

**UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI**

**Přírodovědecká fakulta**

Katedra algebry a geometrie



## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Řešené úlohy v axonometrii**

Vypracovala:

Barbora Bartošová

M-DG, III. ročník

Vedoucí práce:

RNDr. Miloslava Sedlářová, CSc.

Rok odevzdání: 2010

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Miloslavy Sedlářové, CSc. a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne .....

Ráda bych poděkovala vedoucí mé práce, RNDr. Miloslavě Sedlářové, CSc., za cenné rady, ochotu a čas, který mi věnovala.

# OBSAH

Úvod .....	5
1. Pravoúhlá axonometrie .....	6
1.1. Základní pojmy .....	6
1.2. Zobrazení základních prvků .....	7
2. Pomocné konstrukce .....	9
2.1. Otočení pomocné průmětny do axonometrické průmětny .....	9
2.2. Sklápění do axonometrické průmětny .....	10
2.3. Otočení obecné roviny do axonometrické průmětny .....	11
2.4. Průnik přímky $a$ s rovinou $\alpha$ .....	12
2.5. Skutečná velikost úsečky .....	12
2.6. Přímka kolmá k rovině .....	13
2.7. Rovina kolmá k přímce .....	14
2.8. Zobrazení kružnice v pomocných průmětnách .....	15
2.9. Zobrazení kružnice v obecné rovině .....	16
2.10. Konstrukce elipsy jako obraz kružnice v kolineaci .....	17
2.11. Konstrukce paraboly jako obraz kružnice v kolineaci .....	18
2.12. Konstrukce hyperboly jako obraz kružnice v kolineaci .....	19
3. Řešené úlohy .....	21
3.1. Konstrukce těles .....	21
3.2. Řezy těles .....	31
3.3. Osvětlení .....	44
3.4. Průnik těles .....	53
Použitá literatura .....	59

# Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá řešením příkladů v pravoúhlé axonometrii. Cílem bylo vybrat různé úlohy, které se typicky vyskytují v učebnicích deskriptivní geometrie.

Práce je zaměřena pouze na pravoúhlou axonometrii. U čtenáře se předpokládá znalost vlastností těles, základních konstrukcí, např. různé konstrukce kuželoseček, a některých zobrazení (osová afinita, středová kolineace).

Text je rozdělen do tří kapitol. V první je stručně zavedena pravoúhlá axonometrie a jsou zde popsány konstrukce základních prvků. Druhá kapitola se zabývá pomocnými úlohami, které jsou použity později při samotných konstrukcích. Třetí kapitola se věnuje konstrukcím těles, řezů, osvětlení a průniků těles.

Příklady jsou narýsovány v programu QCaD. Text je vysázen pomocí typografického systému  $\text{\TeX}$ .

# 1. Pravoúhlá axonometrie

Pravoúhlou (ortogonální) axonometrii užíváme především k sestrojení názorných obrazů, přičemž řešení potřebných metrických úloh není příliš náročné. Pravoúhlá axonometrie se využívá např. ve strojírenství k názornému zobrazení součástí.

## 1.1. Základní pojmy

Pravoúhlá axonometrie je kolmé promítání na dvě navzájem kosé průmětny. Jedna z nich je axonometrická průmětna, značíme ji  $^0\pi$ . Druhá průmětna je pomocná, obvykle se značí  $^1\pi$ . Bod  $A$  zobrazíme tak, že jej pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny do bodu  $A_a$ . Dále sestrojíme prvý průmět bodu  $A$  do pomocné průmětny a ten pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny. Tím získáme tzv. axonometrický půdorys  $A_1$ . Dvojice  $(A_a, A_1)$  leží na ordinále (kolmici k průsečnici obou průměten). Pravoúhlá axonometrie je tedy vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru na uspořádanou dvojici průmětů.

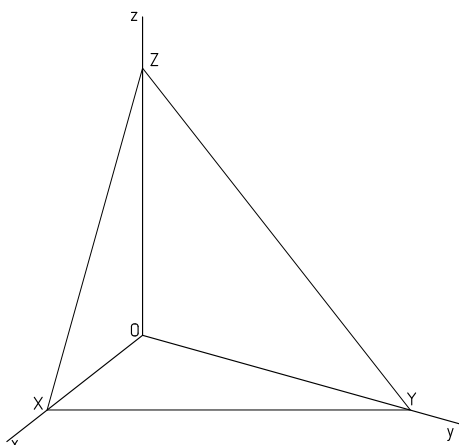
V praxi se ovšem místo pravoúhlé axonometrie se dvěma průmětnami využívá axonometrie se čtyřmi průmětnami. Ta vychází z pravoúhlého souřadnicového systému  $\{O; x, y, z\}$ , jehož všechny souřadnicové roviny volíme za pomocné průmětny  $^1\pi, ^2\pi, ^3\pi$ .

Axonometrickou průmětnu volíme tak, aby byla kosá ke všem pomocným průmětnám a aby neprocházela počátkem  $O$ . Pomocné průmětny protínají axonometrickou průmětnu v přímkách - axonometrických stopách pomocných průměten. Ty určují trojúhelník, jehož vrcholy  $X, Y, Z$  jsou průsečíky axonometrické průmětny s osami  $x, y, z$ . Trojúhelník  $XYZ$  se nazývá axonometrický trojúhelník.

Osy  $x, y, z$  se promítnou do přímek  $x_a, y_a, z_a$  procházejících průmětem počátku  $O_a$  a vrcholy axonometrického trojúhelníka. V této práci budeme pro zjednodušení nadále značit průměty souřadnicových os a počátku pouze  $x, y, z, O$ . Axonometrické průměty  $x, y, z$  tvoří tzv. axonometrický osový kříž. Axonometrický trojúhelník je vždy ostroúhlý a osový kříž je tvořen výškami axonometrického trojúhelníka.

Úseky na osách  $x, y, z$  nebo na přímkách s nimi rovnoběžných se zkracují. Chceme-li určit jednotky na osách, využijeme sklopení, nebo otočení pomocné průmětny do axonometrické průmětny (viz. kapitola 2).

(obr. 1.1)



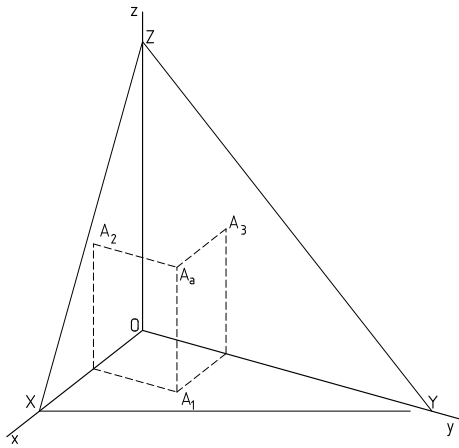
Obr. 1.1

## 1.2. Zobrazení základních prvků

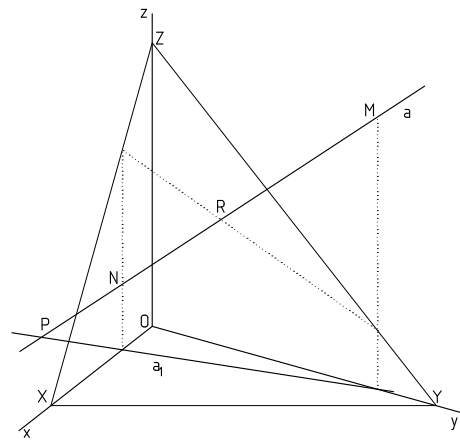
Bod prostoru se zobrazí jako uspořádaná dvojice  $A_a, A_1$ . Oba obrazy leží na ordinále rovnoběžné s osou  $z$ . Zbývající obrazy bodu zobrazíme pomocí souřadnicového kvádrů (obr. 1.2). Dále v této práci budeme uvádět axonometrický průmět již bez indexu  $a$ , tedy místo  $A_a$  budeme psát pouze  $A$ .

Přímka je určena průměty dvou různých bodů, které na ní leží. Aby byla přímka zobrazena jednoznačně, je potřeba znát dva její průměty - obvykle se zadává axonometrický průmět přímky a axonometrický průmět jejího prvního průmětu. Přímka má až čtyři stopníky - půdorysný  $P$ , nárysný  $N$ , bokorysný  $M$  a axonometrický  $R$ . Půdorysný, resp. nárysný, resp. bokorysný stopník se určí jako průsečík axonometrického průmětu přímky s axonometrickým průmětem prvního průmětu, resp. druhého průmětu, resp. třetího průmětu přímky. Axonometrický stopník se určí jako průsečík přímky s axonometrickou průmětnou (obr. 1.3).

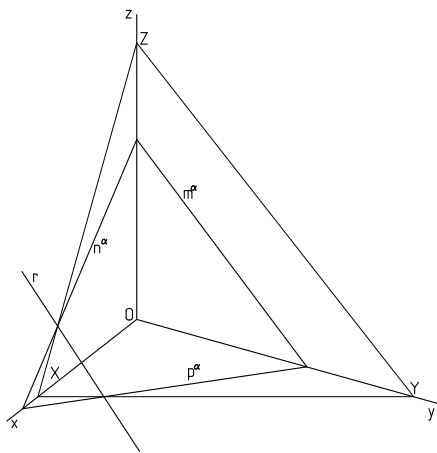
Rovina kolmá k axonometrické průmětně se zobrazí jako přímka. Jakákoli jiná rovina se zobrazí jako axonometrická průmětna. Abychom mohli řešit úlohy v rovině, stačí nám znát průměty dvou jejích různých přímek. Užívá se především stop roviny. Rovina má až čtyři stopy: půdorysnou  $p^\alpha$  (průnik roviny s první pomocnou průmětnou), nárysnou  $n^\alpha$  (průnik roviny s druhou pomocnou průmětnou), bokorysnou  $m^\alpha$  (průnik roviny s třetí pomocnou průmětnou) a axonometrickou  $r^\alpha$  (průnik roviny s axonometrickou průmětnou)(obr. 1.4).



Obr. 1.2



Obr. 1.3



Obr. 1.4



## 2. Pomocné konstrukce

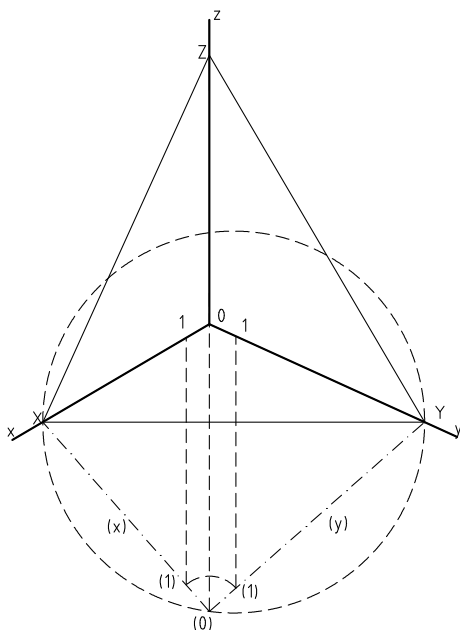
### 2.1. Otočení pomocné průmětny do axonometrické průmětny

Leží-li nějaký objekt v některé z průměten  $^1\pi$ ,  $^2\pi$ ,  $^3\pi$ , zobrazí se v pravoúhlé axonometrii zkresleně - nezachovávají se úhly, ani velikosti úseček. Potřebujeme-li získat nezkreslený obraz, např. při nanášení jednotek na souřadnicové osy, můžeme využít otočení pomocné průmětny do axonometrické průmětny kolem její axonometrické stopy.

Prvou průmětnu otočíme kolem její axonometrické stopy  $XY$ . Trojúhelník  $XYO$  je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu  $O$ . Body  $X, Y$  leží na ose otáčení, jsou tedy samodružné. Otočený bod  $(O)$  leží na Thaletově kružnici nad úsečkou  $XY$ . Zároveň leží v rovině otáčení bodu  $O$ , jejíž stopa prochází bodem  $O$  a je kolmá k  $XY$ , splývá tedy s osou  $z$ . Tato přímka protne Thaletovu kružnici ve dvou bodech, z nichž jeden prohlásíme za otočenou polohu bodu  $O$ , značíme  $(O)$ . Přímka  $(O)X$ , resp.  $(O)Y$  je otočenou polohou osy  $x$ , resp.  $y$  (obr. 2.1). Na ty můžeme od bodu  $(O)$  nanášet jednotky ve skutečné velikosti. Obdobně můžeme otočit kteroukoli z pomocných průměten  $^1\pi$ ,  $^2\pi$ ,  $^3\pi$ .

Další body můžeme otáčet pomocí osové afinity. Osa afinity je  $XY$ , směr afinity je kolmý na osu a dvojice odpovídajících si bodů  $O \leftrightarrow (O)$ .

(obr. 2.1)



Obr. 2.1

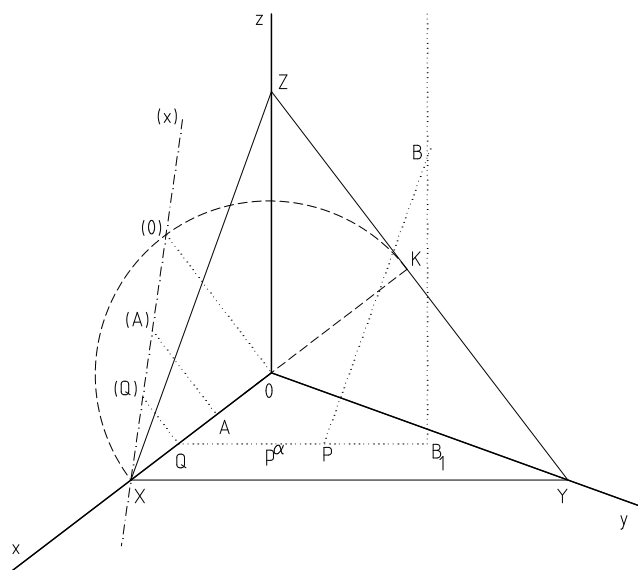
## 2.2. Sklápění do axonometrické průmětny

Další možností, jak na osu nanést úseky dané délky je sklopení axonometricky promítací roviny osy do axonometrické průmětny. Při sklápění promítací roviny osy  $x$  najdeme bod  $K = x \cap YZ$ . Jelikož body  $X, K$  leží v axonometrické průmětně, zůstanou při sklápění pevné. Trojúhelník  $XKO$  je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu  $O$ , tudíž sklopený bod  $(O)$  musí ležet jednak na Thaletově kružnici nad průměrem  $XK$  a jednak na kolmici k  $x$  procházející bodem  $O$ . Opět si můžeme zvolit, který z průsečíků vezmeme za sklopený bod  $(O)$ . Přímka  $X(O)$  je sklopená osa  $x$ .

Na  $(x)$  můžeme od bodu  $(O)$  nanést úsečku dané délky a ve směru kolmém k ose  $x$  ji nanést přímo na osu. Pomocí této konstrukce také můžeme určit vzdálenost daného bodu od axonometrické průmětny.

Leží-li např. bod  $A$  na ose  $x$ , sklopíme axonometricky promítací rovinu osy  $x$  a vzdálenost  $|A(A)|$  je vzdálenost bodu  $A$  od axonometrické průmětny. Bod  $B$  je obecný bod, který neleží v axonometrické průmětně. Tímto bodem vedeme rovinu  $\alpha$  rovnoběžnou s axonometrickou průmětnou. Všechny body této roviny mají od axonometrické průmětny stejnou vzdálenost jako bod  $A$ , proto stačí najít vzdálenost např. bodu  $Q = \alpha \cap x$  od axonometrické průmětny.

(obr. 2.2)



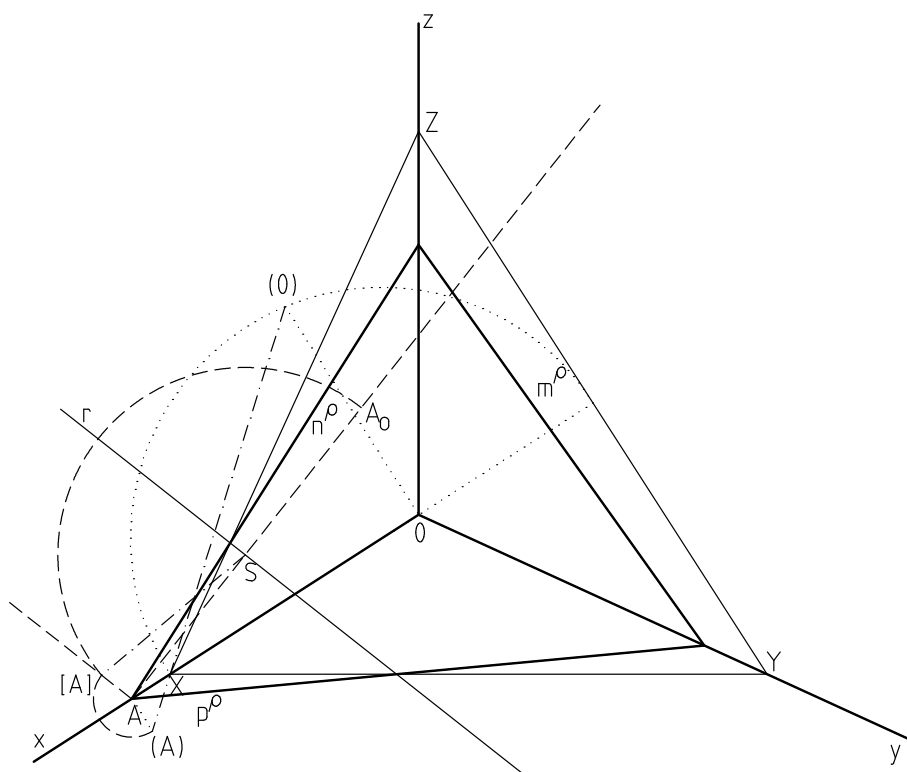
Obr. 2.2

### 2.3. Otočení obecné roviny do axonometrické průmětny

Je-li potřeba získat nezkrácený obraz objektu ležícího v obecné rovině, danou rovinu otočíme do axonometrické průmětny kolem její axonometrické stopy  $r$ . Otočíme jeden její bod neležící na ose otáčení, pro jednoduchost např.  $A = \rho \cap x$ , pro který můžeme snadno najít vzdálenost  $|A(A)|$  od axonometrické průmětny.

Rovina otáčení bodu  $A$  je axonometricky promítací, proto se zobrazí jako kolmice na osu otáčení. Střed otáčení  $S$  je průsečík této kolmice s osou otáčení  $r$ . Poloměr otáčení je přepona pravoúhlého trojúhelníka  $SA[A]$ , přičemž  $|A[A]| = |A(A)|$ . Otočená poloha bodu  $A$  je  $A_0$ . Další otočené body můžeme sestavit pomocí pravoúhlé afinity s osou  $r$  a dvojicí odpovídajících si bodů  $A \leftrightarrow A_0$ .

(obr. 2.3)



Obr. 2.3

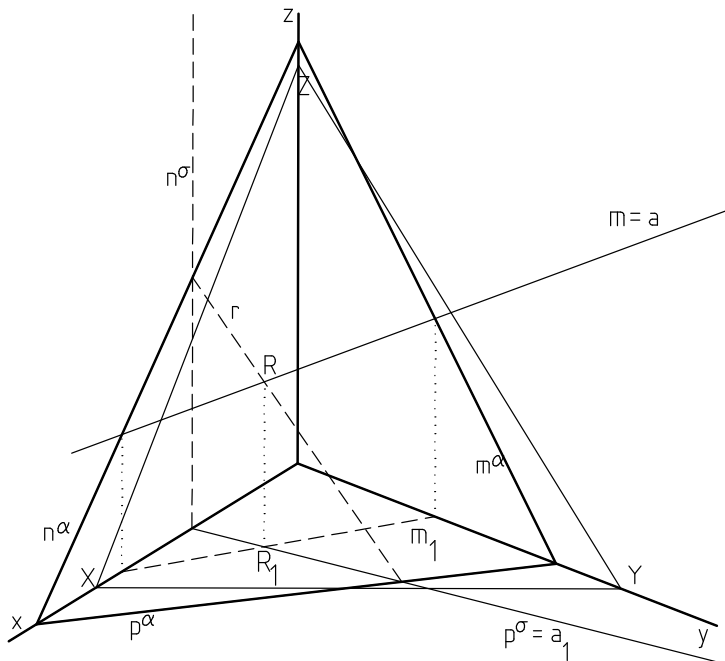
## 2.4. Průnik přímky $a$ s rovinou $\alpha$

Při hledání bodu, kde přímka protne rovinu, se užívá většinou jedna z následujících konstrukcí:

- přímkou  $a$  proložíme např. prvou promítací rovinu  $\sigma$  a určíme průsečnici  $r = \alpha \cap \sigma$ . Hledaný bod je průsečík  $R = r \cap a$ .
- využijeme krycí přímky  $m \equiv a, m \in \alpha$ . Najdeme prvý průmět přímky  $m_1$ , potom  $m_1 \cap a_1 = R_1$  a na ordinále najdeme průsečík  $R \in a$ .

Kdyby daná rovina byla axonometrická průmětna, našli jsme tímto axonometrický stopník dané přímky.

(obr. 2.4)



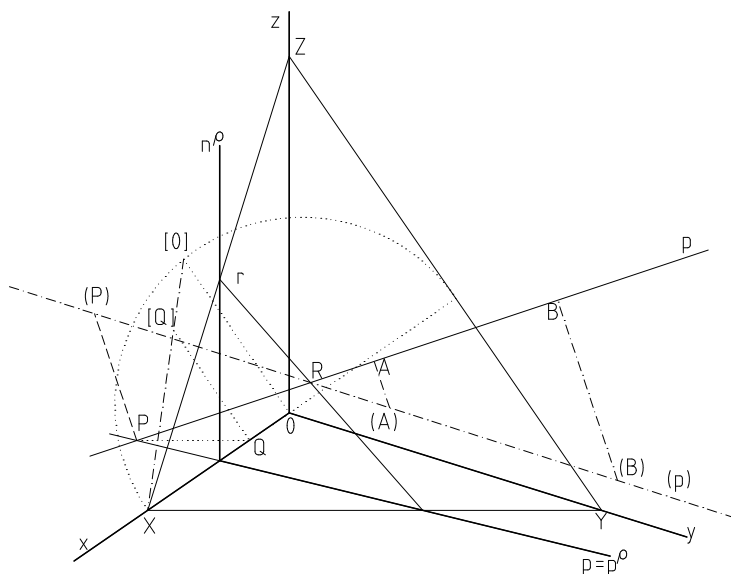
Obr. 2.4

## 2.5. Skutečná velikost úsečky

Při zjišťování skutečné velikosti úsečky  $AB \in p$  sklopíme axonometricky promítací rovinu  $\alpha$  přímkou  $p$  tak, že sklopíme dva její různé body. Budeme zjišťovat jejich vzdálenost od axonometrické průmětny, proto je vhodné využít axonometrického stopníku přímky. Ten zjistíme pomocí první promítací roviny  $\alpha$  přímkou  $p$ . Jako druhý bod

vezmeme např. půdorysný stopník  $P$  přímky  $p$ . Jeho vzdálenost od axonometrické průmětny je stejná, jako vzdálenost bodu  $Q$  od axonometrické průmětny. Bod  $Q$  je bod na rovnoběžce s  $XY$  vedené bodem  $P$ , který leží na ose  $x$ . Sklopená přímka  $(p)$  je tedy určena body  $(P)R$  a na ní určíme skutečnou velikost úsečky  $AB$ .

(obr. 2.5)

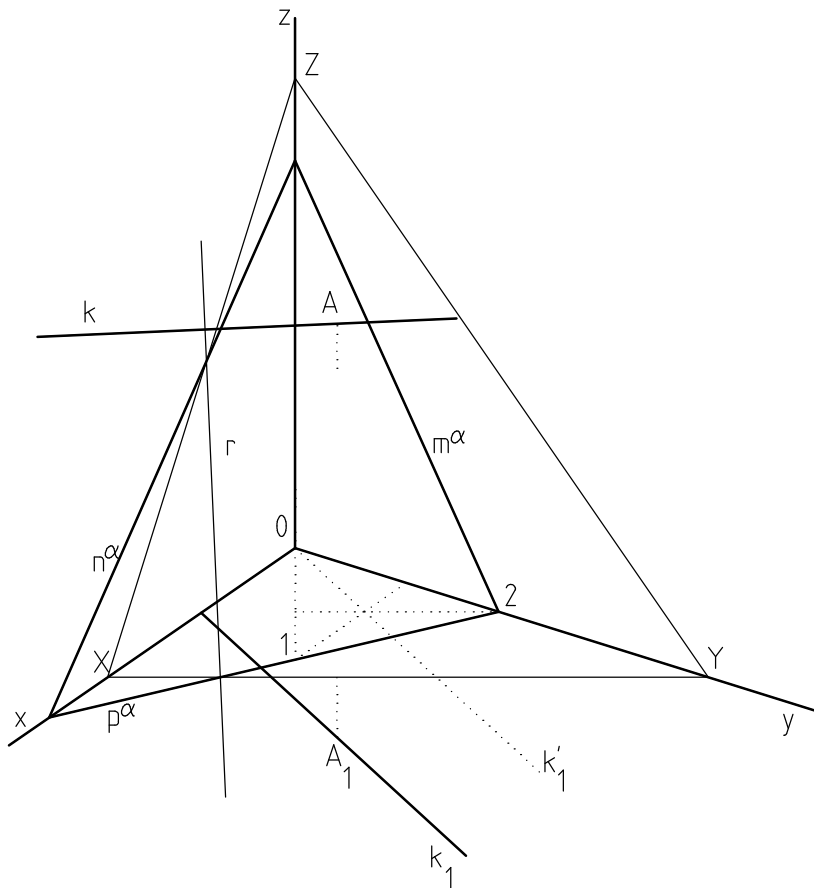


Obr. 2.5

## 2.6. Přímka kolmá k rovině

Axonometrický průmět kolmice  $k$  k dané rovině  $\alpha$  je kolmý k axonometrické stopě  $r^\alpha$  a prochází bodem  $A$ . K sestrojení prvního průmětu kolmice využijeme trojúhelník  $O12$ , který je tvořený stopou roviny  $p^\alpha$ , spádovou přímkou první průmětny procházející počátkem  $O1$  a osou  $y$  (příp. osou  $x$ ). Výška v tomto trojúhelníku spuštěná z bodu 2 je rovnoběžná s  $XY$ , výška spuštěná z bodu 1 je rovnoběžná s osou  $x$ . Výška v trojúhelníku spuštěná z bodu  $O$  tedy bude procházet průsečíkem předchozích dvou výšek a bude kolmá ke stopě roviny  $p^\alpha$ . Získali jsme směr prvního průmětu kolmice  $k'_1$  a tedy  $k_1 \parallel k'_1, A_1 \in k_1$ .

(obr. 2.6)

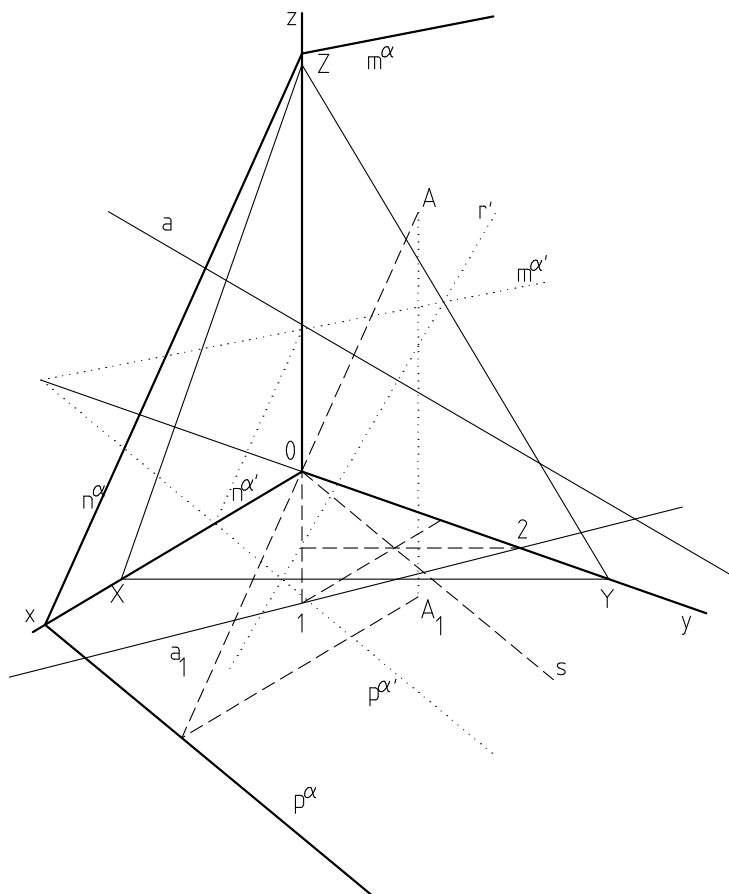


Obr. 2.6

## 2.7. Rovina kolmá k přímce

Vést daným bodem  $A$  rovinu  $\alpha$ , která je kolmá k dané přímce  $k$ , je vlastně úloha opačná k předchozí. Nejprve najdeme směr  $s$ , se kterým bude rovnoběžná půdorysná stopa dané roviny (pomocí trojúhelníku  $O12$ ) a směr  $r'$ , se kterým bude rovnoběžná axonometrická stopa (kolmice na axonometrický průmět dané přímky). Poté sestrojíme libovolnou rovinu  $\alpha'$ , pro kterou platí, že  $p^{\alpha'} \parallel s$  a  $r^{\alpha'} \parallel r'$ . Nakonec sestrojíme rovinu  $\alpha$ , která je rovnoběžná s  $\alpha'$  a prochází zadaným bodem  $A$  (např. pomocí hlavní přímky).

(obr. 2.7)



Obr. 2.7

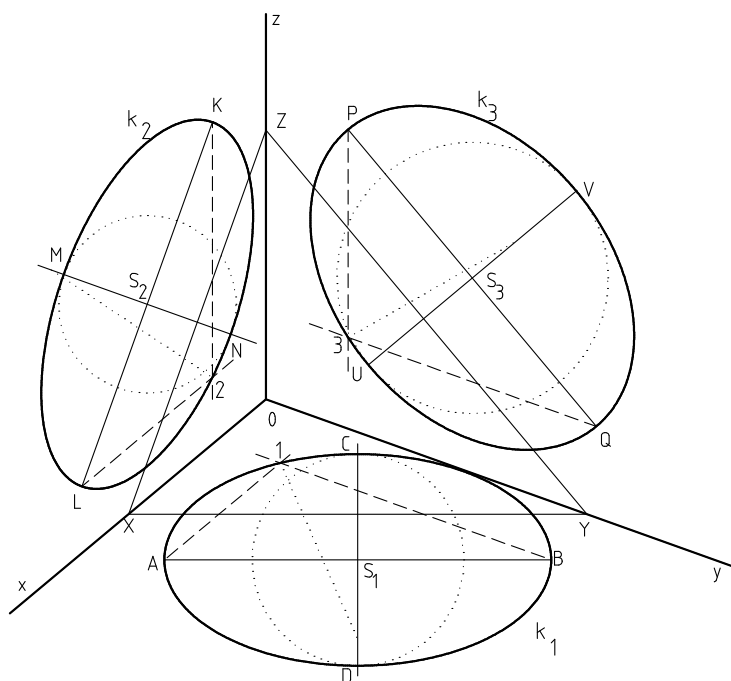
## 2.8. Zobrazení kružnice v pomocných průmětnách

Axonometrickým průmětem kružnice ležící v první průmětně je elipsa se středem  $S_1$  (průmět středu kružnice). Hlavní osa je rovnoběžná s axonometrickou stopou první průmětny  $XY$ . Velikost hlavní poloosy je rovna poloměru kružnice.

Jelikož přímky  $x, y$ , které leží v rovině kružnice, jsou k sobě kolmé, rovnoběžky s nimi vedené body  $A, B$  se protnou v bodě kružnice 1. Vedeme-li tedy hlavními vrcholy  $A, B$  rovnoběžky s osami  $x, y$ , získáme jeden bod elipsy. Tím máme elipsu jednoznačně určenou. Velikost vedlejší poloosy sestrojíme proužkovou konstrukcí.

Obdobně bychom sestrojili obrazy kružnic v druhé a třetí průmětně  $k_2, k_3$ .

(obr. 2.8)



Obr. 2.8

## 2.9. Zobrazení kružnice v obecné rovině

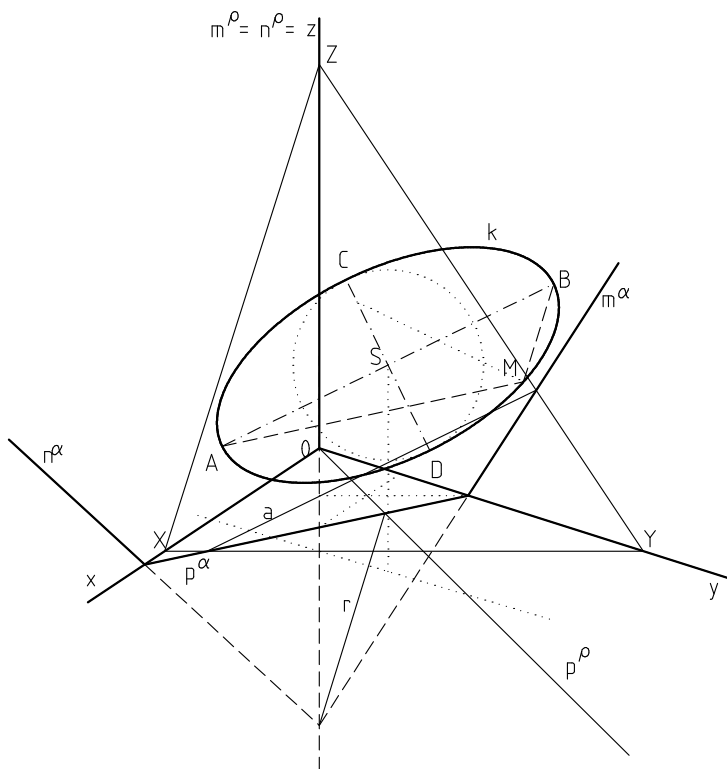
Axonometrickým průmětem kružnice bude opět elipsa  $k$  se středem v axonometrickém průmětu středu kružnice  $S$ .

Hlavní osa elipsy bude rovnoběžná s axonometrickou stopou  $a$  roviny kružnice  $\alpha$ , velikost vedlejší poloosy bude rovna poloměru kružnice.

Dále potřebujeme dvojici kolmých přímk v rovině  $\alpha$ . Sestrojíme rovinu  $\rho \perp p^\alpha$ , pro jednoduchost procházející osou  $z$ . Její bokorysná a nárýsná stopa  $n^\rho$ ,  $m^\rho$  budou splývat s osou  $z$ . Půdorysnou stopu  $p^\rho$  sestrojíme jako směr kolmý k  $p^\alpha$  v první průmětně (viz. Rovina kolmá k přímce). Potom přímky  $r = \alpha \cap \rho$  a  $p^\alpha$  jsou právě touto kolmou dvojicí v rovině  $\alpha$  a tedy rovnoběžky s nimi vedené hlavními vrcholy  $A, B$  se protnou v bodě elipsy  $M$ . Tím máme elipsu jednoznačně zadanou. Velikost vedlejší poloosy určíme pomocí proužkové konstrukce.

(obr. 2.9)





Obr. 2.9

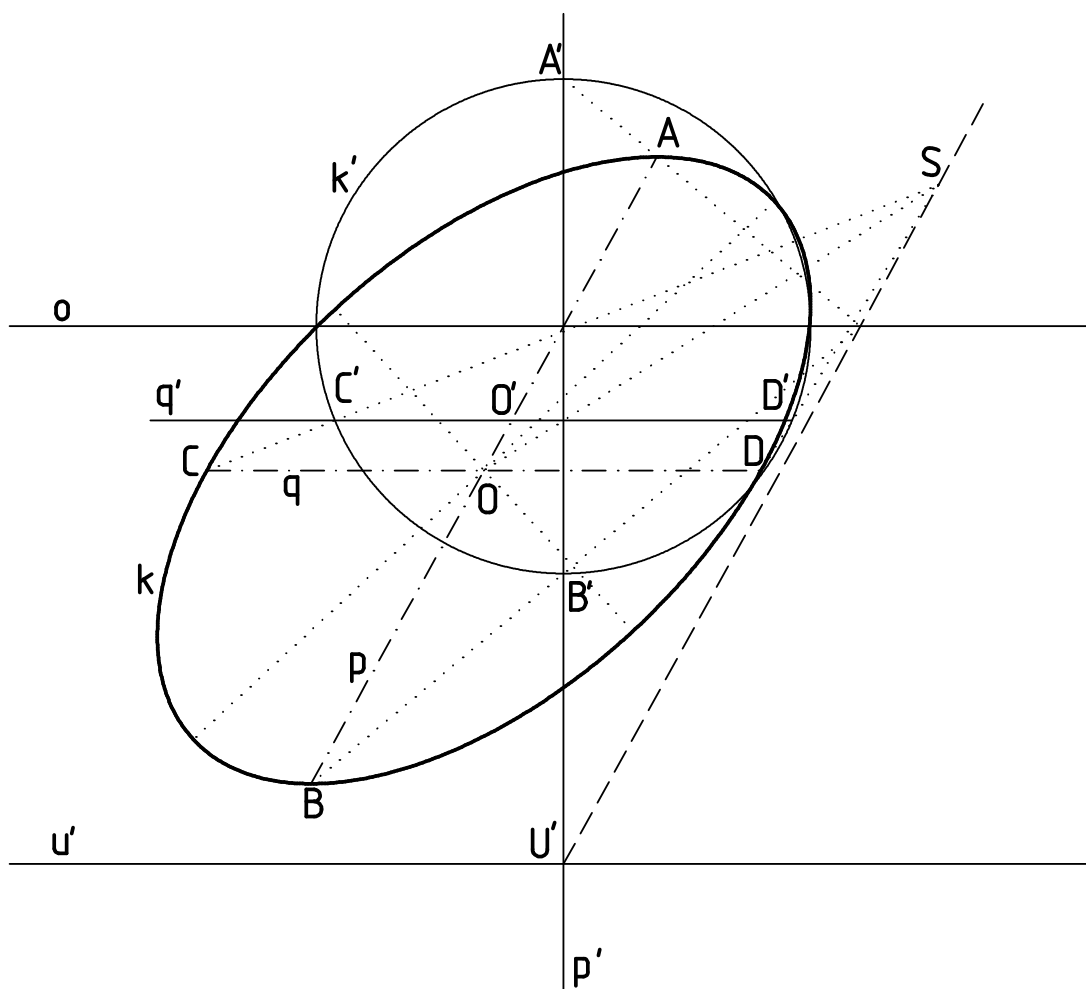
## 2.10. Konstrukce elipsy jako obraz kružnice v kolineaci

Obrazem kružnice  $k'$  v dané kolineaci  $(S, o, u')$  je elipsa  $k$  právě když  $k'$  nemá s  $u'$  žádný společný bod.

Sestrojíme dvojici sdružených průměrů. K průměru kružnice  $p'$ , který je kolmý na osu kolineace sestrojíme jemu odpovídající průměr elipsy  $p$ . Je-li  $U' = p \cap u'$ , potom  $SU'$  udává směr přímky  $p$  a dále víme, že  $p$  musí procházet bodem  $p' \cap o$ . Najdeme krajní body průměru  $A = p \cap SA'$ ,  $B = p \cap SB'$ . Střed  $O$  úsečky  $AB$  je středem elipsy  $k$ . K němu nalezneme v kolineaci odpovídající bod  $O'$ . Průměr sdružený k průměru  $p'$  je přímka  $q'$ ;  $O' \in q'$ ,  $q' \perp p'$  a platí tedy  $q' \parallel o$ . Jemu odpovídající přímka  $q$  tedy bude procházet bodem  $O$  a bude rovnoběžná s osou kolineace. Body  $C, D$  odpovídající bodům  $C' = q' \cap k'$ ,  $D' = q' \cap k'$  omezí tento druhý průměr.

Nyní již můžeme Rytzovou konstrukcí sestrojit hlavní a vedlejší osu a celou elipsu  $k$ .

(obr. 2.10)



Obr. 2.10

## 2.11. Konstrukce paraboly jako obraz kružnice v kolineaci

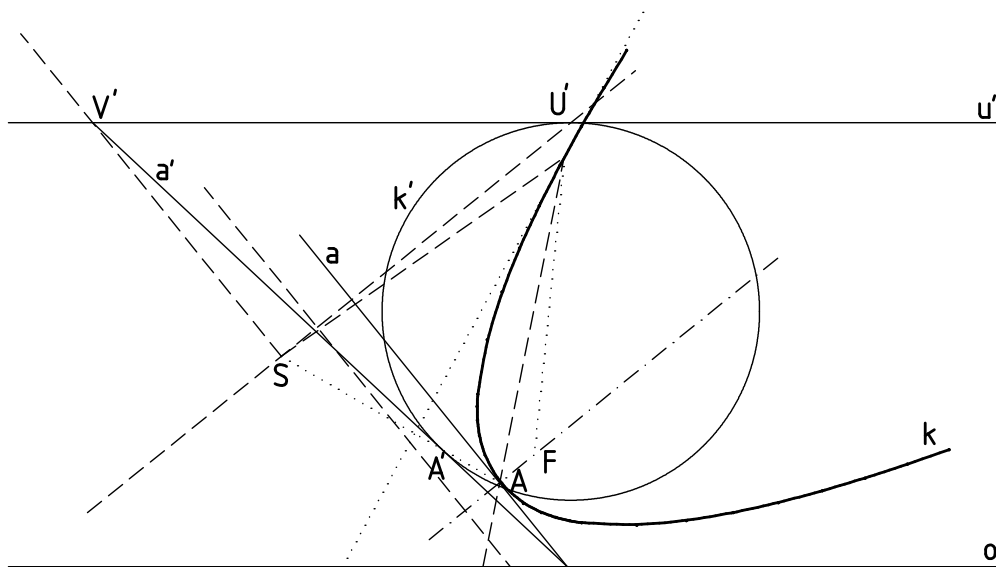
Obrazem kružnice  $k'$  v dané kolineaci  $(S, o, u')$  je parabola  $k$  právě když úběžnice  $u'$  je tečnou  $k'$ .

Sestrojíme osu paraboly a její vrchol.

Je-li  $U'$  dotykový bod kružnice  $k'$  a úběžnice  $u'$ , potom je směr osy paraboly určen přímkou  $SU'$ . Směr vrcholové tečny je kolmý k  $SU'$ . Vedeme-li tedy bodem  $S$  kolmici k  $SU'$ , získáme na  $u'$  bod  $V'$ . Tečna  $a'$  vedená ke kružnici z tohoto bodu, různá od úběžnice, odpovídá vrcholové tečně paraboly  $a$  a její bod dotyku  $A'$  odpovídá vrcholu paraboly  $A$ . Přímkou  $a$  sestrojíme z vlastnosti  $a \cap a' \in o$ .

Pomocí kolineace můžeme sestrojít ještě např. libovolnou tečnu a poté již můžeme najít ohnisko a sestrojít parabolu.

(obr. 2.11)



Obr. 2.11

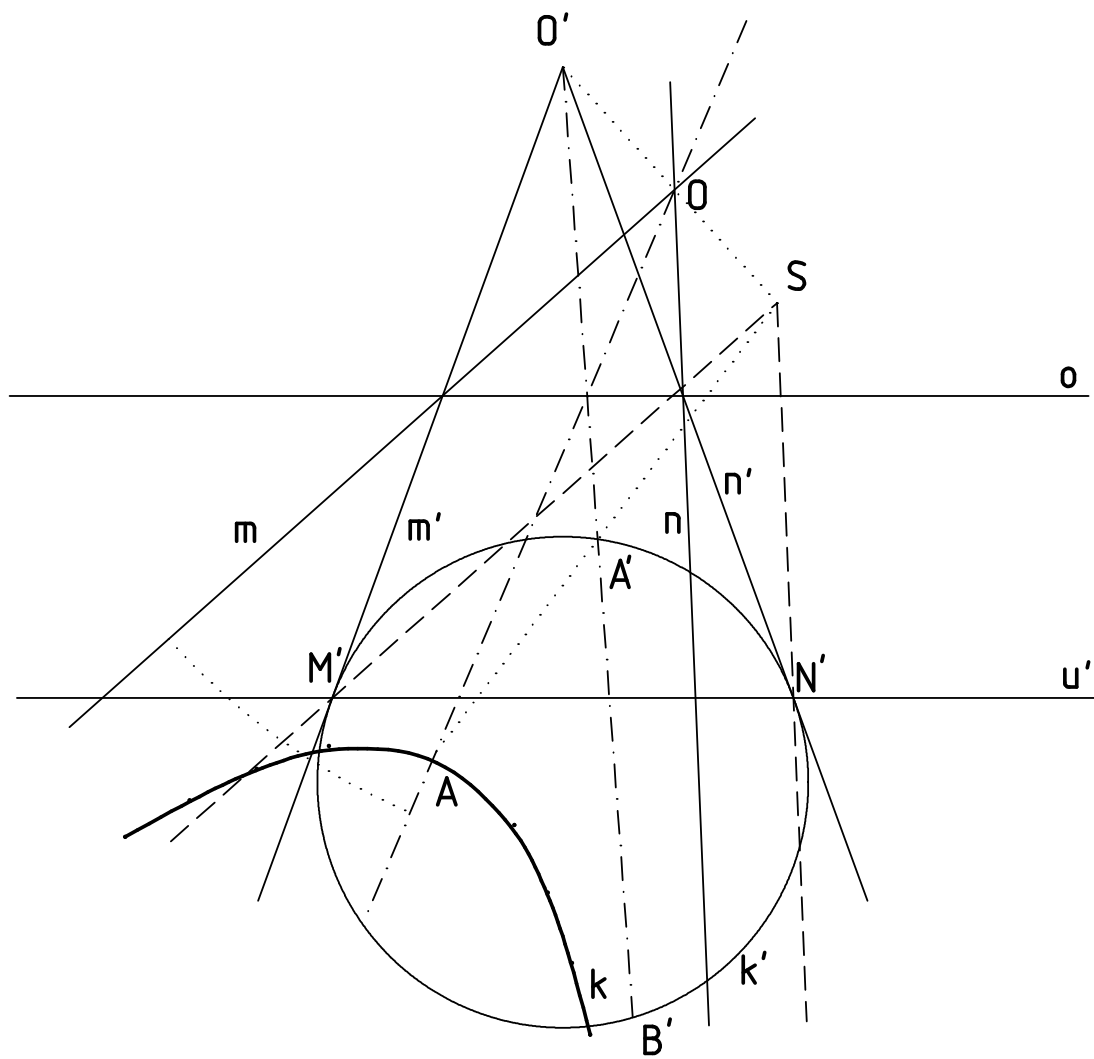
## 2.12. Konstrukce hyperboly jako obraz kružnice v kolineaci

Obrazem kružnice  $k'$  v dané kolineaci  $(S, o, u')$  je hyperbola  $k$ , právě když  $u'$  protíná kružnici  $k'$  ve dvou různých bodech.

Sestrojíme asymptoty a vrcholy hyperboly. Bodům  $M', N'$ , ve kterých úběžnice protíná kružnici, odpovídají nevlastní body hyperboly, tedy přímky  $SM', SN'$  jsou směry asymptot. Tečnám kružnice  $m', n'$  sestrojeným v bodech  $M', N'$  tedy v kolineaci odpovídají asymptoty hyperboly  $m, n$ . Průsečíku  $O' = m' \cap n'$  odpovídá střed hyperboly  $O$ .

Najdeme-li osy úhlů  $p, q$ , které svírají asymptoty a jim odpovídající přímky  $p', q'$ , pak právě jedna z přímek  $p', q'$  protne kružnici  $k'$ . Body  $A' = k' \cap p', B' = k' \cap q'$  odpovídají vrcholům hyperboly  $A, B$ . Známe-li asymptoty, osy a vrcholy, můžeme sestrojít hyperbolu.

(obr. 2.12)



Obr. 2.12

## 3. Řešené úlohy

### 3.1. Konstrukce těles

Úloha 1: Zobrazte pravidelný šestiboký hranol o výšce  $v = 9\text{cm}$ , jehož podstava se středem v bodě  $S$  a vrcholem  $A$  leží v  ${}^3\pi$ ,  $S \equiv 0$ ,  $A[0; 4, 5; 2]$ ,  $x_{A'} > x_A$ .

(viz. obr. 3.1)

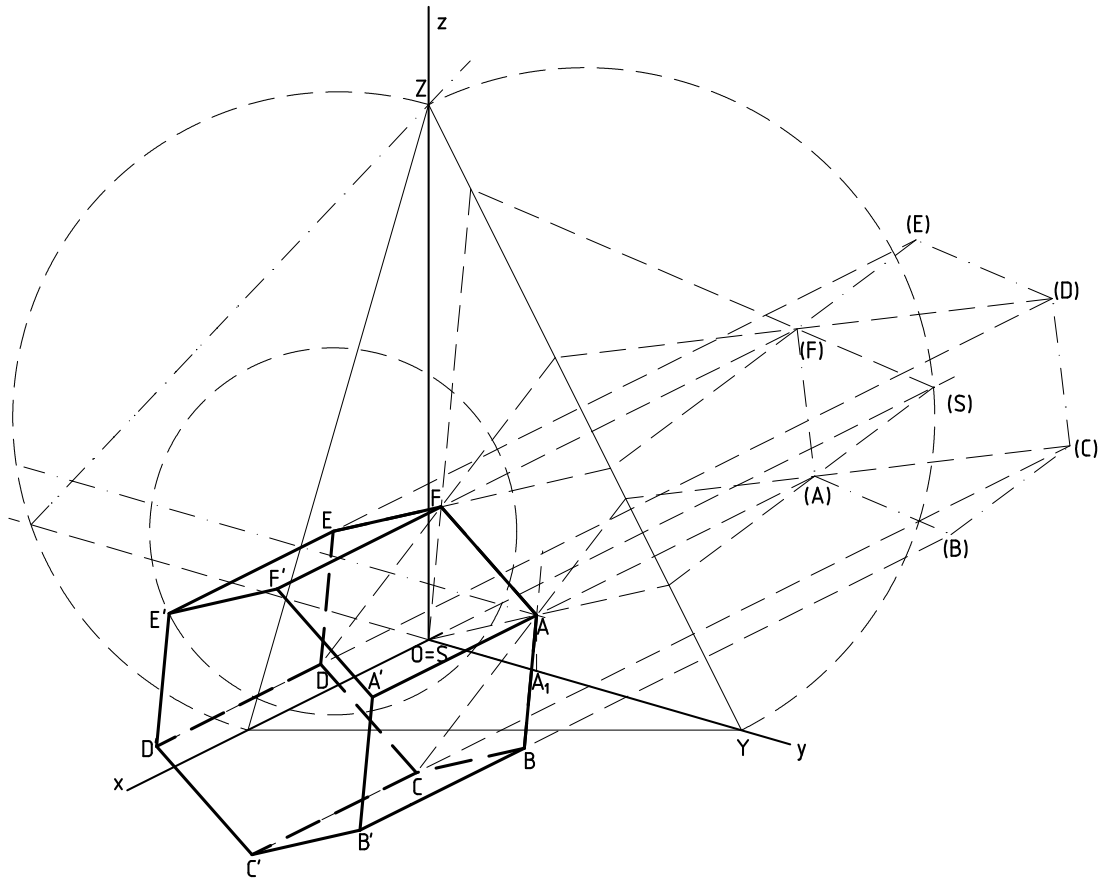
Rozbor:

Jelikož střed podstavy  $S$  a vrchol  $A$  leží v třetí pomocné průmětně, je podstava hranolu zadána jednoznačně. Jelikož neleží v axonometrické průmětně, zobrazí se podstava jako středově souměrný šestiúhelník. V každém vrcholu vztyčíme kolmici a na ni nanese zadanou výšku ve zkrácení odpovídajícím zkrácení na ose  $x$ . Jelikož podstava leží v  ${}^3\pi$ , budou kolmice rovnoběžné s osou  $x$ . Díky poznámce v zadání, že  $x$ -ová souřadnice bodu  $A'$  má být větší než  $x$ -ová souřadnice bodu  $A$ , je hranol určen jednoznačně.

Úloha má jedno řešení.

Řešení:

- otočíme rovinu  ${}^3\pi$  do axonometrické průmětny kolem její stopy  $YZ$ , viz. konstrukce 2.1
- v otočení sestrojíme pravidelný šestiúhelník  $(A)(B)(C)(D)(E)(F)$  se středem  $(S)$
- podstavu vrátíme zpět do  ${}^3\pi$  pomocí osově afinity; osa afinity je  $YZ$ , směr kolmý, dvojice odpovídajících si bodů  $S \leftrightarrow (S)$ ,  $A \leftrightarrow (A)$
- každým vrcholem vedeme rovnoběžku s osou  $x$  a nanese na ni zkrácenou výšku hranolu v kladném směru osy  $x$
- získáme body horní podstavy  $A'B'C'D'E'F'$
- viditelnost



Obr. 3.1

*Úloha 2:* Zobraďte jehlan, jehož podstavu tvoří pravidelný šestiúhelník v rovině  $\rho(8; 5; \infty)$ ,  $A[5; ?; 0]$ ,  $B[?; 4; 0]$ . Jeho vrcholem je bod  $V[2, 5; 12; -2, 5]$ .  $XY = 9$ ,  $XZ = 9,5$ ,  $YZ = 11,5$   
(viz. obr. 3.2)

Rozbor:

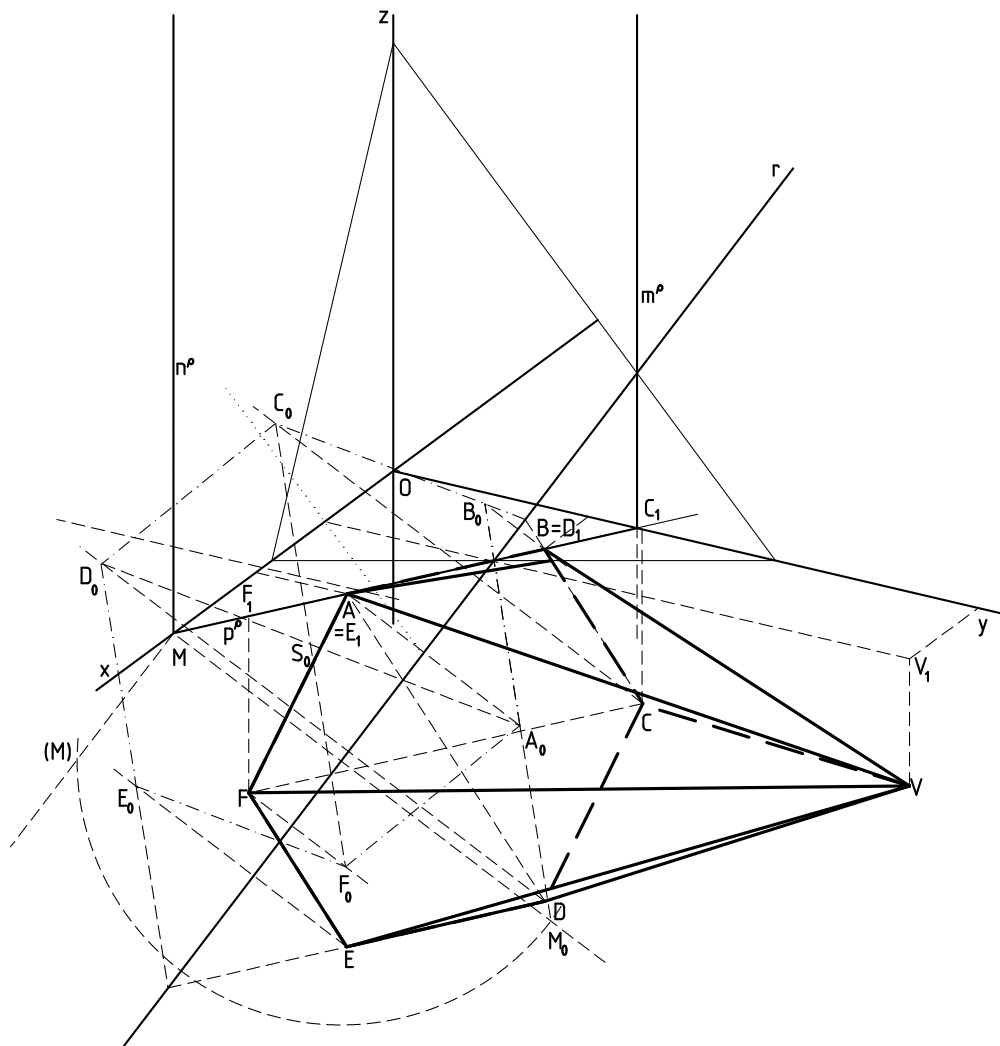
Jelikož podstava jehlanu leží v rovině  $\rho$ , jsou vrcholy podstavy  $A, B$  zadány jednoznačně. Z vlastností pravidelného šestiúhelníka plyne, že střed podstavy  $S$  je stejně vzdálen od bodu  $A$  i  $B$  a tato vzdálenost je rovna velikosti úsečky  $|AB|$ , tedy  $|SA| = |SB| = |AB|$ . Takové body existují v rovině  $\rho$  právě dva, z nichž jeden si zvolíme a sestrojíme podstavu jehlanu.

Vrchol jehlanu je zadán jednoznačně souřadnicemi.

Úloha má dvě řešení.

Řešení:

- otočíme rovinu  $\rho$  do axonometrické průmětny podle její axonometrické stopy  $r$ , viz. konstrukce 2.3
- v otočení sestrojíme pravidelný šestiúhelník  $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$  se středem  $S_0$
- podstavu vrátíme zpět do roviny  $\rho$  pomocí osové afinity; osa afinity je přímka  $r$ , směr kolmý k ose, dvojice odpovídajících si bodů  $A \leftrightarrow A_0, B \leftrightarrow B_0$
- vrchol jehlanu  $V$  spojíme se všemi vrcholy podstavy
- viditelnost



Obr. 3.2

*Úloha 3:* Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, znáte-li jeho osu  $o = VP$ , vrchol  $V$  a vrchol podstavy  $A$ .  $V[4; 7; 7]$ ,  $P[2; 1; 0]$ ,  $A[-1; 3; 0]$ .

(viz. obr. 3.3)

Rozbor:

Z vlastností pravidelného čtyřbokého jehlanu plyne, že osa jehlanu je kolmá na rovinu podstavy. Vedeme-li tedy vrcholem podstavy  $A$  rovinu  $\alpha$  kolmou k ose  $o$ , bude právě tato rovina rovinou podstavy jehlanu. Průsečík  $S$ ;  $S = \alpha \cap o$  je střed podstavy jehlanu.

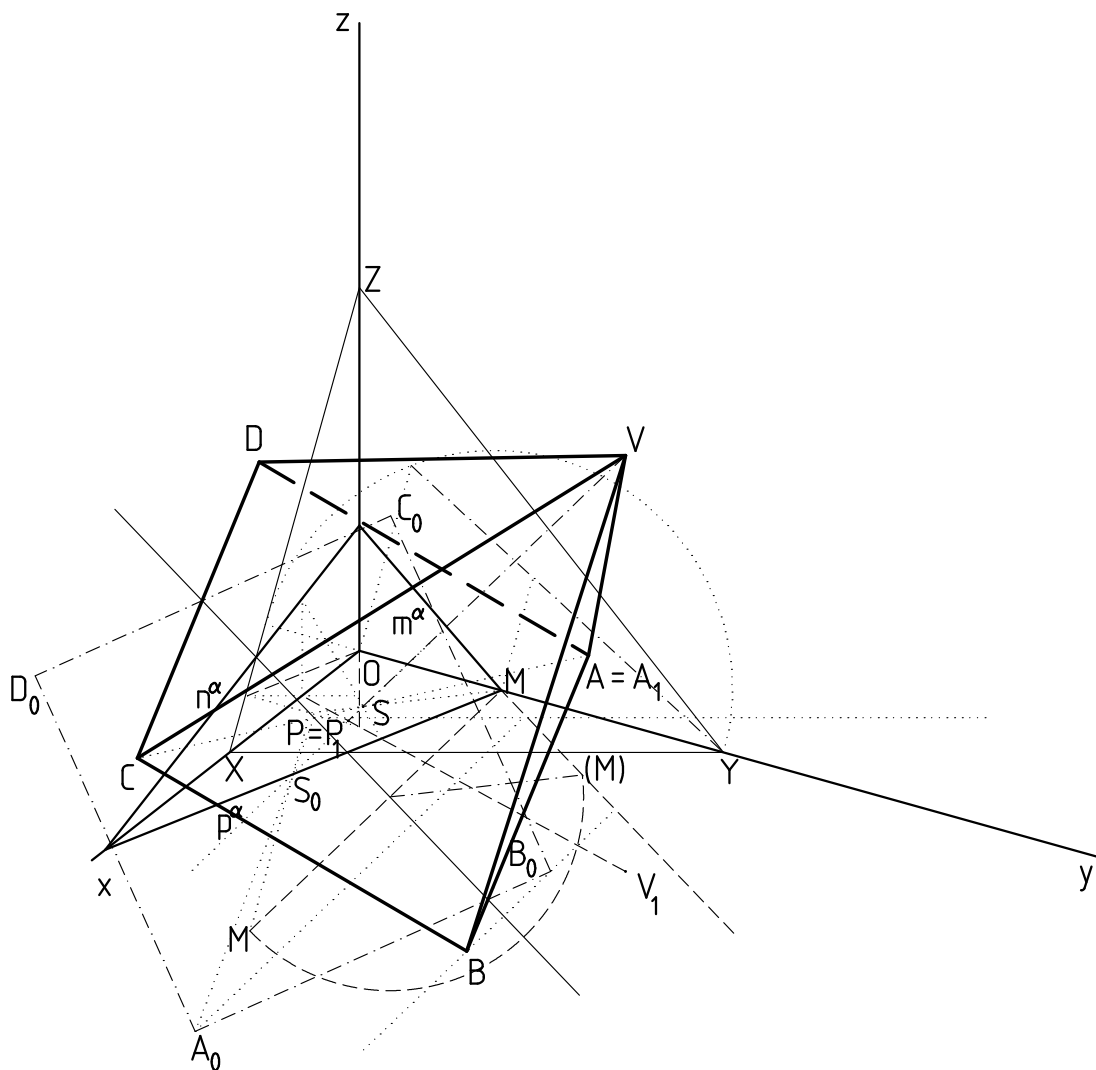
Máme-li vrchol podstavy a její střed, můžeme v otočení snadno sestrotit celou podstavu - čtverec  $ABCD$ .

Úloha má jedno řešení.

Řešení:

- sestrotíme rovinu  $\alpha$ ;  $A \in \alpha$ ,  $\alpha \perp o$ , viz. konstrukce 2.7
- nalezneme střed podstavy jako průsečík osy jehlanu s rovinou podstavy  $S$ ;  $S = \alpha \cap o$ , viz. konstrukce 2.4
- v otočení sestrotíme podstavu  $A_0B_0C_0D_0$ , viz. konstrukce 2.3
- body podstavy vrátíme zpátky do axonometrické průmětny
- zobrazíme jehlan  $ABCDV$
- viditelnost





Obr. 3.3

Úloha 4: Zobraďte rotační válec s podstavou v  $^1\pi$ , která se dotýká os  $x, y$ ;  $r = 2,5\text{cm}$ , výška válce  $v = 4\text{cm}$ .

(viz. obr. 3.4)

Rozbor:

Podstavou rotačního válce je kružnice o poloměru  $r$ , která se má dotýkat dvou přímk (souřadnicových os  $x, y$ ). Střed kružnice proto bude na ose úhlu těchto přímek. Dále střed musí mít od daných přímek vzdálenost  $r$ , leží tedy na rovnoběžce s jednou z nich vzdálené  $r$ . Jelikož takové rovnoběžky existují právě dvě, budou i středy podstavy

dva. Z nich si vybereme jeden a sestrojíme podstavu.

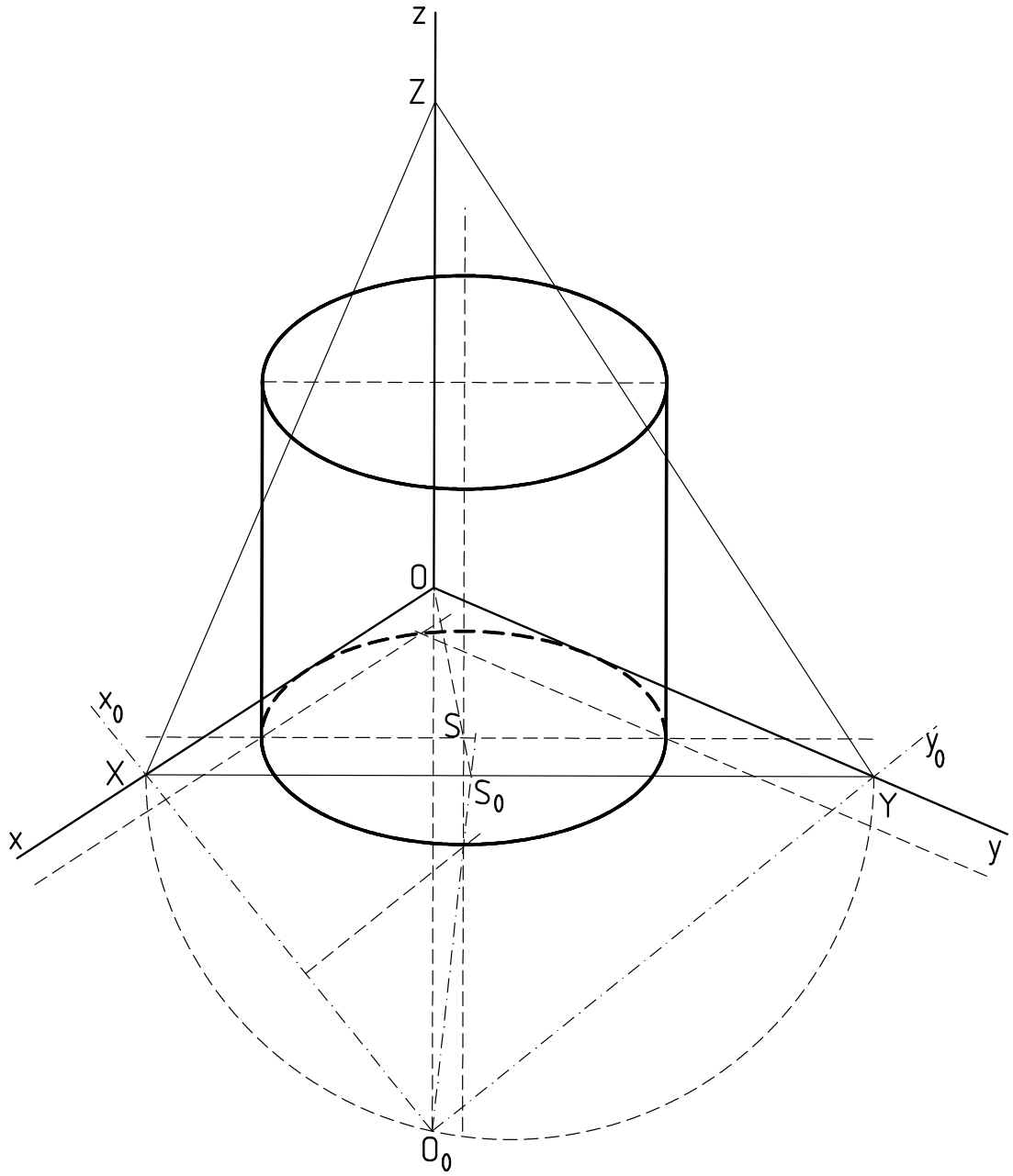
Ve středu podstavy vztyčíme kolmici, na kterou naneseeme výšku válce ve zkrácení. Výšku můžeme nanést v obou směrech. Protože podstava válce leží v  ${}^1\pi$ , bude kolmice rovnoběžná s osou  $z$  a také zkrácení velikosti bude stejné jako na ose  $z$ .

Jelikož je horní podstava rovnoběžná s dolní, zobrazí se obě podstavy stejně (elipsy se stejnou velikostí vedlejší poloosy).

Úloha má čtyři řešení.

Řešení:

- otočíme  ${}^1\pi$  do axonometrické průmětny kolem  $XY$ , viz. konstrukce 2.1
  - sestrojíme osu úhlu  $XO_0Y$
  - ve vzdálenosti  $2,5\text{cm}$  vedeme rovnoběžku s  $y_0$
  - průsečík těchto přímek určuje bod  $S_0$ , který vrátíme zpět do  ${}^1\pi$
  - sestrojíme podstavnou kružnici, viz. konstrukce 2.8
  - bodem  $S$  vedeme přímkou rovnoběžnou s osou  $z$  a naneseeme výšku válce v kladném směru
- sestrojíme horní podstavu
  - viditelnost



Obr. 3.4

Úloha 5: Rotační kužel má podstavu v  ${}^1\pi, S[4; 4; 0], r = 3\text{cm}$ . Přímka  $t$  je tečnou kužele. Sestrojte tento kužel.  
(viz. obr. 3.5)

Rozbor:

Podstava kužele je zadána jednoznačně středem a poloměrem.

Tečná rovina kužele je jednoznačně určena dvěma různoběžkami. Za jednu z nich vezmeme zadanou tečnu  $t$ . Druhou dourčíme tak, že najdeme průnik tečny  $t$  s rovinou podstavy kužele a z tohoto bodu vedeme tečnu k podstavě (vybereme jednu ze dvou možností). Jelikož podstava leží v  ${}^1\pi$ , je průnik  $t \cap {}^1\pi = P^t$  půdorysný stopník přímky  $t$  a tečna vedená z tohoto bodu k podstavě je stopou tečné roviny  $\tau$ . Pomocí bokorysného stopníku přímky  $t$  určíme bokorysnou stopu  $m^\tau$ .

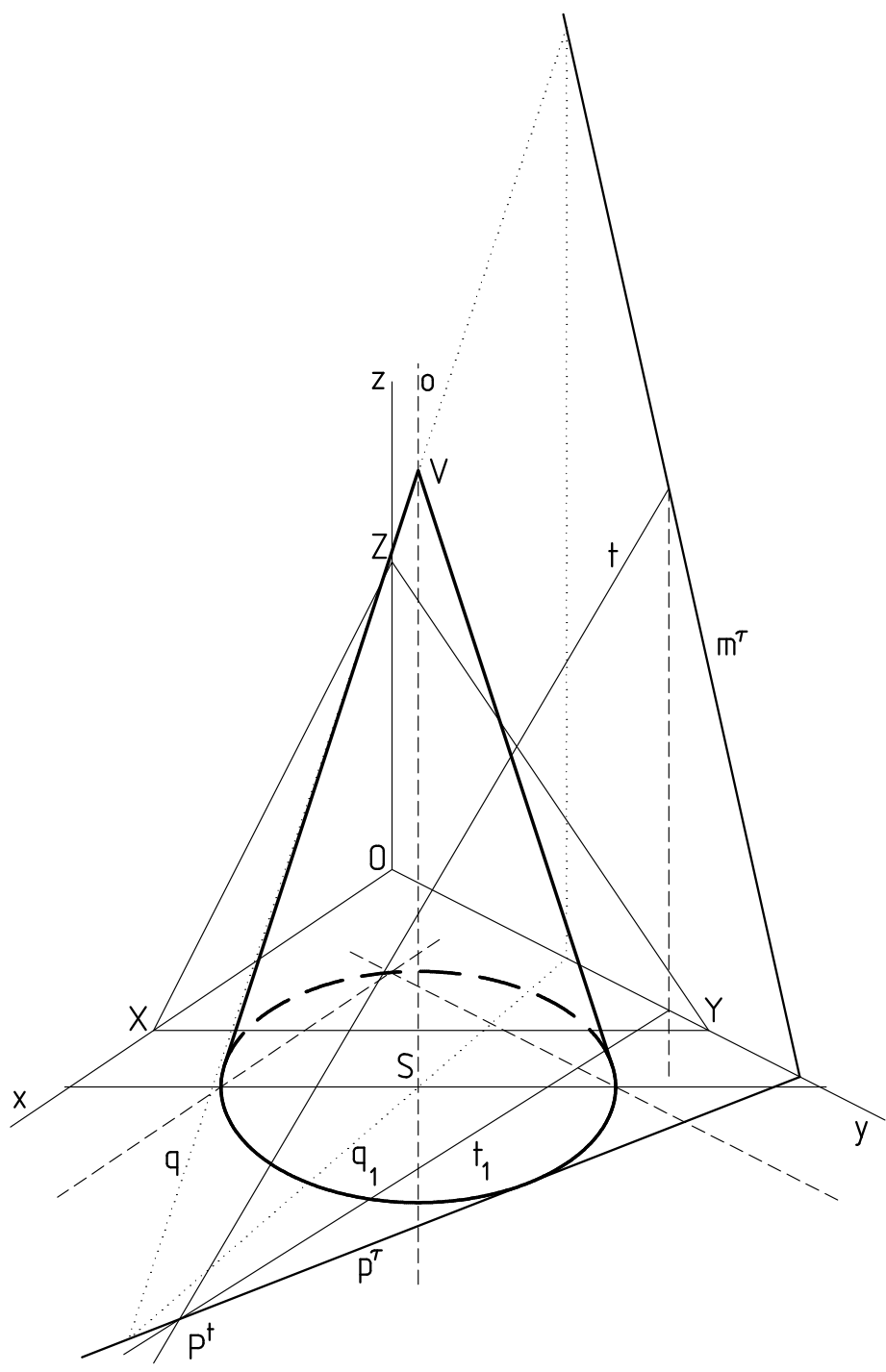
Osa kužele  $o$  prochází středem podstavy  $S$  a je k podstavě kolmá. Vzhledem k poloze podstavy tedy bude osa kužele rovnoběžná s osou  $z$ .

Všechny tečné roviny kužele prochází jeho vrcholem. Zároveň vrchol kužele leží někde na ose  $o$ . Můžeme jej tedy sestrotit jako průnik osy kužele a tečné roviny.

Úloha má dvě řešení.

Řesení:

- sestrojíme podstavu kužele, viz. konstrukce 2.8
- určíme bod  $P^t$ ;  $P^t = t \cap {}^1\pi = t \cap t_1$
- z bodu  $P^t$  vedeme tečnu  $p^\tau$  k podstavě
- pomocí přímky  $t$  dourčíme bokorysnou stopu  $m^\tau$
- sestrojíme osu válce  $o$ ;  $o \parallel z, S \in o$
- v rovině  $\tau$  určíme přímku  $q$  tak, že  $S \in q_1$
- $q \cap o$  je průnik přímky  $t$  s rovinou  $\tau$ , a tedy vrchol kužele  $V = o \cap q$
- z bodu  $V$  vedeme tečny k podstavě
- viditelnost



Obr. 3.5

Úloha 6: Sestrojte kulovou plochu  $\kappa$  se středem v bodě  $S[0; 0; 4]$ , je-li dána její tečná rovina  $\tau$  svými stopami  $p^\tau, n^\tau, m^\tau$ .  
(viz. obr. 3.6)

Rozbor:

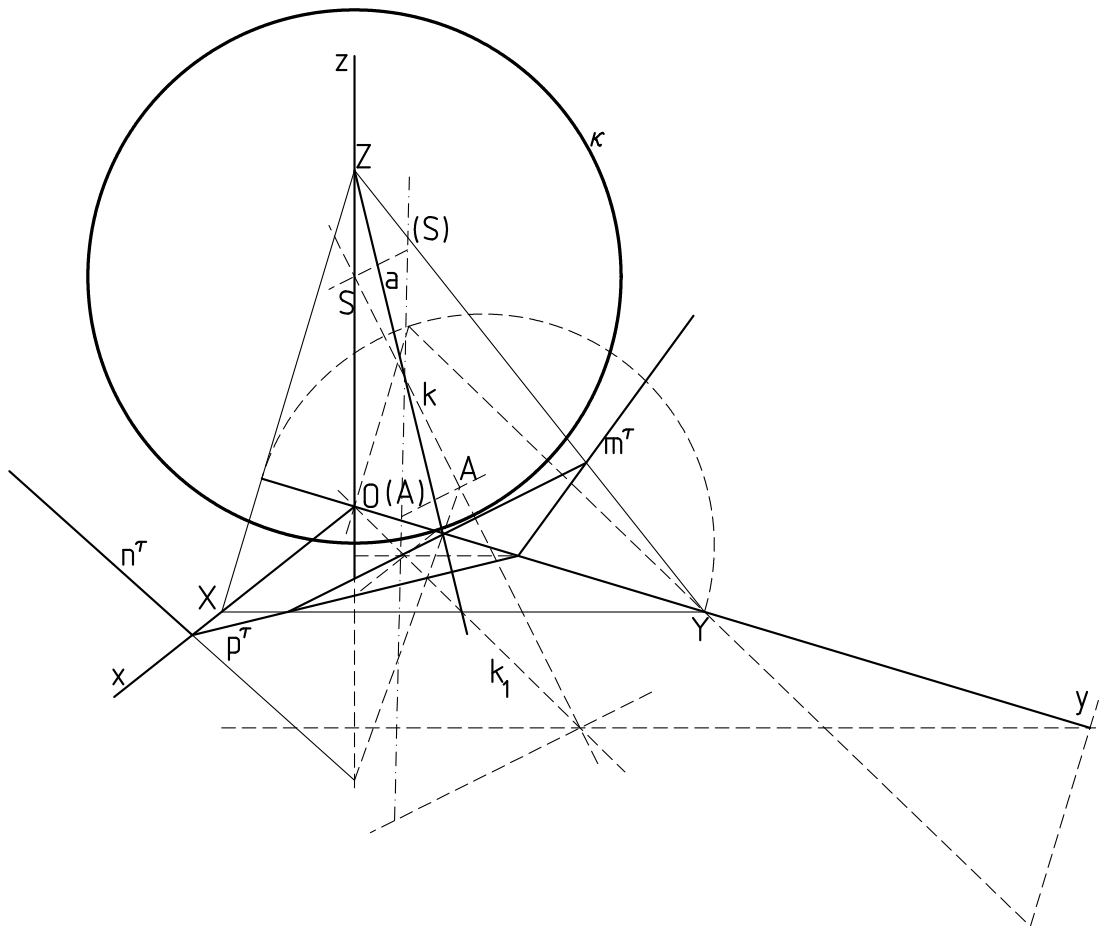
Kulová plocha  $\kappa(S; r)$  se v pravoúhlé axonometrii zobrazí jako kružnice se středem v bodě  $S$  o poloměru  $r$ .

Pro dourčení poloměru kulové plochy vedeme bodem  $S$  kolmici  $k$  k tečné rovině  $\tau$ . V místě, kde ji protne, je bod dotyku  $A$  kulové plochy a tečné roviny. Jelikož pro každý bod  $M$  kulové plochy platí  $|MS| = r$ , určuje velikost úsečky  $|AS|$  poloměr kulové plochy  $\kappa$ .

Úloha má jedno řešení.

Řešení:

- sestrojíme kolmici  $k; S \in k, k \perp \tau$ , viz. konstrukce 2.6
- určíme průnik přímky  $k$  s rovinou  $\tau: k \cap \tau = A$ , viz. konstrukce 2.4
- určíme skutečnou velikost úsečky  $|AS|$ , viz. konstrukce 2.5
- $\kappa(S; r = |AS|)$



Obr. 3.6

### 3.2. Řezy těles

Úloha 7: Zobrazte řez pravidelného pětibokého hranolu, jehož jedna podstava leží v  ${}^1\pi$ ,  $A[4, 4; 0; 0]$ ,  $B[7, 1; 2, 9; 0]$ ,  $v = 8, 8\text{cm}$ , rovinou  $\rho = (36, 6; 9; 6, 1)$ .

(viz. obr. 3.7)

Rozbor:

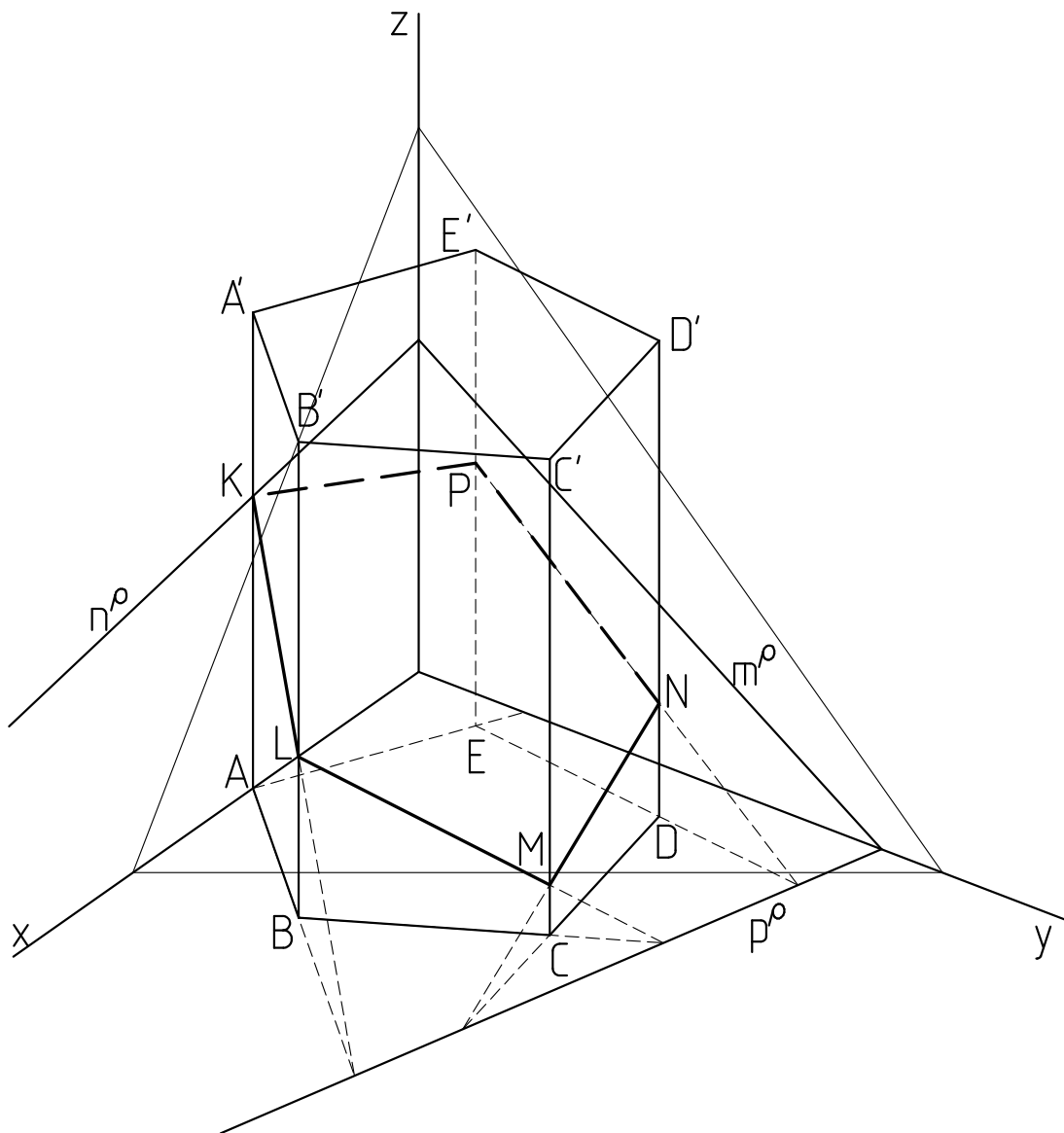
Jelikož hrana  $AA'$  leží v nárýsně, bod  $K = AA' \cap n^\rho$  je bodem řezu.

Mezi rovinou podstavy hranolu a rovinou řezu existuje osová afinita. Osa afinity je průsečnice těchto dvou rovin, tedy půdorysná stopa  $p^\rho$ . Směr afinity je směr povr-

chových přímk hranolu a dvojice odpovídajících si bodů  $A \leftrightarrow K$ . Potom platí např.  $L \in BB'$ ,  $AB \cap KL \in p^\rho$  a obdobně i pro body  $M, N, P$ .

Řešení:

- sestrojíme hranol, obdobně jako v úloze 1
- určíme bod řezu  $K$ ;  $K = AA' \cap n^\rho$
- pomocí afinity sestrojíme body řezu na zbylých hranách
- viditelnost



Obr. 3.7



*Úloha 8:* Zobraďte řez pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v  ${}^1\pi$ ,  $A[5, 2; 1, 1; 0]$ ,  $D[1, 5; 6; 0]$ ,  $v = 9,6\text{cm}$  rovinou  $\rho = (8, 1; 42, 2; 7, 9)$ .

(viz. obr. 3.8)

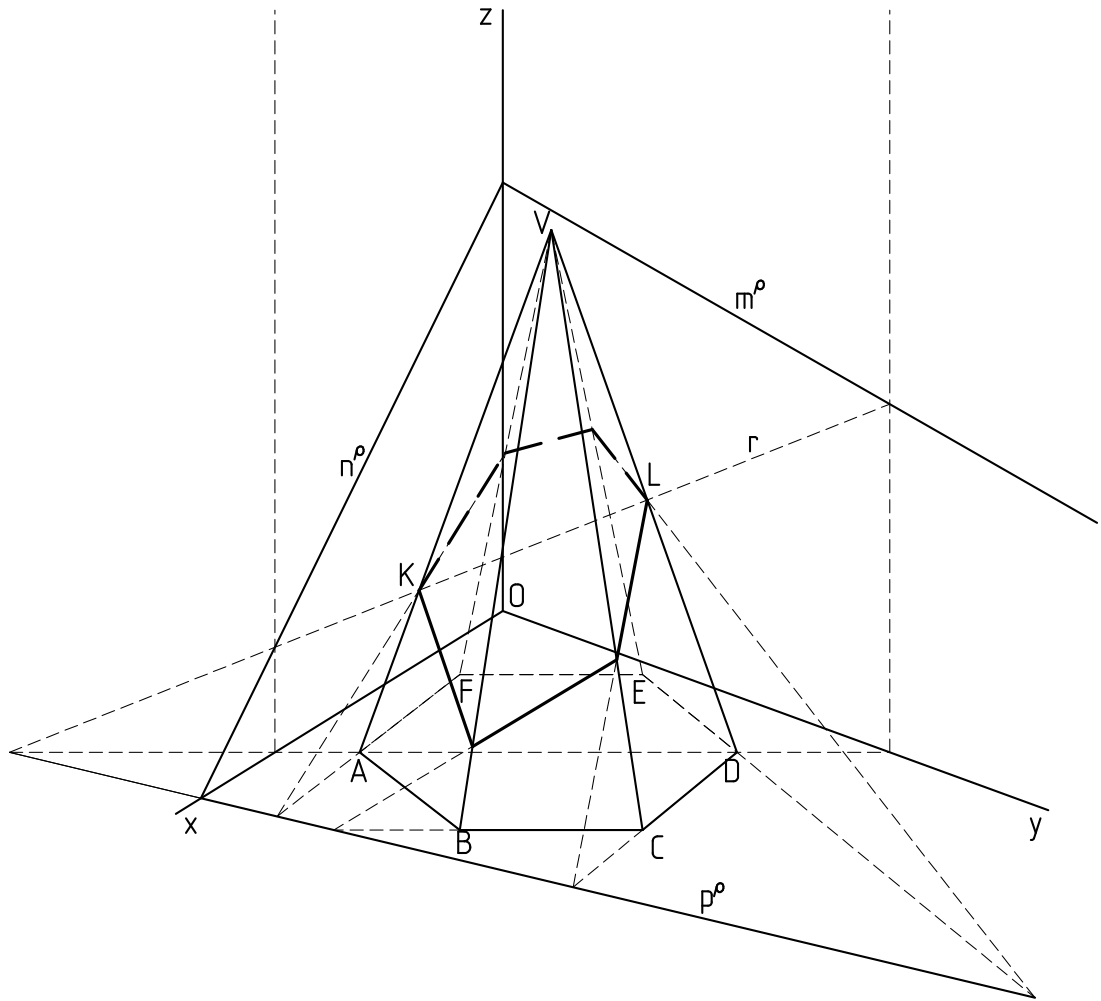
Rozbor:

Proložíme-li vrcholem  $V$  prvou promítací rovinu a najdeme její průsečnici s rovinou řezu  $r$ , potom tato průsečnice určí na hranách  $AV, DV$  body řezu  $K, L$ .

Mezi rovinou řezu a rovinou podstavy jehlanu existuje středová kolineace. Osu kolineace tvoří průsečnice těchto dvou rovin, tedy  $p^\rho$ , střed kolineace je vrchol jehlanu  $V$  a dvojice odpovídajících si bodů  $A \leftrightarrow K, D \leftrightarrow L$ . Jelikož přímky odpovídající si v kolineaci se protínají na ose kolineace, můžeme na zbývajících hranách dourčit body řezu.

Řešení:

- sestrojíme jehlan
- vrcholem  $V$  sestrojíme prvou promítací rovinu (kolmou k  ${}^1\pi$ )
- určíme její průsečnici  $r$  s rovinou řezu
- najdeme body řezu  $K = r \cap AV, L = r \cap DV$
- pomocí středové kolineace dourčíme body řezu na zbylých hranách
- viditelnost



Obr. 3.8

*Úloha 9:* Je dán rotační válec s podstavou v  ${}^1\pi, S[5, 3; 7; 0], r = 5,2\text{cm}, v = 14\text{cm}$  a bod  $X[11, 8; 0; 0]$ . Sestrojte řez válce rovinou, která prochází bodem  $X$  takový, že se dotýká obou podstav válce.

(viz. obr. 3.9)

Rozbor:

Řez rotačního válce rovinou, která není rovnoběžná s osou válce, ani na ni není kolmá, je elipsa.

Půdorysná stopa roviny řezu  $p^\rho$  je tečnou z bodu  $X$  k podstavě válce (vybereme jednu ze dvou možných). Bod dotyku  $T$  je bodem řezu.

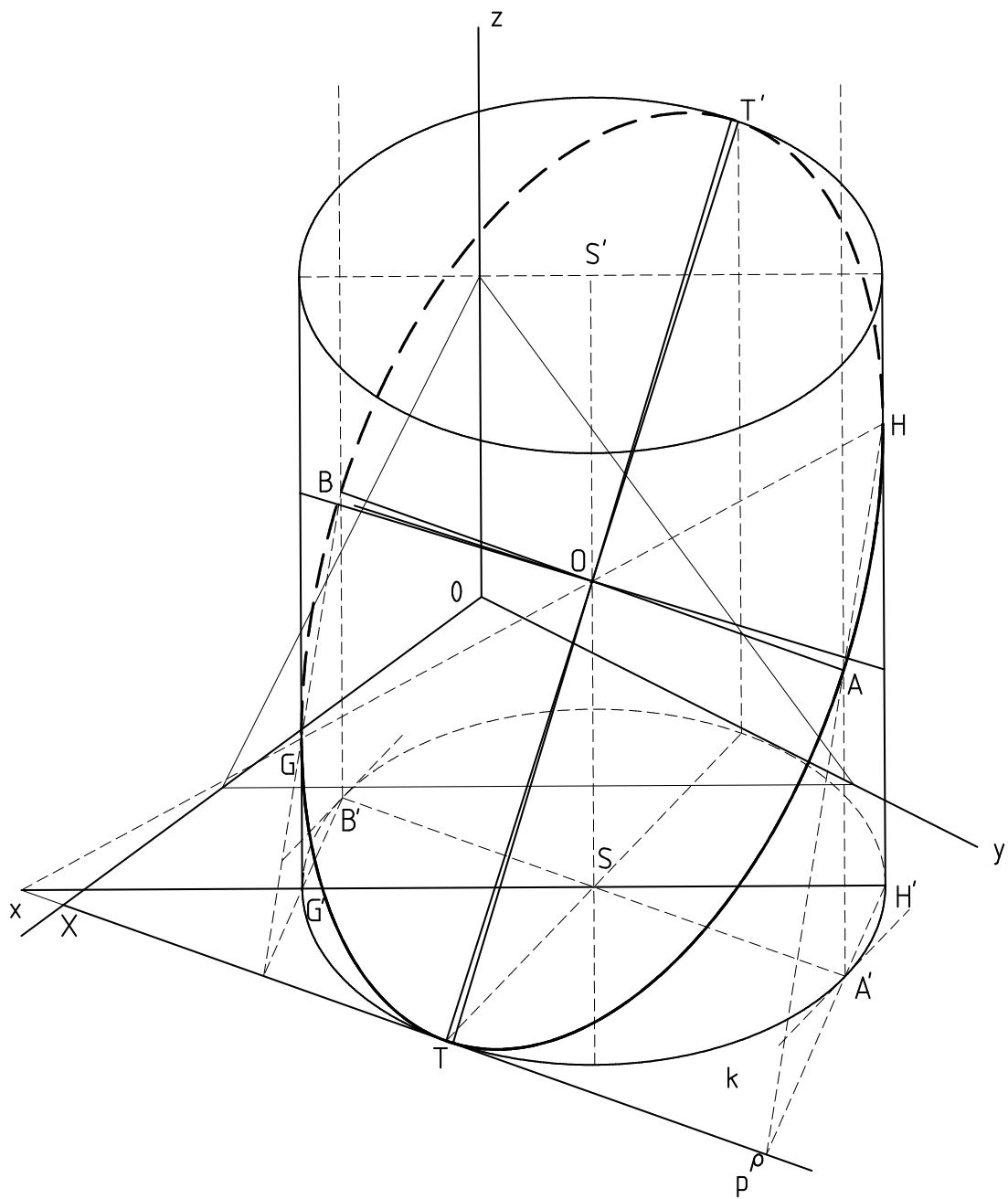
Jelikož se má řez dotýkat obou podstav, bude středem elipsy střed  $O$  osy válce  $SS'$ . Přímka  $TO$  protne horní podstavu v bodě  $T'$ , což je další bod řezu.

Mezi rovinou podstavy a rovinou řezu existuje osová afinita. Osou afinity je průsečnice těchto dvou rovin, tedy  $p^\rho$ . Směr afinity je rovnoběžný s osou válce, dvojice odpovídajících si bodů  $S \leftrightarrow O$ .

Úloha má dvě řešení.

Řešení:

- zobrazíme válec
- sestrojíme tečnu z bodu  $X$  k podstavě, určíme bod dotyku  $T$
- najdeme střed osy válce  $O$  a bod  $T'$
- k průměru  $TT'$  sestrojíme jemu odpovídající průměr v podstavě  $TS$
- k němu nalezneme průměr sdružený  $A'B'$
- pomocí afinity sestrojíme průměr  $AB$
- Rytzovou konstrukcí zobrazíme elipsu
- body  $G, H$ , kde se řez dotýká obrysu válce a v nichž se mění viditelnost určíme jako afinní obrazy bodů  $G', H'$ , což jsou body dotyku obrysových přímek s podstavou kružnicí  $k$
- viditelnost



Obr. 3.9

Úloha 10: Zobrazte rotační kužel s podstavou v  ${}^2\pi, S[5; 0; 7], r = 6\text{cm}$ , výška kužele  $v = 12\text{cm}, y_V > 0$  a řez tohoto kužele rovinou  $\rho(\infty; 5; 11)$ .  
(viz. obr. 3.10)

Rozbor:

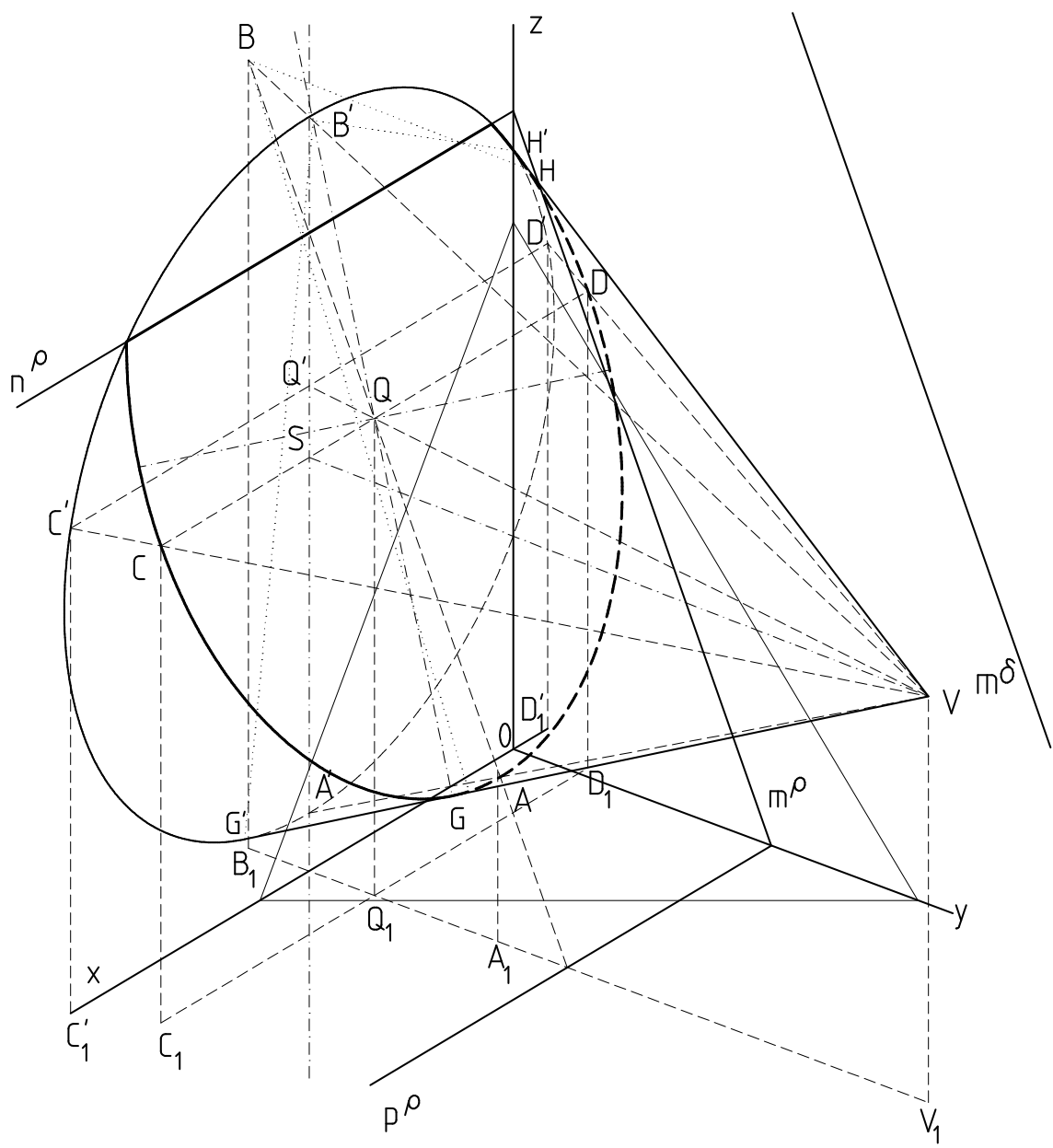
Sestrojením vrcholové roviny  $\delta \parallel \rho, V \in \delta$  zjistíme, že stopa  $n^\delta$  neprotíná podstavou kružnici kužele, tudíž řezem bude elipsa. Zde je pro zachování názornosti sestrojena pouze stopa  $m^\delta$ .

Mezi rovinou řezu a rovinou podstavy existuje středová kolineace, jejíž osa je průsečnice těchto rovin, tedy  $n^\rho$ , střed kolineace je vrchol kužele  $V$ . Řez sestrojíme tedy jako obraz podstavné kružnice kužele v kolineaci.

Jelikož nárysná stopa  $n^\rho$  protíná podstavu kužele, nebude řezem celá elipsa, ale pouze část. Body  $G, H$ , kde se řez dotýká obrysu kužele najdeme jako kolineární obrazy bodů  $G', H'$ , ve kterých se obrysové přímky kužele dotýkají podstavy. V bodech  $G, H$  se mění viditelnost.

Řešení:

- zobrazíme kužel
- sestrojíme vrcholovou rovinu  $\delta \parallel \rho, V \in \delta$  (její bokorysnou stopu  $m^\delta$ )
- v rovině  $\rho$  sestrojíme přímku  $AB$ , jejíž druhý průmět  $A'B'$  prochází středem podstavné kružnice  $S$
- v kolineaci se středem  $V$ , osou  $n^\rho$  a dvojicí odpovídajících si přímek  $AB \leftrightarrow A'B'$  sestrojíme řez kužele, viz. konstrukce 2.10
- viditelnost



Obr. 3.10

Úloha 11: Zobrazte rotační kužel s podstavou v rovině  $\alpha \parallel \pi, S[6; 8; 11], r = 5,5\text{cm}, V \in \pi$ . Dourčete rovinu  $\rho(5; -9; ?)$  tak, aby řezem kužele touto rovinou byla parabola. Řez zobrazte.

(viz. obr. 3.11)

Rozbor:

Řezem kužele rovinou  $\rho$  je parabola, právě když je odchylka roviny  $\rho$  od roviny podstavy kužele stejná jako odchylka povrchových přímek kužele a roviny podstavy kužele. Ke každé takové rovině  $\rho$  existuje i vrcholová rovina  $\delta \parallel \rho, V \in \delta$ . Zřejmě tato rovina  $\delta$  je tečnou rovinou kužele.

Vedeme-li vrcholem kužele  $V$  přímkou rovnoběžnou s  $p^\rho$ , získáme půdorysnou stopu roviny  $\delta$ , tedy  $d \parallel p^\rho, V \in d, d = p^\delta$ . V rovině podstavy  $\alpha$  vedeme tečny k podstavě kužele  $t, u$  rovnoběžné s přímkou  $d$ . Jednu z nich vybereme, např.  $t$  a rovina  $\delta$  potom bude jednoznačně určena přímkami  $d, t$ . Jelikož přímka leží v rovině  $\alpha$ , můžeme snadno určit její stopníky a stopy roviny  $m^\delta, n^\delta$ . Stopy roviny řezu  $\rho$  budou se stopami roviny  $\delta$  rovnoběžné.

Mezi rovinou řezu a rovinou podstavy kužele existuje středová kolineace. Střed kolineace je vrchol kužele  $V$ , osou kolineace je přímka  $o = \alpha \cap \rho$  a úběžnice je přímka  $t$ . Je tedy jednoznačně zadána a řez sestrojíme jako kolineární obraz podstavy kužele.

Označíme-li  $T'$  bod, ve kterém se obrysová přímka kužele dotýká podstavy, jemu odpovídající bod v kolineaci  $T$  je bod, ve kterém se řez dotkne obrysu kužele. V tomto bodě se tedy také bude měnit viditelnost.

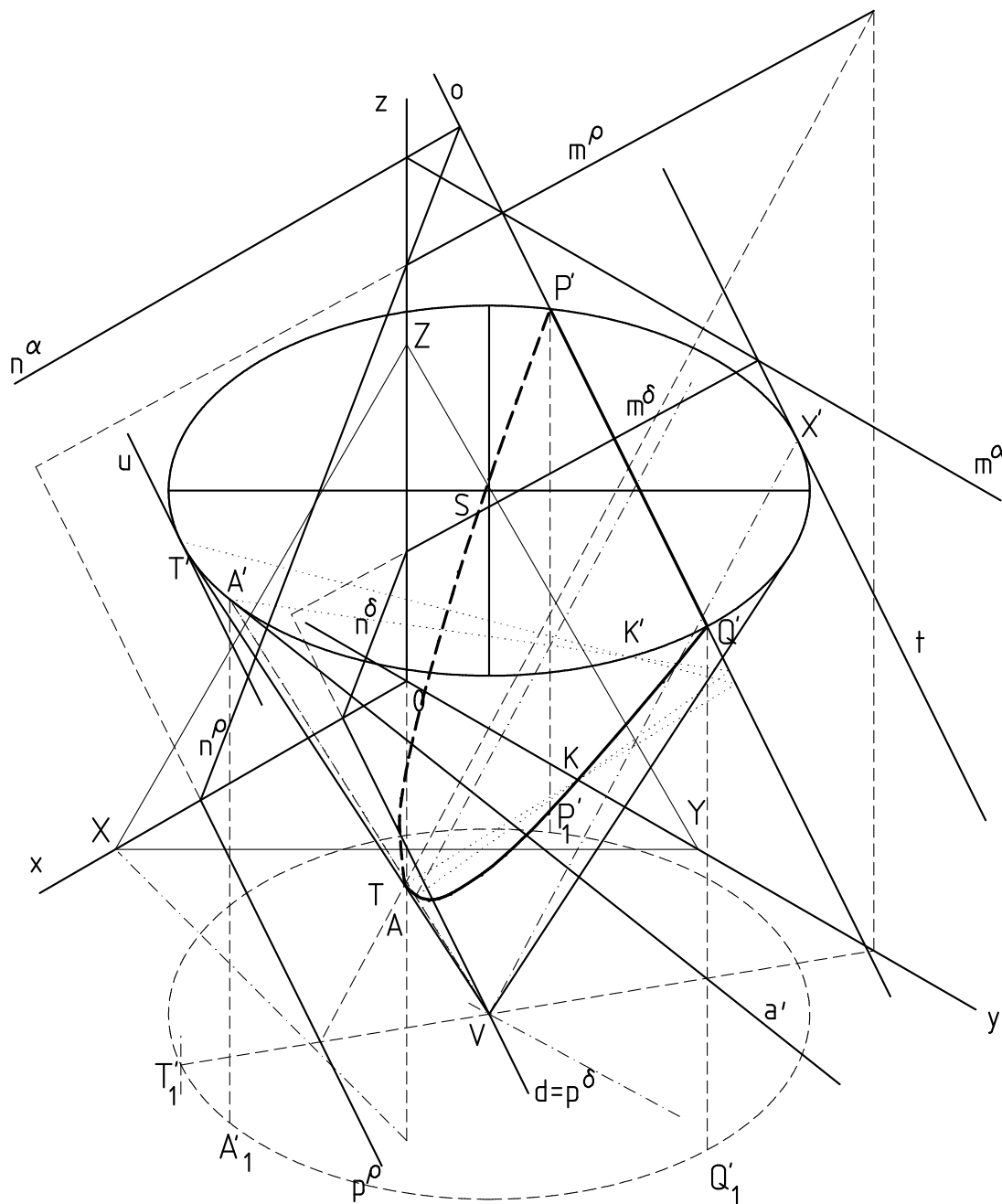
Úloha má dvě řešení.

Řešení:

- zobrazíme kužel
- přímka  $d : V \in d, d \parallel p^\rho$
- tečny k podstavě kužele  $t, u$  rovnoběžné s  $d$
- $m^\delta, n^\delta, n^\rho, m^\rho$
- osa kolineace  $o : o = \rho \cap \alpha$
- sestrojíme parabolu jako obraz podstavy kužele v kolineaci zadané středem  $V$ ,

osou  $o$  a úběžnicí  $t$ , viz. konstrukce 2.11

- body  $P', Q'$ , ve kterých osa kolineace protíná podstavu kužele jsou součástí řezu
- viditelnost



Obr. 3.11



Úloha 12: Sestrojte rotační kužel s podstavou v  $\pi_1, S[7; 8; 0], r = 6\text{cm}$  a vrcholem  $V[7; 8; 13]$  a řez tohoto kužele rovinou  $\rho(-10; 3; 9)$ .  
(viz. obr. 3.12)

Rozbor:

Uurčíme vrcholovou rovinu  $\delta; \delta \parallel \rho, V \in \delta$ . Její půdorysná stopa  $p^\delta$  protne podstavu kužele ve dvou různých bodech a proto řezem kužele rovinou  $\rho$  je hyperbola.

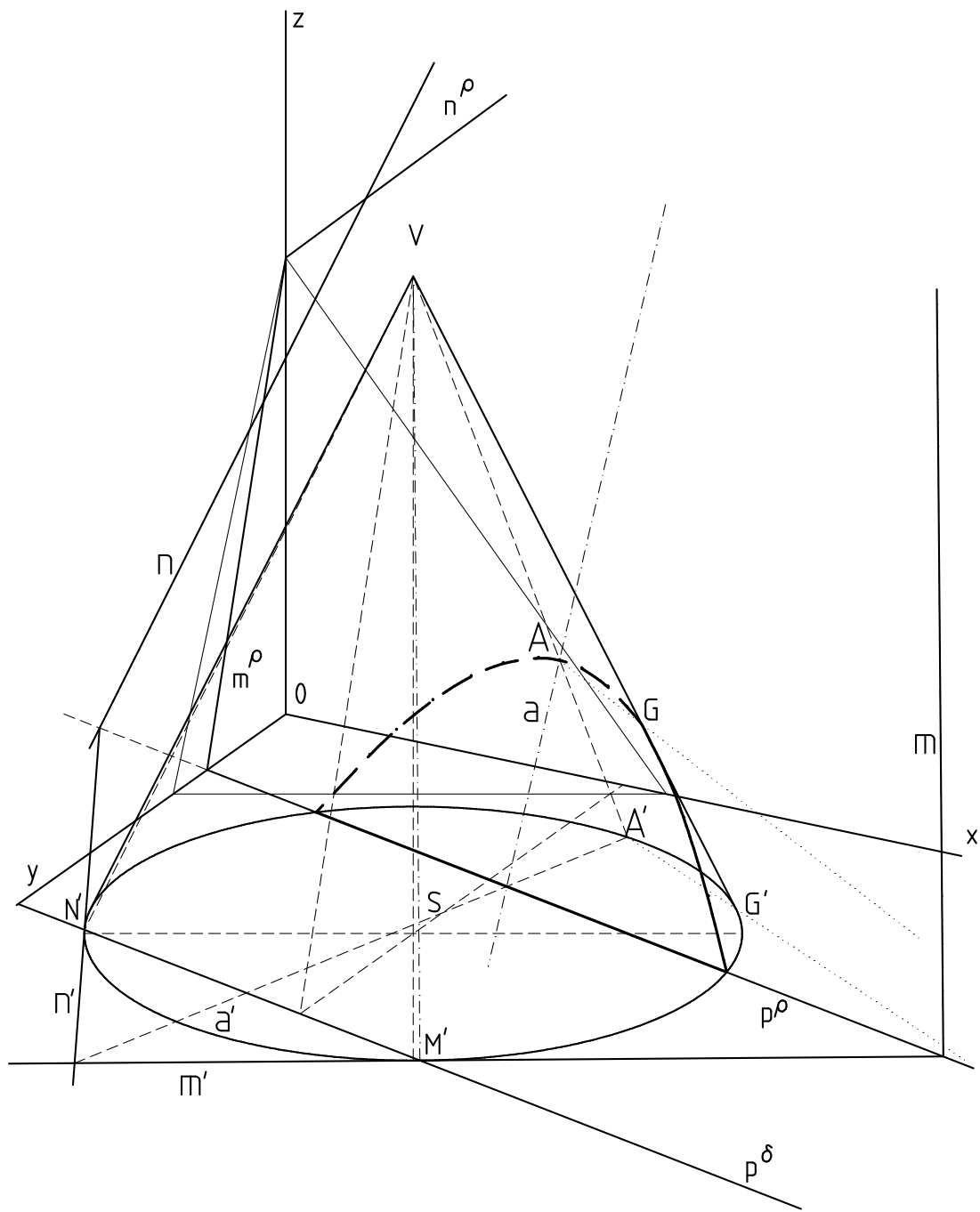
Mezi rovinou řezu a rovinou podstavy kužele existuje středová kolineace. Středem kolineace je vrchol kužele  $V$ , osou je průsečnice těchto rovin, tedy  $p^\rho$  a úběžnicí je  $p^\delta$ .

Bod  $G$ , kde se řez dotkne obrysu kužele sestrojíme jako kolineární obraz bodu  $G'$ , ve kterém se obrysová přímka dotýká podstavné kružnice. V bodě  $G$  se mění viditelnost.

Úloha má jedno řešení.

Řešení:

- zobrazíme kužel
- určíme půdorysnou stopu roviny  $\delta; \delta \parallel \rho, V \in \delta$
- sestrojíme hyperbolu jako obraz podstavy kužele v kolineaci určené středem  $V$ , osou  $p^\rho$  a úběžnicí  $p^\delta$ , viz. konstrukce 2.12
- viditelnost



Obr. 3.12

Úloha 13: Zobrazte kulovou plochu  $\kappa(S \equiv 0, r = 4)$  a sestrojte její řezy rovinami  $\rho(3, 5; \infty; 3, 5), \rho'(-3, 5; \infty; -3, 5)$ .

(viz. obr. 3.13)

Rozbor:

Axonometrickým průmětem kulové plochy je kružnice, jejíž střed je ve středu kulové plochy a poloměr se rovná poloměru kulové plochy.

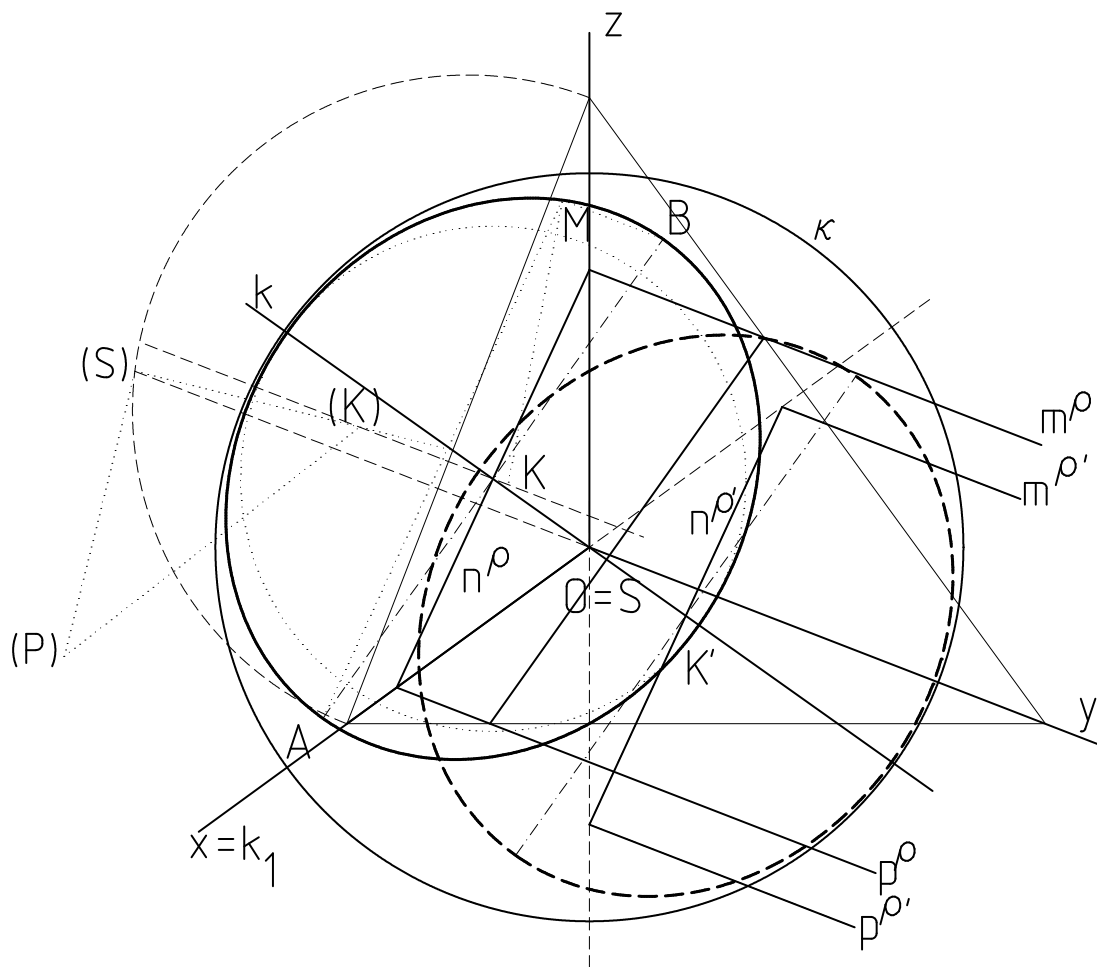
Řezem kulové plochy rovinou  $\rho$  je kružnice se středem v bodě  $K; K = k \cap \rho$ , kde  $k$  je kolmice k rovině  $\rho$  vedená středem kulové plochy  $S$ . Při určování průsečíku  $k \cap \rho$  si všimněme, že přímka  $k$  leží v  ${}^2\pi$ , a tedy průsečík  $K = k \cap \rho = k \cap n^\rho$ . Její poloměr odvodíme z pravouhlého trojúhelníka, jehož jednou odvěsnou je úsečka  $|SK|$  a přepona má velikost  $r$ . Skutečnou velikost úsečky  $|SK|$  určíme ve sklopení. Velikost odvěsny  $(S)(P)$  je velikost poloměru kružnice řezu.

Řez kulové plochy sestrojíme jako obraz kružnice v obecné rovině, pro niž známe střed a poloměr.

Jelikož je rovina  $\rho'$  souměrná s rovinou  $\rho$  podle středu kulové plochy, bude mít kružnice řezu touto rovinou stejný poloměr. Jejím středem bude bod  $K'; K' = k \cap \rho' = k \cap n^{\rho'}$ . Úloha má v každé rovině jedno řešení.

Řešení:

- zobrazíme kulovou plochu
- sestrojíme kolmici  $k$  k rovině  $\rho$  bodem  $S$ , viz. konstrukce 2.6
- určíme průsečík přímky  $k$  s rovinami  $\rho, \rho'; k \cap \rho = K, K \cap \rho' = K'$
- otočením  ${}^2\pi$  určíme skutečnou velikost úsečky  $|SK|$ , viz. konstrukce 2.1
- sestrojíme trojúhelník  $(S)(K)(P); |(K)(P)| = r$
- obraz kružnice v rovině  $\rho$  se středem v bodě  $K$  a poloměrem  $(S)(P)$
- obraz kružnice v rovině  $\rho'$  se středem v bodě  $K'$  a poloměrem  $(S)(P)$
- viditelnost



Obr. 3.13

### 3.3. Osvětlení

Pro větší názornost se někdy využívá osvětlení zobrazovaných útvarů. Jelikož je osvětlení poměrně složitá záležitost, zavádíme místo přirozeného osvětlení tzv. abstraktní osvětlení, u kterého nebereme v úvahu činitele jako jsou např. povrch tělesa, ubývání intenzity světla se vzdáleností, rozptyl světla aj. Při rovnoběžném osvětlení předpokládáme, že všechny světelné paprsky jsou směru  $s$  a na část roviny kolmé k danému směru dopadá vždy stejné množství světla, ať ji jakkoli posuneme.

Zpravidla určujeme mez stínu vrženého na průmětny, mez stínu vlastního a u dutých těles mez stínu vrženého do dutiny\* . Platí, že mez stínu vrženého je stínem meze stínu vlastního. Tedy tvoří-li např. mez stínu vrženého body  $BF^\times G_\times H_\times D$ , přičemž  $A^\times$ , resp.  $A_\times$  jsou vržené stíny bodu  $A$  na půdorysnu, resp. bokorysnu, pak mez stínu vlastního budou tvořit body  $BFGHD$ .

K určení stínu vrženého do dutiny se používá tzv. metoda zpětných světelných paprsků, tedy ze stínu vrženého na půdorysnu určíme, kam na těleso dopadají stíny osvětlených hran.

Při osvětlování bodu  $A$  vedeme tímto bodem světelný paprsek a určíme jeho stopník. Zda bod vrhá stín do půdorysny, nárysny, nebo bokorysny záleží na tom, kterou z nich protne paprsek jako první. Při osvětlování přímky  $a$  vedeme světelný paprsek každým bodem této přímky, čímž vznikne tzv. světelná rovina. Stopy světelné roviny jsou vrženým stínem přímky  $a$ . Zřejmě k určení vrženého stínu přímky na průmětnu stačí určit vržený stín dvou jejích různých bodů.

*Úloha 14:* Zobrazte rovnoběžné osvětlení duté krychle  $ABCDEFGH$  s podstavou  $ABCD$  v  ${}^1\pi$ , je-li dán směr osvětlení  $s$ .

(viz. obr. 3.14, 3.15)

Rozbor:

Jelikož stěna  $ABCD$  leží v půdorysně, stačí určit vržený stín stěny  $EFGH$ . Bodem  $E$  vedeme rovnoběžku s  $s$  a půdorysem bodu  $E$ , tedy bodem  $A$  vedeme rovnoběžku s  $s_1$ . Průsečík těchto přímek je bod  $E^\times$ , což je stín bodu  $E$  do  ${}^1\pi$ . Stejným postupem určíme vržené stíny bodů  $F, G, H$ . V prvním případě padne vržený stín stěny  $EFGH$  celý do  ${}^1\pi$  (obr. 3.14), ovšem ve druhém případě leží body  $G^\times, H^\times$  až za  ${}^3\pi$ . Je tedy zřejmé, že krychle bude vrhat stín jak na  ${}^1\pi$ , tak na  ${}^3\pi$ . Určíme bokorysné stopníky přímek  $GG^\times$  a  $HH^\times$ . Body  $G_\times$  a  $H_\times$  jsou vržené stíny bodů  $G, H$  na  ${}^3\pi$ . Přímky

---

\* V této práci nebudeme pro přehlednost vyznačovat mez stínu vlastního a dáme přednost určení stínu vrženého do dutiny.

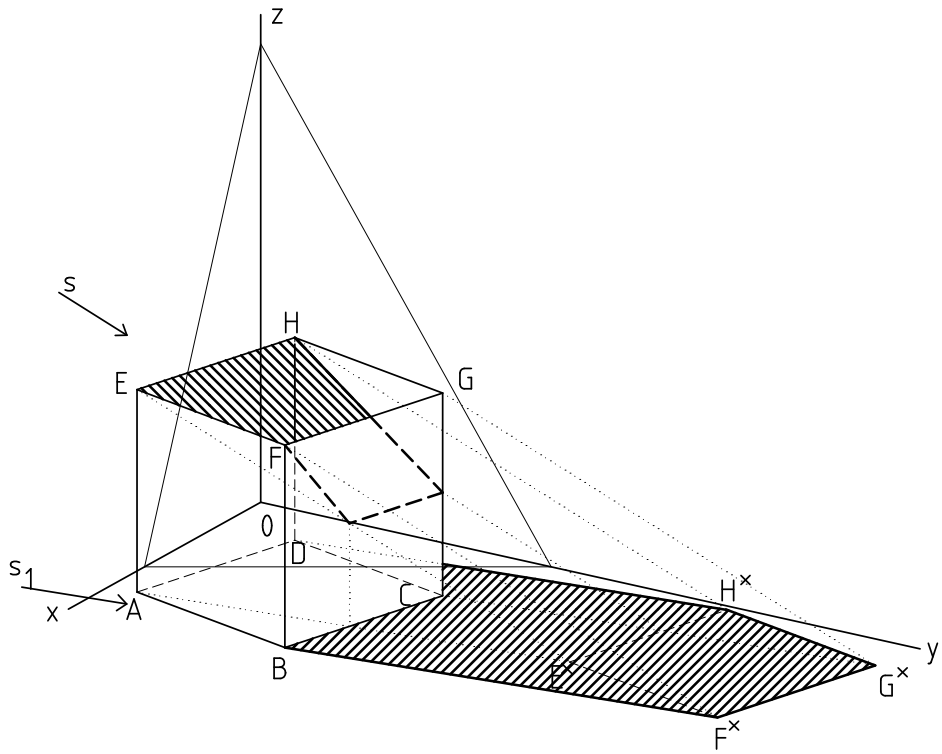
$F^\times G^\times$  a  $F_\times G_\times$  se protínají na ose  $y$  (obr. 3.15.)

Metodou zpětných světelných paprsků určíme stín vržený do dutiny. V prvním případě vidíme, že se protínají úsečky  $E^\times H^\times$  a  $CG^\times$ . Tímto průsečíkem vedeme rovnoběžku  $s$  a zjistíme stín hrany  $EH$  na hranu  $CG$ . Rovnoběžka  $s$  hranou  $BF$  vedená průsečíkem  $BC \cap AE^\times$  protne světelný paprsek jdoucí bodem  $E$  v bodě, který je stínem bodu  $E$  na stěnu  $BCGF$ . Tímto je určen stín vržený do dutiny (obr. 3. 14).

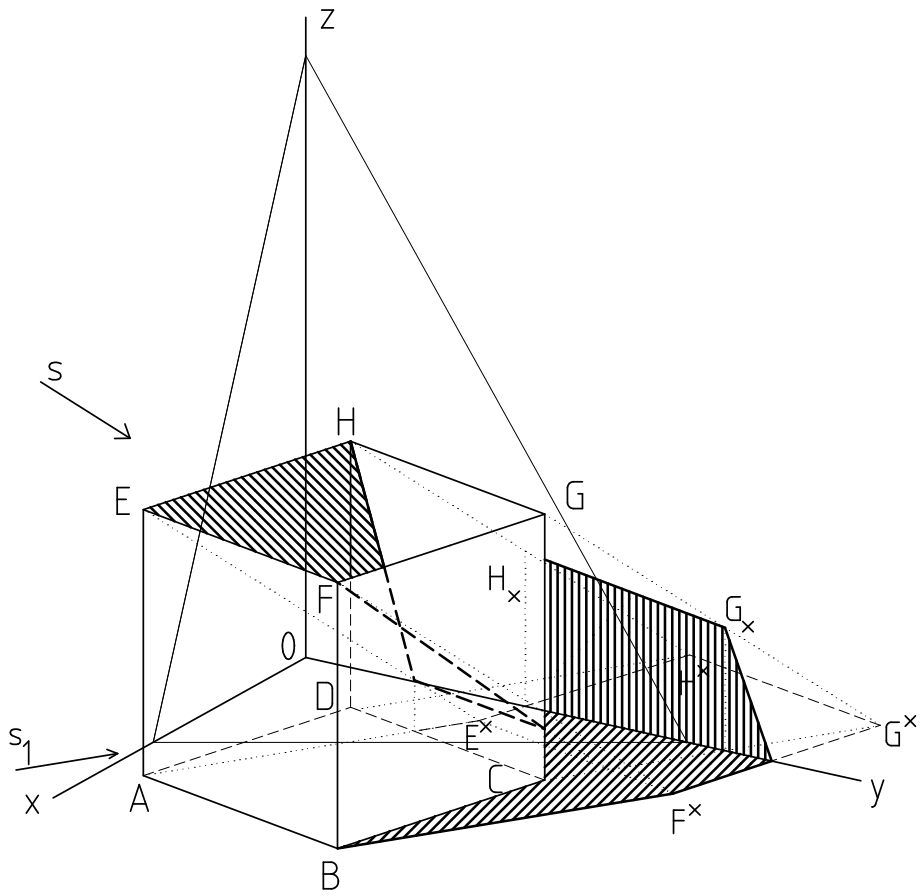
Ve druhém případě se protínají úsečky  $E^\times F^\times$  a  $CG^\times$ , tedy na hranu  $CG$  dopadá stín úsečky  $EF$ . Stejným postupem jako v předchozím případě určíme stín bodu  $E$ , ale tentokrát na stěnu  $CDHG$  (obr. 3.15).

Řešení:

- bodem  $E$  vedeme rovnoběžku  $s$
- bodem  $A$  vedeme rovnoběžku  $s_1$
- v průsečíku těchto dvou přímek je stín bodu  $E$  do  ${}^1\pi$  - bod  $E^\times$
- analogicky určíme stíny zbývajících bodů horní podstavy na půdorysu
- určíme mez stínu vrženého na půdorysu
- je-li potřeba, určíme bokorysné stopníky přímek rovnoběžných  $s$  a tím stín vržený na bokorysnu (obr. 3.15)
- metodou zpětných světelných paprsků určíme stín vržený do dutiny



Obr. 3.14



Obr. 3.15

*Úloha 15:* Rovnoběžně osvětlete dutý šestiboký jehlan s podstavou v rovině  $\alpha \parallel {}^1\pi$ ,  $z_\alpha = 6\text{cm}$ ,  $V \in {}^1\pi$ , je-li dán směr osvětlení  $s$ .  
(viz. obr. 3.16)

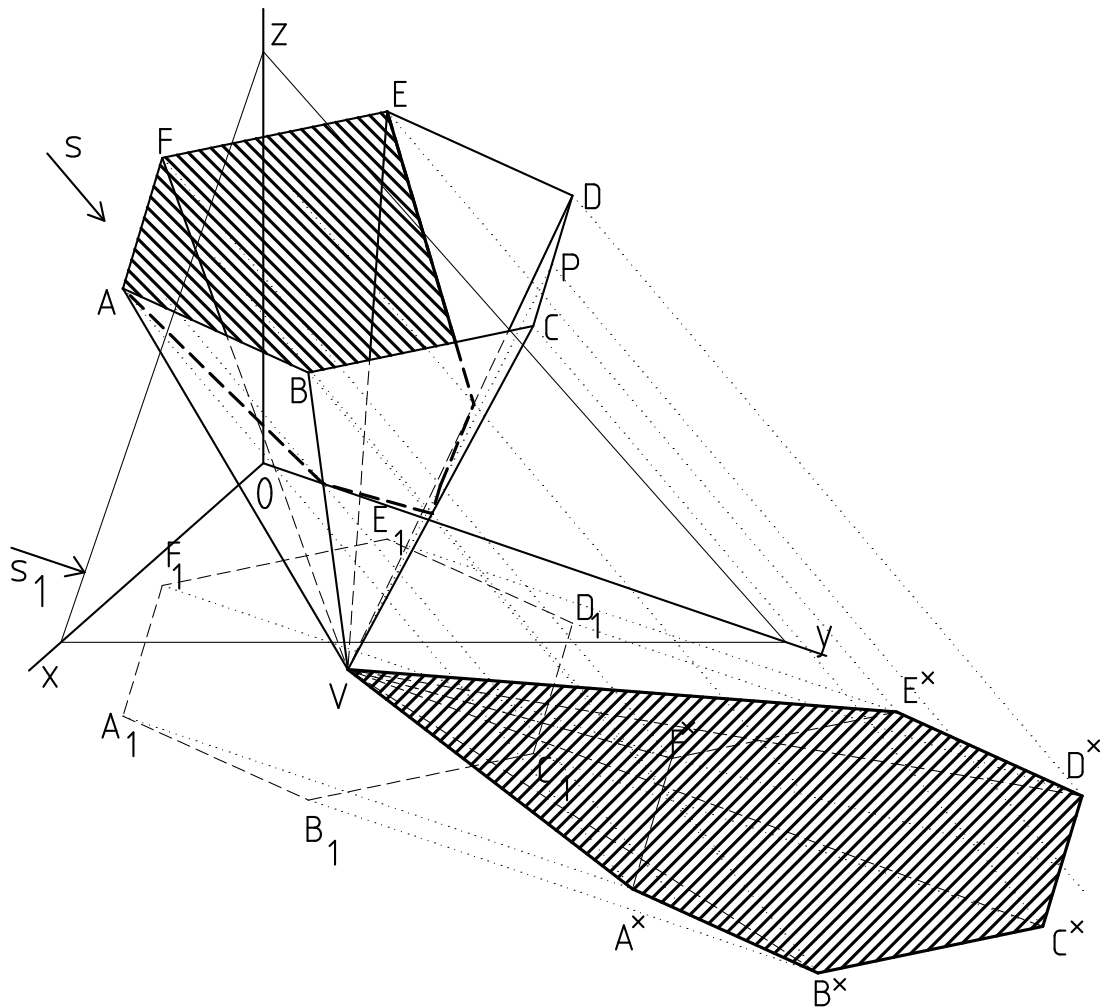
Rozbor:

Všemi body podstavy vedeme rovnoběžky s  $s$ . Určíme půdorysy bodů podstavy a těmi vedeme rovnoběžky s  $s_1$ . Průsečíky odpovídajících si přímek určují vržené stíny jednotlivých bodů do  ${}^1\pi$ . Celý vržený stín padne do půdorysny. Metodou zpětných světelných paprsků určíme stín hrany  $AF$  na hrany  $VB$  a  $VC$  a stín hrany  $EF$  na hranu  $VD$ . Průsečíkem  $VF^\times \cap C^\times D^\times$  vedeme rovnoběžku s  $s$ . Ta protne hranu  $CD$  v bodě  $P$ . Průsečík  $PV \cap FF^\times$  je stín bodu  $F$  do stěny  $VCD$ .

Řešení:

- určíme první průměty bodů podstavy jehlanu
- bodem  $A$  vedeme rovnoběžku s  $s$
- bodem  $A_1$  vedeme rovnoběžku s  $s_1$
- v průsečíku těchto dvou přímek je stín bodu  $A$  vržený na  ${}^1\pi$  - bod  $A^\times$
- analogicky určíme stíny zbývajících bodů podstavy na půdorysnu
- určíme mez stínu vrženého na půdorysnu
- metodou zpětných světelných paprsků určíme stín vržený do dutiny





Obr. 3.16

*Úloha 16:* Rovnoběžně osvětlete dutý rotační kužel s podstavou v rovině rovnoběžné s půdorysnou a vrcholem v půdorysně, je-li zadán směr osvětlení.

(viz. obr. 3.17)

Rozbor:

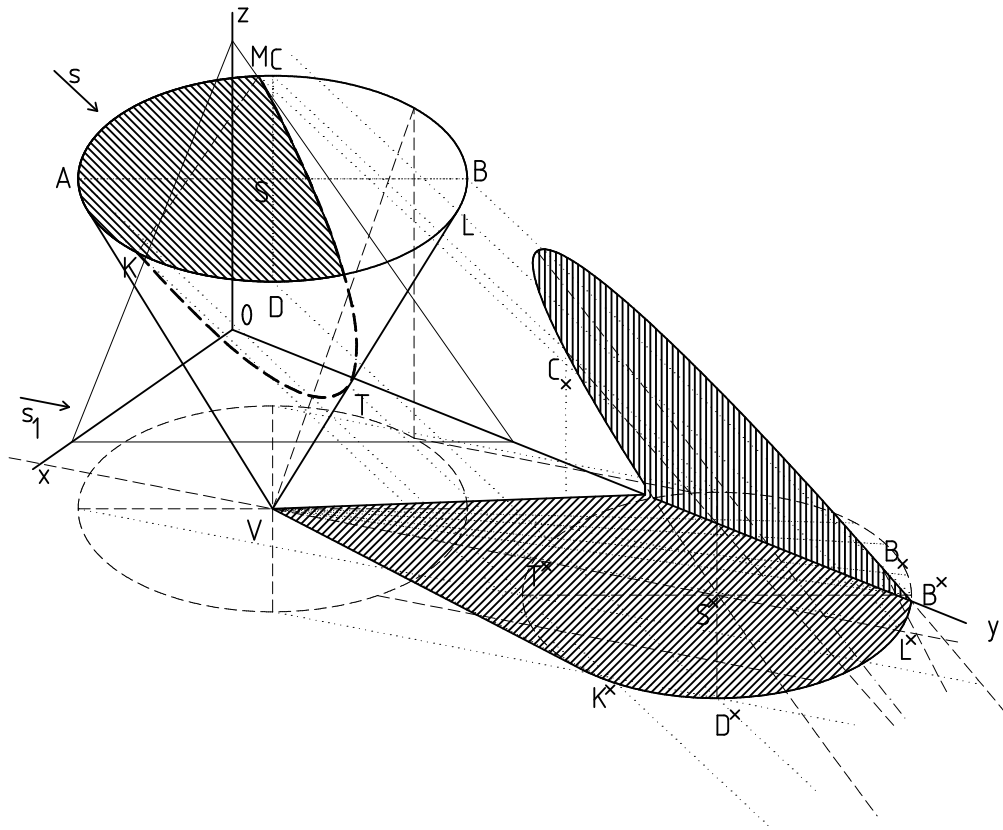
Vedeme-li každým bodem podstavné kružnice přímkou rovnoběžnou se směrem, dostaneme šikmou válcovou plochu. Při zobrazování stínu vrženého do roviny vlastně hledáme řez této válcové plochy danou rovinou. Vrženým stínem do průmětny tedy bude elipsa nebo kružnice. Jelikož je rovina podstavy kužele rovnoběžná s půdorysnou, bude stín vržený do půdorysny ve skutečnosti kružnice shodná s podstavnou kružnicí kužele a

zobrazí se jako elipsa. Stačí určit stín středu podstavné kružnice do půdorysny. Velikosti poloos známe. Při určování stínu vrženého na bokorysnu určíme stíny bodů  $A, B, C, D$ . Jelikož je  $AB$  hlavní osa a  $CD$  vedlejší osa, budou  $A_{\times}B_{\times}$  a  $C_{\times}D_{\times}$  sdružené průměry a pomocí Rytzovy konstrukce můžeme snadno sestrojít stín vržený na bokorysnu.

Stín vržený do dutiny je částí průnikové křivky dané kuželové plochy a vzniklé šikmé válcové plochy. Jelikož jsou válcová i kuželová plochy 2. stupně, bude jejich průniková křivka 4. stupně. Ta se ovšem rozpadne na kružnici (podstavná kružnice kužele) a další křivku, která tudíž musí být také 2. stupně. Stín vržený do dutiny tedy můžeme sestrojít bodově metodou zpětných světelných paprsků nebo pomocí afinity. Osou afinity bude přímka  $KM$ , kde body  $K, M$  určují mez vlastního stínu na kuželi a směr afinity je směr osvětlení. Bod na obryse  $T$  určíme metodou zpětných světelných paprsků. Nechť  $L$  je bod, kde se obrysová přímka kužele dotýká podstavné kružnice.  $VL^{\times}$  protne stín podstavné kružnice v bodě  $T^{\times}$ . Tím vedeme rovnoběžku s  $s$ , která protne obrysovou přímku v bodě  $T$ .

Řešení:

- určíme stín  $S^{\times}$  středu podstavy kužele  $S$  na půdorysnu
- sestrojíme stín podstavy vržený na půdorysnu
- tečny z bodu  $V$  k této elipse společně s ní tvoří mez stínu vrženého na půdorysnu
- body  $A, B, C, D$  vedeme rovnoběžky s  $s$  a určíme jejich bokorysné stopníky
- Rytzovou konstrukcí sestrojíme díky sdruženým průměrům  $A_{\times}B_{\times}$  a  $C_{\times}D_{\times}$  stín vržený na bokorysnu
- stín vržený do dutiny sestrojíme bodově metodou zpětných světelných paprsků



Obr. 3.17

Úloha 17: Zobrazte osvětlení skupiny těles, je-li dán směr osvětlení  $s$ .

(viz. obr. 3.18)

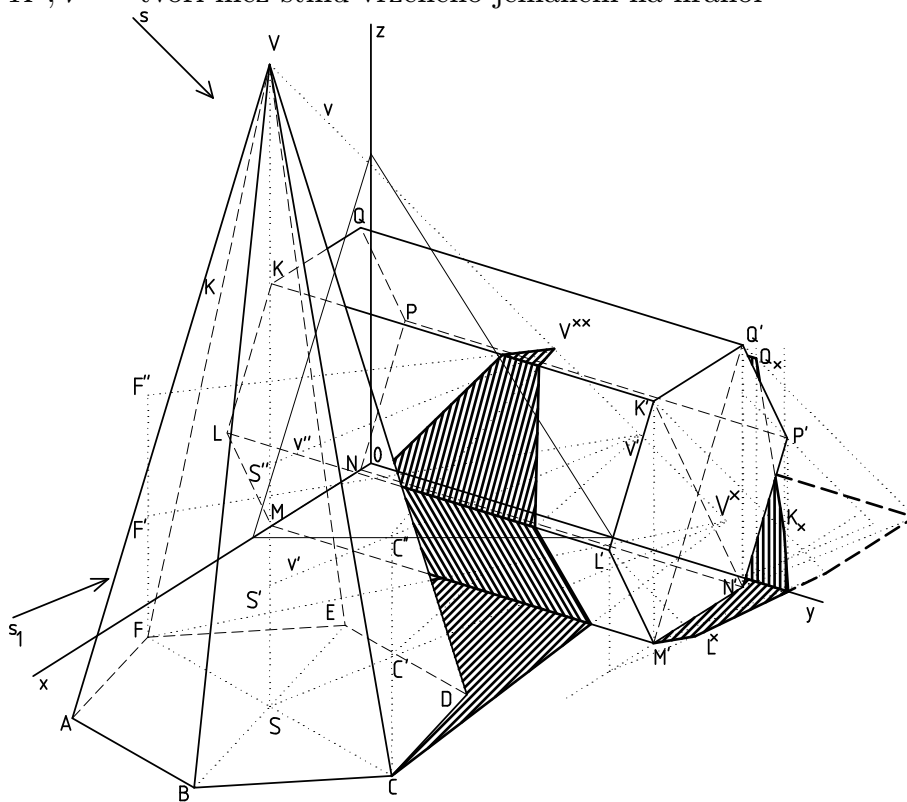
Rozbor:

Nejprve zobrazíme vržené stíny obou těles na průmětny. Vidíme, že jehlan vrhá stín nejen na průmětny, ale také na hranol. Mez stínu vrženého do půdorysny jehlanem tvoří body  $CV^{\times}F$ , takže při určování stínu vrženého na hranol už budeme pracovat pouze s vrcholy  $C, F, V$ . Určíme stín jehlanu vržený do roviny  $\pi''$ ,  $\pi'' \parallel \pi^1, z_{\pi''} = |MK|$  a  $\pi', \pi' \parallel \pi^1, z_{\pi'} = \frac{|MK|}{2}$ . Body  $C, S, F$  vedeme rovnoběžky s osou  $z$  a na ně nanese velikost  $|MK|$ . Tak dostaneme body  $C'', S'', F'' \in \pi''$ . Nechť  $v \parallel s, V \in v$  a  $v'' \parallel s_1, S'' \in v''$ , potom  $v \cap v'' = V^{\times \times}$ .  $V^{\times \times}$  je vržený stín vrcholu  $V$  na rovinu  $\pi''$  a tedy na stěnu hranolu  $KQQ'K'$ . Spojíme-li  $V^{\times \times}$  s  $C''$  a  $F''$ , dostaneme body na hraně  $KK'$ . Obdobně nalezneme stín vržený jehlanem na rovinu  $\pi'$  a tím získáme body na

hraně  $LL'$ . Na hraně  $MM'$  je mez stínu určena průsečíky s přímkami  $V^{\times}C, V^{\times}F$ . Tím máme stín vržený jehlanem na hranol určený.

Řešení:

- určíme stín obou těles vržený na průmětny
- na kolmice  $k^{\perp\pi}$  v bodech  $C, F, S$  nanese vzdálenost  $|MK|$  a tím získáme body  $C'', F'', S''$ .
- sestrojíme přímkou  $v; V \in v, v \parallel s$
- sestrojíme přímkou  $v'', S'' \in v'', v'' \parallel s_1$
- $v \cap v'' = V^{\times\times}$
- na kolmice  $k^{\perp\pi}$  v bodech  $C, F, S$  nanese vzdálenost  $\frac{|MK|}{2}$  a tím získáme body  $C', F', S'$ .
- sestrojíme přímkou  $v', S'' \in v', v' \parallel s_1$
- $v \cap v' = V'$
- body  $V^{\times}C \cap MM', V^{\times}F \cap MM', V'C' \cap LL', V'F' \cap LL', V^{\times\times}C'' \cap KK', V^{\times\times}F'' \cap K', V^{\times\times}$  tvoří mez stínu vrženého jehlanem na hranol



Obr. 3.18

### 3.4. Průnik těles

Jsou-li v prostoru umístěna dvě tělesa tak, že mají nějakou část společnou, pak hovoříme o tzv. průniku těles. Místo abychom hledali všechny společné body, hledáme většinou pouze průnik povrchů těchto těles. Hledáním průniku více než dvou těles se v této práci zabývat nebudeme.

Průnikem dvou těles je prostorová křivka. Při průniku dvou hranatých těles je to prostorová lomená čára, jejíž každý vrchol leží na některé hraně jednoho z těles. Při průniku dvou oblých těles (rotační kužel, rotační válec) vznikne obecně prostorová křivka čtvrtého stupně, jelikož rotační kužel i rotační válec jsou plochy druhého stupně. Ta se ovšem může rozpadnout na více křivek, např. na dvě křivky druhého stupně. Průnik hranatého tělesa s oblým můžeme chápat také jako řezy oblého tělesa jednotlivými stranami tělesa hranatého a jelikož řez oblého tělesa rovinou je obecně kuželosečka, bude průniková křivka složena z částí různých kuželoseček.

Při hledání průniku využíváme pomocných ploch - nejčastěji rovin, příp. kulových ploch, a to takových, které protnou obě daná tělesa v co nejjednodušších křivkách (přímky, kružnice). Průsečíky odpovídajících si řezů jsou body průniku. Příklad, kdy pomocná rovina protne těleso v kružnici, se v axonometrii moc nevyužívá, neboť zobrazení kružnice v obecné rovině není jednoduchá konstrukce. Volíme proto většinou roviny rovnoběžné se směrem tvořících přímek, příp. procházející vrcholem tělesa.

Je-li některá z pomocných rovin pro jedno těleso hraniční a protne druhé těleso, vymezí na něm tzv. lichou část, tedy část tělesa, která není součástí průniku. Pomocí lichých částí můžeme průnik těles rozdělit na 3 typy:

- úplný řez (obr. 3.19, 3.20): lichá část existuje pouze na jednom tělese, tedy všechny hrany jednoho tělesa protínají druhé těleso (ale ne naopak),
- částečný řez (obr. 3.18): lichá část existuje na obou tělesech, tedy na obou tělesech existují hrany, které druhé těleso protínají, i hrany, které jej neprotínají,
- dokonalý řez: lichá část neexistuje ani na jednom z těles, tedy všechny hrany jednoho tělesa protínají druhé a naopak.

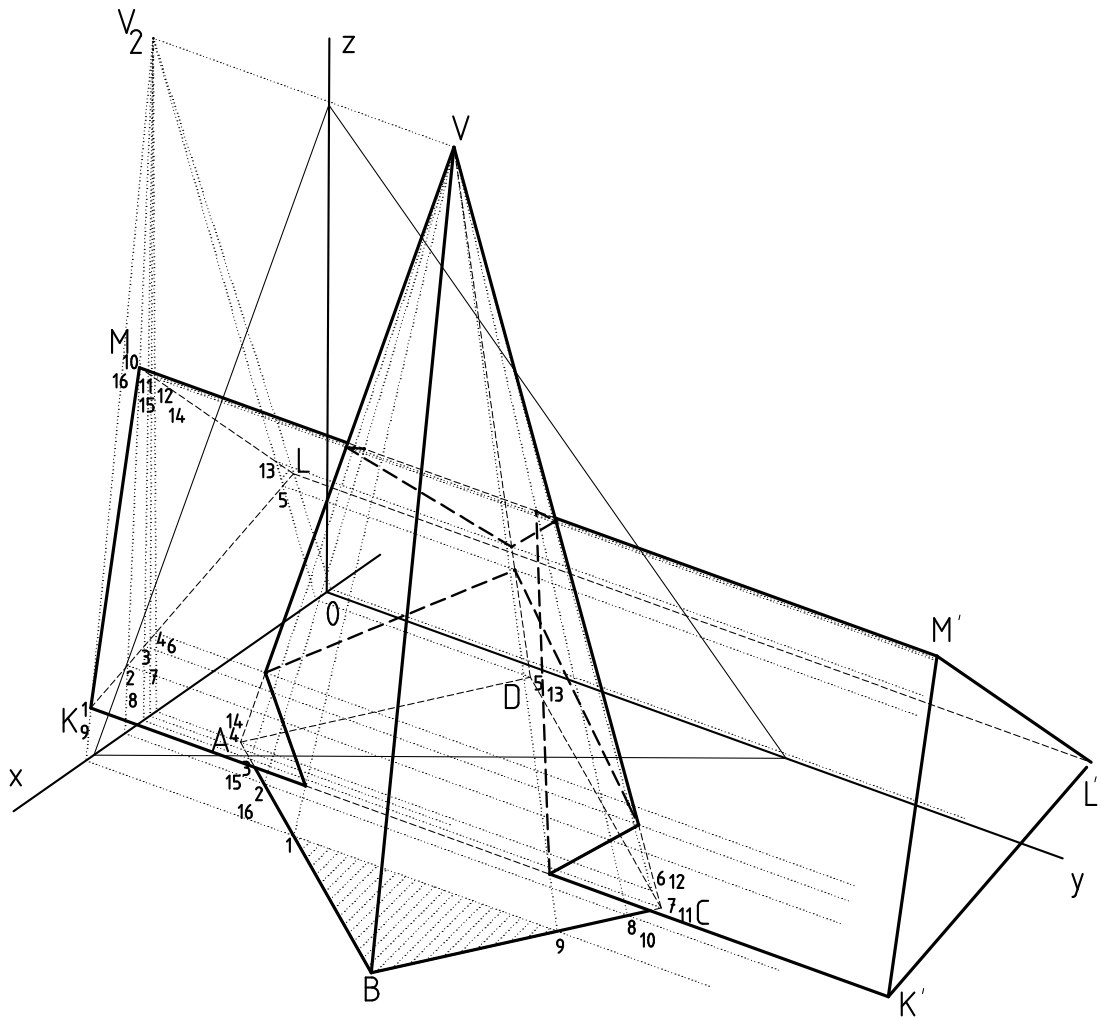
V příkladech uvedených v této práci bude postup hledání průniku těles vždy stejný. Využijeme svazku rovin, které budou procházet vrcholem jehlanu, příp. kužele a zároveň budou směrovými rovinami hranolu, příp. válce. Určíme řezy na jednotlivých tělesech a pro přehlednost odpovídající si řezy očíslováme. Potom už stačí pouze určit průsečíky odpovídajících si řezů a viditelnost. Platí, že bod průnikové křivky je viditelný, pokud leží ve viditelné části prvního a zároveň druhého tělesa. V ostatních případech je neviditelný.

*Úloha 18:* Sestrojte průnik pravidelného trojbokého hranolu s podstavou v  $^2\pi$  s pravidelným čtyřbokým jehlanem s podstavou v  $^1\pi$ .

(viz. obr. 3.19)

Řešení:

- sestrojíme svazek rovin procházejících vrcholem jehlanu  $V$  rovnoběžných s bočními hranami hranolu
  - rovina vedená bodem  $K$  určí lichou část na jehlanu
  - rovina vedená bodem  $D$  určí lichou část na hranolu
  - dále má smysl vést roviny vrcholy  $M, A, C$
  - určíme řezy obou těles těmito rovinami (přímky), pro přehlednost číslováme
  - odpovídající si řezy se protnou v bodech průnikové křivky
  - viditelnost



Obr. 3.19

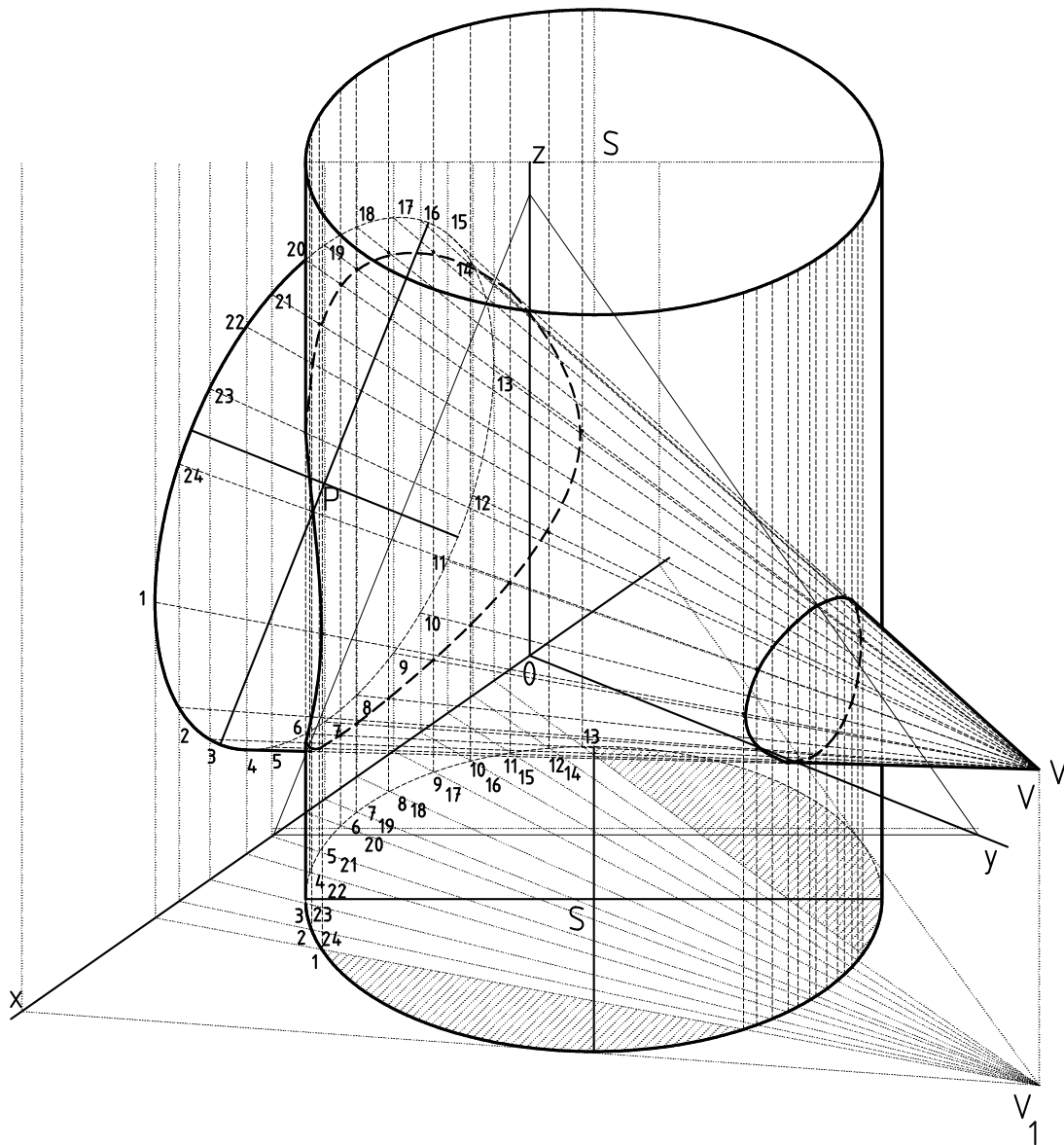
Úloha 19: Sestrojte průnik rotačního kužele s podstavou v  $^2\pi$  s rotačním válcem s podstavou v  $^1\pi$ .

(viz. obr. 3.20)

Řešení:

- sestrojíme svazek rovin procházejících vrcholem kužele  $V$  rovnoběžných s povrchkami válce
- tečné roviny kužele určí liché části na válci
- na kuželi nejsou žádné liché části
- vedeme dostatečný počet rovin, které protínají obě tělesa

- určíme řezy obou těles těmito rovinami(přímky), pro přehlednost číslujeme
- odpovídající si řezy se protnou v bodech průnikové křivky
- viditelnost



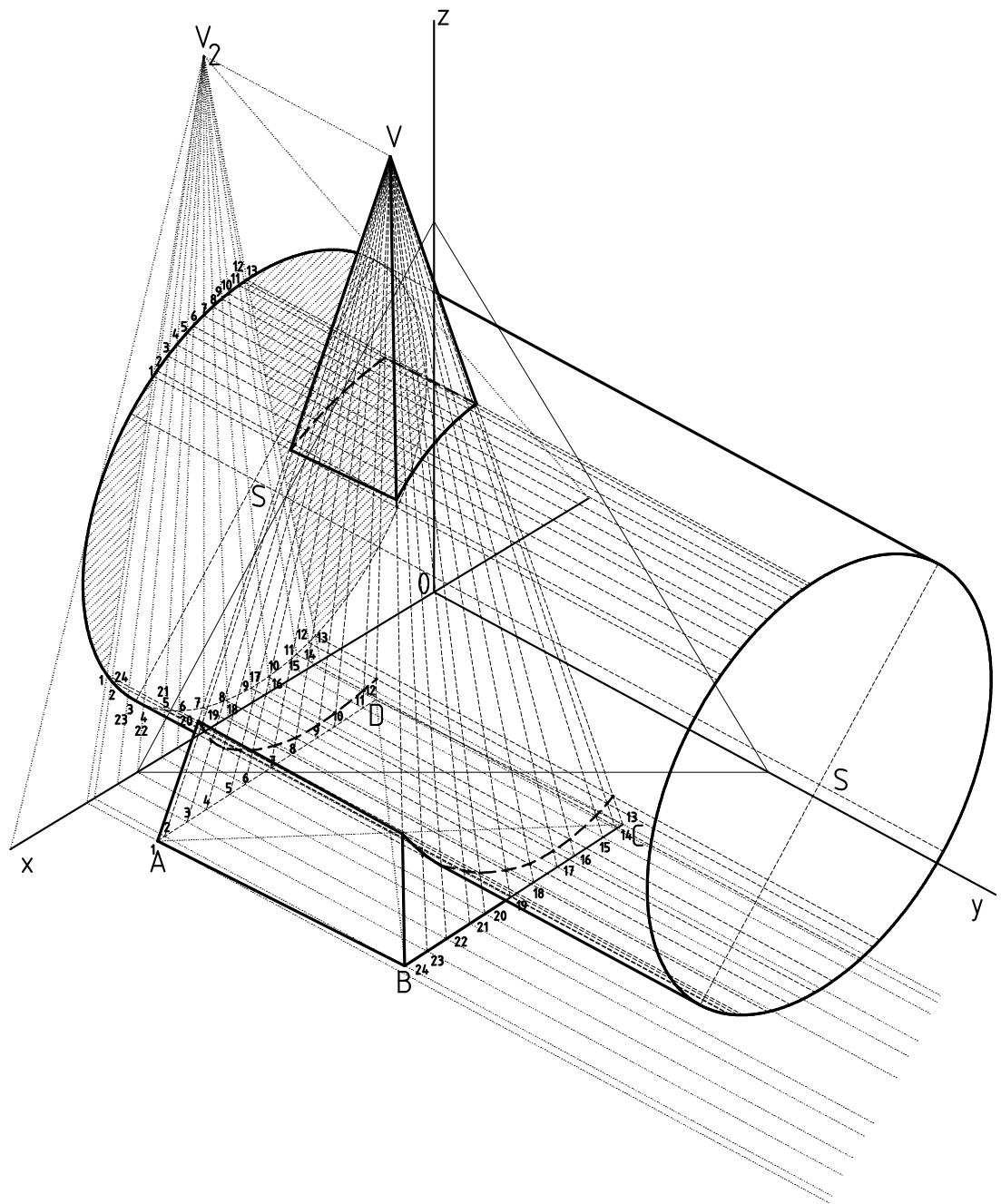
Obr. 3.20



*Úloha 20:* Sestrojte průnik rotačního válce s podstavou v  $^2\pi$  s pravidelným čtyřbokým jehlanem s podstavou v  $^1\pi$ .  
(viz. obr. 3.21)

Řešení:

- sestrojíme svazek rovin procházejících vrcholem jehlanu  $V$  rovnoběžných s povrchy válce
- roviny vedené vrcholy  $A, C$  určí liché části na válci
- na jehlanu nejsou žádné liché části
- vedeme dostatečný počet rovin, které protínají obě tělesa
- určíme řezy obou těles těmito rovinami (přímky), pro přehlednost číslujeme
- odpovídající si řezy se protnou v bodech průnikové křivky
- viditelnost



Obr. 3.21

## Použitá literatura

1. Urban, A., *Deskriptivní geometrie I.*, 1. vydání. Praha:SN TL, 1965.
2. Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J., *Deskriptivní geometrie I.*, 3. vydání. Praha:ČSAV, 1954.
3. Drábek, K. a kol., *Deskriptivní geometrie II*, 2. vydání. Praha:SN TL, 1964.