UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Metrické a polohové úlohy v kosoúhlém promítání

Bakalářská práce

Autor práce : **Vladimír Müller**

III. ročník – prezenční studium
Obor: Matematika – Společenské vědy

Vedoucí práce: **Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.**

OLOMOUC 2010

Prohlášení: Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze uvedenou literaturu a prameny.

Olomouc, 16.04.2010 Müller Vladimír

Poděkování: Děkuji magistře Hodaňové za odborné vedení práce, cenné rady a prameny, které mi poskytla.

Obsah práce:

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybral problematiku z oboru konstrukční geometrie. Tato disciplína mne velice zaujala, a domníval jsem se, že by bylo dobré prohloubit své znalosti o promítacích metodách. V rámci výuky jsme se seznámili pouze s metodou Mongeova promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a metodou kótovaného promítání. Mongeovo promítání užívá obdobných principů a postupů jako promítání kosoúhlé. Jako téma své bakalářské práce jsem si tedy zvolil kosoúhlé promítání, abych se této metodě naučil a prohloubil si tak znalosti v oblasti promítacích metod.

Z dostupné literatury jsem studoval metodu kosoúhlého promítání. Při hledání vhodných pramenů jsem se seznámil s publikací Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech, jejíž autorkou je Kupčáková, a která se zabývá vytvářením modelů na základě úloh v Mongeově promítání. Tyto modely mne inspirovaly ke snaze vytvořit modely vlastní na základě úloh promítání kosoúhlého.

V literatuře jsem se zaměřil na všechny uvedené metrické a polohové úlohy. Při jejich studiu jsem zjistil, že naučení se metodě kosoúhlého promítání vyžaduje schopnost prostorového vidění - rozvinutou prostorovou představivost. Během výuky deskriptivní geometrie v prvním ročníku studia jsem často pomáhal spolužákům pochopit některé postupy a metody. Uvědomil jsem si tehdy, že právě má prostorová představivost mi umožňuje pochopit řešení konstrukčních úloh. Domnívám se, že cesta k získání této vlastnosti vede přes samostatné řešení geometrických úloh a že jejich řešení bude mnohem jednodušší, pokud bude k dispozici i model pro danou úlohu.

S některými úlohami, uvedenými v literatuře, kterou jsem studoval, jsem měl potíže. Myslím, že prostorovou představivost mám poměrně dobrou, nicméně i tak jsem měl často problémy se v konstrukcích orientovat. Také značení těchto výkresů bylo často složité. Obtížná byla rovněž orientace v odkazech. Slovně popsané postupy rýsování předpokládaly dokonalou znalost terminologie a postupů kosoúhlého promítání. Přes všechny tyto obtíže jsem se s metodou poměrně dobře seznámil. Při psaní teoretické části práce jsem, na základě této zkušenosti, tíhnul k užívání vlastních formulací, proto jsem v bakalářské práci používal poměrně málo citace. Přišlo mi vhodnější užít jich pouze v případech základních definic a zbytek získaných informací uvést vlastními slovy.

Rozhodl jsem se zaměřit svoji bakalářskou práci na zpracování úloh, které jsou názorné a umožňují pochopit principy kosoúhlého promítání. Popisy jejich konstrukcí jsem se snažil formulovat jasně a přesně, aby bylo možné konstrukce těchto úloh na jejich základě kdykoliv zopakovat. Tíhnul jsem k vytvoření vlastních zadání úloh na základě osvojených znalostí z nastudované literatury a ty jsem následně také vyřešil.

Mým cílem je utvořit takový soubor řešených příkladů, který by zahrnoval veškeré postupy kosoúhlého promítání potřebné pro vyřešení jakékoliv konstrukce v rámci této metody, ať již se jedná o úlohu metrickou či polohovou. Tyto příklady by mohly sloužit jako učební pomůcka pro naučení se metodě kosoúhlého promítání a pro rozvoj prostorové představivosti.

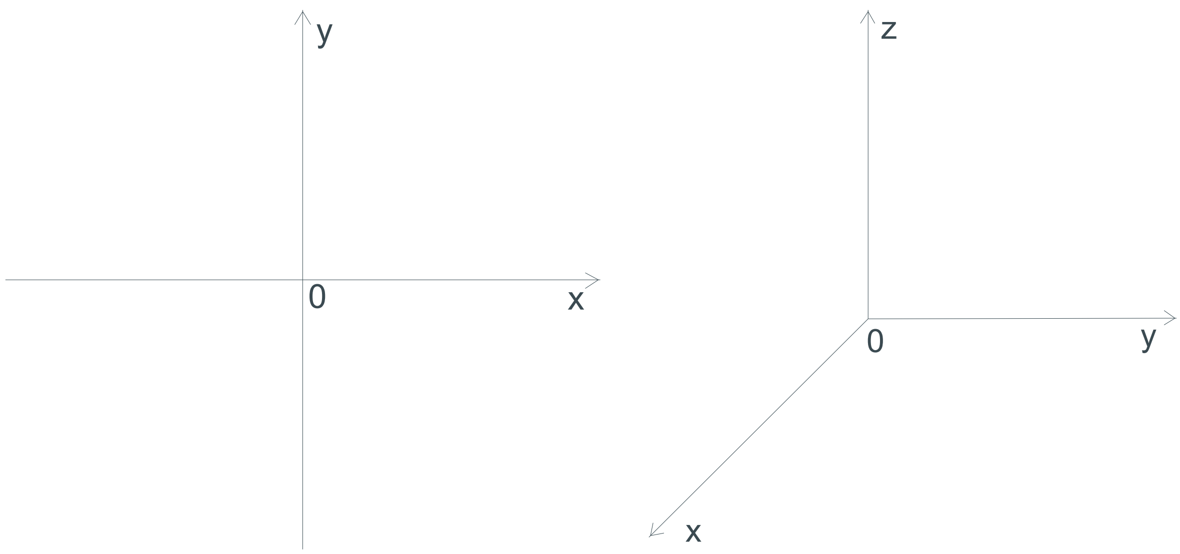
Kapitola 1. – Základy

V první kapitole uvádíme základní principy zobrazování v rámci metody kosoúhlého promítání. Jedná se o jednu ze základních metod deskriptivní geometrie. Na rozdíl od metody pravoúhlého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, kosoúhlé promítání pracuje v trojrozměrném prostoru – rozdíl můžeme pozorovat na obrázku (obr. 1.1).

¨

Def.: *Kosoúhlé promítání je rovnoběžné promítání směrem s na rovinu μ v průčelné poloze. Jedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru E3 na množinu dvojic bodů* A^k, A_1^k ($A_1^k A^k$ *|| z) v rovině (y,z) (1)*

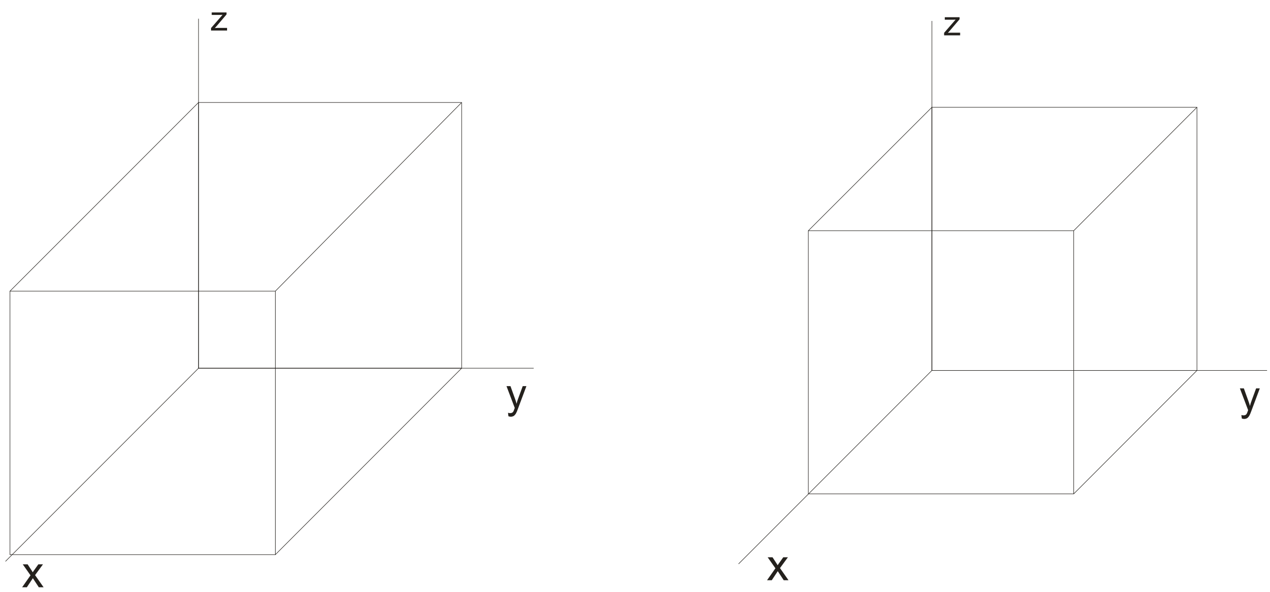
V kosoúhlém promítání je rozložení souřadnicových os následující: osa y je umístěna vodorovně, na ni je kolmo umístěna osa z a osa x svírá s těmito dvěma osami úhel; plocha vymezená osami x a y tedy tvoří podstavnou plochu a osa z vystupuje do výšky a určuje třetí rozměr.



obr. 1.1

V kosoúhlém promítání tedy pracujeme s celkem třemi průmětnami – půdorysnou, určenou osami x a y, nárysnou, určenou osami y a z a bokorysnou, určenou osami x a z.

Na rozdíl od Mongeova promítání, které je vždy jasně dané, je nutné kosoúhlé promítání vymezit několik údaji. Jako první je nutné určit úhel, pod kterým půjde osa x k ose y. Tento úhel nazveme ω a je určující pro jednotnost zobrazovaní, protože jednoznačně určuje polohu os. Dalším údajem, který je nutno zadat je poměr zkreslení, ke kterému dochází na ose x. Na obrázku (obr. 1.3) je jasně patrné, jak bude vypadat krychle s rozměry nakreslenými v plné velikosti na všechny osy a jak bude vypadat se zkreslením.



bez zkreslení

se zkreslením 2/3

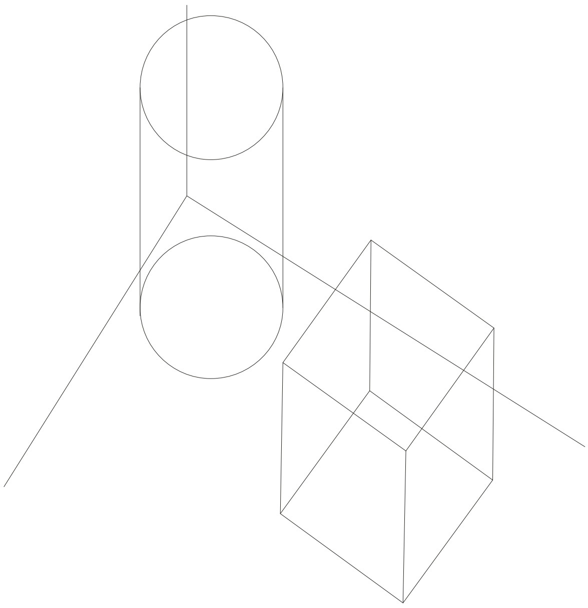
obr. 1.3

Je více než zřejmé, že ono zkreslení je opravdu nutné pro vizuálně korektní a přesné zobrazování v kosoúhlém promítání. Zkreslení nazveme kvocientem q, kde q ≤1, a udává nám, o kolik menší bude jednotka na ose x oproti osám zbývajícím.

Def.: *Hloubky bodů se v kosoúhlém promítání zkracují v témž poměru q, který nazýváme poměr zkrácení kosoúhlého promítání. Orientovaný úhel ω, který svírá kosoúhlý průmět kladné poloosy x s kladnou poloosou y nazýváme úhlem skosení kosoúhlého promítání.*

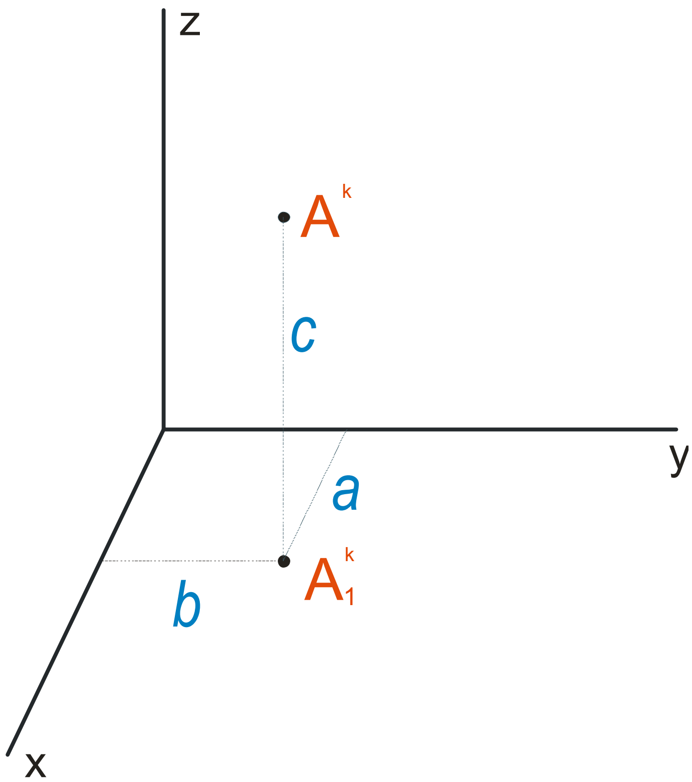
Kosoúhlé promítání je určeno poměrem zkrácení q a úhlem skosení ω. (2)

Těmito dvěma údaji, úhlem ω a kvocientem q je tedy přesně určeno kosoúhlé promítání. V závislosti na těchto údajích tedy může nabývat různých podob. Setkáváme se i se speciálními případy, jako je vojenská perspektiva (v tomto zobrazení je osa x kolmá na osu y a ke zkreslení zde nedochází, všechny objekty tak mají svůj půdorys zobrazený ve skutečné velikosti /obr. 1.4/).



obr. 1.4
zobrazení válce a krychle ve vojenské perspektivě

Speciální případy, jako tento ale necháme stranou a dále se budeme plně věnovat již jen „klasickému“ kosoúhlému promítání. Začněme se tedy pomalu připravovat na zvládnutí této metody. Jako první se naučíme konstruovat nejzákladnější útvar, tedy bod. Bod je v kosoúhlém promítání dán dvojicí A_1^k a A^k, což jsou kosoúhlý průmět půdorysu bodu a kosoúhlý průmět bodu samotného, v tomto pořadí. V rámci konkrétních úloh se téměř vždy setkáte se zadáním pomocí souřadnic, které, stejně jako v dvourozměrném zobrazení, udávají postupně počet jednotek na osách. Příklad takového zobrazení bodu najdete na obrázku (obr. 1.5).



Bod je zadán jako A(*a*,*b*,*c*)

A_1^k je bod ležící v půdorysně, nazýváme jej půdorysným průmětem bodu A

A^k je bod, jež leží „nad“ bodem A_1^k v prostoru; jeho vzdálenost je vytyčena z-tovou souřadnicí, nazýváme jej kosoúhlým průmětem bodu A

obr. 1.5

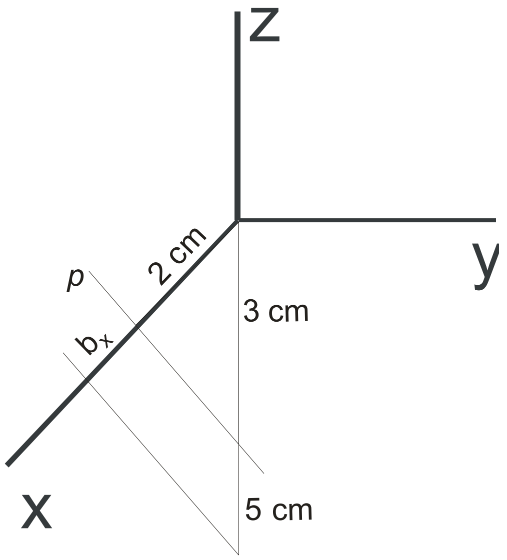
<u>Postup konstrukce bodu A:</u>

- Na osu y vyneseme vzdálenost *b* vedeme rovnoběžku s osou x
- Na osu x vyneseme poměrně zkrácenou vzdálenost *a* (dle kvocientu q) vedeme rovnoběžku s osou y
- Na průsečíku leží bod A_1^k
- Bodem A_1^k vedme rovnoběžku s osou z vyneseme na vzdálenost *c*
- Získáme bod A^k

Pro jednoduchost se bod A_1^k obvykle neznačí vůbec a bod A^k značíme již pouze jako A.

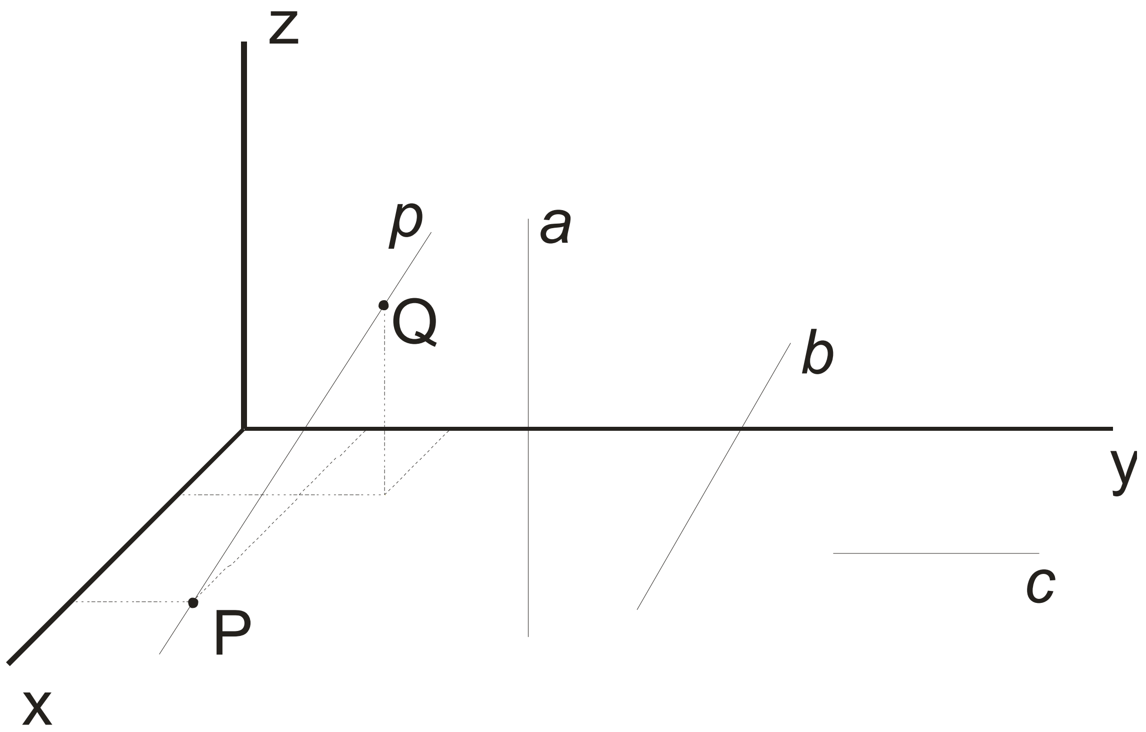
Můžeme mít bod zadaný s x-ovou souřadnicí, kterou nelze početně převést přes kvocient q (například při q=1/3 – bod o x-ové souřadnici 7 nelze vynést přesně). Proto použijeme takzvaný ***trojúhelník zkrácení***. Konstrukce probíha následovně: osou z vedeme pomocnou přímku pod půdorysnu. Na tuto přímku vyneseme jmenovatele kvocientu, zatímco na osu x vyneseme čitatele. Spojením takto získaných bodů dostaneme přímku, nazveme ji *p* - třetí stranu onoho trojúhelníku zkrácení, která nám reprezentuje onen poměr zkrácení. X-ovou souřadnici libovolného bodu poté narýsujeme tak, že ji nezkrácenou vyneseme na přímku pod osu z a vedeme z tohoto bodu rovnoběžku s přímkou *p* - tam kde tato rovnoběžka protne osu z můžeme vynést kvocientem zkrácenou x-ovou souřadnici.

Př.: V kótovaném promítání s kvocientem q=2/3 vyneseme bod s x-ovou souřadnicí 5.(obr. 1.6)



obr. 1.6

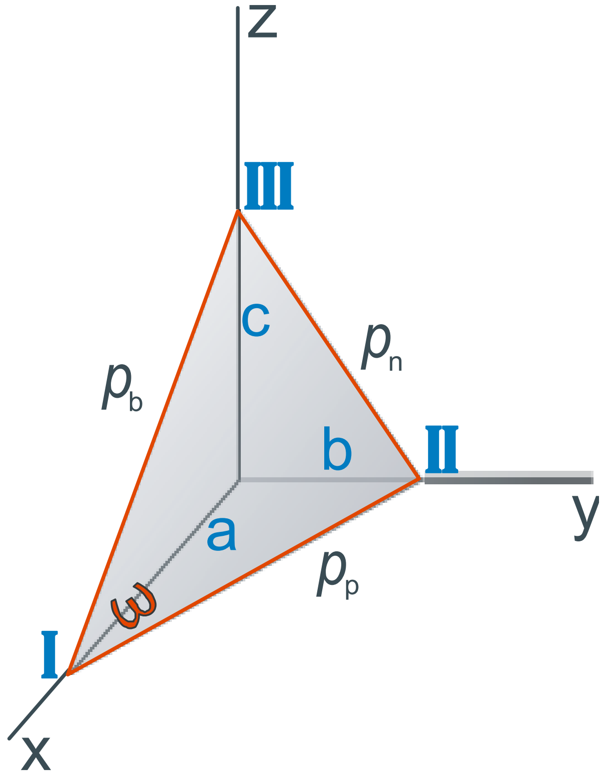
Dále probereme konstrukci přímky. Se znalostí zobrazení bodu je tato záležitost velice jednoduchá, protože přímku definujeme pomocí dvou bodů. Složitější se může stát konstrukce přímky dle daných kritérií, jako je například rovnoběžnost se zadanou přímkou. Zde se podíváme zatím jen na nejjednodušší případ, a to obecné zobrazení přímky (obr. 1.7).



obr. 1.7

Přímka *p* je zadaná obecně pomocí dvou bodů: P a Q. Dále na obrázku vidíme speciální polohy přímek: *a* kolmá na půdorysnu, *b* kolmá na nárysnu a *c* kolmá na bokorysnu. Bod, kde přímka protíná jednu z těchto ploch, nazýváme stopníkem přímky (u přímky *p* je takovýmto stopníkem /půdorysným/ bod P).

Na závěr první kapitoly se ještě podíváme na zobrazení roviny v kosoúhlém promítání. Podobně jako přímka je i rovina ve své podstatě nekonečná a kreslit tedy nějaké rovinné útvary reprezentující celou rovinu by nebylo vyhovující. Rovinu v kosoúhlém promítání zobrazujeme pomocí jejích průsečnic s jednotlivými promítacími rovinami. Aby něco takového bylo možné, zavedeme si nový pojem – stopa roviny. Stopou roviny rozumíme právě onu přímku, která je průnikem zobrazované roviny s některou se základních rovin; jedná se tedy o stopu půdorysnou p_p, bokorysnou p_b a nárysnou p_n. Na obrázku (obr. 1.7) je zobrazena obecně umístěná rovina. Rovinu můžeme zadávat obdobnou formou jako bod. U roviny souřadnice značí příslušné průsečíky stop dané roviny na jednotlivých osách.



obr. 1.7

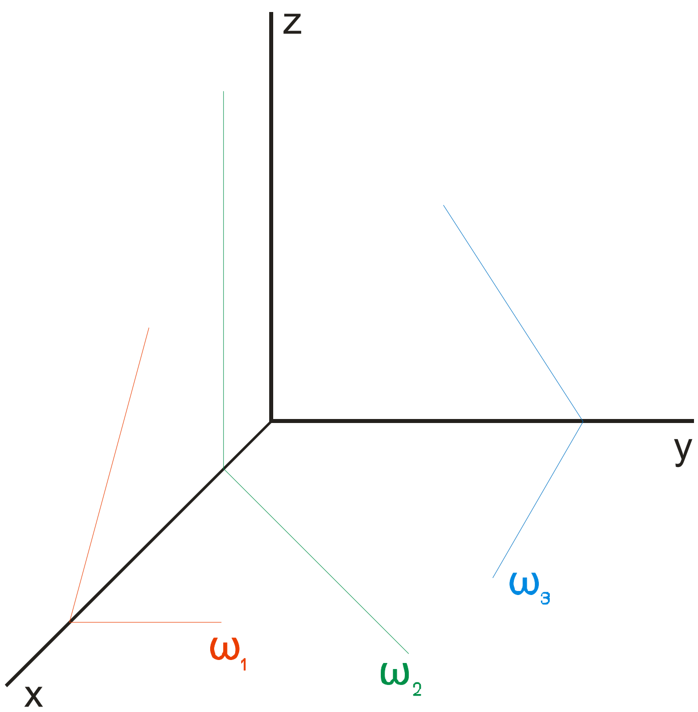
Rovina ω je zadaná jako: ω (a, b, c)

Vynesením zkreslené vzdálenosti a na osu x získame bod I – průsečík půdorysné a bokorsné stopy roviny ω

Obdobně získáme body II (průsečík půdorysné a nárysné stopy) III (průsečík bokorysné a nárysné stopy)

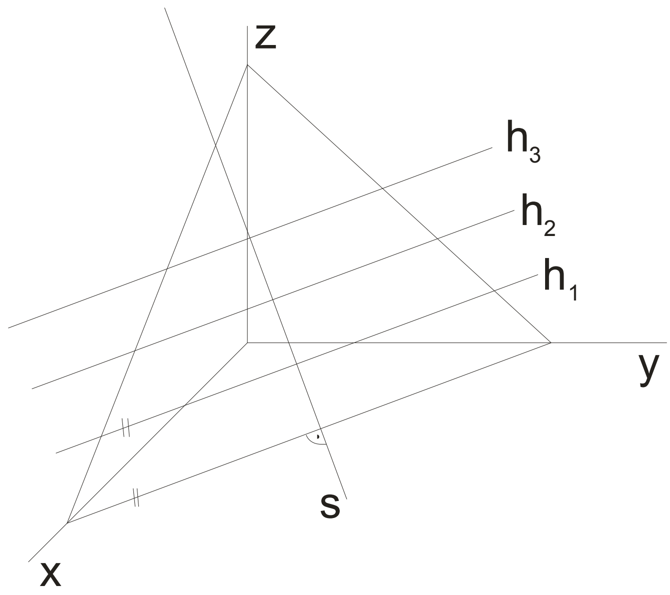
Spojením těchto bodů získáme stopy roviny ω

Na základě znalosti speciálních poloh přímek (obr. 1.6) můžeme obdobně nakreslit speciální polohy rovin – kolmou na bokorysnu, půdorysnu a nárysnu. Na obrázku (obr. 1.8) máme rovinu ω_1, která je kolmá na půdorysnu, rovina ω_2 je kolmá na bokorysnu a rovina ω_3 je kolmá na nárysnu.



obr. 1.8

Zavedeme si u roviny ještě další dva pojmy. Jsou to *hlavní přímka roviny* a *spádová přímka roviny*. Spádová přímka roviny je taková přímka, která určuje odchylku roviny od půdorysné průmětny a tedy sklon roviny. Je kolmá na půdorysnou stopu roviny. Oproti tomu hlavní přímka roviny je s půdorysnou stopou rovnoběžná. Určuje nám výškovou hladinu v rovině – všechny body na ní ležící mají stejné z-tové souřadnice. Průnik hlavní přímky s přímkou spádovou se nazývá spádové měřítko. (obr. 1.8)



obr. 1.9

Kapitola 2. - Metrické úlohy

Metrické úlohy jsou takové úlohy, kde se snažíme dopracovat k nějakému měřitelnému údaji. Patří sem tedy zjišťování vzdálenosti dvou bodů, bodu od roviny, bodu od přímky a také zjišťování odchylky dvou přímek, přímky od roviny, dvou rovin. Mezi metrické úlohy patří i konstrukce kolmic, protože tato úloha počítá s konstrukcí 90° úhlu, což se považuje pouze za speciální případ odchylky.

V průběhu této kapitoly se tedy seznámíme se základními postupy kosoúhlého promítání. Budeme řešit základní typy metrických úloh, které bude potřeba probrat dříve, než se pustíme do řešení úloh polohových.

Všechny úlohy jsou řešeny v jednotném zadání kosoúhlého promítání.

$\omega = 135°$ $q = 2/3$

Pro snadnější orientaci v konstrukcích je užito netradičního značení. Kosoúhlý průmět bodu je značen pouze velkým tiskacím písmenem, zatímco jeho ostatní průměty mají na dolní index přidáno písmeno odpovídající průmětně – pro půdorysny je to X_p, pro nárysnu X_n a pro bokorysnu X_b. Obdobné značení je užito i pro jednotlivé průměty přímky.

Př.1: Zjistěte vzdálenost bodů

a) A[3,5,0] B[2,3,0]
b) A[3,5,2] B[2,3,5]

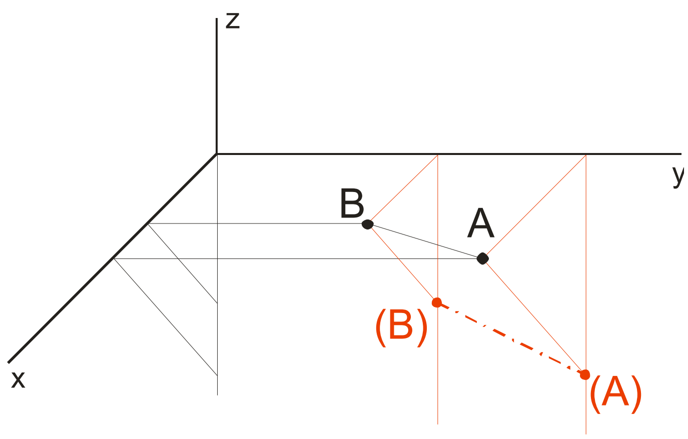
a)

Postup řešení:

Na základě znalosti vynášení bodů popsané v kapitole 1 si vyneseme oba body, A i B. Práci máme ulehčenou tím, že z-ové souřadnice obou bodů jsou rovny nule, body tedy leží v půdorysně. Na obrázku (obr. 1.3) je patrné, že pravý úhel se ne vždy zobrazí jako pravý, a také že vzdálenost mezi dvěma body není vždy zobrazena ve své plné velikosti. Aby tedy bylo možno konstruovat, zavádíme metodu zvanou sklápění. Při tomto postupu se všechny objekty zobrazují ve svých skutečných rozměrech, se skutečnými úhly. Můžeme si to na tomto příkladu snadno ověřit. Vzhledem k jednoduchému zadání si vzdálenost bodů vypočítáme. Rozdíl x-ových souřadnic je roven 1, rozdíl y-ových souřadnic je roven 2. Vzdálenost mezi body je tedy rovna přeponě pravoúhlého trojúhelníka o stranách délky 1 a 2, což z Pythagorovy věty vychází $\sqrt{5}$, tedy přibližně 2,2 cm. Narýsujeme-li spojnici mezi body A a B a změříme ji, vyjde nám vzdálenost přibližně 1,6 cm. Důvodem je ona povaha kosoúhlého promítání, kde je potřeba brát v potaz jak úhel odklonu osy x, tak i zkreslení této ose příslušné. Abychom tyto prvky eliminovali, sklopíme si celou půdorysnu tak, aby ležela „pod“ nárysnou – tak jak je to běžné v rámci Mongeova promítání. Oběma body vedeme rovnoběžky s osou x. V místech, kde tyto rovnoběžky protnou osu y, na ni uděláme kolmice. Tímto krokem jsme eliminovali vliv úhlu ω, teď zbývá zobrazit úsečku ve skutečné velikosti eliminací vlivu kvocientu q. Povedeme proto body rovnoběžky s krátící stranou trojúhelníku zkrácení (na obrázku /obr. 1.6/ je označena jako přímka *p*). V místech, kde tyto rovnoběžky protnou příslušné kolmice na osu y, které jsme vynesli v průběhu předchozího kroku, se nalézají sklopené body (A) a (B). Jejich propojením získáme úsečku, která reprezentuje skutečnou vzdálenost bodů A a B (můžeme ověřit pravítkem, že tato úsečka již má délku přibližně 2,2 cm)

Závěr:

Nalezli jsme vzdálenost bodů A a B.



Obr.: **Př. 1 a)**

b)

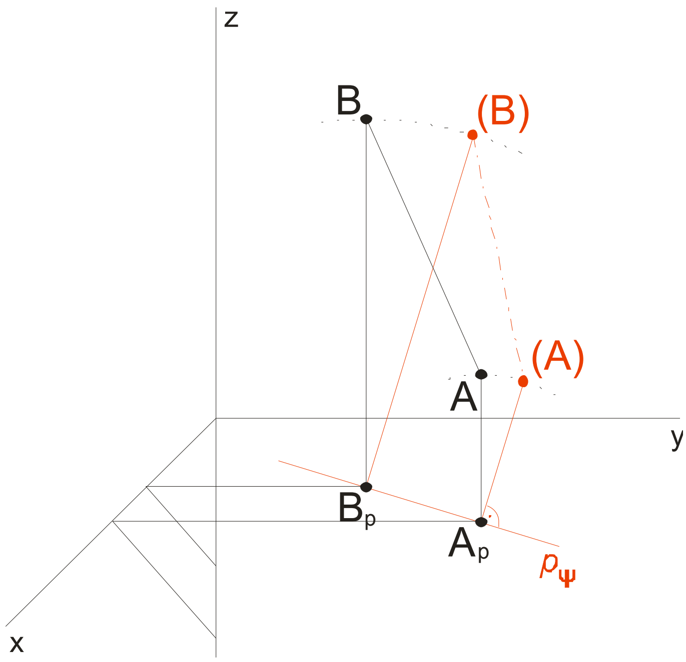
Postup řešení:

U tohoto příkladu budeme vycházet z předchozího zadání. Jedinou změnou je, že body jsou tentokráte umístěny v prostoru, neleží v základní rovině. My si tedy představíme pomocnou rovinu, nazvěme ji rovina Ψ, která je kolmá na půdorysnu, a v které oba body leží. Musíme určit i stopu této roviny v půdorysně p_Ψ– tato stopa bude osou, podle které budeme rovinu sklápět. Protože oba body, A i B leží v rovině Ψ, kterou jsme zvolili kolmou na půdorysnu, potom v této rovině budou ležet i jejich půdorysné průměty A_p a B_p, a půdorysnou stopu roviny Ψ tedy získáme jednoduše spojením těchto dvou bodů. Nicméně v předchozím příkladě jsme si ukázali, že vzdálenost bodů v půdorysně není zobrazena ve skutečné velikosti. Proto bychom sklopením roviny bez předchozích úprav získali pouze zkreslenou vzdálenost dvou bodů na základě zkreslené vzdálenosti jejich půdorysů. Tato situace je zobrazena na obrázku (obr. 2.1).

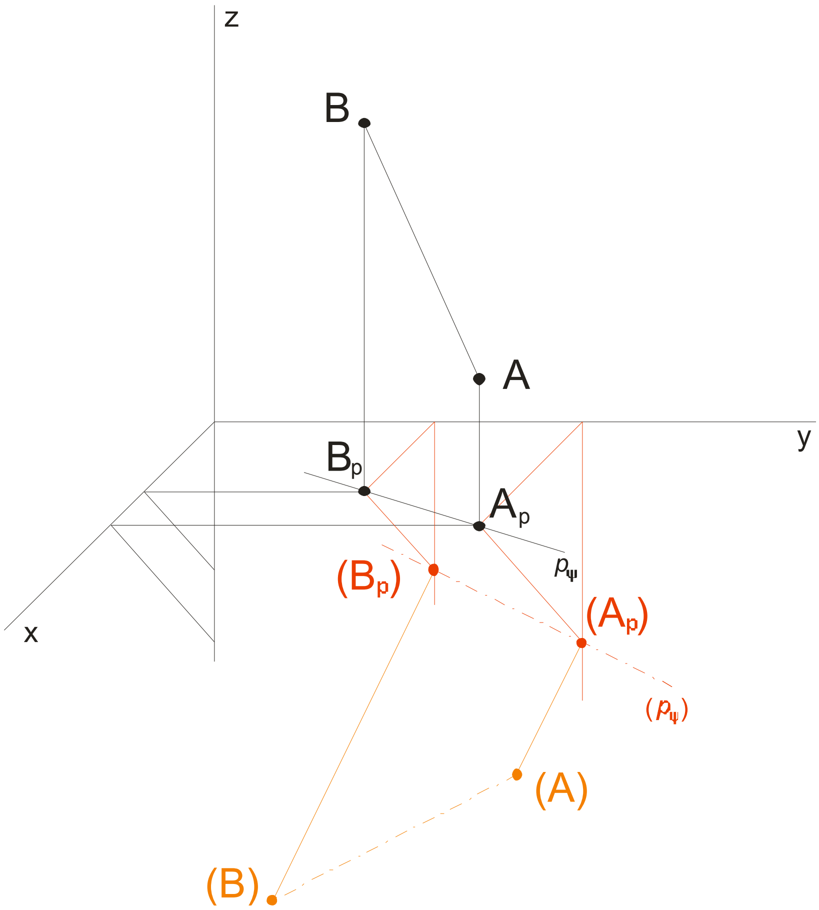
V takovémto případě tedy musíme provést sklopení hned dvojí. Jako první si musíme sklopit půdorysnu a získat skutečnou vzdálenost půdorysných průmětů bodů. Tímto sklopením jako bychom sklopili půdorysnu zároveň s onou pomocnou rovinu. A teprve potom můžeme rovinu Ψ sklopit, podle její sklopené půdorysné stopy. Zopakujeme tedy postup z předchozího příkladu a vyneseme si sklopené body (A_p) a (B_p), které v tomto příkladu odpovídají bodům (A) a (B) z příkladu předchozího. Přímka, procházející body (A_p) a (B_p), je pak sklopenou půdorysnou stopou roviny Ψ (p_Ψ). Rovinu Ψ si tedy sklopíme do sklopené půdorysny dle osy (p_Ψ). Tím pádem můžeme kolmo na osu sklápění, onu přímku (p_Ψ), vynést z-ové souřadnice bodů. Vedeme tedy z bodů (A_p) a (B_p) kolmice na přímku (p_Ψ) a vyneseme na ně příslušné z-ové souřadnice daných bodů. Získáme tak body (A) a (B), jejichž spojnice již představuje hledanou vzdálenost bodů A a B.

Závěr:

Nalezli jsme vzdálenost bodů A a B.



obr. 2.1



obr.: **Př. 1 b)**

Pro lepší pochopení přikládáme názorné zobrazení postupu sklápění. Na obrázku (obr. 2.2) můžeme vidět situaci z příkladu **Př.1 a)**. Na obrázku (obr. 2.3) máme postupně zobrazeno, jakým stylem se budou jednotlivé plochy sklápět.

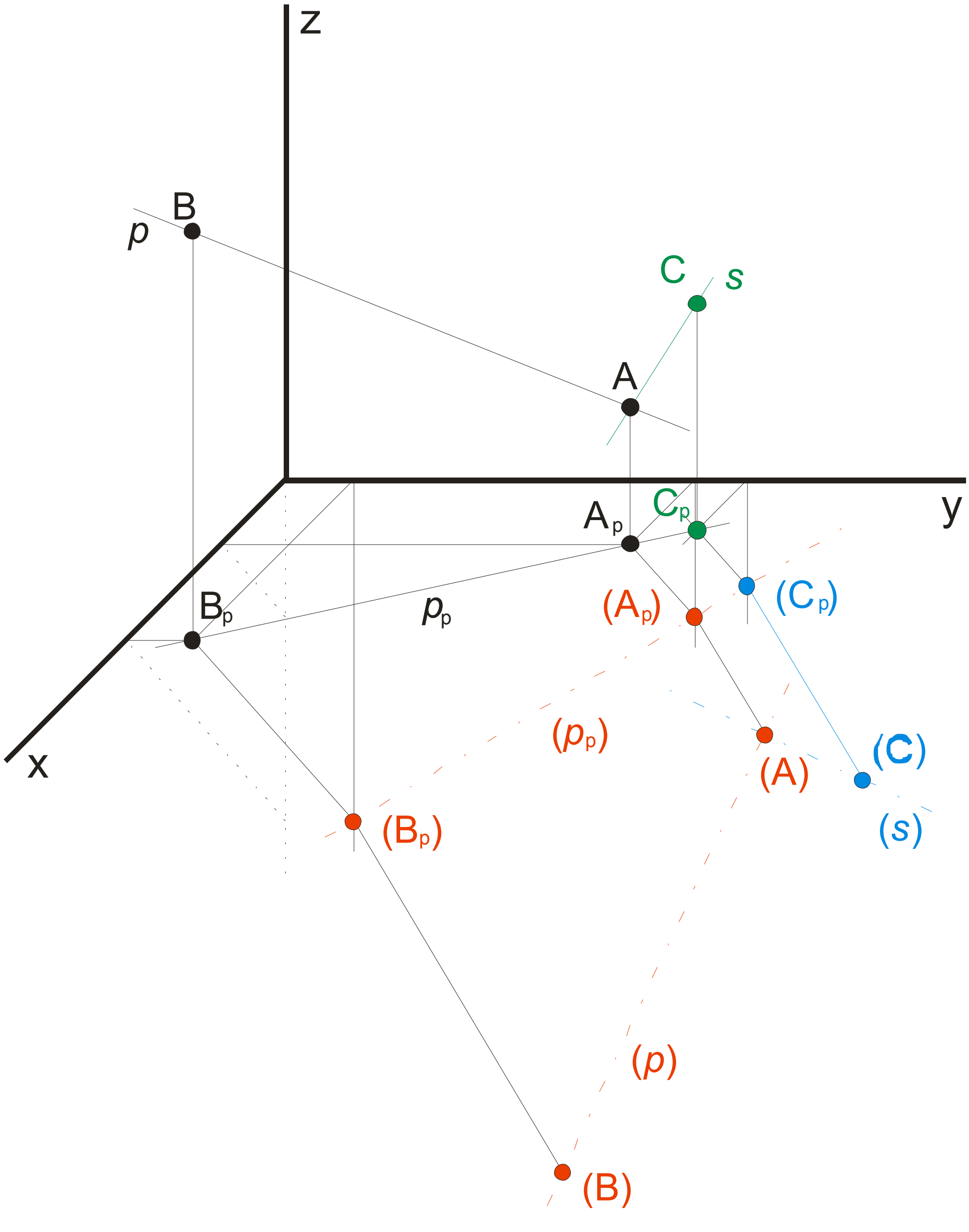
Př.2: Narýsujte bodem A kolmici na přímku p tak, aby tato kolmice ležela v rovině vymezené přímkou p a její půdorysnou stopou. Přímka p je zadána dvěma body A [2,6,2] a B[5,1,4].

Postup řešení:

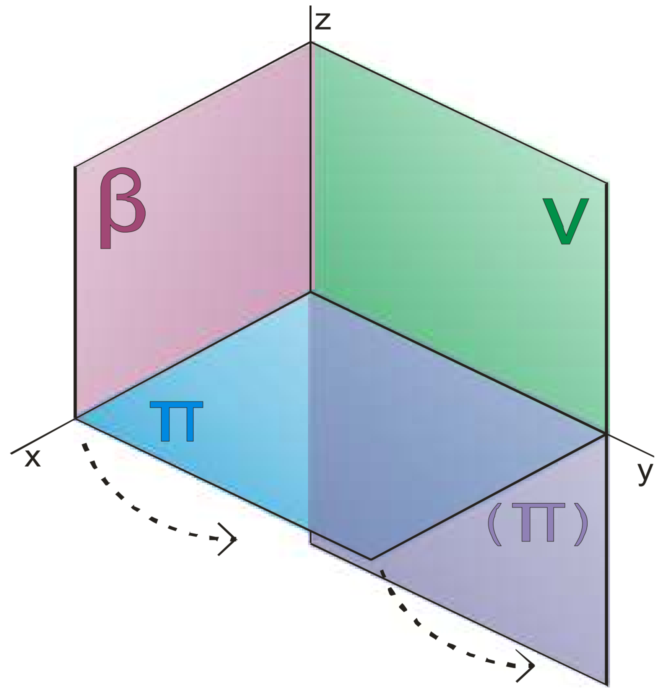
Nejprve si vyneseme oba body, A i B, a spojíme je přímkou *p*. Jak již víme, pravý úhel se ne vždy zobrazí jako pravý, budeme si proto muset přímku sklopit – ve sklopení se pravý úhel již jako pravý zobrazí. Zopakujeme tedy postup z příkladu **Př.1 b)** a přímku *p* si sklopíme. Bodem (A) již můžeme vést kolmici na přímku (*p*). Problémem se nyní stává, jak přenést tuto sklopenou přímku, pojmenujme si ji (*s*), zpět do kosoúhlého průmětu. Známe pouze jeden bod, a to bod A. Musíme si proto druhý bod doplnit. Zvolíme si libovolný bod na této přímce (*s*), nazveme jej (C), a provedeme postup sklápění obráceně. Předpokládáme nyní, že bod C leží v zadané rovině, ve které, jak ze zadání vyplývá, leží i přímka *p*. Můžeme tedy vést bodem (C) kolmici na sklopený půdorysný průmět přímky *p* ((p_p)), získáme bod (C_p). Poté povedeme bodem (C_p) kolmici na osu y. Z průsečíku této kolmice s osou y narýsujeme rovnoběžku s osou x. Protože bod C_p leží ve stejné rovině jako přímka *p*, nalézá se na přímce p_p. A proto tam, kde tato rovnoběžka přímku p_p protne, leží bod C_p. Tímto bodem povedeme rovnoběžku s osou z, na kterou vyneseme od bodu C_p vzdálenost $|(C_p)(C)|$. Získáme bod C. Spojnice bodů A a C je potom ona hledaná kolmice na přímku *p* bodem A ležící v rovině vymezené přímkou *p* a její půdorysnou stopou.

<u>Závěr:</u>

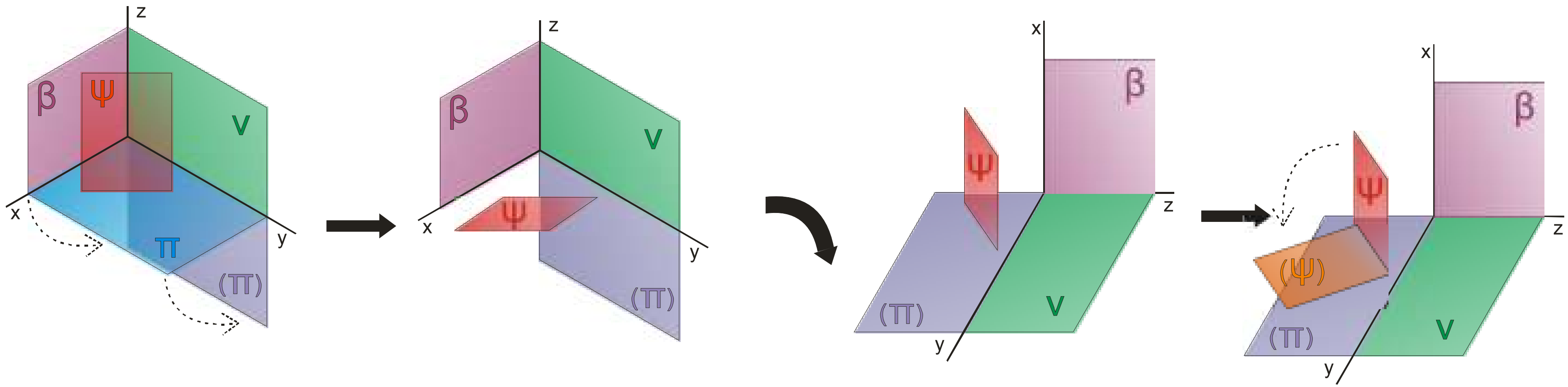
Narýsovali jsme hledanou kolmici.



obr.: **Př.2**



obr. 2.2



obr. 2.3

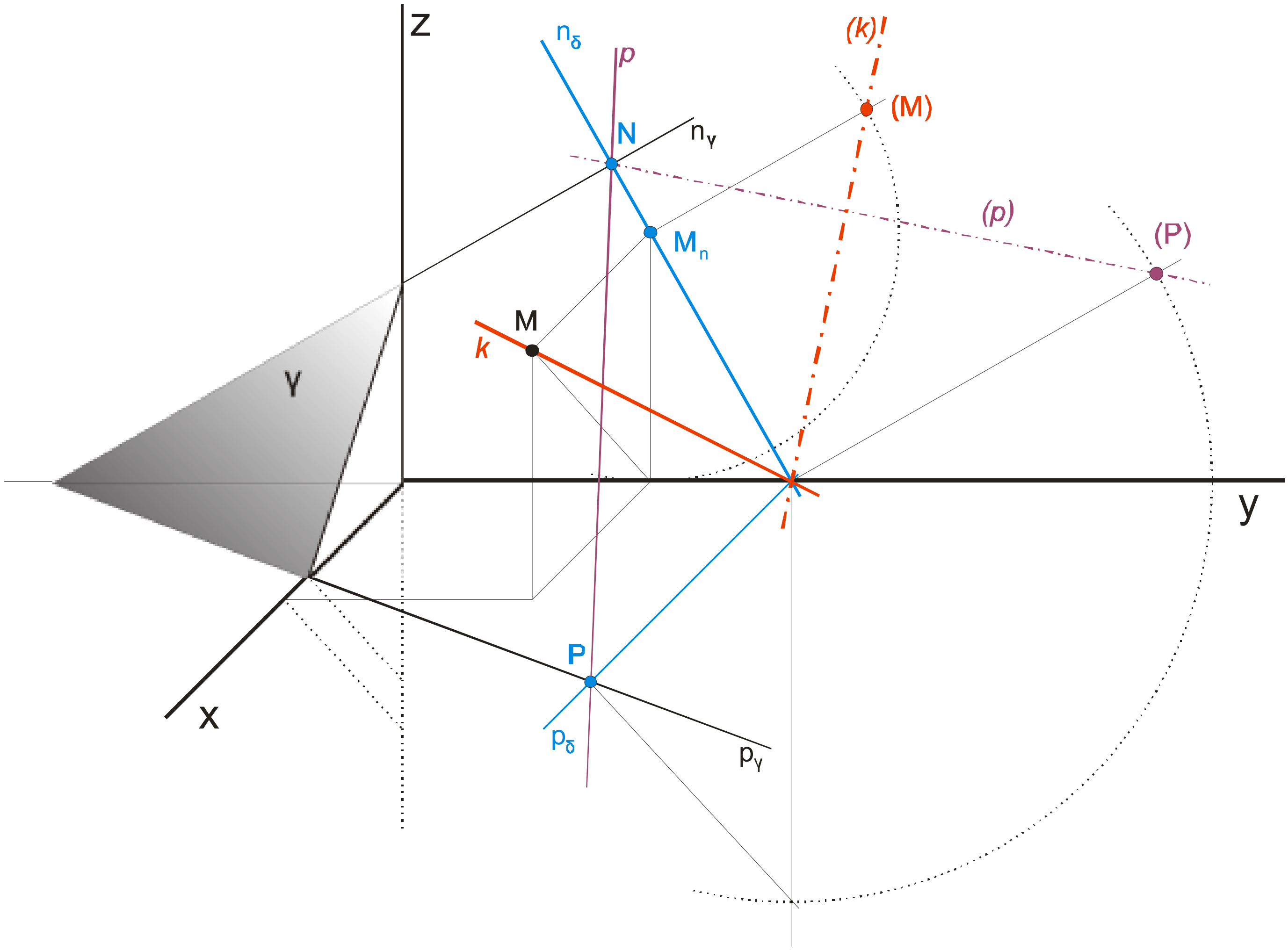
Př.3: Narýsujte bodem M[5,5,5] komici na rovinu γ (4,-7,4).

Postup řešení:

Tento příklad je velmi podobný příkladu předchozímu. První věc, kterou je třeba udělat je vynést si zadaný bod M a narýsovat rovinu γ. Teď se musíme zamyslet, jak budeme postupovat dál. Abychom mohli hledat onu kolmici, pojmenujeme si ji *k*, musíme vědět, v jaké rovině se pohybujeme. Zvolíme si proto pomocnou rovinu δ tak, aby byla kolmá na rovinu γ a zároveň aby byla kolmá na nárysnu. Nejjednodušší způsob totiž bude sklopit si tuto pomocnou rovinu δ do nárysny, kde minimalizujeme vliv zkreslení a zjednodušíme si tak práci. Vyneseme si nárysný průmět bodu M M_n. Tímto bodem povedeme kolmici na nárysnou stopu roviny γ n_γ. Tato kolmice je nárysnou stopou pomocné roviny δ n_δ. Aby byla rovina δ kolmá na nárysnu, musí tedy být rovnoběžná s bokorysnou a její půdorysná stopa bude tedy rovnoběžná s osou x. Bodem, kde n_δ protíná osu y tedy povedeme rovnoběžku s osou x, která bude půdorysnou stopou roviny δ p_δ. Máme tedy vyneseny obě roviny, γ i δ. O hledané kolmici víme, že leží v rovině δ a je kolmá na rovinu γ. Z toho můžeme odvodit, že kolmice *k* bude kolmá na průsečnici těchto dvou rovin, což znamená transformaci příkladu na úlohu nalezení kolmici k přímce danou rovinou, což již umíme. Průsečnici rovin nalezneme snadno, spojíme průsečík P půdorysných stop obou rovin a průsečík N nárysných stop. Víme, že kolmice *k* leží v rovině δ, víme, že je kolmá na průsečnici *p*, a víme, že průsečnice *p* taktéž leží v rovině δ. Můžeme tedy přistoupit ke sklopení roviny δ do nárysny. Osou sklápění se stane nárysná stopa roviny δ n_δ. Nejprve tedy sklopíme průsečnici *p*. Bod N, protože leží na ose, se sklopí sám na sebe (N = (N)). Bod P je složitější. Musíme nejprve nálezt jeho skutečnou x-ovou souřadnici, kterou potom přeneseme na kolmici na osu n_δ. Získáme bod (P), který spojíme s bodem (N) a získáme tak (*p*). Dále si sklopíme bod M, stejným způsobem jako bod P. Bodem (M) teď povedeme kolmici na přímku (*p*). Tato kolmice již bude sklopeným obrazem (*k*) hledané kolmice *k* (že jste postupovali správně, ověříte tak, že tato přímka (*k*) vám protne osu y ve stejném místě jako stopy roviny δ). Zbývá kolmici (*k*) sklopit zpět. Jeden její bod již známe – M. Druhý nalezneme snadno. Tam kde (*k*) protíná osu otáčení n_δ je invariantní bod, který se sklopí sám na sebe – takže jej můžeme použít a spojit jej s bodem M. tato spojnice bude hledanou kolmicí *k*.

Závěr:

Narýsovali jsme kolmici na rovinu γ bodem M.



obr.: **Př.3**

Př.4: Zjistěte z-ovou souřadnici bodu A[3,3,?], který leží v rovině γ(6,5,4)

Postup řešení:

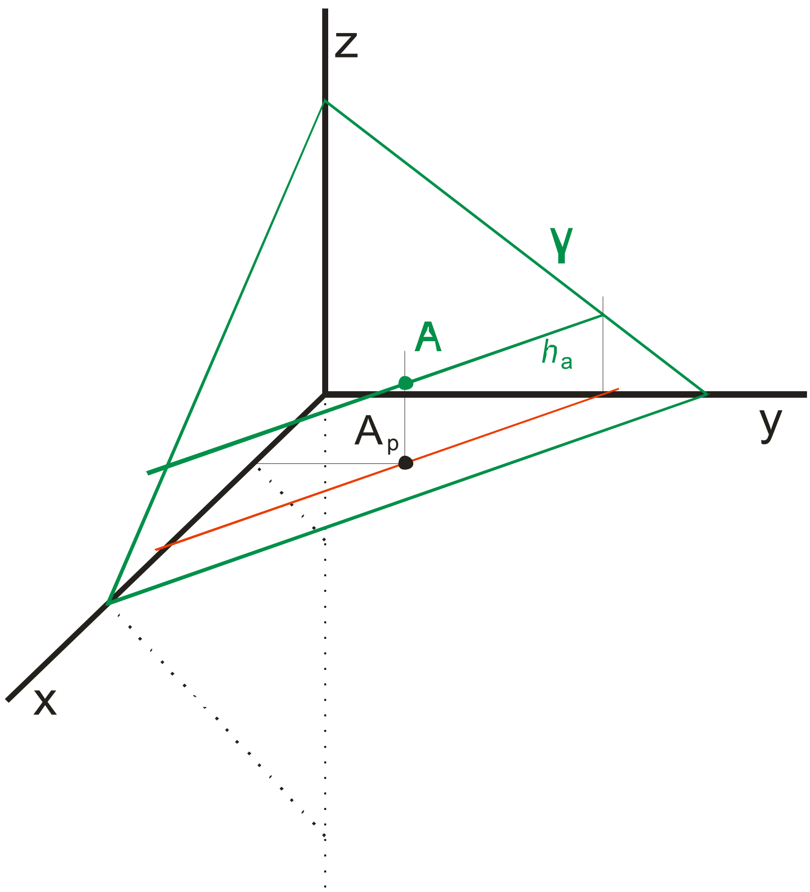
Nejprve si vyneseme rovinu γ. Na osy x, y a z vyneseme příslušné souřadnice a spojíme získané body přímkami, které budou stopami roviny γ. Dále si vyneseme půdorysný průmět bodu A Ap vynesením x-ové a y-onvé souřadnice bodu. Teď máme několik možností řešení. Představím vám dva možné postupy a je na vás, který si zvolíte pro další úlohy, či zda budete užívat oba. Jsou velice podobné.

a) Bodem A_p vedeme rovnoběžku s půdorysnou stopou roviny γ. Tam, kde tato přímka protne osu y, povedeme kolmici na osu y až do chvíle, kdy tato kolmice protne nárysnou stopu roviny γ. Tento průsečík nám určuje hladinu, v které bod A leží. Povedeme jím tedy hlavní přímku h_A roviny γ (hlavní přímka roviny je rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny). Teď již stačí vynést nad bod A_p rovnoběžku s osou z a tam, kde se tato rovnoběžka protne s hlavní přímkou h_A, leží bod A.
b) Bodem A_p vedeme kolmici na půdorysnou stopu roviny γ. Pojmenujeme si ji například *k*. V místě, kde *k* protíná osu y narýsujeme rovnoběžku s osou z až do chvíle, kdy tato protne nárysnou stopu roviny γ. Tento bod následně spojíme s bodem, kde *k* protíná půdorysnou stopu roviny γ. Tam, kde tato přímka protíná rovnoběžku na osu z vedenou bodem A_p, leží bod A.

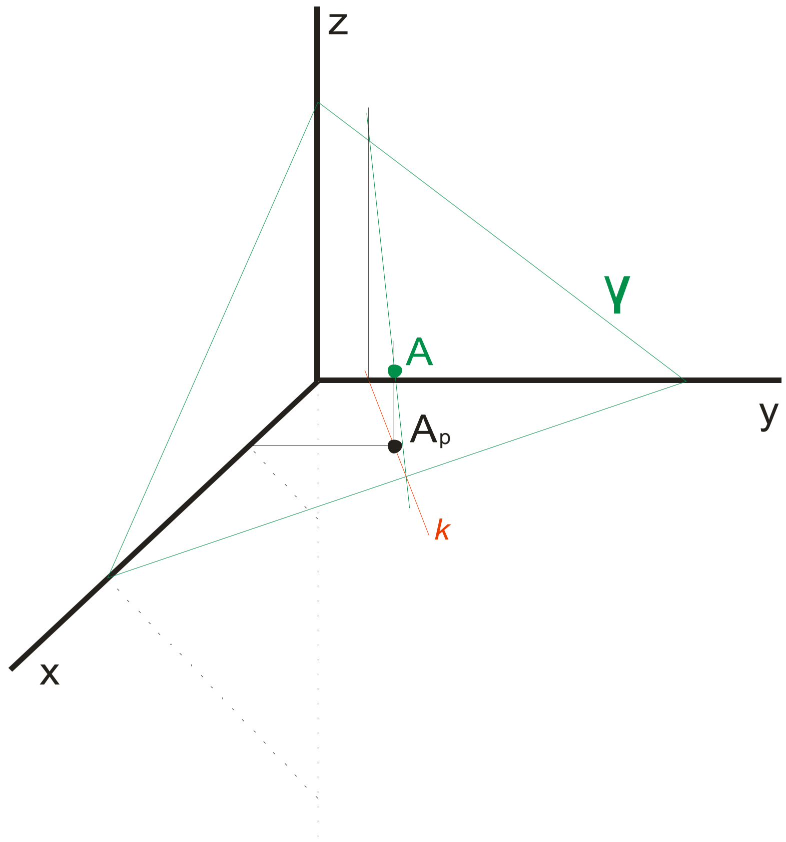
Můžete si narýsováním obou postupů do jednoho obrázku snadno ověřit, že bod A z jednoho je totožný s bodem A získaným postupem druhým.

Závěr:

Vzdálenost bodu Ap od bodu A je hledanou z-ovou souřadnicí bodu A.



obr.: **Př.4** a)



obr.: **Př.4** b)

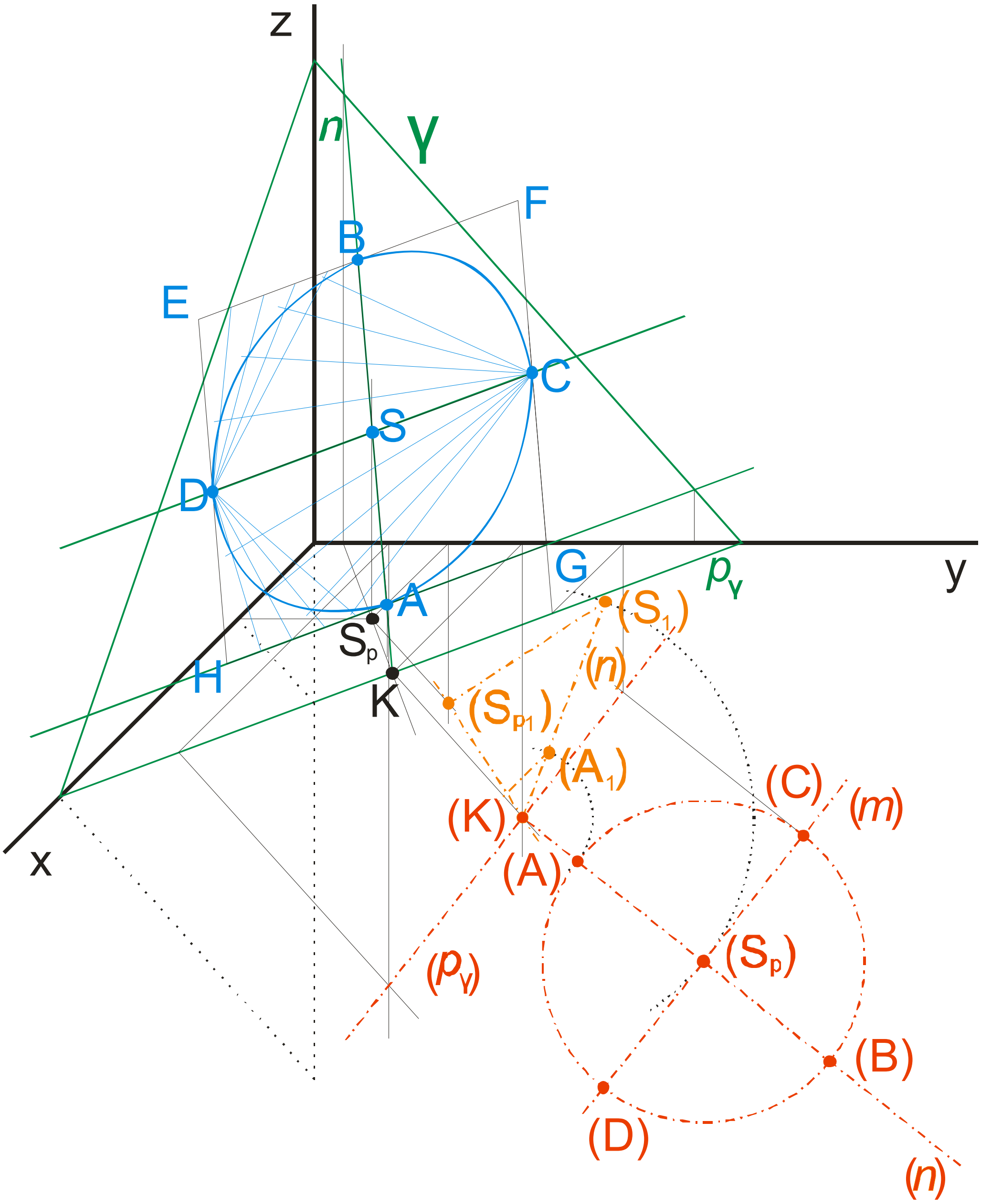
Př.5: Narýsujte kružnici ležící v rovině γ(10,8,9) se středem v bodě S[3;2,5;?] a poloměrem r=3cm.

Postup řešení:

Nejprve si vyneseme zadanou rovinu a narýsujeme půdorysný průmět bodu S S_p. Dále musíme zjistit, kde leží kosoúhlý průmět bodu S. Použijeme postup známý z předchozího příkladu **Př.4**, a bod S narýsujeme. Bod, kde přímka *k* protíná půdorysnou stopu roviny γ, si pojmenujeme K, a přímku, která nám určí sklon roviny pro bod S pojmenujeme *n*. Tím bychom měli určen střed kružnice. Další postup je již obtížnější. Musíme sklopit rovinu γ, abychom mohli narýsovat kružnici ve skutečné velikosti. Nicméně již víme, že sklopení do půdorysny nás ke skutečné velikosti nedovede. Budeme tedy muset užít postup, znázorněný na obrázku obr.: 2.3. Sklopíme si nejprve celou půdorysnu – konkrétně tedy půdorysnou stopu roviny γ $p_γ$, která bude naší osou otáčení roviny γ. Jeden bod si zvolíme náhodně, za druhý doporučuji vzít bod K. Body si sklopíme užitím způsobu známého z příkladu **Př.2** – vedeme body rovnoběžky s osou x, v místech, kde protnou osu y, uděláme na tuto osu kolmice; body vedeme rovnoběžky s krátící stranou trojúhelníku zkrácení, v místech kde protnou příslušné kolmice na osu y leží hledané body. Dále potřebujeme znát skutečnou vzdálenost bodu S od bodu K, abychom mohli bod S sklopit podle sklopené půdorysné stopy roviny γ. Musíme proto provést pomocné sklopení přímky *n*. Sklopíme si bod S_p, bod (S_{p1}) spojíme s bodem (K). Na tuto přímku můžeme nyní bodem (S_{p1}) vést kolmici, na kterou vyneseme získanou výšku bodu S, která se nijak nemění, a získáme bod (S_1). Spojením bodů (S_1) a (K) dostaneme přímku, reprezentující sklopenou přímku *n* (n_1), a také získáme úsečku (S_1)(K), která reprezentuje vzdálenost těchto bodů v rovině γ, a kterou tedy můžeme vynést ve sklopení. Z bodu (K) vedeme kolmici na sklopenou půdorysnou stopu (p_γ), jedná se o sklopenou přímku *n* (*n*). Na tuto přímku (*n*) vyneseme vzdálenost $|(S_1)(K)|$, získáme bod (S). Teprve nyní můžeme vynést kružnici o poloměru r=3. Pro přenesení této sklopené kružnice do roviny γ budeme potřebovat osy. Jednou osou bude přímka (*n*), druhou přímka na (*n*) kolmá, procházející středem (S), nazveme ji (*m*). Je totiž jisté, že kružnice se nám zkreslí na elipsu a budeme tedy potřebovat její osy, abychom ji mohli narýsovat. Osy elipsy však nesjou přímky, jedná se o úsečky – a proto si body, kde (*n*) a (*m*) protíná kružnici pojmenujeme (A)(B)(C) a (D) a dále budeme pracovat s těmito body. Na přímku (n_1) si přeneseme bod (A) obráceným postupem, kterým jsme vynášeli bod (S), získáme bod (A_1). Bude schopni odečíst jeho z-ovu souřadnici, kterou použijeme pro jeho nalezení. O bodu A víme, že leží na přímce *n*. Pokud tedy narýsujeme hlavní přímku roviny o výšce z-ové souřadnice bodu A, potom její průnik s přímkou *n* bude bodem A. Vzdálenost, jakou má bod A od bodu S vyneseme na druhou stranu od bodu S a získáme bod B. Tím máme hotovou jednu z os naší elipsy (hledané kružnice). Nalézt druhou je již jednodušší. Bodem (C) vedeme kolmici na osu otáčení (p_γ). Bod, kde se tato kolmice s (p_γ) protne, si překlopíme zpět do půdorysny na přímku p_γ. Vedeme takto získaným bodem rovnoběžku s přímkou *n* (můžete si snadno ověřit, že přímky odpovídající přímce *n* jsou pro všechny body roviny totožné). Dále víme, že bod C leží ve stejné výškové hladině, jako bod S, a proto průsečík této rovnoběžky s hlavní přímkou vedenou bodem S bude bodem C. Vzdálenost |SC| si vyneseme na druhou stranu od bodu S a získáme bod D. Nyní tedy máme hotovou i druhou osu, a zbývá dorýsovat elipsu, která bude naší zkreslenou hledanou kružnicí. Můžeme užít libovolnou metodu pro narýsování elipsy. Zde vám uvedu pouze jednu – příčkovou. Nejprve vedeme body A a B rovnoběžky s osou CD, poté body C a D rovnoběžky s osou AB, vytvoříme tím kosodélník, který opisuje elipsu a je rozdělen na čtyři pole. Rohové body polí si pojmenujeme EFGH. Teď bude potřeba dělit úseky jednotlivých polí – to budou ony příčky. Rozdělíme si tedy úsečku SB a úsečku EB na stejný počet dílků (na obrázku máte 5, čím více dílků, tím přesnější elipsa). Dílky na úsečce EB spojíme s bodem D, dílky na úsečce SB spojíme s bodem C. Bod, kde se přímka prvním dílkem od bodu B vycházející z bodu D protíná s přímkou prvním dílkem od bodu B vycházející z bodu C, leží jeden z bodů elipsy. Průsečík druhé přímky s druhou je dalším bodem a tak dále. A úplně stejně budeme postupovat v dalších polích, rozdělíme přímku SA a HA a spojujeme, a tak dále, až budeme mít body pro každé z polí. Nakonec pečlivě všechny body propojíme křivkou, která se spojí v elipsu.

<u>Závěr:</u>

Narýsovali jsme v rovině γ kružnici se středem S a poloměrem 3 cm.



obr.: **Př.5**

Kap. 3 Polohové úlohy

Polohové úlohy se zabývají obecně studiem polohy a vzájemného vztahu geometrických útvarů. Patří sem například úlohy o incidenci (vzájemná poloha dvou útvarů, majících společnou část), průsečnici rovin, průsečnici přímky a tělesa, hledání průniku těles a podobně.

Polohové úlohy mají mnoho společného s úlohami metrickými, často z nich přímo vycházejí. Během řešení úloh budeme muset často provádět úkony spadající pod metrické úlohy – nejčastěji při konstrukci těles.

Systém značení v rámci polohových úloh je totožný s tím, který jsme si zavedli v úlohách metrických, tj. úhel $\omega=135°$ a kvocient $q=2/3$.

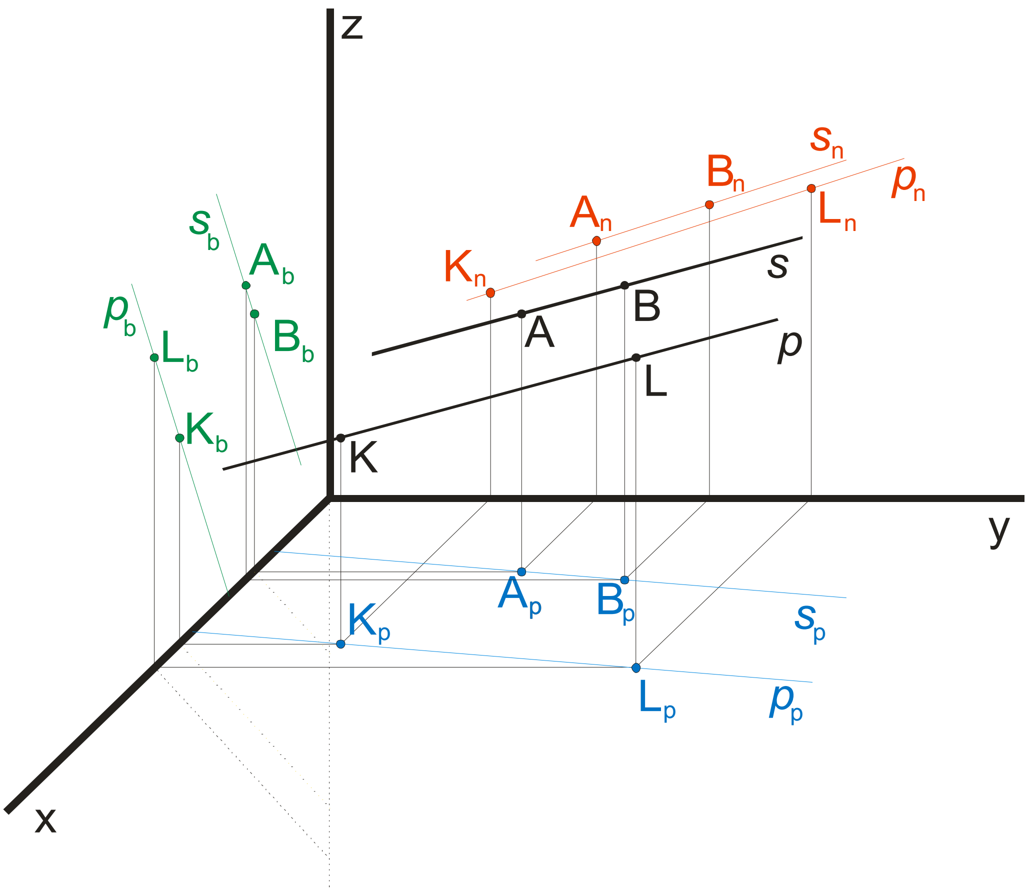
Př.1: Mějme přímku *p* zadanou body K [6,3,4] a L [7,9,6] a bod A [3,5,5]. Veďte bodem A přímku rovnoběžnou s přímkou *p* - narýsujte všechny její průměty a využijte je pro konstrukci jejího kosoúhlého průmětu.

Postup řešení:

Vyneseme si body K a L, spojíme je přímkou *p* a vyneseme si bod A. Víme, že rovnoběžka se zobrazí jako rovnoběžka ve všech svých průmětech. Z toho tedy budeme vycházet a zakreslíme si všechny průměty přímky *p* (půdorysný, bokorysný i nárysný). Stejně tak si uděláme i všechny průměty bodu A. Nyní si zvolíme, na základě kterých dvou průmětů budeme rovnoběžku rýsovat – pro účely příkladu nejlépe poslouží půdorysný a nárysný, kdy bokorysný bude sloužit jako kontrola. Půdorsným průmětem bodu A A_p vedeme přímku rovnoběžnou s půdorysným průmětem přímky *p* p_p. Nazveme ji s_p, a bude to půdorysný průmět hledané přímky *s*. Obdobně povedeme bodem A_n, nárysným průmětem bodu A, rovnoběžku s nárysným průmětem přímky *p* p_n, kterou označíme s_n a jedná se o nárysný průmět hledané rovnoběžky. Protože přímka je určena dvěma body, a bod A známe, poslouží nám tyto dva průměty přímky s s_p a s_n k vyhledání druhého bodu potřebného pro konstrukci rovnoběžky. Zvolíme si bod na půdorysném průmětu s_p, označíme ho například B_p. Bodem B_p povedeme rovnoběžku s osou x, v místě kde protne osu y, uděláme kolmici na tuto osu až do momentu kdy tato protne přímku s_n. V tomto místě leží nárysný průmět body B B_n. Ten nám poslouží k určení z-tové souřadnice bodu B, kterou vyneseme nad bod B_p a získáme bod B. Spojením bodů A a B získáme přímku *s*, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou *p*.

Závěr:

Vynesením bokorysného průmětu bodu B B_b a jeho spojením s bodem A_b můžeme zkontrolovat, že výsledná přímka s_b je opravdu rovnoběžná s přímkou pb.



Obr: **Př.1**

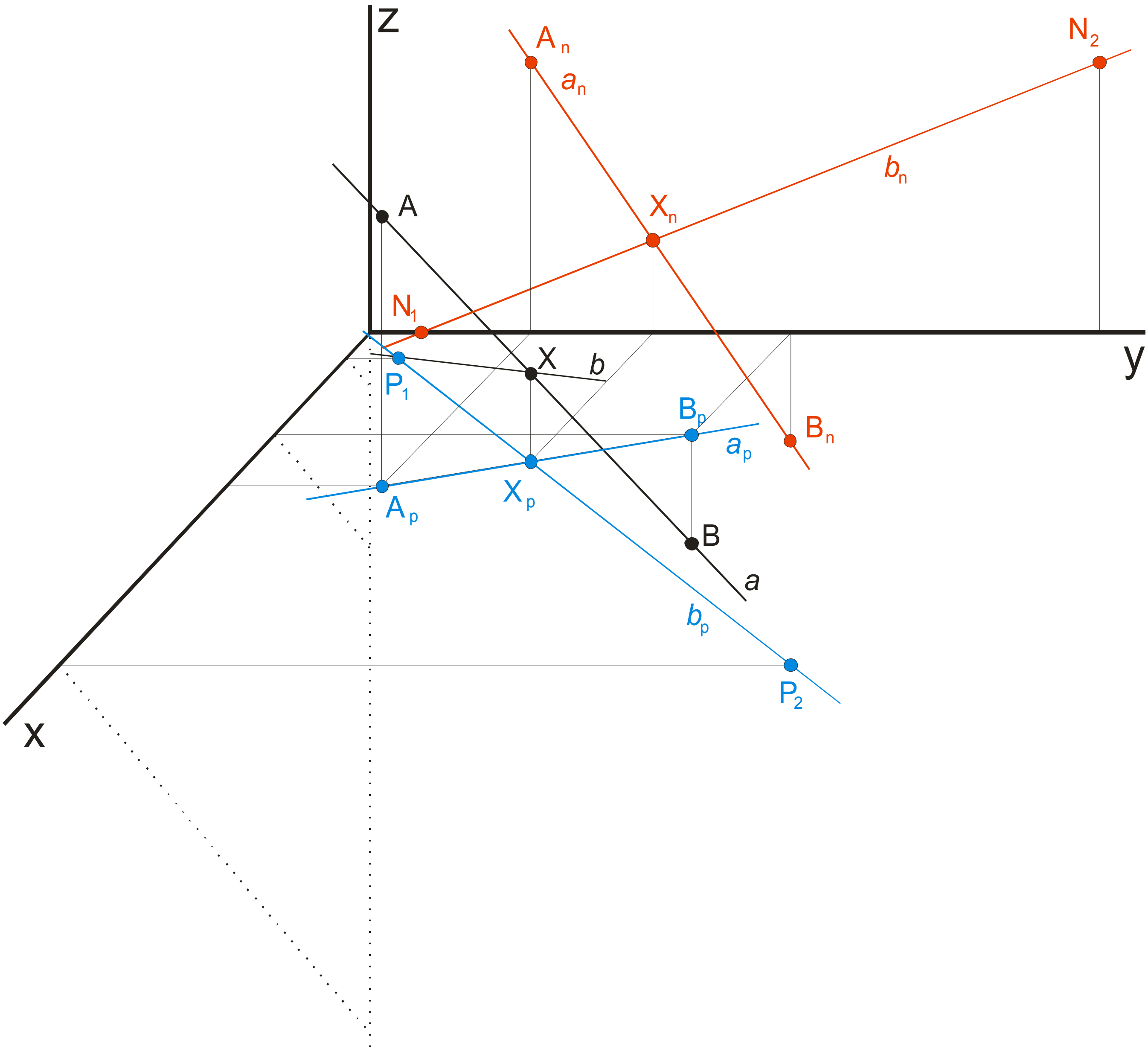
Př.2: Mějme zadány dvě přímky, *a* a *b*. Přímka *a* je dána dvěma body, A [6,3,5] a B [4,8,-2] a přímka *b* svou nárysným průmětem (N_1 [0,1,0] N_2 [0,14,5]) a půdorysným průmětem (P_1 [1,1,0] P_2 [13,14,0]). Vyšetřete vzájemnou polohu obou přímek.

Postup řešení:

Nejprve si vyneseme body A a B, spojíme je a tím narýsujeme přímku *a*. Následně narýsujeme nárysný průmět přímky *b* b_n spojením bodů N_1 a N_2, a půdorysný průmět b_p spojením bodů P_1 a P_2. Tímto máme zakresleno zadání a můžeme se pustit do vyšetřování vzájemné polohy. Již jen zběžným pohledem je patrné, že dvě zadané přímky nejsou ani totožné, ani rovnoběžné. Zaměříme se tedy na zjištění, zdali mají společný bod – průsečík, a jedná se o rovnoběžky či tento bod nemají a jsou to mimoběžky. Narýsujeme půdorysnou stopu přímky *a* a_p spojením půdorysného průmětu bodu A A_p a půdorysného průmětu bodu B B_p. Uvidíme, že tato stopa a_p se v jednom místě protíná s půdorysným průmětem (půdorysný průmět je jen jiné označení pro půdorysnou stopu) přímky *b* b_p. Tento průsečík si nazveme například X_p. X_p je bodem, který může být půdorysným průmětem průsečíku obou přímek. Abychom mohli určit, zda se opravdu jedná o průsečík či pouze o místo, kde se při pohledu shora přímky kříží, je nutné narýsovat také nárysnou stopu přímky *a* a_n. Body A_p a B_p vedeme rovnoběžky s osou x. Tam, kde tyto rovnoběžky protnou osu y, vyneseme kolmo na ni z-tové souřadnice bodů. Získáme nárysné průměty bodů: A_n a B_n. Jejich spojnicí je nárysná stopa přímky *a* a_n. Můžeme opět pozorovat, že se nám nárysné stopy přímek a_n a b_n protínají. Tento průsečík nazveme X_n. Nyní stačí zkontrolovat, jestli nárysný průmět bodu X X_n odpovídá půdorysnému průmětu X_p. Opět můžeme vést bodem X_p rovnoběžku s osou x a v místě kde protne osu y udělat na tuto kolmici. V případě, že bod X_n na této kolmici leží, pak odpovídá průmětu X_p a bod X je průsečíkem přímek *a* a *b*, což jak můžeme vidět je právě tento případ. Dále můžeme také vidět, že ani v jednom případě (půdorysné stopy a nárysné stopy) na sebe přímky nejsou kolmé, nejedná se tedy o kolmice.

Závěr:

Přímky *a* a *b* jsou různoběžky.



Obr: **Př.2**

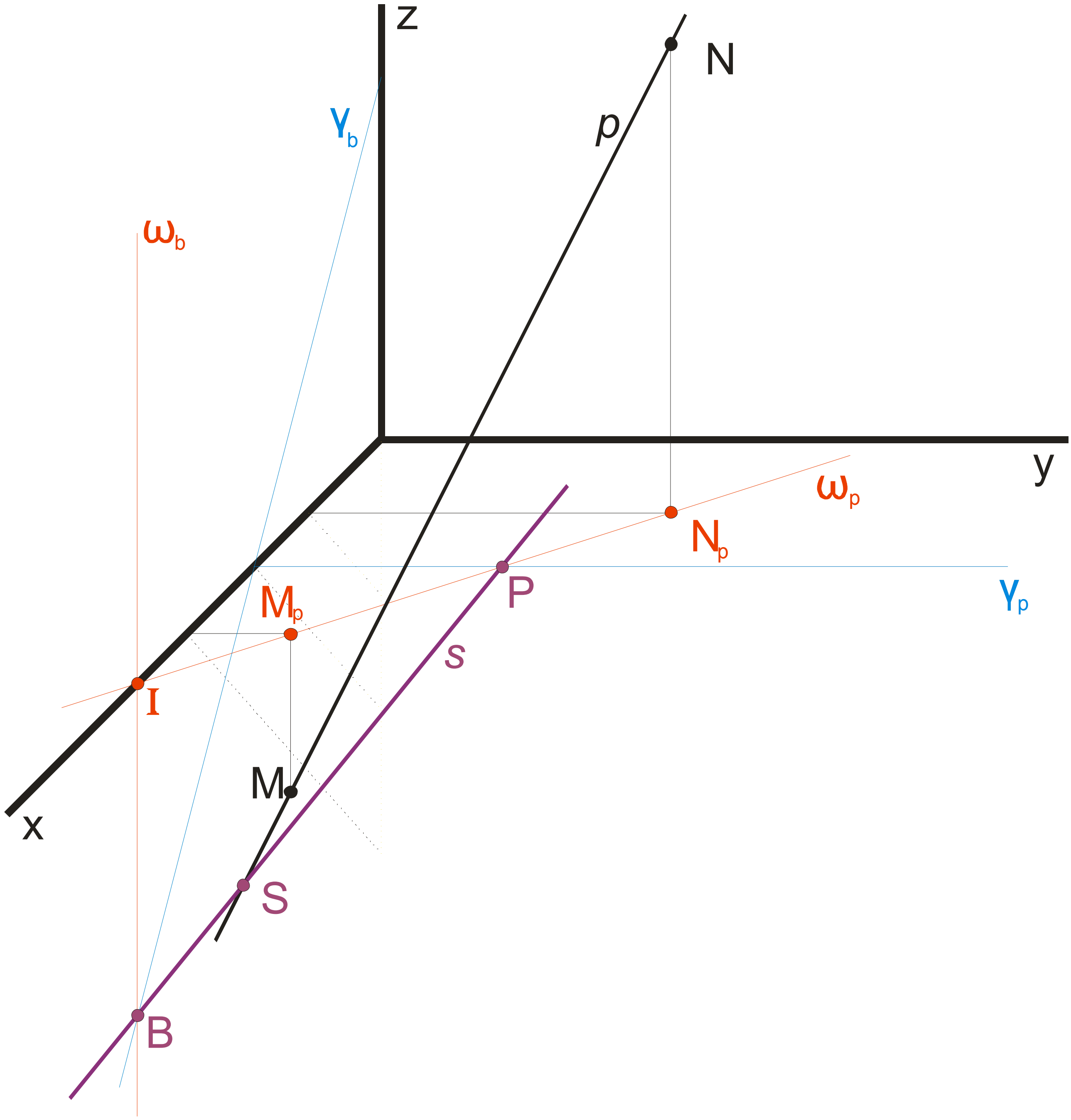
Př.3: Nalezněte průsečík přímky *p*, zadané body M[8,2,-1] a N [3,7,9]s rovinou γ, která je zadaná pomocí své bokorysné stopy (4,0,7) a víme o ní, že je na bokorysnu kolmá.

Postup řešení:

Nejprve narýsujeme zadání. Stejně jako v předchozím příkladě vyneseme body M a N a spojíme je přímkou, která bude přímkou *p*. Ze zadání roviny vyplývá, že její půdorysná stopa musí být rovnoběžná s osou y, aby byla dodržena podmínka kolmosti na bokorysnu. Můžeme tedy začít hledat onen průsečík. Uděláme to tak, že přímkou *p* proložíme rovinu, nazvěme ji rovina ω. Pro jednoduchost si ji zvolíme kolmou jak na půdorysnu, tak na nárysnu. Tím se nám tato úloha transformuje na hledání průsečnice dvou rovin. Průsečnice bude přímka, kde se protínají obě roviny, γ i naše vložená ω, nazvěme si ji například *s*. A vzhledem k tomu, že v rovině ω leží jak přímka *p*, tak i ona průsečnice *s*, a tato zároveň leží i v rovině γ, potom můžeme říct, že průsečík přímky *s* přímkou *p* je onen hledaný průsečík přímky *p* s rovinou γ. Průsečnici dvou rovin budeme hledat pomocí jejích stopníků. Vzhledem k tomu, že průsečnice leží v obou rovinách, potom body, kde se budou protínat stopy těchto rovin, budou stopníky této průsečnice *s*. Nejprve si tedy narýsujeme půdorysnou stopu roviny ω ω_p. Tato bude vzhledem k vhodnému zvolení roviny splývat s půdorysným průmětem přímky *p*, a narýsujeme ji tedy jednoduše spojením půdorysných průmětů M_p a N_p bodů M a N. Stopa ω_p protne půdorysnou stopu roviny γ v bodě, který si nazveme P. Dále narýsujeme bokorysnou stopu roviny ω. Opět máme vzhledem k vhodné volbě roviny usnadněnou práci, protože tato stopa bude rovnoběžná s osou z. Protáhneme si půdorysnou stopu roviny ω ω_p a v místě kde protne osu x bude bod I společný bokorysné a půdorysné stopě roviny ω. Tímto bodem tedy povedeme onu rovnoběžku s osou z, které bude bokorysnou stopou roviny ω ω_b. Bod, kde ω_b protne bokorysnou stopu roviny γ γ_b nazveme B a je to druhý bod průsečnice *s*. Spojením bodů P a B tedy získáme průsečnici s rovin γ a ω. Jak je řečeno výše, tato průsečnice bude mít průsečík s přímkou *p*, tento bod nazveme S.

Závěr:

Bod S je průsečíkem přímky *p* s rovinou γ.



Obr: **Př.3**

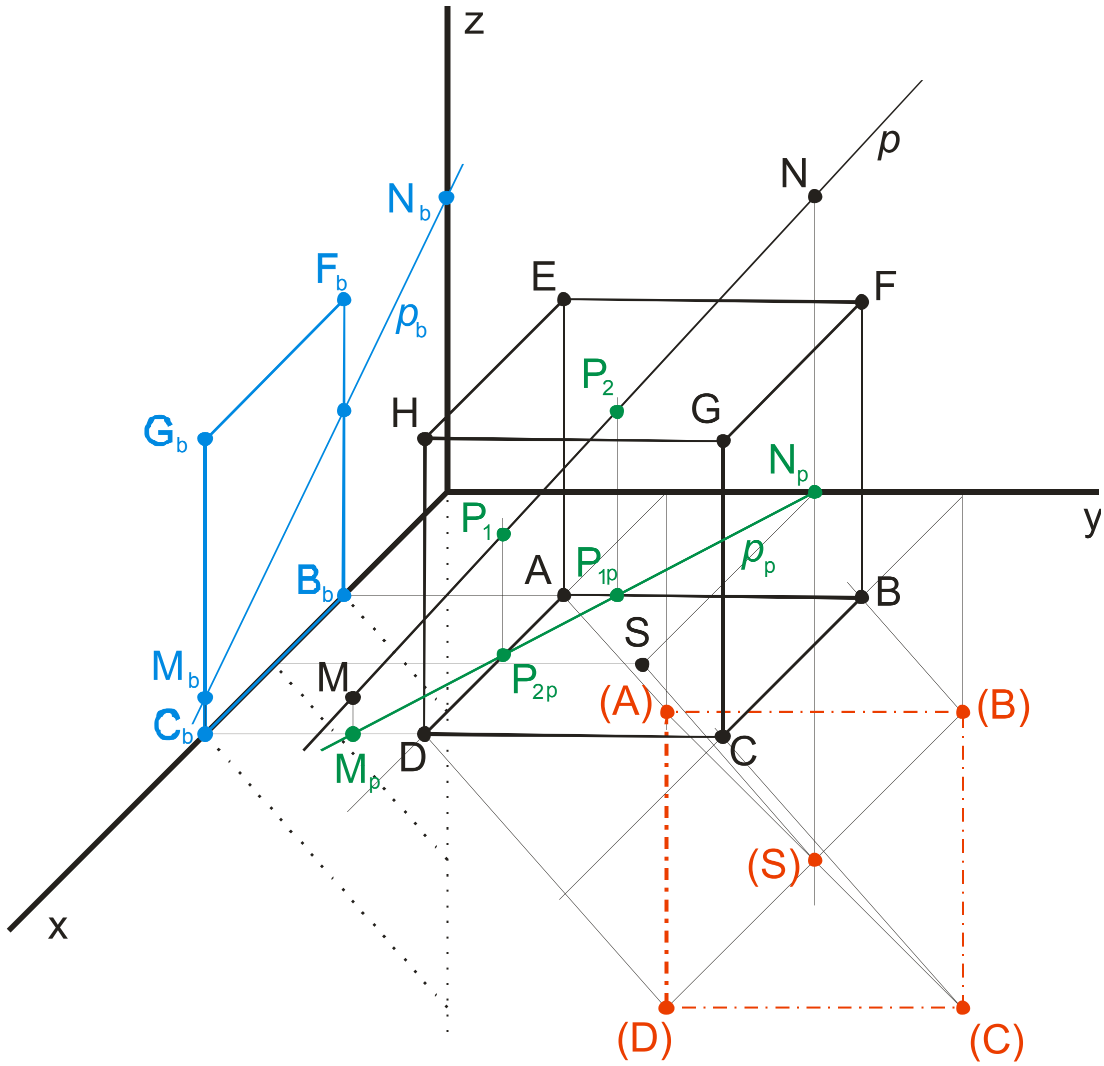
Př.4: Mějme zadánu krychli, jejíž podstava leží v půdorysně - známe jeden vrchol A [3,3,0] a střed strany S [5,5,0]. Nalezněte průsečíky přímky p (M [7,2,1] N[0,5,4]) s touto krychlí.

<u>Postup řešení:</u>

Nejprve si musíme sestrojit krychli samotnou. Známe jen dva body ležící v půdorysu a víme také, že v půdorysu leží jedna ze stran krychle. Vyjdeme tedy z těchto informací a sestrojíme si podstavu krychle. Bude potřeba sklopit celou půdorysnu – to provedeme podle osy y. Dle vám již známeho postupu z příkladu **Př.2** v metrických úlohách. Tím získáme sklopené obrazy bodů A a S (A) a (S). Vzhledem k tomu, že ve sklopení se nic nezkresluje a pravý úhel se zachovává, můžeme na základě znalosti této poloviny úhlopříčky doplnit celý čtverec podstavy (A) (B) (C) (D) (protáhneme úsečku (A)(S) a od bodu (S) vyneseme vzdálenost |(A)(S)| na druhou stranu, získáme (C), vedeme kolmici na úsečku (A)(C) bodem (S), na obě strany vyneseme vzdálenost |(A)(S)| a získáme body (B) a (D)) Nyní body (B) (C) (D) vedeme kolmice na osu y. V místech doteku narýsujeme rovnoběžky s osou x a vyneseme vzdálenosti jednotlivých bodů od osy y. Tím získáme body B C D a po vynesení bodu A tedy můžeme narýsovat podstavu krychle ABCD. Každým z těchto bodů teď povedeme rovnoběžku s osu z, na kterou vyneseme vzdálenost |(A)(B)| (výška tělesa se nezkresluje a v případě krychle je stejná jako délka strany, kterou máme ve sklopení narýsovanou) čímž získáme body E F G H. Tím máme krychli hotovou. Zbývá vynést body M a N a narýsovat přímku *p*. Poté se již můžeme pustit do hledání průsečíků. Postupujeme obdobně jako při hledání průsečíku přímky s rovinou. Můžeme říci, že strany krychle reprezentují roviny, jen v tomto případě hned nevíme, které z nich bude přímka protínat. Proto narýsujeme půdorysný průmět přímky *p* spojením bodů M_p a N_p. Víme, že podstava krychle ABCD leží v půdorysně a že stěny krychle jsou na ni kolmé, proto ihned nalezneme místa, kde bude přímka *p* protínat strany krychle – jsou to místa, kde půdorysný průmět přímky *p* p_p protíná strany podstavy ABCD. Je vidět, že se jedná celkem o dva body, označme si je P_{1p} a P_{2p}. Zbývá určit, v jaké výšce průsečíky leží. U průsečíku P_1 je poměrně jasné, že leží ve stěně ADHE, a bude stačit nad bod P_{1p} narýsovat rovnoběžku s osou z až do protnutí přímky *p*, kde bude ležet samotný průsečík P_1. U průsečíku P_2 již situace není tak zřejmá, mohl by protínat jak stěnu ABFE tak i vrchní stěnu EFGH. Proto si uděláme bokorys, ze kterého bude jasné, která z těchto možností platí. Pokud se podíváme pozorněji, poznáme, že bokorysný průmět krychle bude ve tvaru čtverce, protože strany krychle ADEH BCFG leží v zákrytu, přičemz z bokorysného pohledu bude vidět strana BCFG.. Tyto body si tedy promítneme do bokorysny, kam následně promítneme i body M a N a zobrazíme přímku p_b. Nyní je již zřetelné, že přímka horní stěnu neprotíná a průsečík se nachází ve stěně ABFE a bod P_{2p} je tedy opravdu půdorysným průmětem průsečíku P_2. Můžeme jím tedy vést rovnoběžku s osou z až protne přímku p, kde leží druhý průsečík přímky s krychlí P_2.

<u>Závěr:</u>

Přímka p má s krychlí dva průsečíky P_1 a P_2.



Obr.: **Př.4**

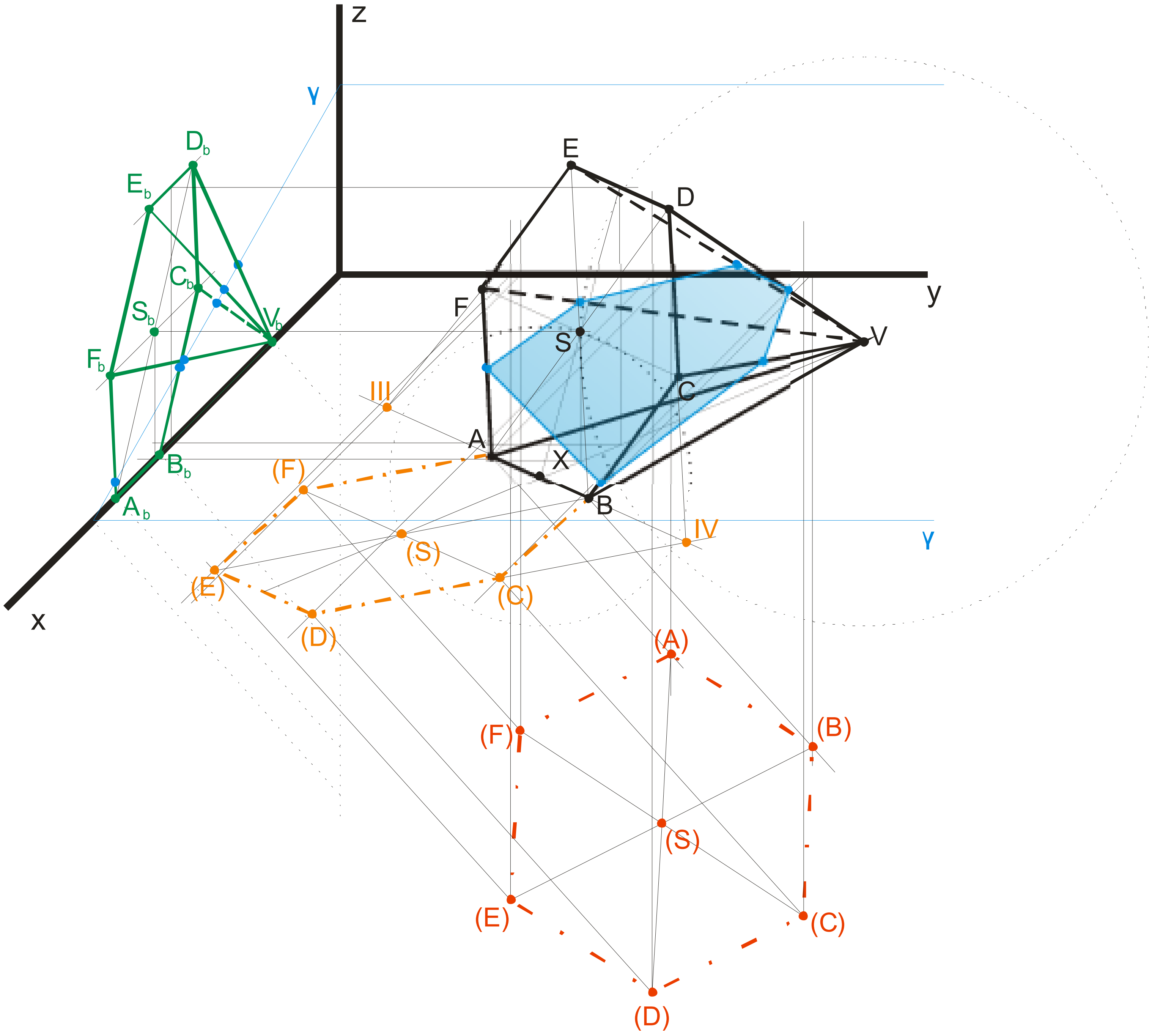
Př.5: Nalezněte průsečík pravidelného šestibokého jehlanu ABCDEFV s rovinou γ. Víme, že jedna strana jehlanu leží v půdorysně (A[8,7,0] B[10,10,0] V[3;12,5;0]) a známe jeho výšku v=6. Rovinu γ máme zadanou γ(11,4,0). Narýsujete řešení, kde jehlan leží nad půdorysnou.

<u>Postup řešení:</u>

Nejprve si narýsujeme trojúhelník ABV, který představuje onu stěnu jehlanu ležící v půdorysně. Dále musíme nalézt, kde bude ležet střed podstavy, bod S. Tento bod bude stěžejním při konstrukci jehlanu, protože známe jen jednu stranu podstavy a jeho výšku, která určuje vzdálenost právě od středu podstavy S k vrcholu V, který známe. Vytvoříme si tedy nejprve podstavu jehlanu, onen šestiúhelník. Abychom ji mohli narýsovat, uvažujeme ji ve sklopení v půdorysně (ona podstava tedy nyní leží v půdorysně a tvoří ji body (A) (B((C) (D) (E) (F), kdy (A) = A a (B) = B. Můžeme teď narýsovat ve sklopení tento sklopený šestiúhelník dle vám již známeho postupu z příkladu **Př.5** v metrických úlohách. Vyneseme si body A a B, jediné dva body které z šestiúhelníka známe. Získáme body (A) a (B). Z vlastností pravidelného šestiúhelníku je pro nás důležitá ta, kde se praví, že délka jedné strany je rovna poloměru kružnice opsané. Body (A) a (B) musí na této kružnici ležet, jejich vzdálenost od středu je tedy stejná a to|(A)(B)|. Oba body určíme jako středy pomocných kružnic – poloměrem bude vzdálenost |(A)(B)|. Tam, kde se tyto pomocné kružnice protnou, se nalézá bod (S), střed kružnice opsané naší šestiúhelníkové podstavě. Kružnici si tedy narýsujeme (opět r=|(A)(B)|). Nyní z bodu (B) uděláme další pomocnou kružnici se stejným poloměrem jako má kružnice opsaná. Tam, kde tato pomocná kružnice protne kružnici opsanou, leží další bod podstavy, (C). Postup opakujeme, za střed pomocné kružnice nyní zvolíme (C), získáme (D) a dalším opakováním potom i (E) a (F). Tím máme narýsovanou podstavu jehlanu ve sklopení. Nyní ji sklopíme zpět do půdorysny, kde bude tvořit onu na začátku zmíněnou sklopenou podstavu jehlanu dle osy tvořené úsečkou procházející body A a B. Můžeme tedy nyní udělat kružnici se středem v bodě V a poloměrem o výšce jehlanu: r=v. Poté uděláme druhou kružnici se středem ve středu úsečky AB, nazvěme jej bod X a s poloměrem |X(S)|(protože X leží na přímce, tvořící osu otáčení, je X = (X)). Kružnice se protnou na celkem dvou místech, prezentujících dvě možná řešení. Vzhledem k zadání vybereme bod ležící „nahoře“. Teď když máme střed podstavy již nám nic nebrání si ji narýsovat. Můžeme využít například metodu středové kolineace. Známe vzdálenost středu od osy (|OX|). Vzhledem k tomu, že bod S leží uprostřed podstavy, potom stejná vzdálenost musí být i z bodu S do středu hrany podstavy DE. Když si tedy tuto vzdálenost na přímku spojující X a S od bodu S vyneseme, můžeme zde narýsovat hlavní přímku roviny podstavy jehlanu, na níž budou oba body, D a E ležet. Povedeme přímku body (E) a (S), která protne osu v bodě B, což bude sdružený bod I. Tímto bodem pak povedeme přímku přes bod S, na jejímž průsečíku s výše zmíněnou hlavní přímkou bude ležet bod E. Podobně provedeme pro bod D. Dále si spojíme body (E) a (F) a také (D) a (C), získáme sdružené body III a IV, které spojíme přímkami s příslušnými body E a D. Tam, kde tyto přímky protnou hlavní přímku podstavné roviny procházející bodem S potom leží oba body C a F. Tím máme narýsovanou podstavu. Zbývá jednotlivé vrcholy podstavy propojit s vrcholem jehlanu a máme narýsovaný jehlan. Teď tedy pokročíme a narýsujeme si rovinu γ. Nyní tedy budeme několikrát řešit nám již známou úlohu průsečíku přímky s rovinou, kde přímky budou postupně reprezentovat jednotlivé hrany jehlanu. Začneme s bokorysným průmětem jehlanu, kde bude díky znalosti bokorysné stopy roviny γ snadné odečíst jakým stylem a zda vůbec bude rovina γprotínat těleso. Víme, že bod S leží ve středu tělesa, půdorysný průmět osy tělesa známe, může proto snadno odečíst z-ovou souřadnici bodu S, a stejně tak z-ovou souřadnici středu hrany DE, kteréžto body pak můžeme snadno vynést do bokorysu. Těmito bokorysnými průměty pak vedeme rovnoběžky s osou x. Průsečíky rovnoběžek s osou y vedenými jednotlivými body podstavy jehlanu s těmito přímkami pak tvoří jednotlivé bokorysné průměty daných bodů. Bod V leží v půdorysně, jeho bokorysný průmět je tedy velice snadné nalézt (leží na ose x). Můžeme tedy narýsovat již celý bokorysný průmět jehlanu. Vzhledem k tomu, že rovina γ je kolmá na bokorysnu, poznáme z ní, jak kde které hrany leží ve vztahu k rovině. Tam, kde některý z bokorysných průmětů hran protíná bokorysnou stopu roviny γ leží průsečíky této roviny s jednotlivými hranami. Spojením příslušných průsečíků nakonec získáme plochu, jež je průsečnicí roviny γ s jehlanem ABCDEFV.

Závěr:

Nalezli jsme průsečík roviny γ s pravidelným šestibokým jehlanem ABCDEFV.



Obr.: **Př.5**

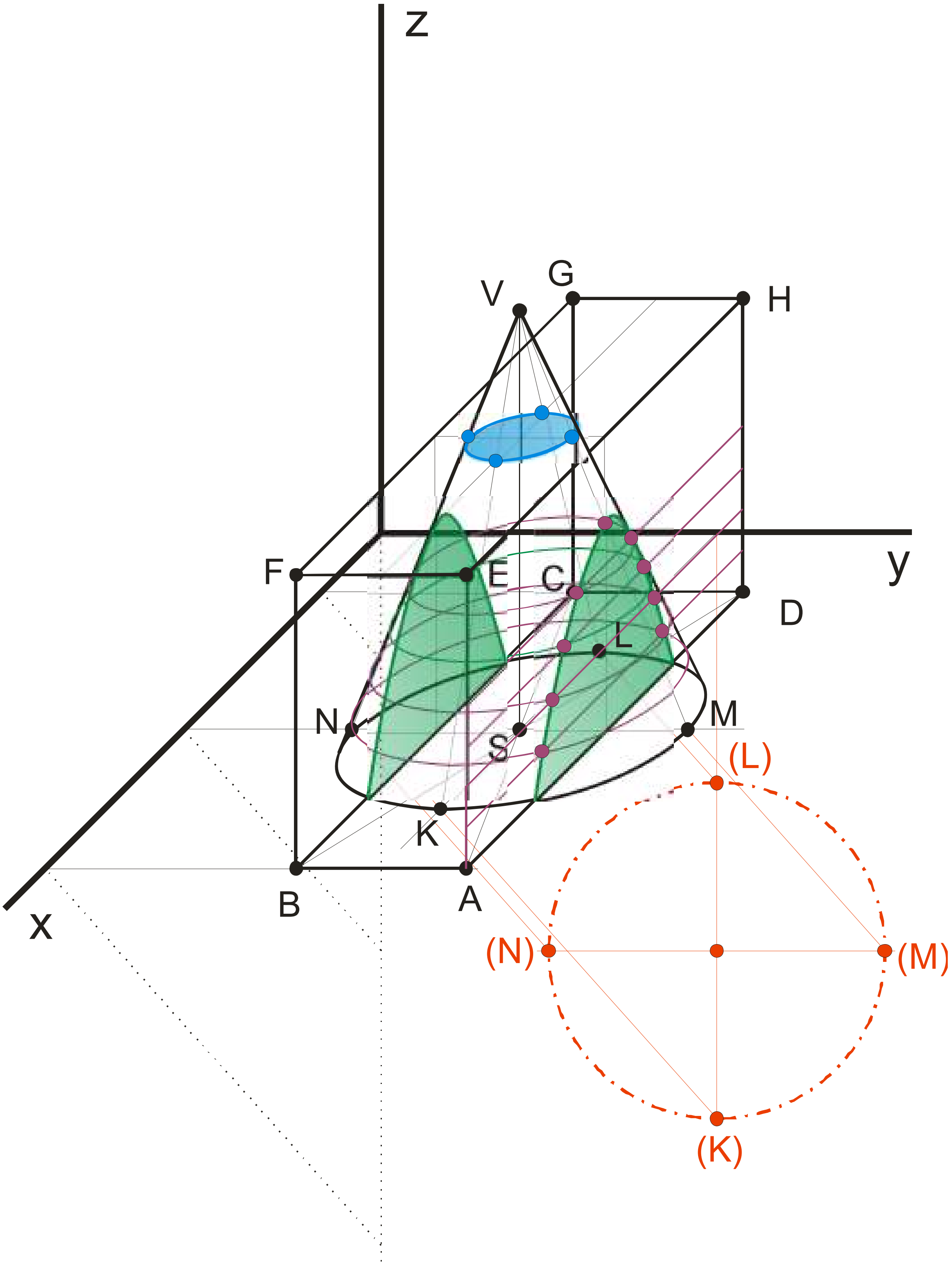
Př.6: Narýsujte průnik kuželu s hranolem. Podstavná kružnice kužele leží v půdorysně a je zadána pomocí středu S[10,8,0] a poloměru r=4. Výška kuželu je v_k=10. Podstava hranolu taktéž leží v půdorysně, je dána její úhlopříčka A[17,10,0] C[3,6,0] a víme, že je její hrany jsou rovnoběžné s osami x a y. Výška hranolu je v_h=7.

Postup řešení:

Nejprve si narýsujeme obě tělesa. Vyneseme střed S podstavné kružnice kuželu. Abychom mohli kružnici narýsovat, musíme bod S sklopit. Postupujeme tak, jak jsme postupovali při řešení příkladu **Př.5** v metrických úlohách. Narýsujeme si pro sklopenou kružnici její osy , které budou, po sklopení zpět do půdorysny, tvořit osy elipsy, ve kterou se tato podstavná kružnice zkreslí (dále se budeme o podstavě vyjadřovat jako o elipse). Zvolíme si je výhodně: jedna bude kolmá na osu y a druhá s ní bude rovnoběžná. Body průniku kružnice s osou kolmou na osu y pojmenujeme (K) a (L), body průniku kružnice s osou rovnoběžnou s osou y pojmenujeme (M) a (N). Když teď tyto body sklopíme zpět do půdorysny, bude osa KL rovnoběžná s osu x a osa MN rovnoběžná s osou y. Pro narýsování elipsy můžeme opět využít příčkovou konstrukci, body KLMN jsou jejími vrcholy. Následně zbývá vést bodem S rovnoběžku s osou z a vynést na ni výšku kuželu 10cm. Tím získáme vrchol V, a tento vrchol V potom tečně spojíme s právě narýsovanou elipsou. Tím máme hotový kužel. Dále je na řadě hranol. Vyneseme si body A a C, získáme úhlopříčku tělesa. Je zadáno, že hrany mají být rovnoběžné s osami x a y, oběma body proto povedeme rovnoběžky s těmito osami a v místech, kde se tyto rovnoběžky protnou, budou body B a D. Tím máme hotovou podstavu hranolu. Povšimněte si, že střed této podstavy je totožný se středem podstavy kuželu – tato informace nám později velice pomůže. Výška hranolu je 7cm, vyneseme ji proto nad jednotlivé body, získáme body EFGH a můžeme hranol dorýsovat. Máme hotové obě tělesa a můžeme začít hledat jejich průnik. Bude se ve skutečnosti jednat o hledání průsečíků rovin, reprezentovaných stěnami hranolu, s kuželem. Vidíme, že se jedná celkem o tři řezy. První bude stěnou EFGH, druhý ADEH a třetí BCFG. Začneme tedy průnikem kužele se stěnou EFGH. Protože podstava kužele leží ve stejné rovině jako podstava hranolu, potom řez kuželu stěnou AFGH, která je s podstavou hranolu rovnoběžná bude elipsou souměrnou s podstavou kuželu. Již na pohled je zřejmé, že stěna EFGH je širší, než kužel v této hladině, a proto nedojde k žádným komplikacím (mohlo by se stát, že kužel by byl v tomto místě širší a potom by řezem byla jen část elipsy) a řez bude opravdu jen jednoduchá elipsa. Můžeme si samozřejmě rovinu stěny EFGH sklopit, ale v tomto případě něco takového nebude nutné a můžeme si práci usnadnit. Ona elipsa je souměrná s podstavou a toho využijeme při hledání jejích os. Nemůžeme použít obrysy kužele, protože tyto nemají žádnou geometrickou hodnotu a slouží pouze pro vizuální vyobrazení. My si proto spojíme jednotlivé vrcholy podstavné elipsy kužele KLMN s vrcholem V. Jakákoliv elipsa v rovině rovnoběžné s podstavnou rovinou bude muset mít své vrcholy právě na těchto spojnicích. Dále v rovině EFGH narýsujeme přímky rovnoběžné s osami podstavné elipsy kužele: jejich průsečík bude ležet na ose kuželu SV. Jednotlivé průsečíky těchto přímek se spojnicemi vrcholu V s vrcholy elipsy KLMN budou tedy nutně vrcholy elipsy ležící v rovině EFGH, která bude hledaným průnikem těchto těles. Elipsu si nyní můžeme snadno narýsovat. Hledání dalších průniků je již obtížnější – jedná se o řez kuželem kolmo na jeho podstavu a řezem tedy bude parabola. Ale i tady máme práci trochu zjednodušenou. Oba dva řezy, jak stranou ADEH tak i stranou BCFG jsou symetrické: obě tělesa mají stejný střed podstav a jsou pravidelná. Můžeme použít takovou metodu, která nám umožní narýsovat oba řezy najednou. A právě to uděláme. Abychom našli průnik těles, musíme si najít některé jeho body a potom je proložit onou parabolou. Můžeme rovnou určit konce parabol – budou to místa, kde se protíná podstavná elipsa kužele s podstavou hranolu. Také můžeme ihned určit vrcholy parabol - budou na přímkách, procházejících středy stran AD EH a BC FG a jejich výšku určíme průsečíkem těchto přímek se přímkami MV NV. Tímto jsme si vymezili prostor, kde budeme paraboly rýsovat. Nyní musíme nalézt další jejich body, abychom jimi mohli křivku, reprezentující parabolu proložit. Budeme provádět řezy kuželu v rovinách rovnoběžných s jeho podstavou. Výšku vrcholu paraboly si vyneseme na osu kuželu od bodu S a danou úsečku rozdělíme, nejlépe pravidelně, na několik dílků (na obrázku máte 4). V těchto hladinách nyní provedeme ony řezy kuželem rovinami rovnoběžnými s jeho podstavou – bude se tedy opět jednat o elipsy symetrické s podstavnou elipsou. Při jejich rýsování budeme postupovat stejně, jako jsme dělali řez kuželu stranou EFGH – v dané výšková hladině vedeme rovnoběžky s osami x a y, protínající se na ose kuželu, a jejich průsečíky s přímkami, spojujícími vrcholy podstavné elipsy KLMN s vrcholem kužele V jsou vrcholy jednotlivých elips daných řezů. Po narýsování těchto elips si stejné výškové hladiny narýsujeme i do obou stran hranolu, ADEH a BCFG. Průniky těchto přímek, reprezentujících výškové hladiny v jednotlivých stěnách s elipsami v odpovídajících hladinách řezů jsou potom body parabol, které hledáme. Na závěr tedy zbývá oněmi body proložit křivky, které nám reprezentují hledané paraboly.

<u>Závěr:</u>

Nalezli jsme hledaný průnik kuželu s hranolem.



obr.: **Př.6**

Kapitola 4. - Model

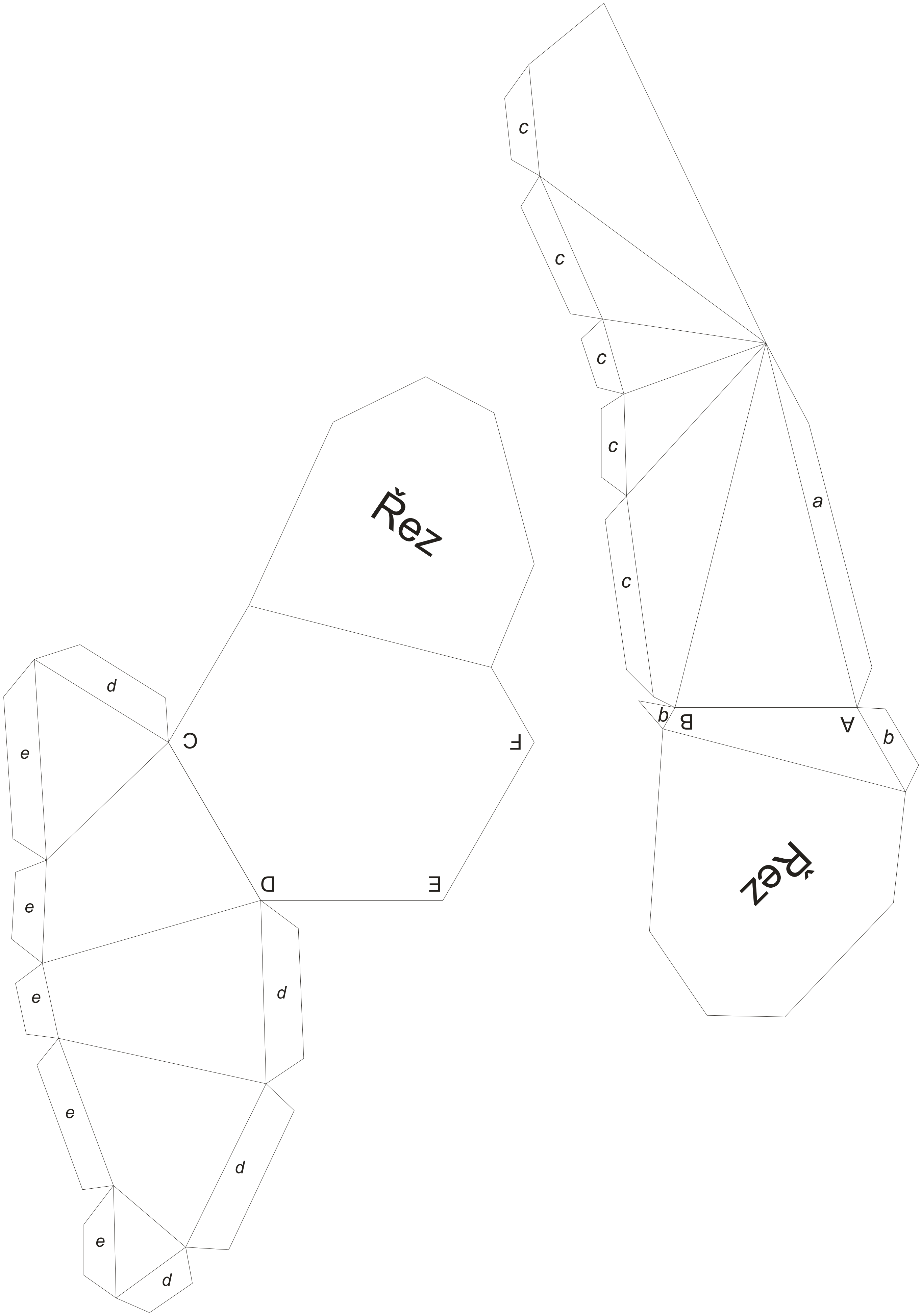
Model řezu pravidelným šestibokým jehlanem (**Př.5**)

Postup vytváření modelu:

Jako první krok si vyneseme celistvý plášť jehlanu. Podstava, pravidelný hexagon, je na výkresu zobrazena ve sklopení, a tedy ve skutečné velikosti a stačí ji jednoduše přenést. Vzhledem k poloze jehlanu víme, že jedna jeho strana leží v půdorysně, a známe souřadnice všech jejích bodů. Můžeme tedy tuto stranu narýsovat na pomocný obrázek a použít ji pro rozvinutý plášť, který vynášíme. Tím máme všechny náležitosti a konstrukce celistvého rozvinutého pláště jehlanu je již jednoduchá. Dále budeme muset postupovat po jednotlivých stranách, protože plochu řezu máme pouze v kosoúhlém průmětu a její skutečnou podobu nelze přímo zjistit. Prvním krokem bude vynesení řezu v podstavě. Ten máme na výkresu zobrazen ve svém kosoúhlém průmětu, nicméně jej můžeme snadno přenést do sklopeného průmětu podstavy. Tím jej máme narýsován ve skutečné velikosti a můžeme jej snadno přenést na náš plášť. Druhým krokem bude hledání řezů v jednotlivých stranách jehlanu – konkrétně BCV, CDV, DEV, EFV a AFV. Budeme postupovat tak, že budeme do pláště vynášet průsečíky roviny s jednotlivými hranami a poté je spojovat. Tady ovšem vyvstává problém, jak zjistit vzdálenosti těchto průniků od jednotlivých bodů podstavy (případně od vrcholu). Začneme s hranou CV. Nejprve si změříme, jakou velikost má tato hrana ve skutečnosti, tj. v našem plášti. Dále si pak změříme velikost kosoúhlého průmětu této hrany. Nakonec změříme vzdálenost průsečíku hrany s rovinou od bodu A v kosoúhlém průmětu. Tyto tři údaje dosadíme do trojčlenky a vypočítáme skutečnou vzdálenost průsečíku od bodu A, kterou můžeme vynést v našem plášti. Stejným způsobem postupujeme pro hrany DV EV a FV. Potom zbývá poslední krok, abychom mohli dokončit linii řezu pláštěm. Na hranu AF, která tvoří podstavu stěny AFV si vyneseme průsečík s rovinou – máme jej již vynesen v podstavě, takže je tento krok velice jednoduchý. Stejně tak vyneseme průsečík na hraně BC ve straně pláště BCV. Tím máme na plášti všechny potřebné body, které spojíme a získáme řezy jednotlivými stranami.

Můžeme již plášť rozdělit na dva díly. K větší části podstavy přiřadíme menší část pláště, aby model odpovídal zobrazené situaci. Poslední, co zbývá, je plocha řezu, kterou bude, jak vyplývá z konstrukce, nepravidelný šestiúhelník. Její nalezení je nejobtížnější. Budeme postupovat tak, jako bychom tuto plochu sklápěli podle přímky řezu podstavou. Podstavu budeme nyní považovat za půdorysnu, což nám umožní si do ní vynést půdorysný průmět plochy řezu. Půdorysné průměty jednotlivých hran známe, jsou to úhlopříčky podstavy. Vzdálenosti průmětů průsečíků na jednotlivých hranách od bodů podstavy zjistíme tak, že si uděláme pomocný nákres. Vyneseme si trojúhelník ASV, který nám zobrazí sklon hrany. Pokud bychom se na tuto situaci podívali v rozpracovaném modelu řezu, pak strana AS tohoto pomocného trojúhelníka je půdorysným průmětem strany AV. Protože vzdálenost průsečíku hrany AV s rovinou od bodu A známe, vyneseme si tento průsečík do pomocného trojúhelníka a povedeme jím kolmici na stranu AS. Vzdálenost bodu A od bodu, kde tato kolmice protne stranu AS je vzdálenost půdorysného průmětu tohoto průsečíku od bodu A, a můžeme ji vynést do podstavy na příslušnou úhlopříčku. Tento postup budeme opakovat pro všechny hrany, až získáme v podstavě narýsovaný půdorysný průmět plochy řezu. Takto získanými body nyní můžeme vést kolmice na osu otáčení – tedy na přímku reprezentující řez podstavou. Vrcholy hledané plochy řezu budou ležet na těchto přímkách. Známe vzdálenosti těchto vrcholů od sebe – odpovídají spojnicím průsečíků roviny řezu s hranami jehlanu. Narýsujeme kružnici o poloměru rovném délce řezu stranou BCV se středem v průsečíku hrany BC s rovinou řezu. Tam, kde tato kružnice protne příslušnou kolmici na osu otáčení, bude první vrchol hexagonu plochy řezu. Z tohoto vrcholu narýsujeme obdobně další kružnici, až zjistíme polohu všech vrcholů. Spojením těchto vrcholů získáme šestiúhelník, který je plochou řezu.

Na závěr musíme model správně orientovat a opatřit všemi náležitostmi, aby jej bylo možno sestrojit. Co se týká té části jehlanu, která obsahuje vrchol – bod B musí ležet napravo od bodu A. Druhou část jehlanu musíme celou zrcadlově otočit, aby odpovídala první části a aby bylo přiložením obou částí k sobě plochou řezu dosaženo zformování celého jehlanu. Nakonec k částem modelu, které budou k sobě přiléhat, přidáme chlopně, kterými bude model slepen dohromady. Jedná se o celistvý model, tudíž každá hrana má svoji protihranu. Vystřižením a slepením je model hotov.


c
c
c
c
c
a
b
B
A
b
Řez
Řez
d
e
C
F
D
E
e
e
d
e
d
e
d

Závěr

Při vypracovávání bakalářské práce jsem se dozvěděl mnoho nového. Naučil jsem se novou promítací metodu, a to pouze na základě literatury. Občas jsem měl s některými principy kosoúhlého promítání problémy. Několikrát se mi stalo, že jsem metodu nepochopil správně, případně vyvodil její chybnou aplikaci, a musel se opravovat.

Vyzkoušel jsem si využití nově získaných poznatků v praxi. Vytvořit vlastní příklad je mnohem těžší, než jsem si na začátku práce myslel. Často jsem musel několikrát pozměnit prvotní vstupní údaje (polohu bodů, umístění roviny apod.), aby později získané výsledky byly v přijatelném tvaru a podobě. Stalo se mi například, že při zadání, tak jak jsem jej zvolil, neměla úloha řešení, případně bylo řešení natolik složité, že bylo prakticky neproveditelné.

Při řešení úloh jsem se snažil postupovat vždy vlastní cestou a nekopírovat obdobné postupy z odborné literatury. Všimnul jsem si, že si autoři vybírají velice podobné úlohy a řeší je taktéž pomocí velice podobných postupů. Když jsem si zvolil netradiční zadání, musel jsem někdy poměrně dlouho přemýšlet, jakým způsobem úlohu uchopit. Nicméně přes všechny obtíže si myslím, že se mi podařilo vytvořit vzorek reprezentativních úloh pojímajících celou oblast kosoúhlého promítání tak, jak bylo mým prvotním záměrem.

Během zpracovávání práce jsem při hledání nových literárních pramenů narazil na velice zajímavou problematiku. Jednalo se o knížku Marie Kupčákové Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech, věnující se zpracovávání modelů jednotlivých konstrukčních úloh v Mongeově promítání. Jako bývalého hobby modeláře mne to samozřejmě velice zaujalo. Rozhodl jsem se vyzkoušet si vytvořit model na základě jedné ze svých úloh. Při doučování spolužáků metodě Mongeova promítání jsem byl jednou nucen vytvořit v rychlosti model tělesa, aby spolužák mohl přímo odpozorovat jeho viditelnost pro potřeby dané úlohy. Tento model byl tvořen v rychlosti a bez užití potřebných pomůcek, byl proto velice primitivní, nicméně velmi dobře posloužil účelu, pro nějž byl vytvořen.

V rámci této práce jsem zpracoval poměrně složitý model řezu šestibokým jehlanem. Pro tento model jsem již měl veškeré potřebné pomůcky, takže model byl zpracován exaktně a kvalitně. Proto se domnívám, že na jeho základě je možné velice rychle a snadno proniknout do podstaty onoho složitého příkladu. Myslím, že takovéto modely jsou tou pravou cestou k získání prostorové představivosti. Pokud žáci takovýto model dostanou, nebo pokud jim dokonce bude umožněno si sami model vytvořit, měli by být schopni si velice rychle osvojit jak problematiku, ke které model vytvářejí, tak i problematiku samotného vytváření modelů.

Vzhledem k obtížnosti konstruování by se na druhém stupni základní školy mohli žáci pokusit pod vedením učitele vytvářet modely základních geometrických těles. Domnívám se, že pokud by se s touto problematikou blíže seznámili, byli by ve vyšších ročnících a na střední škole schopni vytvářet takovéto modely samostatně. Na střední škole by se pak jejich dovednost mohla prohloubit přidáváním složitějších, případně i složených těles. Musím však říct, že pro vytváření modelů je velice důležitá předchozí zkušenost. Student bez jakékoliv zkušenosti a bez vedení učitele by mohl mít potíže s formováním byť i jen základních těles.

Model, který je v této práci zpracován, patří dle mého názoru k těm z nejtěžších. Neobsahuje sice kulové plochy ani zaoblení, které je náročné na převedení do podoby rozvinutého pláště, avšak pracuje s postupy, které nejsou zcela běžné a člověka bez patřičných zkušeností by dle mého názoru nenapadly.

Metodika zpracovávání modelů mne velice zaujala a rozhodl jsem se jí věnovat hlouběji I v budoucnosti. V rámci této práce jsem se jí zabýval spíše okrajově, práce je zaměřena jiným směrem. Ona jedna úloha, kterou jsem zpracoval do podoby modelu, je sotva dostatečně reprezentativní pro celou problematiku. Předpokládám však, že v budoucnu mi bude inspirací k vytváření úloh dalších a dalšímu pronikání do podstaty formování modelů na základě konstrukčních úloh, abych tak pomohl studentům pochopit nesnadnou látku.

Použité zdroje:

(1) Kargerová M., Mertl P.: Konstrukční geometrie, Praha: ČVUT, 2000. 186 s. ISBN 80-01-02218-8

(2) Říha O.: Konstrukční geometrie 1. vyd., Brno: Masarykova univerzita, 1999. 223 s. ISBN 80-210-2184-5

(3) Menšík M.: Deskriptivní geometrie, Praha: SNTL, 1962. 207 s.

(4) Borecká K.: Konstruktivní geometrie 2. vyd., Brno: CERM, 2006. 145 s. ISBN 80-214-3229-2

(5) Šimek J., Zedek M., Srovnal J.: Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod, 1. vyd., Olomouc: Univerzita Palackého, 1971. 264 s.

(6) Kupčáková M.: Základní úlohy deskriptivní geometrie v modelech, 1. vyd., Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-244-9

(7) Kupčáková M.: Geometrie ve světě dětí i dospělých, 3. vyd., Hradec králové: Gaudeamus, 2009. 109 s. ISBN 978-80-7041-683-9

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Vladimír Müller
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Metrické a polohové úlohy v kosoúhlém promítání
Název v angličtině:	Metric and positon problems in oblique projection
Anotace práce:	Vypracování metrických a polohových úloh v kosoúhlém promítání
Klíčová slova:	Konstrukční geometrie, kosoúhlé promítání
Anotace v angličtině:	Worked-out metric and postition problems in oblique projection
Klíčová slova v angličtině:	Descriptive geometry, oblique projection
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	42 str.
Jazyk práce:	Čeština