kterého se dá vyjádřit výpočet hledaného řešení. Odlišné úlohy se stejným principem výpočtu mohou vypadat:

a) Vlak ujel vzdálenost 330 km za 2 hodiny a 45 minut. Jakou vzdálenost ujede za 8 hodin a 15 minut, pojede-li stále stejnou rychlostí?

b) Automat vyrobí za 18 minut 456 součástek. Kolik jich vyrobí za 33 minut?

Řešení příkladu za a)

↑ 165 min	330 km ↑
495 min	x km

x : 330 = 495 : 165

x = (330 · 495) : 165

<u>x = 990 km</u>

Vlak ujede 990 km.

Řešení příkladu za b)

↑ 18 min	456 součástek ↑
33 min	x součástek

x : 456 = 33 : 18

x = (33 · 456) : 18

<u>x = 836 součástek</u>

Automat vyrobí za 33 minut 836 součástek.

Obě úlohy jsou odlišné, ale jejich řešení je podobné, které vede na výpočet přímé úměry. Hledané bude vždy „neznámé“ x, které vyplyne ze vztahu přímé úměry.

Pří práci s mnohočleny žák užívá platné vzorce pro vytýkání a rozklad mnohočlenů, které mají svůj obecný tvar. Vzorce druhé mocniny a vzorce pro třetí mocninu se mohou vyskytovat alespoň v učebnici.

M-9-1-08 Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

Učivo rovnice a soustavy rovnic obsahují nedílnou práci s jednou nebo více neznámých (písmeny x, y, z …) a práce spočívá v jednotlivém vyjadřování každého z nich. Rovnice žáci řeší dle platných ekvivalentních úprav.

Například matematizovaná reální situace převedená na rovnici může vypadat:

Rohlík stojí 2,50 Kč a houska 3,20 Kč. Eliška koupila 4 rohlíky a 5 housek, kolik musí Eliška vrátit rodičům, jestli platila padesátikorunou?

Řešení:

$$2{,}5 \cdot 4 + 3{,}2 \cdot 5 = 50 - x$$

$$\underline{\underline{x = 24\,Kč}}$$

Eliška musí rodičům vrátit 24 Kč.

1.2 Závislosti, vztahy a práce s daty

Žáci vypozorovávají určité typy změn a závislosti, které jsou projevem běžných jevů reálného světa. Žáci se setkávají se závislostmi a vztahy už v předškolním období a v této době se jim postupně nevědomě formuje funkční myšlení [6]. Pracují s úlohami, které vyžadují sledování závislostí jako jsou součty sčítanců s velkým řecký písmenem sigma Σ, nebo součiny činitelů s velkým řeckým písmenem pi Π. V geometrii žáci zkoumají velikosti stran, obvodů, obsahů a objemů geometrických útvarů s příslušnými jednotkami. Formování funkčního myšlení je dlouhodobý proces, ale po jeho zvládnutí žáci chápou souvislosti či podmíněnost změn. Na základní škole se funkce učí většinou v obsahu jedné závislé proměnné *f(x)* a jsou to funkce, u kterých lze stanovit funkční předpis nebo je vyjádřit tabulkou. Žáci zjistí, že se funkce dají popsat matematickým aparátem, se kterým se pak pracuje. Neznámá proměnná ve funkčním předpisu nabývá hodnot z definičního oboru a žák si na zkoušku může dosadit konkrétní číslo. Definovat pojem funkce je na základní škole obtížné a ukazuje se, že žáci definici funkce chápou pouze formálně [6]. Učitelé by měli mít na paměti, že v důsledku nepromyšlené práce může docházet k situaci, kdy analytický předpis je velmi obtížné odvodit.

Při práci s daty se pracuje jednotkami, žáci rozlišují jednotlivé pojmy popisné statistiky (statistický soubor, rozsah statistického souboru, statistická jednotka, statistický znak a jeho hodnota, četnost a aritmetický průměr). Konkrétně pro určení aritmetického průměru $\bar{x}$ se žáci seznamují s konkrétním vzorcem.

M-9-2-01 – Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data

Žáci užívají převody jednotky délky, hmotnosti, času, obsahu, objemu a početní úkony s penězi. Seznamují se s příslušným značením, například v pravoúhlé soustavě souřadnic se značí vodorovná osa písmenem x, kolmá osa písmenem y a bod, ve kterém procházejí obě osy, se značí velkým písmenem O [23], [27].

M-9-2-03 – Žák určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti

Vyjadřuje se například algebraický tvar vyplývající ze souvislého textu slovní úlohy a pracuje se s jednotkami. Žáci se učí pracovat i s jednotkami z jiných předmětů.

M-9-2-04 – Žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem

Žáci se učí pracovat s předpisem lineární funkce $f(x) = ax + b$, který má lineární člen a konstantní člen.

M-9-2-05 – Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů.

Žáci ze slovní úlohy vypozorují vztah, který má lineární předpis. Například slovní úloha na rostoucí lineární funkci. Žáci by tento příklad, v rámci digitální kompetence, mohli počítat v softwaru MS Excel, který nabízí k dispozici i grafickou vizualizaci.

První dodavatel elektrické energie nabízí cenu 4,50 Kč za kWh s měsíčním poplatkem 150 Kč, druhý dodavatel nabízí 4,30 Kč za kWh s měsíčním poplatkem 180 Kč, který dodavatel se finančně vyplatí? Počítejte pro 1 000 kWh, 2 000 kWh, 3 000 kWh [6].

Prvního dodavatele lze popsat předpisem $y_1 = 4{,}50 \cdot x + 12 \cdot 150$

Druhého dodavatele lze popsat předpisem $y_2 = 4{,}30 \cdot x + 12 \cdot 180$

Tabulka 1: Tabulka k řešení příkladu

První dodavatel		Druhý dodavatel	
x [kWh]	y_1 [Kč]	x [kWh]	y_2 [Kč]
1 000	6 300	1 000	6 460
2 000	10 800	2 000	10 760
3 000	15 300	3 000	15 060

Pro prvních 1 000 kWh se vyplatí první dodavatel, ale pro další kWh se vyplatí druhý dodavatel.

1.3 Geometrie v rovině a v prostoru

Žáci získávají na základní škole geometrické znalosti, dovednosti a návyky. Geometrie rozvíjí i manipulativní činnost, zejména dovednost rýsování, kterou žáci získávají postupně a systematicky od 11 let věku. Důležitou součástí geometrie je práce se symbolikou. V současné době je, co se týká symboliky, v českých učebních textech nejednota, kterou by mělo napravit vydání nových názvů a značek školské matematiky [6].

Pilíři geometrie jsou matematicko-logická inteligence a prostorová inteligence. První se převážně využívá v početních geometrických úlohách, druhá vyžaduje geometrickou představivost. Geometrie vyžaduje dva typy myšlení, a to proporční, ve kterém se žáci naučí z paměti postup konstrukce úlohy, a druhé imaginativní, kterou nejlépe vystihuje popisná věta: „Geometrický útvar v duchu vidím, ale nedokážu ho popsat.“ [6]. Dalšími aspekty jsou „selský rozum“ a originalita, které se vykazují rychlým a ve většině případů nečekaným správným řešením.

Celosvětově se rozlišuje označení na 2D tvary pro rovinnou geometrii a 3D tvary pro prostorovou geometrii (tvary dimenze dva a tři). Faktem je, že se žáci seznamují s útvary, které mohou mít více než jeden název. Učí se nejen rýsovat útvary, ale také je popisovat a počítat s nimi.

Zde jsou probíraná následující učiva

- rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta
- prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

M-9-3-01 Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku.

Žáci pracují s rovinnými útvary, které označují písmeny. Bod se značí velkými písmeny latinské abecedy, přímky malými písmeny, řeckými písmeny se označují úhly a roviny, kružnice se označují malými k, l atd. [27]. Využívají Pythagorovou větu, která má obecný předpis $c^2 = a^2 + b^2$, žáci vysvětlí její význam a zasazení.

M-9-3-03 Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem.

Úhly se značí písmeny řecké abecedy anebo seskupením tří písmen, kde se před tato písmena vkládá symbol úhlu. Prostřední písmeno je vrcholovým bodem, například úhel s vrcholem V zapsaný ∢ AVB.

M-9-3-04 Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

K výpočtu obsahu a obvodu se žáci učí používat obecné vzorce. Některé vzorce obsahují Ludolfovo číslo π, například pro obvod kruhu (kružnice) $O = 2 \cdot r \cdot \pi$, obsah kruhu $S = \pi \cdot r^2$ a objem rotačního válce $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$. Užívá a převádí příslušné jednotky délky, obsahu a objemu.

M-9-3-05 Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh.

Žáci se seznamují s označením osy úsečky *o* a se středem *S*. Obraz svého vzoru značí stejnými písmeny jako vzor, jen nad písmena dává jednoduchý apostrof, příkladem bod A má obraz A' [27].

1.4 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Tyto úlohy nabízejí ve školské matematice široké možnosti uplatnění. Většinou mají širší kontext, který navozuje specifickou problémovou situaci. Úlohy narušují stereotypní chod výuky a často zakládají další vývoj matematického myšlení. Některé mohou být i škodlivé pro vývoj matematické myšlení. Nejcennější zkušeností pro žáky je zejména diverzita řešení, porovnávání svého řešení s jiným od ostatních. Žáci se učí obhajovat a argumentovat správnost svého řešení. Jeden z předpokladů k řešení nestandardních úloh je využití didaktizovaných i nedidaktizovaných pomůcek. Například problém osmi dam má dvanáct symetrických řešení. Úkolem zmíněného problému je umístit na šachovnici osm dam tak, aby dle pravidel šachu se dámy navzájem neohrožovaly [4]. Žáci se s nestandardními úlohami setkávají mimo školské prostředí, mohou to být různé kvízy, doplňovací příklady, sudoku, kakuro, hlavolamy, algebrogramy apod.

Ukázka nestandardní matematické úlohy v robotice, která pracuje s proměnnými (písmeny), je uvedena v praktické části práce.

2 Historický vývoj vybraných písmen užívaných na základních školách

Označování se vyvíjelo hned od samého počátku matematiky, od prvních příčných zářezech na kosti nalezené Karlem Absolonem u Dolních Věstonicích [7] přes babylonskou klínopisnou šedesátkovou číselnou soustavou [17] až po znaky indického zápisu, ze kterých se vyvinuly prostřednictvím Arabů dnešní podoby čísel [24]. Zapsat čísla vlastním symbolem nebo znakem vybrané abecedy nestačí. Vyvíjela se číselná soustava, která dávala význam tomuto zápisu. Dnes se používá výhradně dekadická poziční soustava z indické matematiky[1], ale k té se muselo lidstvo teprve dopracovat přes pronikavě nesnadné praktické počítání. Využívat symboly ve významu obecných vzorců začali hojně využívat až renesanční matematikové. Ti se snažili zobecňovat zpravidla kvantitativní modely objektů a dějů, které byly předmětem zájmu. Každý početní výstup si nacvičili na konkrétních číslech a předpokládali, že s jinými čísly už to budou umět stejně [17]. Algebraické symboly pro sčítání (+), odčítání (−), rovná se (=), násobení (·) a dělení (:) nepoužívali jako dnes, nýbrž je vyjadřovali slovy. Například rovnítko prezentované dnešním symbolem poprvé použil v roce 1557 Robert Recorde (1510–1558). Symbolika, která je známá dnes, se nezačala používat hned po zveřejnění díla daného autora. Doprovázela je totiž ostrá kritika či nepochopení. Zásadní změnou přispěl v oblasti psaní matematického textu písmeny René Descartés (1596–1650), je považován za zakladatele analytické geometrie. Doposud se početní operace řešily

[1] Indická číselná soustava měla přednost, protože používala k zápisu čísel nulu.

geometricky. To sice bylo vhodné pro vizuální představu, ale pro geometrické konstrukce představovaly početní operace jen omezenou přesnost závislou na přesnosti rýsování. Díky obecnému uvažování položili renesanční matematici nové otázky, na by antičtí matematici neměli odpovědi. Vznikaly nové metody, myšlenky či celé teorie, které obzory matematiky nechávaly otevřené.

2.1 Označování písmeny x, y, z a konstant a, b, c

Jedno z prvních označení pro „neznámé číslo" napsal Diophantus ze starověkého Řecka. Používal písmeno sigma s čárkou $\varsigma^{/}$. Důvod použití tohoto písmena byl prostý, tento znak se nepoužíval k vyjádření konkrétního čísla. Řekové totiž psali čísla písmeny své abecedy. Diophantus ve svém hlavním díle Arithmetica použil pro čtverec x^2 označení Δ^Y a pro krychli x^3 označení K^Y [2].

Během let se vývoj zápisu označování v rovnicích vyvíjel, ale jednotný systém, který by se mezinárodně uchytil, prakticky neexistoval. Používaly se pro x, x^2 a x^3 různé symboly, písmena, slabiky, celá slova či řecká písmena v různém zápisu.

Vývoj zápisu rovnic [3], [24]:

<u>Dnešní zápis rovnice třetího stupně</u>

$$2x^3 + 5x = 7$$

<u>Druhá polovina 15. století</u>

německý matematik Johann Regiomontanus (1436–1476):

2 cubus et 5 rebus aequales 7

<u>První polovina 16. století</u>

německý matematik Michael Stifel (1487–1567):

2 + 5. aequ. 7

italský matematik Rafael Bombelli (1526–1572):

2p . 5eguale a 7

italský matematik Geronimo Cardano (1501–1576):

2 cubus p 5 rebus aequantur 7

2. cubus □. ς. positionibusequantur 7

Druhá polovina 16. století

francouzský matematik François Viète (1540–1603):

2C + 5N aequatur 7

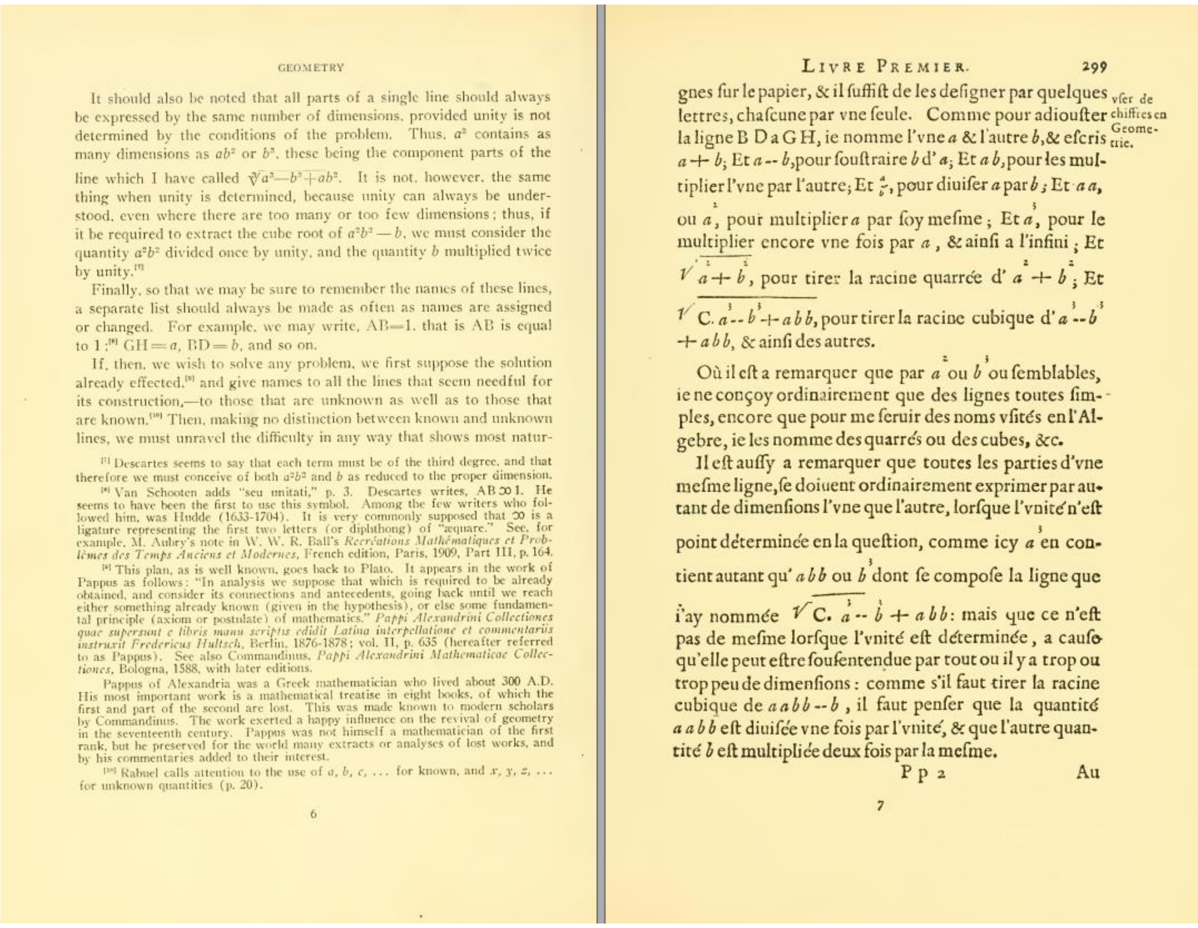
První polovina 17. století

anglický matematik Thomas Harriot (1560–1621):

2.aaa + 5.a = 7

Písmeno *x* se využívalo i v jiné podobě než jen v rovnicích a algebraických výrazech. Leonhard Euler (1707–1783) představil dnešní podobu funkce *f(x)* [17] v roce 1734 a diferenci (rozdíl) Δx v roce 1755.

René Descartés ve svém díle La Géométrie, začal používat dnešní zápis mocnin (místo aa psal a^2) jak je uvedeno na Obrázku 1 jeho díla s překladem [25]. Rozlišoval zvlášť písmena pro proměnné a konstanty. Zavedl označování pro známé hodnoty (konstanty) písmeny na začátku abecedy a pro neznámé hodnoty (proměnné) písmena od konce abecedy. Dílo odstartovalo počátek analytické geometrie, doposud se geometrie řešila graficky. Francouzský matematik, filozof a fyzik dále vylepšil symbol pro odmocninu, který se používá do dnes.



GEOMETRY

It should also be noted that all parts of a single line should always be expressed by the same number of dimensions, provided unity is not determined by the conditions of the problem. Thus, a^3 contains as many dimensions as ab^2 or b^3, these being the component parts of the line which I have called $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$. It is not, however, the same thing when unity is determined, because unity can always be understood, even where there are too many or too few dimensions; thus, if it be required to extract the cube root of a^2b^2-b, we must consider the quantity a^2b^2 divided once by unity, and the quantity b multiplied twice by unity.[7]

Finally, so that we may be sure to remember the names of these lines, a separate list should always be made as often as names are assigned or changed. For example, we may write, AB=1, that is AB is equal to 1;[8] GH=a, BD=b, and so on.

If, then, we wish to solve any problem, we first suppose the solution already effected,[9] and give names to all the lines that seem needful for its construction,—to those that are unknown as well as to those that are known.[10] Then, making no distinction between known and unknown lines, we must unravel the difficulty in any way that shows most natur-

[7] Descartes seems to say that each term must be of the third degree, and that therefore we must conceive of both a^2b^2 and b as reduced to the proper dimension.

[8] Van Schooten adds "seu unitati," p. 3. Descartes writes, AB ∞ 1. He seems to have been the first to use this symbol. Among the few writers who followed him, was Hudde (1633-1704). It is very commonly supposed that ∞ is a ligature representing the first two letters (or diphthong) of "æquare." See, for example, M. Aubry's note in W. W. R. Ball's *Recréations Mathématiques et Problèmes des Temps Anciens et Modernes*, French edition, Paris, 1909, Part III, p. 164.

[9] This plan, as is well known, goes back to Plato. It appears in the work of Pappus as follows: "In analysis we suppose that which is required to be already obtained, and consider its connections and antecedents, going back until we reach either something already known (given in the hypothesis), or else some fundamental principle (axiom or postulate) of mathematics." *Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt e libris manu scriptis edidit Latina interpellatione et commentariis instruxit Fredericus Hultsch*, Berlin, 1876-1878; vol. II, p. 635 (hereafter referred to as Pappus). See also Commandinus, *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*, Bologna, 1588, with later editions.

Pappus of Alexandria was a Greek mathematician who lived about 300 A.D. His most important work is a mathematical treatise in eight books, of which the first and part of the second are lost. This was made known to modern scholars by Commandinus. The work exerted a happy influence on the revival of geometry in the seventeenth century. Pappus was not himself a mathematician of the first rank, but he preserved for the world many extracts or analyses of lost works, and by his commentaries added to their interest.

[10] Rabuel calls attention to the use of $a, b, c, \ldots$ for known, and $x, y, z, \ldots$ for unknown quantities (p. 20).

6

LIVRE PREMIER. 299

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a+b$; Et $a--b$, pour ſouſtraire b d' a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\,a^3--b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d' a^3--b^3+abb, & ainſi des autres. Vſer de chiffres en Geometrie.

Où il eſt a remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſeruir des noms vſités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il eſt auſſy a remarquer que toutes les parties d'vne meſme ligne, ſe doiuent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'vne que l'autre, lorſque l'vnité n'eſt point déterminée en la queſtion, comme icy a^3 en contient autant qu' abb ou b^3 dont ſe compoſe la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\,a^3--b^3+abb}$: mais que ce n'eſt pas de meſme lorſque l'vnité eſt déterminée, a cauſe qu'elle peut eſtre ſouſentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimenſions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb--b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diuiſée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la meſme.

P p 2 Au

7

Obrázek 1: Ukázka užití písmen z díla La Géométrie [25].

2.2 Násobení a součin členů

Matematická operace násobení byla prvně označena křížkem ×, který vypadá jako písmeno latinky, ale původně se jednalo se o symbol nesoucí jméno St. Andrew's cross, česky přeloženo svatoondřejský kříž, jenž odkazuje na ukřižování svatého Ondřeje. Tento symbol byl poprvé použit Williamem Oughtredem (1574–1660) v díle Clavis Mathematicae (Key to Mathematics) [18]. Tečkou násobení nahradil Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) okolo roku 1700. Násobení jako matematická operace se už vyskytovalo v minulostí dávno předtím. Násobení vyjádřené juxtapozicí[2] se objevilo v dokumentu nalezeném kousek od vesnice Bakhshali v Indii [2]. Manuskript pochází buď z osmého, devátého nebo desátého století našeho letopočtu. Také matematik al-Qalasadi[3] (1412–1486) v patnáctém století psal juxtapozicí pro vyjádření násobení.

[2] Juxtapozice – termín používaný k popisu umístění dvou objektů blízko sebe.

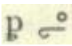
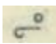
[3] Abû al-Hasan Alí ibn Muhammad al-Qalasádí

Znak součinů členů Π (majuskulního pi) už údajně používal René Descartés v 17. století, ale historikové se o toto prvenství přou. Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) jej začal užívat v roce 1812 a později se jeho symbol ujal [17].

2.3 Suma

Řeckým velkým písmenem sigma Σ se označuje součet členů řady. Leonhard Euler v roce 1755 jako první ve svém díle Institutiones calculi differentialis (kapitola první De Differentiis Finitis) na straně 23 v 26. odstavci píše: „Quemadmodum ad differentiam denotandam vsi sumus signo Δ, ita summam indicabimus signo Σ.“. Přeloženo do češtiny: „Stejně jako jsme použili symbol Δ k označení rozdílu, tak jsme symbolem Σ označili součet.“ [18].

2.4 Symbol procenta

V dnešní době je běžné, že procento se značí symbolem %. Správně se píše nejprve číslo, pak mezera, a nakonec znak procenta, například 3 % [41]. Symbol neobsahuje žádné písmeno, ale první označení procenta se objevilo již v Itálii. Dřív se procento značilo „per 100“, „p 100“ nebo „p cento“. V roce 1445 neznámý autor napsal „per cento“, podle předpony per – pro a z řadových číslic jako jsou 1^o – primo, 2^o – secondo, 3^o – terzo, …, 100^o – cento, symbolem  ze kterého vzniklo . Od předpony „per“ se časem upustilo a v 1650 se symbol $\frac{o}{o}$ proměnil na % [38].

2.5 Historický vývoj Ludolfova čísla

Ludolfovo číslo je významnou konstantou. Skutečnost, že poměr délky kružnice k délce jejího průměru je přibližně 3:1, byla babylónským matematikům známá již v letech 2000 př. n. l. [24]. Písemné zmínky výpočtu π sahají i do starobylého Egypta. V 17. století př. n. l. byl nalezen šesti metrový svitek jménem Rhindův papyrus (Rhind Mathematical Papyrus), jehož autem byl písař Ahmes. V dokumentu je tento poměr vyjádřený zlomkem $\left(\frac{19}{6}\right)^2$ což je přibližně 3,1667. Později zhruba v 250 let př. n. l. se tímto vztahem obvodu kružnice a jeho průměrem věnuje Archimédés ze Syrakus (asi 287–212 př. n. l.). Ten na základě výpočtu obvodu pravidelného 96-úhelníku opsaného a vepsaného do kružnice stanovil, že $\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70}$ (zaokrouhleno $3,1408 < \pi < 3,1429$) [24].

Období geometrických postupů je založeno na vyjadřování hodnoty pomocí metod založené na té Archimédové. Pro představu, François Viète (1541–1603) vyjádřil hodnotu s přesností na devět desetinných míst výpočtem s pomocí 392 216-úhelníku. Ludolf van Ceulen (1540–1610) počítal s přesností na 25 desetinných míst s mnohoúhelníkem mající 32 miliard stran.

Metody funkcionální jsou charakteristické řadami, integrálním počtem a cyklometrickými funkcemi. John Machin (1680–1752) hodnotu π vyjádřil na 100 desetinných míst kombinací svého vzorce a Taylorovy řady pro inverzní tangens.

$$\pi = 16\, arctan \frac{1}{5} - 4\, arctan \frac{1}{239} \tag{2.5.1}$$

Nástup výpočetní techniky ulehčil práci s ručním počítáním a pomohl π prezentovat s dlouhými desetinným rozvojem. Tuto formuli (2.5.2) použili v počítači IBM 7090 Daniel Shanks (1917–1996) a John William Wrench, Jr (1911–2009).

$$\pi = 48\, arctg \frac{1}{18} + 32\, arctg \frac{1}{57} - 20\, arctg \frac{1}{239} \tag{2.5.2}$$

Výpočetní technika se pro výpočet π omezuje velikostí paměti a doby trvání výpočtu.

Vývoj zpřesňování hodnoty π vypadal takto [17],[18]:

	Období	Autor	Vypočtená hodnota
Období geometrických postupů	3. století	Liu Hui	3,14159
	9. století	Al Chwárizmí	3,1416
	Okolo 1200	L. Fibonacci	3,1418
	1430	Al Káší	3,1415926535897932
	1593	F. Viète	3,1415926536
	Okolo 1600	Ludolf van Ceulen	3,14159265358979323846
	1615	Ludolf van Ceulen	35 desetinných míst
Funkcionální metody	1706	J. Machin	100 desetinných míst
	1794	G. von Vega	136 desetinných míst
	1824	W. Rutheford	152 desetinných míst
	1847	T. Clausen	248 desetinných míst
	1853	W. Rutherford	527 desetinných míst
	1946	D. F. Ferguson	620 desetinných míst
S pomocí výpočetní techniky	1947	D. F. Ferguson	710 desetinných míst (stolní kalkulátor)
	1949	G. W. Reitweisner, J. W. Wrench	2 037 desetinných míst
	1958	G. E. Felton	10 021 desetinných míst
	1961	D. Shanks, J. W. Wrench	100 625 desetinných míst
	1973	J. Gouiloud, M. Bouyer	1 001 250 desetinných míst
	1985	W. Gosper	17 526 200 desetinných míst
	1989	Y. Kanada Y. Tamura	1 073 741 799 desetinných míst
	1994	G. V. Chudnovsky D. V. Chudnovsky	4 440 000 000 desetinných míst
	1999	Y. Kanada D. Takahashi	206 158 430 000 desetinných míst
	2002	Y. Kanada	1 241 100 000 000 desetinných míst
	2011	S. Kondo	10 triliónů desetinných míst

K březnu roku 2019 se publikovalo π na 31,4 biliónů číslic a vypočítala ho počítačová specialistka Emma Haruka Iwao (1984–) [26].

Švýcarský matematik Johann Heinrich Lambert (1728–1777) v roce 1761 dokázal, že π je iracionální číslo s nekonečným desetinným zápisem a v roce 1882 německý matematik Ferdinand von Lindemann (1852–1939) dokázal, že je transcendentní[4].

Anglický matematik William Jones (1675–1749) v roce 1706 označil tuto konstantu malým minuskulním řeckým písmenem π a pojmenoval po Ludolfu van Ceulenovi [5], [17]. Písmeno bylo odvozeno ze slova *perimetros* (περίμετρος – obvod) [11].

Uznaný světový rekord drží Lu Chao, který si zapamatoval π za 67 890 číslic, a recitování mu trvalo přes 24 hodin.

2.6 Geometrické zápisy rovinných útvarů písmeny

Úhel označil třemi písmeny francouzský matematika a generál Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753–1823) ve svém díle Géométrie de position (1801) a symbol úhlu k tomuto zápisu přidali později němečtí matematikové. Carnot použil také velká písmena pro označení bodů, oblouček pro kruhový oblouk $\widehat{AB}$, označil $\triangle ABC$ pro obecný trojúhelník s vrcholy a označil $\varDelta ABC$ pro pravoúhlý trojúhelník, ale toto značení nebylo vlídně přijato [2]. Augustin Louis Cauchy (1789–1857) byl první, který označil vektor $\vec{v}$ v roce 1853 [17]. Později v roce 1866 německý matematik Theodor Reye (1838–1919) navrhl používat velká písmena také pro označování bodů, malá písmena pro označování přímek a řecká písmena pro označení rovin. Označovat úhly malými řeckými písmeny navrhl Národní výbor pro matematické požadavky (The National Committee on Mathematical Requirements) v roce 1923 a ve svém doporučení také navrhl používat řecká písmena tak, aby odpovídala stejnému vrcholu [2].

2.7 Římská čísla

Římané se do dějin matematiky nijak výrazně nezapsali, považovali se za dědice a ochránce řecké kultury a vzdělanosti. Prvenství však získali, když na základě kombinace etruské a řecké číselné soustavy vytvořili nejpraktičtější číselný systém, jaký se komu kdy

[4] Transcendentní číslo – takové komplexní číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

podařilo sestavit [17]. Na samotném počátku Římané nepoužívali písmena své abecedy pro číselné vyjádření jako Hebrejci či Řekové. Před nadvládou Říma na území dnešního Toskánska žili v době 500 př. n. l. Etruskové. Ti používali číselné znaky, připomínající jejich abecedu. Podobné znaky používali později Římané [2].

Tabulka 2: Tabulka o rozdílném zápisu Etrusků a Římanů.

Etruský zápis čísla	Starořímský zápis čísla	Význam
Λ, V	V	5
X, +	X	10
↑, ↓	ᛦ, ↓, ⊥, ⊥, ∟	50
⊕	⊖	100
8	⦶	1 000

První tři znaky V, X, L jsou hodně podobné původnímu etruskému zápisu, další dva údajně se vyvinuly na základě výslovnosti těchto znaků, ale původ C pro 100 a M pro 1 000 není zcela objasněn. Někteří historikové tvrdí, že znaky čísel pro 50, 100 a 1 000 jsou inspirované z řecké abecedy. Znak pro číslo 500 vzniklo ze znaku ⦶ pro 1 000, ze kterého se používala jen půlka a vznikl znak D. Je předkládáno historiky, že se prvně používal čistě aditivní systém zápisu čísel a později se objevovalo používání principu odčítání. Pokud je písmeno umístěno před jiné písmeno o vyšší hodnotě, pak menší hodnota se odčítá od té větší. Zápis čísel IIII se změnil na IV. Některé zápisy byly vyjádřeny juxtapozicí a představovaly násobení. Zápis čísla 5 000 mohl být vyjádřený jako VM, LXXXIII·M pro 83 000 (83 · 1000) a CX·M pro 110 000 (110 · 1 000). Během dějin se však objevily zápisy, které udivovaly historiky. Například z osmého století našeho letopočtu se psalo číslo 90 jako LXL, 13 jako IIIX a VIX pro 16. Další nález z roku 130 př. n. l. bylo číslo 83 napsané XXCIII místo LXXXIII. Vývoj zápisu se nezastavil a ve čtrnáctém století se římská čísla psala i pozičně. Například $\overset{M}{\mathrm{IIII}}$, $\overset{C}{\mathrm{IIII}}$, LXXIII znamenalo 4 · 1 000 + 4 · 100 + (50 + 20 + 3) = 4 473 [2].

Římská čísla se na školách vyskytují, ale primárně se s nimi nepočítá. Jejich význam se stal spíš symbolický, dají se naleznout na náhrobcích, významných stavbách nebo se s nimi označují kapitoly.

3 Vybraná témata s písmeny užívanými na ZŠ škole

Komunikace v rámci oblasti čtení matematického textu je pro žáka složitá, zejména u slovních a aplikačních úloh. Žákům dělá problém čtení celého dlouhého textu, porozumění tohoto textu, pochopení tázací otázky a používaných výrazů v textu úlohy, které jsou zásadní pro vypsání podmínek z úlohy. Učitel by si měl dát pozor, aby se žák neučil řešení těchto úloh nazpaměť. Problémy také vznikají u porozumění a čtení symbolického zápisu. Jestliže žák dobře zvládá grafickou komunikaci a sám je schopen zachytit myšlenku písemně, svědčí to o jeho dobré matematické úrovni. Avšak správnost řešení výpočtu může být obtížně řešitelná, třeba i z důvodu nedbalého zápisu. Platí známé pravidlo „Žákův sešit je obrazem učitelovy tabule“. Naopak ale není zaručeno, že upravený sešit je zárukou porozumění a zvládnutí matematického učiva. Nově se do RVP dostala kompetence digitální, a i v digitálním zápisu by měl učitel dbát na formální zápis všech jednotek, výrazů, zkratek apod.

Problémem užití písmen v matematice může být její nejasnost. Pro žáka může být komplikované odlišit s jako jednotku sekundy, s jako označení dráhy a s pro proměnnou v příkladě. Další problém nastává ve vysvětlování významu příkladu. Žáci mají tendenci příklad, se zkušenosti s přirozenými čísly, „ukončovat“. Například $h + h + j + j + h$, kde j – jablka a h – hrušky zakončí výsledkem $5hj$. Nastává zde problém s rozeznáním jednotky a proměnné. Je důležité, aby učitel zdůrazňoval, že se jedná o neznámý počet objektů, a ne o objekt samotný [6]. Žákovi se pravidla pro ekvivalentní úpravy, využívané v rovnicích, nemusí jevit zcela automaticky dle očekávání, proto je dobré mu zadávat, ať dosadí do původního výrazu za x nějaké číslo (dle platných podmínek). Další pomůckou při řešení rovnice je představa vyrovnaných vah, kde žák vidí důsledek svého jednání. Žádoucí je, aby náročnost práce s písmeny, ať už s jednotkami nebo slovními úlohami, nabírala na obtížnosti postupně. Například je vhodné, aby se některé slovní úlohy svým zadáním postupně větvily (graduované úlohy). Vhodné je pracovat i se vzorci, které se žáci učí i v jiných předmětech než v matematice. Aby docházelo k mezipředmětovému propojení, lze využít vzorce například Pascalova zákona, Ohmova zákona, úloh o rychlosti apod.

Řešení k nápravě nedostatků může být následující [1]:

1) Od první třídy (od šesté třídy) budovat pojmy matematiky na základě konkrétních činností žáků a později ve vyšších ročnících se přesunovat do abstraktně intuitivní roviny.

2) Zbavit vyučovací proces pouhého verbalismu a formalismu. Zpomalují kognitivní vývoj žáků a vedou k nechuti matematiky. Například vzoreček pro výpočet obvodu čtverce ukázat ve spojení grafického vyvození.

3) Provádět častou diagnostiku porozumění pojmů, vyvolávat diskuse, opakovat souvislosti a sledovat myšlenkové pochody žáků. Například sledovat v písemném projevu celý postup včetně poznámek, nejen výsledek.

4) Učit žáky pracovat s chybou.

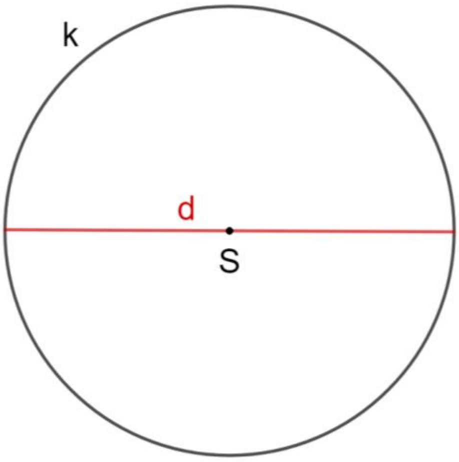
5) Vyzdvihovat a oceňovat kognitivní hodnoty, ať už jen připomínky nebo celé souvislosti. Například při výpočtu algebraického výrazu žák nezapomene udělat podmínky a zdůvodní jejich uvedení.

Učitel by měl vědět, že ve výuce je třeba myslet na komunikaci mezi učitel a žákem, neboť každé slovo učitele, způsob a tón, kterým je proneseno, má v konkrétní situaci svůj význam a výchovný dopad. Musí dbát na terminologii vyjadřování, citlivě jednat, snažit se porozumět myšlenkové situaci žáka a snažit se vyhnout monotématickému vyučování.

V této kapitole jsou teoreticky podchycena vybraná témata, která pracují s písmeny ve školské matematice. Nezastupitelnou roli užití písmen na škole je jejich užití v různých vzorců, kde každé písmeno konkrétně něco zastupuje. Často se využívá zjednodušené formy k interpretaci významu těchto vzorců. Konkrétně vzorce pro délky, obsahy, objemy či povrchy geometrických objektů se ve škole vysvětlují ve spojitosti s obrázky. Přesné definice těchto pojmů jsou definovány pomocí integrálů [10].

3.1 Ludolfovo číslo

Je matematická konstanta vyjadřující poměr mezi průměrem kruhu a obvodem kruhu v eukleidovském prostoru.



Obrázek 2: Jednotková kružnice

$$\pi = \frac{o}{d} \tag{3.1.1}$$

Když je Ludolfovo číslo iracionální, proč je vyjádřeno zlomkem ve tvaru $\frac{o}{d}$? To proto, že to nejsou celá čísla. Jestliže by průměr byl jedna, pak obvod není celé číslo.

Důkaz iracionality čísla π sporem

Důkaz je proveden podle Ivana Nivena 1946 [21], založeném na charakterizaci π jako nejmenší kladné nuly sinusové funkce [28].

Předpokládá se, že existují čísla *a, b* ∈ **N** tak, že π = *a / b*. Pro každé číslo *n* ∈ **N** se definuje polynom *f(x)*:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \quad x \in R.} \tag{3.1.2}$$

Polynom je v čitateli stupně *2n*, platí:

$$x^n(a-bx)^n = x^n\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-bx)^k\right]. \tag{3.1.3}$$

Pro x = 0 platí vztah

$$f(0) = \frac{0^n \cdot (a - b \cdot 0)^n}{n!} = 0. \tag{3.1.4}$$

Pro $x = \pi$ platí vztah

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n}{n!} = \frac{(a - bx)^n (x)^n}{n!} = f(x). \tag{3.1.5}$$

Jelikož platí vztah $f(x) = f(\pi - x)$, pak pro první derivaci platí $f\,'(x) = -f\,'(\pi - x)$ a pro druhou derivaci $f^{(2)}(x) = f^{(2)}(\pi - x)$, obecně pro i = $2n$ derivaci $f^{(i)}(x) = (-1)^{(i)} f^{(i)}(\pi - x)$. Derivace $f^{(i)}(0)\ a\ f^{(i)}(\pi)$ jsou celá čísla[5].

Definuje se funkce g(x) vztahem:

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)} - \ldots + (-1)^{(n)} f^{(2n)}(x), \text{tedy}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n f^{(2n)}(x). \tag{3.1.6}$$

Pro funkci g(x) platí, že g(0) a g(π) budou celá čísla

$$g^2(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^{(n)} f^{(2n+2)}(x)$$

$$f(x) = g(x) + g^{(2)}(x) \tag{3.1.7}$$

[5] Důkaz tvrzení je uveden v bakalářské práci Matematické konstanty na straně 19, bod c [42], celý důkaz je zde podrobně zpracován.

Definuje se funkce vztahem:

$$h(x) \ = g\,'(x)\ sin(x) - g(x)\ cos(x) \tag{3.1.8}$$

Její derivace je následující:

$$\big(g'(x)sin(x) - g(x)cos(x)\big)' =$$

$$= g^2(x)sin(x) + g'(x)\ cos(x) - g'(x)cos(x) + g(x)sin(x) =$$

$$= g^2(x)sin(x) + g(x)\ sin(x) = (g^2(x) + g(x))\ sin(x) =$$

$$= f(x)\ sin(x) \tag{3.1.9}$$

Podle základní věty o integrálním počtu platí

$$\int_0^{\pi} f(x)(sin\ x)dx \ = [g'(x)sin(x) - g(x)cos(x)]_0^{\pi} =$$

$$= g'(\pi)sin(\pi) - g(\pi)cos(\pi) - (g'(0)sin(0) - g(0)cos(0)) =$$

$$= 0 \cdot 0 - g(\pi) \cdot (-1) - (0 \cdot 0 - g(0) \cdot 1) =$$

$$= g(\pi) + g(0) \tag{3.1.10}$$

Součtem dvou celých čísel vzniká celé číslo. Funkce *sin(x)* bude vždy mezi 0 a 1, když *x* bude mezi 0 a π. Platí nerovnice *f(x) sin(x)* < *f (x).* Platí vztah $(a - bx) < a$ pro $x\ \epsilon\ (0, \pi)$, platí také $(a - bx)^n < a^n$ pro $x^n\ \epsilon\ (0, \pi^n)$. Potom pro každé x ∈ (0, π) platí nerovnosti:

$$0 < f(x)sin(x) < \frac{a^n\pi^n}{n!} \tag{3.1.11}$$

Po integraci platí:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) sin(x) dx < \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!} \qquad (3.1.12)$$

Při stoupajícím *n* do nekonečna pravá strana nerovnice je nulová. Prostřední člen pro nějaké dostatečně velké *n* bude integrál mezi 0 a 1 a zároveň to musí být celé číslo. To je spor a π je iracionální. Důkaz je hotový.

Symbol konstanty π je také užíván v jednotkách radiánech a radián je jednotka rovinného úhlu. Definuje se jako velikost úhlu, která je na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu, vytíná oblouk jednotkové délky [19]. Využívá se i v elektrotechnice pro vyjádření fázového úhlu. Obecně platí tento vztah mezi radiány a stupni (α je ve stupních)

$$\alpha : x = 180° : \pi \qquad (3.1.13)$$

Tabulka 3: Vztah mezi radiánem a úhlem [19]

x [rad]	1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
α [°]	≈57°17‘45‘‘	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

Radiány byly doplňkové jednotky SI soustavy, ale v roce 1995 byla tato kategorie zrušena [40].

Možné aproximace Ludolfova čísla jsou 3,14, $\frac{22}{7}$, $\sqrt[3]{31}$, $\frac{223}{71}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{377}{120}$, $\frac{3330}{1060}$, $\frac{103993}{33102}$, $\frac{104348}{33215}$

Pokud existuje někde nějaká vyspělá civilizace, která má vyspělou matematiku alespoň s přirozenými čísly, tak i tato civilizace má číslo π [36]. Číslo π má ještě další zajímavost, vzniklo z potřeb geometrie a na pohled má význam jenom pro ni. Jak uvádí Mareš (2011, 119. s. [17]): ”Přitom ale, tak jak matematika po van Ceulenovi pokračovala, vznikal infinitezimální počet, hledaly se součty nekonečných řad a počítaly zajímavé body funkcí, bylo s podivem, jak často matematici naráželi na hodnotu π v úplně nových a nečekaných souvislostech“.

Mnemotechnická pomůcka pro zapamatování Ludolfova čísla na 35 míst. Každé slovo začíná stejným písmenem jako číslice, jen písmeno ř značí číslici 9 [16].

Takto jednou člověk jeden pěknou řadu dlouhou špatné paměti tvrdohlavci připomněl.

3 1 4 4 5 9 2 6 5 3 5

Opakoval řádně slov řadu tuto, došel této odměny. Čas šťastně drahý šetřil.

8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6

Člověk ten totiž opět třetího dne sumu řekl. Pak nezapomněl délku obvodu opsat.

4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8

Následující mnemotechnické pomůcky (piémy), kde počet písmen každého slova reprezentuje číslici [13],[24]

a) Lín a kapr u hráze,

prohlédli si rybáře,

udici měl novou

jikrnáči neuplovou.

b) Sám u sebe v hlavě

magického pí číslic deset mám

c) Mám ó Bože ó velký

pamatovat si takový cifer řád,

velký slovutný Archimédés,

pomáhej trápenému,

dej mu moc,

nazpaměť nechť odříká ty slavné sice,

ale tak protivné nám, ach, číslice

Ludolfovy!

3.2 Výrazy a lomené výrazy s proměnou

Základem aritmetiky jsou čísla a 4 početní výkony, které s nimi provádíme: sčítání +, odčítání - , násobení x (·), dělení : . Pomocí těchto výkonů dostáváme číselné výrazy [30]. Pokud řešitel provede všechny početní operace ve výrazu, získá číselnou hodnotu výrazu. Mnohočlen je konkrétní výraz, ve kterém se objevuje proměnná a standardní matematické operace.

Ve výrazech s proměnou se vyskytují čísla (konstanty) a písmena (proměnné). Díky nim se může zobecňovat ze všech možných výpočtů. Vyjadřuje se obecný vztah s proměnnými, jakou jsou například matematické vzorce. Než se takový výraz řeší, musí se stanovit, co se za proměnnou může dosadit z konkrétní množiny. Na základní škole se mohou vyskytovat vzorce vytýkání a algebraické vzorce druhé a třetí mocniny.

$$ab + ac = a(b + c) \tag{3.2.1}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.2.2}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{3.2.3}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{3.2.4}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{3.2.5}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{3.2.6}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{3.2.7}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{3.2.8}$$

Při práci s výrazy se provádí vytýkání, aplikace algebraických vzorců, rozkládání, dělení, násobení, sčítání, odečítání, roznásobování a odstraňují se závorky dle svých pravidel.

Lomené výrazy jsou zlomky, ve kterých je v čitateli a ve jmenovali mnohočlen. S lomenými výrazy se počítá podobně jako se zlomky. Důležité je, aby se u mnohočlenů ve jmenovateli určily podmínky. Následně je nutné, aby ve jmenovateli výrazu nevznikla nula, protože nula ve jmenovateli není v matematice definována. Při práci s mnohočleny se uplatňují následující úpravy.

3.2.1 Rozšiřování

Lomený výraz se vynásobí stejnou hodnotou. Násobení nesmí upravit hodnotu výrazu, a proto se násobí (rozšiřuje) hodnotou jedna, která nemění výsledek zlomku.

$$\frac{3x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$$

3.2.2 Krácení

Jedná se o opačnou operaci k rozšiřování zlomků. Čitatel a jmenovatel „se dělí“ stejným výrazem tak, aby se hodnota lomeného výrazu nezměnila neboli musí se najít takový výraz v čitateli a ve jmenovateli, aby byl stejný a mohl se zkrátit. Před každým krácením je nutné stanovit podmínky.

$$\frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1} = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = \frac{3x}{x-1}$$

3.2.3 Sčítání a odčítání lomených výrazů

Při sčítání nebo odčítání lomených výrazů vzniká jeden lomený výraz se společným jmenovatelem. Princip je podobný jako u sčítání a odečítání zlomků. Hledá se společný jmenovatel pro dva nebo více lomených výrazů.

Ukázka sčítání zlomků

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$

Pro oba zlomky se najde společný jmenovatel, upraví se čitatelé obou zlomků a sečtou se.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{(15:3) \cdot 2 + (15:5) \cdot 4}{15} = \frac{22}{15}$$

Ukázka sčítání zlomků s proměnou ve jmenovateli.

$$\frac{4}{a^2 s} + \frac{2a}{a^2 s}$$

Řešení:

$$\frac{4}{a^2 s} + \frac{2a}{a^2 s} = \frac{4 + 2a}{a^2 s}$$

$$a^2 s \neq 0$$

$$s \neq 0, a \neq 0$$

Ukázka odčítání zlomků s proměnou ve jmenovateli

$$\frac{1+s}{2t} - \frac{1-s}{2t}$$

Řešení:

$$\frac{1+s}{2t} - \frac{1-s}{2t} = \frac{(2t:2t)\cdot(1+s) - \big((2t:2t)\cdot(1-s)\big)}{2t} =$$

$$= \frac{1+s-(1-s)}{2t} = \frac{1+s-1+s}{2t}$$

Při odečítání se doporučuje závorkami oddělovat čitatele, aby se neudělala chyba ve znaménkách.

$$\frac{1+s-1+s}{2t} = \frac{2s}{2t} = \frac{s}{t}\ ; (t \neq 0)$$

Ukázka zjednodušení komplexního výrazu

$$\frac{a}{b-a} + \frac{b}{b+a} - \frac{ab}{b^2-a^2}$$

Tento komplexnější příklad nemá na první pohled stejného jmenovatele. Lze si všimnout vzorce, který lze rozepsat.

Platí vztah

$$b^2 - a^2 = (b-a)\cdot(b+a)$$

Řešení:

$$\frac{a}{b-a}+\frac{b}{b+a}-\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{(b+a)\cdot a+(b-a)\cdot b-1\cdot ab}{b^2-a^2}=$$

$$=\frac{ab+a^2+b^2-ab-ab}{b^2-a^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{b^2-a^2}$$

$$b\neq a;\ b\neq -a$$

3.2.4 Násobení lomených výrazů

Násobí se čitatel s čitatelem a jmenovatel se jmenovatelem.

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a+1}{b-1}$$

Řešení:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a+1}{b-1}=\frac{b(a+1)}{a(b-1)}=\frac{ab+b}{ab-a}$$

$$a\neq 0;\ b\neq 1$$

3.2.5 Dělení lomených výrazů

Při dělení lomených výrazů se využívá převráceného výrazu.

Ukázka dělení zlomků

$$\frac{\frac{xy}{a}}{\frac{xy^2}{a^2}}$$

Takto zadaný příklad se rozepíše do řádku, dělitel (výraz pod hlavní zlomkovou čárou) se přepíše do převráceného tvaru a dělení se nahradí operací násobení.

Řešení:

$$\frac{\frac{xy}{a}}{\frac{xy^2}{a^2}} = \frac{xy}{a} : \frac{xy^2}{a^2} = \frac{xy}{a} \cdot \frac{a^2}{xy^2}$$

Dále se postupuje jako u násobení, nejprve je nutné podívat, jestli se nedá krátit a poté se násobí v řádcích. Podmínky se stanoví z jmenovatele dělence a také z celého dělitele (zlomku pod hlavní zlomkovou čarou)!

$$\frac{xy}{a} \cdot \frac{a^2}{xy^2} = \frac{a}{y}$$

$$a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 0;\ xy^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0;\ y \neq 0$$

Ukázka komplexního příkladu, který vyžaduje více různých úprav z předcházejících podkapitol.

$$\left(c + 1 + \frac{1}{c-1}\right) : \left(1 + \frac{1}{c^2 - 1}\right)$$

Řešení:

$$\left(\frac{c \cdot (c-1) + (c-1) + 1}{c-1}\right) : \left(\frac{(c^2-1) + 1}{c^2-1}\right) =$$

$$\left(\frac{c^2 - c + c - 1 + 1}{c-1}\right) : \left(\frac{c^2 - 1 + 1}{c^2-1}\right) =$$

$$\frac{c^2 - c + c - 1 + 1}{c-1} : \frac{c^2 - 1 + 1}{c^2 - 1} = \frac{c^2}{c-1} : \frac{c^2}{c^2-1} = \frac{c^2}{c-1} \cdot \frac{c^2-1}{c^2} =$$

$$= \frac{c^2}{c-1} \cdot \frac{(c-1)(c+1)}{c^2} = \frac{c+1}{1} = c + 1$$

$$c \neq 0, c \neq 1, c \neq -1$$

3.3 Rovnice

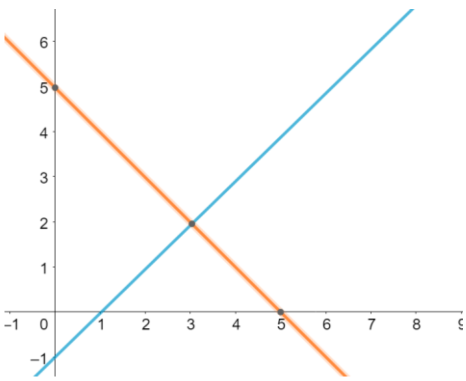
Zápisy rovnosti dvou výrazů, ve kterých se má určit neznámé číslo tak, aby daná rovnost platila, se nazývají rovnice. Řešit rovnici znamená najít takové číslo, aby se po dosazení tohoto čísla za neznámou rovnice změnila v rovnost. Nalezené číslo se nazývá řešení nebo kořen dané rovnice [20]. Po nalezení řešení je nutné provést zkoušku, ta se provádí tak, že se nalezený výsledek zvlášť dosazuje do levé a pravé strany rovnice. Pokud se obě strany rovnají, dosazované řešení je konečným řešením.

Povolené úpravy s rovnicí se jmenují ekvivalentní úpravy rovnic, které mají stejnou množinu všech řešení (kořenů) jako zadaná rovnice. Vhodné je upravovat rovnici tak, aby neznámé byly na jedné straně a konstanty na straně druhé.

Ekvivalentní úpravy jsou sčítání, odečítání, násobení a dělení obou stran rovnice. Při násobení a dělení se nenásobí nulou. Vhodné je učit žáky, aby psali rovnice uprostřed sešitu a rovnítka pod sebe. Výsledkem lineárních rovnic je buď konkrétní hodnota (a), množina všech reálných čísel (b) nebo rovnice řešení nemá (c) [30].

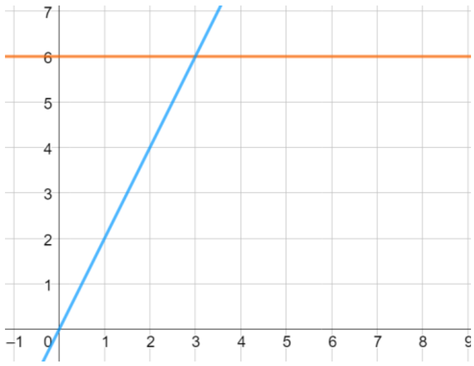
a)

$$x - 1 = -x + 5$$



Obrázek 3: Vizualizace dvou přímek v rovnosti.

$$\color{#00B0F0}{2x} = \color{#C55A11}{6}$$



Obrázek 4: Vizualizace rovnosti.

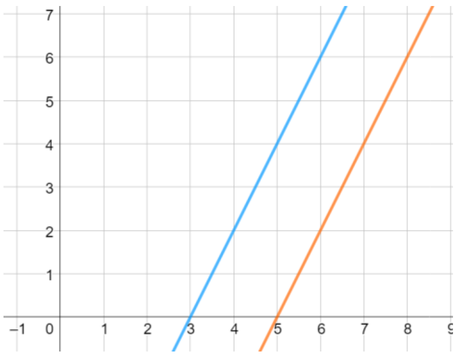
Z předchozích obrázků patrné, že rovnice platí za předpokladu, že $x = 3$.

Zkouška L: 3 – 1 = 2 P: – 3 + 5 = 2

L = P

b)

$$\color{#00B0F0}{2x + 3} = \color{#C55A11}{2x + 5}$$

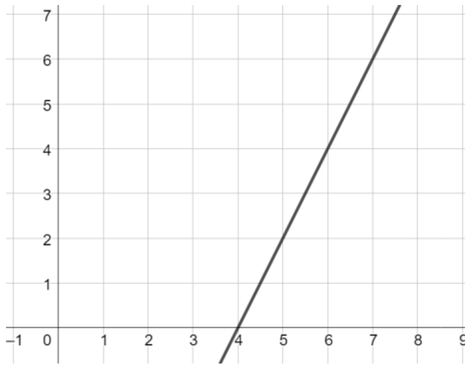


Obrázek 5: Vizualizace dvou rovnoběžných přímek v rovnosti.

Přímky jsou rovnoběžné a nikdy se neprotnou, neexistuje řešení rovnice $0 \neq 2$.

c)

$$2x + 4 = 2(x + 2)$$



Obrázek 6: Splývající přímky.

Po roznásobení pravé strany rovnice a přesunutí neznámých na letou stranu a konstant na pravou platí 0 = 0. Přímky splývají a rovnost platí pro všechna *x*.

Nezastupitelnou úlohou rovnic je jejich užití ve slovních úlohách. Řešit slovní úlohu znamená nejprve text v běžné řeči přeložit do matematického jazyka [5]. Postup a náležitosti slovní úlohy jsou [5], [20]:

1) Zápis – Může být vyjádřený buď tabulkou, nebo výpisem známých a neznámých (hledaných) hodnot. Je nutné pozorně a důsledně přečíst text slovní úlohy, zjistit podmínky úlohy a vymezit, co se počítá a v jakých jednotkách.

2) Realizace plánu – Všechny podmínky úlohy se vyjádří v rovnost. Uvádí se zde řešení výpočtu rovnice ekvivalentními úpravami, včetně veškerého postupu. Nesmí se předpokládat, „že je to přece jasné". Kdyby žák vypočítal příklad po svém a bylo by to správné řešení, neodmítat jej. Pokud ale existuje jednoduché řešení, mělo by se na závěr ukázat.

3) Ověření a kritické zhodnocení řešení – Důležitá fáze, ve které se zkouškou ověřuje, zda vyhovuje výsledek stanoveným podmínkám slovní úlohy. Nejedná se jen o kontrolu numerického výpočtu. Už při sestavování zápisu mohla nastat chyba.

4) Výsledek je vyjádřený slovní odpovědí včetně jednotek.

Tyto zmíněné zásady jsou aplikovatelné na všechny typy slovních úloh. Existují specifické slovní úlohy na směsi, společnou práci a pohybu. Typů je mnohem víc. Pro úlohy na směsi je charakteristické, že se jeden zvolený objekt označí jednou proměnnou a ostatní se zapisují ve vztahu k prvnímu. Úlohy na společnou práci se vyznačují tím, že jsou přítomny alespoň dva objekty, které konají práci s rozdílným výkonem, tempem, délkou trvání apod. Klíčovým řešením je sestavit rovnici, kde se jednotlivé výkony sjednotí v jednotkách a dávají se do součtu, kde za rovnítkem je číslo jedna. Pohybové úlohy jsou staré snad přes 1 000 let a vznikly z požadavků astronomie [20]. Často jsou to typové úlohy, kde jedou proti sobě dva objekty, a otázka zní kde nebo kdy se potkají.

Ukázka příkladu na směs s řešením:

Minerálky A za 15 kč a minerálky B za 19 kč jsou naskládány v přepravce. Dohromady v přepravce je 12 láhví a přepravka stojí 50 kč. Celkem nákup za přepravku a 12 láhví stál 250 Kč. Kolik bylo v přepravce minerálek A a B?

Minerálka A …………. 15 Kč

Minerálka B …………. 19 Kč

Počet A ……………… x láhví

Počet B ………… (12 – x) láhví

Přepravka ……………. 50 Kč

Celkem za nákup ……. 250 Kč

Cena bez přepravky …. 200 Kč

$$15x + 19 \cdot (12 - x) = 200$$

$$15x + 228 - 19x = 200$$

$$228 - 200 = 19x - 15x$$

$$28 = 4x$$

$$7 = x$$

Kontrola:

L: $15 \cdot 7 + 19 \cdot (12 - 7) = 105 + 95 = 200$ P: 200

L = P

Zakoupeno bylo 7 láhví minerálky A a 5 láhví minerálky B.

Ovšem existují slovní úlohy s rovnicemi, které se mohou vyskytovat na přijímacích zkouškách na střední školu, ve kterých selhává intuitivní přemýšlení. Není to však pravidlem, někteří žáci mohou slovní úlohu správně řešit po svém. Další příklady na selhání intuitivního myšlení jsou uvedeny v praktické části ve sbírce příkladů.

Ukázka příkladu, kde intuice může být chybná [14]:

Auto jelo z města A do města B rychlostí 60 km/h a zpět po stejné cestě rychlostí 40 km/h. Jaká byla průměrná rychlost auta?

Řešení:

Na první „intuitivní“ pohled se může zdát, že se jedná o výpočet aritmetického průměru. Tedy průměrná rychlost auta by byla 50 km/h. To je špatně. Jedná se o typ slovní úlohy na výpočet rychlosti ze společné cesty a společného času na cestě.

Délka cesty z města A do B je stejná jako z města B do A. Označí se celková dráha $s_c = (s + s) = 2s$. Ve vzorci pro rychlost figuruje čas, a pokud je vyjádřená celková dráha, pak je potřeba i celkový čas. Čas se vypočítá jako poměr dráhy s ku rychlosti v.

$$t = \frac{s}{v} \tag{3.3.1}$$

Auto na cestě z A do B ………… $v_1 = 60$ [km/h], $t_1 = \frac{s}{60}$ [h]

Auto na cestě z B do A ………… $v_2 = 40$ [km/h], $t_2 = \frac{s}{40}$ [h]

Celkový čas …………………….... t_c [h]

Průměrná rychlost.......………….... v_c [km/h]

$$t_c = t_1 + t_2 = \frac{s}{60} + \frac{s}{40} = \frac{40s + 60s}{40 \cdot 60} = \frac{s}{24}$$

Dosadí se do vzorce pro výpočet rychlosti

$$v = \frac{s_c}{t_c} = \frac{2s}{\frac{s}{24}} = \frac{24 \cdot 2s}{s} = 48 \text{ km/h}$$

Průměrná rychlost auta byla 48 km/h.

3.4 Kryptogramy

Již už v dávné době byly známé problémy s písmeny místo číslic [22]. Pro tyto písmenové problémy zavedl název kryptogramy (cryptoarithmetique) M. Vatriquant v roce 1931. Algebrografy jsou příklady s písmeny či symboly, které významově nedávají smysl. Úkolem řešitele je nahradit stejné znaky stejným číslem tak, aby po matematické stránce příklad dával smysl. Pro jeden znak je jen jedno číslo. Speciálním typem jsou příklady, které mají matematické operace jak vertikálně, tak horizontálně. Pokud v příkladě je úkolem nahradit číslicemi slova, který mají význam, vznikají alfametrické problémy. Těmito problémy se zabýval už J. A. Hunter v roce 1955.

Neexistuje obecný návod, jak řešit tyto úlohy. Každá úloha má v sobě nějaké slabé místo, které je klíčové objevit. Některé úlohy tyto slabiny nemají a mohou mít i více řešení. Je na řešiteli, aby si poradil. Jedinou radou je začít vždy tak, aby se prvně hledala kombinace písmen, která zřejmě představuje číslice 0,1 nebo 9 [22], [35]. Příklady jsou uvedeny ve sbírce příkladů. Je uvedený vybraný příklad a jeho postup řešení.

Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

$$\begin{array}{ccc} A & A & B \\ B & A & C \\ \hline D & C & B \end{array}$$

Řešení:

Začne se řešit zprava doleva. Lze si všimnout, že B + C = B a to platí jen tehdy, když C = 0. Nepřenáší se ze sčítání žádné číslo a tak lze říct, že A + A = C jen tehdy, když A = 5. Ve zbývajícím součtu se ví, že A = 5 a přenáší se číslo jedna z předchozího sčítání. Užitečnou informací je, že výsledek je jednociferný. Platí pro různá řešení:

Tabulka 4: Tabulka pro hledání řešení algebrogramu.

B	A + B	D
1	5 + 1	6
2	5 + 2	7
3	5 + 3	8
4	5 + 4	9

Další čísla pro B nemají smysl, celkem jsou čtyři řešení a to A = 5, B = 1, C = 0, D = 6; A = 5, B = 2, C = 0, D = 7; A = 5, B = 3, C = 0, D = 8 a A = 5, B = 4, C = 0, D = 9.

3.5 Převody jednotek

Dle očekávaných výstupů RVP ZV jsou to převody jednotek délky, hmotnosti, času, obsahu a objemu. V České republice pro subjekty a orgány státní správy je povinnost používat soustavu jednotek SI ze zákona č. 505/1990 Sb. ze dne 16. listopadu 1990 [33] (Zákon o metrologii, poslední 16. úprava změny byla 1.7.2017 podle novely 183/2017 Sb.).
Základní jednotky dle mezinárodní SI soustavy jsou uvedeny v Tabulce 5.

Tabulka 5: Základní tabulka SI [40].

Název	Symbol	Jednotka	Symbol
Čas	t	sekunda	s
Délka	l, x, r, atd.	metr	m
Hmotnost	m	kilogram	Kg
Elektrický proud	I, i	ampér	A
Termodynamická teplota	T	kelvin	K
Látkové množství	n	mol	mol
Svítivost	I_v	kandela	cd

Tyto jednotky jsou pevně definovány a spravovány Mezinárodním úřadem míry a váhy ve Francii. V České republice je to Český metrologický institut v Brně.

Jednotky obsahu a objemu jsou odvozené ze soustavy SI. Obsah je to plocha čtverce, který má stranu dlouhou jeden metr. Objem je objem krychle s délkou hrany jeden metr.

Tabulka 6: Tabulka odvozených veličin.

Název	Symbol	Jednotka	Symbol
Obsah	A, S	metr čtvereční	m^2
Objem	V	metr krychlový	m^3

Jednotky, které sice nejsou jednotky SI soustavy, ale jsou přijaty pro práci s SI jednotkami. Další jednotky času jsou 1 týden, 1 měsíc, 1 rok atd.

Tabulka 7: Tabulka přijatých veličin [40].

Název	jednotka	Symbol jednotky	Hodnota v SI
Čas	minuta	min	1 min = 60 s
	hodina	h	1 h = 60 min = 3600 s
	den	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Délka	astronomická jednotka	au	1 au = 149 597 870 700 m
Obsah	hektar	ha	1 ha = 1 hm^2 = 10^4 m^2
Objem	litr	l, L	1 l = 1 dm^3 = 10^3 cm^3 = 10^{-3} m^3
Hmotnost	tuna	T	1 t = 10^3 kg
	dalton	Da	1 Da = 1,66 · 10^{-27} kg

Předpony desítkové soustavy jsou od 10^{-24} do 10^{24}. Dávají se před základní jednotky SI soustavy pro vyjádření násobku základní jednotky. Používají se například ve spojení kilometr, decimetr, milimetr, nanometr, nanosekunda, centilitr, mililitr apod.

Tabulka 8: Tabulka předpon desítkové soustavy [40].

Zápis	Předpona	Název	Symbol	Zápis	Předpona	Název	Symbol
10^1	deka	deset	da	10^{-1}	deci	desetina	d
10^2	hekto	sto	h	10^{-2}	centi	setina	c
10^3	kilo	tisíc	k	10^{-3}	mili	tisícina	m
10^6	mega	milion	M	10^{-6}	mikro	miliontina	µ
10^9	giga	miliarda	G	10^{-9}	nano	miliardtina	n
10^{12}	tera	bilion	T	10^{-12}	piko	biliontina	p
10^{15}	peta	biliarda	P	10^{-15}	femto	biliardtina	f
10^{18}	exa	trilion	E	10^{-18}	atto	triliontina	a
10^{21}	zetta	triliarda	Z	10^{-21}	zepto	triliardtina	z
10^{24}	yotta	kvadrilion	Y	10^{-24}	yokto	kvadriliontina	y

Stupně Celsia, symbolem °C, jsou definovány vztahem [40]:

$$t[°C] = T[K] - 273{,}15 \tag{3.5.1}$$

Kelvin a stupeň Celsia jsou také jednotkami mezinárodní teplotní stupnice z roku 1990 (ITS - 90).

Praktická část práce

4 Dotazníkové šetření

Původním záměrem dotazníkového šetření bylo zjistit aktuální znalosti žáků sedmých a osmých tříd vybraných čtyř základních škol. Vyhodnocování výsledků mělo zohledňovat i jejich umístění na vesnici nebo ve městě. Vzhledem k nouzové situaci způsobenou virem SARS-CoV-2 (také COVID-19) se přistoupilo k jinému záměru.

4.1 Plán šetření

Záměrem bylo od respondentů zjistit, zda mají povědomí o vybraných písmenech užívaných v matematice na základní škole. Sběr odpovědí probíhal metodou dotazníku. Byl vybrán online dotazník na platformě Survio, který umožňoval sběr informací až od 1 000 různých respondentů během jednoho měsíce. Dotazník byl posílán přes email nebo přes sociální síť Facebook konkrétním učitelům, kteří internetový odkaz na dotazník přeposílali žákům v rámci distanční výuky. Výběr respondentů byl náhodný a závisel na tom, zda žák dotazník vůbec chtěl vyplnit. Někteří učitelé jej předkládali jako povinný a někteří ne. Online dotazník sbíral data jeden měsíc.

4.2 Rozbor získaných výsledků

Pro zpracování získaných výsledků byl vybrán tabulkový kalkulátor MS Excel. Celkových odpovědí bylo 94 a vdoleTabulka 10 aTabulka 10: Rozložení respondentů dle tříd a pohlaví je ukázáno rozložení dotazovaných respondentů.

Tabulka 9: Rozložení respondentů dle škol a tříd.

Základní škola	6. třída	7. třída	8. třída	**Celkem**
Edvarda Beneše Opava	11			**11**
Gorkého Havířov	1	10		**11**
Masarykova Polička		17	2	**19**
Městečko Trnávka		5		**5**
Šrámková Opava		12	18	**30**
Štěpánov		16		**16**
Velké Karlovice			2	**2**
Celkem	**12**	**60**	**22**	**94**

Tabulka 10: Rozložení respondentů dle tříd a pohlaví.

	muž	žena	**Celkem**
6. třída	6	6	**12**
7. třída	30	30	**60**
8. třída	11	11	**22**
Celkem	**47**	**47**	**94**

4.2.1 Kvantitativní výzkum

Jsou zde uvedeny dva kvantitativní výzkumy. Pro oba byla zvolena hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$ a testovacím kritériem byl Test homogenity (podle [9]). Obě tabulky pracují se stupněm volnosti 1. Možnost „ještě nevím“ byla zamítnuta a pracovalo se s rozhodnutými respondenty. Vesnické školy jsou ZŠ a MŠ Městečko Trnávka, ZŠ Štěpánov a ZŠ Velké Karlovice, městské školy jsou ZŠ Edvarda Beneše Opava, ZŠ Gorkého Havířov, ZŠ Masarykova Polička a ZŠ Šrámková Opava.

a) H = Oblíbenost matematiky je rovnoměrně rozložena mezi ženy a muže

H0 = četnost oblíbenosti matematiky nezávisí na pohlaví.

H1 = četnost oblíbenosti matematiky závisí na pohlaví.

Tabulka 11: Odpovědi mužů a žen na otázku „Baví vás matematika?“.

Narozen s pohlavím	Ano	Ne	**Celkem**
muž	21	16	**37**
žena	19	21	**40**
Celkem	**40**	**37**	**77**

Vypočtená hodnota ≈ 0,6598

Tabulková hodnota $X^2_{1;0,95}$ = 3,84

Vzhledem k tomu, že vypočtená hodnota je menší než tabulková (0,6598 < 3,84), nesmí se zamítnout nulová hypotéza.

b) H = Oblíbenost matematiky je rovnoměrně rozložena mezi vesnickou a městskou školou.

H0 = Četnost oblíbenosti matematiky nezávisí na typu základní školy

H1 = Četnost oblíbenosti matematiky závisí na typu základní školy (vesnice, město)

Tabulka 12: Odpovědi respondentů dle typů škol na otázku „Baví vás matematika?“.

Typ školy	Ano	Ne	**Celkem**
Vesnická	10	9	**19**
Městská	30	28	**58**
Celkem	**40**	**37**	**77**

Vypočtená hodnota ≈ 0,0047

Tabulková hodnota $X^2_{1;0,95}$ = 3,84

Vzhledem k tomu, že vypočtená hodnota je menší než tabulková (0,0047 < 3,84), nesmí se zamítnout.

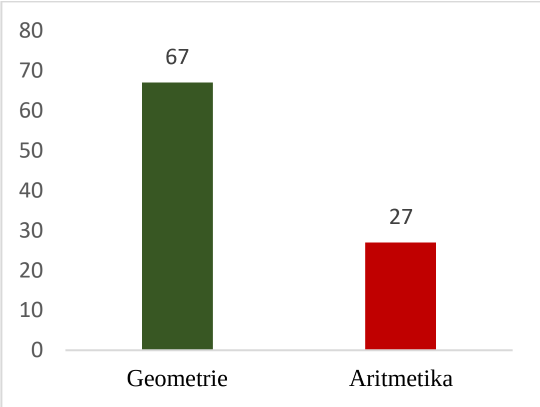
4.2.2 Kvalitativní výzkum

Šetření bylo rozděleno na dvě části dle volby odpovědi, první část zjišťuje znalosti zadané otázky. Zelené sloupce grafů ukazují správnou odpověď, červené špatnou odpověď a šedé jsou s komentářem. Ve grafech jsou uvedeny četnosti odpovědí. Druhá část zjišťuje, zda žák s daným tvrzením souhlasí, odpovědi jsou dichotomické ANO-NE [15]. V tabulkách jsou označeny správné odpovědi tučným písmem. Autor práce si zvolil, že očekávaná četnost správných odpovědí u každé otázky bude nad 80 %. Procenta se zaokrouhlovala na celá čísla.

První část

Ze které oblasti matematiky jste se setkali se symbolem π?

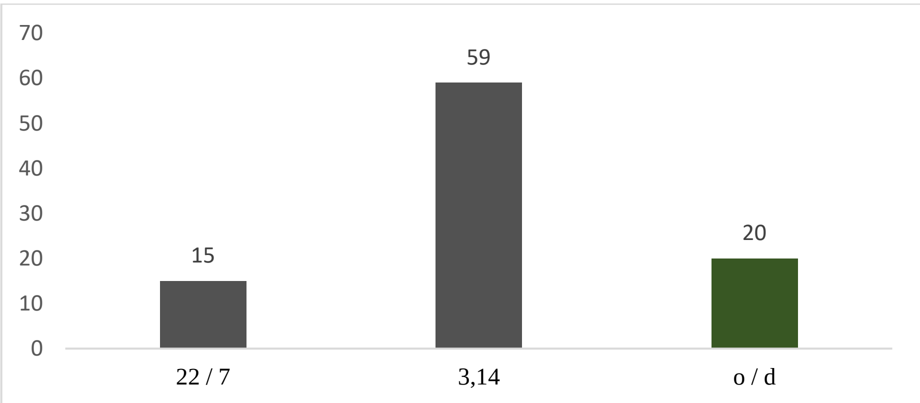
Úspěšně zvolilo správnou odpověď 71 % žáků. Žáci sedmých a osmých ročníků se pravděpodobně mohli setkat s touto konstantou. Mladší žáci šestých tříd spíš ne, ale jejich odpovědi jsou 5 pro Aritmetiku a 7 pro Geometrii z 12 dotázaných.



Graf 1

Jaká je hodnota π?

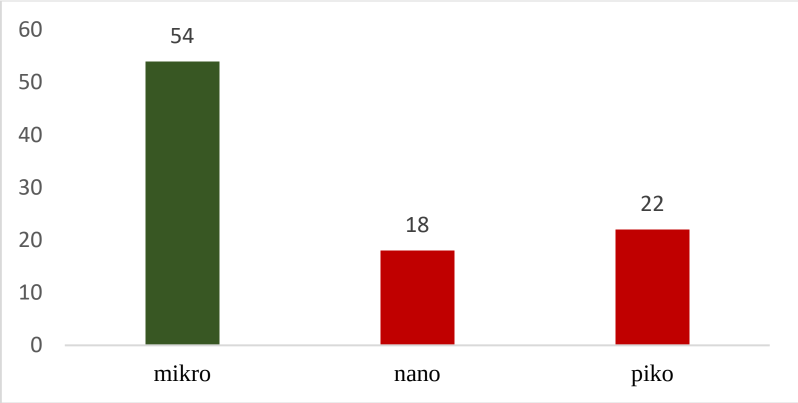
Otázka je záludná, protože nikdo neví, jaká je přesná hodnota. Konstanta je iracionální a je očekávatelné, že pro práci s ní na základní škole se zvolí nějaké aproximační číslo. První odpověď $\frac{22}{7}$ se může vyskytovat na přijímacích zkouškách na střední školu a tuto variantu zvolilo 16 % žáků. Druhá odpověď 3,14 byla volena nejvíce, celkem 63 %. Poslední odpověď je nejpřesnější, neboť Ludolfovo číslo je takto definované, jenže i přes slovní popis v možnosti (poměr obvodu kružnice ku průměru kružnice) byl volen 21 % žáky.



Graf 2

Co znamená symbol řeckého písmena μ?

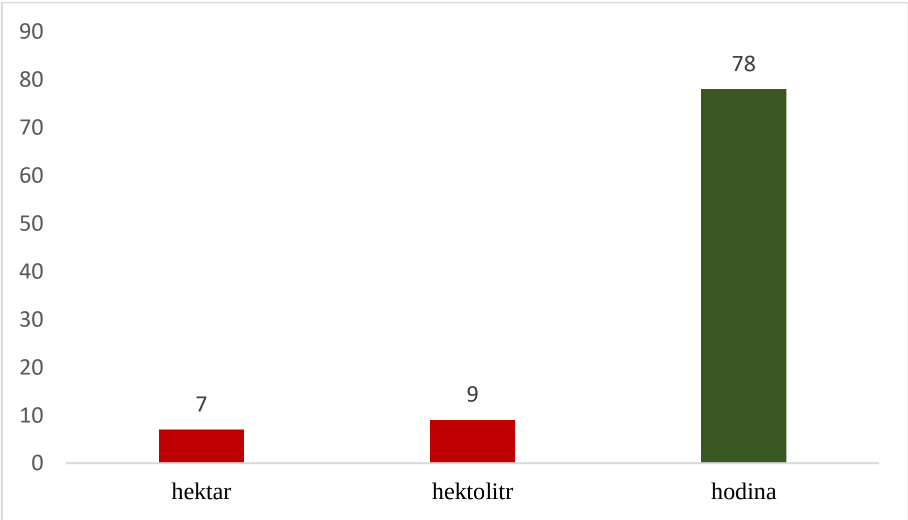
Správnou odpověď mikro, podle počátečního písmena řeckého slova μικρός (malý), odpovědělo 57 % žáků.



Graf 3

Co znamená zkratka jednotky h?

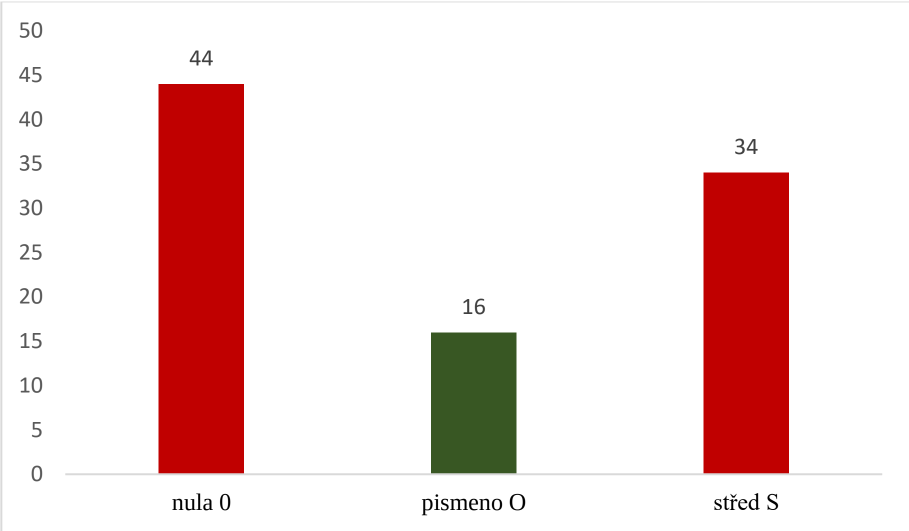
Nejvíce správných odpovědí měly ženy v poměru 41:37 k mužům. Celkem správnou odpověď volilo 87 % respondentů.



Graf 4

Jak se značí bod počátku v pravoúhlé souřadnicové soustavě?

Otázka se konkrétně ptala na pravoúhlý souřadnicový systém, který má střed psaný velkým písmenem O. Bohužel, správnou odpověď zvolilo jen 17 % žáků.



Graf 5

Druhá část

Žáci zaznamenávali, zda souhlasí nebo nesouhlasí s tvrzením. Dvě odpovědi dopadly dle očekávání nad 80 %. První otázka možná zaskočila některé žáky, a proto zvolili špatnou odpověď.

Kružnice se značí velkými písmeny	ANO	**NE**
Počet odpovědí	33	**61**
Procentuální zastoupení	35 %	**65 %**

Zkratka pro jednotku sekundy se píše velkým písmenem	ANO	**NE**
Počet odpovědí	10	**84**
Procentuální zastoupení	11 %	**89 %**

Přímky se značí malými písmeny	**ANO**	NE
Počet odpovědí	**77**	17
Procentuální zastoupení	**82 %**	18 %

Úhly se popisují řeckými písmeny	**ANO**	NE
Počet odpovědí	**75**	19
Procentuální zastoupení	**80 %**	20 %

Pravoúhlý souřadnicový systém opět nedopadl podle očekávání. Body se značí velkými písmeny a za ně do hranatých závorek se zapisuje jeho souřadnice.

Body v pravoúhlé soustavě se označují malými písmeny	ANO	**NE**
Počet odpovědí	50	**44**
Procentuální zastoupení	53 %	**47 %**

5 Sbírka příkladů s řešením

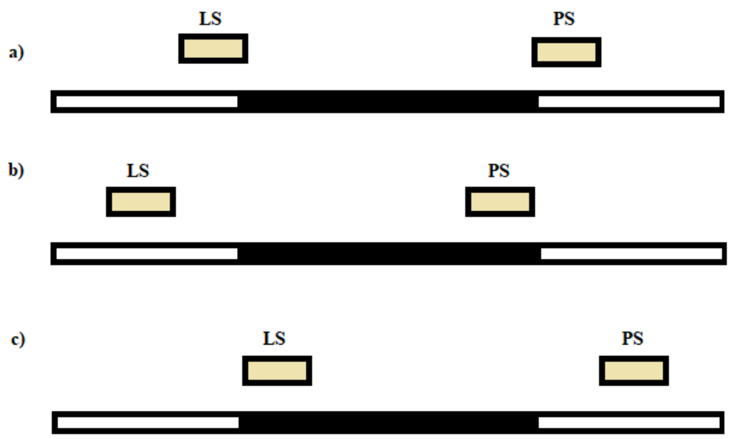
5.1 Robotika

Jak robot pozná, na které straně černé čáry je? Čára je zhotovena klasickou černou elektrikářskou páskou širokou 15 mm. Robot má na podvozku dva senzory, které jsou od sebe rozmístěny v šířce elektrikářské pásky.

Nejprve žáci zjistí, jaké hodnoty jim čidla ukazují. Některá čidla vracejí hodnotu odrazivosti světla (stavebnice Lego Mindstorms), čím menší hodnota je navrácena, tím je čidlo více nad černou páskou. Páska světlo pohlcuje, a proto se zpět do snímače odráží málo světla. Některé senzory jsou reflexní optočleny, které ze svého infračerveného nebo ultrafialového zářiče oslňují prostor pod sebou. Světlo, které se odráží od pásky, proniká do báze fototranzistoru. Čím více světla proniká do báze, tím se tranzistor více „otevře“ a to způsobí ubytek napětí na analogovém zapojení před[6] tranzistorem, které je připojeno na čtecí analogový pin Arduina. Zde tedy platí, čím větší hodnota, tím je senzor více nad černou páskou. V tomto příkladě ilustruji senzor reflexní optočlen zapojený do Arduino Nano.

Hodnoty se během jízdy robota velmi rychle mění, a proto se musí pracovat s písmeny. Vhodné je si představit tři situace, z nichž jsou dvě situace hraniční b) a c) na Obrázek 7: Grafické představení třech situací7 tj. senzory jsou na kraji před opuštěním černé čáry. Jestliže je robot na levém kraji čáry podle bodu b), je nutné ho nasměrovat s jízdou doprava, jinak vyjede z dráhy černé čáry. Toho se docílí buď úbytkem rychlosti na pravém kolu (výkonu motoru), nebo zvýšením rychlosti na levém kolu, pro bod c) naopak. Bod a) je ideální stav, kdy robot pohání obě kola stejnou rychlostí. Bylo označeno LS pro hodnoty z levého senzoru a pro PS pro hodnoty z pravého senzoru.

[6] Podle elektrotechnického schématu, ale ve skutečnosti tok elektronů ve vodiči je opačný a správné by bylo „za“.



Obrázek 7: Grafické představení třech situací.

a) LS a PS jsou přibližně vyrovnané. Teoreticky by se mohlo jednat LS = PS = 400.

b) LS je menší než PS, ilustrativně LS = 35 a PS = 800.

c) LS je větší než PS, ilustrativně LS = 800 a PS= 35.

Řešení:

Zavede se proměnná SR (podle Situace Robota) a stanoví se, která strana bude kladná a která bude záporná. Pro levou stranu jsou vyhrazená kladná čísla a platí rovnice

$$SR = -1 \cdot LS + PS \tag{5.1.1}$$

Pro situaci a) vzniká SR = - 400 + 400 = 0, pro situaci b) platí SR = – 35 + 800 = 765 (kladné číslo) a pro c) SR = – 800 + 35 = – 765 (záporné číslo).

Dále by úloha mohla pokračovat v rozpohybování robota. Mohlo by se v programu orientovat podmínkou if (když), například když by hodnota SR byla kladná (SR > 0), robot je na levé straně, pak se by se musel zpomalit pravý motor, nebo zrychlit levý motor.

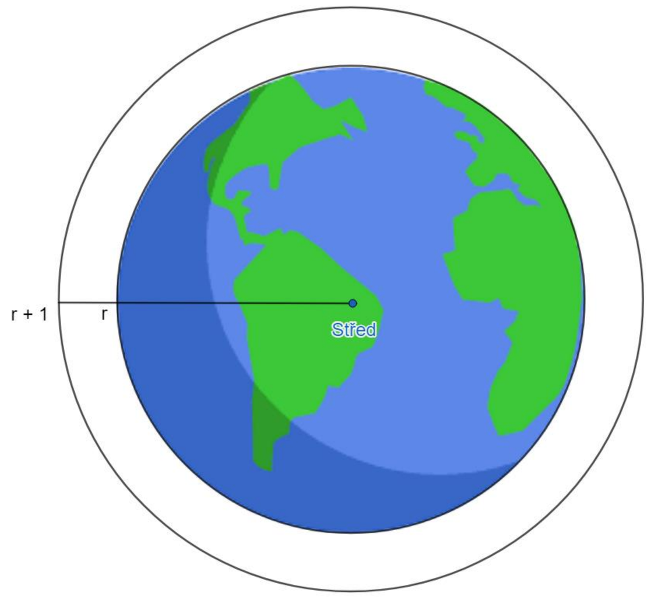
Je třeba zmínit, že robot s jedním senzorem je jednodušší a pro začátky v robotice dostačující. Robot, především Arduino, umožňuje zapojit další možné senzory, které rozšiřují možnosti robota. Pointa práce se senzory je podobná, nejprve je nutné zjistit, jaké hodnoty senzor vrací a poté programovat s písmeny.

5.2 Intuitivní příklady

Dva příklady jsou z matematického internetového kanálu na platformě Youtube [37]. Pointou příkladů je, aby si řešitel nejprve předem stanovil (metodou „selského rozumu“) svůj odhad výsledku – intuici, poté výpočtem (konstruktivní metodou) zjistil, že se mýlil. Není pravidlem, že každý se bude mýlit, je dost možné, že někteří výsledek stanoví správně.

5.2.1 Provaz kolem země

Nechť je Zeměkoule těsně omotaná provazem. Provaz měří pro představu 40 000 km. Otázka zní, o kolik se musí provaz prodloužit, aby se zeměkoule neomotala těsně, ale aby se vytvořila mezi zemí a provazem mezera jeden metr.



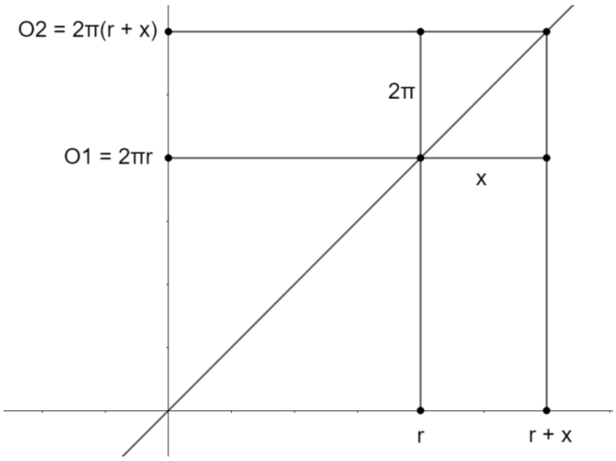
Obrázek 8: Ilustrace Země s provazem.

Intuice by řešiteli řekla, že Země je velmi veliká, zhruba její poloměr je 6 378 km. Aby vznikla metrová mezera, musí se provaz přece protáhnout o velké množství kilometrů. Výsledek bude záviset na poloměru Země.

Řešení:

Není třeba počítat s konkrétním poloměrem. Postačuje jen písmenné označení r v metrech. Obvod Země s původním provazem je dán $O_1 = 2 \cdot \pi \cdot r$ a pro prodloužený provaz platí

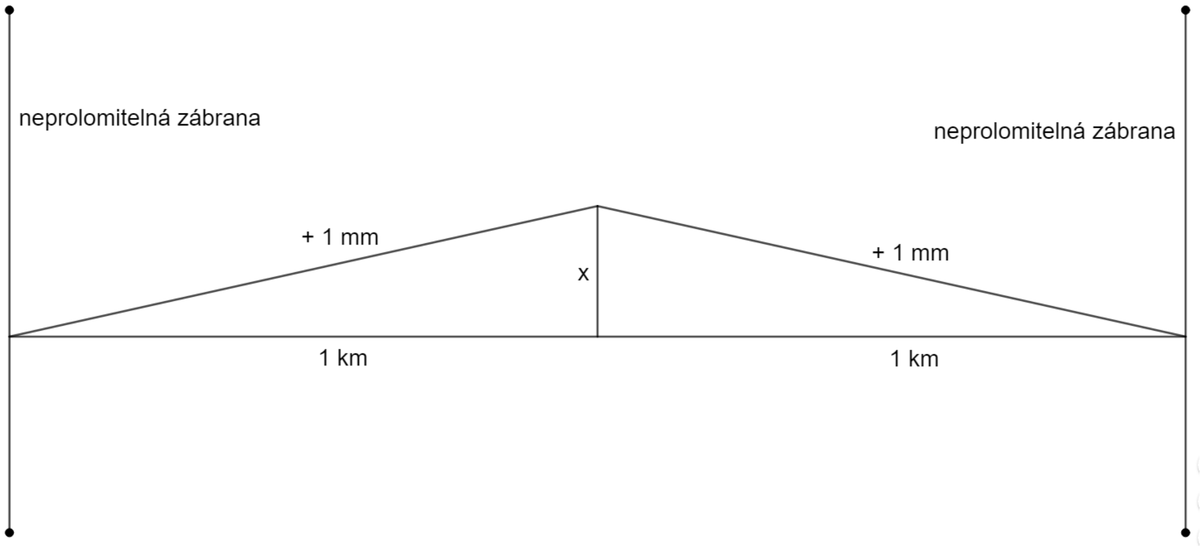
$O_2 = 2 \cdot \pi \cdot (r + 1)$. Hledaný rozdíl prodloužení je získán po odečtení $O_2 - O_1$, tj. Rozdíl = $2\pi r + 2\pi - 2\pi r$. Délka, o kterou se musí provaz prodloužit, je jen 2π, zhruba 6,28 metrů. Výsledek nezávisí na poloměru *r*, závisí na velikosti prodloužení. Kdyby se obecně zvětšovala mezera o *x* metrů, výsledkem by byla lineární závislost $y = 2\pi x$.



Obrázek 9: Lineární závislost $y = 2\pi x$.

5.2.2 Prodloužení kolejnice

Nechť jsou dané dvě koleje, které jsou umístěny mezi neprolomitelné zábrany. Každá kolej má délku jeden kilometr, tj. 1 000 metrů. Mezi nimi není žádná mezera (dilatační spára) a předpokládá se, že se koleje nemohou vychylovat do stran (nemohou se vlnit). Vlivem slunečního tepla se koleje začnou roztahovat a jediným směrem, kam se mohou pohybovat je vzhůru. O kolik se koleje zvednou, když se každá z kolejí prodlouží o jeden jediný milimetr, tj. o miliontinu původní velikosti.



Obrázek 10: Ilustrace kolejnic.

Intuice by řekla, že se zvedne o pár milimetrů nebo o desetiny milimetrů.

Řešení:

Tam, kde se koleje dotýkají, je pravý úhel. Platí tedy Pythagorova věta, výpočet je v metrech a zanedbává se záporná hodnota. Pro původní délku kolejnice – p = 1 000 m, novou délku kolejnice – n = 1 000,001 m a hledané zvednutí kolejnic x platí:

$$n^2 = p^2 + x^2 \tag{5.2.1}$$

Pro lepší přehlednost se upraví vzorec

$$x = \sqrt{n^2 - p^2} = \sqrt{(n + p)(n - p)}$$

Po dosazení konkrétních hodnot platí

$$x = \sqrt{2\,000{,}001 \cdot 0{,}001}$$

$$x = \sqrt{2{,}000001}\ m$$

$$x \approx 1{,}414\ m$$

Výsledkem je, že pokud se kolejnice prodlouží o jeden milimetr, pak se zvednou o téměř jeden a půl metru. Pokud by se kolejnice prodloužily o jeden centimetr, pak by výsledkem byla $\sqrt{20{,}0001}$, tj přibližně 4,47 metrů.

Je důležité podotknout, že tento příklad proběhl v dokonalých podmínkách, kde se kolejnice nemůžou vlnit a jediný směr pohybu kolejnic je v místě dotyku. Koleje v praxi mezi sebou mají dilatační spáry, aby se v důsledku tepelné roztažnosti mohly pohybovat.

5.2.3 Obsah trojúhelníku

Jestliže pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a = 2$ cm a $b = 3$ cm má obsah 3 cm^2. Jaký obsah bude mít nový trojúhelník, jehož strany jsou dvakrát větší než u původního? Řešte úlohu zpaměti.

Intuice by mohla klamat, že když nové strany jsou dvakrát větší, tj. $a = 4$ cm a $b = 6$ cm, tak obsah nového trojúhelníku je dvakrát větší. To je špatná úvaha.

Řešení:

Po vynásobení dvou nových odvěsen $(4 \cdot 6)$ a vydělením dvěma, je obsah 12 cm^2. Nový obsah je čtyřnásobkem původního obsahu.

5.3 Převody jednotek

I. Připište pojmenování

a) 130 cm je:	b) 730 g je:	c) 4 650 mm je:	d) 5,42 l je:
1 . . . 30 . . .	0,7 . . . 30 . . .	46 . . . 5 . . .	5 . . . 420 . . .
1 . . . 3 . . .	0,7 . . . 30 000	4 . . . 65 . . .	5 . . . 42 . . .
13 . . .	730 000 . . .	465 . . .	54,2 . . .
1 . . . 300 . . .	0,00073 . . .	4 . . . 6 . . . 50 . . .	0,00542 . . .
1 300 . . .	0,73 . . .	4 . . . 6 . . . 5 . . .	0,0542 . . .

Řešení:

a)	b)	c)	d)
m, cm	kg, g	dm, cm	l, ml
m, dm	kg, mg	m, cm	l, cl
dm	mg	cm	dl
m, mm	t	m, dm, mm	m^3
mm	kg	m, dm, cm	hl

II. Pomocí zlomku zapište, o jakou část hodiny se jedná:

a) 1 minuta b) 6 minut c) 5 minut d) 30 minut e) 10 minut f) 33 minut g) 15 minut

Řešení:

a) $\frac{1}{60}$ b) $\frac{6}{30}\left(\frac{1}{10}\right)$ c) $\frac{5}{60}\left(\frac{1}{12}\right)$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{11}{20}$ g) $\frac{1}{4}$

III. Převeďte na jednotky uvedené v závorce:

5 m 5 cm	(cm)	1 km 103 dm	(m)	3 m 55 mm	(km)
2 dm^2	(mm^2)	2 dm^2 5 mm^2	(cm^2)	165 m^2	(km^2)
1 m^3 10 dm^3	(cm^3)	170 cm^3	(m^3)	1 dm^3 15 mm^3	(cm^3)
60 km/h	(m/s)	20 m/s	(km/h)	100 m/min	(km/h)
700 kg/m^3	(g/cm^3)	3 kg/dm^3	(g/cm^3)	3 g/cm^3	(kg/m^3)

Řešení:

505 cm	1 010,3 m	0,003055 km
20 000 mm^2	200,05 cm^2	0,000165 km^2
1 010 000 cm^3	0,000170 m^3	1 000,025 cm^3
$60/3{,}6 \approx 16{,}7$ m/s	72 km/h	6 km/h
0,7 g/cm^3	3 g/cm^3	3 000 kg/m^3

5.4 Práce s chybou

I. Vyhledejte chybu

a)

$$x = 2$$
$$x(x-3) = 2(x-3)$$
$$x^2 - 3x = 2x - 6$$
$$x^2 - 2x = 3x - 6$$
$$x(x-2) = 3(x-2)$$
$$x = 3$$

b)

$$y = 1$$
$$y^2 = y$$
$$y^2 - 1 = y - 1$$
$$(y-1)(y+1) = y - 1$$
$$y + 1 = 1$$
$$y = 0$$

c)

$$z^2 = z^2$$
$$z^2 - z^2 = z^2 - z^2$$
$$z(z-z) = (z+z)(z-z)$$
$$z = z + z$$
$$z = 2z$$

d)

$$3x + 15 = 2x + 10$$
$$3(x+5) = 2(x+5)$$
$$3 = 2$$

e)

$$a = b + c$$
$$a(a-b) = (b+c)(a-b)$$
$$a^2 - ab = ab - b^2 - bc + ac$$
$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$
$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$
$$a = b$$

f)

$$a = \frac{12}{15}b$$
$$15a = 12b$$
$$25a - 10a = 20b - 8b$$
$$8b - 10a = 20b - 25a$$
$$2(4b-5a) = 5(4b-5a)$$
$$2 = 5$$

Řešení:

Násobení a dělení nulou je chybné.

a) chyba, dělení nulou (x – 2)

b) chyba, dělení nulou (y – 1)

c) chyba, dělení nulou (z – z)

d) 3x – 2x = 10 – 15, pak x = –5 a s (x+5) nelze dělit

e) jestliže platí a = b + c, pak (a – b – c) = 0 a nelze dělit

f) výraz (4b – 5a) je roven nule a dělit nelze

5.5 Kryptogramy

Uvedené příklady jsou z [16], [22] a [35].

5.5.1 Algebrogramy

I. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a) $$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & B & A \\ \hline A & A & C \end{array}$$

b) $$\begin{array}{ccc} & A & A \\ & & B \\ \hline B & C & C \end{array}$$

c) $$\begin{array}{cc} A & B \\ A & B \\ \hline B & C \end{array}$$

d) $$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & B & B \\ \hline B & C & C \end{array}$$

Řešení:

a) A = 1, B = 9, C = 0 b) A = 9, B = 1, C = 0 c) pět řešení: A = 1, B = 2, C = 4; A = 2, B = 4, C = 8; A = 2, B = 5, C = 0; A = 4, B = 9, C = 8; A = 3, B = 7, C = 4 d) čtyři řešení: A = 4, B = 5, C = 0; A = 5, B = 6, C = 2; A = 6, B = 7, C = 4; A = 7, B = 8, C = 6.

II. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a) $$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & B & C & D \\ & & C & D \\ & & & D \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

d) $$\frac{A\ B\ B\ B\ B\ B}{B\ B\ B\ B\ B\ 4} = \frac{A}{4}$$

b) $$\begin{array}{ccccc} & B & D & C & E \\ & B & D & A & E \\ \hline A & E & C & B & E \end{array}$$

e) $$\frac{M\ M\ 5}{N\ 5} = 5$$

c) $$\frac{A\ B\ B\ B\ B\ B}{B\ B\ B\ B\ B\ 5} = \frac{A}{5}$$

f) $$\frac{M\ M\ M\ M\ 5}{N\ N\ N\ 5} = 5$$

Řešení:

a) A = 1, B = 5, C = 7, D = 3 b) A = 1, B = 5, C = 4, D = 2, E = 0 c) A = 1, B = 9 d) A = 1, B = 6 e) M = 2, N = 4 f) M = 2, N = 4.

III. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a)
$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{ATU} & + & \mathrm{IAZ} & = & \mathrm{IITE} \\
- & & - & & : \\
\mathrm{NEG} & : & \mathrm{IOG} & = & \mathrm{E} \\
\hline
\mathrm{PAU} & - & \mathrm{NZ} & = & \mathrm{PPA}
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H} & \cdot & \mathrm{AD} & = & \mathrm{EJD} \\
\cdot & & : & & \cdot \\
\mathrm{EJ} & & \mathrm{A} & & \mathrm{H} \\
\hline
\mathrm{HL} & \cdot & \mathrm{ED} & = & \mathrm{HLD}
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{KC} & + & \mathrm{I} & = & \mathrm{OK} \\
+ & & + & & + \\
\mathrm{E} & + & \mathrm{E} & = & \mathrm{KM} \\
\hline
\mathrm{OL} & + & \mathrm{KO} & = & \mathrm{LI}
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{DO} & + & \mathrm{RE} & = & \mathrm{MI} \\
 & & \mathrm{FA} & + & \mathrm{SI} & = & \mathrm{LA} \\
\mathrm{RE} & + & \mathrm{SI} & + & \mathrm{LA} & = & \mathrm{SOL}
\end{array}$$

Řešení:

a) ATU = 947, IAZ = 198, IITE = 1 145, NEG = 650, IOG =130, E = 5, PAU = 297, NZ = 68, PPA = 229 b) KOLMICE = 1234567 c) tři řešení: H = 2, AD = 70, EJD = 140, EJ = 14, A = 7, HL = 28, ED = 10, HLD = 280; H = 3, AD = 40, EJD = 120, EJ = 12, A = 4, HL = 36, ED = 10, HLD = 360; H = 4, AD = 30, EJD = 120, EJ = 12, A = 3, HL = 48, ED = 10, HLD = 480; d) dvě řešení: DO = 34, RE = 56, MI = 90, FA = 72, SI = 10, LA = 82, SOL = 148; DO = 23, RE = 67, MI = 90, FA = 48, SI = 10, LA = 58, SOL = 135.

5.5.2 Alfametrické problémy

I. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a)
```
  M N O H O
  J Í D E L
  M N O H O
-----------
N E M O C Í
```

b)
```
  D O B R Ý
  V Ý K O N
-----------
R E K O R D
```

c)
```
  O K L A M A L
  V A P E N I K
---------------
K O M I N I K A
```

d)
```
  S E N D
  M O R E
---------
M O N E Y
```

e)
```
F O R T Y
    T E N
    T E N
---------
S I X T Y
```

f)
```
  F O T
  B A L   C = 0
-------
C V I K
```

g)
```
  P O Š L I
  I H N E D
-----------
P E N I Z E
```

h)
```
    T H I S
      I S A
  G R E A T
    T I M E
-----------
W A S T E R
```

i)
```
P E T R A
  J E D E
      D O
---------
P R A H Y
```

j)
```
D A M E
    S I
    D O
-------
N O S U
```

k)
```
  J E L E
  N O V I
  P I V O
---------
N E L E J
```

l)
```
U K A Ž
    M I
  Ř Í M
-------
Ž Á K U
```

m)
```
    T Ř I
  K R Á T
    T Ř I
---------
D E V Ě T
```

n)
```
J E E P
S A A B
S E A T
-------
A U T A
```

o)
```
  L A D A
M A Z D A
H O N D A
---------
Š K O D A
```

p)
```
  J E E P
  O P E L
  F O R D
---------
V O L V O
```

q)
```
P O M O C
P O M O C
P O M O C
---------
L U P I Č
```

r)
```
  T E M P O
  T E M P O
  T E M P O
-----------
K O L O N A
```

s)
```
D U S Í K
V O D Í K
S O D Í K
---------
U H L Í K
```

t)
```
    J A N
  A L A N
  L E O Š
R O M A N
---------
J M É N A
```

u)
```
  H L E
  H A D
L E Z E
    N A
-------
Z E M I
```

v)
```
V O J Á C I
V O J Á C I
V O J Á C I
V O J Á C I
V O J Á C I
-----------
A R M Á D A
```

w)
```
T A J E N K Y
T A J E N K Y
T A J E N K Y
T A J E N K Y
T A J E N K Y
-------------
H Á D A N K Y
```

x)
```
O L D A
      A
J A N A
J D O U
    D O
-------
K I N A
```

y)
```
  J A N A
        A
  A N N A
  Ž I J Í
        V
---------
Ž A T C I
```

z)
```
  N Á Š
  D Ů M
    M Á
  O S M
-------
O K E N
```

Řešení:

a) MNOHO = 62 343, JÍDEL = 81 705, NEMOCÍ = 206 391 b) DOBRÝ = 29 514, VÝKON = 74 398, REKORD = 103 912 c) OKLAMAL = 6 178 087, VAPENIK = 9 854 231 KOMINIKA = 13 032 318 d) SEND = 9 567, MORE = 1 085, MONEY = 10 652 e) FORTY = 9 567, TEN = 850, SIXTY = 31 486 f) FOT = 591, BAL = 273, CVIK = 0864 g) dvě řešení: POŠLI = 19 568, IHNED = 84 302, PENIZE = 103 870; POŠLI = 14 568, IHNED = 89 302, PENIZE = 103 870 h) THIS = 5 628, ISA = 280, GREAT = 97 405 TIME = 5 234, WASTER = 108 547 i) PETRA = 42 539, JEDE = 1 282, DO = 86, PRAHY = 43 907 j) DAME = 6 941, SI = 52, DO = 60, NOSU = 7 653 k) JELE = 4 363, NOVI = 1 289, PIVO = 7 982, NELEJ = 13 634 l) UKAŽ = 7 928, MI = 63, ŘÍM = 506, ŽÁKU = 8 497 m) TŘI = 245, KRÁT = 9 872, DEVĚT = 10 362 n) JEEP = 4 330, SAAB = 2 998, SEAT = 2 391, AUTA = 9 719 o) LADA = 1 050, MAZDA = 30 450, HONDA = 67 250, ŠKODA = 98 750 p) JEEP = 9 335, OPEL = 8 537, FORD = 0846, VOLVO = 18 718 q) POMOC = 21 419, LUPIČ = 64 257 r) TEMPO = 35 680, KOLONA = 107 040 s) DUSÍK = 29 150, VODÍK = 47 250, SODÍK = 17 250, UHLÍK = 93 650 t) JAN = 604, ALAN = 0704, LEOŠ = 7 928, ROMAN = 52104, JMÉNA = 61340 u) HLE = 473, HAD = 406, LEZE = 7 383, NA = 90, ZEMI = 8 352 v) VOJÁCI = 106 497, ARMÁDA = 532 485 w) TAJENKY = 1 384 750. HÁDANKY = 6 923 750 x) OLDA = 2 837, A = 7, JANA = 1 767, JDOU = 1 324, DO = 32, KINA = 5 967 y) JANA = 9 434, A = 4, ANNA = 4 334, ŽIJÍ = 1 092, V = 6, ŽATCI = 16 870 z) dvě stě sedmnáct řešení: NÁŠ = 260, DŮM = 973, MÁ = 36, OSM = 183, OKEN = 1452, NÁŠ = 936 , DŮM = 745, MÁ = 53, OSM = 285, OKEN = 2019, NÁŠ = 378, DŮM = 429, MÁ = 97, OSM = 159, OKEN = 1063.

II. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a) Č T E · M E = V A T M

b) J A K : N A = T O (TO je dvojnásobkem NA)

c) A B C · D E F = 123 456

Řešení:

a) ČTE = 154, ME = 64, VATM = 9 856 b) JAK = 578, NA = 17, TO = 34 c) ABC = 192, DEF = 643

III. Zvolte číslice za písmena tak, aby se neopakovaly. Najděte všechna řešení.

a) $\mathrm{KKKKKKK} \cdot \mathrm{KKKKKKK} = \mathrm{KOBYLAMAMALYBOK}$

b) $(\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{O}+\mathrm{N})+(\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{O}+\mathrm{N})+(\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{O}+\mathrm{N}) = \mathrm{S}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{O}\cdot\mathrm{N}$

c) $(\mathrm{SL}+\mathrm{ON})^2 = \mathrm{SLON}$

d) $2(\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{O}+\mathrm{N})^2 + 2(\mathrm{S}+\mathrm{L}+\mathrm{O}+\mathrm{N})^2 = \mathrm{SLON}$

Řešení:

a) K = 1, KOBYLAMAMALYBOK = 1234567654321 b) SLON = 1 236 c) SLON = 3 025 d) SLON = 1 296

Závěr

Písmena používaná v matematice by se dala označit za pomocný aparát pro vyjádření nezbytných a konkrétních informací. Ať už se jedná o zkratky jednotek nebo o geometrické značení, je nutné znát interpretaci tohoto užití. Matematika není jen o počítání s čísly, ale o tom, jakou roli v lidském poznání hraje výuka matematiky. Vyučování matematiky na základní škole má umožnit žákům osvojit si matematické metody jako účinný aparát pro řešení praktických situací [5]. Matematika má přesvědčit žáka, že není souhrnem pravidel, pouček nebo definicí, ale je pracovní metodou. Ve sbírce úloh jsou uvedeny hlavně algebrogramy a alfametrické problémy, které nutí počtáře řešit tyto příklady nestandardně.

Práce v teoretické části představila aktuální tematické okruhy matematiky vyučované na druhém stupni základní školy, ve kterých se pracuje s písmeny, zkratkami či slovy nutnými ke zvládnutí očekávaných výstupů RVP. Byly uvedeny zde historické aspekty, které vedly k současnému užívání vybraných písmen v matematice, a vybraná témata s písmeny, užívaná na druhém stupni ZŠ. Část praktická prezentovala výzkum a sbírku příkladů s řešením. Uvedené obrázky bez citací byly vytvořeny ve freewaru GeoGebra.

Při psaní této práce si autor rozšířil znalosti nejen o historii vývoje psaní písmen v matematice, ale i o správný zápis některých značek. Všiml si i ve svém okolí, že některá loga firem jsou navržena tak, aby obsahovala užívaná písmena v matematice. Například jsou to: dodavatel chemického sortimentu Sigma Aldrich, výrobce hodinek Omega Introduces, americký letecký přepravce Delta Air Lines anebo ostravská počítačová firma Alfa Computers.

Použitá literatura

[1] BLAŽKOVÁ, Růžena. *Didaktika Matematiky I* [online]. Brno: MUNI IS, 2013. [cit. 2021-02-22]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/ped/podzim2015/SZ_9005/um/DM.pdf

[2] CAJORI, Florian. *A history of Mathematical Notations, Volume I, Notations In Elementary Mathematics* [online]. Londýn, Anglie: The Open Court Publishing Company: 1928. [cit. 2020-12-18]. Dostupné z: https://archive.org/stream/historyofmathema031756mbp#page/n11/mode/2up

[3] DE LELLIS, Camillo. *Mathematical symbols.* In: Encyclopedia of Mathematics, The European Mathematical Society [online]. 2011-02, 2013-12 [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Mathematical_symbols

[4] Problém osmi dam. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online.]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, 2006-12-11. Poslední změna 2021-03-13 [cit. 2021-04-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9m_osmi_dam

[5] FEHÉROVÁ, Š., E. KUČINOVÁ a P. KVĚTOŇ. *Didaktika matematiky pro základní školy* [online]. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, 2006. [cit. 2021-03-03] 91 s. ISBN: 80-7368-278-8. Dostupné z: ndk.cz v programu NDK-Covid.

[6] FUCHS, Eduard a Eva ZELENDOVÁ. *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání* [online]. Praha: NÚV, 2015. [cit. 2021-03-03] 158 s. ISBN: 978-80-7481-140-1 Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/20617/matematika.pdf?fbclid=IwAR2R8UUTTvbI8xa-CsGnFLipdF8ktubHvfDsRdTvwFf5DHZKGs70R8AMEV4

[7] FUCHS, Eduard. *Přehled vývoje matematiky* [online]. Jevíčko: Jednota českých matematiků a fyziků Brno, 1993. [cit. 2020-04-11] Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400583

[8] HORDINA, Josef. *Algebrogramy – klasické matematické hlavolamy* [online]. © Mozkolam.cz, 2018. [cit. 2021-03-17]. Dostupné z: https://mozkolam.cz/novinky/algebrogramy-klasicke-matematicke-hlavolamy/

[9] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statisticky.* Olomouc: UPOL, druhé vydání, 2015. 363 s. ISBN: 978-80-244-4774-2.

[10] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT, *Matematika pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet.* Třetí vydání. Praha: Prometheus, 2008. 210 s. ISBN: 978-80-7196-363-9

[11] JELÍNKOVÁ, Karolína. *Π. Číslo, které vytvořilo moderní svět, má dnes svátek.* In: Zpravodajský web ČT24, věda – Česká televize [online]. © Česká televize, 2017. [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: https://ct24.ceskatelevize.cz/veda/2057396-p-cislo-ktere-vytvorilo-moderni-svet-ma-dnes-svatek

[12] JONES, C., P. CHAMP a R. BROWNE. *Matematika na dlani (Mathematics Basic Facts).* Přeložili TURZO, I. a Marie TURZOVÁ. Bratislava: Príroda, 1999. 167 s. ISBN: 80-07-01011-4.

[13] KRÁLOVÁ, Magda. *Číslo Π.* In: Techmania Science Center, encyklopedie, matematika, aritmetika [online]. © Techmania Science Center. [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/aritmetika/cislo-p

[14] KRČMÁŘ, J., S. JANDOVÁ, M. KOPEČNÁ a M. ŠPACHTOVÁ. *5 až 9 sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám*. Praha: Sobotáles, 1997. 177 s. ISBN: 80-85920-32-8.

[15] KRPEC, Radek. *Kvantitativní metody v pedagogickém výzkumu.* [online]. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, © 2013 [cit. 2021-04-10]. 94 s. ISBN: 978-80-7464-445-0. Dostupné z: https://projekty.osu.cz/svp/opory/PdF_Krpec_Metody.pdf

[16] LOUKOTA, Jiří. *Veselá matematiky aneb kouzla hříčky hádanky rébusy lamohlavy.* Olomouc: Votobia, 1998. 156 s. ISBN: 80-7198-318-7.

[17] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky, stručná historie královny věd.* Příbram: Pistorius, druhé vydání, © 2008, 2011. 334 s. ISBN: 978-80-87053-64-5.

[18] MILLER, Jeff a spol. *Earliest Know Uses of Some of the Words of Mathematics.* [online]. New Port Richey, stát Florida, USA, Poslední změna 2017 [cit. 2020-12-18]. Dostupné z: https://jeff560.tripod.com/operation.html, https://jeff560.tripod.com/constants.html, a https://jeff560.tripod.com/variables.html

[19] MOTYČKOVÁ, Marie. *Velikost úhlu ve stupňové a obloukové míře.* In: Matematická sekce, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova [online]. 2006 [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky_s_aplety/Velikost_uhlu.html

[20] MÜLLEROVÁ, J., J. ČIŽMÁR, J. DIVÍŠEK a V. MACHÁČEK. *Matematika 7 pro 7. ročník základní školy, II. díl.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 176 s. ISBN: 80-04-24009-7.

[21] NIVEN, Ivan. *A simple proof that π is irrational* [online]. West Lafayette, Indiana, USA: Purdue University, 1946. [cit. 2021-03-03]. Dostupné z: https://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002-9904-1947-08821-2.pdf

[22] NOVOVESKÝ, Š., K. KRIŽALKOVIČ a I. LEČKO. *Zábavná matematika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, třetí vydání, 1974. 325 s.

[23] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. Ročník základní školy [2. Díl]: Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta* [online]. Třetí vydání. Praha: Prometheus, 2010. [cit. 2021-03-03] 88 s. ISBN: 978-80-7196-427-8. Dostupné z: ndk.cz v programu NDK-Covid.

[24] OPAVA, Zdeněk. *Matematika kolem nás*. Praha: Albatros, 1989. 368 s.

[25] SMITH, David Eugene a Marcia L. LATHAM. *The Geometry of René Descartes, Translated from the French and Latin* [online]. Londýn, Anglie: The Open Court Publishing Company: 1925. [cit. 2020-12-18]. Dostupné z: https://archive.org/stream/geometryofrene00desc#page/4/mode/2up

[26] ŠKOPEK, Pavel. *Zaměstnankyně Googlu zlomila record. Vypočítala číslo pí na desítky bilionů míst* [online]. Rubrika věda a technika, Deník.cz: 2019. [cit. 2021-03-12]. Dostupné z: https://www.denik.cz/veda-a-technika/zamestnankyne-googlu-zlomila-rekord-vypocitala-cislo-pi-na-desitky-bilionu-mist-20190315.html

[27] ŠVERCL, Josef. *Technické kreslení a deskriptivní geometrie.* Praha: Scientia, © 2003. 341 s. ISBN: 80-7183-297-9

[28] TALWALKAR, Presh. *Proving Pi is Irrational: a step-by-step guide to a "simple proof" requiring only high school calculus*i. In: Mind Your Decisions [online]. 2013-11-08. [cit. 2021-03-03]. Dostupné z: https://mindyourdecisions.com/blog/2013/11/08/proving-pi-is-irrational-a-step-by-step-guide-to-a-simple-proof/

[29] VLKOVA, Markéta. *Algebrogramy* [online]. Praha: Virtuální knihovna, 2010. [cit. 2021-03-17]. Dostupné z: https://www.sborovna.cz/kniznica.php?action=show_version&id=60090

[30] ŽENATÁ, Emílie, *Přehled učiva matematiky pro 6.-9. Ročník ZŠ a víceletá gymnázia s příklady a řešením.* [online]. Benešov: BLUG, 2010. [cit. 2021-04-10]. 560 s. ISBN: 978-80-7274-014-7. Dostupné z: ndk.cz v programu NDK-Covid

[31] ŽENATÁ, Emilíe. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. Ročník*. Benešov: BLUG, druhé vydání, 2014. 214 s. ISBN: 978-80-7274-030-7.

[32] *All Fun and Games: Math Lair* [online]. Kanada. Poslední změna 2020-03-20. [cit. 2020-12-18]. Dostupné z https://mathlair.allfunandgames.ca/topics.php

[33] Časopis ELEKTRO. *Soustava SI, předefinování současných definic*. [online časopis]. 2010-02 [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: http://www.odbornecasopisy.cz/res/pdf/40491.pdf

[34] ČSN EN ISO 80000-2. *Matematické symboly a značky*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2020. Třídící znak 011300

[35] *Didaktické prostředí: Algebrogramy a hvězdičkogramy* [online]. Praha: H-mat, o. p. s., © 2018. [cit. 2021-03-17]. Dostupné z: http://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/algebrogramy-hvezdickogramy

[36] *Hyde Park, civilizace, Matematika, díl 2 - Jaroslav Nešetřil.* In: ČT24, Česká televize [online]. Premiéra 2013-04-13, veřejné online 2018-10-25 [cit. 2021-02-18]. Dostupné z: https://ct24.ceskatelevize.cz/2632691-jaroslav-nesetril-v-hpc

[37] *Jak nás klame intuice 1 (Provaz kolem země, koleje, paradox narozenin) s docentem Mirko Rokytou.* In: Youtube [online]. 2019-12-23 [cit. 2021-04-11]. Dostupné z: https://youtu.be/cuBbmeLwZGg. Kanál uživatele Marek Valášek.

[38] *Percent sign.* In: Wikipedia: the free encyclopedia [online.]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, 2006-12-11. Poslední změna 2021-03-12 [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Percent_sign

[39] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání 2021 leden*. [online]. Praha: MŠMT, 2021 [ci. 2021-04-10]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani

[40] *The International System of Units (SI)*. Francie, Paříž: Bureau International des Poids et Mesures, 9. edice, 2019. 216 s. ISBN 978-92-822-2272-0

[41] *Zalomení řádků a nevhodné výrazy na jejich konci.* In: Internetová jazyková příručka, Ústav pro jazyk český, Akademie věd České republiky [online]. Jazyková poradna ÚJČ AV ČR, © 2008–2021. [cit. 2021-04-10]. Dostupné z: https://prirucka.ujc.cas.cz/?id=880

[42] SUCHÁNEK, Jan. *Matematické konstanty.* [online]. Brno, 2015 [cit. 2021-04-24]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/gwnns/BC.pdf. Bakalářská práce. Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce: RNDr. Michal Veselý, Ph.D..