Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Katedra algebry a geometrie

KVADRIKY VE STŘEDOVÉM PROMÍTÁNÍ A LINEÁRNÍ PERSPEKTIVĚ

Diplomová práce

Vypracovala:
Bc. Martina Vinklářová
2. ročník NMgr, M-Dg

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Rok odevzdání: 2014

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph.D. a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za její pomoc a cenné rady, které přispěly ke zkvalitnění této práce.

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá kvadrikami ve středovém promítání a lineární perspektivě. Shrnuje poznatky z teorie kvadrik a obsahuje soubor vypracovaných úloh o zobrazení kvadrik ve středovém promítání a lineární perspektivě. U čtenáře se předpokládá znalost zmíněných dvou projekcí a rovnoběžného osvětlení. Práce obsahuje nejenom řešené úlohy, ale také stručně a přehledně shrnuté nezbytné teoretické poznatky, které jsou potřebné k řešení již zmíněných úloh. Hlavním cílem této práce je seznámit čtenáře s kvadrikami ve středovém promítání a lineární perspektivě.

Práce je rozdělena do dvou částí. Část teoretickou a poté část obsahující řešené úlohy. Teoretická část se skládá ze tří kapitol. První kapitola shrnuje důležité pojmy a postupy konstrukcí z obou používaných promítacích metod. Těm musí čtenář porozumět, stojí na nich totiž celé konstrukce všech úloh. Druhá kapitola obsahuje obecné poznatky o rovnoběžném osvětlení v prostoru. Podrobný popis konstrukcí rovnoběžného osvětlení ve středovém promítání a lineární perspektivě je již zpracován v mé bakalářské práci. Třetí kapitola je dále rozdělena do tří podkapitol a shrnuje teorii kvadrik. Druhá část je rozdělena na dvě části, na čtvrtou a pátou kapitolu. Čtvrtá kapitola se zabývá zobrazením kvadrik ve středovém promítání. Pátá kapitola řeší kvadriky v lineární perspektivě.

Obrázky a úlohy jsou narýsovány v programu AutoCAD a upraveny v programu Inkscape, text práce je vysázen pomocí typografického systému TEX.

1. Základní pojmy a postupy

V první kapitole se seznámíme se základy středového promítání a lineární perspektivy. Pečlivé prostudování této kapitoly osvěží čtenáři znalost těchto promítacích metod a umožní mu dobře porozumět této diplomové práci. Lineární perspektiva je speciální případ středového promítání, proto se tato kapitola zabývá převážně středovým promítáním, které následně omezíme a získáme tak lineární perspektivu. Následující teoretické poznatky jsem z větší části převzala ze své bakalářské práce.

Dále uvažujme rozšířený eukleidovský prostor. Středový průmět bodu A označíme dolním indexem s (A_s), pravoúhlý průmět bodu A označíme dolním indexem 2 (A_2).

1.1. Středové promítání

V praxi se často dostáváme do situací, kdy je potřeba objekty zobrazit tak, aby se příliš nelišily od obrazu, který vidí pozorovatel ve skutečnosti. Z tohoto důvodu používáme různých variant středového promítání. V následujícím textu stručně shrneme základní pojmy a postupy konstrukcí v tomto promítání.

• Středové promítání je zadáno *průmětnou* ν a *středem promítání* $S(S \notin \nu)$.

• Přímky procházející středem promítání S nazýváme *promítací přímky.*

• Vedeme-li libovolným bodem $A(A \neq S)$ v prostoru promítací přímku (přímku AS), značíme její průsečík s průmětnou A_s a nazýváme ho *středový průmět* bodu A.

• Pravoúhlým průmětem středu promítání S do průmětny ν je bod S_2. Bod S_2 se nazývá *hlavní bod.*

• Přímka SS_2 je kolmá k průmětně a nazývá se *hlavní paprsek* nebo také *osa středového promítání.*

• Vzdálenost středu promítání S od průmětny se nazývá *distance* d, $|SS_2| = d$. Většinou je určena *distanční kružnicí* k_d se středem v bodě S_2 a poloměrem d.

• Rovinu ν', která je rovnoběžná s průmětnou a prochází středem promítání S, nazýváme *středová rovina.*

• Středové průměty všech bodů středové roviny jsou nevlastní body.

• Pro každý bod A prostoru ($A \neq S$) lze sestrojit jeho středový průmět A_s i jeho pravoúhlý průmět A_2.

• Přímka A_sA_2 prochází hlavním bodem S_2.

• U bodů, které leží na ose promítání, splývá jejich středový a pravoúhlý průmět s hlavním bodem S_2

Středový průmět přímky

• Středovým průmětem promítací přímky a je bod a_s.

• Promítací přímky všech bodů přímky a, která není promítací, vytvoří promítací rovinu α ($\alpha = a, S$). Rovina α se nazývá *promítací rovina* přímky a. Průsečnici roviny α s průmětnou nazýváme středový průmět a_s přímky a.

• Středový průmět U_s^a nevlastního bodu přímky a nazýváme *úběžník* přímky a.

• Neleží-li přímka a ve středové rovině, nazýváme její průsečík V^a se středovou rovinou *protiúběžník*.

• Průsečík N^a přímky a s průmětnou nazýváme *stopník* přímky a.

• Přímku p', která je rovnoběžná s přímkou p a prochází středem promítání S, nazýváme *směrová přímka* přímky p.

• Pravoúhlý průmět a_2 přímky a, která není kolmá k průmětně, je rovnoběžný s přímkou $S_2U_s^a$.

• Přímku p procházející bodem A, která neobsahuje střed promítání S, nazýváme *nositelka* bodu A.

• Poloha bodu A v prostoru je jednoznačně určena jeho středovým průmětem A_s a středovým průmětem jeho nositelky a_s (zadané jejím stopníkem N^a a úběžníkem U_s^ρ).

• *Rovnoběžné* přímky mají jeden společný úběžník.

• Přímky kolmé k průmětně, mají společný úběžník, ten splývá s hlavním bodem S_2.

Středový průmět roviny

• Středovým průmětem roviny ρ je přímka ρ_s, pokud je rovina ρ promítací rovinou.

• Středovým průmětem roviny ρ je celá průmětna ν, pokud rovina ρ neprochází středem promítání S.

• Průsečnice n^ρ roviny ρ a průmětny se nazývá *stopa* roviny ρ.

• Rovinu ρ', která prochází středem promítání S a je rovnoběžná s rovinou ρ, nazýváme *směrová rovina*. Průsečnici u_s^ρ roviny ρ' a průmětny nazýváme *úběžnice*.

• Úběžnice je středovým průmětem nevlastní přímky u^∞ roviny ρ.

• Stopa n^ρ a úběžnice u_s^ρ obecné roviny ρ jsou rovnoběžné.

• Prochází-li rovina ρ středem promítání S, potom stopa roviny a její úběžnice splývají.

• Rovnoběžné roviny mají společnou úběžnici.

• Průsečnici roviny ρ a středové roviny nazýváme *protiúběžnice*. Středovým průmětem protiúběžnice je nevlastní přímka průmětny.

Vzájemná poloha útvarů

• Přímka a *leží v rovině* ρ, leží-li její stopník N^a na stopě n^ρ roviny ρ a její úběžník U_s^a na úběžnici u_s^ρ roviny ρ.

• Přímka a je s rovinou ρ *rovnoběžná*, leží-li její úběžník na úběžnici roviny.

• Přímka a je *různoběžná* s rovinou ρ, protíná-li ji v jednom bodě.

• *Rovnoběžné přímky* mají jeden společný úběžník.

• *Různoběžné přímky* mají společný jeden bod a leží v jedné rovině, proto jsou spojnice jejich stopníků a úběžníků rovnoběžné.

• *Mimoběžné přímky* nemají společný žádný bod a neleží společně v jedné rovině, proto jsou spojnice jejich stopníků a úběžníků různoběžné.

• *Rovnoběžné roviny* mají společnou úběžnici.

• *Různoběžné* jsou dvě roviny tehdy, mají-li společnou průsečnici.

• Středový průmět průsečnice dvou různoběžných rovin prochází průsečíkem jejich stop a průsečíkem jejich úběžnic. V případě, že jsou stopy těchto rovin rovnoběžné, je s nimi rovnoběžná i jejich průsečnice.

Metrické vztahy

• Přímku roviny ρ, která je rovnoběžná s průmětnou, nazýváme *hlavní přímka* roviny ρ. Neleží-li tato přímka ve středové rovině, je její středový průmět rovnoběžný se stopou roviny ρ. Všechny hlavní přímky roviny ρ jsou navzájem rovnoběžné.

• *Spádová přímka* s^ρ roviny ρ je přímka roviny ρ, která je kolmá k její stopě n^ρ. Všechny spádové přímky roviny ρ jsou navzájem rovnoběžné, mají společný úběžník U_s^s, který se nazývá hlavní úběžník roviny ρ.

• *Odchylka přímky* a od průmětny ν je velikost úhlu, který svírá přímka a se svým pravoúhlým průmětem a_2.

• *Odchylka roviny* ρ od průmětny ν je velikost úhlu, který svírá její spádová přímka s^ρ se svým pravoúhlým průmětem s_2^ρ.

• Všechny přímky, které jsou kolmé k rovině ρ, jsou navzájem rovnoběžné, mají tedy společný úběžník U_s^n, který nazýváme *úběžník normál.*

• Skutečná velikost úsečky AB, která je rovnoběžná s průmětnou, je vzdálenost pravoúhlých průmětů A_2, B_2 krajních bodů úsečky AB.

• Při určování *skutečné velikosti úsečky* AB ležící na přímce a, využijeme *dělící kružnici*, tou je kružnice se středem v bodě U_s^a a poloměrem $U_s^a(S)$ (přímka $S_2(S)$ je sklopený hlavní paprsek do průmětny ν). Na této kružnici zvolíme bod $[S]$ (dělící bod přímky a), stopníkem N^a přímky a vedeme rovnoběžku s přímkou $U_s^a[S]$, tuto nově vzniklou přímku označíme $\bar{p}$, z bodu $[S]$ promítneme na přímku $\bar{p}$ body $\bar{A}, \bar{B}$, vzdálenost průmětů těchto bodů je skutečnou velikostí úsečky AB.

• Při sestrojování rovinných útvarů využíváme *otáčení roviny* do průmětny, otočené útvary budeme značit indexem 0.

• Otočená rovina a její středový průmět si odpovídají v kolineaci. Osou této kolineace je stopa roviny, úběžnicí je úběžnice roviny a středem kolineace je otočený střed promítání do průmětny kolem úběžnice roviny.

• Platí, že $S_0 \in A_s A_0$ a stopníky jsou vždy samodružnými body.

• Pro otočenou protiúběžnici roviny ρ platí vztah $|S_0 u_s^\rho| = |v_0 n^\rho|$.

• Leží-li kružnice k v rovině ρ, která není promítací, je středovým průmětem k_s této kružnice *elipsa*, pokud je protiúběžnice její nesečnou. Ve zvláštním případě, kdy je rovina ρ rovnoběžná s průmětnou, se kružnice k zobrazí jako *kružnice*. Středovým průmětem kružnice k je *parabola*, jestliže je protiúběžnice její tečnou. Středovým průmětem kružnice k je *hyperbola*, jestliže je protiúběžnice její sečnou.

• Prochází-li rovina ρ kružnice k středem promítání, leží středový průmět k_s kružnice k na přímce $k_s = n^\rho = u_s^\rho$. Podle polohy roviny ρ vzhledem ke středu promítání S je středovým průmětem kružnice k úsečka, polopřímka, přímka nebo dvě polopřímky.

1.2. Lineární perspektiva

Lineární perspektiva je speciální případ středového promítání. Díky lineární perspektivě vypadají obrazy těles jako skutečná tělesa. Předpokládáme ovšem, že tělesa pozorujeme jen jedním okem S, tak získáváme středové promítání. Aby zobrazení těles co nejvíce odpovídalo skutečnosti, musíme středové promítání částečně omezit. Distance d musí být větší než $20cm$,protože na tuto vzdálenost dokáže lidské oko zřetelně rozpoznávat jednotlivá tělesa. Pozorovatel se dívá kolmo na průmětnu ν. Zorné pole je přibližně ohraničeno kružnicí se středem v hlavním bodě H a poloměrem $r = \frac{d}{3}$. Pro naše potřeby jsou tyto podmínky dostačující, přestože vytvořený obraz většinou nepůsobí trojrozměrným dojmem. Tím, jak dosáhnout co nejlepšího trojrozměrného dojmu, se zabývá malířská perspektiva. Vzdálenost pozorovatele od objektu ovlivňuje například i to, jak se pozorovaný objekt zdá osvětlený či zbarvený, ve větší vzdálenosti nevidíme tolik detailů ani kontrastů. Objekty budeme konstruovat podle zásad středového promítání přizpůsobených podmínkám lineární perspektivy.

Středové průměty nazýváme perspektivy, značíme je horním indexem s (A^s). Pravoúhlé průměty do základní roviny značíme dolním indexem 1 (A_1), jejich perspektivu označíme tedy A_1^s.

- *Perstektivní průmětna* ν je svislá rovina.

- *Základní rovina* π je kolmá k průmětně ν.

- Základní rovina π protíná průmětnu ν v *základnici* z.

- Přímka kolmá na průmětnu ν a procházející okem S se nazývá *hlavní paprsek.*

- Hlavní paprsek protíná průmětnu ν v *hlavním bodě* H.

- *Distance* $d = |SH|$ je vzdálenost hlavního bodu od oka pozorovatele.

- Rovinu, která je rovnoběžná se základní rovinou π a prochází hlavním bodem H, nazýváme *obzorová rovina.* Obzorová rovina protíná průmětnu v přímce h nazývané *obzor* nebo *horizont.* Jistě platí, že $H \in h$ a $h \parallel z$.

- Přímka v, která je kolmá k základnici z a prochází hlavním bodem H, se nazývá *hlavní vertikála* a určuje výšku perspektivy.

- Průsečík hlavní vertikály v se základnicí z se nazývá *základní bod* Z.

- Přímky, které jsou rovnoběžné s průmětnou ν, nazýváme *průčelné přímky.*

- Přímky, které jsou rovnoběžné s hlavním paprskem nazýváme *hloubkové přímky.*

- Promítneme-li bod A^s na stopu roviny ρ z bodu H, získáme pravoúhlý průmět bodu A do roviny ρ a značíme ho A_2.

• Úběžník přímek rovnoběžných se základní rovinou, které svírají s průmětnou úhel $45°$, nazýváme *pravý (levý) distančník* $D^p(D^l)$. Tyto distančníky leží na horizontu.

• Úběžník přímek, které svírají s průmětnou ν úhel $45°$ a leží v rovinách kolmých na základnici z, nazýváme *horní (dolní) distančník* $D^h(D^d)$. Tyto distančníky leží na hlavní vertikále.

• Všechny distančníky leží na kružnici k_d se středem v hlavním bodě H a poloměrem d, tato kružnice se nazývá *distanční kružnice.*

• Z pravého i levého distančníku se na základnici promítají všechny úsečky hloubkových přímek ve skutečné velikosti.

• Horizont h je úběžnice vodorovných rovin.

• Objekty ležící v průčelných rovinách (rovinách rovnoběžných s průmětnou ν) mají perspektivy stejnolehlé s originálem.

• Leží-li přímka a v základní rovině, nazveme kružnici ležící v průmětně, která má střed v bodě ${}^aU^s$ a poloměr $|{}^aU^sD^d|$, *dělící kružnice* přímky a.

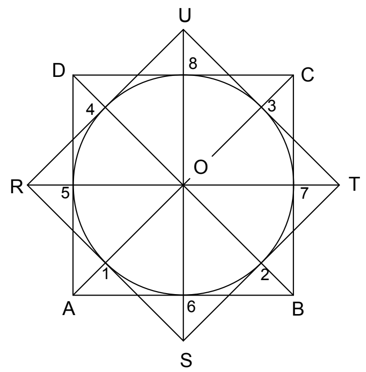
• Dělící kružnice přímky a protíná horizont h v *dělícím bodě* ${}^aD^s$ přímky a.

• Leží-li úsečka AB v základní rovině a není-li na průčelné přímce, určíme její skutečnou velikost následujícím způsobem. Z dělícího bodu ${}^aD^s$ promítneme úsečku A^sB^s na základnici z, získáme tak úsečku ${}^*A^s{}^*B^s$. Velikost úsečky ${}^*A^s{}^*B^s$ je stejná jako hledaná velikost úsečky AB.

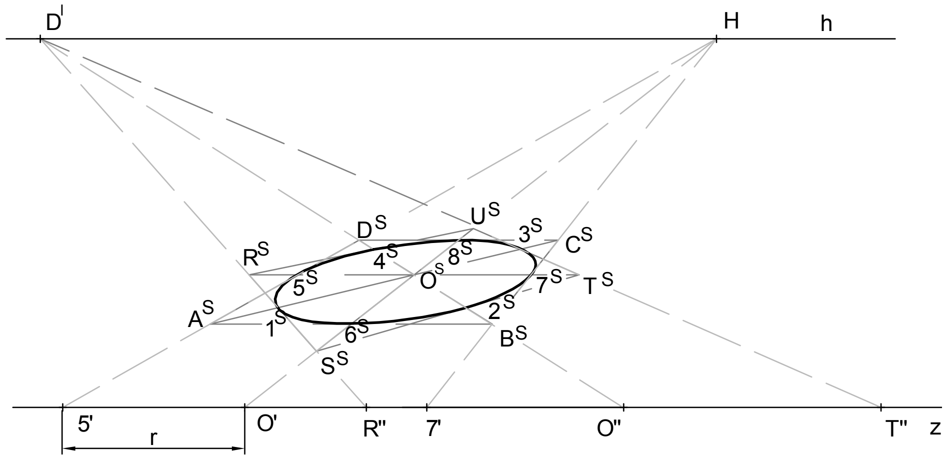
• Skutečná velikost úsečky AB, která je rovnoběžná s průmětnou, je vzdálenost pravoúhlých průmětů A_2, B_2 krajních bodů úsečky AB.

Zobrazení kružnice

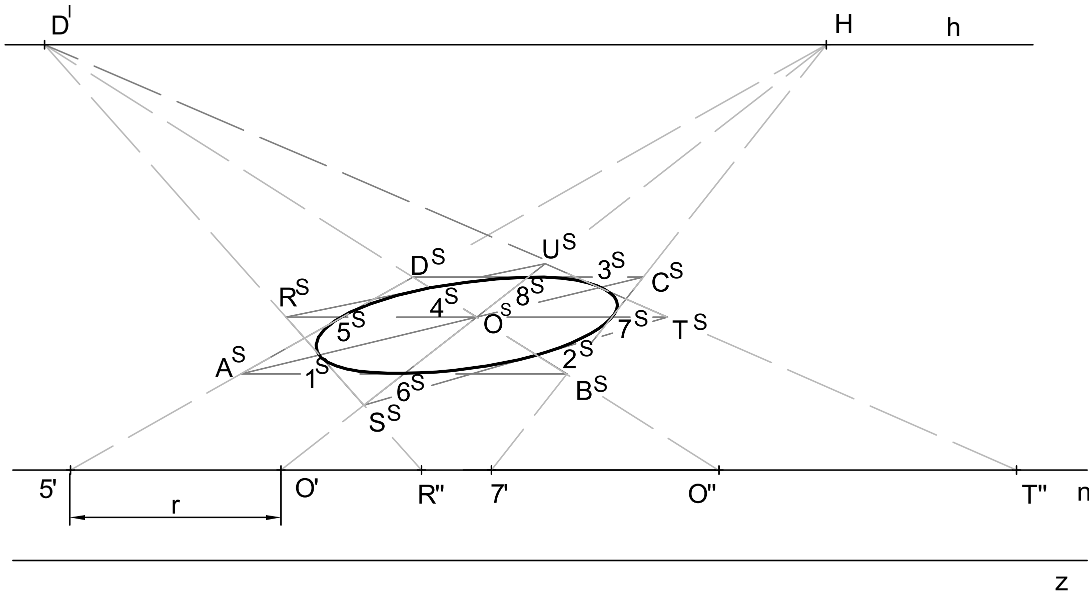
Středový průmět kružnice k získáme jako řez kužele s vrcholem S a řídící křivkou k průmětnou ν. Tento kužel leží celý uvnitř zorného kužele lineární perspektivy, proto je obrazem kružnice k kružnice nebo elipsa. V následujících úlohách je sestrojena kružnice ležící ve vodorovné a svislé rovině a také kružnice ležící v rovině obecné. Z důvodu usnadnění některých konstrukcí opíšeme kružnici dva čtverce tak, jak to vidíme na následujícím obrázku. Tedy čtverec $ABCD$ s body dotyku $1, 2, 3, 4$ a čtverec $RSTU$ s body dotyku $5, 6, 7, 8$. Body dotyku těchto čtverců s kružnicí k jsou vrcholy pravidelného osmiúhelníku. Při sestrojování obrazu kružnice vždy nejdříve sestrojíme obrazy čtverců $ABCD$ a $RSTU$ a jejich bodů dotyku s kružnicí, poté již snadno sestrojíme obraz kružnice k.



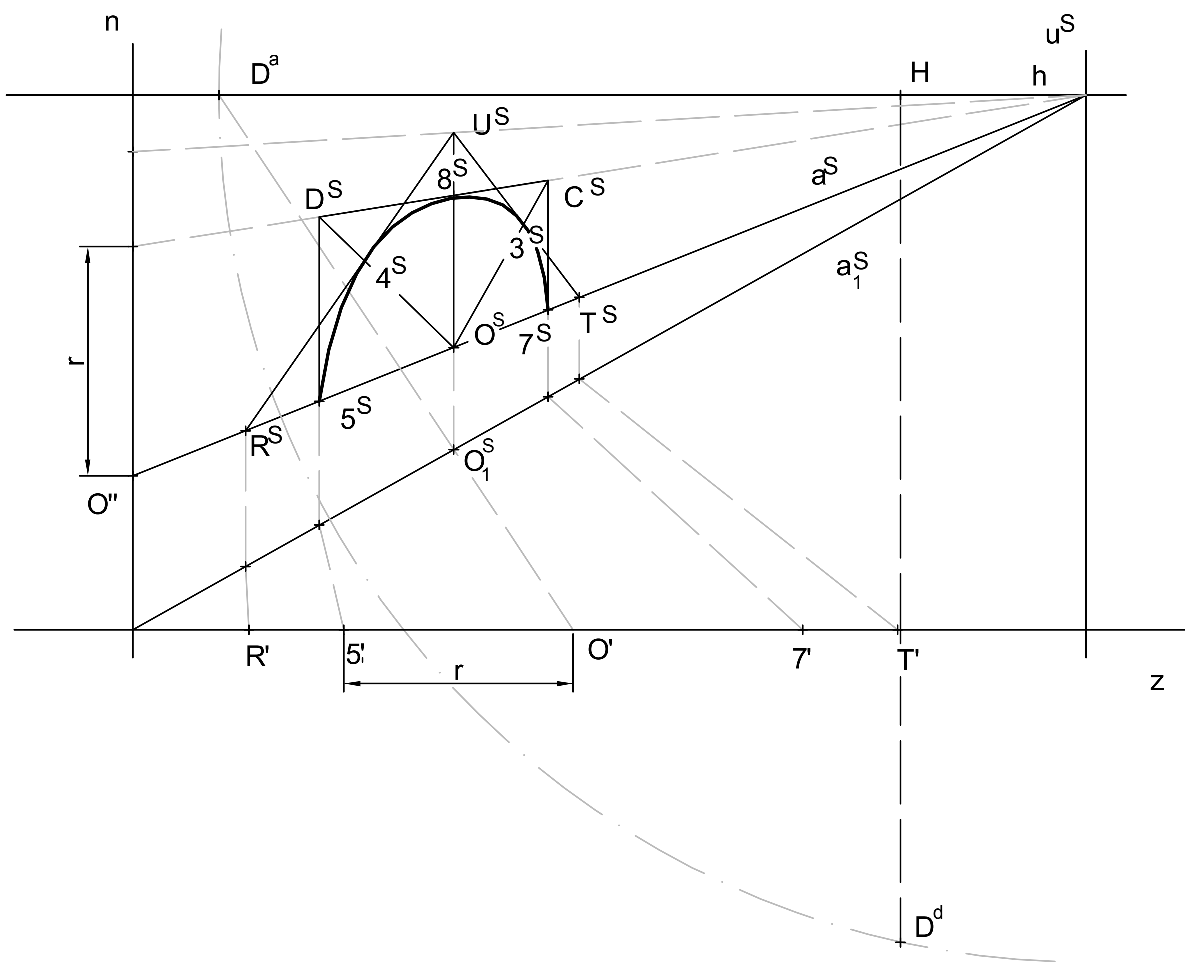
Kružnici k, která leží v základní rovině π, sestrojíme následujícím způsobem. Pomocné opsané čtverce sestrojíme tak, aby strana AB byla rovnoběžná s horizontem h. Tím máme zajištěno, že všechny přímky jsou hloubkové nebo průčelné. Pomocí známých konstrukcí sestrojíme obrazy obou čtverců. Kružnice k se zobrazí jako elipsa určená osmi tečnami s body dotyku.



Kružnici, která leží ve vodorovné rovině ρ, sestrojíme obdobně jako kružnici v základní rovině. Protože základní rovina π je speciálním případem vodorovné roviny, vyplývá následující konstrukce přímo z předchozí konstrukce. Základnice z je stopou základní roviny π, promítneme tedy vrcholy čtverců na stopu n^ρ roviny ρ, nikoli na základnici z a následně sestrojíme obrazy obou čtverců a vepíšeme elipsu, která je obrazem kružnice k.



Nyní sestrojíme kružnici k ležící ve svislé rovině ρ, pro větší názornost je zde sestrojena pouze část kružnice. Kružnice k leží v rovině ρ a je zadaná středem O a poloměrem r. Pomocné čtverce umístíme tak, aby strana AB byla rovnoběžná se základní rovinou π. Sestrojíme přímku a, která leží v rovině ρ, prochází středem O kružnice a je rovnoběžná se základní rovinou π. Do základní roviny pravoúhle promítneme přímku a a střed O kružnice k. Tento pravoúhlý průmět přímky a označíme a_1 a známým způsobem sestrojíme pravoúhlé průměty bodů pomocných čtverců ležících na přímce a. Promítneme zpět na přímku a. Ostatní body pomocných čtverců sestrojíme jako úsečky dané velikosti ležící na přímkách rovnoběžných s průmětnou a vepíšeme elipsu, která je obrazem kružnice k.



Kružnici ležící v obecné rovině ρ sestrojíme pomocí otočení, které je popsáno v části zabývající se středovým promítáním.

2. Osvětlení

V této kapitole si připomeneme základní pojmy z teorie osvětlení. V praxi se snažíme vytvořit co nejjednodušším způsobem názorné obrazy těles. Osvětlení těles tedy využíváme zejména z důvodu větší názornosti a pro lepší prostorový dojem. Díky osvětlení nemusíme v různých promítacích metodách sestrojovat další průmět, protože skutečný tvar objektu určíme i pomocí vrženého stínu. V této diplomové práci budeme pro zjednodušení nahrazovat zdroj světla bodem S a světelné paprsky přímkami. Pokud je zdrojem světla vlastní bod, nazýváme osvětlení středové, v případě, že je zdrojem světla bod nevlastní, osvětlení se nazývá rovnoběžné.

2.1. Základní principy osvětlení rovinných objektů

• Středem osvětlení S prochází *světelná rovina.*

• Přímka s procházející zdrojem světla S (vlastním či nevlastním) se nazývá *světelný paprsek.*

• Osvětlujeme-li bod A, je světelný paprsek s přímka, která prochází body A, S.

• Osvětlujeme-li rovinný útvar k, tvoří množina světelných paprsků, které tímto útvarem prochází, *světelnou plochu* Σ.

• Řez světelné plochy Σ rovinou ρ se nazývá *vržený stín* k' rovinného útvaru k na rovinu ρ.

• Vržený stín $\bar{k}$ rovinného útvaru k na plochu κ je tvořen těmi průsečíky přímek světelné plochy Σ s plochou κ, které jsou blíže zdroji světla S.

Je tedy zřejmé, že platí:

• Osvětlujeme-li libovolný bod A, který není totožný s bodem S, je bod A' (průsečík přímky SA s rovinou ρ) vrženým stínem bodu A na rovinu ρ.

• Úsečka $A'B'$ (přímka a') je vrženým stínem úsečky AB (přímky a) na rovinu ρ. Pokud není přímka a světelným paprskem.

V praxi se můžeme setkat s *osvětlením technickým*, to je speciálním typem rovnoběžného osvětlení. Je dán pravoúhlý souřadnicový systém s počátkem O a osami x, y, z. Průmětna je souřadná rovina. Sestrojíme krychli, jejíž hrany leží na kladných poloosách. Směr paprsků technického osvětlení je rovnoběžný s tou stěnovou úhlopříčkou krychle, která neprochází bodem O.

2.2. Základní principy osvětlení ploch a těles

Při osvětlování ploch a těles budou některé body osvětleny a jiné body se budou nacházet ve stínu. Vždy se snažíme určit osvětlenou část a část neosvětlenou. Hranice těchto dvou částí se nazývá mez stínu vlastního, neosvětlené body se tedy nachází ve vlastním stínu.

• *Osvětlený bod* je ten z průsečíků světelného paprsku s tělesem, který leží nejblíže zdroji světla S. Ostatní průsečíky světelného paprsku s tělesem jsou *body vlastního stínu* osvětlovaného tělesa.

• Světelné paprsky, které se tělesa (plochy) dotýkají, se nazývají *styčné a tvoří dotykovou (styčnou) světelnou plochu* Ω.

• Dotyková světelná plocha Ω se tělesa (plochy) dotýká podél křivky $\bar{m}$, která se nazývá *mez stínu vlastního.*

• *Mez stínu vrženého* m' na rovinu ρ je řez dotykové světelné plochy Ω s rovinou ρ.

• Platí také, že vrženým stínem meze stínu vlastního $\bar{m}$ je mez stínu vrženého m'.

• Neobsahuje-li těleso žádný světelný paprsek, pak se ho světelná plocha Σ dotýká podél meze stínu vlastního $\bar{k}$. Vedeme-li všemi body meze vlastního stínu $\bar{k}$ paprsky směru osvětlení, nazýváme jejich průnik s rovinou ρ mez stínu vrženého k'.

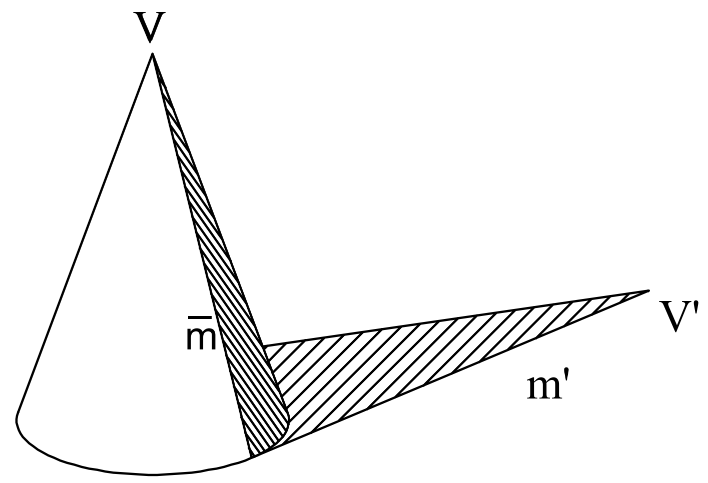
• Mez stínu vrženého je stínem meze stínu vlastního.

Považujeme-li světelný zdroj S za střed promítání, pak mez stínu vrženého m' nazýváme zdánlivý obrys a mez stínu vlastního $\bar{m}$ nazýváme skutečný obrys.

Je zřejmé, že v případě středového osvětlení je dotyková světelná plocha Ω plochou kuželovou (případně jehlanovou). V případě rovnoběžného osvětlení je dotyková světelná plocha Ω plochou válcovou (případně hranolovou).

• Uvažujeme-li plochu druhého stupně, bude mez vlastního stínu $\bar{m}$ této plochy kuželosečka ležící v polární rovině této plochy, příslušné světelnému zdroji S.

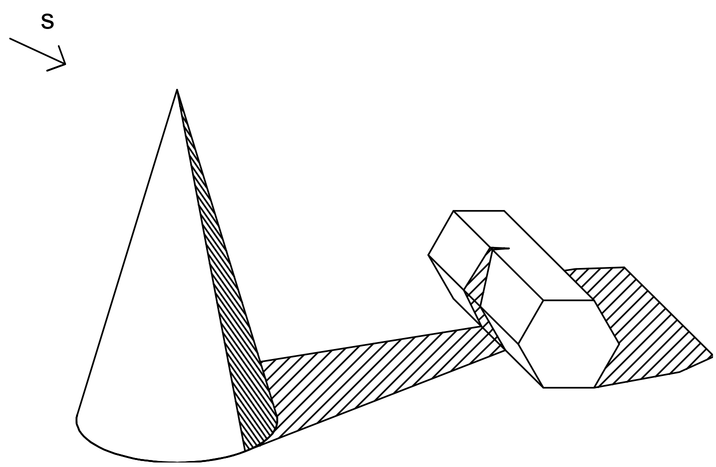
• Na kulové ploše je mezí vlastního stínu $\bar{m}$ kružnice. Ve středovém osvětlení leží v polární rovině světelného zdroje S. V rovnoběžném osvětlení leží v rovině σ, tato rovina prochází středem kulové plochy a je kolmá na světelné paprsky směru s (σ je polární rovina bodu S^{∞}).


V
$\bar{m}$
V'
m'

2.3. Základní principy osvětlení skupin těles

V praxi se setkáváme zejména s problémem osvětlení skupiny těles. Zde je podstatné, že tělesa vrhají stín nejen na rovinu, ale také na sebe navzájem. V těchto případech využíváme metody zpětných paprsků. Nejdříve sestrojíme vržené stíny všech těles na průmětnu (libovolnou rovinu). Body, kde se tyto vržené stíny protínají, vedeme světelné paprsky. Tyto paprsky určují bod, který vrhá stín na všechny ostatní body tohoto paprsku.

• Existuje kolineace mezi řezem tělesa světelnou rovinou přímky p a podstavou tohoto tělesa. Osou kolineace je vržený stín přímky na rovinu podstavy a střed kolineace tvoří vrchol tělesa (případně směr bočních hran).



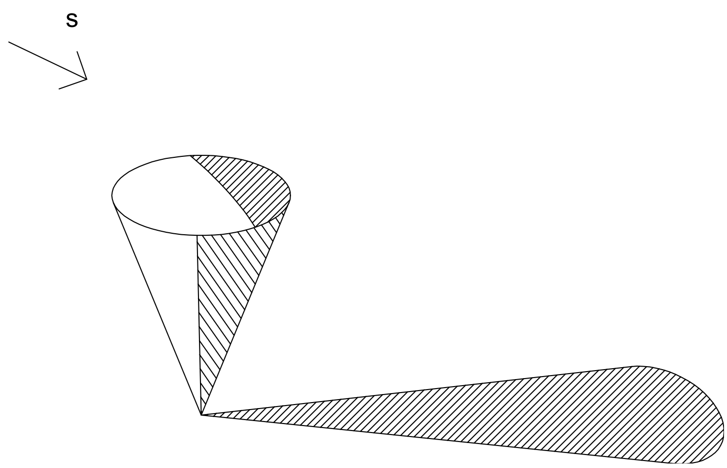
2.4. Základní principy osvětlení dutých těles

Osvětlujeme-li dutá tělesa, vytvoří světelné paprsky procházející hraniční křivkou tělesa světelnou plochu. Průnik světelné plochy Σ a osvětlovaného tělesa je vrženým stínem hrany osvětlovaného tělesa dovnitř tohoto tělesa.

• Existuje afinita mezi podstavnou kružnicí dutého válce a vrženým stínem této kružnice dovnitř válce. Směrem této afinity jsou povrchové přímky válce a osou je průsečnice roviny podstavy a roviny stínu vrženého dovnitř dutého válce.

• Při rovnoběžném osvětlení kvadrik existuje afinita mezi hraniční rovnoběžkou a vrženým stínem této rovnoběžky na kvadriku. Osou afinity je opět průsečnice roviny hraniční rovnoběžky a roviny jejího vrženého stínu na kvadriku.

• Existuje kolineace mezi podstavnou kružnicí dutého kužele a jejím stínem vrženým dovnitř tohoto kužele. Osou kolineace je průsečnice roviny podstavy s rovinou vrženého stínu dovnitř dutého kužele, střed této kolineace je vrchol kužele.



Dále se budeme zabývat pouze rovnoběžným osvětlením. V každé úloze sestrojíme mez stínu vrženého a mez stínu vlastního. Také předpokládáme, že osvětlovaná tělesa jsou zcela neprůhledná a neodrážejí žádné světlo.

3. Kvadriky

3.1. Základní pojmy

• *Polární rovina* π bodu P vzhledem ke kvadrice Φ je množina bodů, které jsou vzhledem ke kvadrice Φ harmonicky sdružené s bodem P, který nazýváme *pól*.

• Každý bod R polární roviny π se společně s pólem P nazývají *harmonické póly* kvadriky Φ.

• Sestrojíme-li polární roviny všech bodů libovolné polární roviny π, prochází všechny tyto roviny pólem P roviny π.

• Sestrojíme-li polární roviny všech bodů přímky p, tvoří tyto roviny svazek rovin o ose q. Totéž platí i obráceně. Přímky p a q nazýváme polárně sdružené vzhledem ke kvadrice Φ.

• Prochází-li každá ze dvou rovin pólem té druhé, nazýváme je *polárně sdružené.*

• Prochází-li přímka pólem roviny, nazýváme tuto přímku a rovinu polárně sdružené.

• Střed S kvadriky Φ je vzhledem ke kvadrice Φ pólem nevlastní roviny ω^{∞}.

• Je-li nevlastní bod ${}_{\infty}P$ vzhledem ke kvadrice Φ pólem roviny π, nazývá se polární rovina π *diametrální* a prochází středem S kvadrikyΦ. Pro tuto rovinu platí, že je polárně sdružená se směrem ${}_{\infty}P$ vzhledem ke kvadrice Φ.

• Tětiva kvadriky je úsečka, jejíž krajní body náleží kvadrice.

• *Středem* S kvadriky nazýváme bod, který je středem všech tětiv kvadriky jím procházejících.

• Náleží-li střed S kvadrice, je jejím singulárním bodem a kvadrika se nazývá singulární.

• Kvadrika může mít právě jeden střed, přímku středů, rovinu středů nebo nemá žádný střed.

• Rovinu středů má dvojice rovnoběžných rovin nebo jedna rovina

• Přímku středů má eliptická a hyperbolická válcová plocha, dvojice různoběžných rovin a přímka.

• Právě jeden střed má elipsoid, jednodílný a dvojdílný hyperboloid, kuželová plocha a jednobodová množina.

• Žádný střed nemá eliptický a hyperbolický paraboloid, parabolická válcová plocha.

Dále budeme kvadriky, které mají právě jeden střed nazývat *středové*, ostatní budeme nazývat *nestředové.*[1]

• Každá přímka procházející středem kvadriky se nazývá *průměr* kvadriky.

• Průměr, který je kolmý na svou sdruženou rovinu, nazýváme *osa* kvadriky.

• Průsečíky os kvadriky s kvadrikou nazýváme *vrcholy* kvadriky.

• Úsečka jejíž krajní body jsou vrchol a střed kvadriky se nazývá *poloosa.* Vzdálenost vrcholu od středu kvadriky nazýváme *velikost poloosy.*

• Diametrální rovina, která je kolmá ke sdruženému průměru, se nazývá *hlavní rovina.*

• Řez hlavní rovinou nazýváme *hlavní řez.*

• Přímky, které tvoří povrch přímkové kvadriky, nazýváme *tvořící přímky.*

• *Regulární bod* je bod v němž existuje právě jedna tečná rovina.

• *Singulární bod* je bod v němž existuje nekonečně mnoho tečných rovin.

• *Normálový řez* plochy v daném bodě je takový řez, jehož rovina obsahuje normálu plochy v daném bodě.

• *Normálová křivost* plochy v daném bodě je křivost normálového řezu plochy v tomto bodě.

• Směr v bodě plochy, který odpovídá extrému normálové křivosti se nazývá *hlavní směr* a odpovídající normálová křivost se nazývá *hlavní křivost.*

• *Gaussova křivost* je rovna součinu hlavních křivostí.

• *Kruhový bod* je bod, ve kterém jsou všechny směry plochy hlavní.

• *Eliptický bod* je bod, ve kterém je Gaussova křivost plochy větší než nula.

• *Hyperbolický bod* je bod, ve kterém je Gaussova křivost plochy záporná.

• *Parabolický bod* je bod, ve kterém je Gaussova křivost plochy rovna nule. Jedna z hlavních křivostí je nulová.

---

1 V této diplomové práci budeme využívat již výše zmíněnou definici středových kvadrik, existuje ovšem i literatura, ve které jsou středové kvadriky definované jinak.

• Sestrojíme-li tečnou rovinu v *eliptickém bodě* kvadriky, potom má tato rovina s kvadrikou společný pouze bod dotyku.

• Sestrojíme-li tečnou rovinu v *hyperbolickém bodě* kvadriky, potom tato rovina protíná kvadriku v singulární kuželosečce (dvojici různoběžěk, dvojici rovnoběžek či přímce).

• Sestrojíme-li tečnou rovinu v *parabolickém bodě* kvadriky, potom se tato rovina dotýká kvadriky podél celé parabolické křivky (přímky).

• Každá kvadrika je plochou druhého stupně.

• Kvadriky rozdělujeme na *středové* a *nestředové*, ale také na *regulární* a *singulární*.

• Neprázdné středové regulární kvadriky jsou kulová plocha, elipsoid, jednodílný hyperboloid a dvojdílný hyperboloid.

• Neprázdné středové singulární kvadriky jsou kuželová plocha a jednobodová množina.

• Neprázdné nestředové regulární kvadriky jsou eliptický paraboloid a hyperbolický paraboloid.

• Neprázdné nestředové singulární kvadriky jsou válcová plocha (eliptická, hyperbolická, parabolická), dvojice různoběžných rovin, přímka, dvojice rovnoběžných rovin a rovina.

Dále se zaměříme převážně na kvadriky regulární (ve středovém promítání sestrojíme dvě kvadriky singulární).

3.2. Rotační kvadriky

Rotační kvadriky jsou speciálním případem nejen kvadrik, ale i ploch rotačních. Vznikají rotací kuželosečky kolem její osy. Stejně jako kuželosečky můžeme rozdělit i rotační kvadriky na regulární a singulární. Je zřejmé, že necháme-li rotovat regulární kuželosečku kolem její osy, získáme rotační kvadriku, která je regulární. Rotací singulární kuželosečky získáváme rotační kvadriku singulární. V této práci se zaměříme převážně na regulární kvadriky. Ukážeme si ovšem i zobrazení dvou singulárních kvadrik, které se běžně vyskytují i ve středoškolském učivu, těmi jsou válcová a kuželová plocha.

Rotační kvadriky dělíme nejen podle rotující kuželosečky, ale také podle toho, která osa kuželosečky je osou rotace. Průsečíky kvadriky a osy rotace nazýváme vrcholy kvadriky. Necháme-li rotovat středovou kuželosečku, bude i vzniklá kvadrika středová. Střed vzniklé kvadriky odpovídá středu této kuželosečky.

Rotační elipsoid

Rotací elipsy, dané rovnicí $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, kolem své osy z vznikne rotační elipsoid. Tento elipsoid je dán rovnicí

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rotuje-li elipsa kolem své hlavní osy, vzniklý rotační elipsoid nazýváme *protáhlý (vejčitý)* a platí $0 < a < c$.[1] V případě, že elipsa rotuje kolem své vedlejší osy, jedná se o rotační elipsoid *zploštělý* a platí $0 < c < a$.[2] Speciálním případem rotačního elipsoidu je kulová plocha. Rotační elipsoid patří mezi středové kvadriky. Nevlastní rovinu neprotíná v žádném bodě, všechny jeho body jsou vlastní. Osu rotace protíná ve dvou bodech (vrcholech). Vrcholy rotačního elipsoidu jsou kruhové body, všechny ostatní body jsou eliptické. Řezem může být kružnice nebo elipsa.

V případě protáhlého elipsoidu jsou ohniska tvořící elipsy také ohnisky elipsoidu, ten je tedy množinou bodů v prostoru, které mají konstantní součet vzdáleností od obou ohnisek. Tento součet vzdáleností je stejný jako vzdálenost obou vrcholů.

1 Hlavní osa rotující elipsy splývá s osou z.

2 Vedlejší osa rotující elipsy splývá s osou z.

Rotační paraboloid

Rotací paraboly, zadané rovnicí $y^2 = 2pz$, kolem její osy z vznikne rotační paraboloid. Tento paraboloid je dán rovnicí

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Rotační paraboloid je nestředovou kvadrikou. Protíná osu rotace v jediném bodě, tento bod se nazývá vrchol a splývá s vrcholem tvořící paraboly. Při rotaci vytvoří řídící přímka tvořící paraboly řídící rovinu paraboloidu. Ohnisko paraboly splývá s ohniskem rotačního paraboloidu. Pro body rotačního paraboloidu platí, že mají stejnou vzdálenost od ohniska i od řídící roviny. Rotační paraboloid je tedy množina středů všech kulových ploch, které se dotýkají řídící roviny a prochází ohniskem. Nevlastní roviny se rotační paraboloid dotýká v jednom jediném bodě, tím je průsečík jeho osy s nevlastní rovinou. Všechny body rotačního paraboloidu jsou eliptické, pouze vrchol paraboloidu je kruhovým bodem. Řezem rotačního paraboloidu rovinou může být kružnice, elipsa nebo parabola. Roviny rovnoběžné s osou paraboloidu protínají paraboloid v parabolách, které jsou navzájem shodné. Eliptický řez se pravoúhle promítne do roviny kolmé k ose rotace jako kružnice.

Rotační hyperboloid

Rotací hyperboly, dané rovnicí $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$, kolem její osy z vznikne rotační hyperboloid. Tento hyperboloid je dán rovnicí

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Rotuje-li tvořící hyperbola kolem své hlavní osy vznikne *jednodílný rotační hyperboloid*, jestliže tvořící hyperbola rotuje kolem své vedlejší osy y, vznikne *dvojdílný rotační hyperboloid*. Rotační hyperboloid je středová kvadrika. Nevlastní rovinu protíná v regulární kuželosečce. Podél této kuželosečky se rotačního hyperboloidu dotýká asymptotická (rotační) kuželová plocha. Tato asymptotická kuželová plocha, jejímž vrcholem je střed hyperboloidu, vznikne rotací asymptot tvořící hyperboly. Můžeme ji také nazvat dotykovou kuželovou plochou, kterou jsme hyperboloidu opsali z jeho středu. Každá rovina protíná hyperboloid a jeho asymptotickou kuželovou plochu v soustředných a homotetických kuželosečkách. Asymptotická kuželová plocha je dána rovnicí

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

- *Dvojdílní rotační hyperboloid* je dán rovnicí

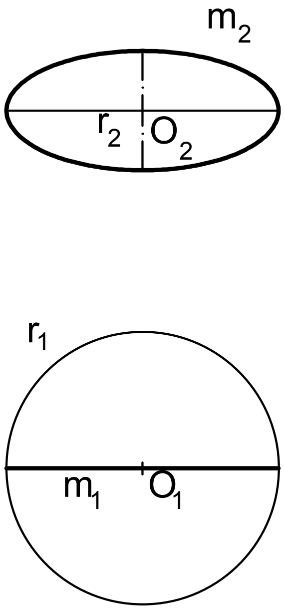
$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Protíná osu rotace ve dvou bodech (vrcholech). Všechny jeho body jsou eliptické, pouze vrcholy jsou body kruhové. Vrcholy a ohniska dvojdílného rotačního hyperboloidu splývají s vrcholy a ohnisky tvořící hyperboly. Dvojdílný hyperboloid je množinou bodů v prostoru, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou různých bodů (ohnisek) je konstantní. Řezem může být kružnice, elipsa, parabola, hyperbola či jednobodová množina. Každý dvojdílný rotační hyperboloid má také asymptotické roviny, ty se ho dotýkají v nevlastních bodech.

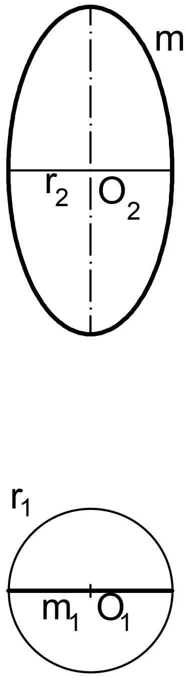
- *Jednodílný rotační hyperboloid* je dán rovnicí

$$\tfrac{x^2+y^2}{a^2} - \tfrac{z^2}{c^2} = 1.$$

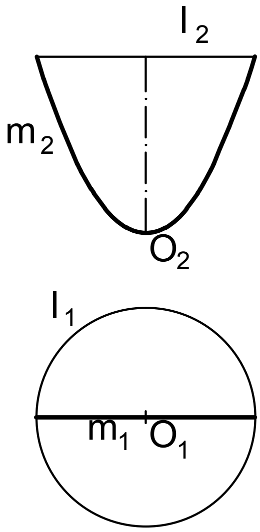
Jednodílný rotační hyperboloid neprotíná osu rotace v žádném bodě. Rovina kolmá na osu rotace a procházející středem hyperboloidu, protíná hyperboloid v hrdelní kružnici. Jednodílný rotační hyperboloid je jedinou regulární rotační přímkovou kvadrikou. Můžeme ho tedy vytvořit také rotací přímky p, která je mimoběžná s osou rotace. Leží-li na ploše přímka p, leží na ní také všechny přímky vytvořené rotací této přímky kolem osy hyperboloidu. Tuto soustavu přímek nazýváme regulus. Přímka q, která je rovnoběžná s přímkou p, leží ve stejné vzdálenosti od osy rotace jako přímka p a zároveň mimoběžná s osou rotace. Soustavu přímek vytvořenou rotací přímky q nazýváme druhým regulem. Všechny přímky jednoho regulu jsou navzájem mimoběžné. Každé dvě přímky různých regulů se protínají v jednom bodě hyperboloidu. Každým bodem hyperboloidu procházejí právě dvě různé přímky. Tečná rovina v libovolném bodě hyperboloidu je určena právě těmi tvořícími přímkami hyperboloidu, které se zde protínají. Tyto přímky jsou zároveň řezem hyperboloidu touto tečnou rovinou. Každý jednodílný rotační hyperboloid má také své asymptotické roviny. Jsou to roviny obsahující dvě rovnoběžné přímky různých regulů, které se protínají v nevlastním bodě. Jednodílný hyperboloid je zároveň i zborcenou plochou, každým jeho bodem procházejí dvě tvořící přímky. Řezem jednodílného rotačního hyperboloidu může být jakákoli regulární kuželosečka nebo dvojice rovnoběžek (řez asymptotickou rovinou) či dvojice různoběžek (řez tečnou rovinou).



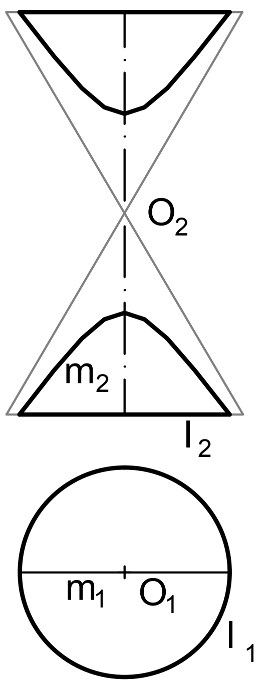
Zploštělý rotační elisoid



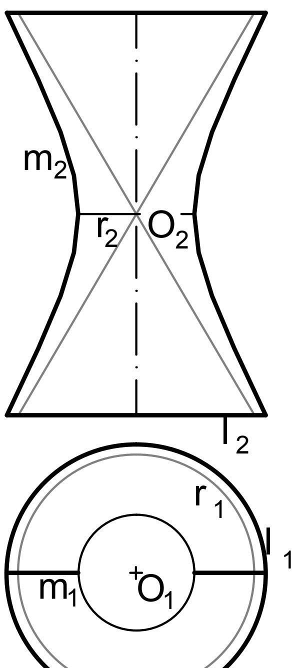
Protáhlý rotační elipsoid



Rotační paraboloid



Rotační jednodílný hyperboloid



Rotační dvojdílný hyperboloid

3.3. Kvadriky

K většině obecných kvadrik můžeme z rotačních kvadrik přejít pomocí afinních transformací. Proto budeme vycházet z vlastností rotačních kvadrik. Pro úplnost se zmíníme i o některých singulárních kvadrikách.

Elipsoid (s poloosami a, b, c) je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Rovnají-li se dvě poloosy, jedná se o rotační elipsoid. Rovnají-li se všechny poloosy, jedná se o kulovou plochu. Elipsoid je středová kvadrika. Střed takto zadaného elipsoidu leží v počátku soustavy souřadnic, osy této soustavy souřadnic jsou osami elipsoidu. Všechny řezy elipsoidu jsou elipsy, tedy i všechny hlavní řezy elipsoidu jsou elipsy. Elipsoid nemá s nevlastní rovinou žádný společný bod.

Jednodílný hyperboloid (s poloosami a, b, c) je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Je-li $a = b$, jedná se o rotační jednodílný hyperboloid. Jednodílný hyperboloid patří mezi středové kvadriky. Střed takto zadaného hyperboloidu leží v počátku soustavy souřadnic a osa z je osou hyperboloidu. Jednodílný hyperboloid je plochou přímkovou i plochou zborcenou. Má vždy dva reguly a každým jeho bodem prochází dvojice tvořících přímek. Řezem jednodílného hyperboloidu může být jakákoli regulární kvadrika nebo dvojice rovnoběžek či dvojice různoběžek. Dva z hlavních řezů jsou typu hyperbola, třetím je elipsa. Jednodílný hyperboloid protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce, podél této kuželosečky se hyperboloidu dotýká jeho asymptotická kuželová plocha.

Dvojdílný hyperboloid (s poloosami a, b, c) je dán obecnou rovnicí

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Je-li $a = b$, jedná se o rotační dvojdílný hyperboloid. Dvojdílný hyperboloid patří mezi středové kvadriky. Střed takto zadaného hyperboloidu leží v počátku soustavy souřadnic a osa z je osou hyperboloidu. Řezem může být hyperbola, parabola, elipsa či jednobodová množina. Dva hlavní řezy jsou hyperboly, třetím je elipsa. Dvoudílný hyperboloid protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce, podél této kuželosečky se hyperboloidu dotýká jeho asymptotická kuželová plocha.

Eliptický paraboloid (s parametry p, q) je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

Je-li $p = q$, jedná se o rotační paraboloid. Eliptický paraboloid není středovou kvadrikou. Vrchol takto zadaného eliptického paraboloidu leží v počátku soustavy souřadnic a osa z je osou paraboloidu. Řezem paraboloidu může být elipsa nebo parabola. Dva hlavní řezy jsou paraboly s rovnicemi $x^2 = 2pz, y^2 = 2qz$, třetím je elipsa. Eliptický paraboloid má s nevlastní rovinou společný právě jeden bod, tím je průsečík jeho osy s nevlastní rovinou.

Hyperbolický paraboloid (s parametry p, q) je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

Hyperbolický paraboloid není středovou kvadrikou. Vrchol takto zadaného hyperbolického paraboloidu leží v počátku soustavy souřadnic a osa z je osou paraboloidu. Roviny $x = 0, y = 0$ jsou řídící roviny hyperbolického paraboloidu a osa z je jejich průsečnice. Tato osa protíná paraboloid ve vrcholu, v něm se paraboloidu dotýká vrcholová tečná rovina. Tečná rovina protíná paraboloid ve dvou tvořících přímkách. Hyperbolický paraboloid je plochou přímkovou i plochou zborcenou. Má vždy dva reguly a každým jeho bodem prochází dvojice tvořících přímek. Má dvě řídící roviny, s každou z nich jsou rovnoběžné tvořící přímky jednoho z obou regulů. Všechny body na hyperbolickém paraboloidu jsou hyperbolické. Řezem hyperbolického paraboloidu je parabola, hyperbola nebo dvojice různoběžných přímek. Dva hlavní řezy jsou paraboly, třetím je kuželosečka typu hyperbola. Roviny rovnoběžné s hlavními rovinami paraboloidu protínají paraboloid ve shodných parabolách. Hyperbolický paraboloid můžeme vytvořit také pomocí dvou parabol, které leží v navzájem kolmých rovinách. Průsečnice těchto rovin je osou obou paraboloidů, ty mají společný vrchol a ohnisko jedné tvořící paraboly leží v opačné polorovině než ohnisko druhé tvořící paraboly. Sestrojíme jednu tvořící parabolu, druhou tvořící parabolou budeme pohybovat tak, že její vrchol posouváme po pevně zadané parabole a získáme tak hyperbolický paraboloid. S nevlastní rovinou má paraboloid společné dvě nevlastní přímky. Je-li $p = q$, pak jsou řídící roviny na sebe kolmé a hyperbolický paraboloid nazýváme *rovnoosý.*

Kuželová plocha (s parametry a, b, c) je dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Je-li $a = b$, jedná se o rotační kuželovou plochu. Jestliže její vrchol položíme do počátku soustavy souřadnic, je osa z osou kuželové plochy. Kuželová plocha patří mezi středové singulární kvadriky. Má jeden vlastní singulární bod (vrchol). Tímto bodem procházejí všechny tři její osy i všechny tvořící přímky. Vrchol je zároveň i středem této kvadriky. Kuželová plocha je plochou přímkovou i plochou rozvinutelnou. Všechny body rozvinutelné plochy mají Gaussovu křivost rovnu nule, tečná rovina se tedy vždy dotýká plochy podél celé přímky. Tečná rovina prochází vrcholem a má s kuželovou plochou společnou jednu tvořící přímku. Řez vrcholovou rovinou může být bod, přímka nebo dvojice různoběžných přímek. Řezem obecnou rovinou může být elipsa, parabola nebo hyperbola. Dva hlavní řezy jsou dvojice různoběžných přímek, třetí je elipsa. Kuželová plocha protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce.

Eliptická válcová plocha (s parametry a, b) je dána obecnou rovnicí

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1$$

Je-li $a = b$, jedná se o rotační válcovou plochu. Eliptická válcová plocha nepatří mezi středové kvadriky. Je plochou přímkovou i plochou rozvinutelnou. Tečná rovina se plochy dotýká podél jedné tvořící přímky. Řezem může být přímka, dvojice rovnoběžných přímek nebo elipsa. Eliptická válcová plocha protíná nevlastní rovinu v jediném bodě.

Hyperbolická válcová plocha (s parametry a, b) je dána obecnou rovnicí

$$\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1.$$

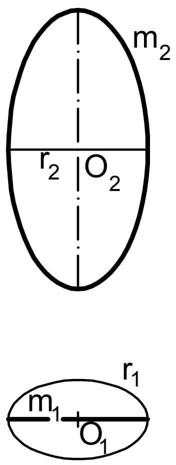
Hyperbolická válcová plocha je nestředovou kvadrikou. Je plochou přímkovou a je také plochou rozvinutelnou. Řezem může být hyperbola, přímka nebo dvojice rovnoběžných přímek. Nevlastní rovinu protíná v singulární kuželosečce tvořené dvěma reálnými přímkami. Průsečíkem těchto přímek prochází všechny tvořící přímky hyperbolické válcové plochy.

Parabolická válcová plocha (s parametrem p) je dána obecnou rovnicí

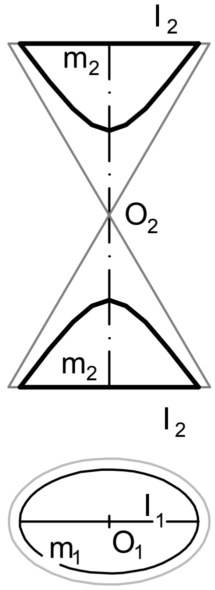
$$x^2 = 2py.$$

Parabolická válcová plocha patří mezi nestředové kvadriky a je také plochou přímkovou a rozvinutelnou. Jejím řezem může být parabola, přímka nebo dvojice rovnoběžných přímek. Nevlastní rovinu protíná v nevlastní přímce.

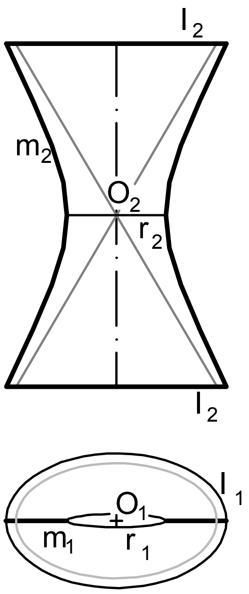
Mezi neprázdné singulární kvadriky patří také dvojice různoběžných rovin, dvojice rovnoběžných rovin, rovina, přímka a jednobodová množina. Těmi se v tomto textu nebudeme podrobněji zabývat.



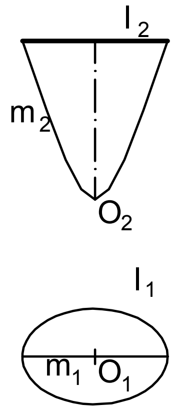
Elipsoid



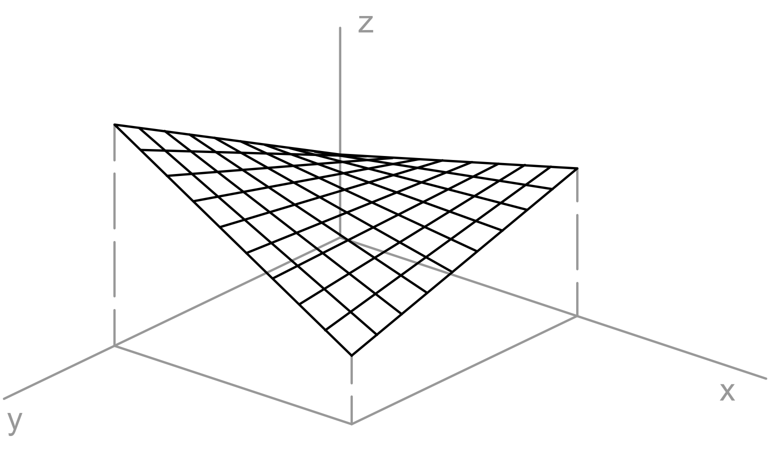
Dvojdílný hyperboloid



Jednodílný hyperboloid



Eliptický paraboloid



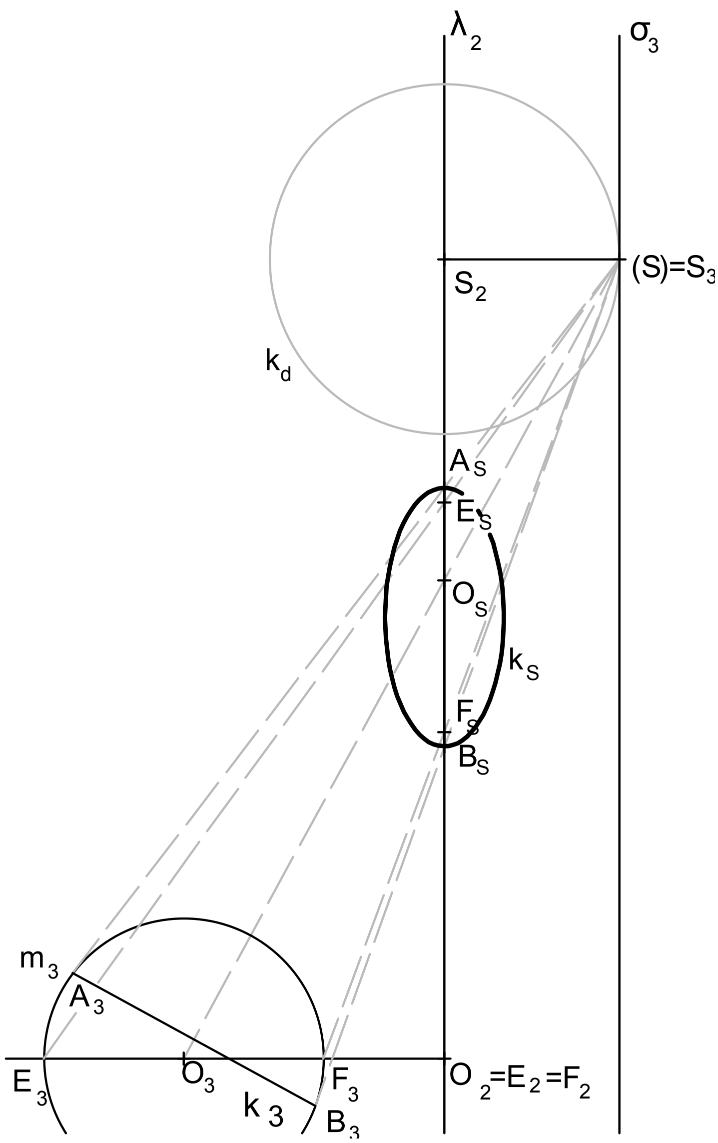
Hyperbolický paraboloid

4. Kvadriky ve středovém promítání

Tato kapitola obsahuje řešené úlohy o kvadrikách ve středovém promítání. Zadání všech úloh je k dispozici v příloze této práce. Velkou nevýhodou středového promítání je jeho malá názornost a složitá volba zadání jednotlivých úloh, proto je v této kapitole řešeno pouze několik základních úloh. Zaměříme se především na kulovou plochu a dvě singulární kvadriky (plochu válcovou a kuželovou). Větší pozornost bude věnována řešení úloh v lineární perspektivě v následující kapitole. V první kapitole jsme si připomněli nejdůležitější pojmy a postupy středového promítání, nyní můžeme přejít přímo k řešení úloh.

Úloha 4.1

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je dán její střed O a její poloměr r.



Obrázek 4.1

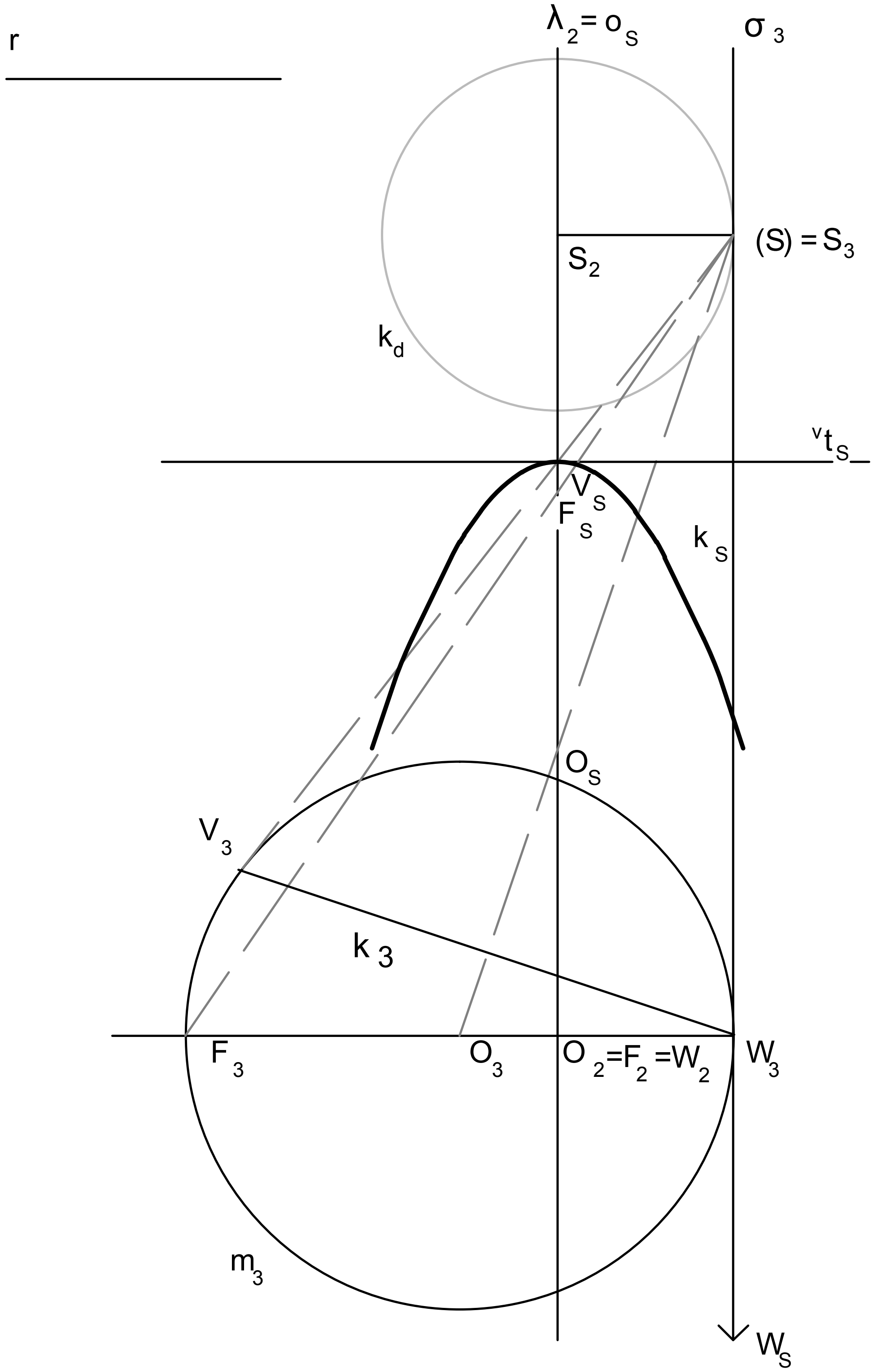
Řešení

Zvolíme pomocnou rovinu λ kolmou k ν a procházející přímkou SO. Z bodu S opíšeme kulové ploše dotykovou kuželovou plochu, její řez rovinou λ je pravoúhlý průmět kulové plochy do této roviny. Rovina λ je rovinou souměrnosti kulové plochy, protíná ji v hlavní kružnici m a obsahuje její průměr EF, který je kolmý k ν.

Protože je rovina λ rovinou souměrnosti nejenom kulové plochy, ale také jí opsané kuželové plochy, budeme pravoúhle promítat do roviny λ, kterou sklopíme do průmětny a sklopené průměty označíme indexem 3. Středová rovina se promítne na přímku σ_3, střed promítání na bod S_3 a obrys pravoúhlého průmětu kulové plochy do roviny λ je kružnicí m_3. Ze vzájemné polohy přímky σ_3 a kružnice m_3 zjistíme, že kuželosečka k_s je v tomto případě elipsa ($\sigma_3 \cap m_3 = \emptyset$). Z bodu S_3 sestrojíme tečny ke kružnici m_3, tyto tečny protínají λ_2 ve vrcholech elipsy, která je středovým průmětem dané kulové plochy. Ohniska kuželosečky k_s získáme promítnutím bodů E_3, F_3 z bodu S_3 do λ_2. Nyní máme kuželosečku jednoznačně určenou a můžeme ji sestrojit. Tato elipsa určuje zdánlivý obrys dané kulové plochy.

Úloha 4.2

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je dán její střed O a její poloměr r.



Obrázek 4.2

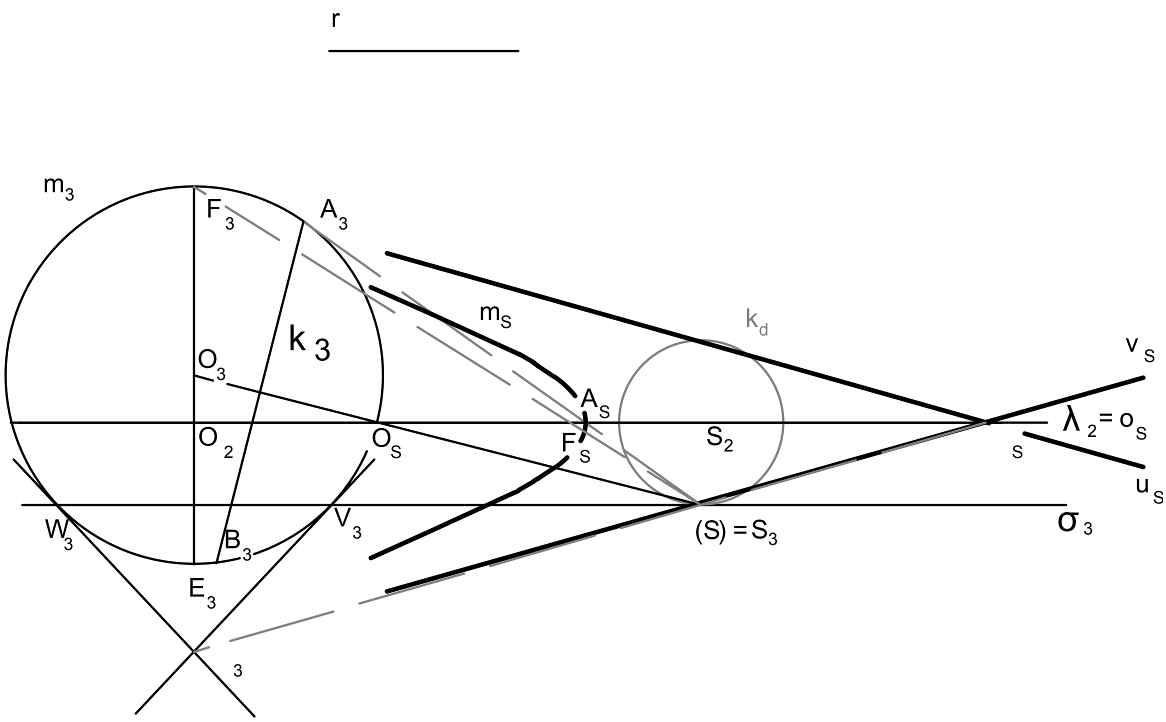
Řešení

Postupujeme obdobně jako v úloze 4.1. Zvolíme pomocnou rovinu λ kolmou k ν a procházející přímkou SO. Pokud z bodu S opíšeme kulové ploše dotykovou kuželovou plochu, její řez rovinou λ je pravoúhlý průmět kulové plochy do této roviny. Rovina λ je rovinou souměrnosti kulové plochy, protíná ji v hlavní kružnici m a obsahuje její průměr EF, který je kolmý k ν.

Protože je rovina λ rovinou souměrnosti nejenom kulové plochy, ale také jí opsané kuželové plochy ze středu promítání S, budeme pravoúhle promítat do roviny λ, kterou sklopíme do průmětny a sklopené průměty označíme indexem 3. Středová rovina se promítne na přímku σ_3, střed promítání na bod S_3 a obrys pravoúhlého průmětu kulové plochy do roviny λ je kružnicí m_3. Ze vzájemné polohy přímky σ_3 a kružnice m_3 zjistíme, že hledaná kuželosečka k_s je v tomto případě parabola ($\sigma_3 \cap m_3 = W_3$). Bod dotyku W_3 kružnice m_3 a přímk σ_3 je obrazem bodu W, ve kterém se kulová plocha dotýká středové roviny. Směr přímky W_s^∞ určuje směr osy paraboly, která je středovým průmětem dané kulové plochy. Dále z bodu S_3 sestrojíme tečnu ke kručnici m_3, tato tečna protíná λ_2 ve vrcholu paraboly k_s. Ohnisko paraboly k_s získáme promítnutím bodu F_3 z bodu S_3 zpět do λ_2. Již známe vrchol a ohnisko paraboly k_s. Můžeme sestrojit vrcholovou tečnu ${}^v t_s$, která je kolmá k ose paraboly k_s a prochází vrcholem. Sestrojíme parabolu k_s, která je zdánlivým obrysem dané kulové plochy.

Úloha 4.3

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je dán její střed O a její poloměr r.



Obrázek 4.3

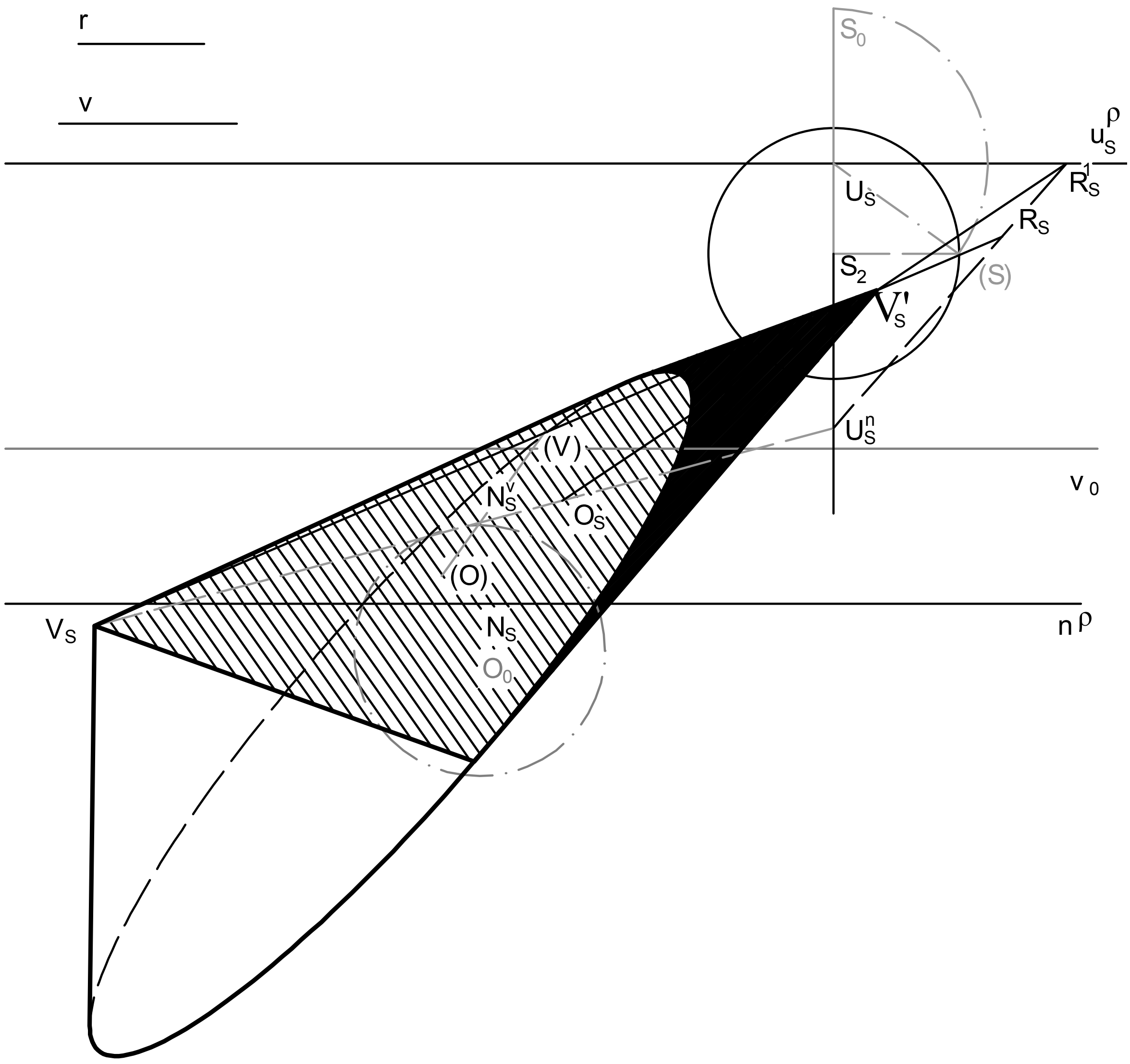
Řešení

V této úloze postupujeme podobně jako v předchozích dvou. Zvolíme pomocnou rovinu λ kolmou k ν a procházející přímkou SO. Pokud z bodu S opíšeme kulové ploše dotykovou kuželovou plochu, její řez rovinou λ je pravoúhlý průmět kulové plochy do této roviny. Rovina λ je rovinou souměrnosti kulové plochy, protíná ji v hlavní kružnici m a obsahuje její průměr EF, který je kolmý k ν.

Protože je rovina λ rovinou souměrnosti nejenom kulové plochy, ale také jí opsané kuželové plochy, budeme pravoúhle promítat do roviny λ, kterou sklopíme do průmětny a sklopené průměty označíme indexem 3. Středová rovina se promítne na přímku σ_3, střed promítání na bod S_3 a obrys pravoúhlého průmětu kulové plochy do roviny λ je kružnicí m_3. Ze vzájemné polohy přímky σ_3 a kružnice m_3 zjistíme, že kuželosečka k_s je v tomto případě hyperbola ($\sigma_3 \cap m_3 = \{W_3, V_3\}$). V bodech W_3, V_3 sestrojíme tečny ke kružnici m_3, ty se protínají v bodě O_3'. Bod O_3' je obraz středu O_s' hyperboly k_s, která je středovým průmětem kulové plochy. Body V, W se zobrazí jako nevlastní, tečny v těchto bodech se zobrazí jako asymptoty. Z bodu S_3 sestrojíme tečny ke kružnici m_3, tyto tečny protínají λ_2 ve vrcholech hyperboly k_s. Ohniska hyperboly k_s jsou průměty bodů F_3, E_3 z bodu S_3 do λ_2. Nyní známe střed, vrcholy a ohniska hledané hyperboly k_s a můžeme ji bodově sestrojit. Přímky u_s, v_s jsou asymptoty hledané hyperboly k_s, tato hyperbola je zdánlivým obrysem dané kulové plochy.

Úloha 4.4

Ve středovém promítání sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině ρ daný středem O a poloměrem r, je dána výška kužele v. Sestrojte jeho vržený stín na rovinu ρ podstavy, rovnoběžné osvětlení je dáno úběžníkem R_s světelných paprsků.



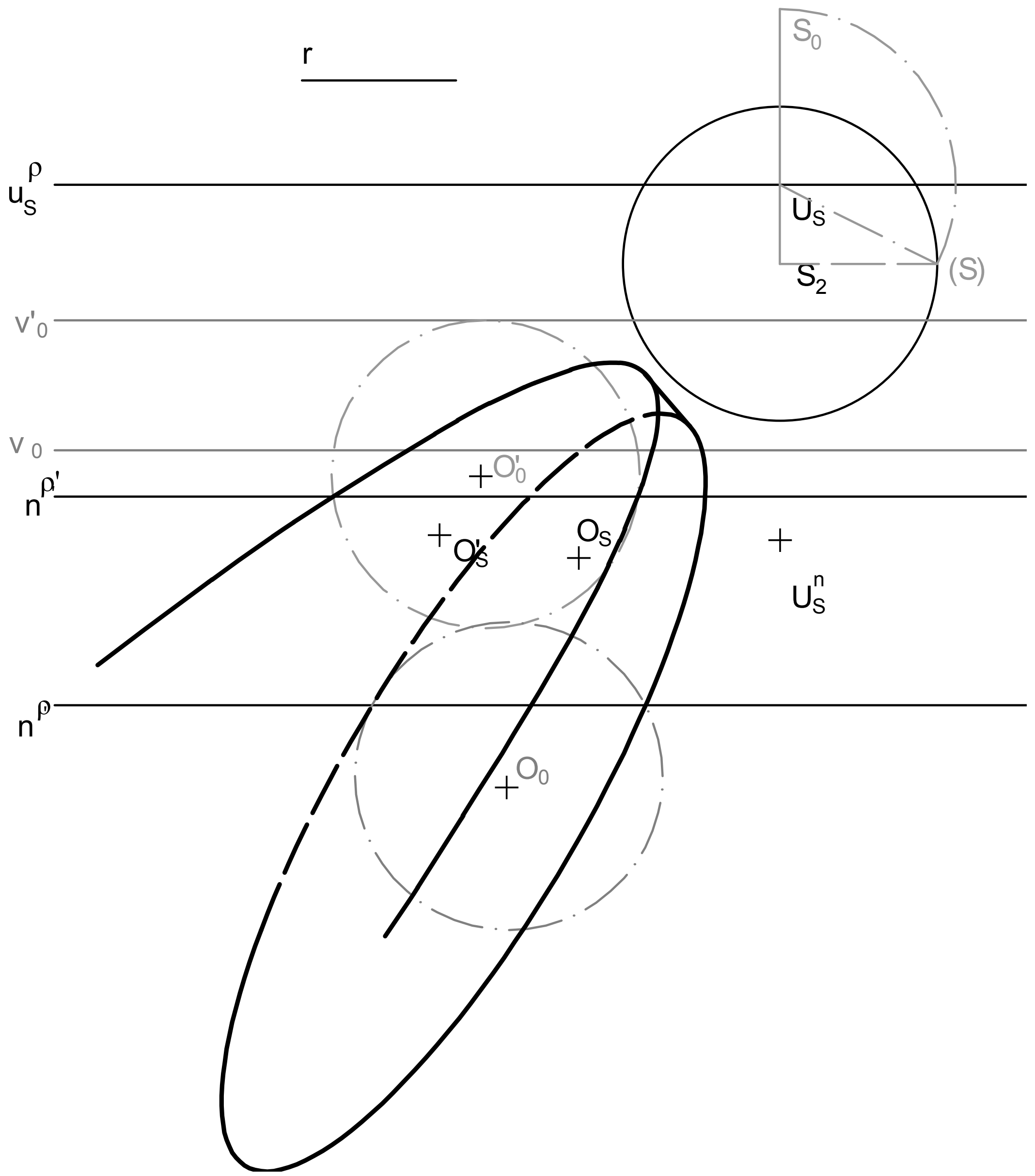
Obrázek 4.4

Řešení

Nejprve otočíme rovinu ρ do průmětny. V otočení setrojíme kružnici podstavy s poloměrem r. Protože kružnice v otočení neprotíná protiúběžnici v, podstava se zobrazí jako elipsa. Pomocí úběžníku U_s^n všech přímek kolmých na rovinu ρ sestrojíme přímku procházející středem podstavy O. Na této přímce leží vrchol V kužele. Ten sestrojíme pomocí dělící kružnice ve vzdálenosti v od bodu O. Jeho polohu jsme zvolili tak, aby ležel před průmětnou dál než bod O. Známým způsobem sestrojíme obrys kužele a určíme viditelnost. Při této poloze bodu V je vidět bod V a viditelná tedy bude pouze část podstavy. Nyní sestrojíme vržený stín rotačního kužele na rovinu ρ. Nejprve sestrojíme vržený stín V' bodu V. Bodem V vedeme světelný paprsek, vržený stín V' sestrojíme jako průsečík tohoto světelného paprsku s jeho pravoúhlým průmětem do rovinyρ. Sestrojíme úběžník pravoúhlých průmětů světelných paprsků R_s^1, který je pravoúhlým průmětem úběžníku světelných paprsků R_s do roviny ρ. Bod R_s^1 tedy leží na úběžnici u_s^ρ roviny ρ a na přímce $R_sU_s^n$. Středovým průmětem V_s vedeme z bodu R_s světelný paprsek, vržený stín V_s' bodu V je průsečíkem tohoto paprsku a jeho pravoúhlého průmětu. Protože vržené stíny bodů podstavy s těmito body splývají, sestrojíme z bodu V_s' tečny k podstavě. Tím jsme získali mez vrženého stínu. Z bodů dotyku vedeme vrcholové přímky, tak získáme i mez stínu vlastního.

Úloha 4.5

Ve středovém promítání sestrojte rotační válec, je dán střed horní podstavy O' ležící v rovině ρ' a rovina ρ spodní podstavy.



Obrázek 4.5

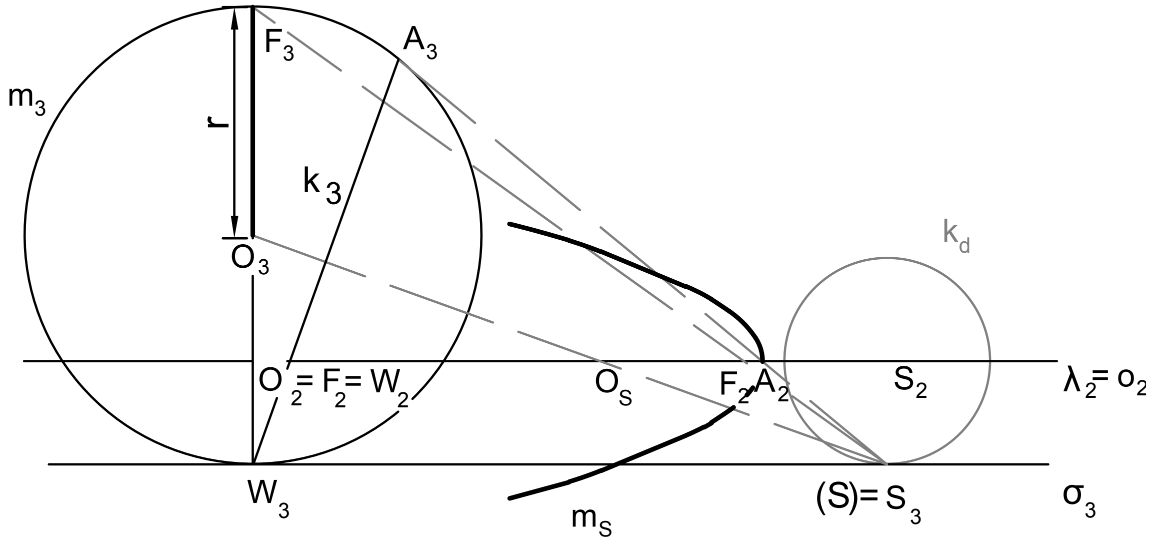
Řešení

Nejprve otočíme rovinu ρ'. Poté v otočení sestrojíme kružnici s poloměrem r. Protože se tato kružnice v otočení dotýká protiúběžnice v jednom bodě, horní podstava válce se zobrazí jako parabola. Střed spodní podstavy sestrojíme jako průsečík roviny ρ

s přímkou kolmou na ρ' a procházející středem horní podstavy. K sestrojení této přímky využijeme úběžníku normál roviny ρ'. Nyní otočíme rovinu ρ a v otočení sestrojíme kružnici spodní podstavy s poloměrem r. Tato kružnice nemá v otočení s protiúběžnicí žádný společný bod, proto se zobrazí jako elipsa. Nakonec sestrojíme obrys válce. Protože se dolní podstava zobrazí jako elipsa a horní jako parabola, sestrojíme obrys válce pouze částečně. Tečny k elipse sestrojené z úběžníku normál určí viditelnost dolní podstavy, zde je sestrojena pouze ta tečna, která není rovnoběžná s osou paraboly.

Úloha 4.6

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ tak, aby jejím průmětem byla parabola. Je dán střed O kulové plochyκ.



Obrázek 4.6

Řešení

V této úloze využijeme poznatků z prvních úloh. Víme, že opíšeme-li ze středu promítání S kulové ploše κ dotykovou kuželovou plochu, její řez rovinou λ je pravoúhlý průmět kulové plochy do této roviny. Rovina λ prochází přímkou OS a je kolmá k průmětně ν. Rovina λ je rovinou souměrnosti nejen kulové plochy, ale i již zmíněné kuželové plochy. Kulovou plochu protíná v hlavní kružnici m a obsahuje její průmět EF, kolmý k ν. Budeme tedy pravoúhle promítat do roviny λ, kterou sklopíme do průmětny a sklopené průměty označíme indexem 3. Středová rovina se promítne na přímku σ_3, střed promítání na bod S_3 a obrys pravoúhlého průmětu kulové plochy do roviny λ je kružnicí m_3. Aby obrysem kulové plochy byla parabola, musí se kulová plocha dotýkat středové roviny právě v jednom bodě. Zvolíme tedy poloměr r kružnice m_3 takový, aby σ_3 byla tečnou kružnice m_3. Tímto jsme získali bod W_3. Dále postupujeme jako v úloze 4.2.

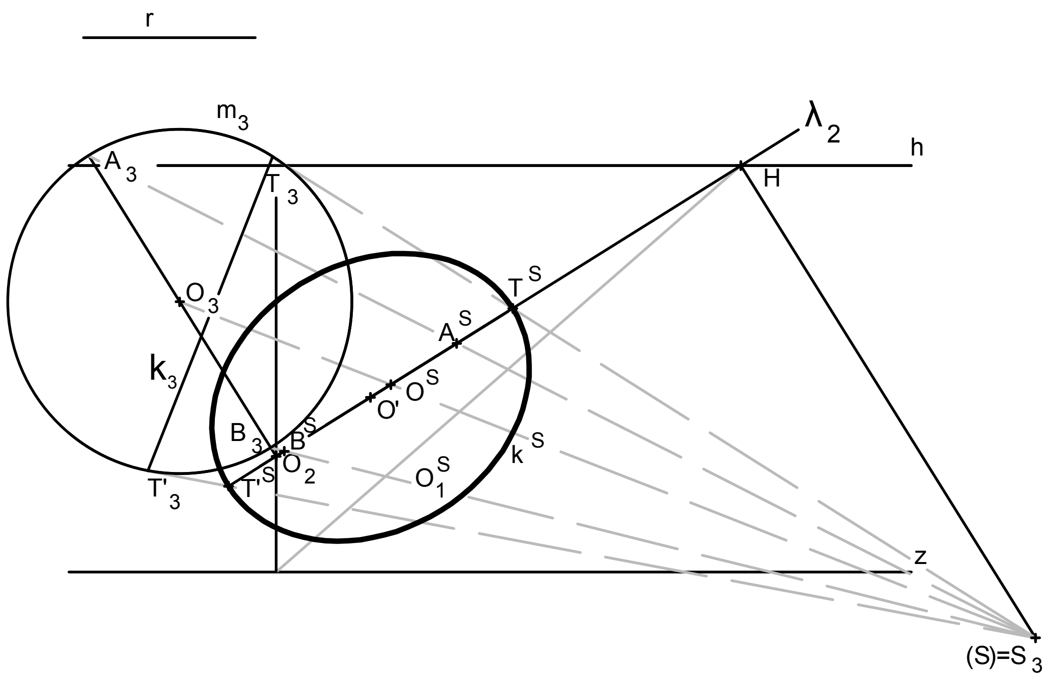
5. Kvadriky v lineární perspektivě

Lineární perspektiva je v praxi využívána mnohem častěji než středové promítání a to hlavně proto, že obrazy v lineární perspektivě působí trojrozměrným dojmem. Lineární perspektivu volíme nejenom proto, že je názornější a přehlednější než středové promítání, ale také proto, že se v ní mnohem lépe pracuje. Jak již bylo řečeno, budeme středové průměty objektů nazývat perspektivy a značit je horním indexem s. Distanci budeme vždy volit větší než 20 cm.

Úlohy obsažené v této kapitole se zaměřují především na zobrazení samotných kvadrik. Zadání všech úloh je k dispozici v příloze této práce. Ukážeme si dva způsoby zobrazování kvadrik. První způsob byl využit již při zobrazování kulové plochy ve středovém promítání. Druhý způsob využívá znalostí z teorie osvětlení.

Úloha 5.1

V lineární perspektivě zobrazte kulovou plochu s poloměrem r a středem v bodě O.



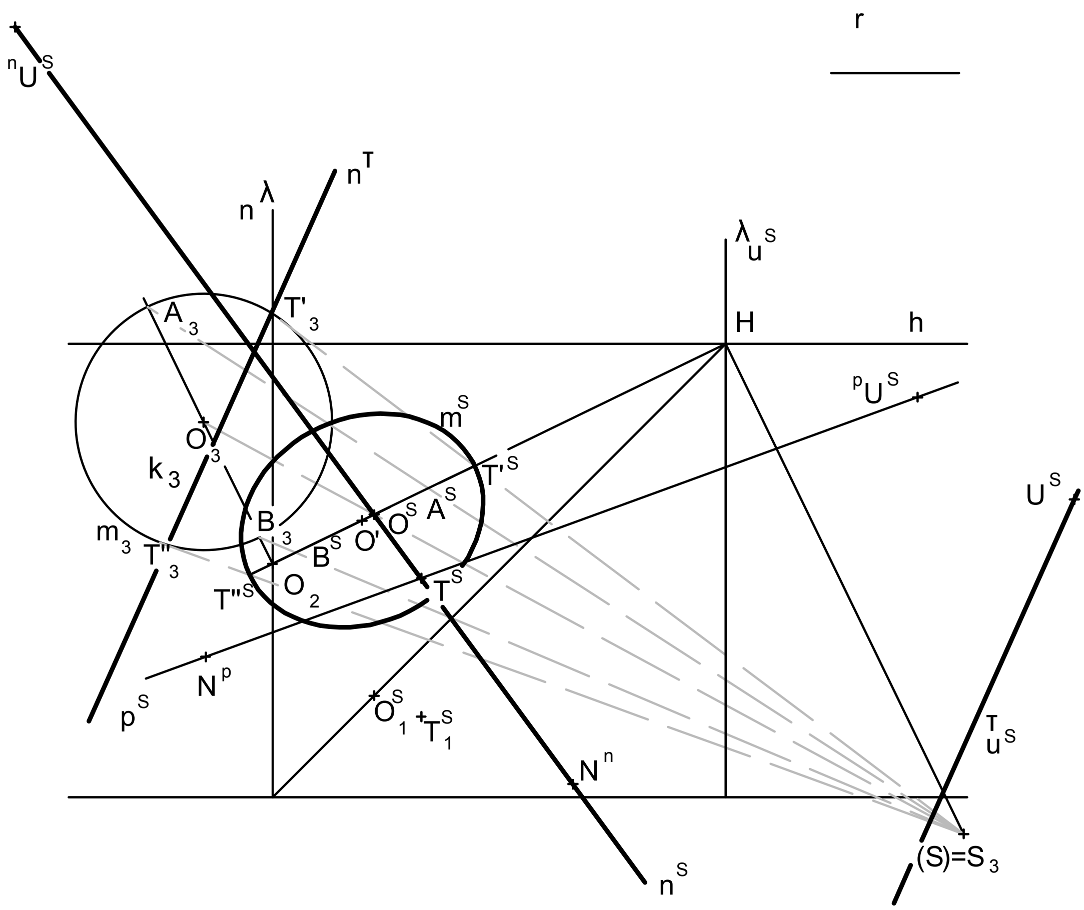
Obrázek 5.1

Řešení

Z bodu S opíšeme kulové ploše κ dotykovou kuželovou plochu Φ. Body S, O proložíme pomocnou rovinu λ, která je kolmá na průmětnu ν. Řez kuželové plochy Φ rovinou λ je pravoúhlý průmět kulové plochy do této roviny. Tato rovina je rovinou souměrnosti kulové plochy κ i jí opsané kuželové plochy Φ. Kulovou plochu κ protíná v hlavní kružnici m. Rovinu λ určíme pomocí její průsečnice s průmětnou ν. Sestrojíme pravoúhlý průmět O_2 bodu O, který využijeme při dalších konstrukcích. Budeme pravoúhle promítat do roviny λ a tu poté sklopíme do průmětny ν, sklopené průměty označíme indexem 3. V rovině λ leží průměr AB hlavní kružnice m, který je kolmý na π. Střed promítání se zobrazí jako bod S_3, střed kulové plochy jako bod O_3 a hlavní kružnice m kulové plochy jako kružnice m_3, ta je zdánlivým obrysem kulové plochy v rovině λ. Vzdálenost hlavního bodu H od bodu S_3 je stejná jako $|HS|$, tedy distance d. Obrysem kulové plochy v lineární perspektivě je na rozdíl od středového promítání pouze elipsa či kružnice. Promítneme-li z bodu S_3 na λ_2 body A_3, B_3, získáme ohniska A^s, B^s elipsy k^s. Vrcholy T^s, T'^s elipsy k^s získáme pomocí tečen sestrojených z bodu S_3 ke kružnici m_3, tyto tečny protínají λ_2 ve vrcholech T^s, T'^s. Elipsa k^s určující zdánlivý obrys kulové plochy κ je tímto jednoznačně určena.

Úloha 5.2

V lineární perspektivě zobrazte kulovou plochu se středem v bodě O a poloměrem r. V bodě T sestrojte její normálu a tečnou rovinu.



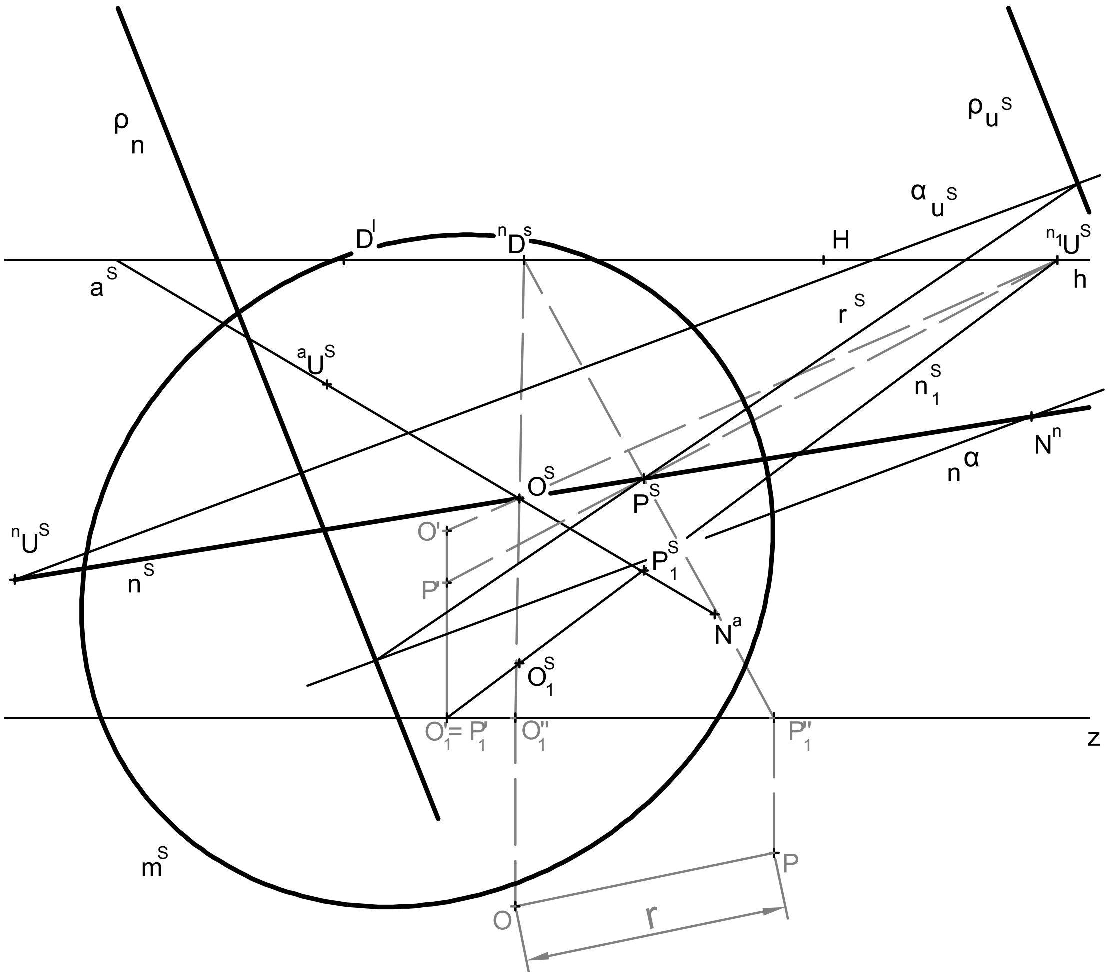
Obrázek 5.2

Řešení

Stejným způsobem jako v předchozí úloze sestrojíme zdánlivý obrys k^s kulové plochy κ. Normálu n v tomto případě získáme jednoduše, je to přímka OT. Známým způsobem určíme stopník N^n a úběžník ${}^nU$ normály n. Bodem T vedeme libovolnou přímku p a opět určíme její stopník N^a a úběžník ${}^aU$. Tečnou rovinu τ sestrojíme jako rovinu kolmou k normále n a procházející bodem T. Úběžník ${}^nU$ normály n je úběžníkem všech normál roviny τ, pomocí něho najdeme hlavní úběžník ${}^\tau U$ roviny τ, kterým prochází úběžnice ${}^\tau u$ této roviny. Narýsujeme úběžnici ${}^\tau u$ a stopu n^τroviny τ. Tečná rovina τ je zde určena svou stopou a úběžnicí.

Úloha 5.3

V lineární perspektivě sestrojte kulovou plochu κ, která je daná středem O a dotýká se roviny ρ. Rovina ρ je určena svou stopou a úběžnicí.



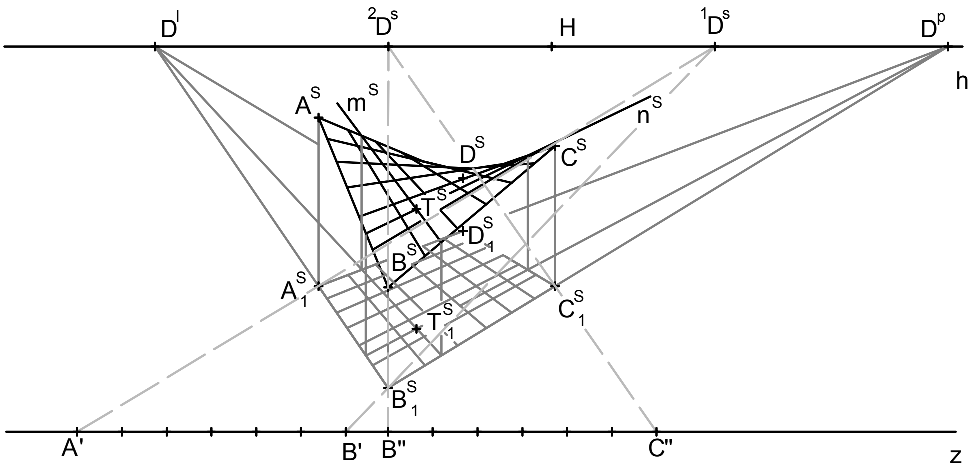
Obrázek 5.3

Řešení

Sestrojíme přímku n kolmou k rovině ρ a procházející středem O kulové plochy κ, najdeme průsečík P přímky n s rovinou ρ. Získáme poloměr kulové plochy jako vzdálenost bodů P, O. Nejdříve určíme úběžník ${}^nU$ všech normál roviny ρ. Bodem O vedeme libovolnou přímku a určenou jejím stopníkem N^a a uběžníkem ${}^aU$. Pomocí přímky a najdeme stopník N^n přímky n. Dále určíme průsečík P přímky n s rovinou ρ. Přímkou n proložíme libovolnou rovinu α, hledaný bod P je průsečíkem přímky n a průsečnice r rovin ρ a α. Najdeme ještě pravoúhlý průmět P_1 bodu P do základní roviny. Velikost úsečky OP je poloměrem r kulové plochy κ. Protože úsečka OP leží na přímce n, která je v obecné poloze, najdeme její skutečnou velikost následujícím způsobem. Nejdříve pomocí dělícího bodu ${}^{n}D$ narýsujeme skutečnou velikost úsečky O_1P_1. Promítnutím z bodu ${}^{n_1}U$ získáme skutečné velikosti úseček O_1O a P_1P a následně pomocí skutečné velikosti lichoběžníku OPP_1O_1 získáme skutečnou velikost úsečky OP. Nyní máme kulovou plochu κ určenou jejím středem a poloměrem a můžeme narýsovat její zdánlivý obrys k^s stejným způsobem, jako jsme postupovali v úloze 5.1.

Úloha 5.4

V lineární perspektivě zobrazte část hyperbolického paraboloidu, který je dán zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$. Sestrojte alespoň pět přímek každého regulu a tečnou rovinu τ v bodě T. Bod T je bodem plochy a je určen svým pravoúhlým průmětem T_1 do základní roviny.



Obrázek 5.4

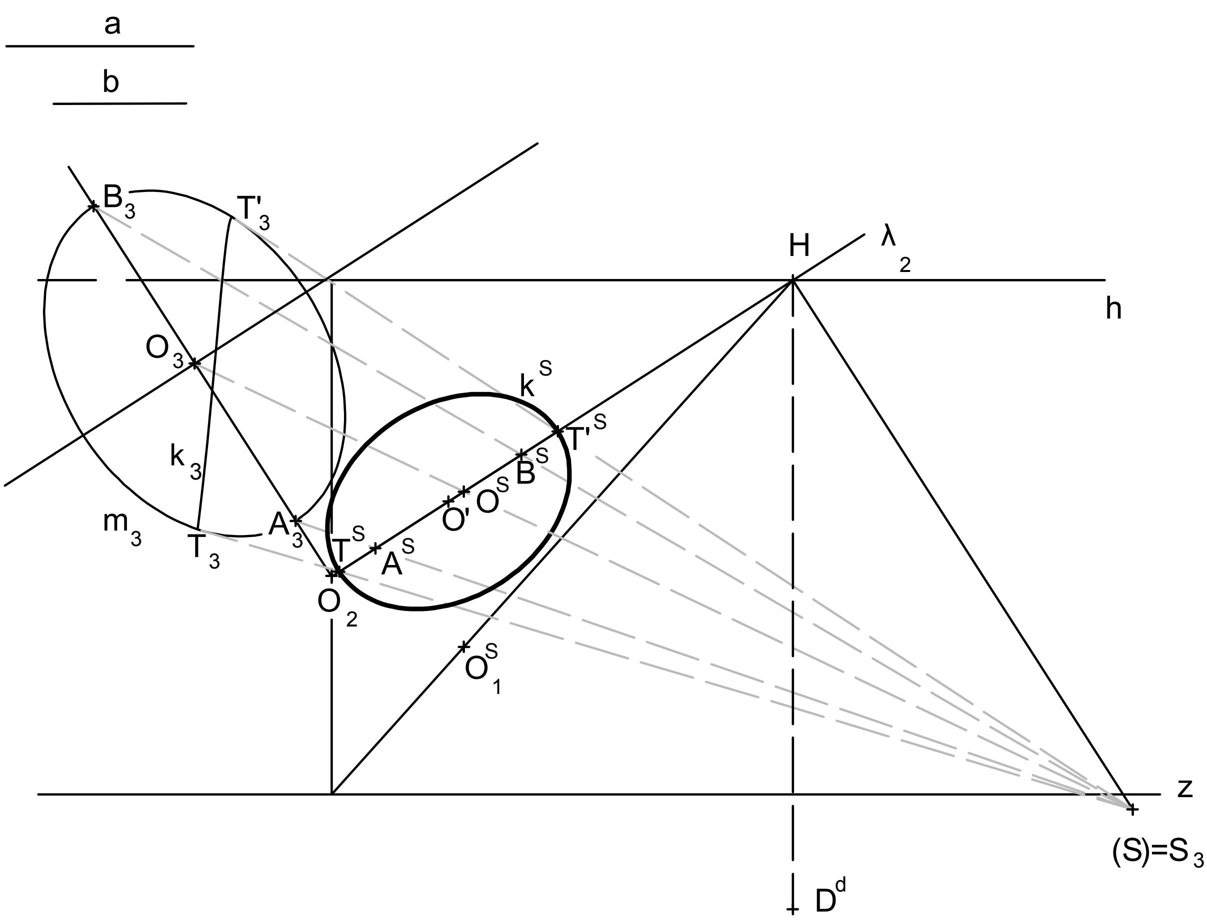
Řešení

Nejdříve sestrojíme pravoúhlý průmět hyperbolického paraboloidu do základní roviny. Ten pro větší přehlednost ohraničíme pravoúhlým průmětem $A_1B_1C_1D_1$ zborceného čtyřúhelníku $ABCD$ do základní roviny. Při zobrazování přímek prvního regulu sestrojíme nejdříve jejich pravoúhlé průměty do základní roviny. Strany A_1B_1 a C_1D_1 rozdělíme na šest stejných částí, protože mají tyto strany speciální polohu, je jejich úběžníkem levý distančník D^l a dělícím bodem bod ${}^1D^s$. Tím máme určenou polohu pěti rovnoběžných přímek, které rozdělují daný čtyřúhelník na šest stejných částí. Dále zobrazíme pravoúhlé průměty pěti přímek druhého regulu. Strany B_1C_1 a D_1A_1 rozdělíme na šest stejných částí, ty mají opět speciální polohu, jejich úběžníkem je pravý distančník D^p a dělícím bodembod ${}^2D^sl$. Opět máme určených pět rovnoběžných přímek rozdělujících čtyřúhelník na šest stejných částí. Nyní sestrojíme jejich perspektivy. Tak máme určeno pět přímek z obou regulů.

Tečná rovina τ v bodě T hyperbolického paraboloidu protíná tento paraboloid ve dvou přímkách m, n různých regulů. Nejprve opět sestrojíme pravoúhlé průměty m_1, n_1 přímek m, n do základní roviny. Přímka m_1 je rovnoběžná s pravoúhlými průměty přímek prvního regulu, přímka n_1 je rovnoběžná s pravoúhlými průměty přímek druhého regulu. Jejich společným bodem je právě pravoúhlý průmět T_1 bodu T. Nyní sestrojíme perspektivy přímek m, n a perspektivu bodu T. Tím je úloha vyřešena.

Úloha 5.5

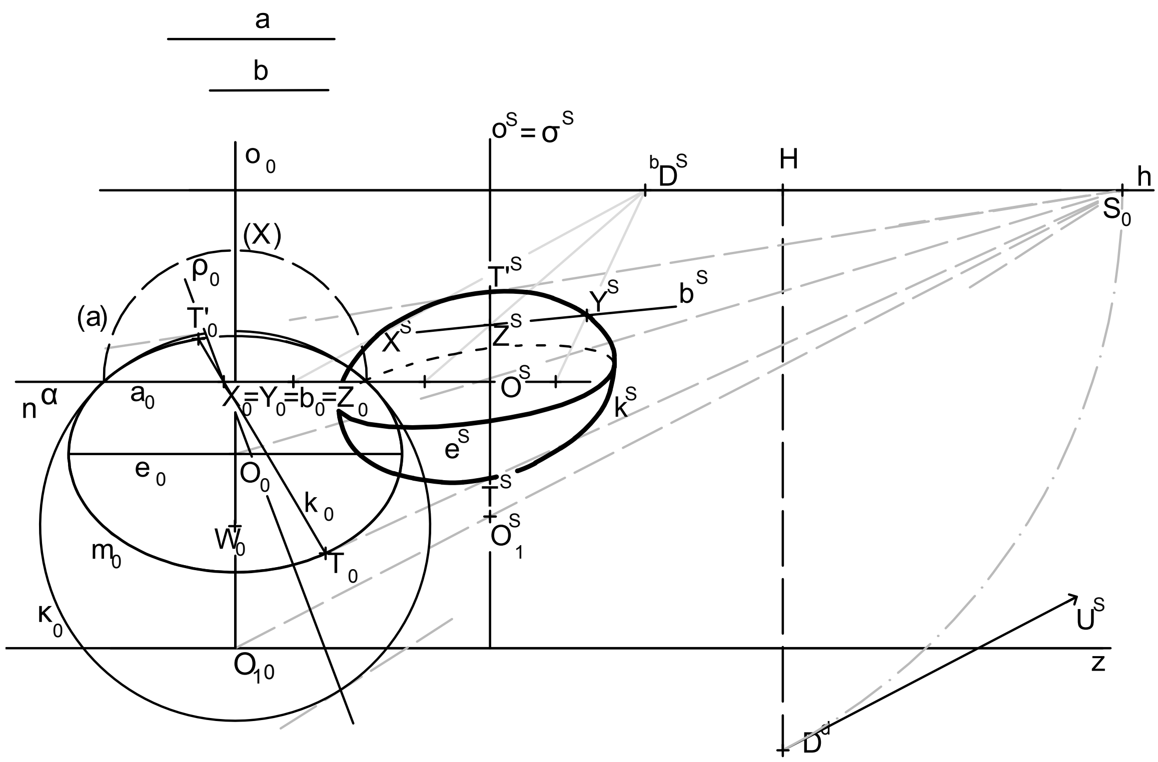
V lineární perspektivě zobrazte zploštělý rotační elipsoid s osou o kolmou k základní rovině π. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící elipsy e. Vedlejší osa tvořící elipsy je kolmá k půdorysně.



Obrázek 5.5a

Řešení

Z bodu S opíšeme zploštělému rotačnímu elipsoidu dotykovou kuželovou plochu Φ. Body S, O proložíme pomocnou rovinu λ, která je kolmá na průmětnu ν. Řez kuželové plochy Φ rovinou λ je pravoúhlý průmět elipsoidu do této roviny. Tato rovina je rovinou souměrnosti zploštěného rotačního elipsoidu i jemu opsané kuželové plochy Φ. Rotační elipsoid protíná v elipse m. Rovinu λ určíme pomocí její průsečnice s průmětnou ν. Sestrojíme pravoúhlý průmět O_2 bodu O, který využijeme při dalších konstrukcích. Budeme pravoúhle promítat do roviny λ a tu poté sklopíme do průmětny ν, sklopené průměty označíme indexem 3. V rovině λ leží průměr AB elipsy m, který je kolmý na π. Střed promítání se zobrazí jako bod S_3, střed elipsoidu jako bod O_3 a zdánlivý obrys elipsoidu v rovině λ jako elipsa m_3. Vzdálenost hlavního bodu H od bodu S_3 je stejná jako $|HS|$, tedy distance d. Obrysem zploštělého rotačního elipsoidu v lineární perspektivě je elipsa. Promítneme-li z bodu S_3 do λ_2 body A_3, B_3, získáme ohniska A^s, B^s elipsy k^s. Vrcholy T^s, T'^s elipsy k^s získáme pomocí tečen sestrojených z bodu S_3 k elipse m_3, tyto tečny protínají λ_2 ve vrcholech T^s, T'^s. Elipsa k^s určující zdánlivý obrys zploštělého rotačního elipsoidu je tímto jednoznačně určena.



Obrázek 5.5b

Jiný způsob řešení

V této úloze sestrojíme obrys k^s zploštělého rotačního elipsoidu jiným způsobem a to pomocí osvětlení. Střed osvětlení ztotožníme se středem promítání S. Budeme sestrojovat mez k vlastního stínu zploštělého rotačního elipsoidu z bodu S, která je skutečným obrysem zploštělého rotačního elipsoidu a následně mez k^s stínu vrženého do průmětny, která je zdánlivým obrysem elipsoidu (tedy středovým průmětem meze stínu vlastního). Sestrojíme pomocnou rovinu σ, která je kolmá k základní rovině π a prochází body S, O. Rovina σ je rovinou souměrnosti meze vlastního stínu k. Budeme pravoúhle promítat do roviny σ a tu poté otočíme kolem její stopy do průmětny ν. Otočené průměty označíme indexem 0.

Nejdříve v otočení sestrojíme střed promítání S_0 a osu o_0 elipsoidu. Osa o elipsoidu je kolmá k základní rovině π, otočíme ji například pomocí bodu O_1 kterým prochází. Jeho obraz O_1^s leží v základní rovině π, proto jeho otočený průmět leží na základnici z. V otočení sestrojíme střed zploštělého rotačního elipsoidu a následně obraz m_0 světelného meridiánu m.

Nyní přejdeme ke konstrukci bodů meze vlastního stínu. Na obecných rovnoběžkách využíváme kulovou metodu.1 Zvolíme libovolnou rovinu α, která je rovnoběžná se základní rovinou π a elipsoid protíná v rovnoběžce a. Podél tého rovnoběžky vepíšeme elipsoidu kulovou plochu κ se středem v bodě W. Sestrojíme rovinu ρ meze vlastního stínu kulové plochy κ, ta je polárně sdružená se středem promítání S vzhledem ke kulové ploše κ. Průsečnici roviny ρ s rovinou α označíme b. Průsečíky X, Y přímky b s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu elipsoidu. Otočený středový průmět ρ_0 do roviny σ roviny ρ je polárou bodu S_0 vzhledem ke κ_0 (κ_0 je řez kulové plochy κ rovinou σ). Průsečnice b je kolmá k rovině σ, b_0 se tedy zobrazí jako bod, který splývá s body X_0, Y_0.

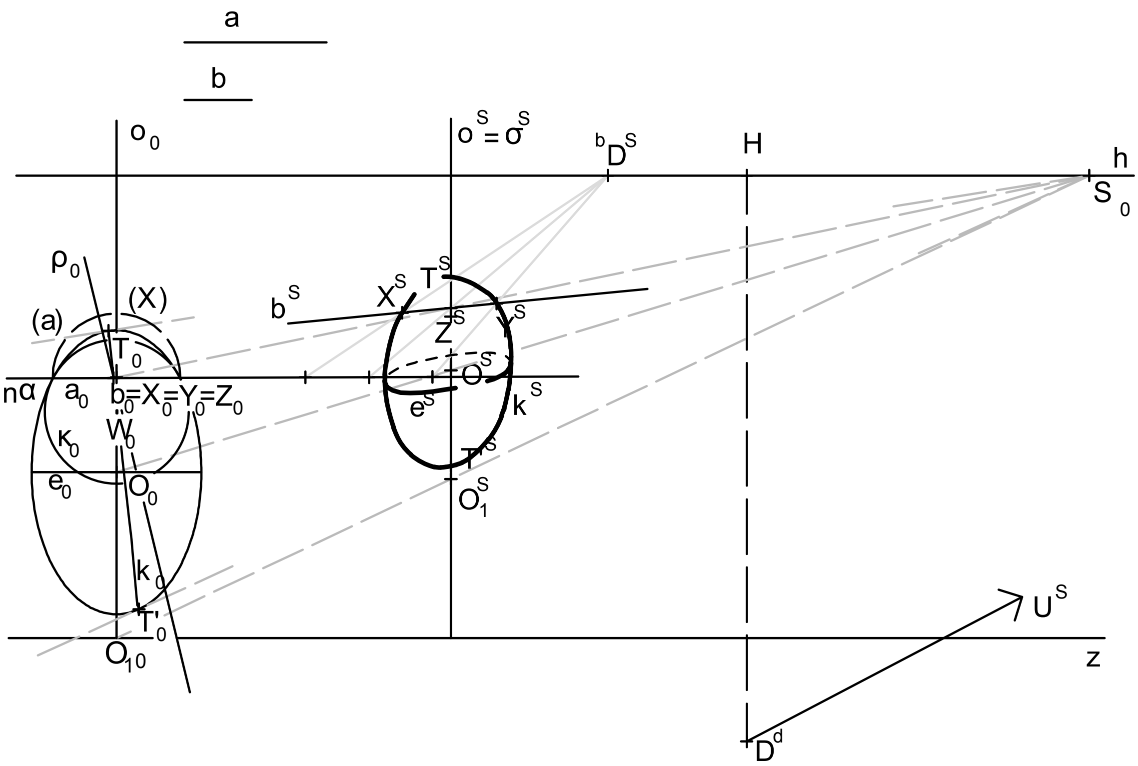
Nyní určíme středový průmět b^s průsečnice b. Průsečík přímky b a roviny σ označíme Z. Je zřejmé, že jeho otočený průmět Z_0 splývá s body X_0, Y_0, b_0. Protože bod Z leží v rovině σ, leží jeho středový průmět Z^s na středovém průmětu σ^s roviny σ. Přímka b je kolmá na rovinu σ, proto její středový průmět b^s prochází úběžníkem U^s všech kolmic k rovině σ (zde leží mimo nákresnu). Nyní na přímce b^s sestrojíme středové průměty X^s, Y^s bodů meze vlastního stínu. Protože je σ rovinou souměrnosti meze vlastního stínu, platí $|XZ| = |Z_0(X)| = |YZ|$. Kde bod (X) leží na sklopené rovnoběžce a do nárysny ν. Z dělícího bodu ${}^bD^s$ známým postupem naneseme tyto velikosti na přímku b^s a získáme tak body X^s, Y^s. Takto sestrojíme dostatečný počet bodů.

Ke světelnému meridiánu m sestrojíme tečny z bodu S. Ty se dotýkají světelného meridiánu m v bodech meze vlastního stínu T, T' a jejich středové průměty T^s, T'^s patří zdánlivému obrysu elipsoidu. Pro názornost sestrojíme ještě obraz e^s libovolné rovnoběžky, zde je sestrojen obraz rovníku a to již zmíněnou metodou konstrukce kružnice ležící ve vodorovné rovině. Nakonec bodově zkonstruujeme zdánlivý obrys k^s zploštělého rotačního elipsoidu.

1 *Juklová, L.*: Rotační plochy. skriptum UP, 2012. strana 32

Úloha 5.6

V lineární perspektivě zobrazte protáhlý rotační elipsoid s osou o kolmou k základní rovině. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící elipsy e. Hlavní osa tvořící elipsy je kolmá k půdorysně.



Obrázek 5.6

Řešení

V této úloze sestrojíme obrys k^s protáhlého rotačního elipsoidu opět pomocí osvětlení. Střed osvětlení ztotožníme se středem promítání S. Budeme sestrojovat mez k vlastního stínu protáhlého rotačního elipsoidu z bodu S, která je skutečným obrysem protáhlého rotačního elipsoidu a následně mez k^s stínu vrženého do průmětny, která je zdánlivým obrysem elipsoidu (tedy středovým průmětem meze stínu vlastního). Sestrojíme pomocnou rovinu σ, která je kolmá k základní rovině π a prochází body S, O. Rovina σ je rovinou souměrnosti meze vlastního stínu k. Budeme pravoúhle promítat do roviny σ a tu poté otočíme kolem její stopy do průmětny ν. Otočené průměty označíme indexem 0.

Nejdříve v otočení sestrojíme střed promítání S_0 a osu o_0 elipsoidu. Osa o protáhlého rotačního elipsoidu je kolmá k základní rovině π, otočíme ji například pomocí bodu O_1 kterým prochází. V otočení sestrojíme střed protáhlého rotačního elipsoidu a následně obraz m_0 světelného meridiánu m.

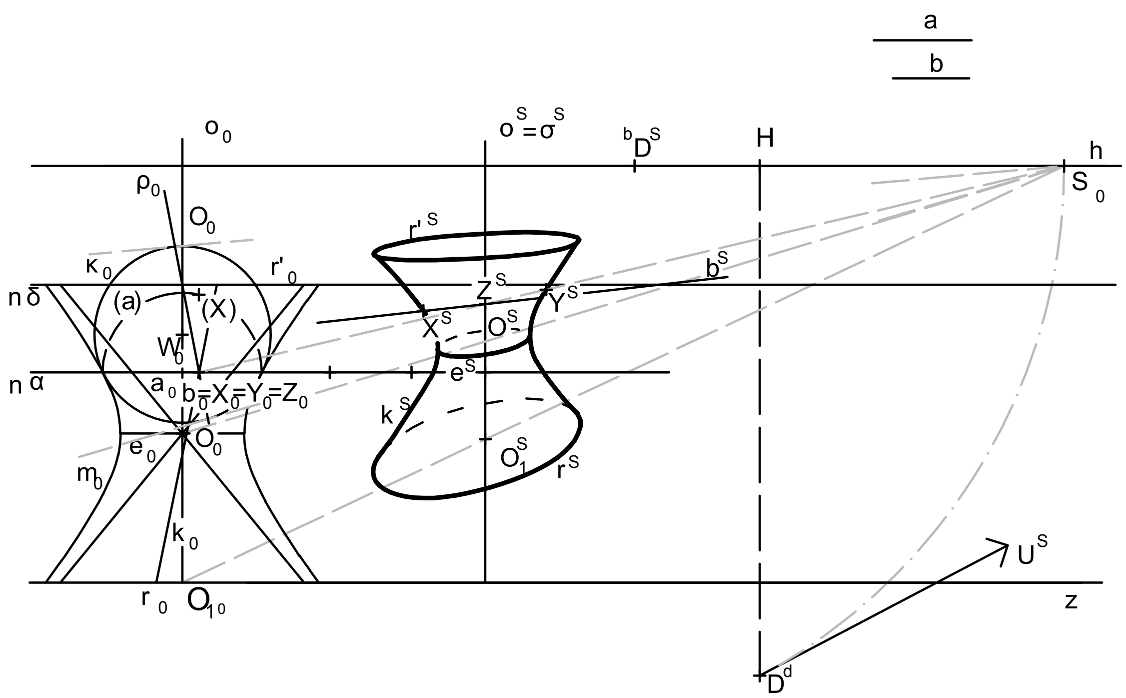
Nyní přejdeme ke konstrukci bodů meze vlastního stínu. Na obecných rovnoběžkách využíváme kulovou metodu. Zvolíme libovolnou rovinu α, která je rovnoběžná se základní rovinou π a elipsoid protíná v rovnoběžce a. Podél tého rovnoběžky vepíšeme elipsoidu kulovou plochu κ se středem v bodě W. Sestrojíme rovinu ρ meze vlastního stínu kulové plochy κ, ta je polárně sdružená se středem promítání S vzhledem ke kulové ploše κ. Průsečnici roviny ρ s rovinou α označíme b. Průsečíky X, Y přímky b s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu elipsoidu. Otočený středový průmět ρ_0 do roviny σ roviny ρ je polárou bodu S_0 vzhledem ke κ_0 (κ_0 je řez kulové plochy κ rovinou σ). Průsečnice b je kolmá k rovině σ, b_0 se tedy zobrazí jako bod, který splývá s body X_0, Y_0.

Dále určíme středový průmět b^s průsečnice b. Průsečík přímky b a roviny σ označíme Z. Je zřejmé, že jeho otočený průmět Z_0 splývá s body X_0, Y_0, b_0. Protože bod Z leží v rovině σ, leží jeho středový průmět Z^s na středovém průmětu σ^s roviny σ. Přímka b je kolmá na rovinu σ, proto její středový průmět b^s prochází úběžníkem U^s všech kolmic k rovině σ (zde leží mimo nákresnu). Nyní na přímce b^s sestrojíme středové průměty X^s, Y^s bodů meze vlastního stínu. Protože je σ rovinou souměrnosti meze vlastního stínu, platí $|XZ| = |Z_0(X)| = |YZ|$. Kde bod (X) leží na sklopené rovnoběžce a do nárysny ν. Z dělícího bodu ${}^bD^s$ známým postupem naneseme tyto velikosti na přímku b^s a získáme tak body X^s, Y^s. Takto sestrojíme dostatečný počet bodů.

Ke světelnému meridiánu m sestrojíme tečny z bodu S. Ty se dotýkají světelného meridiánu m v bodech meze vlastního stínu T, T' a jejich středové průměty T^s, T'^s patří zdánlivému obrysu elipsoidu. Pro názornost sestrojíme ještě obraz e^s libovolné rovnoběžky, zde je sestrojen obraz rovníku a to již zmíněnou metodou konstrukce kružnice ležící ve vodorovné rovině. Nakonec bodově zkonstruujeme zdánlivý obrys k^s protáhlého rotačního elipsoidu.

Úloha 5.7

V lineární perspektivě zobrazte část jednodílného rotačního hyperboloidu, který vznikne rotací hyperboly h kolem její vedlejší osy o kolmé k základní rovině. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící hyperboly h. Hyperboloid je omezen základní rovinou a rovinou δ rovnoběžnou s π.



Obrázek 5.7

Řešení

V této úloze sestrojíme obrys k^s jednodílného hyperboloidu opět s pomocí osvětlení. Střed osvětlení ztotožníme se středem promítání S. Budeme sestrojovat mez k vlastního stínu jednodílného rotačního hyperboloidu z bodu S, která je skutečným obrysem jednodílného rotačního hyperboloidu a následně mez k^s stínu vrženého do průmětny, která je zdánlivým obrysem hyperboloidu (tedy středovým průmětem meze stínu vlastního). Sestrojíme pomocnou rovinu σ, která je kolmá k základní rovině π a prochází body S, O. Rovina σ je rovinou souměrnosti meze vlastního stínu k. Budeme pravoúhle promítat do roviny σ a tu poté otočíme kolem její stopy do průmětny ν. Otočené průměty označíme indexem 0. Hraniční rovnoběžky r a r' jednodílného hyperboloidu leží v rovinách δ a π.

Nejdříve v otočení sestrojíme střed promítání S_0 a osu o_0 hyperboloidu. Osa o hyperboloidu je kolmá k základní rovině π, otočíme ji například pomocí bodu O_1 kterým prochází. Na základnici z leží otočený středový průmět r_0 do roviny σ rovnoběžy r.

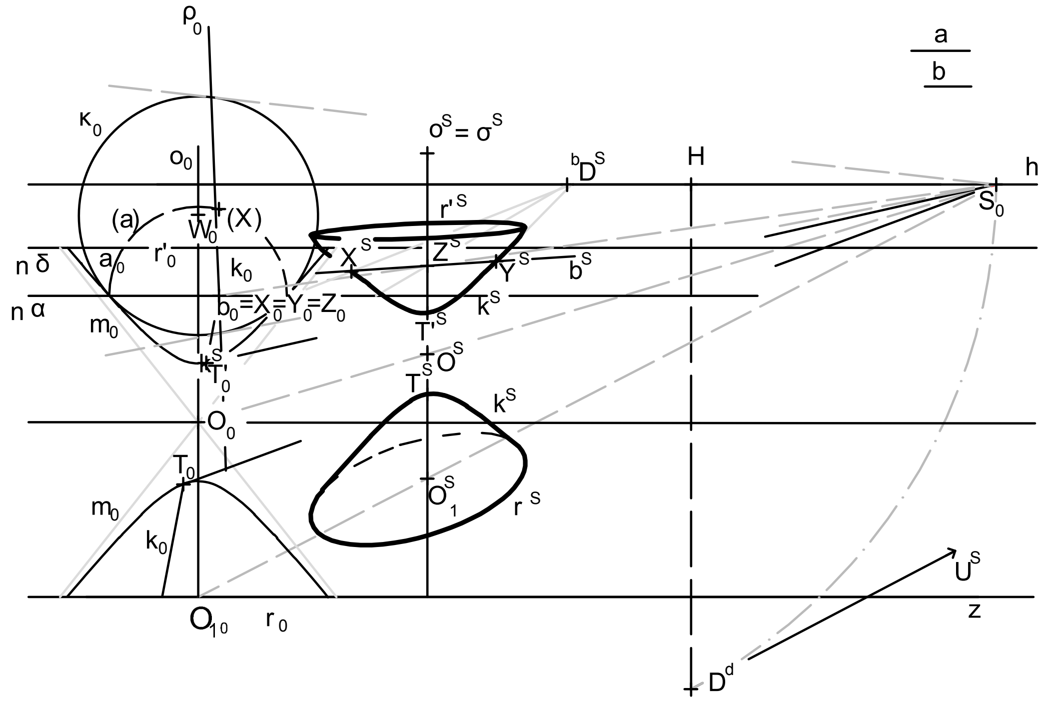
V otočení sestrojíme střed hyperboloidu a následně obraz m_0 světelného meridiánu m. Obrazy r^s a r'^s obou hraničních rovnoběžek a obraz e^s hrdelní kružnice sestrojíme pomocí již zmíněné konstrukce kružnice ležící ve vodorovné rovině.

Nyní přejdeme ke konstrukci bodů meze vlastního stínu. Na obecných rovnoběžkách opět využíváme kulovou metodu. Zvolíme libovolnou rovinu α, která je rovnoběžná se základní rovinou π a jednodílný hyperboloid protíná v rovnoběžce a. Podél tého rovnoběžky vepíšeme hyperboloidu kulovou plochu κ se středem v bodě W. Sestrojíme rovinu ρ meze vlastního stínu kulové plochy κ, ta je polárně sdružená se středem promítání S vzhledem ke kulové ploše κ. Průsečnici roviny ρ s rovinou α označíme b. Průsečíky X, Y přímky b s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu jednodílného hyperboloidu. Otočený středový průmět ρ_0 do roviny σ roviny ρ je polárou bodu S_0 vzhledem ke κ_0 (κ_0 je řez kulové plochy κ rovinou σ). Průsečnice b je kolmá k rovině σ, b_0 se tedy zobrazí jako bod, který splývá s body X_0, Y_0.

Nyní určíme středový průmět b^s průsečnice b. Průsečík přímky b a roviny σ označíme Z. Je zřejmé, že jeho otočený průmět Z_0 splývá s body X_0, Y_0, p_0. Protože bod Z leží v rovině σ, leží jeho středový průmět Z^s na středovém průmětu σ^s roviny σ. Přímka b je kolmá na rovinu σ, proto její středový průmět b^s prochází úběžníkem U^s všech kolmic k rovině σ (zde leží mimo nákresnu). Nyní na přímce b^s sestrojíme středové průměty X^s, Y^s bodů meze vlastního stínu. Protože je σ rovinou souměrnosti meze vlastního stínu, platí $|XZ| = |Z_0(X)| = |YZ|$. Kde bod (X) leží na sklopené rovnoběžce a do průmětny ν. Z dělícího bodu ${}^bD^s$ známým postupem naneseme tyto velikosti na přímku b^s a získáme tak body X^s, Y^s. Takto sestrojíme dostatečný počet bodů a sestrojíme zdánlivý obrys k^s jednodílného hyperboloidu.

Úloha 5.8

V lineární perspektivě zobrazte část dvojdílného rotačního hyperboloidu, který vznikne rotací hyperboly h s osou o kolmou k základní rovině. Hyperbola h rotuje kolem své hlavní osy o. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b tvořící hyperboly h. Hyperboloid je omezen základní rovinou a rovinou δ rovnoběžnou s π.



Obrázek 5.8

Řešení

V této úloze sestrojíme obrys k^s dvojdílného hyperboloidu s pomocí osvětlení. Střed osvětlení ztotožníme se středem promítání S. Budeme sestrojovat mez k vlastního stínu dvojdílného rotačního hyperboloidu z bodu S, která je skutečným obrysem dvojdílného rotačního hyperboloidu a následně mez k^s stínu vrženého do průmětny, která je zdánlivým obrysem hyperboloidu (tedy středovým průmětem meze stínu vlastního). Sestrojíme pomocnou rovinu σ, která je kolmá k základní rovině π a prochází body S, O. Rovina σ je rovinou souměrnosti meze vlastního stínu k. Budeme pravoúhle promítat do roviny σ a tu poté otočíme kolem její stopy do průmětny ν. Otočené průměty označíme indexem 0. Hraniční rovnoběžky r a r' dvojdílného hyperboloidu leží v rovinách δ a π.

Nejdříve v otočení sestrojíme střed promítání S_0 a osu o_0 hyperboloidu. Osa o hyperboloidu je kolmá k základní rovině π, otočíme ji například pomocí bodu R kterým prochází. Na základnici z leží také otočený středový průmět r_0 do roviny σ rovnoběžky r. V otočení sestrojíme střed hyperboloidu a následně obraz m_0 světelného meridiánu m.

Obrazy r^s a r'^s obou hraničních rovnoběžek sestrojíme pomocí již zmíněné konstrukce kružnice ležící ve vodorovné rovině.

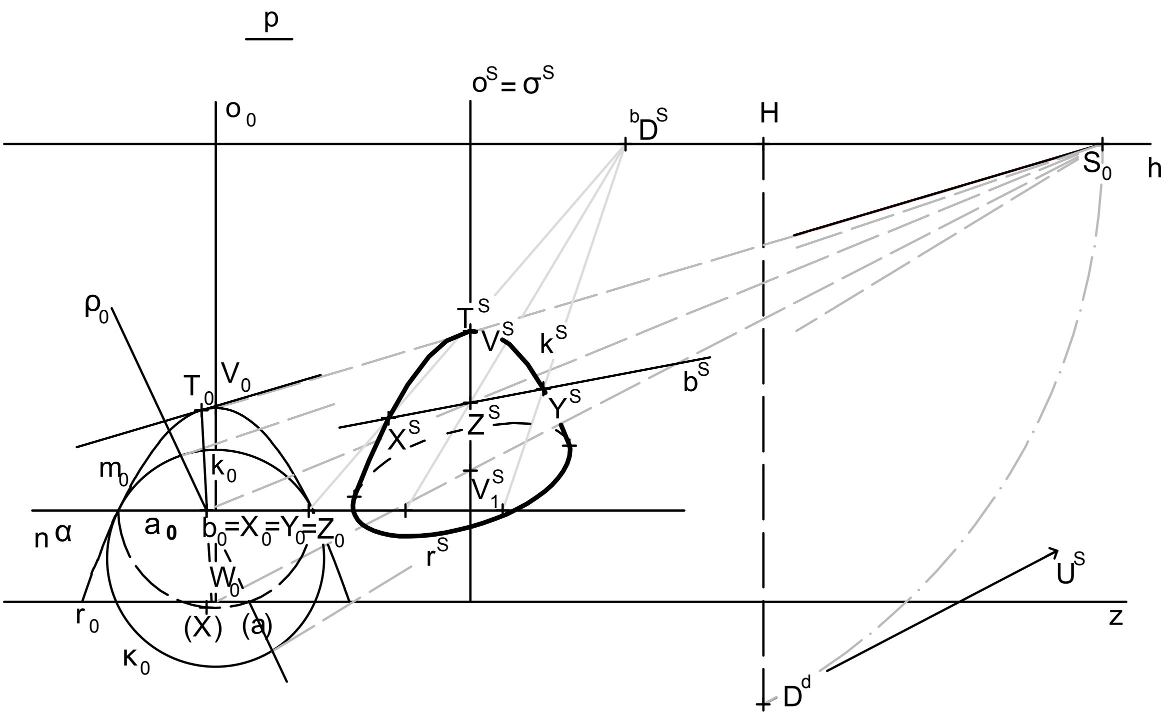
Ke světelnému meridiánu m sestrojíme tečny z bodu S. Ty se dotýkají světelného meridiánu m v bodech meze vlastního stínu T, T' a jejich středové průměty T^s, T'^s patří zdánlivému obrysu dvojdílného hyperboloidu.

Nyní přejdeme ke konstrukci bodů meze vlastního stínu. Na obecných rovnoběžkách opět využíváme kulovou metodu. Zvolíme libovolnou rovinu α, která je rovnoběžná se základní rovinou π a dvojdílný hyperboloid protíná v rovnoběžce a. Podél tého rovnoběžky vepíšeme hyperboloidu kulovou plochu κ se středem v bodě W. Sestrojíme rovinu ρ meze vlastního stínu kulové plochy κ, ta je polárně sdružená se středem promítání S vzhledem ke kulové ploše κ. Průsečnici roviny ρ s rovinou α označíme b. Průsečíky X, Y přímky b s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu jednodílného hyperboloidu. Otočený středový průmět ρ_0 do roviny σ roviny ρ je polárou bodu S_0 vzhledem ke κ_0 (κ_0 je řez kulové plochy κ rovinou σ). Průsečnice b je kolmá k rovině σ, b_0 se tedy zobrazí jako bod, který splývá s body X_0, Y_0.

Nyní určíme středový průmět b^s průsečnice b. Průsečík přímky b a roviny σ označíme Z. Je zřejmé, že jeho otočený průmět Z_0 splývá s body X_0, Y_0, p_0. Protože bod Z leží v rovině σ, leží jeho středový průmět Z^s na středovém průmětu σ^s roviny σ. Přímka b je kolmá na rovinu σ, proto její středový průmět b^s prochází úběžníkem U^s všech kolmic k rovině σ (zde leží mimo nákresnu). Nyní na přímce b^s sestrojíme středové průměty X^s, Y^s bodů meze vlastního stínu. Protože je σ rovinou souměrnosti meze vlastního stínu, platí $|XZ| = |Z_0(X)| = |YZ|$. Kde bod (X) leží na sklopené rovnoběžce a do průmětny ν. Z dělícího bodu ${}^bD^s$ známým postupem naneseme tyto velikosti na přímku b^s a získáme tak body X^s, Y^s. Takto sestrojíme dostatečný počet bodů a bodově sestrojíme zdánlivý obrys k^s dvojdílného hyperboloidu

Úloha 5.9

V lineární perspektivě zobrazte část rotačního paraboloidu, který vznikne rotací paraboly s osou o kolmou k základní rovině. Je dán vrchol V a parametr p tvořící paraboly. Paraboloid je omezen základní rovinou π.



Obrázek 5.9

Řešení

V této úloze opět sestrojíme obrys k^s rotačního paraboloidu s pomocí osvětlení. Střed osvětlení ztotožníme se středem promítání S.Budeme sestrojovat mez k vlastního stínu rotačního paraboloidu z bodu S, která je skutečným obrysem rotačního paraboloidu a následně mez k^s stínu vrženého do průmětny, která je zdánlivým obrysem paraboloidu (tedy středovým průmětem meze stínu vlastního). Sestrojíme pomocnou rovinu σ, která je kolmá k základní rovině π a prochází body S, V. Rovina σ je rovinou souměrnosti meze vlastního stínu k. Budeme pravoúhle promítat do roviny σ a tu poté otočíme kolem její stopy do průmětny ν. Otočené průměty označíme indexem 0. Hraniční rovnoběžka r rotačního paraboloidu leží v základní rovině.

Nejdříve v otočení sestrojíme střed promítání S_0 a osu o_0 paraboloidu. Osa o rotačního paraboloidu je kolmá k základní rovině ρ, otočíme ji například pomocí bodu V_1 kterým prochází. Na základnici z leží také otočený středový průmět r_0 do koviny σ rovnoběžky r. V otočení sestrojíme vrchol paraboloidu a následně obraz m_0 světelného meridiánu m. Obraz r^s hraniční rovnoběžky sestrojíme pomocí již zmíněné konstrukce kružnice která leží ve vodorovné rovině.

Ke světelnému meridiánu m sestrojíme tečnu z bodu S (druhá tečna zde není zobrazena, protože se rotačního paraboloidu dotýká v nevlastním bodě, byla by tedy rovnoběžná s osou paraboloidu). Ta se dotýká světelného meridiánu m v bodě meze vlastního stínu T a jeho středový průmět T^s patří obrysu rotačního paraboloidu.

Nyní přejdeme ke konstrukci bodů meze vlastního stínu. Na obecných rovnoběžkách opět využíváme kulovou metodu. Zvolíme libovolnou rovinu α, která je rovnoběžná se základní rovinou π a rotační paraboloid protíná v rovnoběžce a. Podél tého rovnoběžky vepíšeme paraboloidu kulovou plochu κ se středem v bodě W. Sestrojíme rovinu ρ meze vlastního stínu kulové plochy κ, ta je polárně sdružená se středem promítání S vzhledem ke kulové ploše κ. Průsečnici roviny ρ s rovinou α označíme b. Průsečíky X, Y přímky b s rovnoběžkou a jsou body meze vlastního stínu rotačního paraboloidu. Otočený středový průmět ρ_0 do roviny σ roviny ρ je polárou bodu S_0 vzhledem ke κ_0 (κ_0 je řez kulové plochy κ rovinou σ). Průsečnice b je kolmá k rovině σ, b_0 se tedy zobrazí jako bod, který splývá s body X_0, Y_0.

Nyní určíme středový průmět b^s průsečnice b. Průsečík přímky b a roviny σ označíme Z. Je zřejmé, že jeho otočený průmět Z_0 splývá s body X_0, Y_0, p_0. Protože bod Z leží v rovině σ, leží jeho středový průmět Z^s na středovém průmětu σ^s roviny σ. Přímka b je kolmá na rovinu σ, proto její středový průmět b^s prochází úběžníkem U^s všech kolmic k rovině σ (zde leží mimo nákresnu). Nyní na přímce b^s sestrojíme středové průměty X^s, Y^s bodů meze vlastního stínu. Protože je σ rovinou souměrnosti meze vlastního stínu, platí $|XZ| = |Z_0(X)| = |YZ|$. Kde bod (X) leží na sklopené rovnoběžce a do průmětny ν. Z dělícího bodu ${}^bD^s$ známým postupem naneseme tyto velikosti na přímku b^s a získáme tak body X^s, Y^s. Takto sestrojíme dostatečný počet bodů a bodově sestrojíme zdánlivý obrys k^s rotačního paraboloidu.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s kvadrikami ve středovém promítání a lineární perspektivě. Toho bylo dosaženo především díky vhodné volbě zadání jednotlivých úloh a vzorovému řešení těchto úloh.

Každá úloha obsahuje stručný popis řešení, které je zde vždy přehledně narýsováno. Teorie, kterou je nutné znát při řešení jednotlivých úloh, je uvedena v první části práce. U některých řešených úloh nejsou v obrázcích pro přehlednost zobrazeny některé již známé a běžně používané konstrukce. U většiny úloh bylo za účelem zjednodušení konstrukcí zvoleno speciálních poloh objektů. V příloze této práce jsou vložena narýsovaná zadání jednotlivých úloh. Protože je toto téma v literatuře probráno pouze částečně, mohla by tato práce sloužit jako studijní materiál, či inspirace pro podrobnější studium těchto zobrazovacích metod.

Tato práce navazuje na bakalářskou práci Osvětlení ve středovém promítání a lineární perspektivě. Společně tvoří ucelenou sbírku příkladů z teorie kvadrik a osvětlení těles. Obě práce obsahují předrýsovaná zadání, proto by mohly sloužit i jako rozšiřující materiál ke studiu a prohloubení znalostí o těchto zobrazovacích metodách.

Seznam použité literatury

[1] *Drábek, K., Harant, F., Setzer, O.*: Deskriptivní geometrie I. SNTL/ALFA, Praha, 1979.

[2] *Drábek, K., Harant, F., Setzer, O.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL/ALFA, Praha, 1979.

[3] *Jukl, M.*: Analytická geometrie kuželoseček a kvadrik. skriptum UP, 1999.

[4] *Juklová, L.*: Rotační plochy. skriptum UP, 2012.

[5] *Machala, F.*: Středové promítání a lineární perspektiva.skriptum UP, 1992.

[6] *Machala, F.*: Rotační plochy. skriptum UP, 1992.

[7] *Machala, F.*: Plochy technické praxe. skriptum UP, 1986.

[8] *Piska, R., Medek, V.*: Deskriptivní geometrie I. SNTL/SVTL, Praha, 1966.

[9] *Piska, R., Medek, V.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL/ALFA, Praha, 1972.

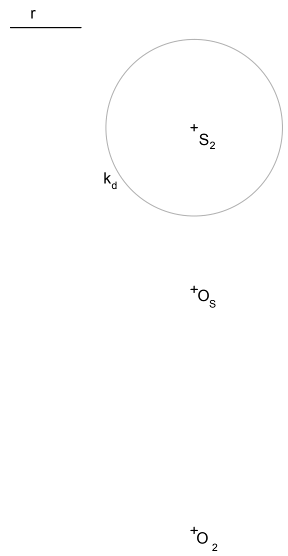
[10] *Vanžurová, A.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch. skriptum UP, 1996

[11] *Vinklářová, M.*: Osvětlení ve středovém promítání a lineární perspektivě. Bakalářská práce, 2012.

Přílohy

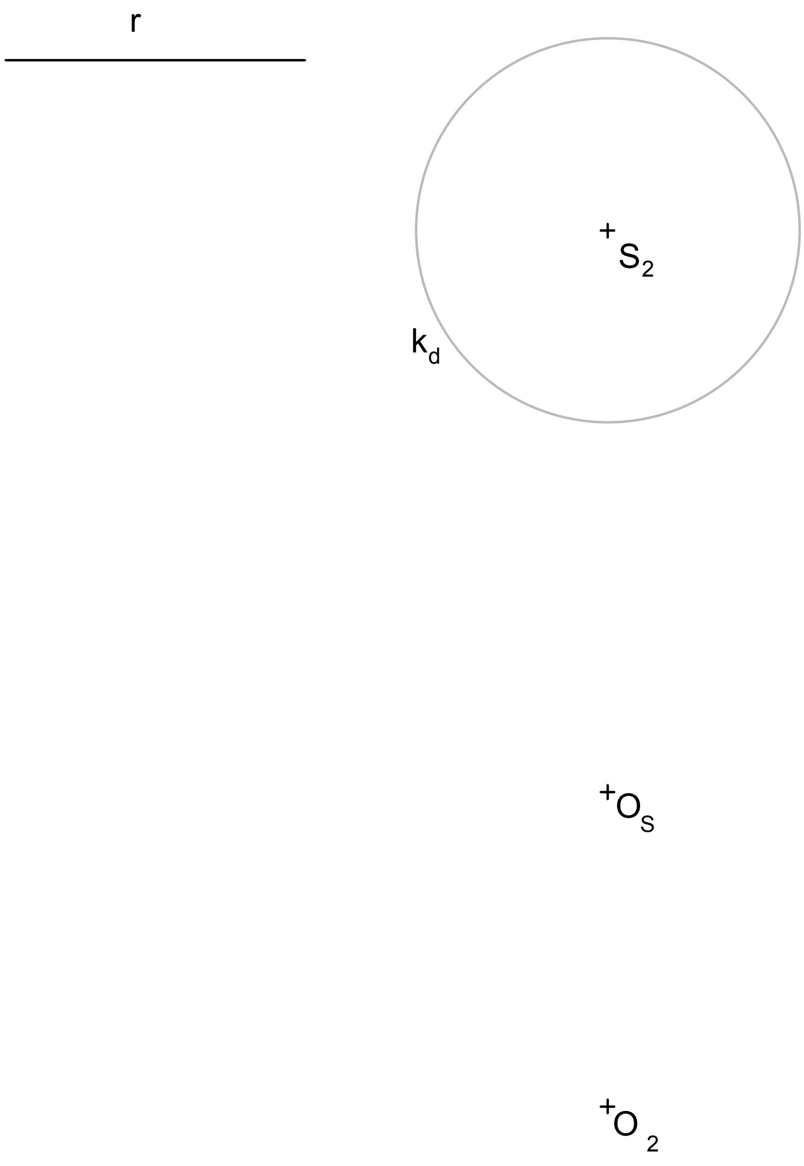
Úloha 4.1

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je-li dán její střed O a její poloměr r.



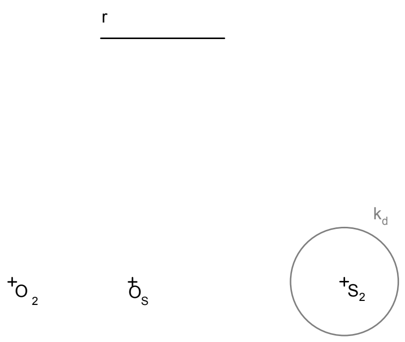
Úloha 4.2

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je-li dán její střed O a její poloměr r.



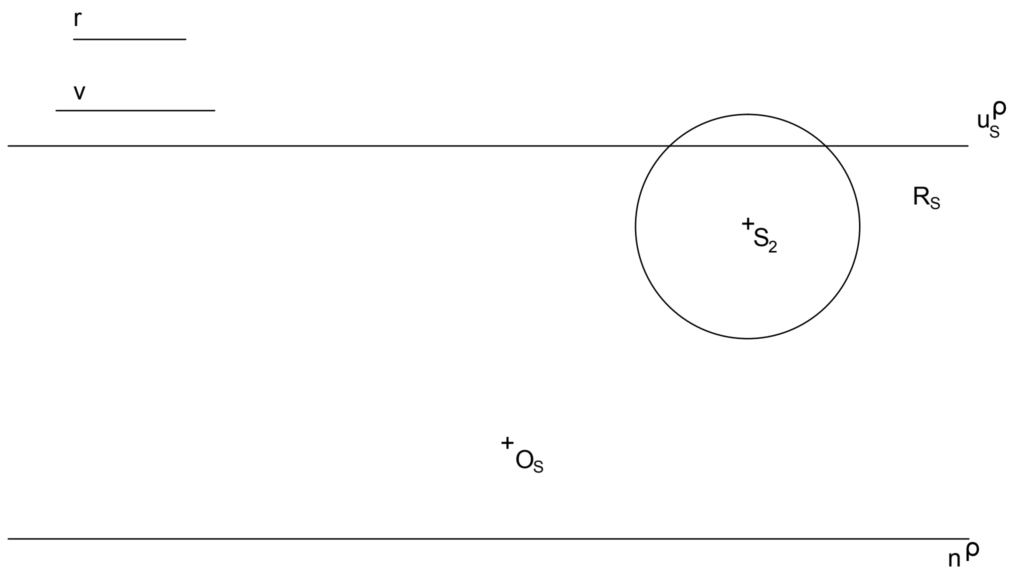
Úloha 4.3

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ , je-li dán její střed O a její poloměr r.



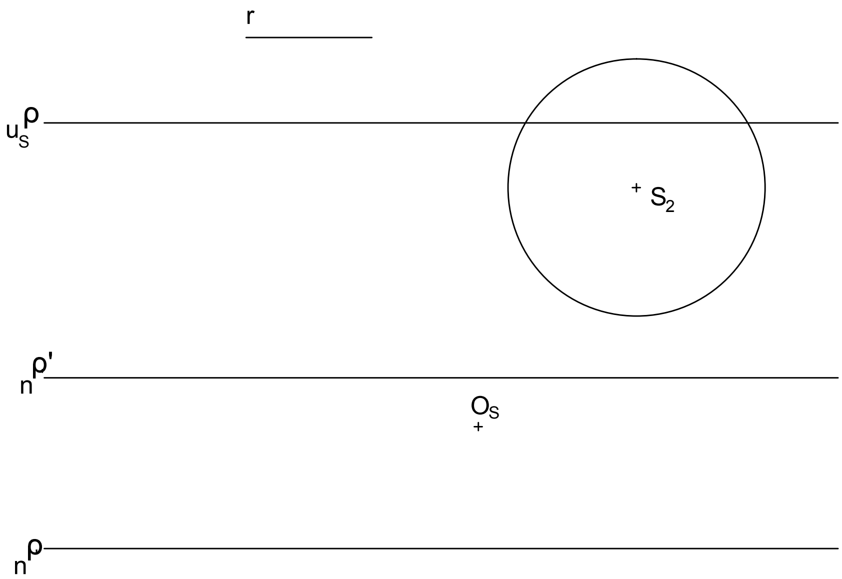
Úloha 4.4

Ve středovém promítání sestrojte rotační kužel s podstavou v rovině ρ daný středem O a poloměrem r, je dána výška kužele v. Sestrojte jeho vržený stín na rovinu ρ podstavy, rovnoběžné osvětlení je dáno úběžníkem R_s světelných paprsků.



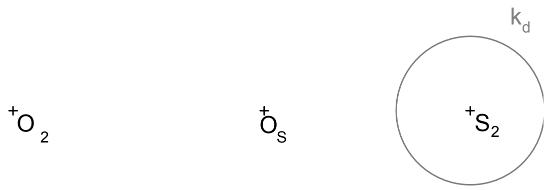
Úloha 4.5

Ve středovém promítání sestrojte rotační válec, je-li dán střed horní podstavy O' ležící v rovině ρ' a rovina ρ spodní podstavy.



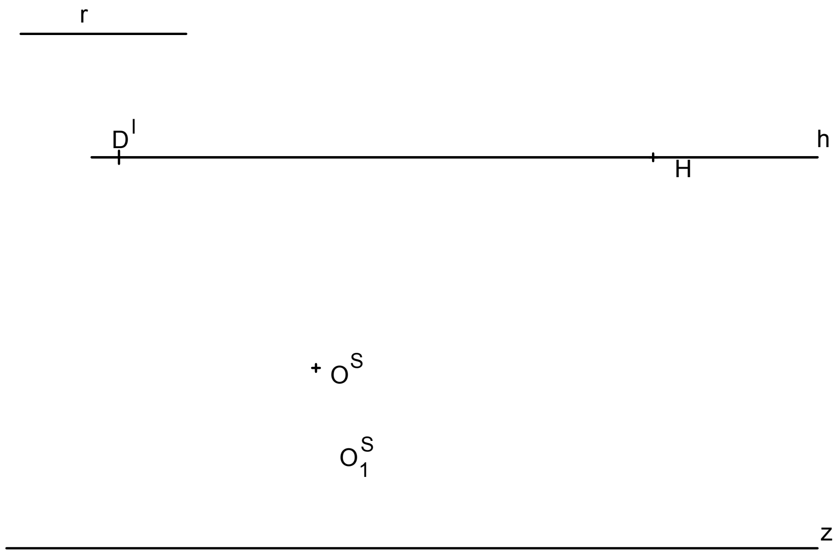
Úloha 4.6

Ve středovém promítání sestrojte kulovou plochu κ tak, aby jejím průmětem byla parabola. Je dán střed O kulové plochyκ.



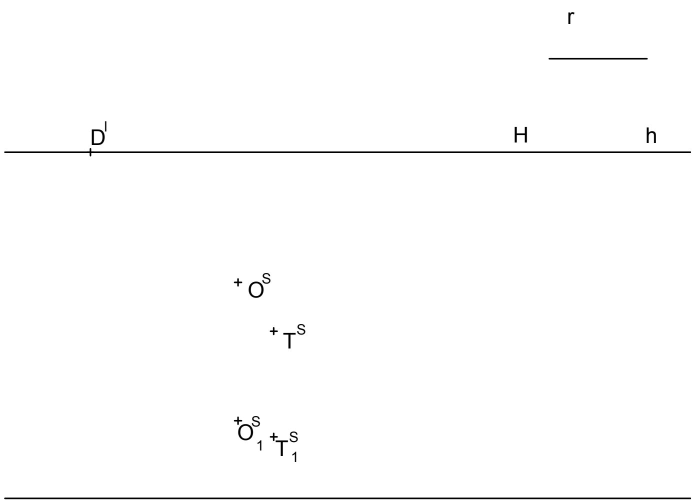
Úloha 5.1

V lineární perspektivě zobrazte kulovou plochu s poloměrem r a středem v bodě O.



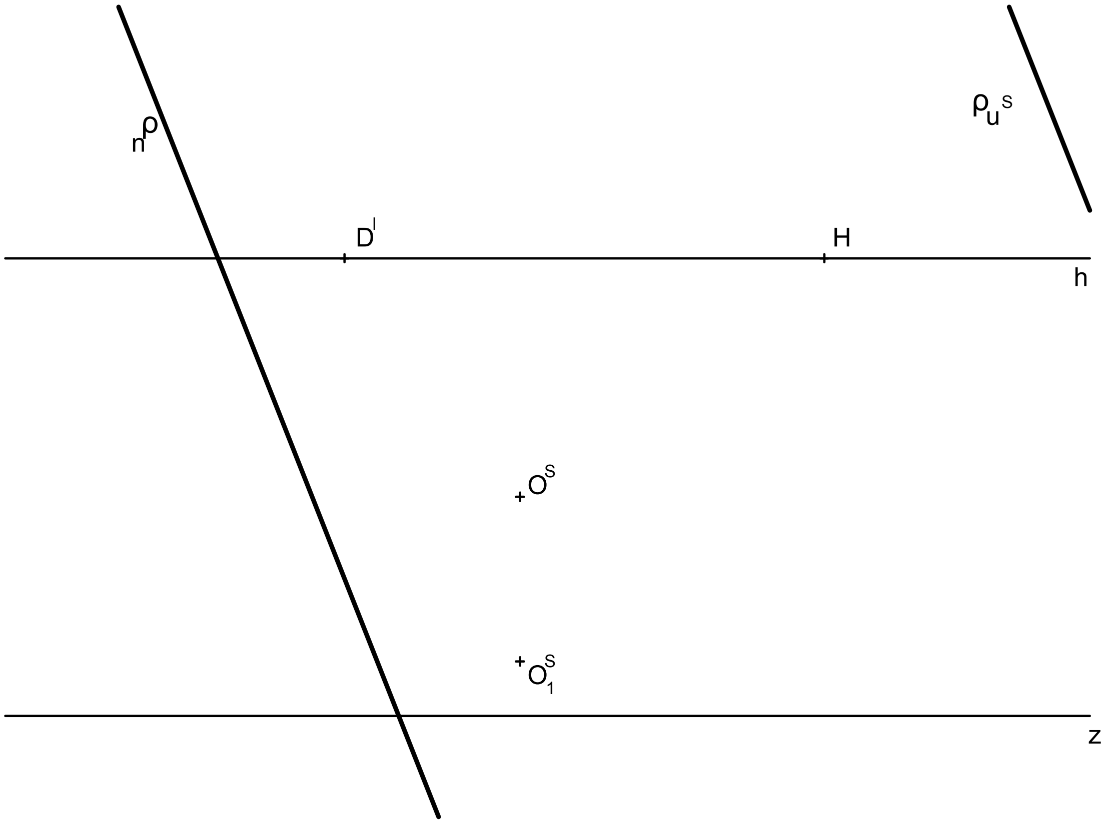
Úloha 5.2

V lineární perspektivě zobrazte kulovou plochu se středem v bodě O a poloměrem r. V bodě T sestrojte její normálu a tečnou rovinu.



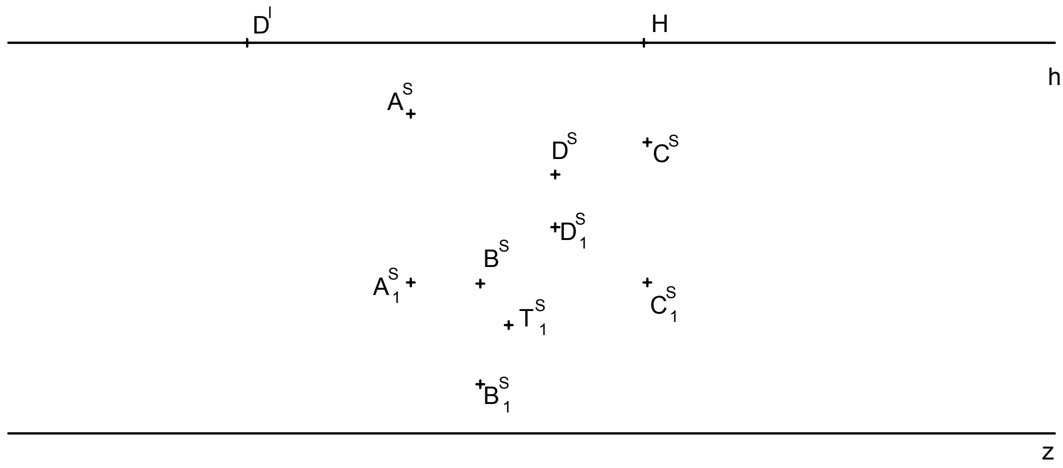
Úloha 5.3

V lineární perspektivě sestrojte kulovou plochu κ, která je daná středem O a dotýká se roviny ρ. Rovina ρ je určena svou stopou a úběžnicí.



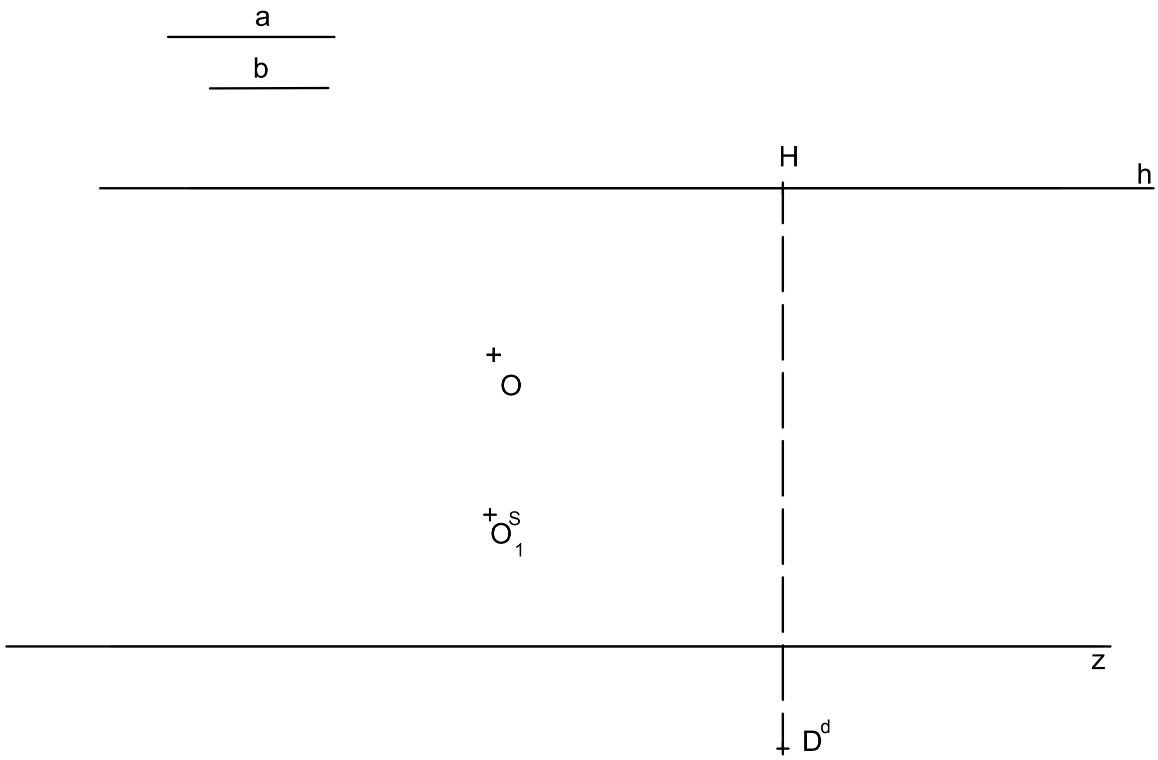
Úloha 5.4

V lineární perspektivě zobrazte část hyperbolického paraboloidu, který je dán zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$. Sestrojte alespoň pět přímek každého regulu a tečnou rovinu τ v bodě T. Bod T je bodem plochy a je určen svým pravoúhlým průmětem T_1 do základní roviny.



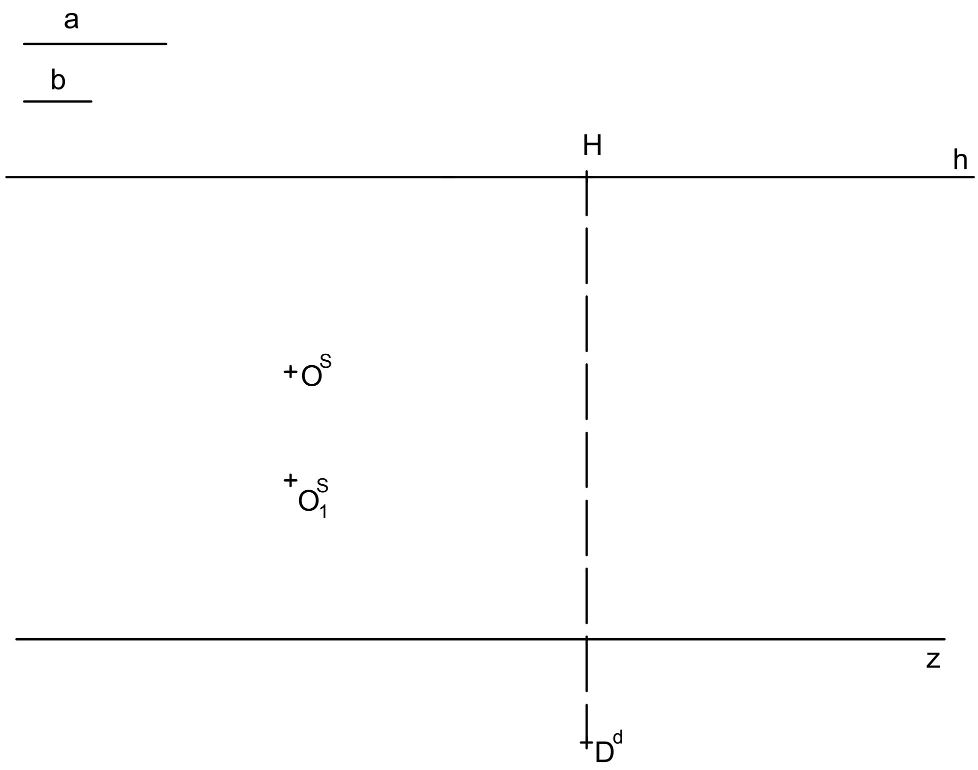
Úloha 5.5

V lineární perspektivě zobrazte zploštělý rotační elipsoid s osou o kolmou k základní rovině π. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící elipsy e. Vedlejší osa tvořící elipsy je kolmá k půdorysně.



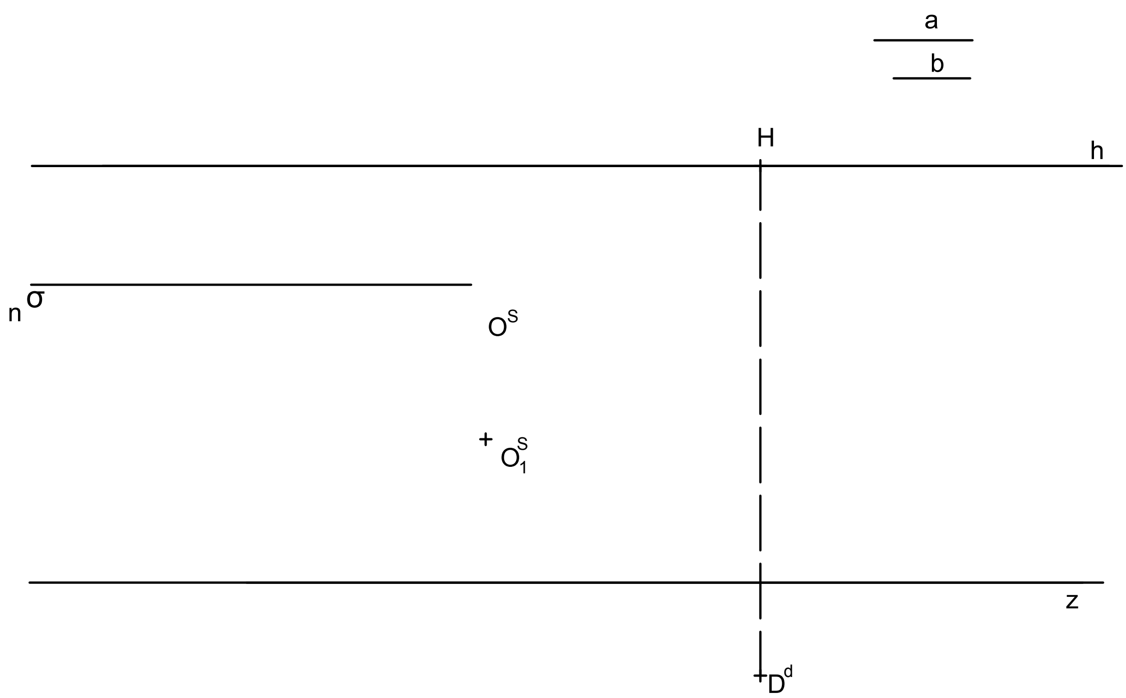
Úloha 5.6

V lineární perspektivě zobrazte protáhlý rotační elipsoid s osou o kolmou k základní rovině. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící elipsy e. Hlavní osa tvořící elipsy je kolmá k půdorysně.



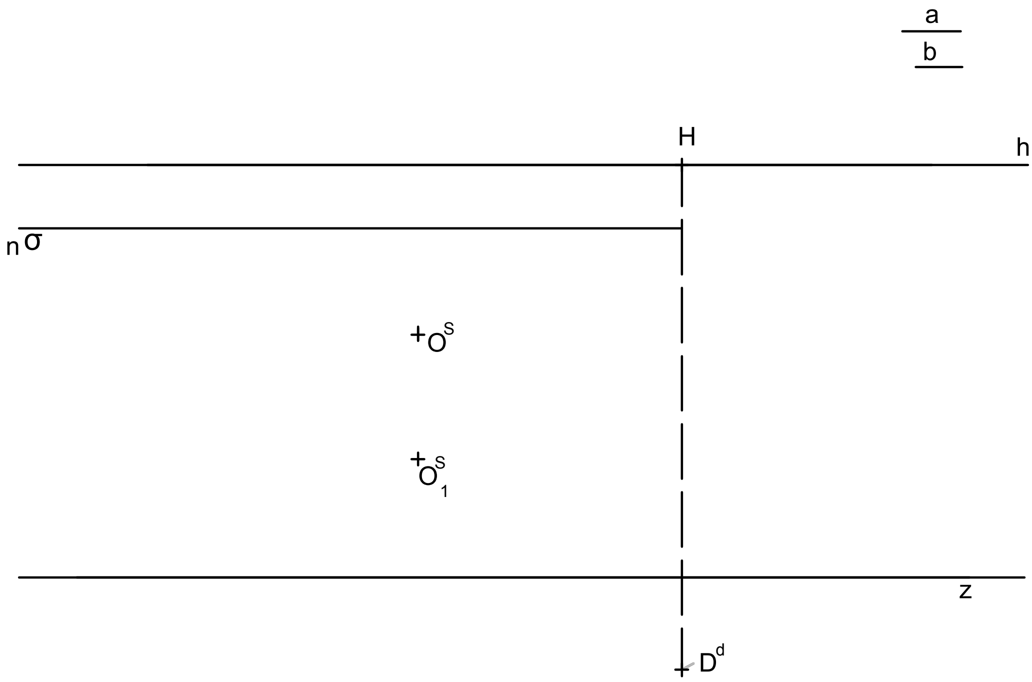
Úloha 5.7

V lineární perspektivě zobrazte část jednodílného rotačního hyperboloidu, který vznikne rotací hyperboly h kolem její vedlejší osy o kolmé k základní rovině. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b jeho tvořící hyperboly h. Hyperboloid je omezen základní rovinou a rovinou δ rovnoběžnou s π.



Úloha 5.8

V lineární perspektivě zobrazte část dvojdílného rotačního hyperboloidu, který vznikne rotací hyperboly h s osou o kolmou k základní rovině. Hyperbola h rotuje kolem své hlavní osy o. Je dán střed O, velikost hlavní poloosy a a velikost vedlejší poloosy b tvořící hyperboly h. Hyperboloid je omezen základní rovinou a rovinou δ rovnoběžnou s π.



Úloha 5.9

V lineární perspektivě zobrazte část rotačního paraboloidu, který vznikne rotací paraboly s osou o kolmou k základní rovině. Je dán vrchol V a parametr p tvořící paraboly. Paraboloid je omezen základní rovinou π.