UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDĚCKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

PLOCHY A OBLÁ TĚLESA V KOSOÚHLÉM PROMÍTÁNÍ DO PŮDORYSNY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce:
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.

Vypracovala:
Bc. Jana Vintrová
M-DG, 2. ročník

Rok odevzdání: 2014

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Marie Chodorové, Ph.D., a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Olomouci, dne 29. července 2014 ……………………………

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí diplomové práce Mgr. Marii Chodorové, Ph.D., za čas, který mi věnovala, za cenné rady a materiály, které vedly ke zkvalitnění obsahu této práce.

Děkuji také RNDr. Lence Juklové, Ph.D., za její pečlivě vedené přenášky a příklady, které pro mě byly jedním ze zdrojů informací při psaní této práce.

Obsah

Úvod

Vzhledem k tomu, že při zpracování mé bakalářské práce nebylo možné obsáhnout celé téma týkající se kosoúhlého promítání do půdorysny do jedné práce, využila jsem příležitosti v pokračování daného tématu v diplomové práci.

Obsahem této práce je ukázka řešených příkladů v kosoúhlém promítání do půdorysny. Především řešené příklady na oblá tělesa. Vycházíme z poznatků o kosoúhlém promítání do nárysny a ze základních poznatků o kosoúhlém promítání do půdorysny, včetně řešených základní příkladů a příkladů na hranatá tělesa, které jsou zpracovány v mé bakalářské práci.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol.

První nejobsáhlejší kapitola je věnována zobrazení oblých těles, řezům na oblých tělesech a v poslední podkapitole první kapitoly jsou řešeny průniky přímek s oblými tělesy.

Druhá kapitola je věnována průnikům těles. Nejprve jsou řešeny průniky dvou hranatých těles, poté průniky dvou oblých těles a na závěr je uveden jeden příklad průniku oblého tělesa s hranatým.

Ve třetí kapitole je řešeno osvětlení těles, především rovnoběžné osvětlení jak hranatých tak oblých těles. Jsou zde také vyřešeny dva příklady na středové osvětlení těles v daném kosoúhlém promítání do půdorysny.

V poslední čtvrté kapitole jsou řešeny dva příklady na rotační kvadriky. Jeden z nich je rotační paraboloid a druhý rotační elipsoid.

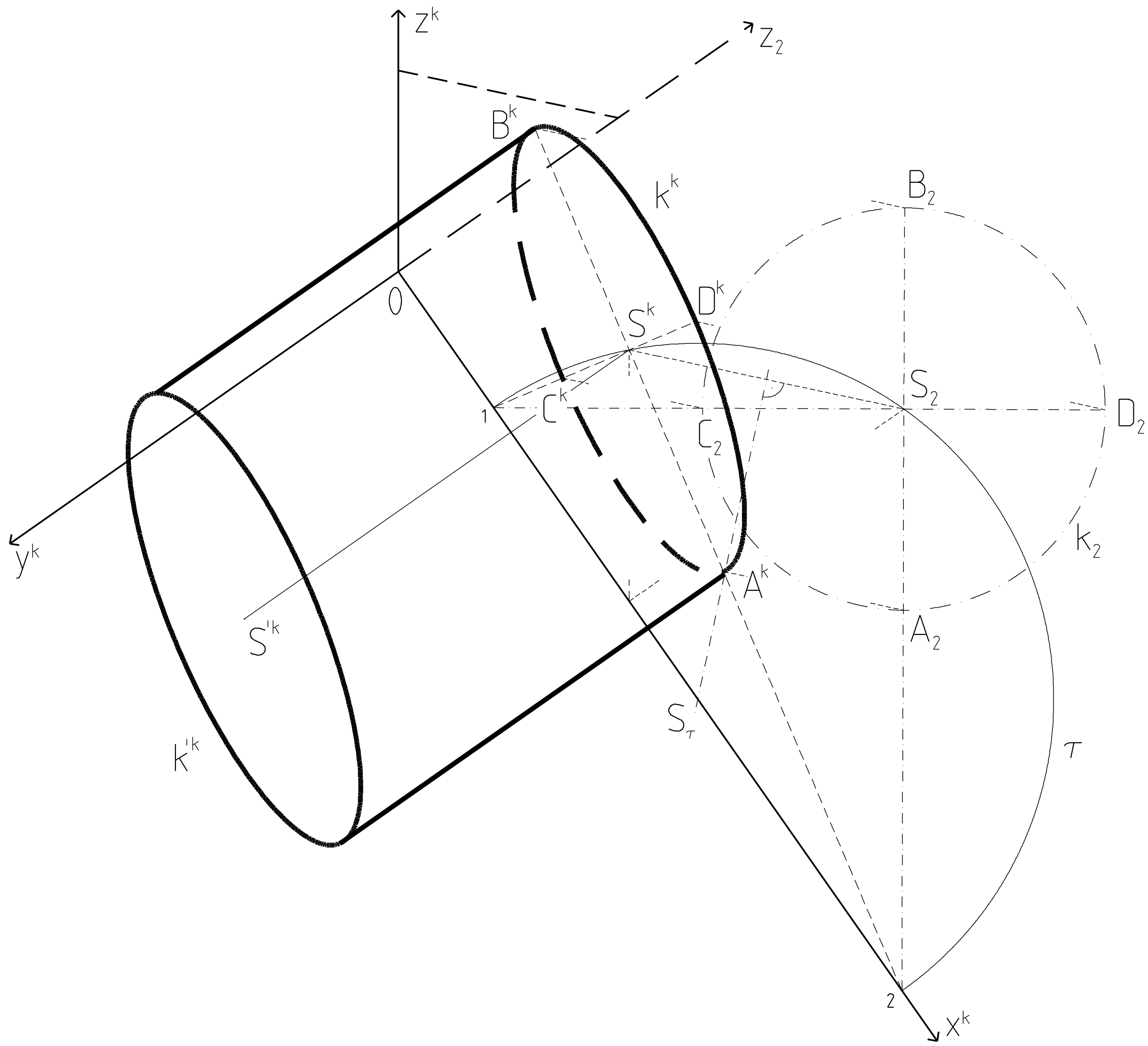
Obrázky jsou narýsovány v programu QCad. Diplomová práce je sepsána v aplikaci Microsoft Word.

1. Oblá tělesa

1.1. Zobrazení oblých těles

Příklad 1.1.1.

V kosoúhlém promítání $(145°, \frac{3}{4})$ do roviny π zobrazte rotační válec výšky $v = 7$, jehož podstava o středu $S[6; 0; 5]$ a poloměru $r = 3$ leží v rovině ν.

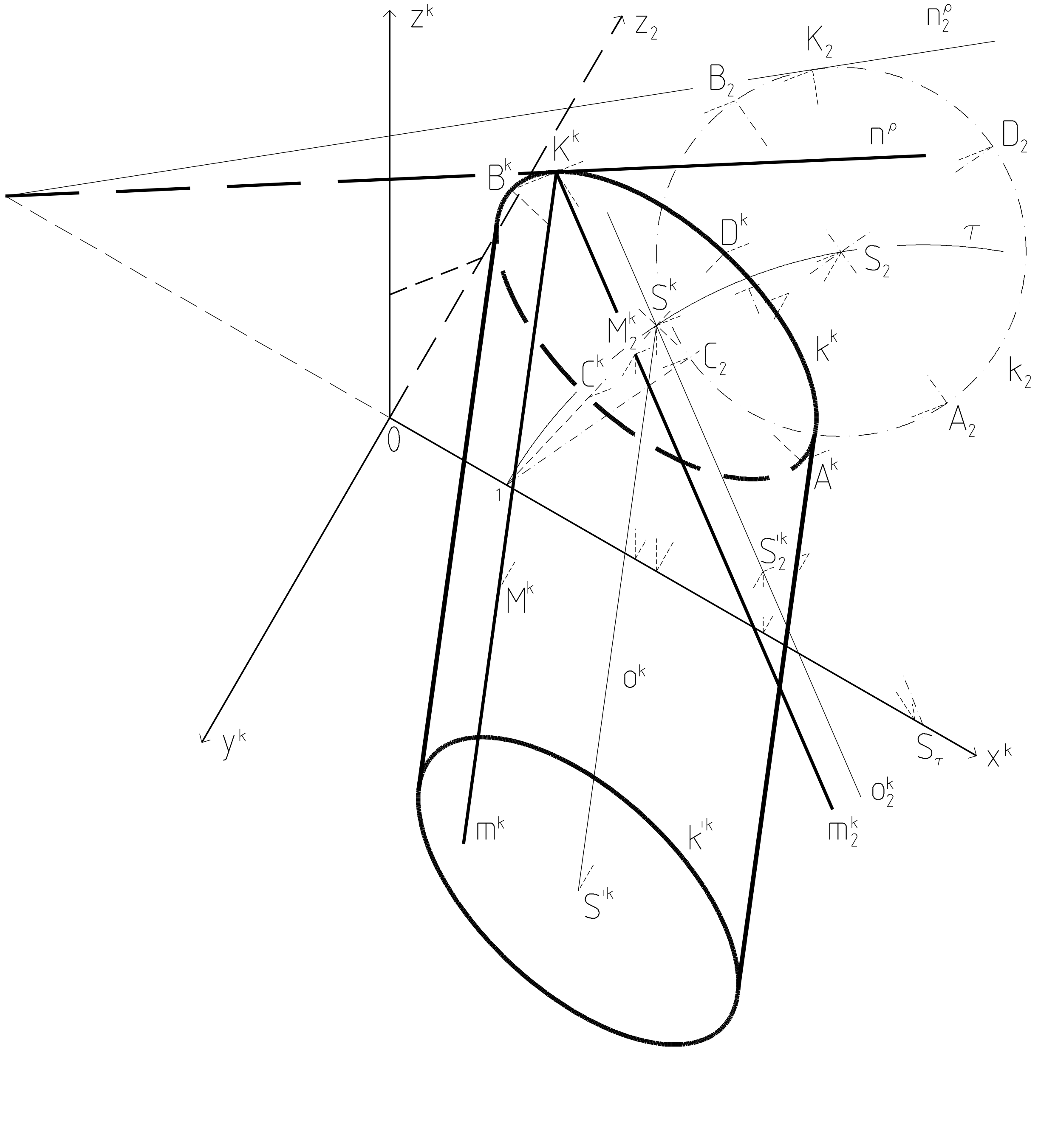


Řešení:

Nejprve sestrojíme v přiřazeném Mongeově promítání nárys k_2 podstavné kružnice k o středu S a poloměru r. Kosoúhlým obrazem kružnice k je elipsa k^k o středu S^k, která je obrazem kružnice k_2 v afinitě s osou x a směrem odpovídajícímu směru kosoúhlého promítání ($q = \frac{3}{4}$). Kolmým průměrům kružnice odpovídají v afinitě sdružené průměry afinní elipsy. My však můžeme osy elipsy k^k sestrojit přímo pomocí následující konstrukce. V kružnici k_2 potřebujeme najít dvojici kolmých sdružených průměrů A_2B_2 a C_2D_2, kterým v afinitě odpovídá dvojice k sobě sdružených průměrů A^kB^k a C^kD^k elipsy k^k. Sestrojíme proto osu úsečky S_2S^k a určíme její průsečík S_τ s osou x. Kružnice τ o středu S_τ, procházející body S_2, S^k, protíná osu x v bodech $1, 2$. Těmito body prochází podle Thaletovy věty dvojice kolmých přímek $1S_2, 2S_2$ a $1S^k, 2S^k$. Průsečíky přímek $2S_2$ a $1S_2$ s kružnicí k_2 jsou body A_2, B_2 a C_2, D_2, jejich afinní obrazy A^k, B^k a C^k, D^k, ležící na přímkách $2S^k$ a $1S^k$ jsou hlavními a vedlejšími vrcholy elipsy k^k. Kosoúhlým obrazem horní podstavy k' válce je elipsa k'^k shodná s elipsou k^k posunutá o výšku v. Obrys válce tvoří oblouky elips k^k a k'^k a strany válce ležící na společných tečnách těchto elips.

Příklad 1.1.2.

V kosoúhlém promítání $(120°, \frac{2}{3})$ do roviny π zobrazte kruhový kosý válec s podstavou v ν, je-li dána osa válce $o = SS'$, $S[5; 0; 6], S'[7; 6; 1{,}5]$, a poloměr $r = 3$. Zobrazte v bodě $M[4{,}6; ? ; 5]$ tečnou rovinu.



Řešení:

Nejprve sestrojíme podstavnou kružnici k válce. Kosoúhlým obrazem kružnice k je elipsa k^k o středu S^k, která je obrazem kružnice k_2 v afinitě s osou x a směrem odpovídajícímu směru kosoúhlého promítání. Elipsu k^k sestrojíme stejným způsobem jako v Příkladu 1.1.1.

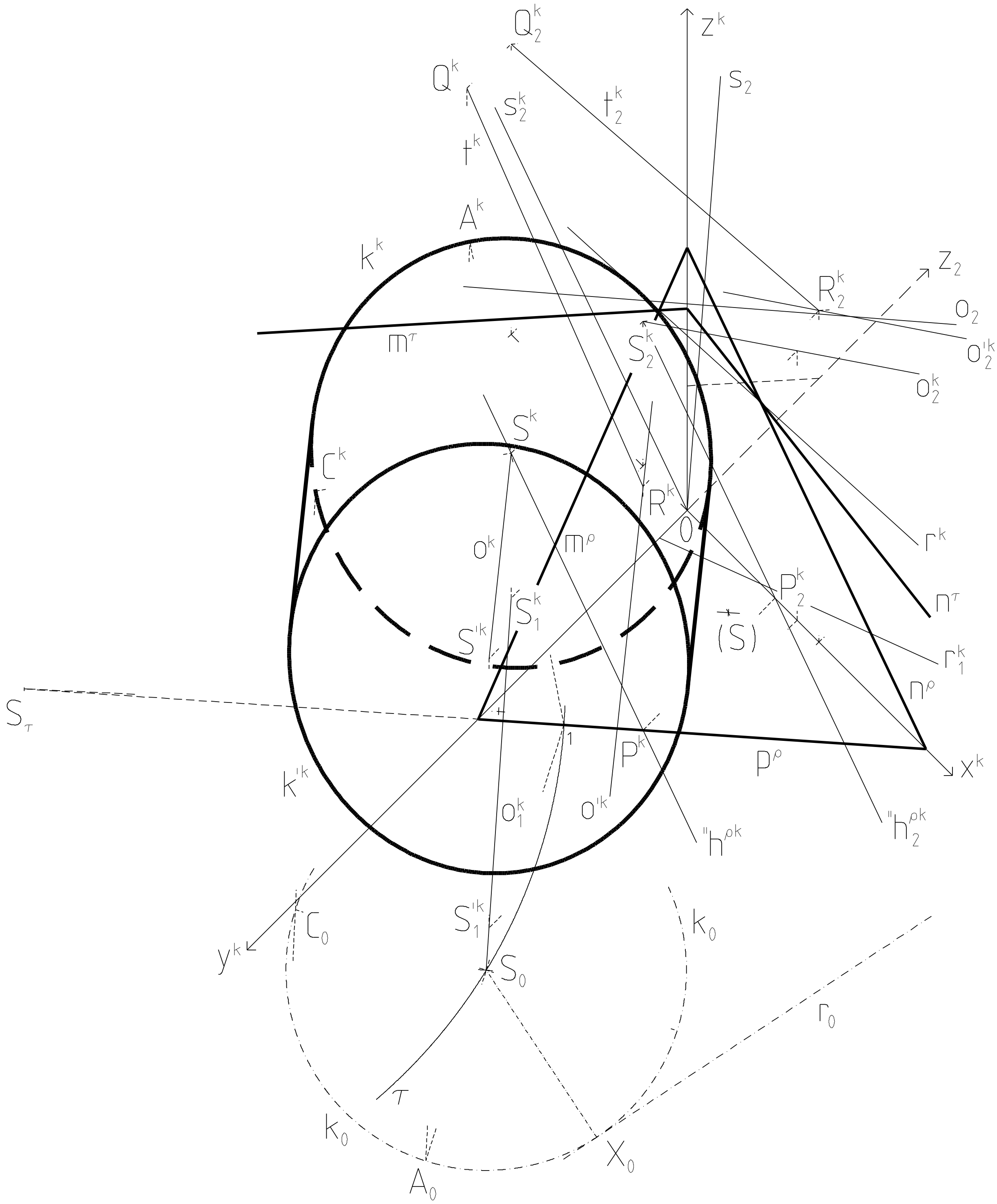
Kosoúhlým průmětem horní podstavy válce je elipsa k'^k o středu S'^k, která je shodná s elipsou k^k. Obrysové přímky válce jsou rovnoběžné s osou o^k válce a jsou společnými tečnami elips k^k a k'^k.

Známe kosoúhlý nárys M_2^k bodu M a potřebujeme jeho kosoúhlý průmět, víme-li, že bod M má ležet na plášti válce. Kosoúhlý průmět bodu M najdeme pomocí roviny, která je rovnoběžná s osou válce a současně s osou y a ve které bod M leží. Tedy nárysná stopa této roviny prochází kosoúhlým nárysem M_2^k bodu M a je rovnoběžná s kosoúhlým nárysem o_2^k osy o válce a protíná podstavu ve dvou bodech. Protože u druhého bodu by vyšel kosoúhlý průmět bodu M mimo daný válec, uvažujeme pouze jeden bod K, kterým vedeme stranu válce a který je současně i částí řezu výše uvedené roviny s daným válcem. Stopy rovin nemusíme sestrojovat, stačí pro zjednodušení využít přímky m, která prochází bodem M a je rovnoběžná s osou o válce. Na kosoúhlém průmětu m^k přímky m, procházející bodem K, leží kosoúhlý průmět M^k bodu M.

Tečná rovina ρ procházející bodem M je rovnoběžná s osou o válce. Obsahuje tedy přímku, která je zároveň stranou válce, a která je rovnoběžná s osou válce o. V našem případě se jedná přímo o přímku m. Kosoúhlým průmětem nárysné stopy n^ρ tečné roviny ρ je přímka, která je tečnou elipsy k^k v bodě K^k. Sestrojíme ji opět pomocí afinity s osou x a směrem odpovídajícímu směru kosoúhlého promítání. Tedy najdeme v přiřazeném Mongeově promítání nárys K_2 bodu K ležící na nárysu k_2 kružnice k. V bodě K_2 sestrojíme tečnu n_2^ρ kružnice k_2. Tečně n_2^ρ kružnice k_2 odpovídá v dané afinitě tečna $n^{\rho k}$ elipsy k^k.

Příklad 1.1.3.

V kosoúhlém promítání (135°, $\frac{2}{3}$) do roviny π zobrazte rotační válec, je-li dán střed dolní podstavy $S[-1; 3; 3{,}5]$, střed horní podstavy $S'[2{,}5; 7; 6{,}5]$ a tečna $t = QR$, $Q[-4; 1; 7]$, $R[3; 4; 8]$.



Řešení:

Sestrojíme rovinu ρ podstavy válce, která je kolmá na spojnici bodů SS', ozn. $o = SS'$, a která prochází středem podstavy S. K tomu využijeme směr s hlavních přímek druhé osnovy hledané roviny ρ. Půdorysná stopa p^{ρ} roviny ρ se zobrazí jako kolmice na kosoúhlý půdorys o_1^k přímky o a prochází půdorysným stopníkem P hlavní přímky druhé osnovy. Nárysná stopa n^{ρ} roviny ρ je rovnoběžná s kosoúhlým nárysem s_2^k směru s.

Libovolným bodem přímky t, například bodem R ze zadání, vedeme přímku o' rovnoběžnou s přímkou $o = SS'$. Určíme tečnou rovinu τ, která je dána přímkami o', t. Sestrojíme průsečnici r rovin ρ a τ.

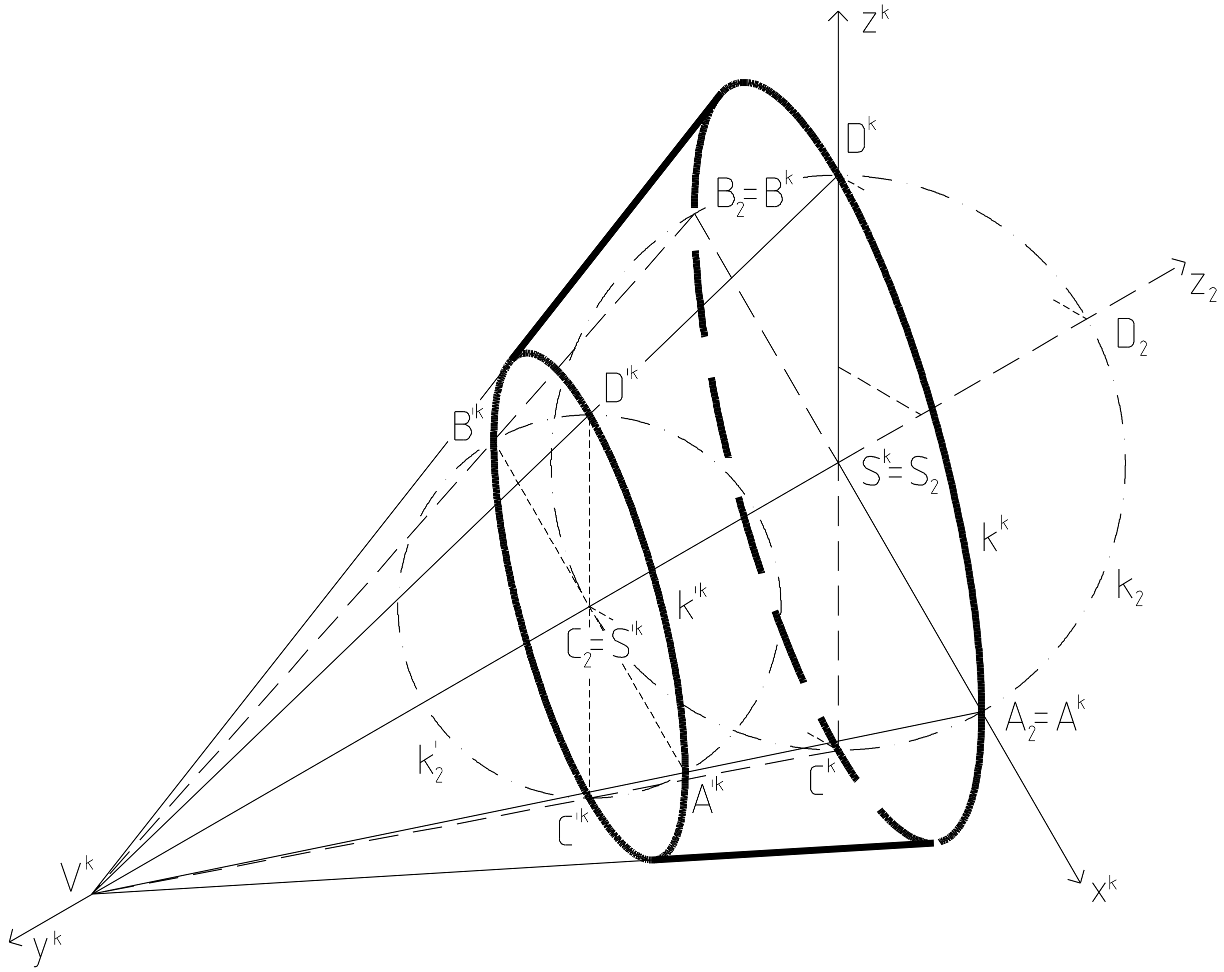
Rovinu ρ otočíme do půdorysny. Vzdálenost otočeného bodu S_0 a otočené přímky r_0 je hledaný poloměr podstavy válce.

Podstava válce leží v obecné rovině ρ. Postup sestrojování kružnice ležící v obecné rovině je téměř totožný s postupem sestrojování kružnice ležící v nárysně s tou výjimkou, že pro získání středu S_τ kružnice τ sestrojujeme osu úsečky $S^k S_0$ a střed S_τ Thaletovy kružnice τ leží na půdorysné stopě p^{ρ} roviny ρ. Dále zůstává postup stejný. Využíváme afinity $\mathcal{A}(p^{\rho}, S^k \rightarrow S_0)$.

Obrys válce tvoří oblouky elips k^k a k'^k a strany válce ležící na společných tečnách těchto elips.

Příklad 1.1.4.

V kosoúhlém promítání $(150°, 1)$ do roviny π zobrazte rotační komolý kužel, jehož jedna podstava leží v nárysně ν, $S[0; 0; 0], r_1 = 3, r_2 = 2, v = 3$.



Řešení:

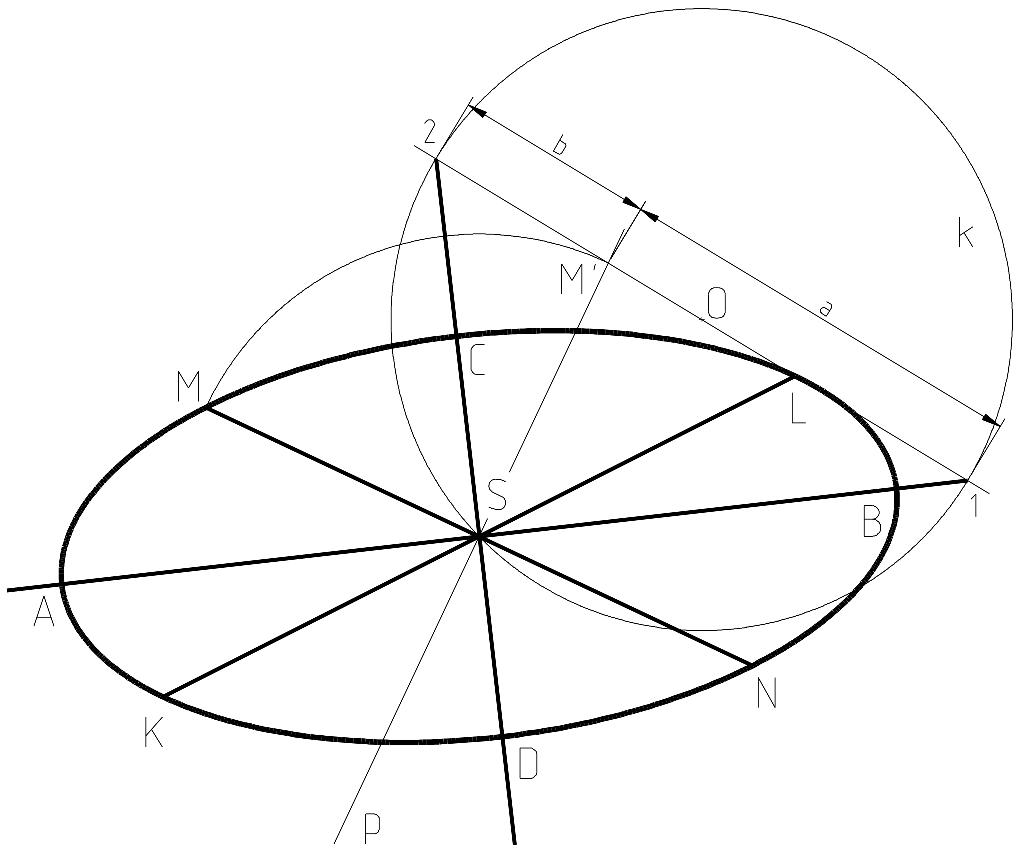
Nejprve sestrojíme podstavnou kružnici k kužele. Kosoúhlým obrazem kružnice k je elipsa k^k o středu S^k ležící v nárysně, která je obrazem kružnice k_2 v afinitě s osou x a směrem odpovídajícímu směru kosoúhlého promítání. V našem případě, střed podstavy kužele leží v počátku, takže kosoúhlý průmět S^k a nárys S_2 bodu S splynout v jeden bod. Sestrojíme nárys k_2 kružnice k o poloměru r_1. Sdružené průměry A_2B_2 a C_2D_2 kružnice k_2 leží po řadě na osách x a y. Pokud je kosoúhle promítneme, získáme sdružené průměry A^kB^k a C^kD^k elipsy k^k, které leží po řadě na osách x a z. Konstrukci elipsy k můžeme sestrojit například pomocí Rytzovy konstrukce elipsy.

Průmětem horní podstavy je elipsa k', která má střed v bodě $S'[0; 3; 0]$ a která je stejnolehlá s elipsou k. Poloměr horní podstavy je r_2 a její sdružené průměry $A'B'$ a $C'D'$ leží na přímkách rovnoběžných s osami x a z.

Zdánlivý obrys je tvořen jednak oblouky elips k a k', jednak jejich dvěma tečnami, které jsou vedeny z kosoúhlého průmětu V^k příslušného vrcholu V celého kužele k jedné z elips. Bod V je průsečík přímky SS' například s přímkou DD'.

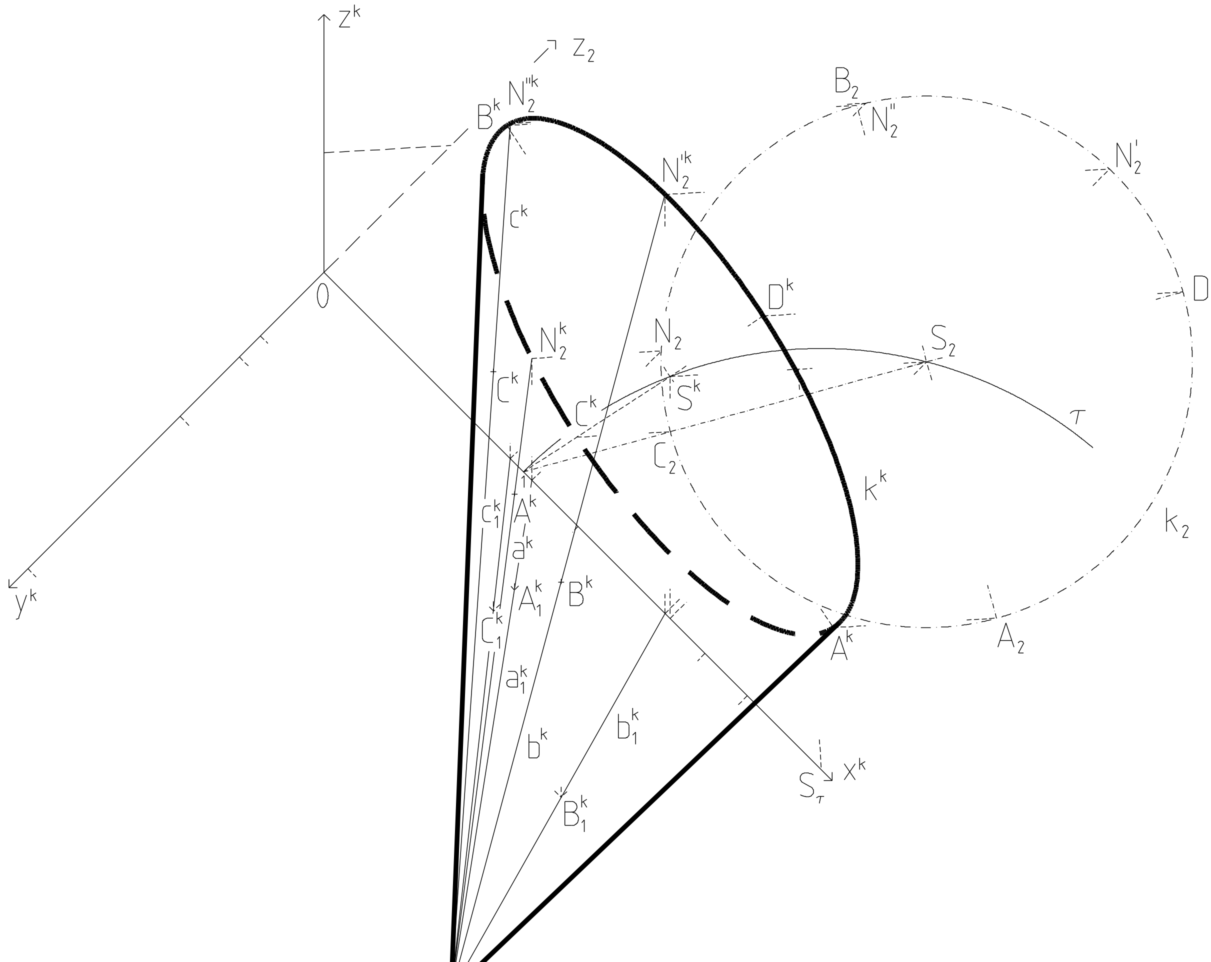
Rytzova konstrukce elipsy:

Elipsa je dána sdruženými průměry KL a MN. Nejprve sestrojíme kolmici p na průměr MN procházející středem S elipsy. Bod M otočíme o 90° do bodu M' ležícím na přímce p. Sestrojíme přímku $M'L$. Bod O je střed úsečky $M'L$. Poté sestrojíme kružnici k se středem v bodě O a poloměrem $|OS|$. Průsečíky kružnice k s přímkou $M'L$ označíme 1 a 2 (bod 1 náleží ostrému úlu sevřenému sdruženými průměry). Přímka $1S$ je hlavní přímkou elipsy a přímka $2S$ je vedlejší osou elipsy. Délka úsečky $M'1$ je rovna velikosti hlavní poloosy elipsy, délka úsečky $2M'$ je rovna velikosti vedlejší poloosy elipsy. Nyní lze sestrojit hlavní a vedlejší vrcholy elipsy.



Příklad 1.1.5.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{2}{3})$ zobrazte kosý kruhový kužel s podstavou v ν o vrcholu $V[10; 7; 0]$, aby na jeho povrchu ležely body $A[6; 1,5; 2,4]$, $B[9; 3,4; 5,4]$, $C[6; 2; 6]$.



Řešení:

Víme, že podstava kosého kužele leží v nárysně, známe vrchol a tři body pláště kužele. Nejprve tedy musíme najít průsečíky daných povrchových přímek kužele s rovinou podstavy. Tak získáme tři body podstavy, kterými je jednoznačně určena podstavná kružnice kužele.

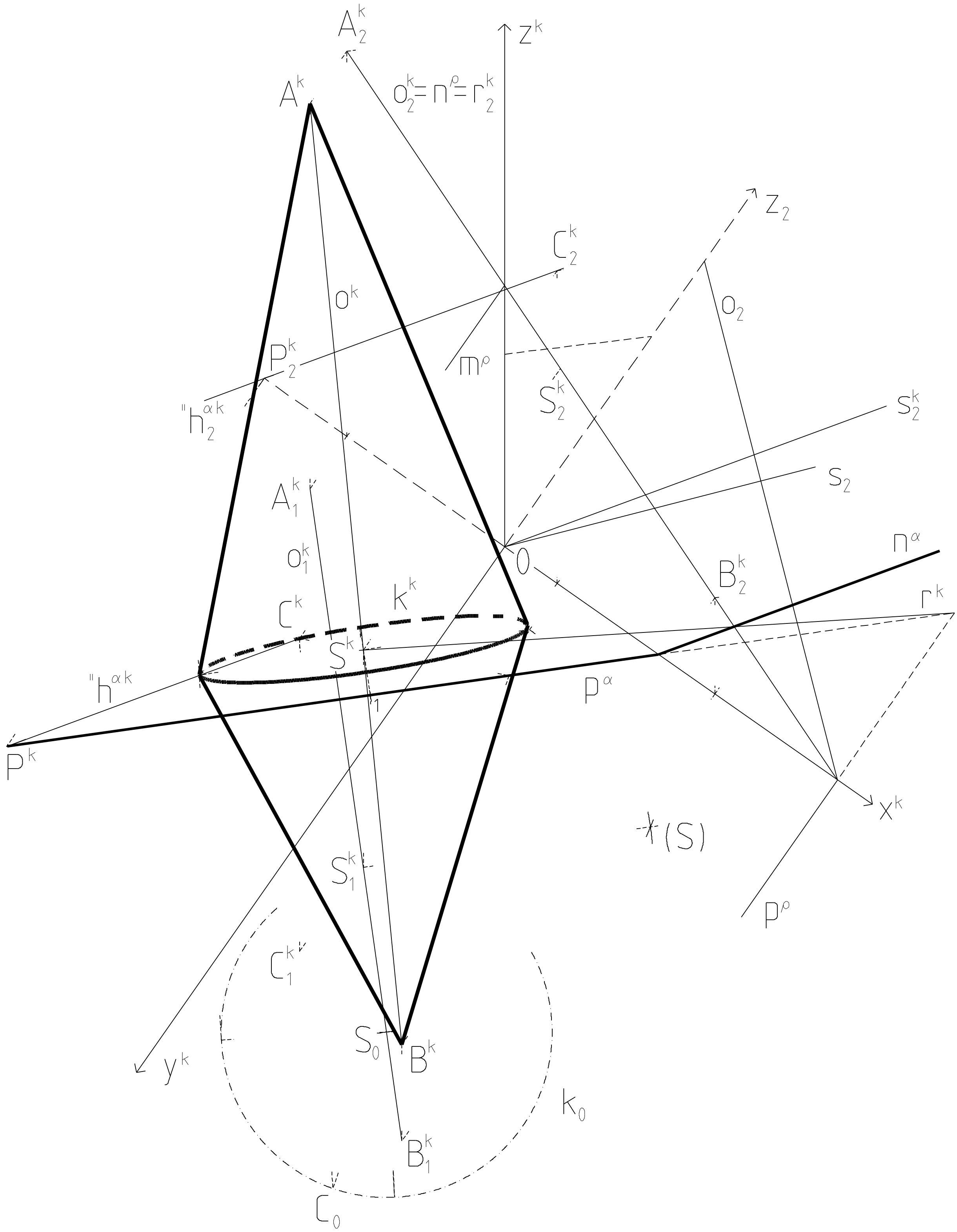
Sestrojíme kosoúhlé průměty a^k, b^k, c^k a kosoúhlé půdorysy a_1^k, b_1^k, c_1^k povrchových přímek a, b, c procházejících po řadě body A, B, C. Najdeme kosoúhlé nárysné stopníky $N_2^k, N_2'^k, N_2''^k$ přímek a, b, c a v přiřazeném Mongeově promítání jejich příslušné nárysné stopníky N_2, N_2', N_2'' což jsou hledané body podstavy.

Dále sestrojíme podstavnou kružnici k kužele. Kosoúhlým obrazem kružnice k je elipsa k^k o středu S^k, která je obrazem kružnice k_2 v afinitě s osou x a směrem odpovídajícímu směru kosoúhlého promítání. Elipsu k^k sestrojíme stejným způsobem jako v Příkladu 1.1.1.

Nakonec vedeme z kosoúhlého průmětu V^k vrcholu V dvě tečny k elipse k^k, které tvoří součást zdánlivého obrysu kužele.

Příklad 1.1.6.

V kosoúhlém promítání $\left(125°, \frac{3}{4}\right)$ zobrazte těleso, které vznikne rotací trojúhelníka ABC kolem strany AB; $A[-3; 1; 8], B[4; 8{,}5; 2], C[1; 7; 6{,}5]$.



Řešení:

Rotací trojúhelníka ABC vznikne rotační dvojkužel, tj. dva kužele se společnou podstavou. Jeden kužel má vrchol v bodě A, druhý kužel má vrchol v bodě B. Osou obou kuželů je osa rotace $o = AB$. Společná podstavná kružnice prochází bodem C.

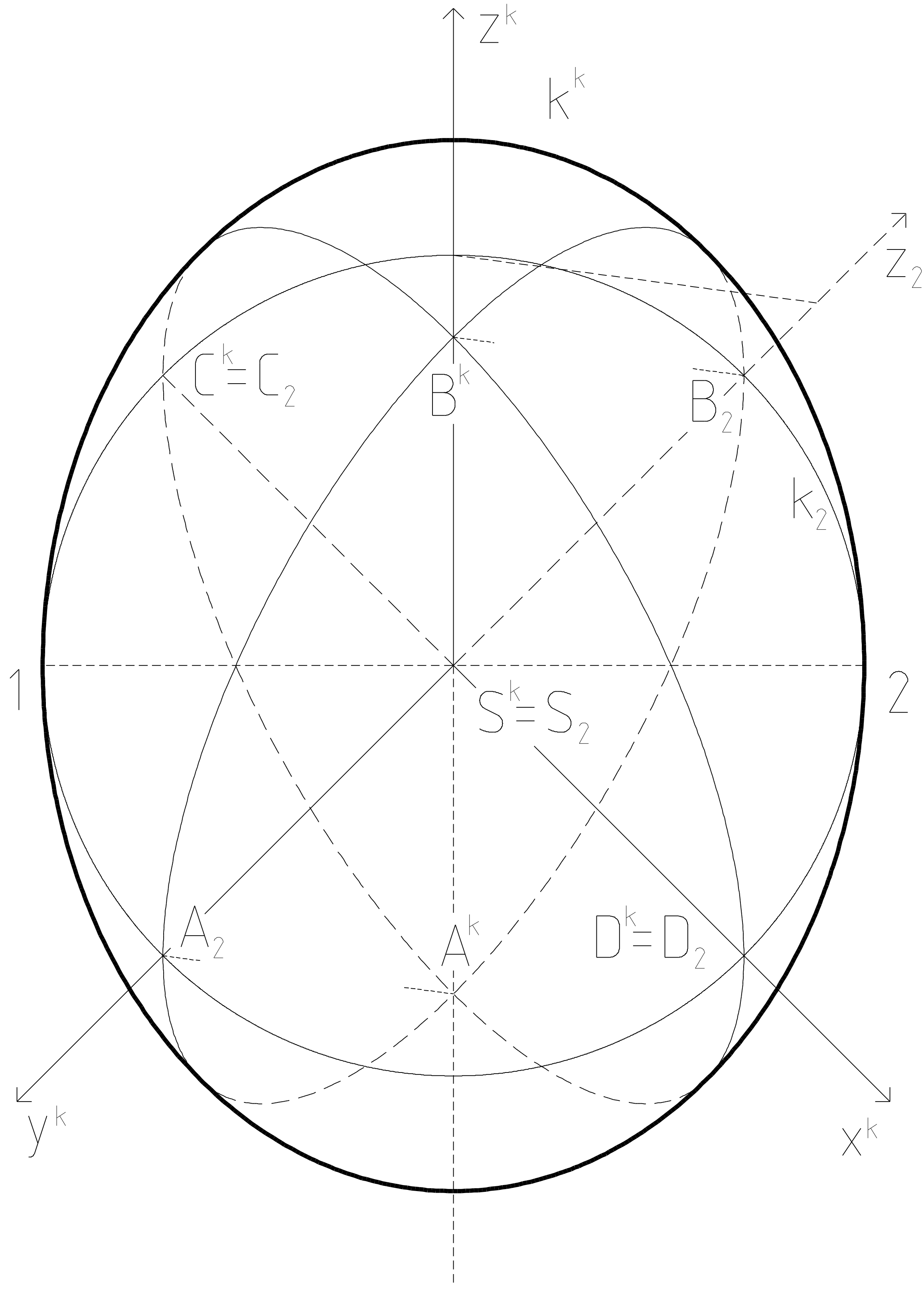
Spojnici bodů AB označíme o. Hledáme rovinu α, která je kolmá na přímku o a současně prochází bodem C. K sestrojení roviny α využijeme směr s hlavních přímek druhé osnovy. Půdorysná stopa p^{α} roviny α se zobrazí jako kolmice na kosoúhlý půdorys o_1^k přímky o a prochází půdorysným stopníkem P hlavní přímky druhé osnovy. Nárysná stopa n^{α} je rovnoběžná s kosoúhlým nárysem s_2^k směru s.

Sestrojíme průsečík S přímky o s rovinou α a to tak, že přímkou o proložíme pomocnou rovinu ρ kolmou k průmětně ν. Kosoúhlý průmět r^k průsečnice r rovin α a ρ určují průsečíky odpovídajících si stop. Průsečík přímek r a o je hledaný průsečík S přímky o a roviny α.

Bod S je středem společné podstavy, která leží v rovině α a je ohraničená kružnicí k procházející bodem C. Pro zjištění skutečné velikosti podstavy využijeme otočení roviny α do půdorysny. Postup sestrojování kružnice ležící v obecné rovině je popsán v Příkladu 1.1.3. Využíváme afinity $\mathcal{A}(p^{\alpha}, S^k \to S_0)$.

Příklad 1.1.7.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{4}{5})$ zobrazte kulovou plochu a dvě její hlavní kružnice, $S[0;0;0], r = 4$.



Řešení:

Quételetova - Dandelinova věta pro kosoúhlý průmět kulové plochy:

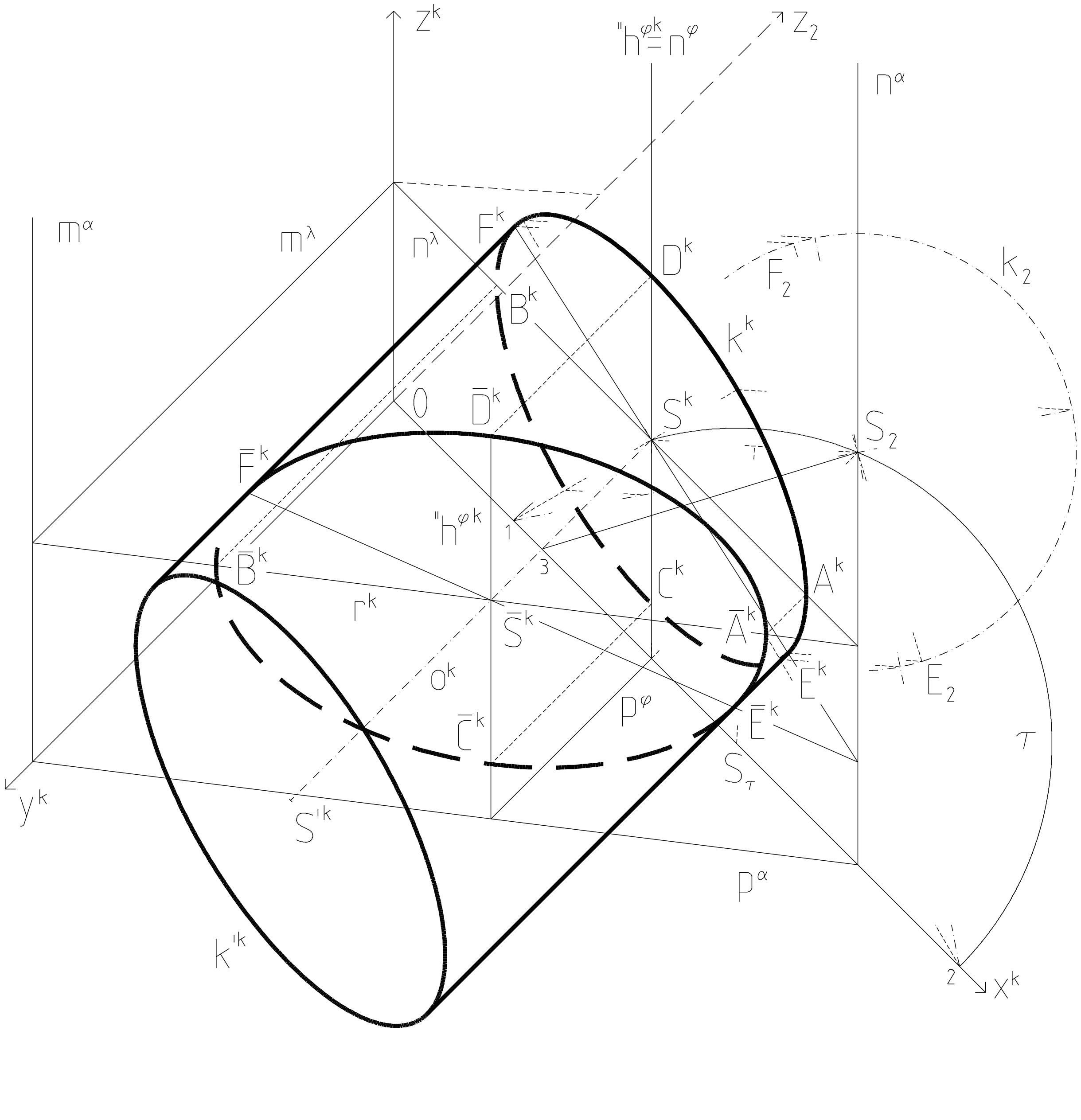
Kosoúhlým průmětem kulové plochy je elipsa. Střed této elipsy je průmětem středu kulové plochy, její ohniska jsou kosoúhlé průměty krajních bodů průměru kulové plochy, který je kolmý k průmětně kosoúhlého promítání. Délka vedlejší poloosy se rovná poloměru kulové plochy.

Průmětnou kosoúhlého promítání je půdorysna. Dle Quételetovy – Dandelinovy věty průměr kolmý k průmětně leží v ose z. Krajní body tohoto průměru označíme A, B. Jejich kosoúhlé průměty A^k, B^k jsou tedy ohnisky zdánlivého obrysu průmětu kulové plochy. Spojnice A^kB^k udává polohu hlavní osy obrysové elipsy. Vedlejší osa je k ní kolmá a prochází středem S^k. Vedlejší vrcholy obrysové elipsy jsou body $1, 2$, pro něž platí $|1S^k| = |S^k2| = r$. Hlavní vrcholy elipsy, která je průmětem kulové plochy, omezíme pomocí vztahu $a^2 = b^2 + e^2$. Hlavní kružnice kulové plochy je kružnice, která leží v rovině procházející středem kulové plochy. Tedy kružnice, které mají s kulovou plochou stejný střed a poloměr. V našem případě jsou zobrazeny dvě hlavní kružnice, které leží v průmětnách. Jedna je určena sdruženými průměry A^kB^k, C^kD^k a druhá sdruženými průměry A^kB^k, A_2B_2.

1.2. Řezy na oblých tělesech

Příklad 1.2.1.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{3}{4})$ zobrazte řez rotačního válce výšky $v = 7$, jehož podstava o středu $S[5; 0; 4]$ a poloměru $r = 3$ leží v rovině ν, rovinou $\alpha(9; 7; \infty)$.



Řešení:

Zobrazení válce je popsáno v Příkladu 1.1.1.

Řezem válce je elipsa, kterou určíme sdruženými průměry $\bar{A}\bar{B}, \bar{C}\bar{D}$. Pomocí směrové roviny λ, která prochází osou o válce, je kolmá k rovině α a která je rovinou souměrnosti řezu, určíme kosoúhlé obrazy $\bar{A}^k, \bar{B}^k$ hlavních vrcholů A, B elipsy řezu. Pomocí směrové roviny φ, která rovněž prochází osou o válce a je rovnoběžná s nárysnou stopou n^α roviny α, určíme kosoúhlé obrazy $\bar{C}^k, \bar{D}^k$ vedlejších vrcholů C, D elipsy řezu. Pro určení bodů přechodu viditelnosti $\bar{E}, \bar{F}$ na obrysu válce použijeme směrovou rovinu procházející obrysovými stranami válce. K řešení budeme využívat afinity $\mathcal{A}(n^\alpha, S^k \rightarrow \bar{S}^k)$.

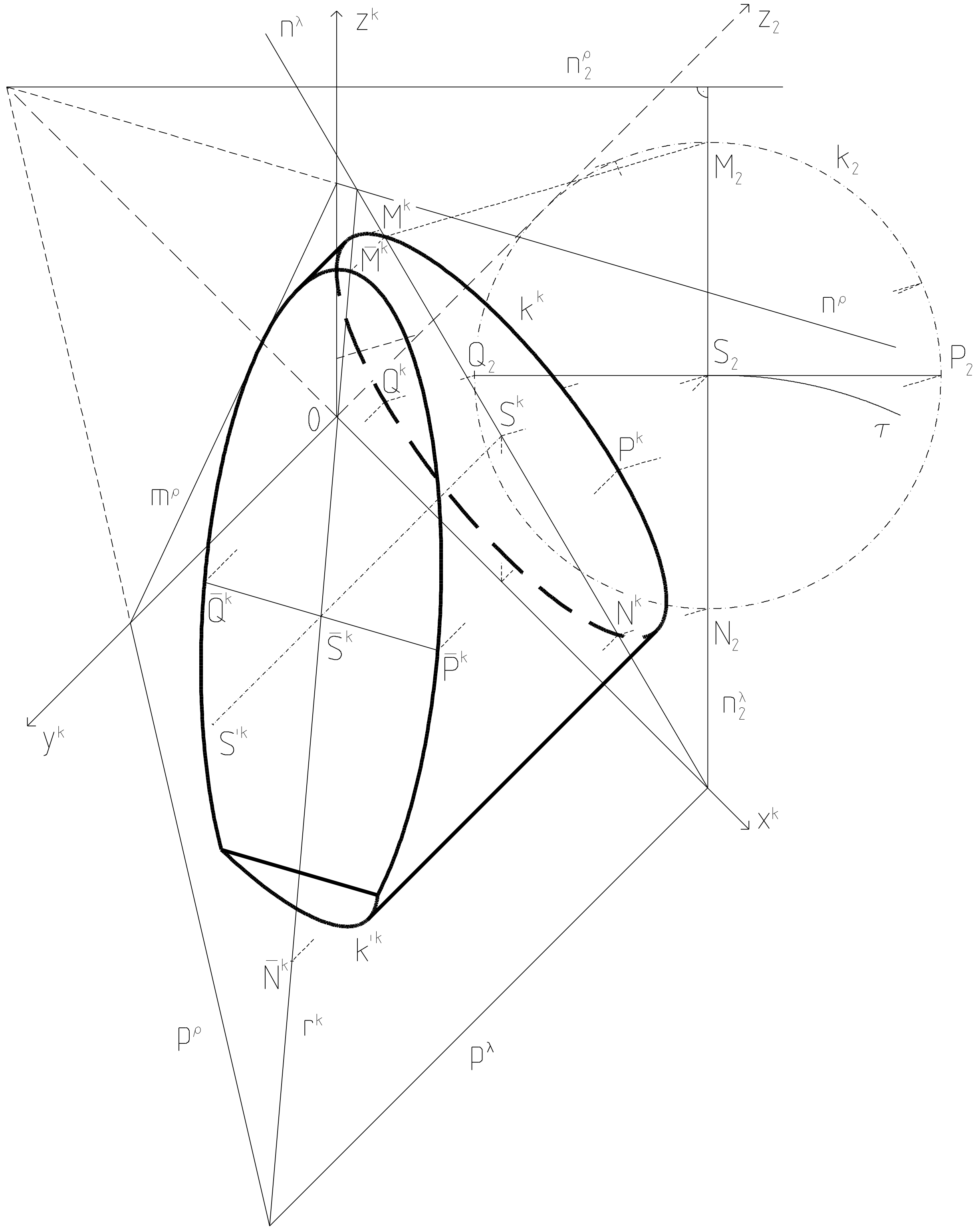
Rovina řezu α je kolmá na půdorysnu, takže rovina λ souměrnosti řezu je rovnoběžná s půdorysnou. Nárysná stopa n^λ roviny λ prochází středem S podstavy válce a je rovnoběžná s osou x. Nárysná stopa n^λ roviny λ protne podstavu válce v bodech A, B. Na kosoúhlém průmětu r^k průsečnice r rovin λ a α leží jeden ze sdružených průměrů elipsy řezu. Kosoúhlé průměty $\bar{A}^k, \bar{B}^k$ hlavních vrcholů A, B elipsy řezu leží na kosoúhlém průmětu r^k průsečnice r a na příslušných ordinálách vedených z bodů A^k, B^k. Střed $\bar{S}$ průmětu řezu leží ve středu úsečky $\bar{A}\bar{B}$, a taky na průsečíku průmětu o^k osy o válce s průmětem r^k průsečnice r.

Směrová rovina φ je rovnoběžná s bokorysnou a prochází středem S podstavy válce. Její nárysná stopa n^φ procházející kosoúhlým průmětem S^k bodu S protne podstavu válce v bodech C, D. Pomocí hlavních přímek druhé osnovy roviny φ získáme body $\bar{C}, \bar{D}$ vedlejších vrcholů elipsy řezu.

Body přechodu viditelnosti E, F v nárysně určíme jako průsečíky podstavy válce s obrysovými stranami válce. A pro získání bodů přechodu viditelnosti $\bar{E}, \bar{F}$ na průmětu řezu využijeme afinity.

Příklad 1.2.2.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{1}{2})$ zobrazte rotační válec s podstavou v ν o středu $S[4; 0; 5]$, poloměru $r = 4$ a o výšce $v = 7$ seříznutý rovinou $\rho(-8; 5; 8)$.



Řešení:

Zobrazení válce je popsáno v Příkladu 1.1.1.

Řezem válce je elipsa, kterou určíme sdruženými průměry $\overline{M}\overline{N}, \bar{P}\bar{Q}$. Pomocí roviny souměrnosti řezu λ, která prochází osou o válce a je kolmá k rovině ρ, určíme kosoúhlé obrazy $\overline{M}^k, \overline{N}^k$ hlavních vrcholů M, N elipsy řezu. Nárysnou stopu n^λ roviny λ sestrojíme pomocí přiřazeného Mongeova promítání, kdy $(n_2^\rho \perp n_2^\lambda) \wedge (S_2 \in n_2^\lambda)$. Na kosoúhlém průmětu r^k průsečnice r rovin λ a ρ leží jeden ze sdružených průměrů elipsy řezu. Kosoúhlé průměty $\overline{M}^k, \overline{N}^k$ hlavních vrcholů M, N elipsy řezu leží na průsečnici r^k a na příslušných ordinálách z bodů M^k, N^k. Střed $\bar{S}^k$ elipsy řezu leží ve středu úsečky $\overline{M}^k\overline{N}^k$, a taky na průsečíku osy o^k válce s průsečnicí r^k. Druhý sdružený průměr elipsy řezu $\bar{P}^k\bar{Q}^k$ prochází středem $\bar{S}^k$ elipsy řezu, je rovnoběžný s nárysnou stopou n^ρ roviny ρ. Krajní body $\bar{P}^k, \bar{Q}^k$ průměru elipsy řezu leží na příslušných ordinálách bodů P^k, Q^k.

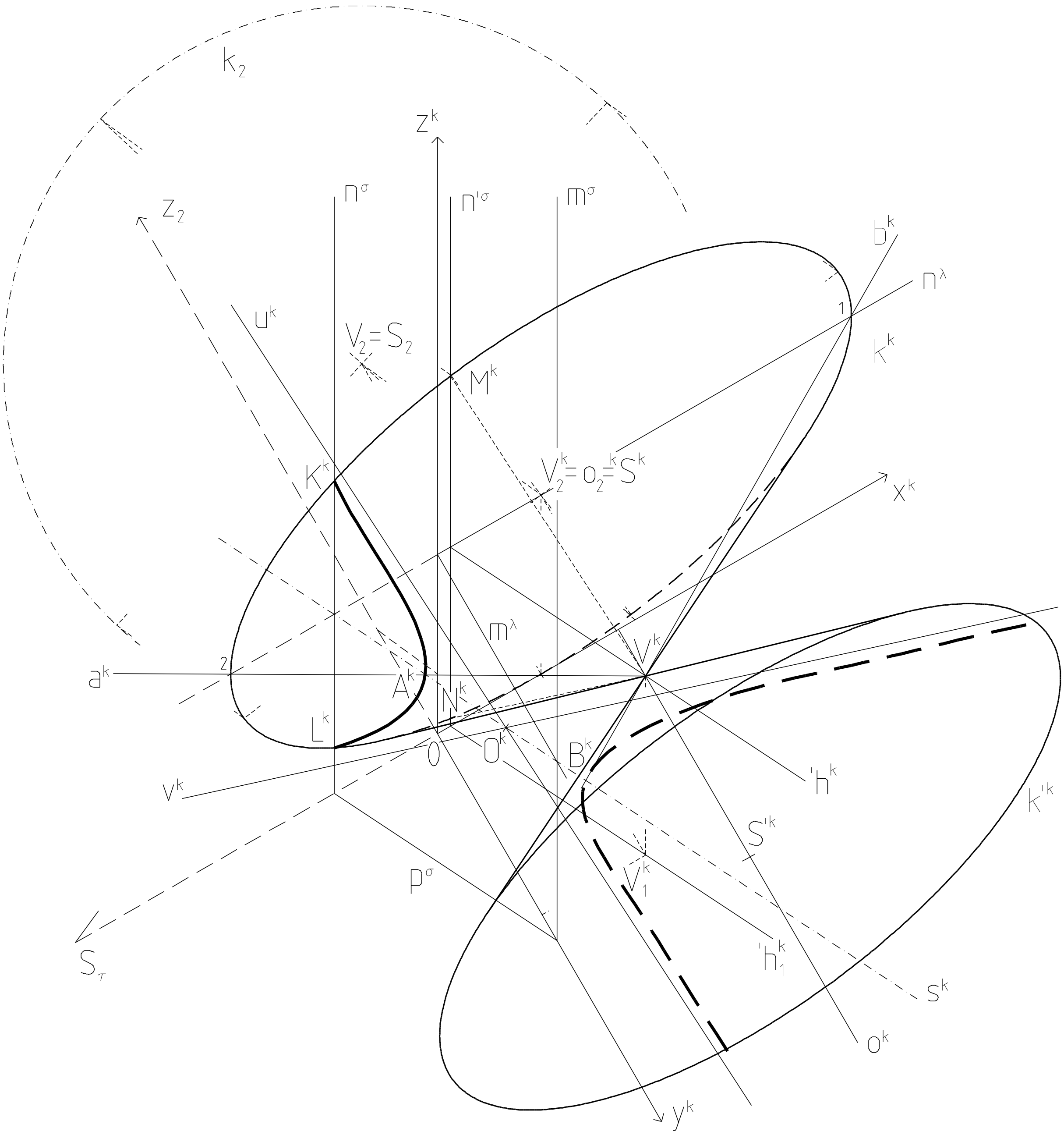
K řešení celého příkladu využíváme afinity $\mathcal{A}(n^\rho, S^k \to \bar{S}^k)$.

Elipsa řezu protne horní podstavu k' válce.

Obrys seříznutého válce tvoří oblouky elips k^k a k'^k, strany válce ležící na společných tečnách těchto elips a elipsa řezu.

Příklad 1.2.3.

V kosoúhlém promítání $(60°, \frac{1}{2})$ zobrazte rotační kuželovou plochu o ose o kolmé k rovině ν, vrcholu $V[2; 3{,}5; 6]$, omezenou kružnicí v ν o poloměru $r = 6$ a s ní podle vrcholu V souměrnou kružnicí. Protněte ho rovinou $\sigma(-2; 4; \infty)$.



Řešení:

Sestrojíme rotační kuželovou plochu, která je ohraničena první podstavou ležící v nárysně (viz Příklad 1.1.4.) a druhou podstavou, která je shodná s první a je souměrná podle vrcholu V kužele.

Abychom zjistili typ kuželosečky, sestrojíme pomocnou rovinu σ' procházející vrcholem kužele V a rovnoběžnou s rovinou řezu σ. K řešení stačí pouze nárysná stopa roviny σ' a k tomu využijeme hlavních přímek první osnovy. Nárysná stopa n'^{σ} roviny σ' protne podstavu k kužele ve dvou bodech M, N. Řezem bude hyperbola. Spojnicí bodů MV a NV získáme směry asymptot hyperboly.

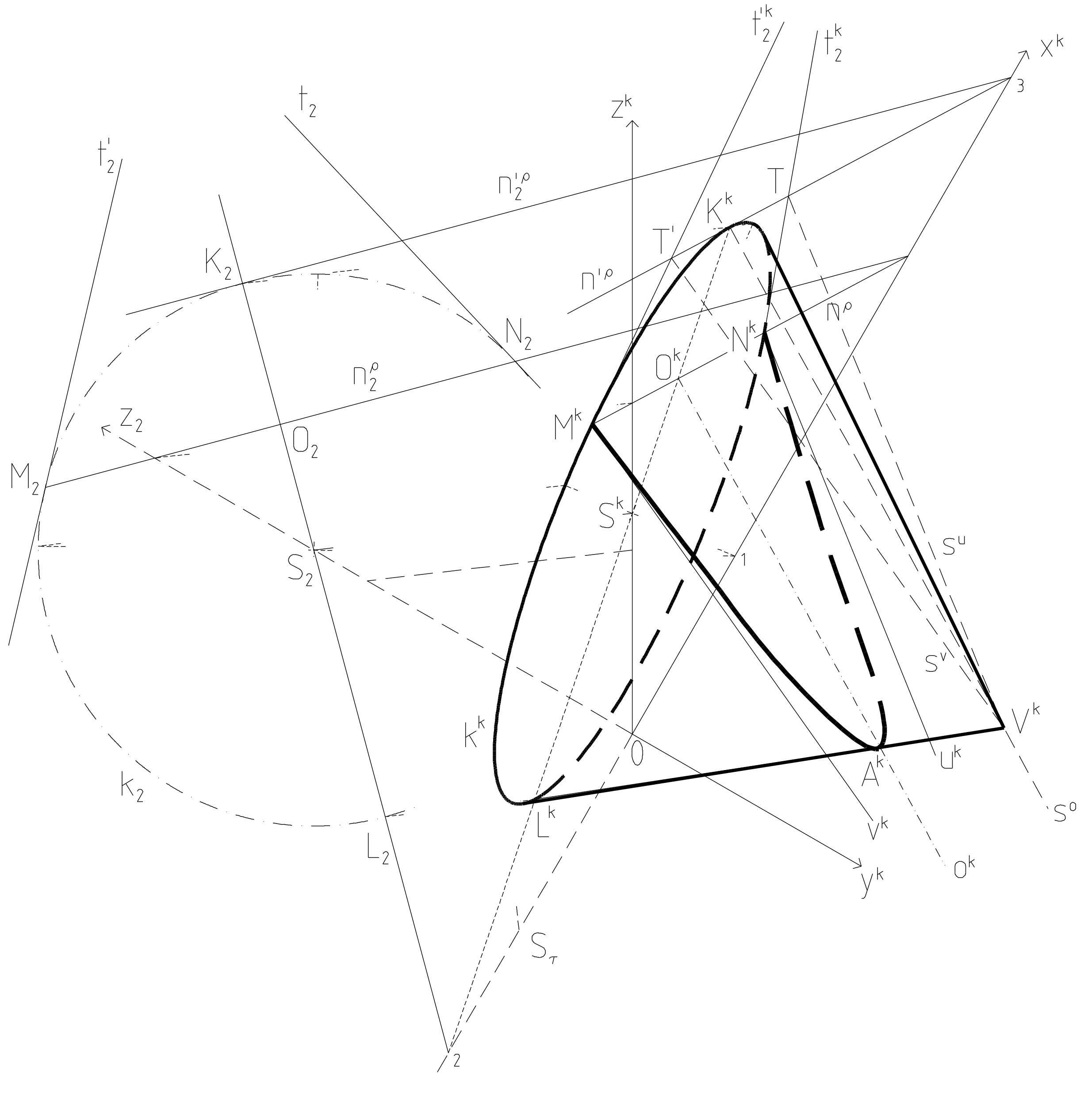
Pomocí roviny souměrnosti řezu λ, která je kolmá na rovinu řezu σ a prochází vrcholem V kuželové plochy, určíme hlavní vrcholy A, B hyperboly řezu.

Rovina řezu σ je kolmá k půdorysně, takže rovina souměrnosti λ bude rovnoběžná s půdorysnou. Nárysná stopa n^{λ} roviny λ prochází středem S podstavy kužele a je rovnoběžná s osou x. Vrcholy A, B hledané hyperboly leží na průsečnici s rovin σ a λ a na povrchových přímkách a, b, ve kterých protne rovina souměrnosti řezu λ kuželovou plochu. Střed O hyperboly je středem úsečky AB. Získaným středem hyperboly O vedeme asymptoty u, v rovnoběžné se směrem asymptot procházejících vrcholem V kuželové plochy.

Tím je hyperbola jednoznačně určena.

Příklad 1.2.4.

V kosoúhlém promítání $\left(30°, \frac{3}{5}\right)$ zobrazte rotační kužel s podstavou v ν, $S[0;0;6]$, $r = 4{,}5, v = 7$, proťatý rovinou $\rho(9;?;9)$ v parabole.



Řešení:

Zobrazení kužele je popsáno v Příkladu 1.1.4.

Ze zadání známe nárysnou stopu n^ρ roviny ρ a k řešení nepotřebujeme znát půdorysnou a bokorysnou stopu roviny ρ.

Řezem má být parabola, tedy nárysná stopa pomocné vrcholové roviny ρ', která je rovnoběžná s rovinou řezu ρ, musí být tečnou podstavné hrany k kužele.

K sestrojení řezu využijeme jednak prostorové kolineace mezi rovinou podstavy a rovinou řezu, která kosoúhlým promítáním přejde v rovinou kolineaci určenou středem kolineace V^k, osou kolineace – nárysnou stopou n^ρ roviny řezu ρ a úběžnicí – nárysnou stopou n'^ρ vrcholové roviny ρ', a jednak roviny souměrnosti.

Rovina řezu ρ protne podstavnou kružnici k kužele ve dvou bodech M, N. Dále využíváme afinity kružnice a elipsy. Spojnice bodů KV udává směr s^o osy paraboly. Osa o paraboly je rovnoběžná se směrem s^o a prochází průsečíkem O přímek KL a MN. Vrchol A paraboly je průsečík přímky LV a osy o paraboly. Bod přechodu viditelnosti v tomto případě splývá s vrcholem A paraboly.

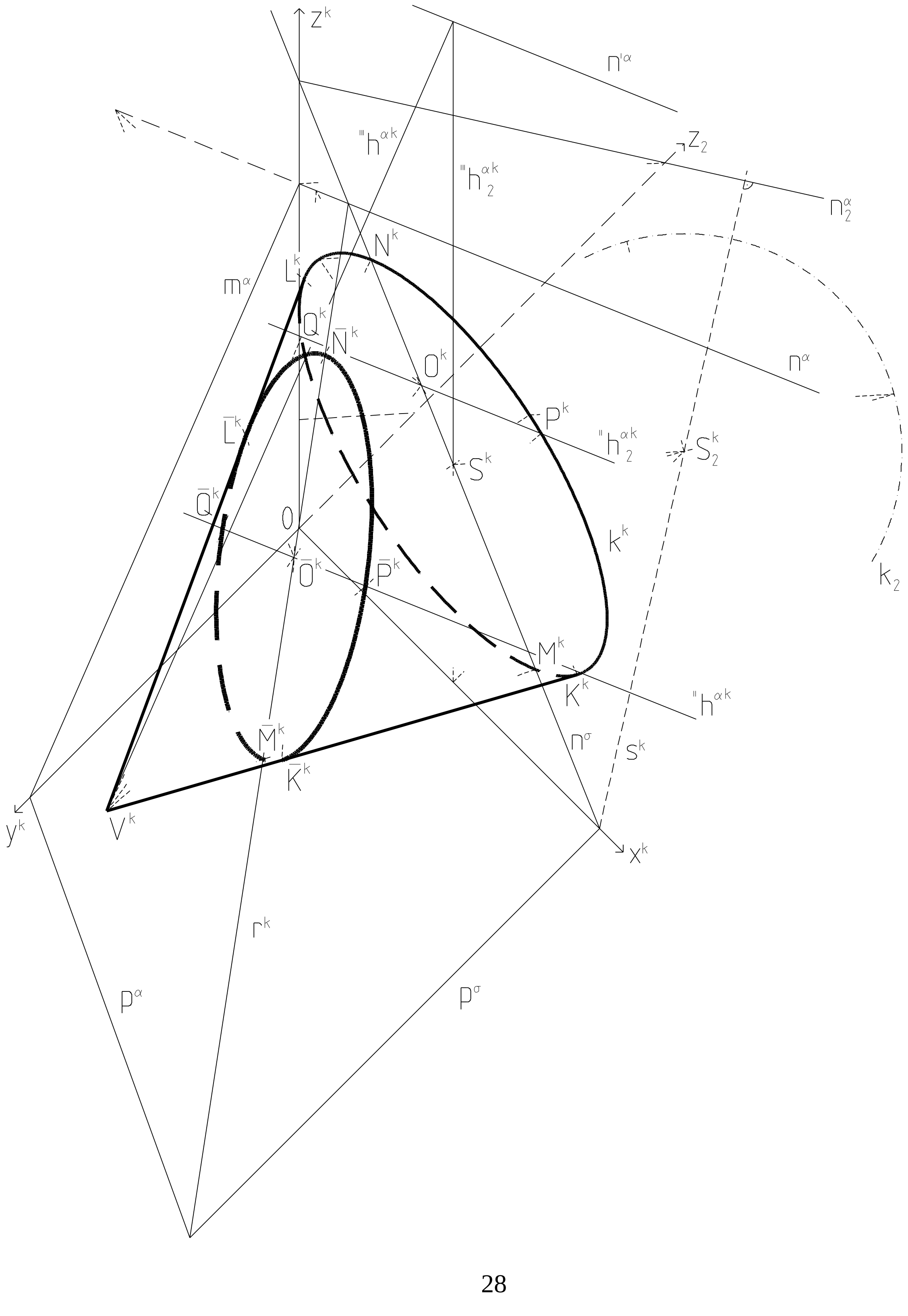
Nakonec sestrojíme pomocné tečny u, v určující parabolu.

V přiřazeném Mongeově promítání sestrojíme tečny t_2, t_2' po řadě v bodech N_2, M_2 a kosoúhle je promítneme do tečen $t_2^k, t_2'^k$ procházející body N^k, M^k. Průsečíky těchto tečen s nárysnou stopou n'^ρ roviny ρ' označíme T, T'. Směry s^u, s^v jsou spojnice po řadě $TV^k, T'V^k$. Tečny paraboly u, v jsou rovnoběžné s danými směry s^u, s^v a procházejí body N, M.

Parabola je jednoznačně určena osou o, vrcholem A, body M, N a tečnami u, v.

Příklad 1.2.5.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{2}{3})$ zobrazte rotační kužel s podstavou v průmětně ν, $S[4; 0; 6], r = 4, v = 9$, a protněte ho rovinou $\alpha(-15; 7; 9{,}5)$.



Řešení:

Zobrazení kužele je popsáni v Příkladu 1.1.4.

Řezem bude kuželosečka. Pro zjištění typu kuželosečky na kuželové ploše sestrojíme pomocnou rovinu α', která je rovnoběžná s rovinou řezu α a prochází vrcholem kužele V. K její konstrukci využijeme hlavních přímek třetí osnovy. Nárysná stopa n'^{α} roviny α' neprotne podstavu kužele k, takže řezem je elipsa.

Máme tedy kolineaci danou středem kolineace V^k, osou kolineace – nárysnou stopou n^{α} roviny řezu α a úběžnicí – nárysnou stopou n'^{α} vrcholové roviny α' rovnoběžné s rovinou řezu.

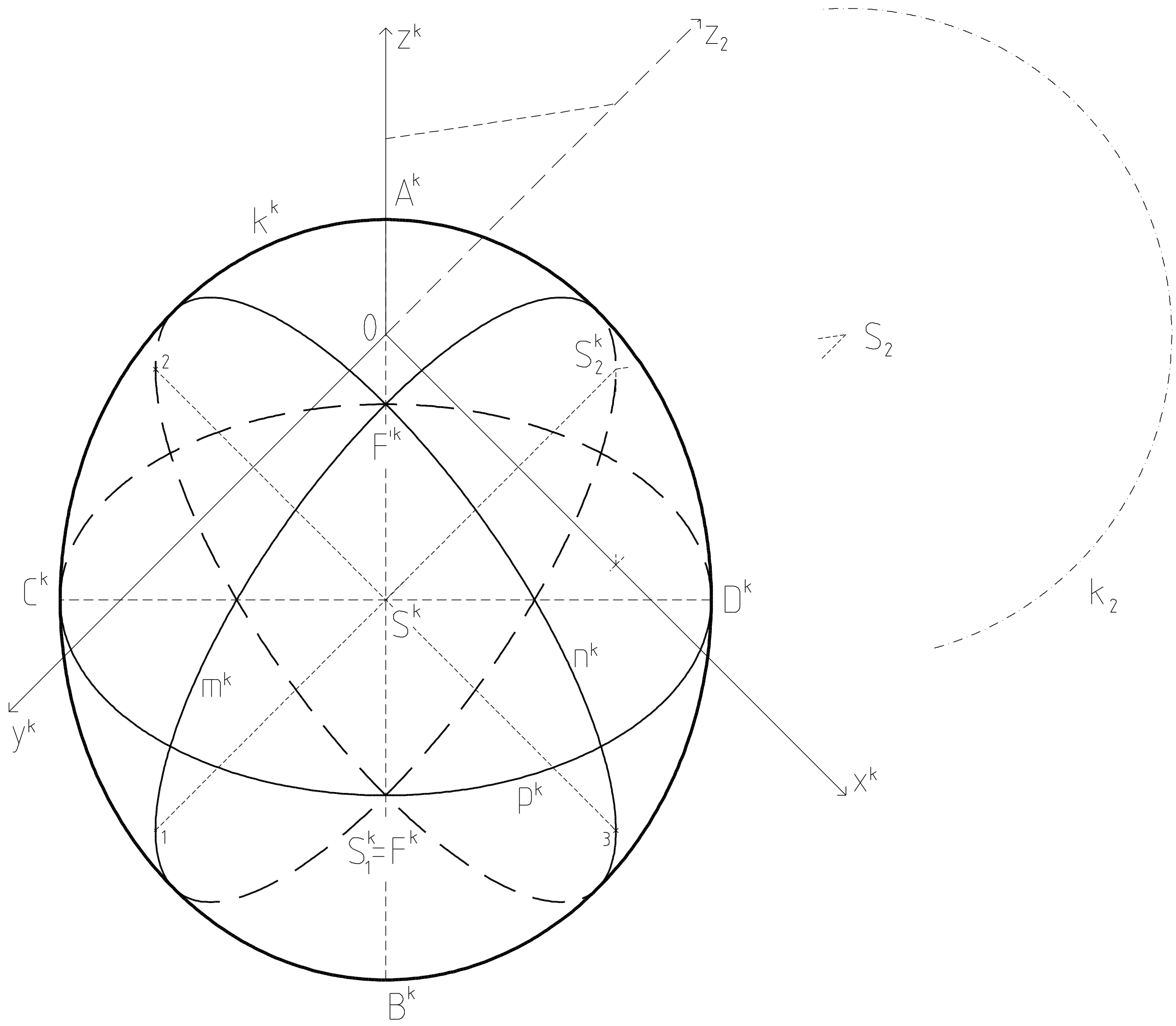
Nyní si najdeme vhodné sdružené průměry, a sice tak, že sestrojíme rovinou souměrnosti řezu σ. Její nárysná stopa n^{σ} protne podstavnou kružnici k kužele ve dvou bodech M, N, které jsou obrazy sdruženého průměru $\bar{M}\bar{N}$ průmětu řezu v kolineaci. Střed elipsy řezu $\bar{O}$ je středem úsečky $\bar{M}\bar{N}$ a jeho kolineární obraz O leží na nárysné stopě n^{σ} roviny σ a na spojnici bodů $\bar{O}V$. Průměr $\bar{P}\bar{Q}$ sdružený k průměru $\bar{M}\bar{N}$ bude procházet bodem $\bar{O}$ a bude rovnoběžný s nárysnou stopou n^{α} roviny α. Krajní body $\bar{P}, \bar{Q}$ průměru elipsy řezu leží na příslušných spojnicích vrcholu V kužele s body P, Q podstavné kružnice k.

Nakonec nalezneme body $\bar{K}, \bar{L}$ průmětu řezu, ve kterých se mění viditelnost. Tyto body jsou obrazy bodů K, L v kolineaci, ve kterých se mění viditelnost podstavy kužele k.

Samotný řez sestrojíme například pomocí Rytzovy konstrukce elipsy dané sdruženými průměry $\bar{M}\bar{N}, \bar{P}\bar{Q}$.

Příklad 1.2.6.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{3}{5})$ zobrazte kulovou plochu o středu $S[5; 5; 5]$ a poloměru $r = 5$. Zobrazte na ní řezy s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.



Řešení:

Obrysem kosoúhlého průmětu kulové plochy je elipsa, jejíž ohniska F, F' sestrojíme pomocí Quételetovy – Dandelinovy věty (viz Příklad 1.1.7.). Průmětnou kosoúhlého promítání je půdorysna a průměr kulové plochy kolmý k průmětně leží v ose z, $F^k F'^k \parallel z^k, |F^k S^k| = = q * r = 3$, což je zkrácený poloměr r poměrem q. Vedlejší osa $C^k D^k$ obrysu je kolmá k $F^k F'^k$ a prochází bodem S^k, tj. rovnoběžná s půdorysnou a rovná se $2r$. Hlavní osu $A^k B^k$ průmětu kulové plochy omezíme pomocí vztahu $a^2 = b^2 + e^2$.

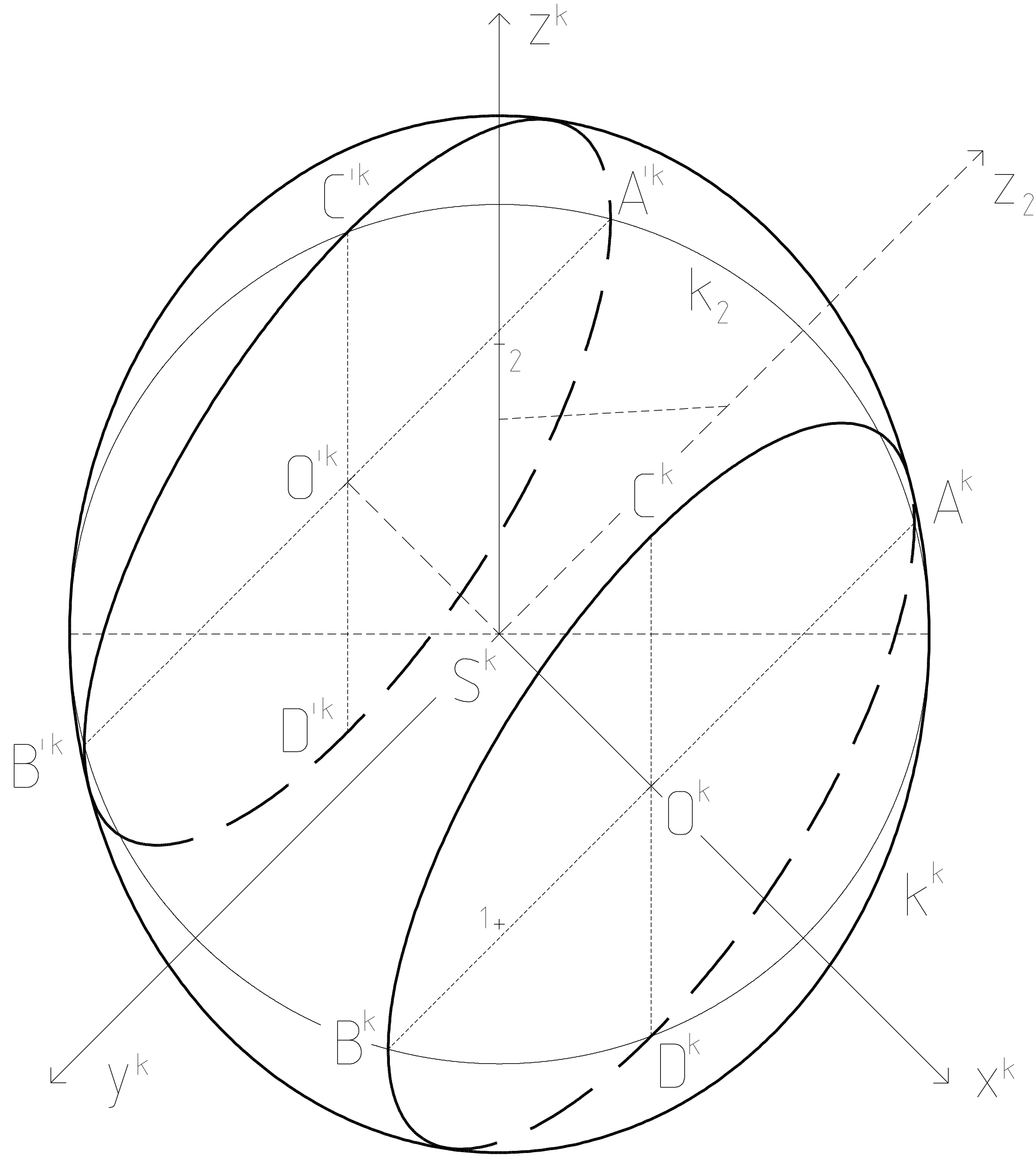
Průmět řezu, ležícího v rovině rovnoběžné s π, je elipsa p^k, jejíž hlavní osa je spojnice bodů $C^k D^k$ a vedlejší osa je spojnice bodů $F^k F'^k$.

Průmět řezu n^k v rovině rovnoběžné s ν sestrojíme pomocí sdružených průměrů, z nichž jeden je $F^k F'^k$ a druhý je $2 - 3$, kde $|23| = 2r$ a $2 - 3 \parallel x^k$.

Obdobně průmět řezu m^k v rovině rovnoběžné s μ sestrojíme pomocí sdružených průměrů, z nichž jeden je $F^k F'^k$ a druhý je $1S_2^k$, kde $\left|1S_2^k\right| = 2r$ a $1S_2^k \parallel y^k$.

Příklad 1.2.7.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{2}{3})$ zobrazte řez kulové plochy o středu $S[0;0;0]$ a poloměru $r = 4$ rovinou rovnoběžnou s bokorysnou ve vzdálenosti $v = 2$ od středu kulové plochy.



Řešení:

Zobrazení kulové plochy je popsáno v Příkladu 1.1.7.

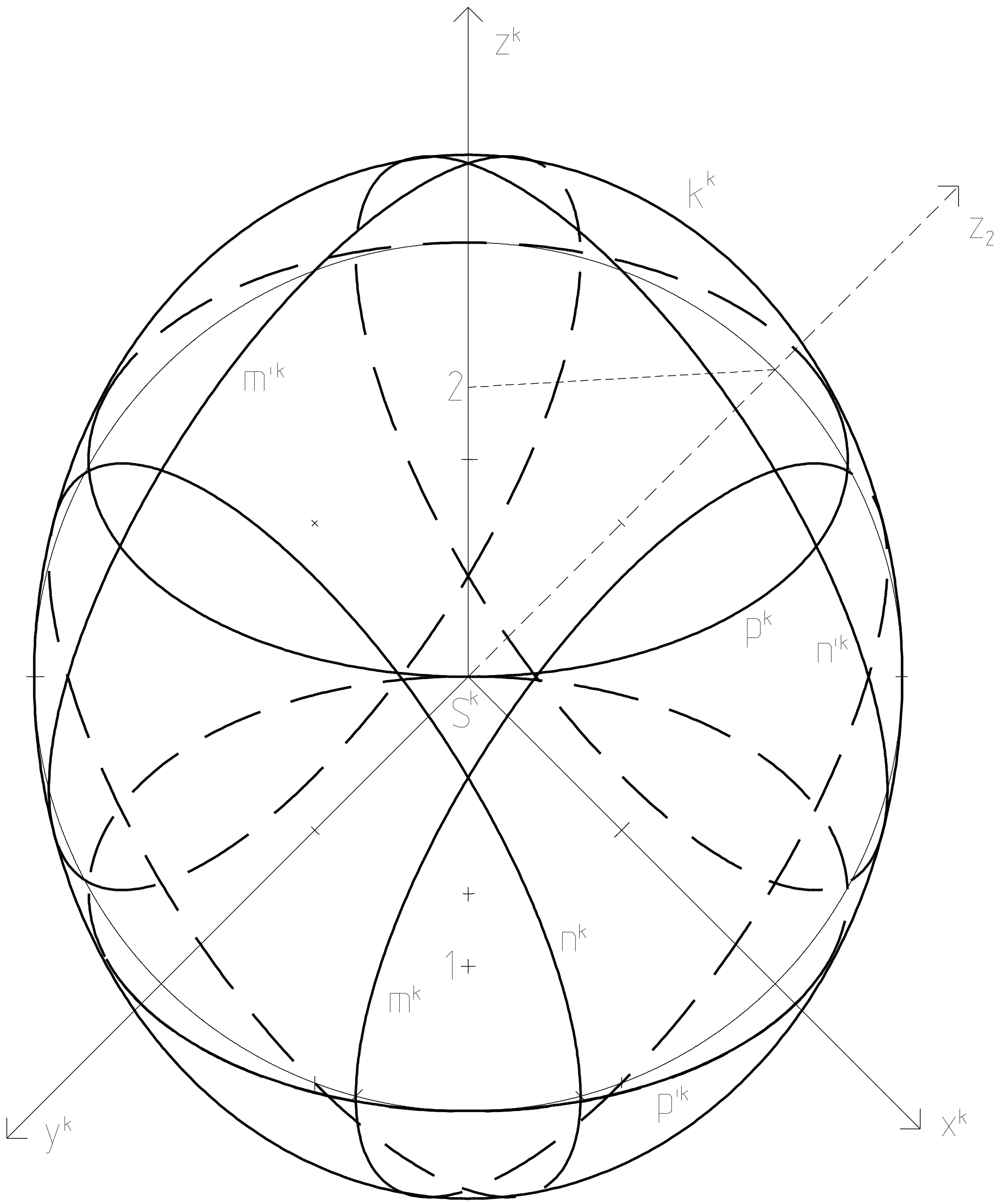
Řezem je kružnice, která se zobrazí jako elipsa. Její střed O leží na ose x a $|SO| = v$. Průmět řezu zobrazíme sdruženými průměry AB, CD.

Průmět řezu v rovině rovnoběžné s bokorysnou procházející středem kulové plochy má jeden sdružený průměr roven $2r$, což odpovídá průměru kružnice k_2 (viz Příklad 1.2.6.). Proto pro sdružený průměr AB průmětu řezu ve vzdálenosti v musí platit, že body $A^k, B^k \in$ $\in k_2, A^kB^k || y^k, O^k \in A^kB^k$. Pro druhý sdružený průměr CD průmětu řezu ve vzdálenosti v platí, že o kolik se zmenšil průměr A^kB^k elipsy řezu o tolik se zmenší druhý průměr omezený kružnicí k_2, tedy $D^k \in k_2, C^kD^k || z^k, O^k \in C^kD^k$.

Jsou dvě řešení.

Příklad 1.2.8.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{2}{3})$ zobrazte kulovou plochu o středu $S[0;0;0]$ a poloměru $r = 3$ a její řezy s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami, vedenými ve vzdálenosti $v = 1{,}5$ od středu kulové plochy.



Řešení:

Zobrazení kulové plochy je popsáno v Příkladu 1.1.7.

Řezy rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami jsou kružnice, které se zobrazí jako elipsy. Jejich středy leží na daných osách.

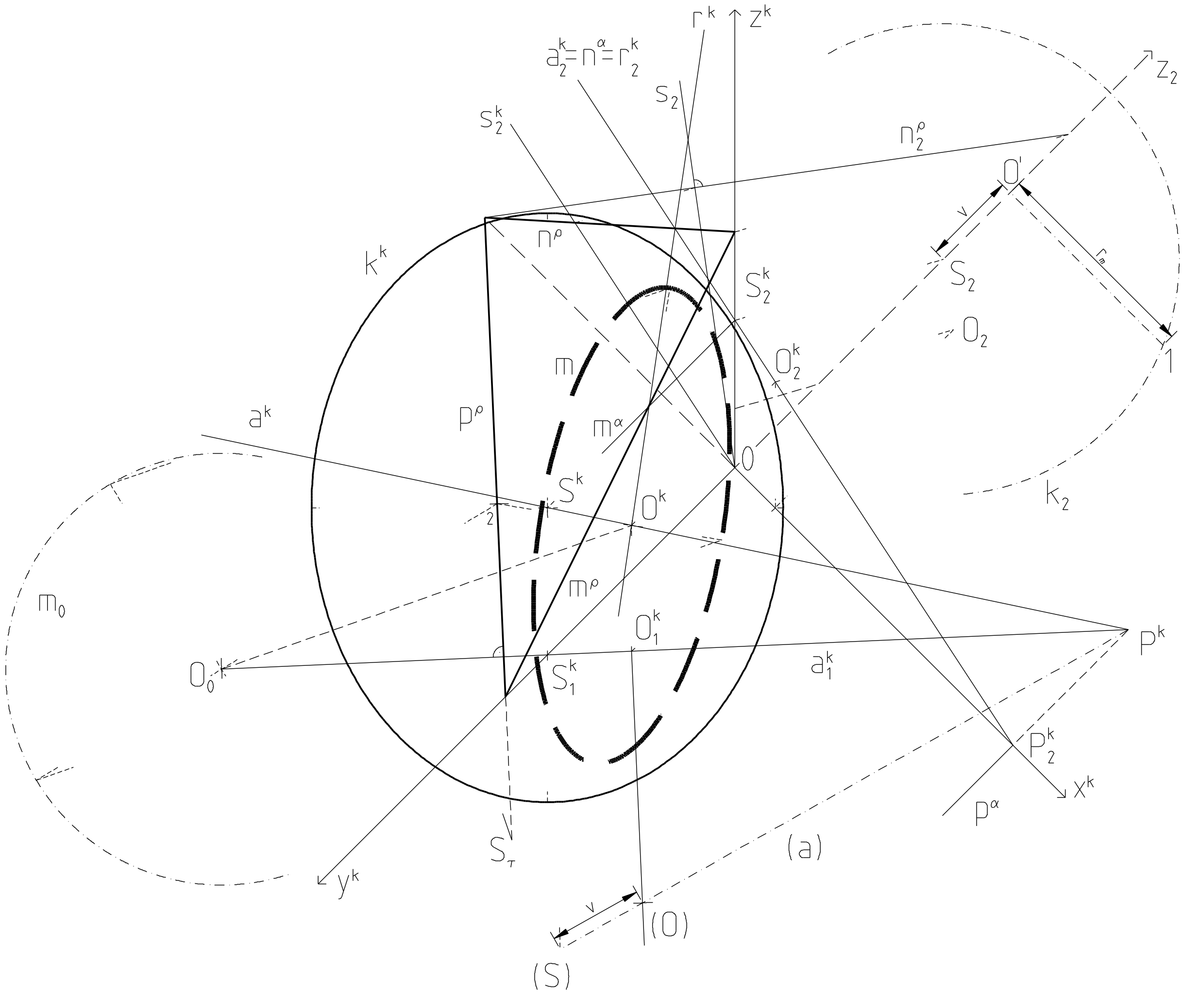
Průmětem řezu ležícího v rovině rovnoběžné s μ ve vzdálenosti v jsou dvě shodné elipsy m, m', jejichž postup konstrukce je popsán v Příkladu 1.2.7.

Průmětem řezu ležícího v rovině rovnoběžné s nárysnou ve vzdálenosti v jsou dvě shodné elipsy n, n' jejichž postup konstrukce je obdobný jako u elips m, m's výjimkou, že středy elips n, n' leží na ose y ve vzdálenosti v.

Průmětem řezu ležícího v rovině rovnoběžné s π ve vzdálenosti v jsou dvě shodné elipsy p, p', jejichž středy leží na ose z ve vzdálenosti v, hlavní osa je kolmá na osu z a vedlejší osa splývá s osou z.

Příklad 1.2.9.

V kosoúhlém promítání $(135°, \frac{1}{2})$ zobrazte řez kulové plochy o středu $S[0; 4{,}5; 5]$ a poloměru $r = 4$ rovinou $\rho(-6; 5{,}5; 8)$.



Řešení:

Zobrazení kulové plochy je popsáno v Příkladu 1.1.7. Obrysem kosoúhlého průmětu kulové plochy je elipsa, pro niž platí, že vzdálenost e ohniska a středu elipsy je rovna $q * r = 2$, vedlejí poloosa je rovna $b = 4$, a podle vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ je velikost hlavní osy rovna $a = 5$.

Sestrojíme přímku a, která je kolmá k rovině řezu ρ a prochází bodem S. Využijeme směru s kolmého na rovinu ρ. Kosoúhlý nárys a_2^k přímky a je rovnoběžný s kosoúhlým nárysem s_2^k směru s a prochází kosoúhlým nárysem S_2^k bodu S. Kosoúhlý průmět a^k přímky a prochází půdorysným stopníkem P^k přímky a a kosoúhlým průmětem S^k bodu S.

Řezem kulové plochy rovinou ρ je kružnice m o středu O, který získáme jako průsečík přímky a s rovinou ρ. Přímkou a proložíme pomocnou rovinu α kolmou k nárysně. Průsečnice r rovin α a ρ protne přímku a v hledaném bodě O.

Určíme poloměr r_m kružnice m. Tento poloměr závisí na vzdálenosti bodů S a O, kterou získáme sklopením. Na kosoúhlý půdorys a_1^k přímky a vedeme kosoúhlým půdorysem O_1^k bodu O kolmici a současně $|x^k O_2| = \left|O_1^k(O)\right|$. Sklopená přímka a, ozn. (a), prochází bodem (O) a půdorysným stopníkem P^k přímky a. Sklopený bod S, ozn. (S), získáme jako průsečík přímky (a) a rovnoběžky s přímkou $O^k(O)$ procházející kosoúhlým průmětem S^k bodu S.

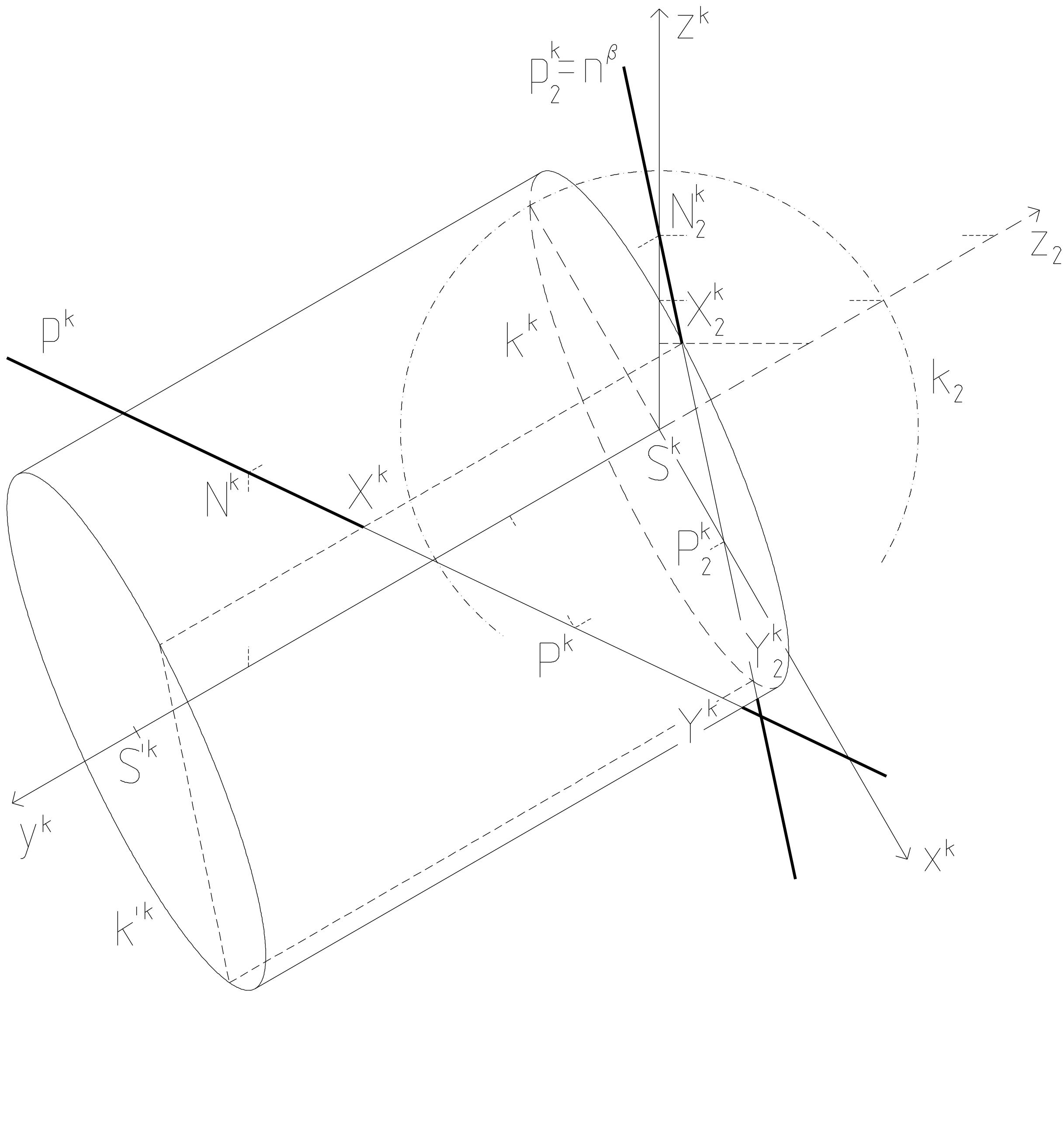
Poloměr r_m kružnice m získáme z pomocného obrázku v přiřazeném Mongeově promítání, $v = |(S)(O)|, v = |S_2O'| \in z_2, S_2O' \perp O'1, 1 \in k_2, r_m = |O'1|$.

Zobrazíme kružnici m o středu O a poloměru r_m ležící v obecné rovině ρ. Řez bude celý neviditelný.

1.3. Průnik přímky s oblým tělesem

Příklad 1.3.1.

V kosoúhlém promítání $\left(150°, \frac{1}{2}\right)$ sestrojte průsečík přímky $p = PN, P[1{,}5; 2; 0]$, $N[0; 5{,}5; 4{,}5]$, s rotačním válcem, jehož osa leží v ose y, $S[0; 0; 0], r = 3, v = 7$.



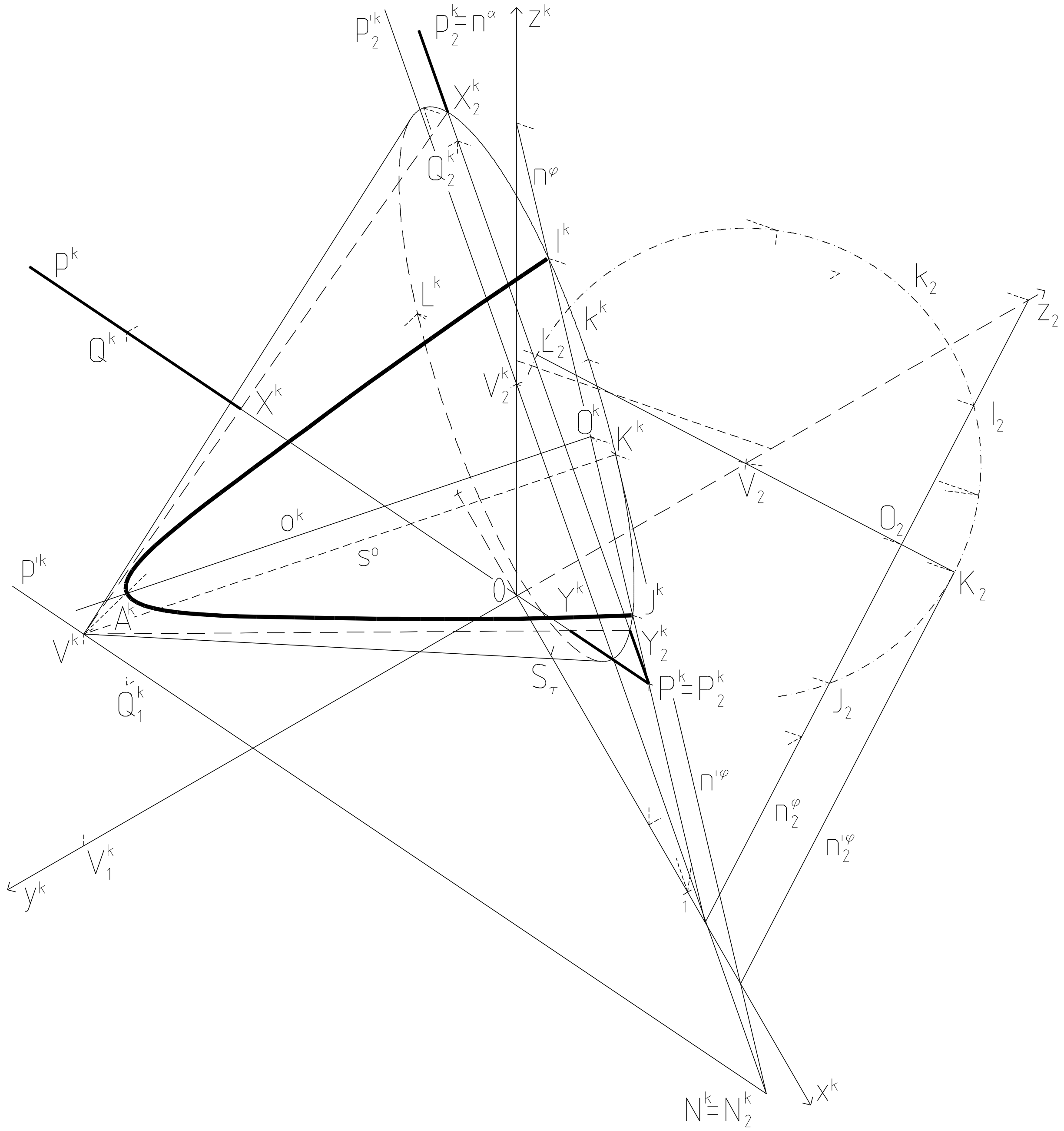
Řešení:

Válec zobrazíme stejně jako v Příkladu 1.1.4.

K určení průsečíků přímky p s rotačním válcem využijeme směrové roviny β procházející přímkou p. Sestrojíme řez touto rovinou. Najdeme její nárysnou stopu, tj. $p_2^k = n^\beta$. Povrchové přímky válce, které leží v této rovině, protínají přímku p v hledaných bodech X, Y. Určíme viditelnost.

Příklad 1.3.2.

V kosoúhlém promítání $\left(150°, \frac{4}{5}\right)$ vyšetřete průsečíky přímky $p = PQ, P[4{,}5; 0; 3]$, $Q[-2; 6{,}5; 7{,}5]$ s rotačním kuželem o podstavě v nárysně, $V[0; 8{,}5; 4{,}5], r = 4$; a průsečíky proložte na kuželi parabolu.



Řešení:

Zobrazíme rotační kužel.

K určení průsečíků přímky p s rotačním válcem využijeme vrcholové roviny α procházející přímkou p. Najdeme její nárysnou stopu, tj. $p_2^k = n^\alpha$. Povrchové přímky kužele, které leží v této rovině, protínají přímku p v hledaných bodech X, Y.

Určíme viditelnost.

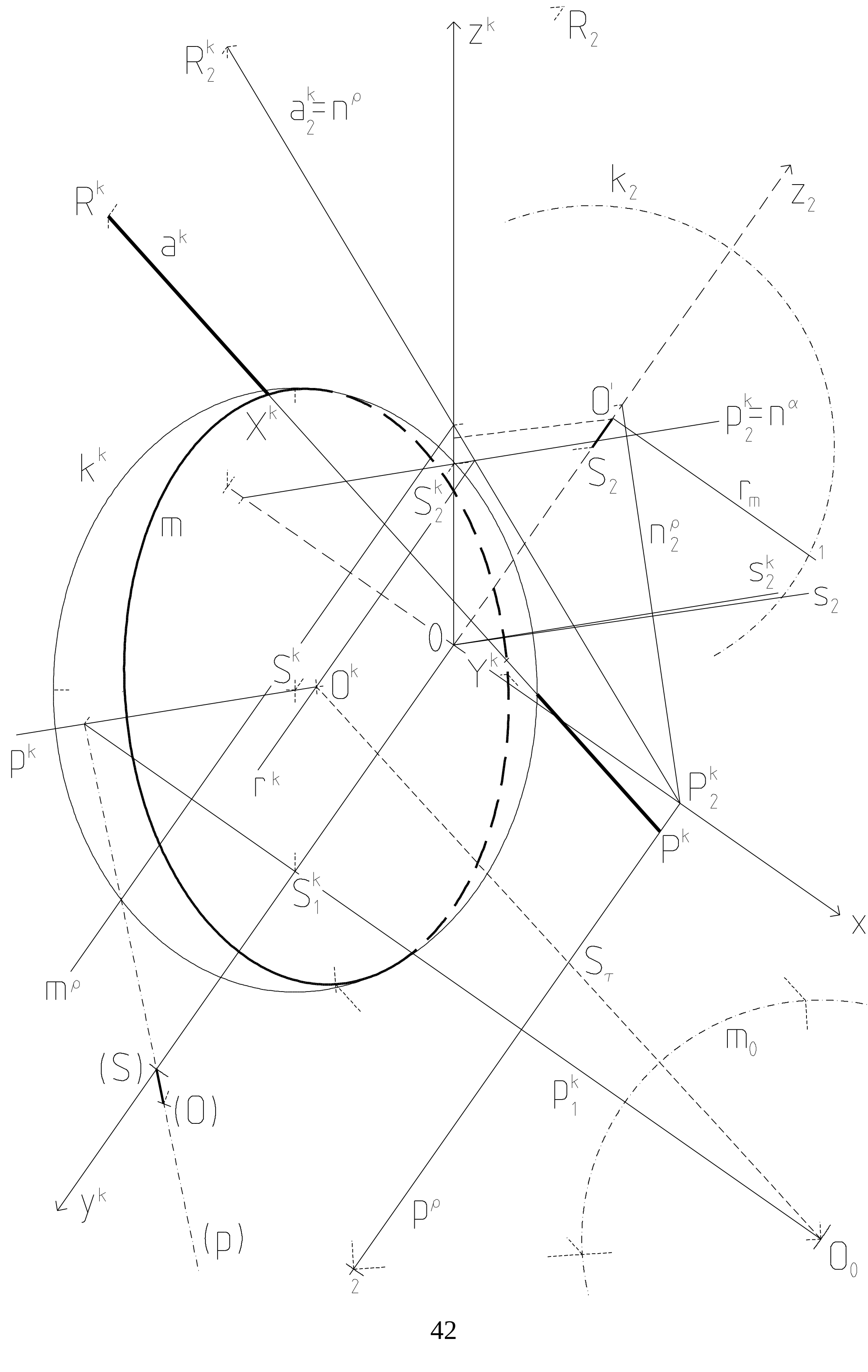
Druhým úkolem je protnout kužel v parabole procházející přímkou p. Řešením budou dvě paraboly, avšak sestrojíme pouze jednu, druhá se konstruuje analogicky jako první.

Hledáme stopy roviny φ, která prochází přímkou p a protne kužel v parabole, tudíž úběžnice n'^φ musí být tečnou podstavy kužele.

Sestrojíme přímku p', která je rovnoběžná s přímkou p a prochází vrcholem V kužele. Určíme průsečík přímky p' s rovinou podstavy kužele, tj. nárysný stopník N. Z tohoto bodu vedeme tečnu k podstavné hraně k, což je nárysná stopa n'^φroviny φ'. Nárysná stopa n^φ hledané roviny φ je rovnoběžná s tečnou n'^φ a prochází nárysným stopníkem přímky p, v našem případě bodem P ze zadání. Dále je postup stejný jako v Příkladu 1.2.4. Využíváme afinity mezi kružnicí a elipsou. Parabola je dána osou o, vrcholem A, body I, J a je celá viditelná.

Příklad 1.3.3.

Je dána kulová plocha se středem $S[0;4;3{,}5]$ a poloměrem $r=3{,}5$. Dále je dána přímka a určená body $P[4;0{,}5;0], R[-4;3;8{,}5]$. Zobrazte v kosoúhlém promítání $\left(125°,\frac{3}{4}\right)$ průsečíky přímky a s kulovou plochou.



Řešení:

Zobrazení kulové plochy je popsáno v Příkladu 1.1.7. Obrysem kosoúhlého průmětu kulové plochy je elipsa k^k, pro niž platí, že vzdálenost e ohniska a středu elipsy je rovna $q * r$, vedlejí poloosa je rovna b, a podle vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ získáme velikost a hlavní osy.

Přímkou a proložíme libovolnou pomocnou rovinu ρ. Sestrojíme řez m tělesa touto rovinou. Body X, Y, které má přímka a společné s řezem, jsou hledaným průnikem přímky s kulovou plochou.

Pomocnou rovinu ρ volíme pro zjednodušení kolmou k nárysně. Dále je postup analogický s Příkladem 1.2.9. Sestrojíme přímku p, která je kolmá k rovině řezu ρ a prochází bodem S.

Řezem kulové plochy rovinou ρ je kružnice m o středu O, který získáme jako průsečík přímky p s rovinou ρ. Určíme poloměr r_m kružnice m. Tento poloměr závisí na vzdálenosti bodů S a O, kterou získáme sklopením. Poloměr r_m kružnice m získáme z pomocného obrázku v přiřazeném Mongeově promítání; $|(S)(O)| = |S_2O'|, |S_2O'| \in z_2, r_m = |O'1|, 1 \in$ $\in k_2, S_2O' \perp O'1$.

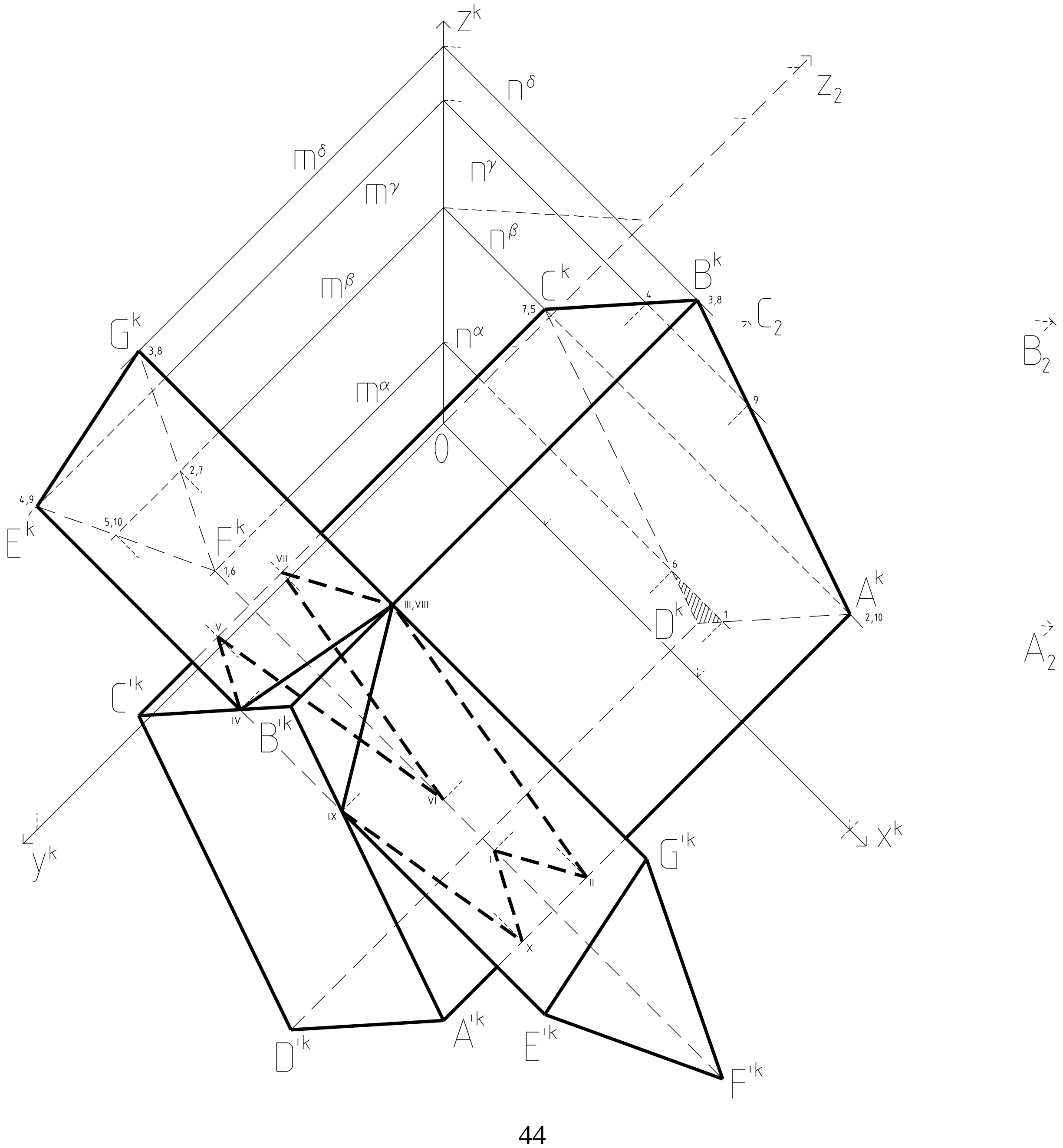
Zobrazíme kružnici m o středu O a poloměru r_m ležící v obecné rovině ρ. Průsečíky X, Y řezu m s přímkou a jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. Určíme viditelnost.

2. Průniky těles

2.1. Průnik dvou hranatých těles

Příklad 2.1.1.

V kosoúhlém promítání $\left(135°, \frac{3}{4}\right)$ zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ a kolmého trojbokého hranolu $EFGE'F'G'$. Podstava $ABCD$ čtyřbokého hranolu leží v rovině ν, $A[8; 0; 4]$, $C[2; 0; 4]$, $A'[8; 8; 4]$, podstava EFG trojbokého hranolu leží v rovině μ, $E[0; 8; 6]$, $F[0; 4{,}5; 1{,}5]$, $G[0; 6; 7]$, $E'[10; 8; 6]$.



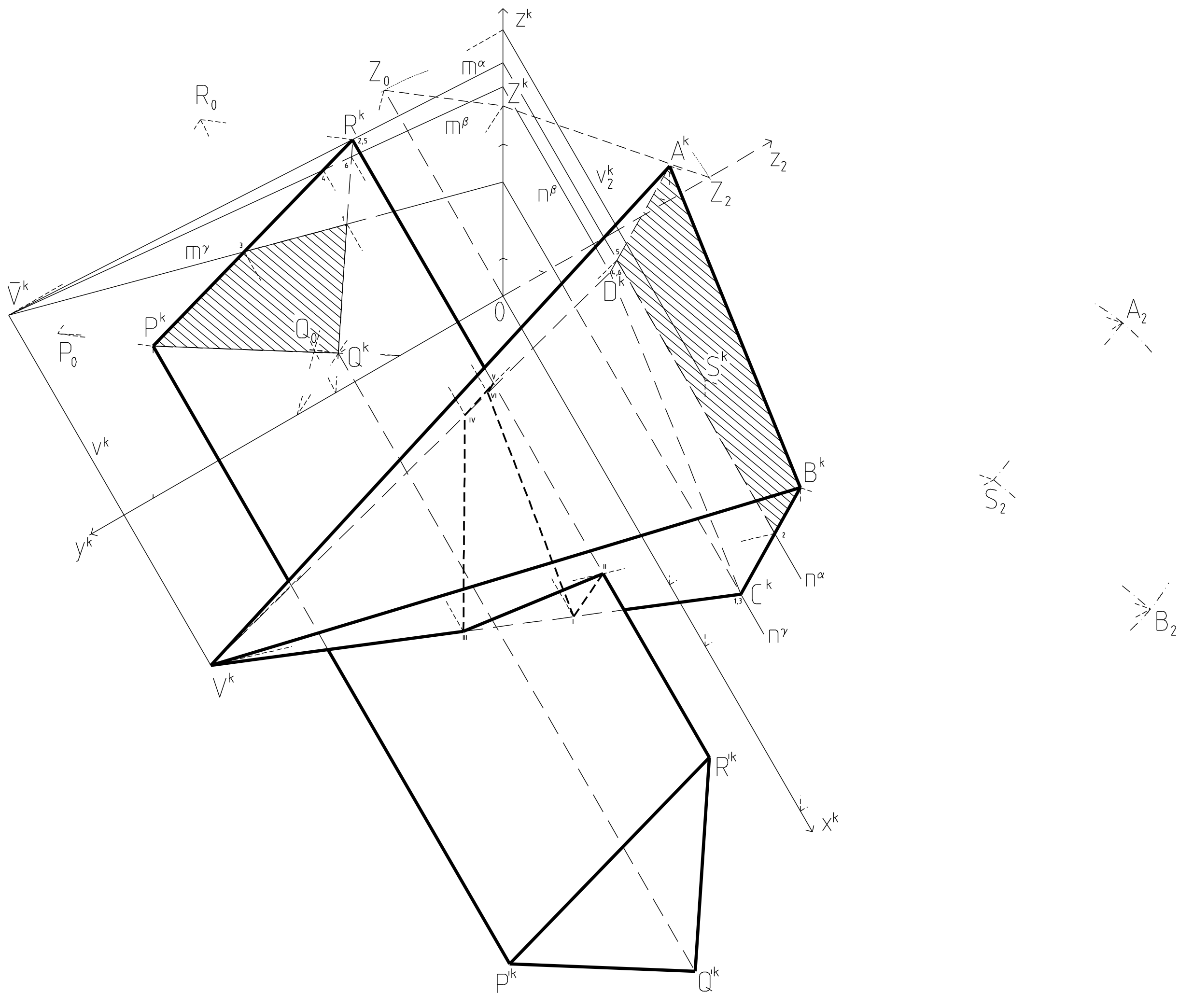
Řešení:

Sestrojíme kosoúhlý obraz pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavou v nárysně. Podstava trojbokého hranolu leží v rovině μ. Protože je to kolmý hranol, jsou jeho boční hrany kolmé k bokorysně, a tudíž rovnoběžné s osou x. Zobrazí se proto ve skutečné velikosti.

Hranami $EE', FF', GG', AA', BB', CC'$ proložíme pomocné směrové roviny pro oba hranoly. Hranou DD' neprochází žádná pomocná směrová rovina, která by zároveň protínala i druhý hranol. Tato hrana tedy leží v liché části. Pomocné roviny jsou rovnoběžné s půdorysnou a jsou navzájem rovnoběžné. Stopy roviny se zobrazí jako přímky procházející vrcholy podstav těles. Vzhledem k poloze podstav těles platí, že $A^k \in n^\beta, B^k \in n^\delta, C^k \in n^\beta, E^k \in m^\gamma, F^k \in$ $\in m^\alpha, G^k \in m^\delta$. Sestrojíme řezy hranolů těmito rovinami a určíme společné body hran a řezů. Například v rovině α leží vrcholy 1 a 6 hledané průnikové čáry. Získali jsme tedy vrcholy hledané průnikové čáry. Pro usnadnění konstrukce stran průnikové čáry zavedeme číslování. Z číslování je možné vidět, že průniková lomená čára je tvořena z jedné části, a tedy že průnik je částečný. Po sestrojení stran průnikové lomené čáry zbývá už jen rozhodnout o viditelnosti.

Příklad 2.1.2.

V kosoúhlém promítání $\left(150°, \frac{4}{5}\right)$ zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou v nárysně, $S[8{,}5; 0; 7], A[7; 0; 11], v = 12$, s pravidelným trojbokým hranolem PQR s podstavou v bokorysně, $P[0; 8{,}5; 4], Q[0; 4; 1], v = 15$.



Řešení:

Kosoúhlý průmět $A^k B^k C^k D^k$ podstavy jehlanu sestrojíme z přiřazeného Mongeova promítání. Kosoúhlý průmět $P^k Q^k R^k$ podstavy hranolu najdeme z otočené polohy $P_0 Q_0 R_0$ do půdorysny užitím afinity $\mathcal{A}(y^k, Z^k \rightarrow Z_0)$.

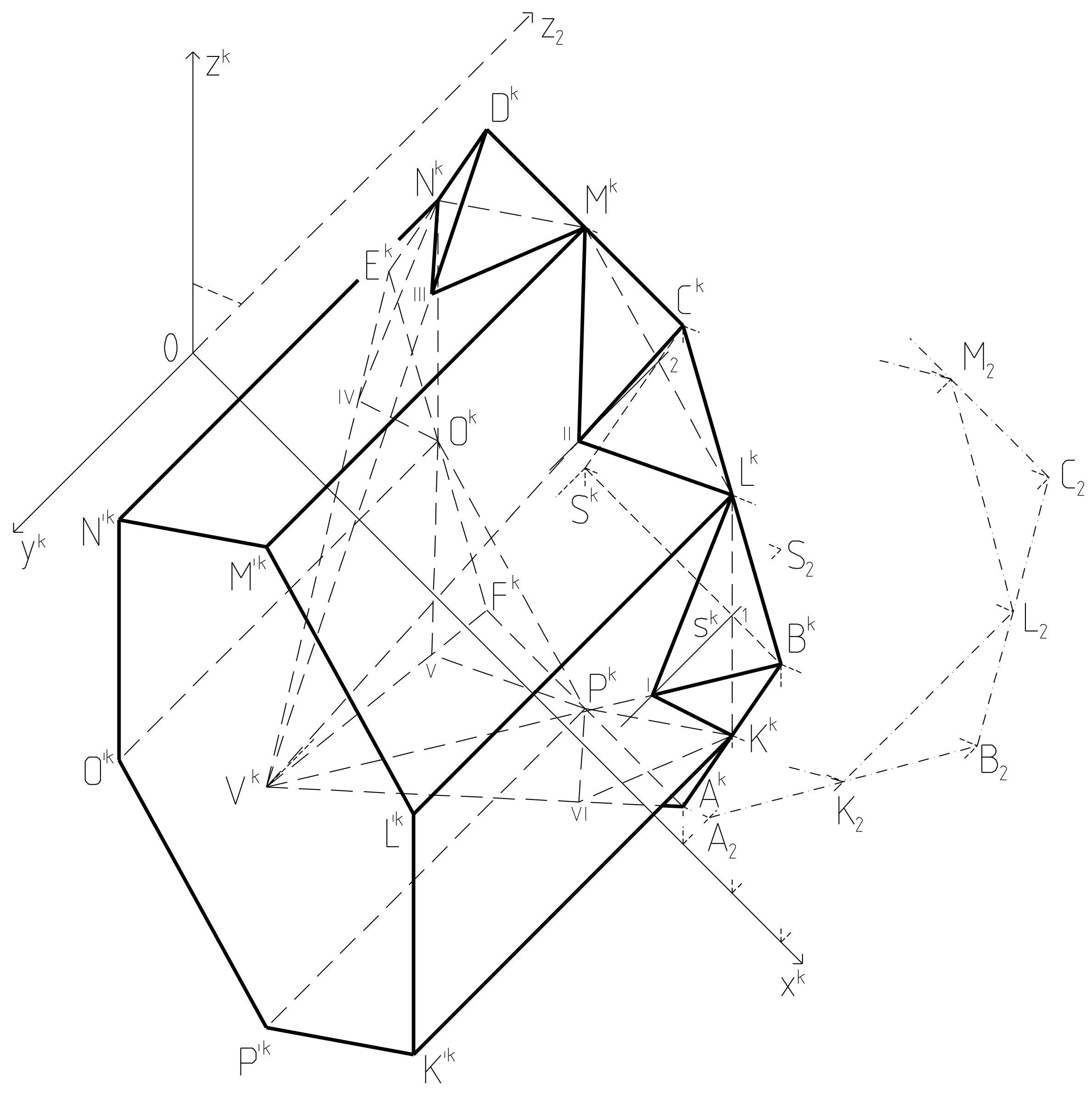
Ke stanovení průniku užijeme společných vrcholových rovin příslušné jehlanové plochy a směrových rovin příslušné hranolové plochy. Všechny tyto roviny procházejí vrcholovou přímkou v, která je určena vrcholem V jehlanové plochy a směrem hran hranolové plochy, $V^k \in v^k, S^k \in v_2^k, v^k || v_2^k || P^k P'^k$. Takže soustava pomocných rovin tvoří svazek s průsečnicí v. Nárysné stopy rovin jsou vzhledem k poloze přímky v navzájem rovnoběžné a bokorysné stopy tvoří svazek přímek o středu $\bar{V}$.

Hranami PP', QQ', AA', BB' neprochází žádná pomocná rovina svazku, která by protínala obě tělesa, tedy tyto hrany leží v lichých částech. Ostatními hranami proložíme pomocné roviny. Vzhledem k poloze podstav těles platí, že $R^k \in m^\alpha, D^k \in n^\beta, C^k \in n^\gamma$. Sestrojíme řezy těmito rovinami a určíme společné body hran a řezů. Získali jsme tedy vrcholy hledané průnikové čáry. Pro usnadnění konstrukce stran průnikové čáry zavedeme číslování. Z číslování je možné vidět, že průniková lomená čára je tvořena z jedné části, a tedy že průnik je částečný. Průnikový mnohoúhelník má 6 vrcholů. Hrana jehlanové plochy jdoucí bodem C, ozn. číslování 1, podstavy $ABCD$ a povrchová přímka hranolové plochy jdoucí odpovídajícím bodem 1 se protínají ve vrcholu I průniku, atd.

Rozhodneme o viditelnosti.

Příklad 2.1.3.

V kosoúhlém promítání $(135°, 1)$ sestrojte průnik pravidelného šestibokého jehlanu v poloze průčelné, $S[8; 0; 4], r = 4, v = 6{,}5$, a souosého stejně vysokého šestibokého hranolu, jehož vrcholy podstavy jsou středy hran podstavy jehlanu.



Řešení:

Sestrojíme podstavu $ABCDEF$ jehlanu v přiřazeném Mongeově promítání ve skutečné velikosti, $AF||x$, a podstavu $KLMNOP$ hranolu tak, že $K \in AB, |AK| = |KB|$, a podobně. Vše kosoúhle promítneme a naneseme výšku v.

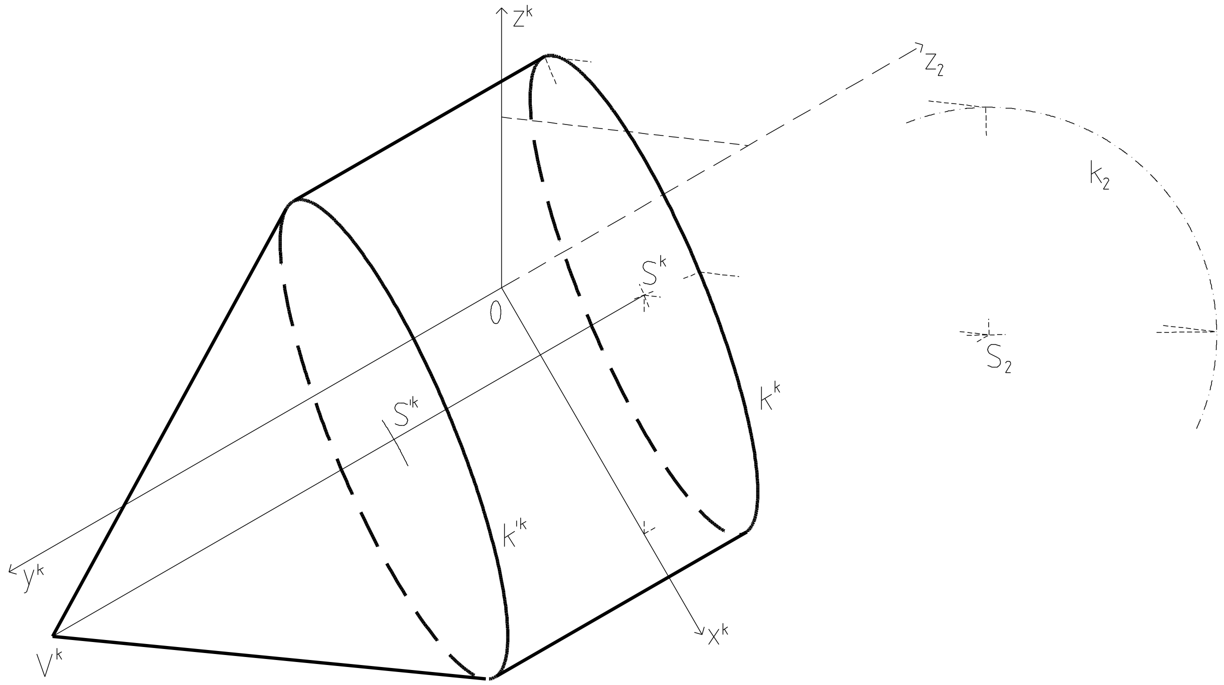
Průnik obou těles vyřešíme tak, že sestrojíme průsečíky bočních hran jehlanu s hranolem. Například boční hranou BV jehlanu proložíme nárysně promítací rovinu, $B^k S^k$ je její nárysná stopa, ta protíná podstavnou hranu KL v bodě 1. Roviny (BVS) a (KLL') se protínají v průsečnici s, která prochází bodem 1 a je rovnoběžná s boční hranou LL' hranolu. Tato průsečnice s protne hranu BV jehlanu v bodě I a to je hledaný průsečík. Stejným způsobem sestrojíme i ostatní průsečíky II, III, IV, V, VI na zbývajících hranách jehlanu. Konstrukci průsečíků můžeme zjednodušit, jelikož body $I, II, \dots, VI$ leží v rovině rovnoběžné s nárysnou, musí být $I - II \,||\, B^k C^k, II - III \,||\, C^k D^k$, atd.

Na závěr rozhodneme o viditelnosti.

2.2. Průnik dvou oblých těles

Příklad 2.2.1.

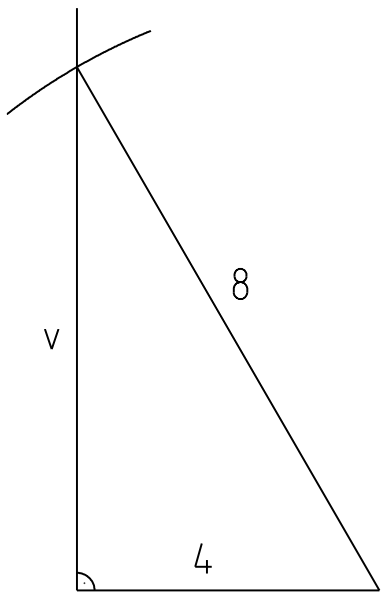
V kosoúhlém promítání $\left(150°, \frac{3}{5}\right)$ zobrazte těleso složené z rotačního válce a rovnostranného rotačního kužele. Jednou podstavou válce je kruh o středu $S[5; 0; 7]$ a poloměru $r = 4$ ležícího v nárysně, druhá podstava je současně podstavou kužele. Celková výška tělesa je $m = 12$.



Řešení:

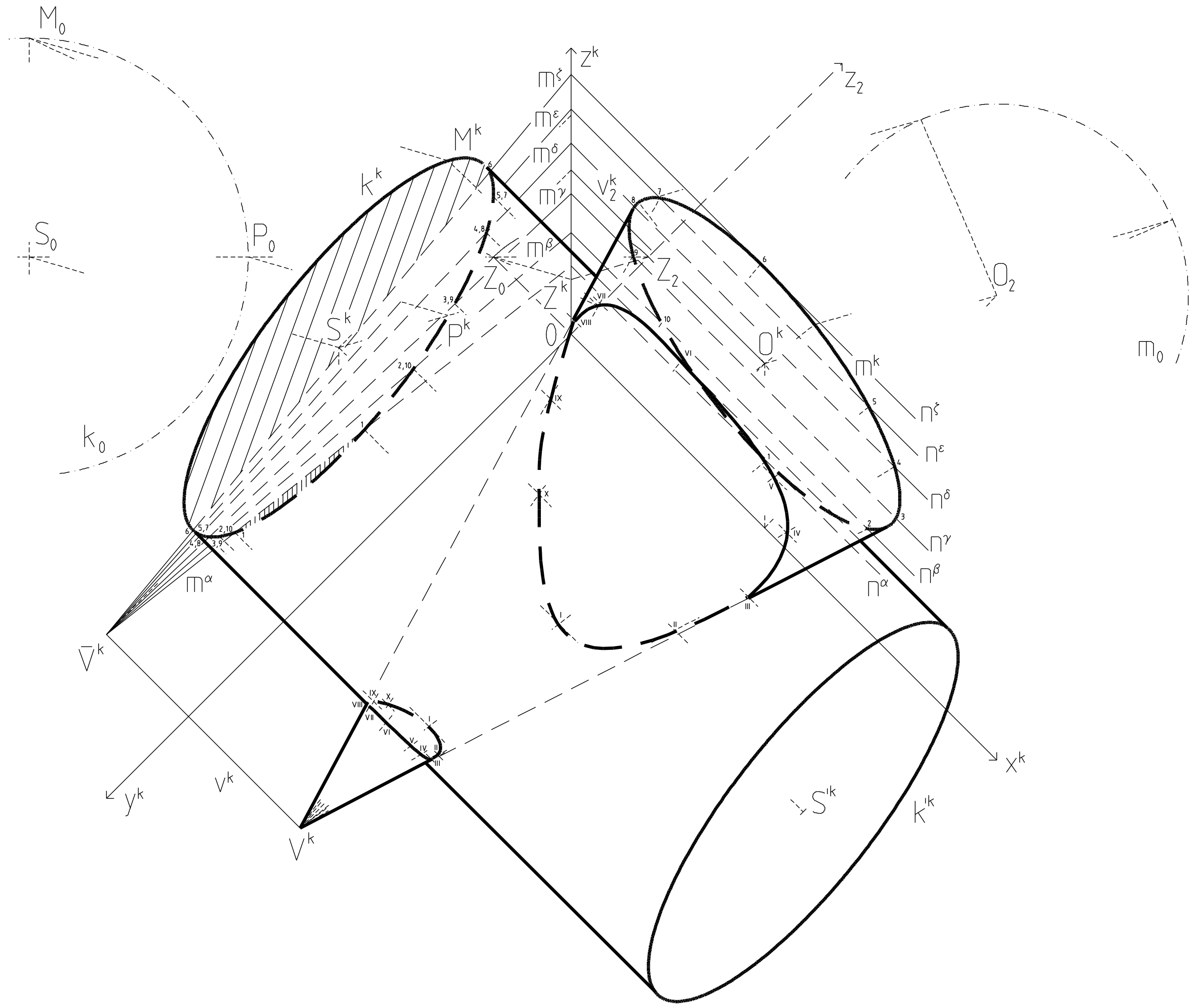
Podstavu válce se středem S, která leží v nárysně, sestrojíme stejně jako v Příkladu 1.1.1. Jelikož známe celkovou výšku m složeného tělesa můžeme sestrojit vrchol V kužele. Rovnostranný kužel je kužel, jehož průměr podstavy se rovná délce jeho strany. Z pomocného obrázku trojúhelníka, kdy jeho přepona je délka strany, tedy $s = 8$, a jedna jeho odvěsna je polovina průměru, tedy $r = 4$, získáme výšku v kužele.

Zobrazíme těleso.



Příklad 2.2.2.

V kosoúhlém promítání $\left(135°, \frac{1}{2}\right)$ zobrazte průnik rotačního válce s podstavou v bokorysně, $S[0; 6; 5], r = 4, v = 12$, a rotačního kužele s podstavou v nárysně, $O[5; 0; 6], r = 3{,}5$, $v = 12$.



Řešení:

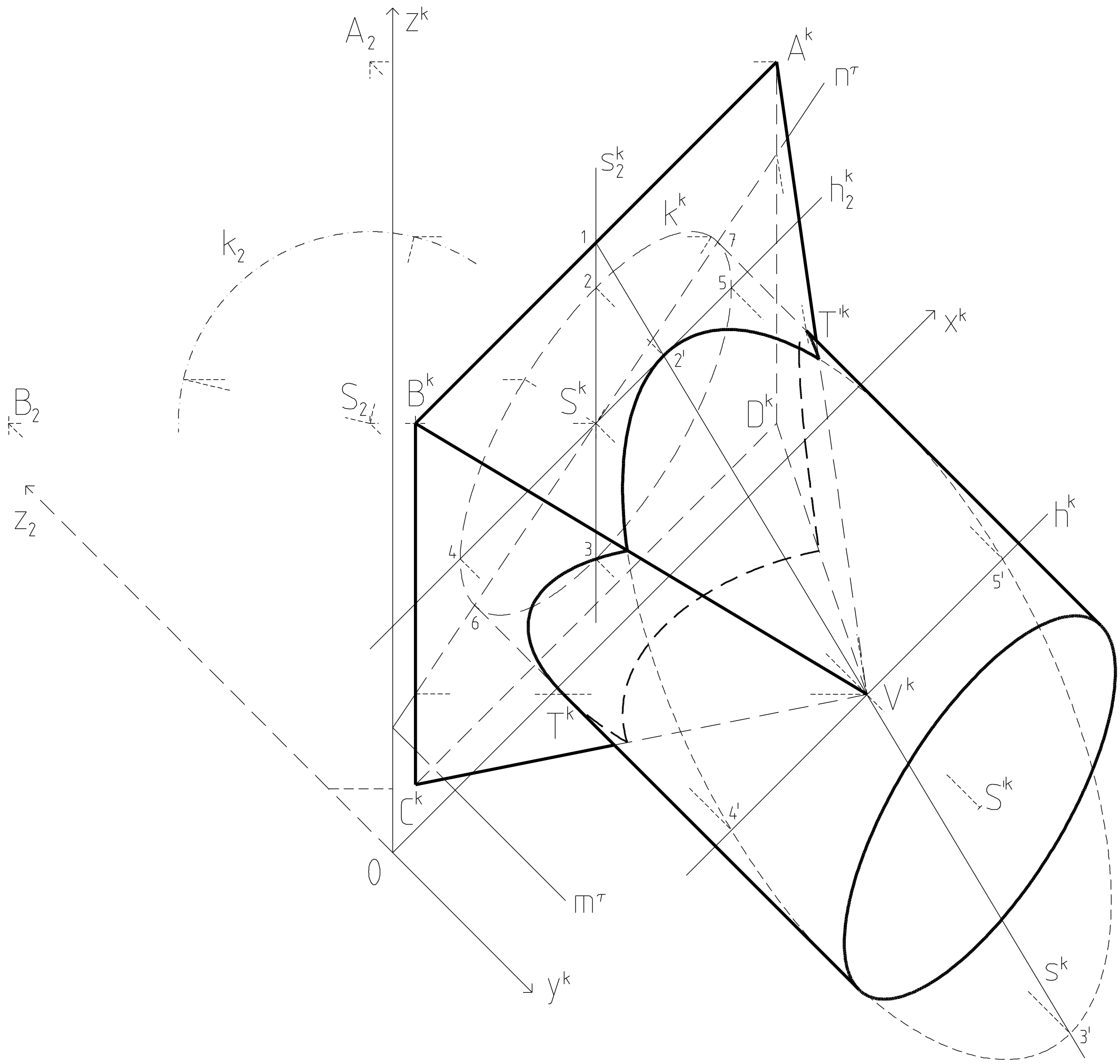
Podstavu rotačního válce, která leží v bokorysně, získáme otočením do půdorysny s využitím afinity $\mathcal{A}(y^k, Z^k \to Z_0)$. V otočení sestrojíme libovolné dva sdružené průměry MN, PQ podstavné kružnice k, které kosoúhle promítneme. Podstavu rotačního kužele, která leží v nárysně, sestrojíme stejně jako v Příkladu 1.1.1.

Ke stanovení průniku užijeme společných vrcholových rovin příslušné kuželové plochy a směrových rovin příslušné válcové plochy. Všechny tyto roviny procházejí vrcholovou přímkou v, která prochází vrcholem V kužele a je rovnoběžná s osou válce. Nárysné stopy pomocných rovin jsou vzhledem k poloze přímky v navzájem rovnoběžné a bokorysné stopy tvoří svazek přímek o středu $\bar{V} = \mu \cap v$. Roviny α a ζ vymezují na válci liché části. V rovinách γ a δ leží body, v nichž se mění viditelnost průnikové čáry. Dále sestrojíme řezy obou těles pomocnými rovinami a určíme jejich společné body. Tyto body spojíme plynulou čarou a rozhodneme o viditelnosti. Průniková čára je tvořena ze dvou částí, a proto je průnik úplný.

2.3. Průnik oblého a hranatého tělesa

Příklad 2.3.1.

V kosoúhlém promítání $\left(45°, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého jehlanu a rotačního válce. Jehlan i válec mají podstavu v nárysně, společným středem jejich podstav je bod $S[4{,}5; 0; 5]$. Jedním vrcholem podstavy jehlanu je bod $A[8{,}5; 0; 9]$, výška jehlanu je $v_j = 6$. Poloměr válce je $r = 3$ a výška válce je $v_v = 8{,}5$.



Řešení:

Sestrojíme kosoúhlý obraz pravidelného čtyřbokého jehlanu a rotačního válce s podstavami ležícími v nárysně.

Průnikovou čáru sestrojíme pomocí řezů příslušné válcové plochy rovinami, které obsahují stěny jehlanu. Tyto roviny protínají příslušný válec v elipsách. Například rovina obsahující stěnu ABV jehlanu protne válec v elipse, která je určená sdruženými průměry $2' - 3', 4' - 5'$. Není potřeba sestrojovat stopy rovin, jelikož příklad je volen tak, že vrchol V kužele je středem řezných elips. Konstrukci lze zjednodušit pomocí přímky h, která je rovnoběžná s hranou AB jehlanu a prochází vrcholem V jehlanu, a přímky s, která prochází vrcholem V jehlanu a její kosoúhlý nárys je rovnoběžný s hranou BC. Analogicky sestrojíme zbylé řezy.

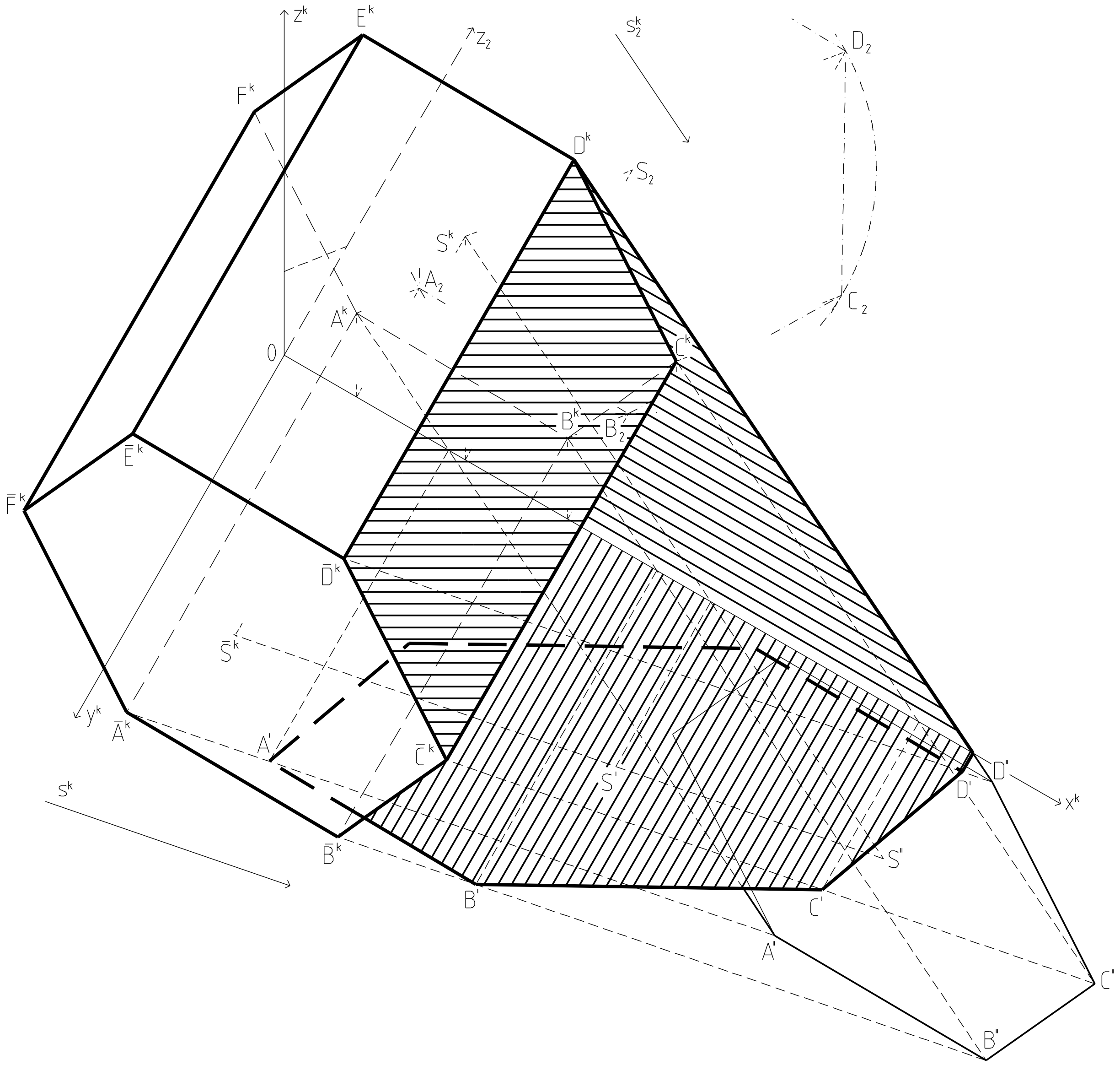
Na závěr sestrojíme body přechodu viditelnosti T, T' průnikové čáry na povrchových přímkách válce, tedy body $6, 7$ proložíme rovinu τ kolmou k nárysně. Určíme celkovou viditelnost.

3. Osvětlení těles

3.1. Rovnoběžné osvětlení těles

Příklad 3.1.1.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení dané světelným paprskem s pravidelného šestibokého hranolu se středem S v nárysně, vrcholem A a výškou v.



Řešení:

Bodem $\bar{A}$ horní podstavy hranolu vedeme světelný paprsek rovnoběžný s daným směrem osvětlení s a sestrojíme jeho nárysný stopník A''. Tento bod je vržený stín bodu $\bar{A}$ na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku A' dostáváme vržený stín bodu $\bar{A}$ na půdorysnu. Z obou stopníků světelného paprsku bodu $\bar{A}$ je skutečným vrženým stínem bodu $\bar{A}$ ten, který je na světelném paprsku blíže k bodu $\bar{A}$, tedy blíže ke světelnému zdroji. V našem případě je to půdorysný stopník A'. Stopník A'' bodu $\bar{A}$ je ideálním vrženým stínem.

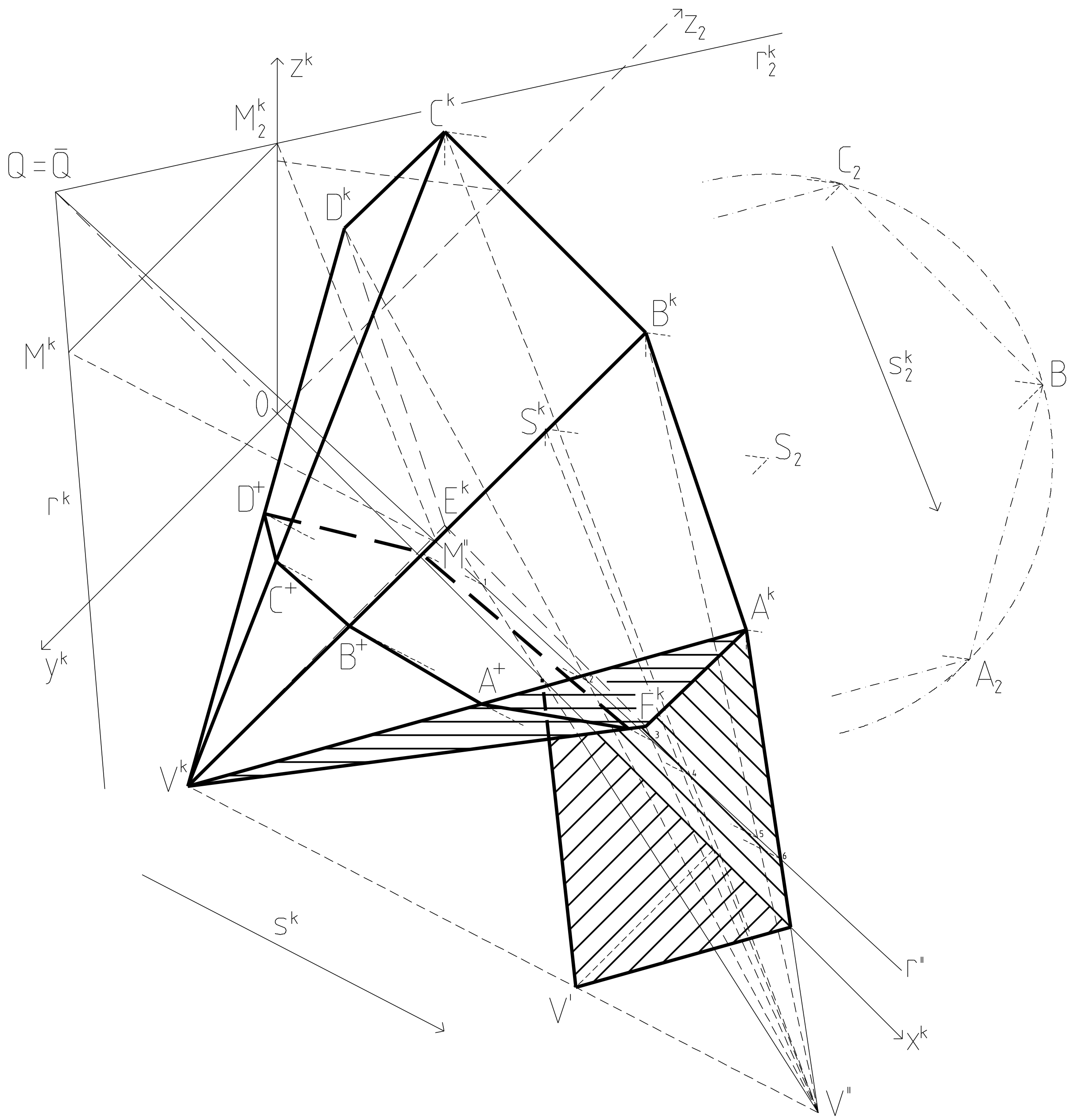
Dostáváme vržený stín hrany $A\bar{A}$ a stejným způsobem sestrojíme vržené stíny zbývajících hran.

Pro určení mezí vlastního stínu potřebujeme najít tzv. styčné světelné paprsky, které určíme pomocí světelných paprsků, které se dotýkají tělesa v jediném bodě. Z obrázku vidíme, kde má světelný paprsek s podstavou tělesa právě jeden společný bod. Tedy styčné světelné paprsky budou procházet body A a D. Hrany $A\bar{A}$ a $D\bar{D}$ budou mezí vlastního a vrženého stínu tělesa.

Hrany $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}$ a $D\bar{D}$ a k nim příslušné stěny tělesa budou ve stínu.

Příklad 3.1.2.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení přímky r a jehlanu s podstavou $ABCDEF$ v nárysně a s vrcholem V.



Řešení:

Světelný paprsek rovnoběžný se směrem osvětlení s povedeme bodem V a sestrojíme jeho nárysný stopník V''. Tento bod je vržený stín bodu V na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku V' dostáváme vržený stín bodu V na půdorysnu, který je zároveň skutečným vrženým stínem.

Pro určení meze vlastního stínu potřebujeme najít svazek přímek o středu V'' procházející dvěma vrcholy podstavy tak, že podstavu jehlanu protínají pouze v jediném bodě. V našem případě budou přímky procházet body A a E. Hrany AV a EV budou mezí vlastního a vrženého stínu tělesa.

Hrany AV, FV a EV a k nim příslušné stěny budou ve stínu.

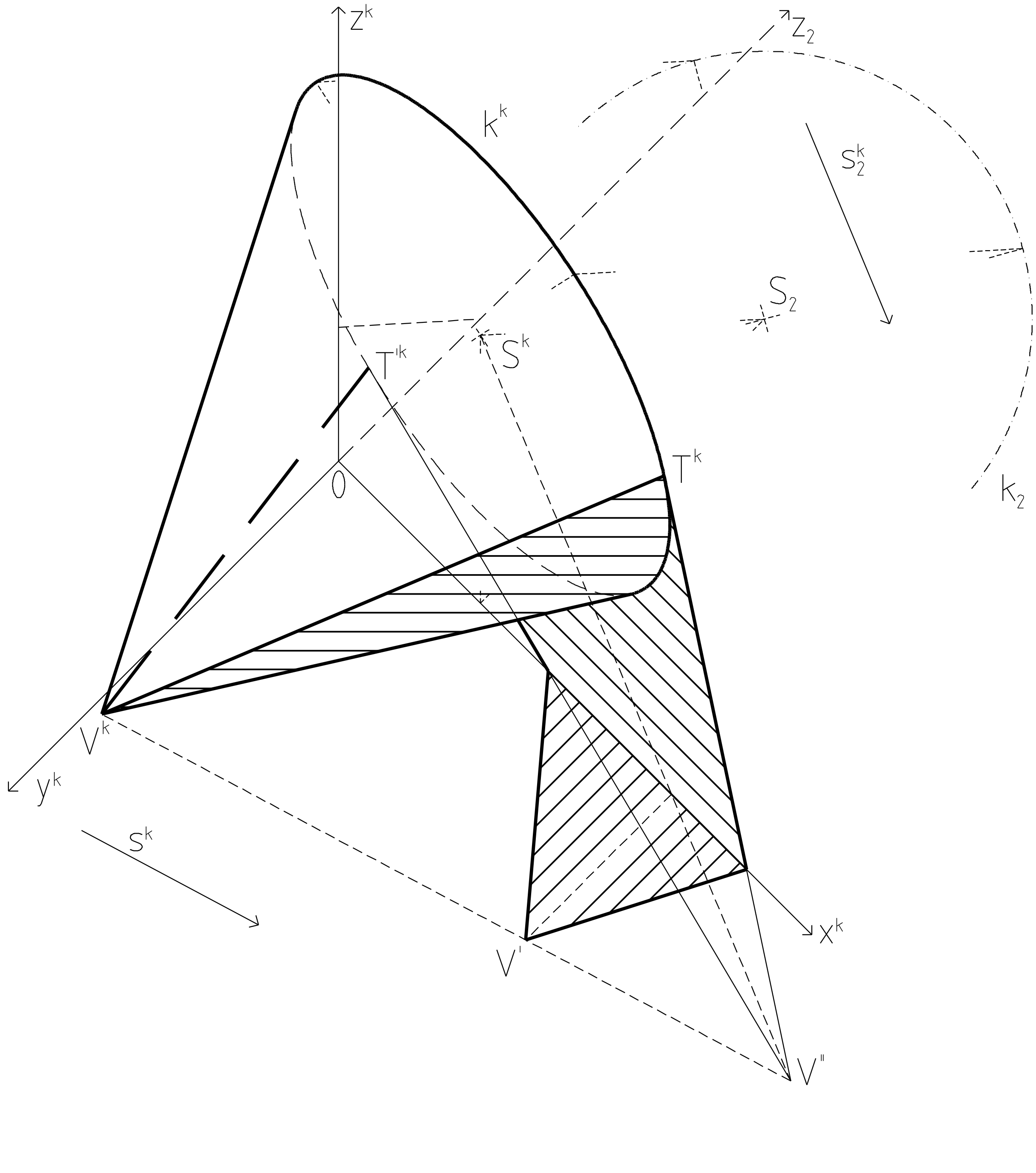
Přímkou r proložíme světelnou rovinu, která je určená přímkou r a světelným paprskem s.

Sestrojíme řez $A^+B^+C^+D^+E^+F^+$ jehlanu touto světelnou rovinou přímky r.

Dostáváme vržený stín přímky na těleso.

Příklad 3.1.3.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního kužele s podstavou v nárysně a s vrcholem V.



Řešení:

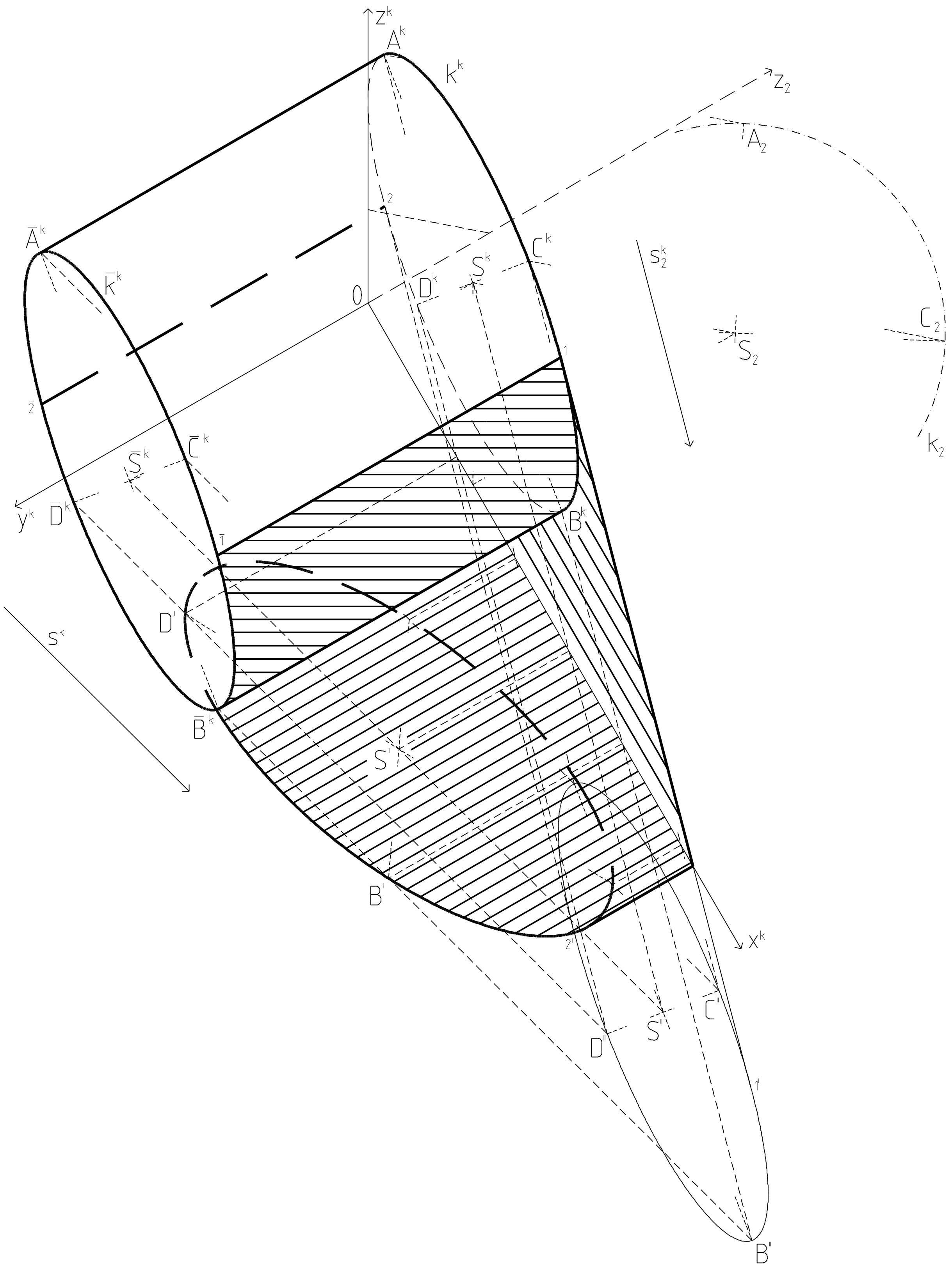
Světelný paprsek rovnoběžný se směrem osvětlení s povedeme bodem V a sestrojíme jeho nárysný stopník V''. Tento bod je vržený stín bodu V na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku V' dostáváme vržený stín bodu V na půdorysnu, který je zároveň skutečným vrženým stínem.

Pro určení meze vlastního stínu potřebujeme najít svazek přímek o středu V'', které budou tečnami podstavy kužele. Povrchové přímky VT a VT' kužele budou mezí vlastního a vrženého stínu tělesa.

Vyznačíme vlastní a vržený stín rotačního kužele.

Příklad 3.1.4.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního válce s první podstavou o středu S v nárysně a s druhou podstavou o středu S'.



Řešení:

Hlavním vrcholem $\bar{B}$ průmětu horní podstavy válce vedeme světelný paprsek rovnoběžný s daným směrem osvětlení s a sestrojíme jeho nárysný stopník B''. Tento bod je vržený stín bodu $\bar{B}$ na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku B' dostáváme vržený stín bodu $\bar{B}$ na půdorysnu, který je zároveň skutečným vrženým stínem. Stopník B'' bodu $\bar{B}$ je ideálním vrženým stínem.

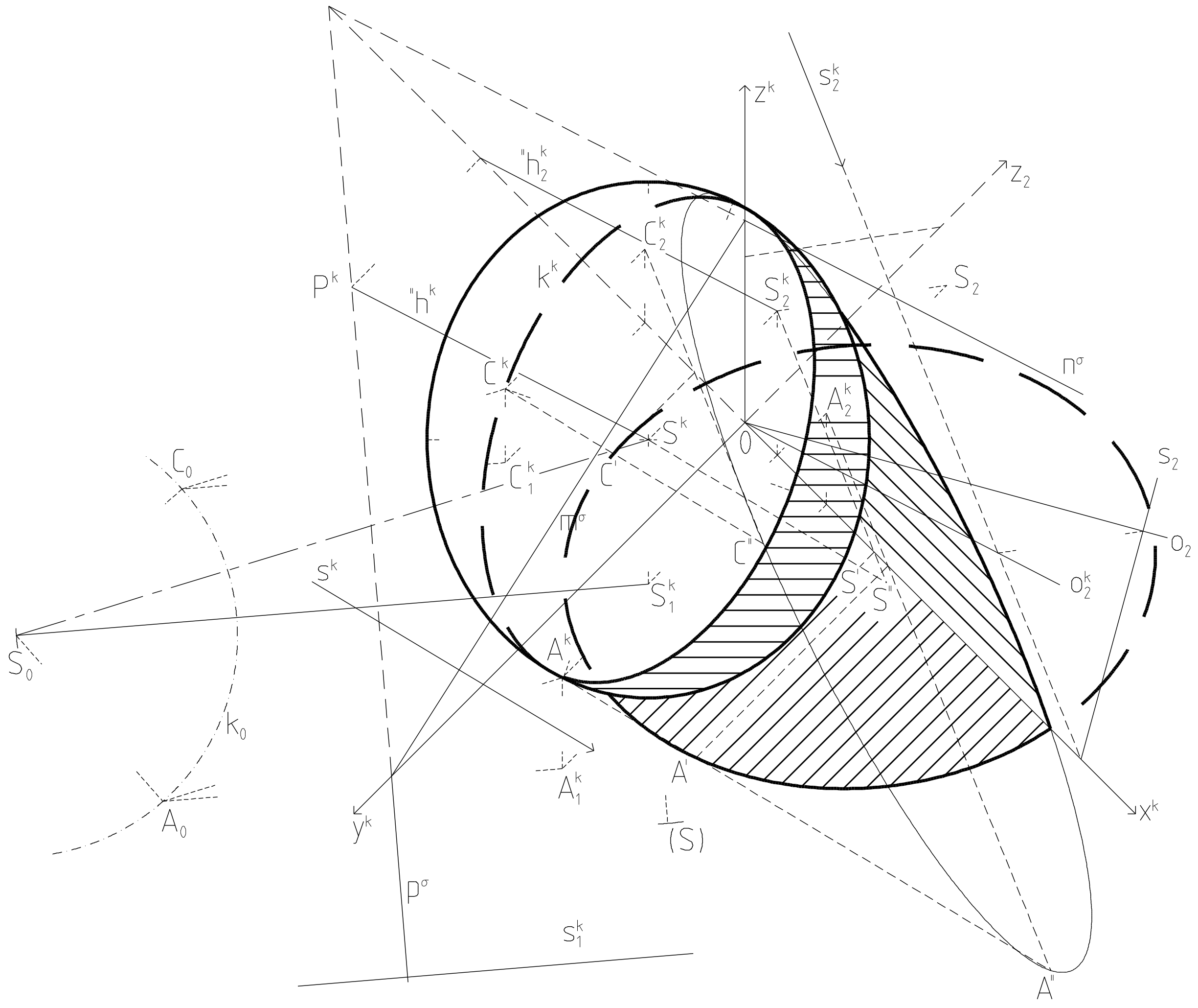
Dostáváme vržený stín povrchové přímky $B\bar{B}$ válce a stejným způsobem sestrojíme vržené stíny dalších bodů průmětu horní podstavy válce.

Pro určení mezí vlastního stínu potřebujeme najít styčné světelné paprsky, které určíme pomocí rovnoběžných světelných paprsků, které se dotýkají tělesa v jediném bodě. Tedy styčné světelné paprsky budou tečnami podstavy válce s dotykovými body 1 a 2. Povrchové přímky $1\bar{1}$ a $2\bar{2}$ budou mezí vlastního a vrženého stínu tělesa.

Vyznačíme vlastní a vržený stín tělesa.

Příklad 3.1.5.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení dané světelným paprskem s kulové plochy se středem S.



Řešení:

Při rovnoběžném osvětlení kulové plochy je mezí vlastního stínu hlavní kružnice, která leží v rovině kolmé ke směru osvětlení. Tedy sestrojíme rovinu σ, která je kolmá na přímku s a prochází středem S kulové plochy. K tomu využijeme směru o hlavních přímek druhé osnovy hledané roviny. Půdorysná stopa p^{σ} roviny σ se zobrazí jako kolmice na kosoúhlý půdorys s_1^k přímky s a prochází půdorysným stopníkem P^k hlavní přímky druhé osnovy. Nárysná stopa n^{σ} roviny σ je rovnoběžná se směrem o_2^k.

Středem hlavní kružnice k je střed kulové plochy S a poloměr hlavní kružnice k je stejný jako poloměr dané kulové plochy. Hlavní kružnice se zobrazí jako elipsa se sdruženými průměry AB, CD, které získáme z otočení do půdorysny. Přitom využíváme afinity $\mathcal{A}(p^{\sigma}, S^k \to S_0)$.

V obrázku jsou pro přehlednost vyznačeny pouze body A a C.

Vrženým stínem kulové plochy na nárysnu je elipsa se sdruženými průměry $A''B'', C''D''$, která vznikne osvětlením bodů meze vlastního stínu kulové plochy.

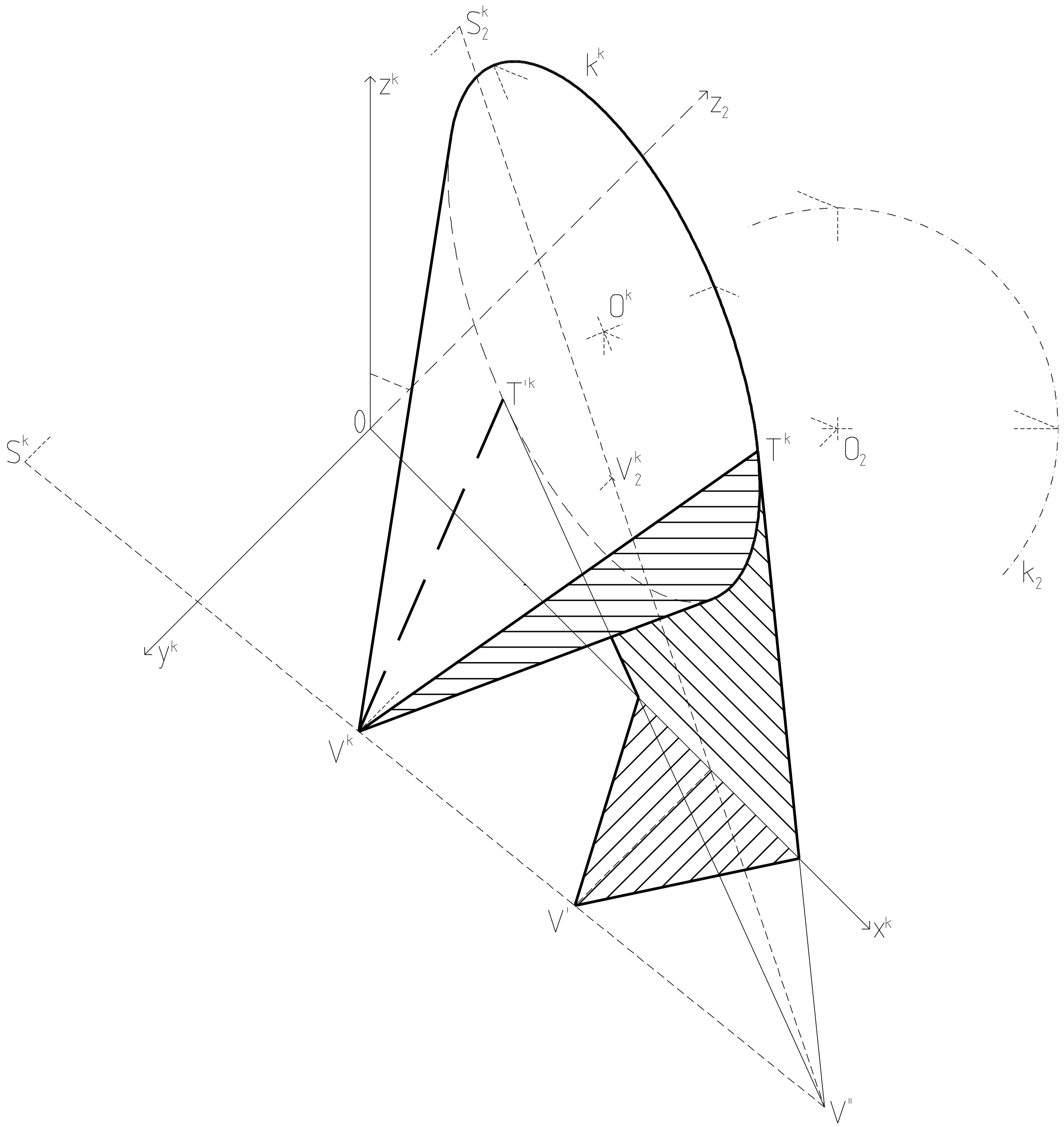
Na závěr sestrojíme vržený stín $A'B'C'D'$ hlavní kružnice na půdorysnu.

Vyznačíme vlastní a vržený stín tělesa.

3.2. Středové osvětlení těles

Příklad 3.2.1.

Sestrojte středové osvětlení dané světelným bodem S kosého kužele s podstavou O v nárysně a s vrcholem V.



Řešení:

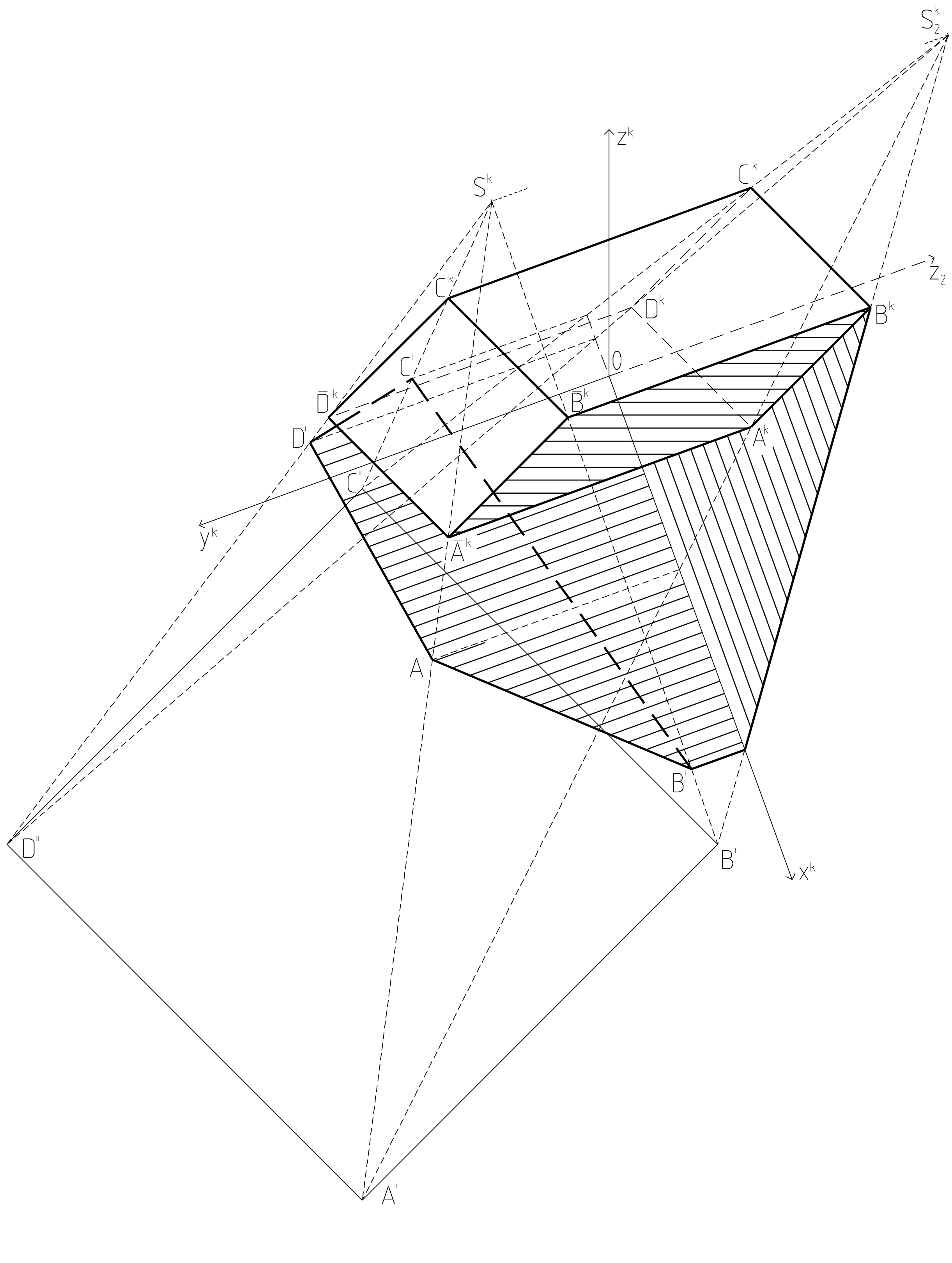
Světelný paprsek procházející středem osvětlení S povedeme vrcholem V kužele a sestrojíme jeho nárysný stopník V''. Tento bod je vržený stín bodu V na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku V' dostáváme vržený stín bodu V na půdorysnu, který je zároveň skutečným vrženým stínem.

Pro určení meze vlastního stínu potřebujeme najít svazek přímek o středu V'', které budou tečnami podstavy kužele. Povrchové přímky VT a VT' kužele budou mezí vlastního a vrženého stínu tělesa.

Vyznačíme vlastní a vržený stín kosého kužele.

Příklad 3.2.2.

Sestrojte středové osvětlení dané světelným bodem S pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou $ABCD$ v nárysně.



Řešení:

Bodem $\bar{A}$ vedeme světelný paprsek procházející daným středem osvětlení S a sestrojíme jeho nárysný stopník A''. Tento bod je vržený stín bodu $\bar{A}$ na nárysnu. Sestrojením půdorysného stopníku A' dostáváme vržený stín bodu $\bar{A}$ na půdorysnu, který je zároveň skutečným vrženým stínem. Stopník A'' bodu $\bar{A}$ je ideálním vrženým stínem.

Dostáváme vržený stín hrany $A\bar{A}$ a stejným způsobem sestrojíme vržené stíny zbývajících hran.

Pro určení mezí vlastního stínu potřebujeme najít styčné světelné paprsky, které určíme pomocí světelných paprsků, které se dotýkají tělesa v jediném bodě. Z obrázku vidíme, kde má světelný paprsek s podstavou tělesa právě jeden společný bod. Tedy styčné světelné paprsky budou procházet body B a C. Hrany $B\bar{B}$ a $C\bar{C}$ budou mezí vlastního a vrženého stínu hranolu.

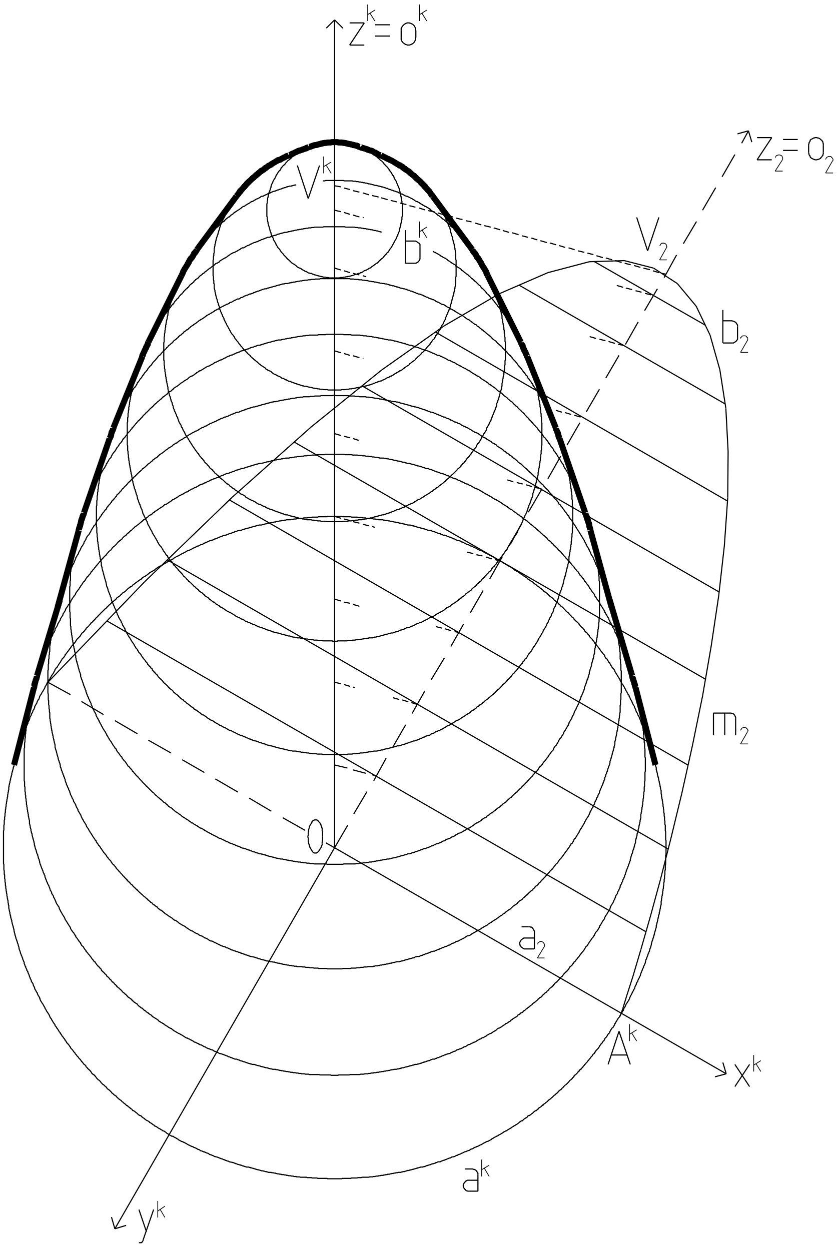
Stěna $CB\bar{B}$ tělesa bude osvětlená.

4. Rotační plochy

4.1. Rotační kvadriky

Příklad 4.1.1.

V kosoúhlém promítání $(120°, 1)$ do půdorysny sestrojte rotační paraboloid, který má osu $o = z$, vrchol $V[0; 0; 8]$ a prochází bodem $A[4; 0; 0]$.



Řešení:

Osa paraboloidu je kolmá k půdorysně, rovnoběžky plochy tedy leží v rovinách rovnoběžných s půdorysnou.

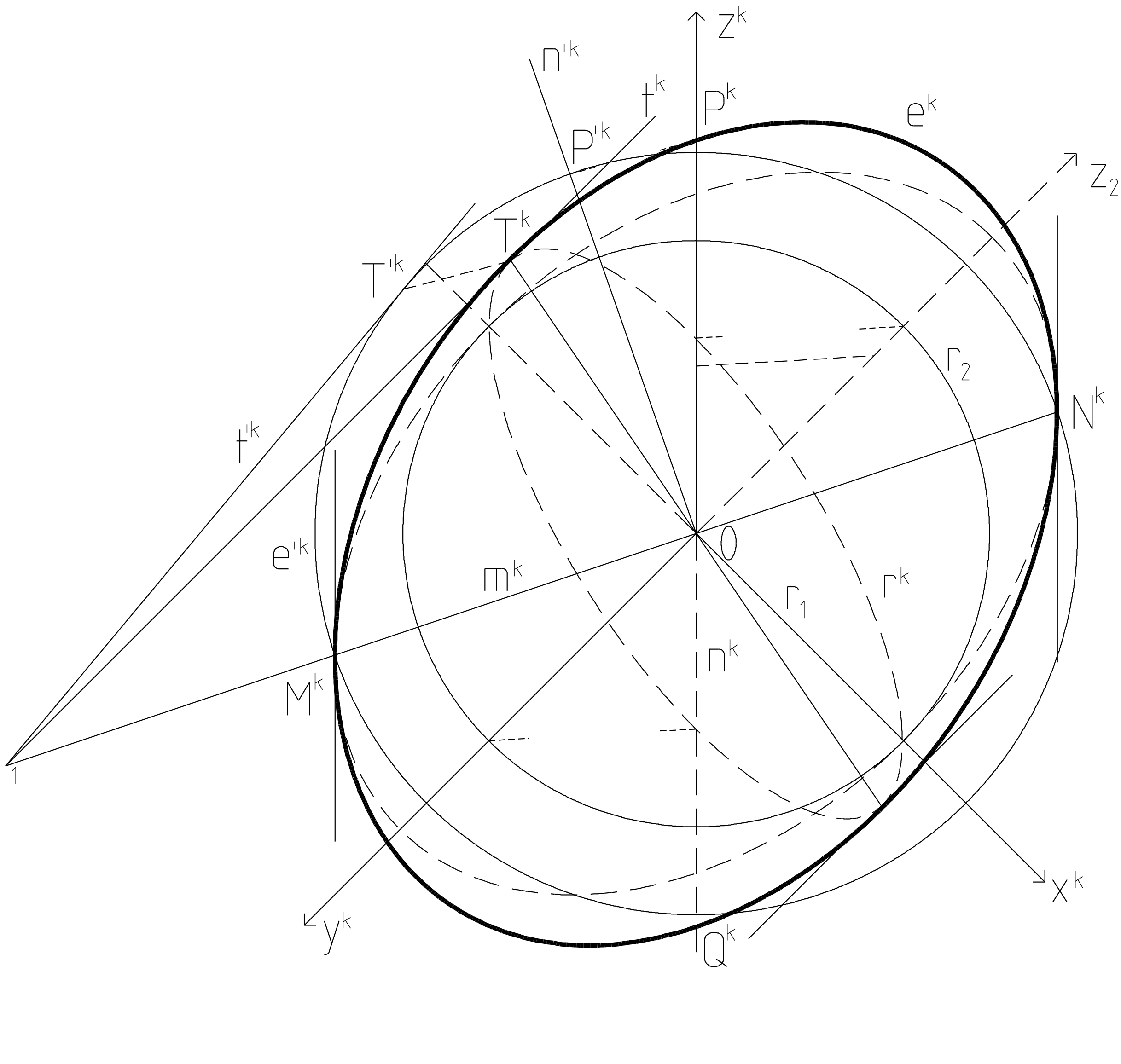
V přiřazeném Mongeově promítání sestrojíme meridián m paraboloidu, který je částí paraboly ohraničený rovnoběžnou a, která procházejí daným bodem A, a vrcholem V. Rovnoběžky se zobrazí jako úsečky rovnoběžné s osou x.

Průmětem rovnoběžky a je kružnice se středem v počátku a poloměrem rovným $|0A^k|$. Podobným způsobem sestrojíme průměty dalších rovnoběžek paraboloidu.

Průmětem paraboloidu je obálka průmětů rovnoběžek.

Příklad 4.1.2.

Sestrojte rotační elipsoid zadaný hlavním meridiánem.



Řešení:

Obrysová křivka rotačního elipsoidu bude elipsa e, která bude mít se svým meridiánem v rovině xy společné tečny rovnoběžné s osou z. Spojnice dotykových bodů M, N těchto tečen bude sdružený průměr m hledané obrysové elipsy. K němu sdružený průměr n, musí být, stejně jako příslušné tečny, rovnoběžný s osou z. V našem případě splyne sdružený průměr n přímo s osou z. Abychom mohli Rytzovou konstrukcí dohledat osy elipsy, musíme najít koncové body P, Q průměru n. K tomu využijeme skutečnosti, že řez elipsoidu rovinou xz musí mít s elipsoidem společné tečny rovnoběžné s osou y. Řezem elipsoidu rovinou xz procházející počátkem je elipsa r. Tuto elipsu určíme pomocí rovnoběžky r_1, kterou sklopíme do roviny, v níž daná rovnoběžka leží. V afinitě s osou splývající s průměrem m přejde hledaná obrysová elipsa e do kružnice e'. Tedy tečna t elipsy r rovnoběžná s osou y s dotykovým bodem T přejde v tečnu t' kružnice e' s dotykovým bodem T'. Tím jsme dourčili směr afinity $T \to T'$ a snadno dohledáme koncové body P, Q sdruženého průměru n.

Závěr

Cílem této práce bylo na základě dřívějších poznatků vyřešit příklady v kosoúhlé promítání do půdorysny. Práce je zaměřena především na oblá tělesa a může sloužit studentům i učitelům deskriptivní geometrie jako pomůcka při výuce kosoúhlého promítání nebo jako názorná ukázka.

Vzhledem k tomu, že základní poznatky o kosoúhlém promítání do půdorysny, včetně základních příkladů a příkladů na hranatá tělesa, jsou uvedeny v mé bakalářské práci, obsahuje diplomová práce řešené příklady na oblá tělesa, řezy oblých těles, průniky přímky s oblým tělesem, dále průniky dvou těles, osvětlení těles a zobrazení dvou kvadrik.

Obsáhlost tohoto tématu je větší než požadovaný rozsah práce, proto neobsahuje diplomová práce například obecné rotační plochy, rotační plochy a kvadriky v různých příkladech nebo plochy technické praxe.

V seznamu literatury jsou uvedeny všechny knihy, ze kterých je čerpáno a které se zabývají kosoúhlým promítáním především do nárysny. Součástí práce je příloha, která obsahuje některá předrýsovaná zadání řešených příkladů, které nejsou uvedeny v souřadnicích.

Použitá literatura

[1] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I.*, Praha, SNTL/SVTL, 1965

[2] URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II.*, Praha, SNTL/SVTL, 1965

[3] KOUNOVSKÝ, J., VYČICHLO, F.: *Deskriptivní geometrie*, Praha, Nakladatelství československé akademie věd, 1959

[4] MACHALA, F.: *Rotační plochy*, Olomouc, 1992

[5] MACHALA, F.: *Plochy technické praxe*, Olomouc, 1986

[6] ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL, J.: *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 1970

[7] DRÁBEK, K., HARANT, F., HORÁK, S., URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I. Díl*, Praha, Státní nakladatelství technické literatury, 1964

[8] POMYKALOVÁ, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, Praha, Prometheus, spol. s.r.o., 2010

[9] JUKLOVÁ, L.: *Rotační plochy*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2012

[10] OŠLEJŠKOVÁ, M., JUKLOVÁ, L.: *Rotační kvadriky v příkladech*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2013

[11] MENŠÍK, M., SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie I.*, Praha, SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1981

[12] SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie II.*, Praha, SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1980

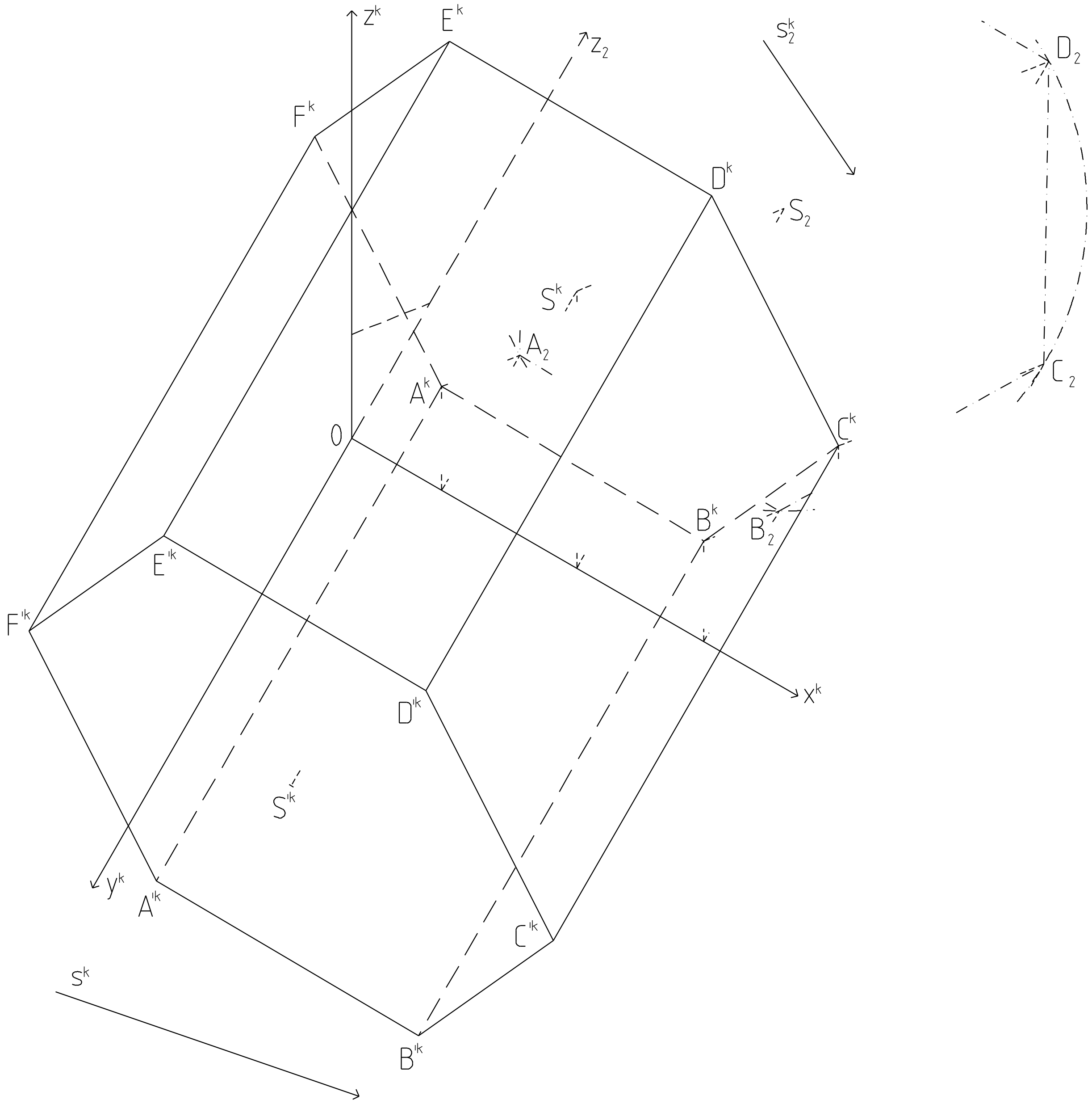
[13] KADEŘÁVEK, F., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, J.: *Deskriptivní geometrie I.*, Praha, Nakladatelství československé akademie věd, 1954

[14] DRÁBEK, K., HARANT, F., SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie I.*, Praha, SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978

Přílohy

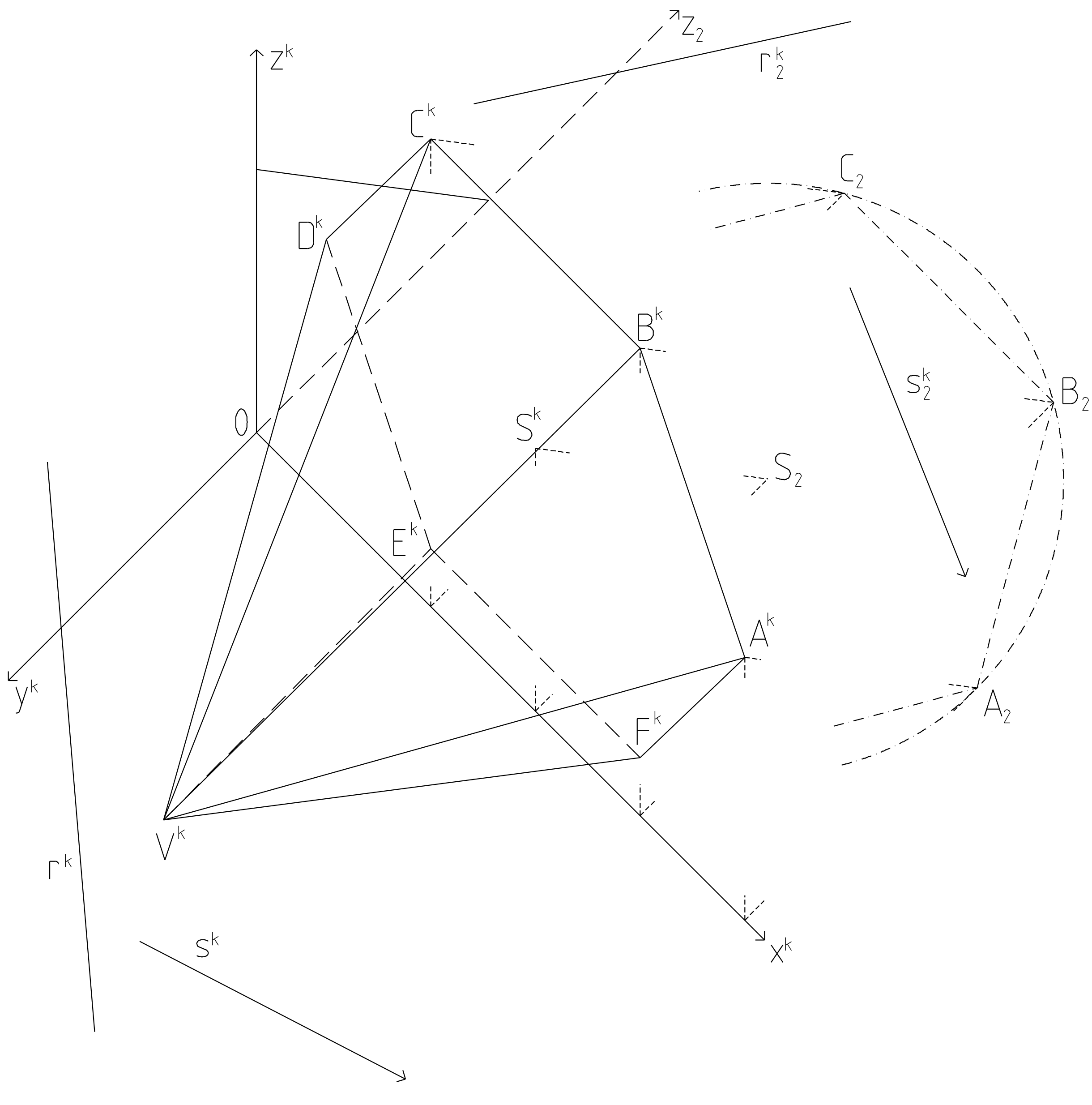
Zadání 3.1.1.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení dané světelným paprskem s pravidelného šestibokého hranolu se středem S, vrcholem A a výškou v.



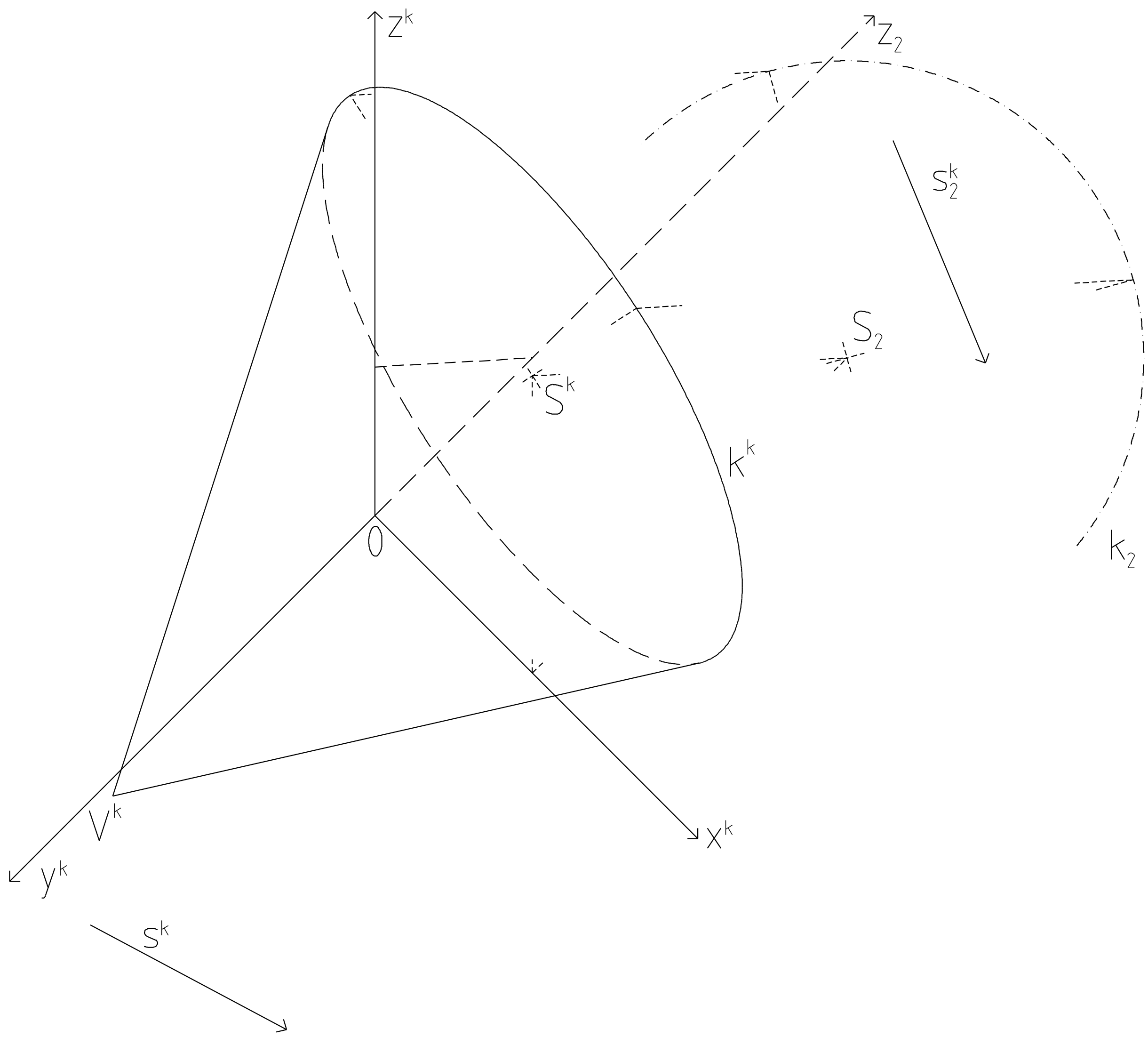
Zadání 3.1.2.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení přímky r a pravidelného jehlanu s podstavou $ABCDEF$ v nárysně a s vrcholem V.



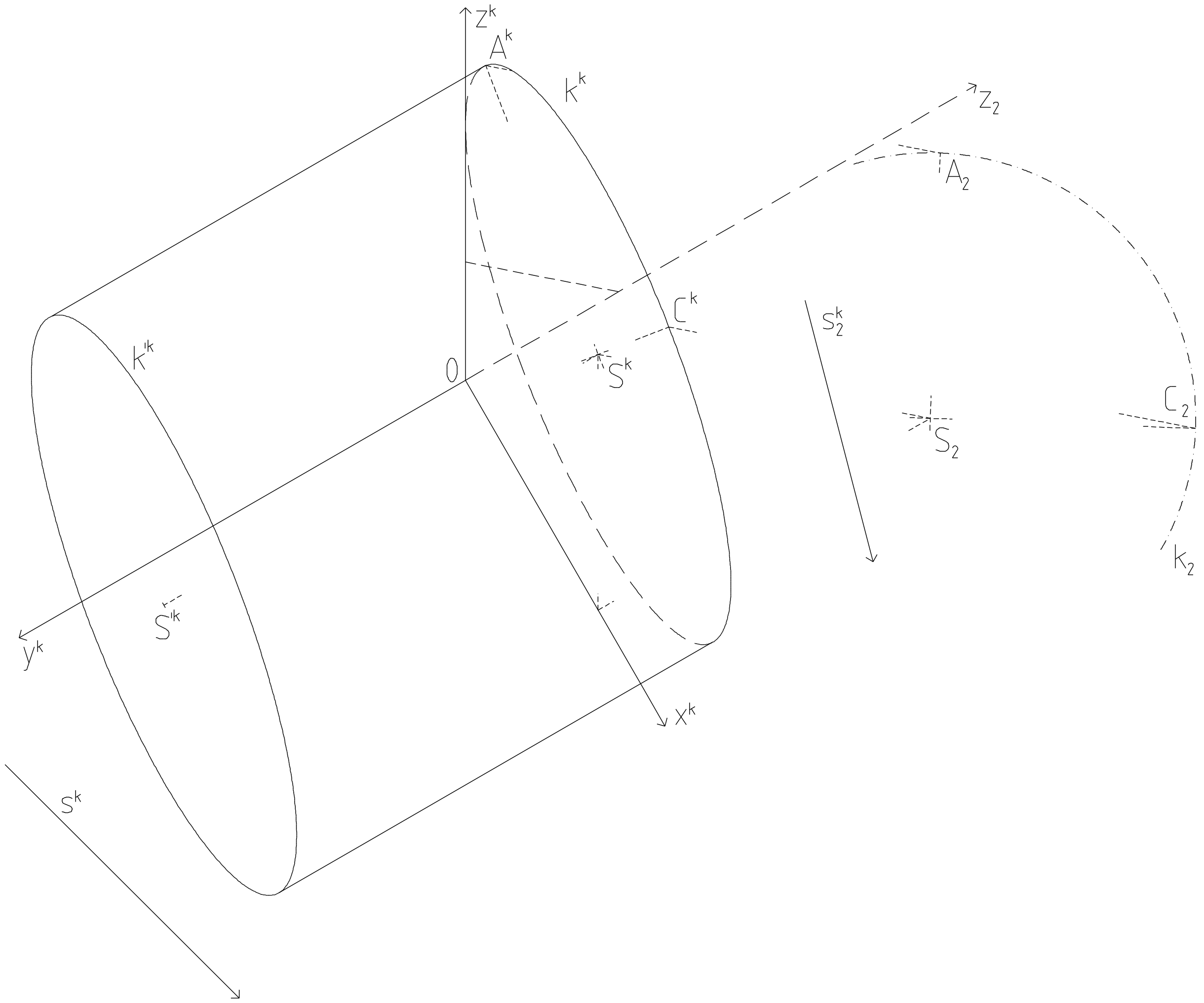
Zadání 3.1.3.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního kužele s podstavou v nárysně a s vrcholem V.



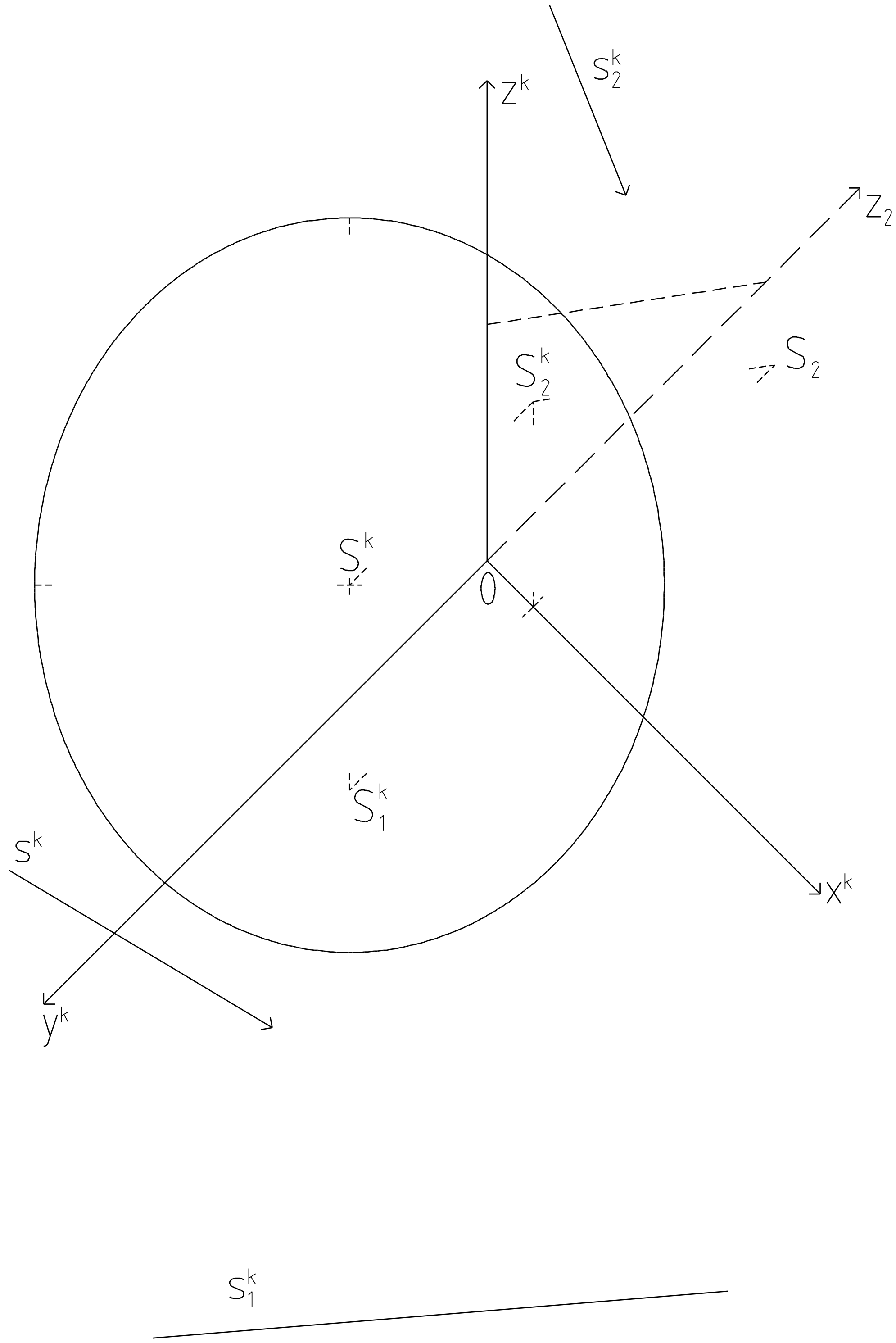
Zadání 3.1.4.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního válce s první podstavou o středu S v nárysně a s druhou podstavou o středu S'.



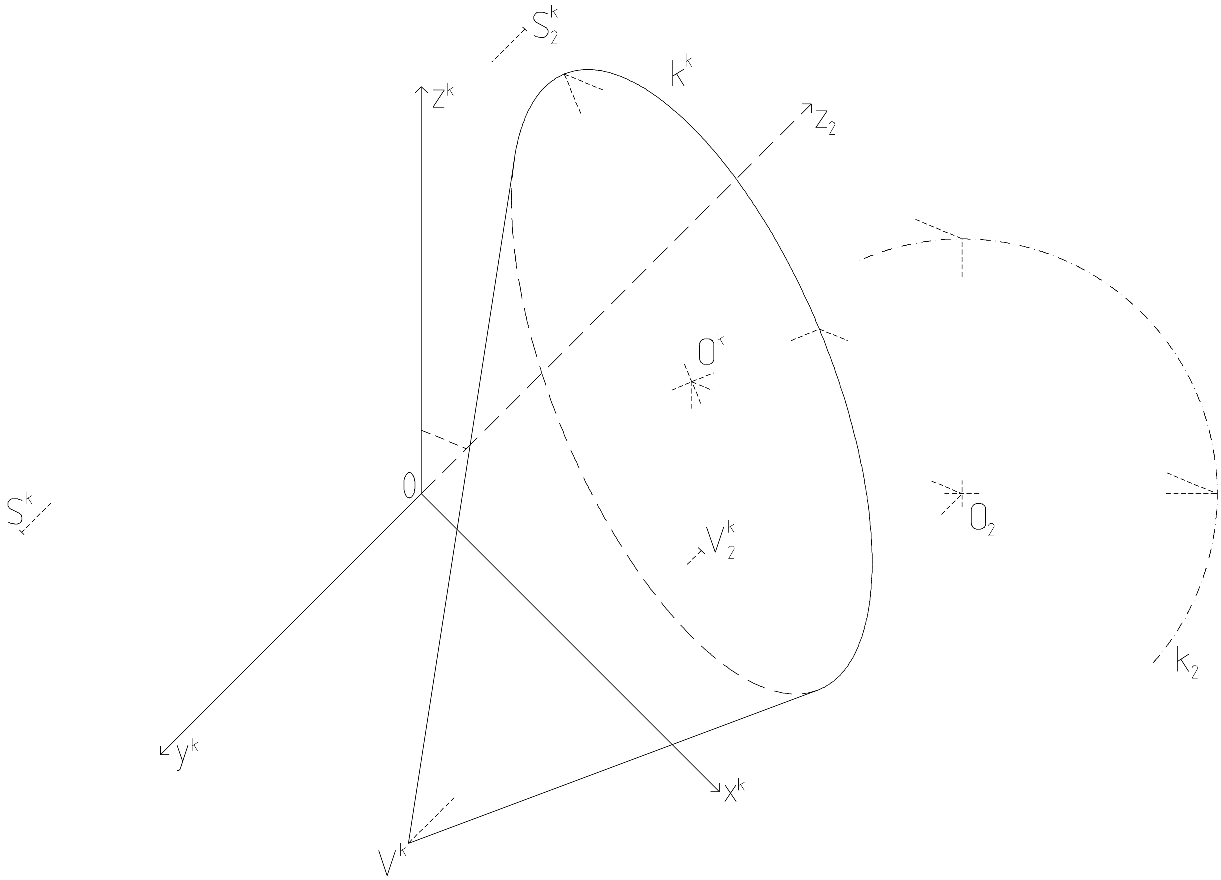
Zadání 3.1.5.

Sestrojte rovnoběžné osvětlení dané světelným paprskem *s* kulové plochy se středem *S*.



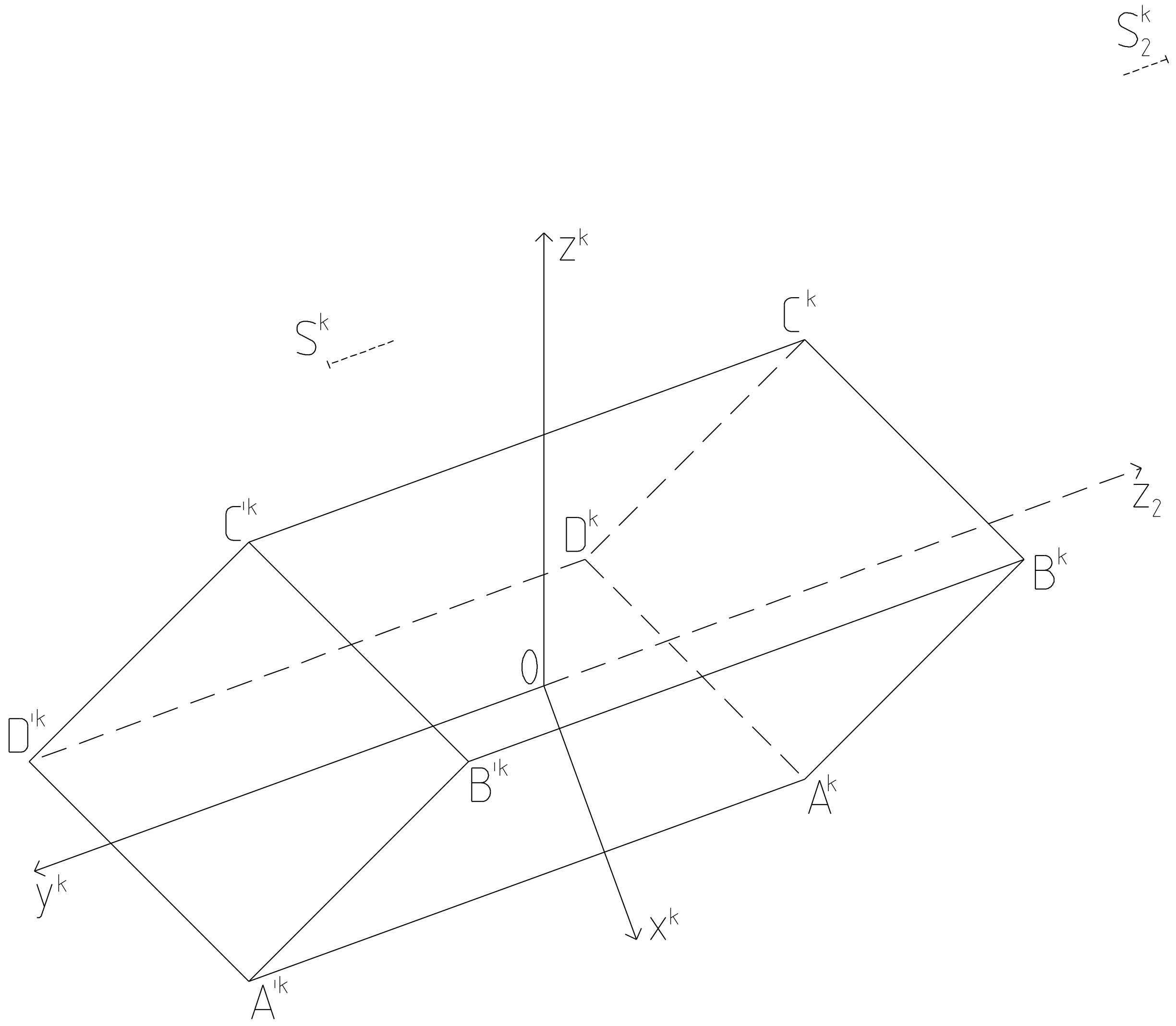
Zadání 3.2.1.

Sestrojte středové osvětlení dané světelným bodem S kosého kužele s podstavou O v nárysně a s vrcholem V.



Zadání 3.2.2.

Sestrojte středové osvětlení dané světelným bodem S pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou $ABCD$ v nárysně.



Zadání 4.1.2.

Sestrojte rotační elipsoid zadaný hlavním meridiánem.