UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie

Mgr. Radek HORENSKÝ

Využití invariantů a poloinvariantů v úlohách školské matematiky

Disertační práce

Školitel: RNDr. Jaroslav ŠVRČEK, CSc. Olomouc 2012

Děkuji vedoucímu své disertační práce panu RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za cenné rady, připomínky a konzultace, které mi poskytl v průběhu příprav i samotného psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Olomouci dne 28. března 2012 Mgr. Radek Horenský

Název práce:	Využití invariantů a poloinvariantů v úlohách školské matematiky
Autor:	Mgr. Radek Horenský
Katedra:	Katedra algebry a geometrie PřF UP Olomouc
Školitel:	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Katedra algebry a geometrie, PřF UP Olomouc
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Didaktika matematiky
Abstrakt:	Tato práce je zaměřena na možnosti využití některých netradičních postupů při řešení matematických úloh. Hlavními metodami uvedenými v této práci jsou postupy využívající neměnnosti hodnot některých veličin a postupy, které jsou založeny na zachování jistých, někdy i ne na první pohled zřejmých vlastností sledovaných objektů. Společně s metodami invariantů a poloinvariantů je v práci podrobněji popsána Fermatova metoda nekonečného klesání. Práce obsahuje úlohy řešené i neřešené, které jsou doplněny o didaktické komentáře, popisuje využití těchto metod při řešení netradičních matematických úloh. Součástí práce je také sada didaktických testů, které vhodným způsobem rozvíjejí myšlení žáků právě v součinnosti s využíváním daných metod řešení.
Klíčová slova:	invarianty, poloinvarianty, metody řešení matematických úloh

Title:	Using invariants and semiinvariants in the solving of mathematical problems
Author:	Mgr. Radek Horenský
Department:	Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Supervisor:	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Abstract:	This thesis focuses on the possible use of non-traditional methods for solving of mathematical problems. The main methods published in the dissertation are those, which uses constancy of some quantities values and techniques which are based on keeping of certain but not always readily seen features of the observed objects. The first part of the work provides key definitions such as invariants, semiinvariants, Fermat's Method of Infinite Descent. The third part of the work includes solved and unsolved problems with the addition of didactic notes which uses invariants and semiinvariants in problem–solving. The second part of the dissertation contains a set of didactic tests focusing on abilities relating to invariants and semiinvariants in the problem–solving..
Keywords:	invariants, semiinvariants, methods of problem–solving

Obsah

Seznam použitého označení **8**

Úvod **9**

1 Invarianty a poloinvarianty **14**

1.1 Invarianty 16

1.1.1 Invarianty kolem nás 16

1.1.2 Invarianty v příkladech 19

1.2 Poloinvarianty 24

1.2.1 Poloinvarianty kolem nás 25

1.2.2 Poloinvarianty v příkladech 26

1.3 Fermatova metoda nekonečného klesání 32

1.3.1 Užití Fermatovy metody nekonečného klesání 34

2 Didaktický výzkum **47**

2.1 Test dělitelnosti 48

2.2 Geometrické invarianty 73

2.3 Poloinvarianty 84

2.4 Hledání invariantů 96

2.5 Hodnocení testů 99

3 Invarianty a poloinvarianty v úlohách **103**

3.1 Úlohy o pokrývání 104

3.1.1 Další úlohy pro samostatnou práci 111

3.2 Úlohy založené na dělitelnosti 113

3.2.1 Další úlohy pro samostatnou práci 116

3.3 Úlohy z kombinatorické geometrie 120

3.3.1 Další úlohy pro samostatnou práci 125

3.4 Hry 128

3.4.1 Další úlohy pro samostatnou práci 131

Závěr **133**

Seznam použité literatury **136**

Seznam použitého označení

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
a, b, c, $\ldots$	prvky množiny, délky stran mnohoúhelníků
A, B, C, A_1, A_2, A_3, $\ldots$	body, vrcholy mnohoúhelníků
S_{ABC}	obsah trojúhelníku ABC
$a \in \mathrm{A}$	prvek a náleží množině A
(a_n)	posloupnost čísel a_1, a_2, a_3, $\ldots$
a_1, a_2, a_3, $\ldots$	členy posloupnosti
$V(n)$	výroková formule proměnné n
(x, y, z)	uspořádaná trojice čísel x, y a z
$\lvert\sphericalangle ABC\rvert$	velikost úhlu ABC
$\sin\lvert\sphericalangle ABC\rvert$	sinus úhlu ABC
$\cos\lvert\sphericalangle ABC\rvert$	kosinus úhlu ABC
$v(C, AB)$	vzdálenost bodu C od přímky AB
$\lvert AC\rvert$	velikost (délka) úsečky AC
$\lfloor x\rfloor$	dolní celá část reálného čísla x
$\langle a; b\rangle$	uzavřený interval
$(a; b)$	otevřený interval
$\langle a; b)$, $(a; b\rangle$	polouzavřené intervaly
$V[5; -1]$	bod V o souřadnicích $x = 5$ a $y = -1$
$\square$	konec zadání úlohy
$\blacksquare$	konec řešení úlohy

Úvod

Cílem této práce je poukázat na některé z netradičních postupů při řešení jistých typů matematických úloh. V příkladech matematiky na základních i na středních školách je mnohdy vyžadována pouze znalost jistého postupu řešení či dosazení do konkrétních vzorců, které byly v hodinách matematiky odvozeny, popř. alespoň zavedeny vyučujícími matematiky. Většina úloh navazujících tematicky na učivo matematiky vyžaduje od žáků především dobré zvládnutí předchozího učiva. Prostor pro užití jiných (nestandardních) metod řešení úloh tak bývá proto velmi malý.

Při řešení úloh, které však mají poměrně malou souvislost s učivem probíraným v hodinách matematiky na školách, je vyžadováno od řešitelů především velmi dobré logické myšlení a orientace v souvislostech. Při řešení těchto úloh (jedná se především o úlohy z různých matematických soutěží, z nichž si největší pozornost v ČR zaslouží Matematická olympiáda (MO), viz [34], Matematický klokan, viz [37], Turnaj měst, viz [38], Matematický duel či další matematické korespondenční semináře, a dále pak jsou to úlohy Mezinárovní matematické olympiády (IMO), viz [36], Středoevropské matematické olympiády (MEMO), viz [35], resp. národních či regionálních matematických olympiád) je hlavní devizou pro úspěšné vyřešení úlohy schopnost propojit dobré znalosti elementární matematiky z různých matematických partií s vytříbeným logickým myšlením řešitele a nalézt tak vhodný postup řešení směřující ke správným výsledkům.

Tato práce je zaměřena na možnosti využití některých netradičních postupů při řešení matematických úloh. Hlavními metodami uvedenými v této práci jsou postupy využívající neměnnosti hodnot některých veličin a postupy, které jsou založeny na zachování jistých, někdy i ne na první pohled zřejmých vlastností sledovaných objektů. Pokud je možno převést vlastnosti jednotlivých prvků či nějaké množiny prvků do jednodušší formy zápisu pomocí konečného počtu symbolů, můžeme hovořit o tzv. kódování, kdy na základě práce s danými symboly můžeme poměrně rychlým způsobem rozhodnout o chování celého systému při dílčích transformacích jednotlivých veličin.

Celá práce je rozčleněna do několika samostatných bloků. V prvním bloku jsou vhodným způsobem definovány některé ze základních metod použitých při řešení matematických problémů. Jsou to postupně metoda invariantů, metoda poloinvariantů a jedna z variant metody poloinvariantů, která je v literatuře (viz např. [3], [7], [19], aj.) zmiňována nejčastěji pod názvem Fermatova metoda nekonečného klesání. Na konkrétních příkladech a situacích zde bude ukázáno, jak se mohou hodnoty některých veličin měnit, které vlastnoti či veličiny naopak zůstávají zachovány.

Hledání invariantů a poloinvariantů je ve své podstatě experimentem, v němž se snažíme uplatnit potřebné znalosti a zkušenosti. Při řešení konkrétních úloh je nejobtížnější nalézt právě vhodný invariant či poloinvariant, který nám umožní danou úlohu buď zcela, nebo alespoň částečně vyřešit.

Metoda invariantů a poloinvariantů, stejně jako např. užití Dirichletova principu, patří k metodám, které často nevyžadují obsáhlý matematický aparát. Náročnost takových úloh je však dána mírou nových, netradičních myšlenkových postupů, pomocí nichž je možno optimální řešení vhodným způsobem odhalit, nalézt souvislosti mezi transformovanými veličinami a na základě zjištěných skutečností příslušné získané informace použít k vyřešení problému. Snad právě proto patří řešení založená na těchto metodách k těm nejefektivnějším.

Ve druhé části práce jsou vyhodnoceny autorovy poznatky a zkušenosti z práce s talentovanými žáky a shrnuty některé výsledky vyplývající z dotazníků. Žákům druhých ročníků některých gymnázií a vybraným účastníkům matematických kroužků a seminářů byly postupně předkládány série úloh zaměřených na uvedenou problematiku.

Vzorkem pro statistické vyhodnocení byli (kromě žáků vybraných gymnázií olomouckého regionu) také řešitelé 58. ročníku Matematické olympiády (autorské úlohy byly součástí úloh domácího kola a také šestice úloh ústředního kola MO, viz příklad 41 a příklad 42) a dále účastníci soustředění pro matematicky nadané žáky pořádaných v rámci grantů zaměřených na práci s matematicky nadanými žáky. Za podpory ministerstva školství a evropských unijních fondů, především Evropského sociálního fondu, bylo realizováno několik grantů zaměřených na práci s matematicky nadanými a talentovanými žáky, jako jsou např. granty „STM-Morava“, „MATES“ aj., v rámci kterých měli žáci možnost se částečně seznámit i s možnostmi řešit úlohy využitím metod invariantů a poloinvariantů.

Z výsledků výzkumu je patrné, že systematická práce s žáky doplněná vhodně volenými úlohami má velký vliv na rozvoj myšlení žáků. Ačkoli zpočátku neměli někteří z nich žádnou představu o invariantech či poloinvariantech, dokázali je po jisté době sami v příkladech vypozorovat a vhodným způsobem využít při řešení úloh složitějších.

Třetí část je věnována studiu a systematizaci úloh uveřejněných v odborné literatuře, zkoumání širších souvislostí mezi jednotlivými použitými metodami a dílčích oblastí matematiky a v souvislosti s tím i tvorbě dalších úloh založených na metodách úzce spojených s danou tematikou. Invarianty a poloinvarianty se vyskytují ve všech oblastech matematiky. Mnohdy se však jedná jen o singulární případy.

Často je však možno vytvořit ucelené série úloh s podobnou či navazující tematikou, které mohou rozvíjet daný pojem a vytváří tak tzv. gradovaný řetězec matematických úloh, viz např. [22]. V práci s matematicky nadanými žáky mají řetězce úloh svou neopomenutelnou úlohu. Jednodušší úlohy dokážou žáka motivovat, prohloubit jeho zájem o danou tematiku, umožňují mu uplatnit nabyté zkušenosti při řešení příkladů obecnějších, abstraktnějších, čímž rozvíjejí jeho matematické schopnosti a myšlení.

Jednotlivé kapitoly obsahují nejen přehled typických úloh z dané oblasti, které jsou založeny na využití metody invariantů a poloinvariantů, ale také původní autorovy úlohy, z nichž některé byly použity v různých matematický soutěžích.

Snahou autora této disertační práce je nahlédnout na danou problematiku nejen očima autora úloh, ale zejména očima žáka a učitele. Během své praxe měl každý z vyučujících možnost řešit mnoho úloh a stejně jako žáci v soutěžích objevovat cestu vedoucí k řešení. Spoustu úloh jim pak musel vhodnou formou přiblížit, aby žáci do úlohy mohli tzv. nahlédnout a pochopit myšlenkové procesy směřující k výsledkům.

Z pohledu řešitele je důležité příklad správně analyzovat, zapsat vše podstatné pomocí matematické symboliky, na jednotlivé transformace nahlédnout z různých úhlů pohledu. Porovnáním vstupních a výstupních veličin je možno některé z invariantů určit přímo, například konstatní rozdíl, součet, součin či podíl jistých veličin, v mnoha případech zůstávají některé z hodnot stále stejné. Snahou řešitele je pak taková zjištění vhodným způsobem aplikovat při řešení problému.

Z pohledu autora daného typu úloh je naopak nutná schopnost zobecňování poznatku, že některá vlastnost či veličina je invariantem. Vytvořit úlohu, kdy je po řešiteli vyžadováno, aby ukázal, že jistá transformace nemění danou veličinu, není obtížné. Takové úlohy však slouží jen k procvičení matematických dovedností řešitele, neboť ten v takovém případě ví, jaké jsou vstupní veličiny, a zná i danou transformaci. Chceme-li však rozvinout matematické myšlení řešitele, je třeba dané invarianty vhodným způsobem zapracovat do konkrétní úlohy. Úkolem řešitele je, aby daný invariant očekávaným logickým úsudkem objevil a aby jej dokázal během řešení úlohy vhodně uplatnit.

Role učitele v tomto procesu je však také velmi náročná. Stejně jako řešitel, i on se musí v této problematice dobře orientovat. Metodu, pomocí níž k výsledku dospěl, však nemůže řešitelům úloh předložit přímo. Jeho snahou je pomocí dílčích úvah žáky nasměrovat k řešení, na příkladech jednodušších poukázat na výhodnost některých úprav, mnohdy musí vyhledat úlohy obdobného charakteru, příp. rovnou přistoupit k vytvoření úlohy nové (nejlépe v rámci jistého gradovaného řetězce). Proto se také většina autorů matematických úloh rekrutuje z řad učitelů, kterým ve snaze rozšířit obzory žáků ve své podstatě nezbývá jiná možnost.

Předložená disertační práce tak může sloužit mj. i pedagogům na středních školách jako sbírka monotematicky zaměřených úloh v práci s matematicky nadanými žáky. Stejně tak může sloužit žákům pro samostudium, pro pochopení dané problematiky, dá jim možnost přistoupit k problémům z různých úhlů pohledu.

Kapitola 1

Invarianty a poloinvarianty

V této části disertační práce jsou postupně objasněny některé z nestandardních metod řešení matematických úloh, je ukázáno jejich využití při řešení typických úloh, přičemž je ke každé z úloh připojen příslušný didaktický komentář.

Každá úloha, s níž se řešitel seznámí, ho zpravidla podněcuje k systematizaci poznatků, které jsou na počátku zadány, a dále k hledání poznatků nových. Vzniklé teorie, z nichž některé jsou pro řešení úlohy přínosem a jiné nikoli, tak otevírají řešiteli cestu k hledaným výsledkům a k mnohdy i překvapivým závěrům.

Nalezení vhodné strategie řešení obtížnějších úloh bývá sice náročné, ale v mnoha případech není problémem tuto strategii relativně snadno objevit. Hledání takového vhodného postupu je ve své podstatě hledáním daného řešení úlohy. Pokud se s obdobnou úlohou řešitel nesetká již v dřívější době, bývá pro něj cesta k výsledku zahalena jistým tajemstvím. Chce-li se naučit efektivně hledat vhodná řešení, může toho docílit zejména studiem a řešením množství podobných příkladů.

Při pečlivé analýze daného problému (může se jednat i o nalezení vhodné vítězné strategie při některých typech her) je nutno snažení zaměřit na to, jak se dané veličiny mění. Je třeba klást si otázky typu:

- „Která z hodnot se nemění?“
- „Která vlastnost zůstává zachována?“
- „Která početní operace se nezmění, jestliže bude opakována daná transformace?“

V algoritmech často nejsou známy počáteční podmínky řešení, ale jsou známy jednotlivé kroky, jakými je možno získat další prvky posloupnosti při řešení úlohy. V takových případech je třeba zkoumat dále, zda je daná posloupnost konečná či nekonečná, jak vypadají všechny možné poslední členy konečné posloupnosti, zda získaná nekonečná posloupnost je konvergentní či zda je je tato posloupnost od jistého členu konstantní či periodická.

Odpovědi na tyto otázky tak v mnoha případech usnadňují cestu k nalezení správného řešení problému. Přestože je metoda invariantů ve své podstatě *heuristická* metoda, patří k těm nejlépe naučitelným, neboť je možno se jí částečně naučit soustavnou systematickou prací založenou na řešení jiných příkladů s obdobnou problematikou.

1.1 Invarianty

V některých úlohách školské matematiky je možno se setkat s příklady, jejichž řešení je založeno na využití tzv. metody invariantů a poloinvariantů. Nejprve bude vhodným způsobem zadefinován první z těchto dvou pojmů.

Definice 1

Invariantem rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování nějakého postupu nemění.

Poznámka. Z kriteria dělitelnosti číslem 9 plyne, že každé přirozené číslo dává při dělení číslem 9 stejný zbytek jako součet všech jeho číslic. Při určování zbytku součtu, součinu či mocnin celých čísel je proto možné pracovat pouze se zbytky, které získáme při dělení daných čísel číslem 9. Jestliže vytvoříme posloupnost čísel, kdy každé následující číslo bude rovno součtu číslic čísla předcházejícího, dostaneme od jistého členu posloupnost konstantní, jejíž členy budou rovny právě zmíněnému zbytku při dělení číslem 9. Tento zbytek je proto možno považovat za charakteristickou vlastnost daného čísla. Je proto invariantem dané transformace.

1.1.1 Invarianty kolem nás

Invarianty se vyskytují ve všech vědních oborech kolem nás, tedy nejen v matematice. Pod pojmem invariant lze chápat nejen hodnotu jisté početní operace, ale také zachování určitých specifických vlastností daného prvku nebo celého souboru hodnot.

Zde jsou uvedeny pro ilustraci některé z invariantů, se kterými se běžně můžeme nejen v matematice setkat.

- Je-li k celému číslu přičteno libovolné sudé číslo, nezmění se jeho parita, ze sudého čísla se opět stává číslo sudé, z lichého čísla číslo liché. Parita daného čísla je tedy invariantem dané početní operace. Zbytek při dělení číslem 2 je stále roven jedné pro počáteční číslo liché nebo nulový pro počáteční číslo sudé.

- Je-li ke každému členu dané aritmetické posloupnosti přičtena libovolná reálná konstanta, je výsledná posloupnost opět aritmetická, a to dokonce se stejnou diferencí. Invariantem může být jednak zachování faktu, že posloupnost bude opět aritmetická, tak i velikost diference těchto posloupností.

- Jsou-li všechny členy dané aritmetické posloupnosti vynásobny libovolnou reálnou konstantou, je nově získaná posloupnost opět aritmetická. V tomto případě je invariantem zachování základní vlastnosti aritmetické posloupnosti, a to, že (kromě prvního členu) je každý člen aritmetickým průměrem předcházejícího a následujícího členu posloupnosti.

- Jsou-li všechny členy dané geometrické posloupnosti vynásobeny libovolnou reálnou konstantou, je nově získaná posloupnost opět geometrická, a to dokonce se stejným kvocientem. Invariantem je jednak zachování faktu, že posloupnost bude opět geometrická, tak i velikost kvocientu těchto posloupností.

- Jsou-li všechny členy dané geometrické posloupnosti umocněny na libovolné nenulové reálné číslo, je nově získaná posloupnost opět geometrická. V tomto případě je invariantem zachování základní vlastnosti geometrické posloupnosti, a to, že (kromě prvního členu) je každý člen geometrickým průměrem předcházejícího a následujícího členu posloupnosti.

- Jsou-li délky všech stran daného trojúhelníku vynásobeny kladným reálným číslem, jsou nově získané délky opět délkami stran nějakého trojúhelníku. Invariantem je zde trojúhelníková nerovnost. Dalším invariantem je i velikost příslušných vnitřních úhlů trojúhelníku. O tom je možno snadno se přesvědčit např. z kosinové věty. Podobnost trojúhelníků je tedy jednou z invariantních transformací, s níž se žáci během svého studia mohou setkat.

- Z definice shodného zobrazení v rovině (resp. v prostoru) vyplývá, že při shodném zobrazení rovinných (resp. prostorových) útvarů jsou zachovány velikosti všech odpovídajících si stran i úhlů. Jsou to tedy invarianty daného zobrazení.

- Pro všechna reálná čísla c platí, že hodnota diskriminantu kvadratické funkce $y = (x-c)^2-1$ je rovna číslu 4. Jedná se o funkce, které vzniknou posunutím paraboly $y = x^2 - 1$ ve směru osy x (posunutí je jedním ze shodných zobrazení rovinných objektů). Invariantem je proto jednak hodnota diskriminantu a dále také fakt, že rozdíl kořenů kradratické rovnice je stále roven dvěma, neboť kořeny dané rovnice jsou čísla $c-1$ a $c+1$. To, že grafem je opět parabola, není snad ani třeba zdůrazňovat.

- Jsou-li ve statistickém souboru zvětšeny všechny hodnoty o reálnou kladnou konstantu c, zvětší se o tuto konstantu i hodnota aritmetického průměru. Vzhledem k definici některých charakteristik polohy či variability daného statistického souboru je v důsledku této transformace hodnota střední absolutní odchylky či rozptylu daného souboru dat stále stejná, je to tedy invariant.

- Nechť x_1 strojů vykoná celkovou práci za y_1 hodin a nechť stejnou práci zvládne x_2 strojů za y_2 hodin. Invariantem je v tomto případě součin xy počtu strojů a celkového času, tedy celková práce, kterou je nutno vykonat.

- Celková práce, kterou je potřeba vykonat k přemístění tělesa z energetické hladiny E_1 na energetickou hladinu E_2, je dána rozdílem $E_2 - E_1$ a nezávisí na trajektorii daného pohybu, daný rozdíl je tedy invariantem.

- Dalšími typickými případy invariantů ve fyzice či chemii jsou zákony zachování celkové energie, hmotnosti, hybnosti, momentu síly, momentu setrvačnosti, celkového elektrického náboje aj.

Při řešení konkrétních úloh je nejobtížnějším úkonem nalézt vhodný invariant, který řešiteli umožní danou úlohu vyřešit. Metoda invariantů patří k metodám, které zpravidla nevyžadují obsáhlý matematický aparát. Hledání invariantů je ve své podstatě experiment, v němž se řešitel snaží uplatnit potřebné znalosti a zkušenosti. Při řešení dané úlohy je nutno podrobně zkoumat, jakým způsobem na sobě jednotlivé veličiny závisí. V mnoha případech se stane, že invariant, který je objeven, k vyřešení daného problému nepomůže, jindy je možno nalézt vhodných invariantů hned několik.

1.1.2 Invarianty v příkladech

V následujících typových úlohách bude ukázáno konkrétní využití dané metody invariantů při řešení úloh. Mezi úlohami uvedenými v této práci je obsaženo množství úloh původních (autorových), některé z prezentovaných příkladů jsou vytvořeny na základě analogie s jinými, již dříve v literatuře prezentovanými úlohami, jsou však částečně pojaty jiným, zvláště pro žáky středních škol přijatelnějším způsobem. U úloh přejatých je uveden zdroj, odkud byla úloha čerpána, či soutěž, kde byla použita jako jedna ze soutěžních úloh.

Příklad 1 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři po sobě jdoucí přirozená čísla? □

Řešení. Ukážeme, že to možné není. Smažeme-li libovolná dvě čísla a nahradíme je jejich součtem, zůstane součet všech čísel na tabuli zachován. Tento součet je konstantní a je roven

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1 + 100) = 5\,050.$$

Předpokládejme, že na tabuli zůstanou jako poslední napsána tři po sobě jdoucí celá čísla. Označme je $c-1$, c a $c+1$. Jejich součet je však roven $3c$, tj. je to násobek čísla 3. Číslo 5 050 však násobkem čísla 3 není, proto tři po sobě jdoucí přirozená čísla získat nelze. ∎

Komentář k úloze

Při hledání vhodného invariantu je nutno vyjít především z informací, které jsou k dispozici na počátku řešení problému. Na základě daného postupu jsou nahrazována libovolná dvě čísla jejich součtem, ostatní čísla zůstávají stejná. Tím ale i součet zbylých čísel na tabuli zůstává zachován, proto je celkový součet čísel stále stejný, je tedy invariantem.

Má-li být na konci celého procesu získána trojice po sobě jdoucích přirozených čísel, je nutno nejprve prozkoumat, jakou vlastnost taková trojice musí splňovat. Z faktu, že se jedná o trojici čísel, která pravidelně mění svou paritu, je možno velmi snadno vyloučit situaci, kdy je daná trojice čísel ve tvaru sudé, liché a sudé číslo. V takovém případě je součet těchto tří čísel roven lichému číslu, počáteční součet je však 5 050, tj. číslo sudé. Z trojice liché, sudé a liché číslo však obdobný závěr nelze vyčíst.

Na řadu tak přichází zkoumání vlastností součtu tří po sobě jdoucích čísel, a to konkrétně poznatek, že takový součet je trojnásobkem čísla prostředního. V případě čísla 5 050 však taková vlastnost splněna není.

Poznámka. K vyřešení této úlohy bylo využito faktu, že součet všech čísel zapsaných na tabuli zůstává nezměněn. Tento součet je tudíž invariantem dané operace. Současně je invariantem i zbytek, který získáme při dělení daného součtu číslem 3.

Příklad 2 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 1 234. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli absolutní hodnotu jejich rozdílu. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli číslo 2? □

Řešení. Ukážeme, že ani v tomto případě to možné není. Smažeme-li libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a nahradíme je jejich rozdílem (přesněji řečeno absolutní hodnotou jejich rozdílu), zůstane zachována parita součtu všech čísel na tabuli. Jestliže smažeme dvě lichá čísla, nahradíme je číslem sudým, smažeme-li dvě sudá čísla, opět je nahradíme číslem sudým. Při smazání sudého a lichého čísla zapíšeme na tabuli číslo liché.

Ve všech třech případech se ale nezmění parita součtu všech čísel zapsaných na tabuli. Součet všech čísel zapsaných na tabuli je roven

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1\,234 = \frac{1}{2} \cdot 1\,234 \cdot (1 + 1\,234) = 761\,995.$$

Tento součet je lichý, proto také poslední číslo zapsané na tabuli musí být liché. Číslo 2 však tuto vlastnost nesplňuje. Není tedy možné, aby posledním číslem napsaným na tabuli bylo číslo 2. ■

Komentář k úloze

Při hledání vhodného invariantu je opět nutno vyjít z informací daných na počátku. Nahrazována jsou libovolná dvě čísla absolutní hodnotou jejich rozdílu. Celkový součet obou smazaných čísel není větší než nově zapisované číslo. Nezáporná čísla a a b (bez újmy na obecnosti nechť platí $a \geq b \geq 0$) jsou nahrazena jejich rozdílem $a - b$ (je to opět číslo nezáporné). Tím ale součet poklesne o hodnotu

$$a + b - (a - b) = 2b.$$

Součet všech čísel zapsaných na tabuli tedy konstantní není (není to proto invariant), v případě dvojice nenulovách čísel a a b se tento součet zmenší. Hodnota, o kterou se součet zmenší je však číslo sudé. Parita celkového součtu všech čísel zapsaných na tabuli se tak nemění. Tato vlastnost už invariantem je. Vzhledem k počátečnímu lichému součtu tak není možné odčítáním sudých čísel získat sudé číslo jako výsledek takové transformace.

Poznámka. K vyřešení této úlohy bylo využito faktu, že rozdílem dvou sudých nebo dvou lichých čísel je číslo sudé, ale rozdílem čísel s různou paritou je číslo liché. Počet lichých čísel zapsaných na tabuli je buď neustále lichý nebo neustále sudý. Invariantem je tedy zbytek, který dostaneme při dělení součtu všech čísel zapsaných na tabuli číslem 2. Současně se snadno vidí, že počet lichých čísel zapsaných na tabuli je poloinvariantem, neboť se při dané operaci tento počet nezvyšuje. Poloinvariantem je také možno chápat celkový součet čísel zapsaných v daný okamžik na tabuli, neboť ani ten se v průběhu nahrazování čísel nezvětšuje. (Pojem poloinvariantu je vhodným způsobem zadefinován a jeho využití pro řešení problémů bude ukázáno na několika příkladech v následující kapitole.)

Příklad 3 (viz např. [20], [30])

Nechť je $ABCDEF$ šestiúhelník. U vrcholů A a C je napsáno číslo 1 a u všech ostatních vrcholů je napsáno číslo 0. Filip si může zvolit libovolné dva sousední vrholy (tj. vrcholy odpovídající jedné ze stran šestiúhelníku) a k oběma číslům přičíst číslo 1. Poté si může zvolit libovolně jinou stranu šestiúhelníku a danou operaci zopakovat znovu, tj. opět si zvolí dva vrcholy a daná čísla zvýší o 1. Je možné, aby Filip po několika takových operacích získal u všech šesti vrcholů stejné číslo? □

Řešení. Označme a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n čísla u jednotlivých vrcholů šestiúhelníku po n-tém Filipově tahu. Počáteční podmínky dané transformace jsou $a_0 = c_0 = 1$ a $b_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$. Uvažujme pro dané n číslo

$$S_n = a_n - b_n + c_n - d_n + e_n - f_n.$$

Na počátku je hodnota S_0 daného výrazu rovna

$$S_0 = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 - f_0 = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2.$$

Ať si zvolí Filip sousední dva vrcholy libovolně, hodnota výsledného výrazu S_n se nezmění a hodnota tohoto výrazu je proto invariantem.

Kdybychom však po několikerém opakování operace dané operace dostali stejná čísla, pak by hodnota výrazu $S_n = 0$. To však vzhledem k danému invariantu není možné. ■

Komentář k úloze

Při hledání invariantu je možno v tomto případě se opřít především o již dříve nabyté zkušenosti a schopnost vypozorovat dané zákonitosti transformace. Je-li přičteno k číslům u dvojice sousedních vrcholů číslo 1, zvětší se celkový součet čísel u vrcholů A, C a E o hodnotu 1 a stejně tak se i celkový součet čísel u vrcholů B, D a F zvýší o hodnotu 1. Rozdíl daných dvou součtů vyjadřuje výše zmíněná hodnota S_n. Vzhledem k tomu, že na počátku je hodnota výrazu rovna číslu 2, není možné přejít k šestici čísel, pro které by výsledný zápis byl vzhledem k rovnosti všech šesti čísel nulový.

Poznámka. Invariant použitý k řešení úlohy samozřejmě není jediným invariantem. Ze všech možných invariantů je však tím invariantem, který vede nejefektivněji k vyřešení dané úlohy.

Další úlohy využívající metodu invariantů (v některých případech i v kombinaci s dalšími vhodnými metodami řešení) jsou součástí jedné z následujících samostatných kapitol práce. U většiny těchto úloh bude proveden pouze nástin řešení, bez příslušného podrobnějšího komentáře k úloze, jak tomu je v úlohách již řešených v úvodních částech.

1.2 Poloinvarianty

Některé transformace charakterizující chování dílčích veličin v příkladech nezachovávají žádnou z vhodných veličin konstantní. Velký význam mají takové veličiny, které způsobují změny zkoumaných veličin pouze v jednom směru, tj. daná veličina se v průběhu transformace nezvětšuje či naopak nezmenšuje. Takovou metodu využitelnou při řešení úloh je možno nazývat metodou poloinvariantů.

Při pečlivé analýze daného problému (i zde se může jednat také o nalezení vhodné vítězné strategie při některých typech her) je nutné se zaměřit na to, jakým způsobem se dané veličiny mění. Je třeba klást si otázky typu:

- „Která z hodnot se nezmenšuje (nezvětšuje)?“
- „U které z veličin dochází k poklesu (k nárůstu) hodnoty?“

Metoda poloinvariantů je vhodným nástrojem zejména pro řešení úloh důkazových, kdy je potřeba ukázat, že daným zvoleným postupem je možno se k řešení dopracovat, či naopak, že daným postupem nikdy dané výsledné hodnoty nelze dosáhnout. Pojem poloinvariantu opět nejprve vhodným způsobem zadefinován.

Definice 2

Poloinvariantem rozumíme měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování určitého postupu nezvětšuje, resp. nezmenšuje.

Poznámka. Eukleidův algoritmus hledání největšího společného dělitele dvou přirozených čísel spočívá v postupném dělení těchto čísel a práci se zbytkem při dělení. Předchozí dělitel se stává novým dělencem, zbytek pak novým dělitelem. Poslední nenulový zbytek je potom největším společným dělitelem původního dělence a dělitele. Zbytek při dělení je vždy menší než dělitel, proto posloupnost postupných zbytků je klesající. Zbytek při Eukleidově algoritmu je tedy poloinvariantem dané početní operace.

1.2.1 Poloinvarianty kolem nás

Stejně jako invarianty, tak i poloinvarianty se vyskytují ve většině vědních oborů, nejen v matematice. Uveďme pro ilustraci některé z nich:

- Bude-li několik bankovek nižší hodnoty vyměněno za odpovídající počet bankovek s hodnotou vyšší (přičemž výsledný finanční obnos zůstane stále stejný), bude dosažený počet bankovek vždy menší počet bankovek než v předchozím kroku, daný počet je tedy poloinvariantem. Navíc je tento počet vyjádřen přirozeným číslem, je tedy logické, že po určitém počtu transakcí je nutno dojít do situace, kdy nelze ve vyměňování pokračovat, a to bez ohledu na to, jaké bankovky byly na počátku k dispozici.

- Bude-li jmenovatel i čitatel daného zlomku většího než 1 zvětšován o stejné kladné reálné číslo, bude hodnota nového zlomku opět číslo větší než 1, tato vlastnost (být větší než 1) je tedy invariantem. (Pochopitelně je invariantem také rozdíl jmenovatele a čitatele daného zlomku.) Při opakování takto popsané operace jsou získány zlomky, jejichž hodnota se postupně zmenšuje. Hodnota zlomku je proto poloinvariantem. Důsledkem zmíněného invariantu a poloinvariatu je samozřejmě fakt, že daná posloupnost zlomků má limitu (posloupnost je klesající a zdola omezená).

- Pro každou rostoucí geometrickou posloupnost platí, že diference sousedních dvou členů je menší než diference následujících sousedních dvou členů. Je proto tuto diferenci možno chápat jako poloinvariant. Obdobně u klesající geometrické posloupnosti tvoří diference sousedních dvou členů klesající posloupnost, i v tomto případě lze hovořit o poloinvariantu. Invariantem je např. zachování faktu, že posloupnost diferencí je geometrická se stejným kvocientem jako příslušná daná (rostoucí či klesající) geometrická posloupnost.

- Množství radioaktivního prvku obsaženého v daném množství látky se postupně snižuje v závislosti na čase a na celkovém počtu radioaktivních částic v látce. Proto je toto množsví poloinvariantem. Podíl počtu radioaktivních částic přeměněných za určitou jednotku času a množství částic na počátku tohoto časového intervalu zůstává naproti tomu konstantní, a je proto invariantem.

Mezi nejčastěji se vyskytující invarianty a poloinvarianty užité při řešení matematických problémů je možno zařadit následující součty, resp. součiny několika členů dané posloupnosti (viz např. [18], [27], [29], aj.):

- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$
- $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$
- $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + 4 \cdot a_4 + \ldots + n \cdot a_n$
- $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2$
- $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n$
- $a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \ldots a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_1$

Žádný univerzální invariant a poloinvariant využitelný pro řešení problémových úloh však neexistuje. Stejně tak neexistuje ani univerzální postup, na jehož základě je možno úlohu vyřešit. Hledání invariantů a poloinvariantů při řešení konkrétních úloh vychází převážně z podrobné analýzy problému a sledování změn všech či pouze některých jednotlivých dílčích veličin.

1.2.2 Poloinvarianty v příkladech

V několika následujících úlohách bude ukázáno konkrétní využití dané metody poloinvariantů pro nalezení řešení daného problému.

Příklad 4 (viz např. [8])

Uvnitř v klobouku je 15 bílých a 18 černých kuliček. Náhodně z klobouku vybereme dvě kuličky. Jsou-li různé barvy, vhodíme nazpět bílou kuličku. Jsou-li stejné barvy, hodíme místo nich do klobouku černou kuličku z předem připravené krabičky, v níž máme dostatečný počet černých kuliček. Postup opakujeme tak dlouho, dokud v klobouku nezůstane jediná kulička. Jakou bude mít barvu? □

Řešení. Pokud vytáhneme dvě kuličky různé barvy, tj. jednu bílou a jednu černou, vracíme zpět do klobouku bílou kuličku, proto se počet bílých kuliček nemění, stejně tak jako v případě vytažení dvou černých kuliček. Vytáhneme-li však dvě kuličky bílé, nahradíme je kuličkou černou, počet bílých kuliček se tedy zmenší o 2. Vidíme tedy, že počet bílých kuliček zůstane při každém vytažení liché číslo. Na konci tedy musí v klobouku zůstat 1 bílá kulička, protože invariantem je v tomto případě parita počtu bílých kuliček.

Počty bílých kuliček během celého postupu tvoří nerostoucí posloupnost lichých čísel. Vzhledem k tomu, že počet kuliček v klobouku tvoří klesající posloupnost s limitou rovnou jedné a počet bílých kuliček je menší nebo roven než počet všech kuliček, musí být nutně limitou posloupnosti počtu bílých kuliček také číslo jedna. Počet bílých kuliček je proto poloinvariantem daného postupu. ■

Komentář k úloze

Při hledání vhodného invariantu a poloinvariantu je opět nutno vyjít z daného postupu. Při vytažení kuliček odlišné barvy se celkový počet bílých kuliček nemění, počet černých kuliček se zmenšuje o jednu. Při vytažení dvou černých kuliček je jedna z nich vrácena nazpět do klobouku. Počet bílých se tedy nemění a počet černých klesne o jednu. Při vytažení dvou bílých kuliček však narůstá počet černých o jednu, zatímco bílých je o dvě méně.

Počet bílých kuliček během celého procesu nevzrůstá, je ho proto možné považovat za poloinvariant. Počet černých kuliček se v každém kroku mění o jednu, ne však jedním směrem. Nelze jej využít jako poloinvariant.

Pokud bychom chtěli řešení založit na zkoumání počtu černých kuliček, museli bychom využít faktu, že v každém kroku mění počet černých kuliček svou paritu, takže po 32 krocích musí tento počet být opět sudý. V tomto případě ale zbývá v klobouku jediná kulička, a ta musí být nutně bílá.

Poznámka. Jak je z předchozího komentáře patrné, k vyřešení úlohy lze dojít více způsoby. Optimálním řešením je kombinace poznatků o invariantu (tím je parita počtu bílých kuliček) a poloinvariantu (poznatek, že počet bílých kuliček tvoří nerostoucí posloupnost).

Příklad 5 (viz např. [17])

Ve třídě má každý z žáků nejvýše 3 nepřátele (vztah nepřátelství je symetrický, je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A). Rozhodněte, zda lze rozdělit všechny žáky této třídy do dvou skupin tak, že v každé skupině nebude mít nikdo z nich více než jednoho nepřítele. □

Řešení. Rozdělme žáky libovolně na dvě skupiny. Jestliže ani v jedné skupině není nikdo společně se dvěma a více nepřáteli, jsme hotovi. V opačném případě vybereme takového žáka, který je ve skupině s více než jedním nepřítelem a přemístíme ho do skupiny druhé. Budeme-li tento postup opakovat, docílíme po konečném kroků rozdělení, které již odpovídá daným podmínkám.

Stanovme nejprve počet nepřátelských dvojic v jednotlivých skupinách. Přemístíme-li žáka z první skupiny do druhé, poklesne počet nepřátelských dvojic v této skupině minimálně o 2. Naopak ve druhé skupině vznikne maximálně jedna nepřátelská dvojice navíc. Celkově se proto počet nepřátelských dvojic zmenší.

Vzhledem k tomu, že tento počet nemůže klesat do nekonečna, musíme po konečném počtu kroků docílit uspořádání, kdy v žádné skupině není žák s více než jedním nepřítelem. ■

Komentář k úloze

Danou úlohu je možno řadit mezi náročnější, protože k jejímu vyřešení je třeba objasnit princip rozdělování a přemísťování obecného počtu žáků. Jediný poznatek, z nějž je možno vyjít, se opírá o fakt, že nemohou být dva a více nepřátel ve skupině s daným žákem. Připustí-li se, že taková situace může nastat, je nutno popsat způsob, jak žáky přemístit do skupin vyhovujícím způsobem.

Poloinvariantem je proto počet nepřátelských dvojic. Při každém přeskupení dochází ke zmenšení počtu takových dvojic. Tento počet tak tvoří klesající posloupnost celých nezáporných čísel.

Poznámka. Rozdělení žáků do dvou skupin není samozřejmě jednoznačné, takových vyhovujících rozdělení může být více. Ve všech případech jsou ale podmínky zadání vždy splněny. Výsledný počet všech nepřátelských dvojic tak může být (v závislosti na výběru daného přemísťovaného žáka) různý.

Příklad 6 (autor Radek Horenský)

Jsou dány číselné posloupnosti (a_n) a (b_n), které vyhovují následujícím (smíšeným) předpisům

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

pro všechna přirozená n, kde $a_1 = 2\,009$ a $b_1 = 1$. Dokažte, že obě posloupnosti mají tutéž limitu, a určete ji. □

Řešení. K vyřešení úlohy nám poslouží nalezení vhodného invariantu a poloinvariantu. Snadno se vidí, že součin odpovídajících členů obou posloupností zůstává konstantní, protože

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n$$

a platí tedy

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \ldots = a_1b_1 = 2\,009.$$

Ze zadání je patrné, že všechny členy obou posloupností jsou kladná reálná čísla. Zkoumáme-li rozdíl odpovídajících členů těchto posloupností, dostaneme po úpravách

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}.$$

Tento rozdíl je tedy stále nezáporný, tj. pro všechna přirozená n platí $a_n \geq b_n$. (Daný vztah vyjadřuje nerovnost mezi aritmetickým a harmonickým průměrem pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel.)

Pro všechna přirozená čísla n proto také platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{2}{\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{a_n}} \geq \frac{2}{\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{b_n}} = b_n.$$

Posloupnost (a_n) je tedy nerostoucí a současně zdola omezená (každou z hodnot b_i, např. b_1) a posloupnost (b_n) je neklesající a současně shora omezená (každou z hodnot a_i, např. a_1). Obě posloupnosti proto mají vlastní (konečné) limity a a b.

Pro všechna kladná reálná čísla a_n a b_n platí

$$\frac{(a_n - b_n)}{(a_n + b_n)} < 1,$$

tudíž

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)}{(a_n + b_n)} \cdot \frac{(a_n - b_n)}{2} < \frac{(a_n - b_n)}{2},$$

tj.

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{(a_1 - b_1)}{2^n} = \frac{2\,008}{2^n}.$$

Výraz na pravé straně posledního vztahu se s rostoucím n blíží k nule, proto se také rozdíl

$$a_{n+1} - b_{n+1}$$

bude blížit k nule, tj. pro limity a, b obou posloupností platí $a = b$. Tuto (společnou) limitu snadno určíme ze vztahu

$$ab = a_1 b_1 = 2\,009,$$

tj.

$$a = b = \sqrt{2\,009}. \qquad \blacksquare$$

Komentář k úloze

Nalezení patřičných invariantů a poloinvariantů je v tomto případě už úkolem podstatně náročnějším. Invariant spočívající v součinu odpovídajících si členů posloupností lze vypozorovat z několika prvních členů daných posloupností. Zobecnění je následně provedeno na základě obecného výpočtu součinu příslušných členů.

Při zkoumání chování posloupností je možno zjistit, že posloupnost (a_n) je klesající a posloupnost (b_n) naopak rostoucí. Vzhledem k tomu, že členy obou posloupností na sobě závisí, nelze o limitách posloupností jednoznačně rozhodnout. Zkoumáním rozdílu příslušných členů je však ukázat, že právě daný rozdíl je vhodným poloinvariantem umožňujícím nalezení hledané společné limity obou posloupností.

Využitím některých vlastností monotónních posloupností je tak možno ukázat, že hodnota rozdílu odpovídajících si členů tvoří klesající posloupnost s limitou rovnou nule. Proto je také limita obou posloupností zadaných stejná.

Následně ze znalosti invariantu nalezeného v první části řešení (součin odpovídajících si členů posloupností) výsledné limity je už velmi snando číselně vyjádřit.

1.3 Fermatova metoda nekonečného klesání

Jednou z dílčích metod, která je založena na využití poznatků o poloinvariantech, je metoda tzv. nekonečného klesání, v literatuře je označována jako Fermatova metoda nekonečného klesání (v české literatuře ji můžeme nalézt také pod jinými názvy, nejčastěji jako metoda zmenšování ad absurdum nebo metoda nekonečného sestupu).

Jedná se o velmi efektivní metodu vhodnou pro řešení speciálních typů matematických úloh. Metoda nekonečného klesání je využívána především v existenčních (resp. neexistenčních) důkazových úlohách, zejména pak při řešení diofantických rovnic.

Metoda nekonečného klesání bývá v anglosaské literatuře nejčastěji nazývána Fermat's Method of Infinite Descent (FMID), neboť ji pravděpodobně jako první podrobně popsal francouzský matematik Fermat[1], který je znám díky svým významným výsledkům v mnoha oblastech matematiky.

Základní principy využití této metody lze z matematického hlediska popsat např. následujícím způsobem, viz např. [3].

Definice 3

Nechť k je nezáporné celé číslo. Předpokládejme, že následující tvrzení je pravdivé.

- Vždy, když je tvrzení $V(m)$ pravdivé pro nějaké celé číslo $m > k$, potom existuje nějaké menší celé číslo j, kde $m > j > k$, pro které je tvrzení $V(j)$ také pravdivé.

Pak tvrzení $V(n)$ je nepravdivé pro všechna celá čísla $n > k$.

[1] *Pierre de Fermat* (1601 - 1665), francouzský matematik, působil jako právník parlamentu v Toulouse, později jako soudce hrdelního soudu, matematice se věnoval pouze jako svému koníčku.

Platí tedy, že pokud by pro nějaké přirozené číslo n bylo tvrzení $V(n)$ pravdivé, bylo by možno sestrojit klesající nekonečnou posloupnost celých nezáporných čísel

$$n > n_1 > n_2 > \dots ,$$

která jsou vesměs všechna větší než dané celé číslo k. Takovou posloupnost však není možné s ohledem na základní vlastnosti uspořádání množiny celých nezáporných čísel sestrojit.

Fermatovu metodu nekonečného klesání lze tedy popsat v jednodušším tvaru, viz např. [3].

Definice 3a

Neexistuje nekonečná klesající posloupnost celých nezáporných čísel, tj. neexistují celá nezáporná čísla n_1, n_2, n_3, …, pro něž platí

$$n_1 > n_2 > n_3 > \dots$$

Jiným vyjádřením Fermatovy metody nekonečného klesání (tj. neexistence nekonečné klesající posloupnosti celých nezáporných čísel) je skutečnost, že každá nekonečná nerostoucí posloupnost nezáporných celých čísel je od jistého členu konstantní, viz např. [3].

Definice 3b

Jestliže nekonečná posloupnost celých nezáporných čísel (n_i) splňuje nerovnosti

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots ,$$

pak existuje přirozené číslo k takové, že

$$n_k = n_{k+1} = n_{k+2} = \dots$$

Vytvoříme-li nerostoucí posloupnost celých nezáporných čísel, pak tato posloupnost musí být od jistého členu konstantní. Daná posloupnost je podposloupností množiny všech celých nezáporných čísel, která je však zdola omezená. Proto i daná podposloupnost musí mít (vzhledem k podmínce nerostoucí posloupnosti) svůj nejmenší prvek.

Princip existence či neexistence nejmenšího prvku v dané množině nerostoucích nezáporných čísel (už ne nutně celých) je podstatou mnoha dalších matematických metod řešení, jako např. metoda nejmenšího (extremálního) prvku nebo metoda pevného bodu.

1.3.1 Užití Fermatovy metody nekonečného klesání

Fermatovu metodu nekonečného klesání je možné vhodným způsobem aplikovat například při řešení některých typů diofantických rovnic. Mezi typické úlohy založené na tomto poznatku lze zařadit např. následující příklady.

Příklad 7 (viz např. [3])

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

□

Řešení. Ukážeme, že jediným řešením dané rovnice je uspořádaná trojice $(0, 0, 0)$, která očividně danou rovnici splňuje. Předpokládejme, že existuje nějaké nenulové řešení (x, y, z) dané rovnice.[2]

Z dané rovnice vyjádříme

$$x^3 = 4z^3 - 2y^3.$$

Protože pravá strana rovnice je číslo sudé, je sudé i x^3. Pak je i číslo x sudé, a tedy $x = 2x_1$. Po dosazení zpět do rovnice a následném krácení celé rovnice číslem 2 získáme

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3.$$

[2] *Nenulovým* řešením rozumíme uspořádanou trojici čísel, kde alespoň jedno z čísel je různé od nuly.

Z obdobných důvodů je sudé také číslo y, a platí tedy $y = 2y_1$. Po opětovném dosazení a krácení rovnice číslem 2 dostaneme

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3.$$

Sudé je proto i zbývající číslo z, tj. $z = 2z_1$. Po dosazení získáme rovnici

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3.$$

Je-li uspořádaná trojice (x, y, z) nenulovým řešením původní rovnice, pak je řešením také uspořádaná trojice čísel

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right).$$

Získáváme tak posloupnost nezáporných nenulových řešení

$$(x, y, z), \quad \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right), \quad \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right), \quad \ldots$$

To je ale v rozporu s Fermatovou metodou nekonečného klesání. Jediným řešením úlohy je proto trojice $(0, 0, 0)$. ■

Komentář k úloze

Má-li mít daná rovnice nenulové celočíselné řešení, pak z podmínek dělitelnosti plyne, že všechna tři čísla musejí být sudá. V tom případě ke každému takovému řešení nalezneme trojici čísel menších, která ze stejných důvodů musí být opět sudá.

V takovém případě musí existovat klesající posloupnost sudých přirozených čísel. To ale samozřejmě není možné.

Poznámka. Při řešení úlohy jsme rozlišili dva případy, triviální nulové řešení úlohy a ostatní nenulová řešení. Pokud bychom triviální řešení neuvažovali hned na počátku, lze k němu dojít i podrobnou analýzou získané posloupnosti uspořádaných trojic. Má-li mít rovnice v oboru nezáporných celých čísel řešení, musí být posloupnost trojic od jistého členu konstantní, tj. musí platit

$$x_i = \frac{1}{2}x_i, \quad y_i = \frac{1}{2}y_i, \quad z_i = \frac{1}{2}z_i.$$

Řešením dané soustavy rovnic je však jediná trojice čísel, a to $(0, 0, 0)$.

Příklad 8 (viz např. [3])

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 4^z.$$

□

Řešení. Dokážeme, že tato diofantická rovnice nemá řešení v oboru přirozených čísel. K důkazu použijeme metodu nekonečného klesání.

Předpokládejme, že uspořádaná trojice přirozených čísel (x_1, y_1, z_1) je řešením rovnice

$$x^2 + y^2 = 4^z.$$

Platí tedy

$$x_1^2 + y_1^2 = 4^{z_1}.$$

Zcela jistě platí, že $z_1 \geq 2$, protože rovnice $x_1^2 + y_1^2 = 4$ není v oboru přirozených čísel řešitelná.

Dále je ze zadání patrné, že na pravé straně rovnice je výraz, který je dělitelný číslem 4. Levá strana je rovna součtu druhých mocnin přirozených čísel. Každá druhá mocnina sudého přirozeného čísla dává při dělení číslem 4 zbytek 0, každá druhá mocnina lichého přirozeného čísla dává při dělení číslem 4 zbytek 1.

Má-li být součet druhých mocnin přirozených čísel dělitelný číslem 4, musí být současně obě čísla x_1 a z_1 sudá, tj. $x_1 = 2x_2$, $z_1 = 2z_2$.

Po dosazení do dané rovnice tak dostáváme

$$(2x_2)^2 + (2y_2)^2 = 4^{z_1}.$$

Po umocnění a vydělením celé rovnice číslem 4 získáme po snadné úpravě rovnici novou, a to

$$x_2^2 + y_2^2 = 4^{z_1 - 1}.$$

Je tedy zřejmé, že uspořádaná trojice přirozených čísel $(x_2, y_2, z_1 - 1)$ je také řešením rovnice

$$x^2 + y^2 = 4^z.$$

Přitom však platí $x_2 < x_1$, $y_2 < y_1$ a $z_1 - 1 < z_1$. Ke každému řešení jsme tedy schopni nalézt řešení další, jehož všechny tři složky jsou vyjádřeny menšími přirozenými čísly než u počátečního řešení.

Podle Fermatovy metody nekonečného klesání však není možno sestrojit nekonečné klesající posloupnosti přirozených čísel, proto daná diofantická rovnice nemá v oboru přirozených čísel řešení. ■

Komentář k úloze

Tato úloha nevyžaduje ze strany řešitele žádné nadstandardní znalosti. Jediným obtížnějším místem myšlenkového postupu je moment, kdy si řešitel musí uvědomit, že druhá mocnina sudého přirozeného čísla

$$(2k)^2 = 4k^2$$

je násobkem čísla 4 a druhá mocnina lichého přirozeného čísla

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

dává při dělení číslem 4 zbytek 1.

Elementárními úpravami ukážeme, že ke každému řešení existuje další řešení, jehož složky jsou vyjádřeny menšími přirozenými čísly. To je však v rozporu s FMID.

Vzhledem k tomu, že mezi odpovídajícími složkami uspořádaných trojic platí ostrá nerovnost, nemůže mít daná úloha ani řešení triviální.

Metodu nekonečného klesání lze použít také pro důkaz iracionality některých odmocnin. Nejtypičtější školskou úlohou pro důkaz sporem je následující úloha. (Řešení zde však bude založeno na principu FMID.)

Příklad 9

Dokažte, že neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by se rovnala číslu 2. □

Řešení. Předpokládejme, že uvedené tvrzení neplatí, tj. že existuje aspoň jedna uspořádaná dvojice (x, y) přirozených čísel, kde

$$\sqrt{2} = \frac{x}{y},$$

která je řešením rovnice

$$x^2 = 2y^2.$$

Takovouto uspořádanou dvojici (x, y) lze považovat za prvek množiny všech řešení dané rovnice. Vzhledem k tomu, že dle předpokladu je taková množina neprázdná, můžeme uvažovat minimální řešení dané rovnice ve tvaru (x_1, y_1), kde x_1 a y_1 označují nejmenší možné hodnoty neznámých x a y splňující danou rovnici.

Máme tedy

$$x_1^2 = 2y_1^2.$$

Výraz na pravé straně rovnice je roven sudému číslu, proto také x_1^2 je sudé, a tedy i x_1 je sudé číslo. Platí proto

$$x_1 = 2x_2.$$

Po dosazení a jednoduché úpravě získáváme

$$2x_2^2 = y_1^2.$$

Nyní je výraz na levé straně rovnice roven sudému číslu, proto také y_1^2 je sudé, a tedy i y_1 je sudé číslo. Platí proto

$$y_1 = 2y_2.$$

Po opětovném dosazení a následném zkrácení obou stran rovnice číslem 2 získáváme

$$x_2^2 = 2y_2^2.$$

Odtud plyne, že také uspořádaná dvojice (x_2, y_2) je řešením původní rovnice. Stejně tak je možné k tomuto řešení získat další řešení, jehož složky jsou opět poloviční.

To je však v rozporu s předpokladem, že se jedná o minimální řešení dané rovnice. Dle FMID není možné vytvořit nekonečné posloupnosti přirozených čísel

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots ,$$

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots ,$$

daná rovnice tedy nemůže mít řešení v oboru přirozených čísel. Číslo $\sqrt{2}$ je tudíž iracionální číslo. ■

Příklad 10 (autor Radek Horenský)

Námořník Max má v každém přístavu jednu ženu. Poté, co už byl dlouho na jednom místě, opustil Marii a vydal se na své bárce do přístavu, který byl od daného přístavu nejvíce vzdálený. Na moři strávil šest dní, celou neděli pak strávil u dané ženy. V pondělí ráno opět vyplul na moře a zamířil znovu do aktuálně nejvzdálenějšího přístavu. Na moři strávil opět šest dní, atd. Marie se trápí samotou. Poraďte Marii, jak dlouho má na Maxe čekat.

Poznámka. Žádné dva přístavy nejsou od sebe stejně vzdálené (vždy existuje jen jediný přístav, který je nejvzdálenější). □

Řešení. Ukážeme, že námořník Max se při svém putování mořem dostane zpět do přístavu za dva týdny nebo se už do původního přístavu vrátit nemůže.

Posloupnost vzdáleností, které Max urazí během své plavby po moři, tvoří neklesající posloupnost. Vzhledem k tomu, že je pouze konečný počet přístavů a tím i konečný počet vzdáleností mezi jednotlivými přístavy, bude tato posloupnost z počátku rostoucí a od jistého členu bude konstantní. Navštíví-li nějaký přístav podruhé, bude opět odjíždět do přístavu nejvzdálenějšího.

Nejvzdálenějším přístavem je však ten přístav, do kterého odjel poprvé, proto vzhledem k neklesající posloupnosti vzdáleností je to současně i přístav, ze kterého se již vrátil. Od tohoto okamžiku už může loď plout pouze mezi těmito dvěma přístavy. ■

Komentář k úloze

Porovnáním vzdáleností, které Max během své plavby po moři urazí mezi jednotlivými městy, zjistíme, že vzdálenosti jednotlivých úseků postupně narůstají. Pouze v případě, kdy dva přístavy tvoří dvojici od sebe nejvzdálenějších přístavů, je vzdálenost po sobě jdoucích úseků stejná.

Mohou tedy nastat pouze dvě možnosti pohybu. První možností je přesun do přístavu, kde loď ještě nebyla (pokud by byla, další vzdálenost by byla stejná jako jedna z předešlých). Druhou možností je dvojice od sebe nejvzdálenějších přístavů.

Poznámka. Výsledná dvojice přístavů, mezi kterými se pohybuje loď tam a zase zpět, nemusí být nutně dvojicí přístavů s maximální možnou vzdáleností. Do těchto přístavů se námořník Max při své plavbě v takovém případě vůbec nedostane.

V literatuře jsou popsány i jiné metody směřující k vyřešení úlohy. Jedna z metod, která je ekvivalentní metodě nekonečného klesání, se nazývá metoda extremálního prvku. Rozlišujeme dva případy, a to metodu minimálního prvku a metodu maximálního prvku.

Principem metody minimálního prvku je skutečnost, že k předpokládanému nejmenšímu prvku nalezneme prvek ještě menší, který splňuje dané podmínky úlohy. To ale vzhledem k minimálnosti daného prvku není možné. Ke stejnému závěru jsme dospěli i na základě Fermatovy metody nekonečného klesání.

Obdobou metody nejmenšího prvku je také metoda největšího prvku, kdy ukážeme, že vzhledem k maximálnosti daného prvku nelze získat prvek ještě větší, který splňuje dané podmínky úlohy.

Metoda nekonečného klesání je jedním z důležitých mechanismů při důkazech existence či neexistence objektů s danou vlastností. V součinnosti s metodami invariantů a poloinvariantů je možno vyřešit i příklady náročnější. Jedním z takových je následující úloha.

Příklad 11 (autor Radek Horenský)

Je dáno přirozené číslo $t \geq 2$ a posloupnosti (x_n) a (y_n) zadané rekurentními předpisy

$$x_{n+2} = 2tx_{n+1} - x_n, \quad \text{kde} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2t - 1,$$
$$y_{n+2} = 2ty_{n+1} - y_n, \quad \text{kde} \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2t + 1.$$

a) Najděte nenulová celá čísla α, β, γ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha x_n^2 + \beta y_n^2 = \gamma$.

b) Předpokládejme, že u a v jsou přirozená čísla taková, že vyhovují předpisu $\alpha u^2 + \beta v^2 = \gamma$, kde α, β a γ jsou hodnoty z předchozí části. Ukažte, že existuje přirozené číslo k takové, že $u = x_k$ a $v = y_k$. $\square$

Řešení. Pro řešení dané úlohy, která je ve své podstatě ve tvaru ekvivalence, provedeme důkaz postupně v obou směrech implikace.

a) Ukažme nejprve, že existují přirozená čísla a, b, c, d splňující pro všechna $n \in \mathbb{N}$ smíšené rekurentní předpisy

$$x_{n+1} = ax_n + by_n,$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n.$$

Dostáváme tak vyjádření

$$\begin{aligned} x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1} &= ax_{n+1} + bcx_n + bdy_n = \\ &= ax_{n+1} + bcx_n + bdy_n + adx_n - adx_n = \\ &= ax_{n+1} + bcx_n + dx_{n+1} - adx_n = \\ &= (a + d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n. \end{aligned}$$

Analogicky se lze přesvědčit, že platí rovněž

$$\begin{aligned} y_{n+2} = cx_{n+1} + dy_{n+1} &= cax_n + cby_n + dy_{n+1} = \\ &= acx_n + bcy_n + dy_{n+1} + ady_n - ady_n = \\ &= ay_{n+1} + bcy_n + dy_{n+1} - ady_n = \\ &= (a + d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n. \end{aligned}$$

Srovnáním s rekurentními předpisy ze zadání získáváme podmínky

$$a + d = 2t,$$
$$bc - ad = -1.$$

Spolu s předpisy

$$x_2 = ax_1 + by_1,$$
$$y_2 = cx_1 + dy_1,$$

tj. s rovnicemi

$$2t - 1 = a + b,$$
$$2t + 1 = c + d$$

dostáváme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, která má jediné řešení, a to

$$a = t, \quad b = t - 1, \quad c = t + 1, \quad d = t.$$

Smíšené rekurentní předpisy proto jsou

$$x_{n+1} = tx_n + (t-1)y_n,$$
$$y_{n+1} = (t+1)x_n + ty_n.$$

Nyní nalezneme α, β, γ tak, aby platilo $\alpha x_n^2 + \beta y_n^2 = \gamma$. Bez újmy na obecnosti položme $\gamma = 1$ a hledejme α a β v oboru racionálních čísel. Dosazením $n = 1$ a $n = 2$ získáváme soustavu

$$\alpha + \beta = 1,$$
$$\alpha(2t-1)^2 + \beta(2t+1)^2 = 1,$$

která má řešení

$$\alpha = \frac{1+t}{2}, \quad \beta = \frac{1-t}{2}.$$

Nyní ukážeme, že invariantem dané dvojice posloupností je předpis

$$\frac{1+t}{2}x_n^2 + \frac{1-t}{2}y_n^2 = 1,$$

tj.

$$(t+1)x_n^2 - (t-1)y_n^2 = 2.$$

Dané tvrzení dokážeme snadno pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ platí

$$(1 + t) - (t - 1) = 2.$$

Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro určité přirozené číslo n. Dokážeme, že platí také pro $n + 1$. Je tedy

$$\begin{aligned}
&(t+1)x_{n+1}^2 - (t-1)y_{n+1}^2 = \\
&= (t+1)\left[tx_n + (t-1)y_n\right]^2 - (t-1)\left[(t+1)x_n + ty_n\right]^2 = \\
&= (t+1)\left[t^2x_n^2 + 2t(t-1)x_ny_n + (t-1)^2y_n^2\right] - \\
&\qquad -(t-1)\left[(t+1)^2x_n^2 + 2t(t+1)x_ny_n + t^2y_n^2\right] = \\
&= \left[(t+1)t^2 - (t-1)(t+1)^2\right]x_n^2 + \\
&\qquad + \left[(t+1)(t-1)^2 - (t-1)t^2\right]y_n^2 = \\
&= (t+1)x_n^2 - (t-1)y_n^2 = 2,
\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

b) Předpokládejme tedy, že pro nějaká kladná u_1 a v_1 platí

$$(t+1)u_1^2 - (t-1)v_1^2 = 2$$

a současně neexistuje takové k přirozené, pro které platí

$$x_k = u_1 \quad \text{a} \quad y_k = v_1.$$

Uvažujme posloupnosti (u_n) a (v_n) dané smíšenými rekurentními předpisy

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= tu_n - (t-1)v_n, \\
v_{n+1} &= -(t+1)u_n + tv_n.
\end{aligned}$$

Nechť tedy

$$\begin{aligned}
u_2 &= tu_1 - (t-1)v_1, \\
v_2 &= -(t+1)u_1 + tv_1.
\end{aligned}$$

Vynásobením vztahu

$$(t-1)v_1^2 = (t+1)u_1^2 - 2$$

kladným číslem $(t-1)$ získáváme

$$(t-1)^2 v_1^2 = (t^2-1)u_1^2 - 2(t-1) < t^2 u_1^2,$$

z čehož plyne

$$(t-1)v_1 < tu_1,$$

a tedy platí

$$u_2 > 0.$$

Vhodnou úpravou vztahu

$$(t+1)u_1^2 - (t-1)v_1^2 = 2$$

získáme vyjádření

$$2v_1^2 - 2 = (1+t)\left(v_1^2 - u_1^2\right).$$

Protože u_1 i v_1 nemohou být současně přirozená čísla nabývající hodnoty jedna[3], pak levá strana poslední rovnice je pro $v_1 > 1$ přirozené číslo, a tedy i pravá strana rovnice musí nabývat kladných hodnot (pro $v_1 = 1$ dostáváme $u_1 = 1$, což není možné). Z tohoto důvodu platí $v_1 > u_1$.

Rozdíl mezi odpovídajícími si členy obou posloupností je vyjádřen přirozeným číslem, proto lze daný výraz $2v_1^2 - 2$ vhodně odhadnout nerovností

$$2v_1^2 - 2 \geq \left[v_1^2 - (v_1-1)^2\right](1+t) = (2v_1-1)(1+t),$$

a tedy

$$2v_1^2 \geq 4(t+1) + (2v_1-5)(t+1) + 2.$$

Pro $u_1 = 1$ by platilo

$$(t-1)v_1^2 = (t+1) - 2 = t-1,$$

[3] Taková dvojice odpovídá počátečním podmínkám rekurentně zadaných posloupností z první části úlohy.

odkud $t = 1$ nebo $v_1 = 1$. Ani jedna z těchto možností však nastat dle podmínek nemůže.

Nutně platí $u_1 \geq 2$, a tedy také $v_1 \geq 3$. Je proto

$$2v_1^2 \geq 4(t+1) + (t+1) + 2 > 4(t+1),$$

tj.

$$v_1^2 > 2(t+1).$$

Dostáváme tak

$$(t+1)u_1^2 - (t-1)v_1^2 - 2 = 0.$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice číslem $t+1$, pak platí

$$(t+1)^2u_1^2 - (t^2-1)v_1^2 - 2(t+1) = 0,$$

a tedy

$$(t+1)^2u_1^2 - t^2v_1^2 + v_1^2 - 2(t+1) = 0.$$

Protože

$$v_1^2 - 2(t+1) > 0,$$

pak

$$(t+1)^2u_1^2 - t^2v_1^2 < 0,$$

z čehož plyne

$$(t+1)u_1 < tv_1,$$

tj.

$$v_2 > 0.$$

Snadnými algebraickými úpravami lehce ověříme, že

$$(t+1)u_2^2 - (t-1)v_2^2 = (t+1)u_1^2 - (t-1)v_1^2 = 2.$$

Současně však

$$u_2 + v_2 = tu_1 - (t-1)v_1 - (t+1)u_1 + tv_1 = v_1 - u_1 < u_1 + v_1.$$

Při splnění podmínek

$$u_1 \neq x_k \text{ a } v_1 \neq y_k$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$ bychom pokračováním daného procesu vytvořili nekonečnou posloupnost přirozených čísel, kde

$$u_1 + v_1 > u_2 + v_2 > u_3 + v_3 > \dots$$

To je však v rozporu s Fermatovou metodou nekonečného klesání.

Hodnoty u a v jsou proto rovny některé odpovídající si dvojici členů zadaných posloupností. ■

Komentář k úloze

Nalezení invariantu v první části úlohy není obtížnou záležitostí. Bez znalostí o řešení rekurentních posloupností je však cesta k výsledku nesnadná.

Řešení druhé části vyžaduje nalezení zpětné transformace a důkaz toho, že je tato transformace jedinou možnou. Z toho důvodu je zachován i daný invariant při této zpětné transformaci.

Závěrečné zdůvodnění, že nelze vytvořit nekonečnou posloupnost kladných součtů, je současně důkazem toho, že dané smíšené rekurentní předpisy jsou ekvivalentní nalezenému invariantu.

Kapitola 2

Didaktický výzkum

V úvodu druhé části této práce je prezentováno průzkumné šetření (předvýzkum), které je zaměřeno na schopnost žáků vnímat změny některých veličin a rozpoznat vlastnosti, které naopak zůstávají neměnné. Pro testování žáků středních škol bylo autorem vytvořeno několik dílčích testů, pomocí nichž byly postupně rozvíjeny zkoumané pojmy invariant a poloinvariant.

Cílem šetření bylo srovnat úroveň schopností analyzovat jednotlivé matematické úlohy, vyhledat veličiny, pro něž jsou některé charakteristiky neměnné, vhodně zvolit metodu řešení, díky níž by bylo řešení úlohy optimální a efektivní.

Do vlastního testování byli postupně zapojeni žáci regionálních gymnázií Olomouckého kraje, dále účastníci výběrových matematických soustředění z Olomouckého kraje (v rámci projektu PMT–MORAVA), účastníci výběrových matematických soustředění z okolních regionů České republiky (v rámci projektu MATES) a v neposlední řadě také řešitelé 58. ročníku Matematické olympiády z celé České republiky.

Do testování byli zpočátku zapojeni pouze žáci 2. ročníků čtyřletých (a jim odpovídajících ročníků víceletých) gymnázií, postupně se však skupina zapojených žáků utvářela z žáků navštěvujících matematický kroužek a z účastníků výběrových matematických seminářů. Věk žáků v další fázi testování se pohyboval v rozmezí od 14 do 18 let.

2.1 Test dělitelnosti

V rámci prvního výzkumného testu bylo testováno (a následně statisticky vyhodnoceno) celkem 83 žáků regionálních gymnázií a 37 účastníků výběrových matematických soustředění. Na závěr byl proveden rozbor postupů a řešení některých žákovských úloh.

Před zahájením samotného testování byli žáci nejprve seznámeni se způsobem zaznamenávání svých odpovědí. U každé otázky v prvním testu musí rozhodnout, zda tvrzení je či není obecně splněno. U otázek ve druhém testu žáci rozhodují, zda je tvrzení splnitelné pro nějakou vhodnou číselnou kombinaci. V takovém případě se pak pokusí určit obecné podmínky, za jakých je tvrzení splnitelné. Současně byli požádáni, aby také při vyhodnocování prvního z dvojice testů zapisovali, na základě jakých úvah ke svému závěru dospěli.

Hlavním úkolem první dvojice testů bylo poukázat na rozdílnost nutných a postačujících podmínek v matematice. Tato dvojice testů byla primárně určená žákům druhého ročníku na začátku školního roku (účastníci výběrových matematických soustředění věkově limitováni nebyli). Časový odstup této dvojice testů byl v případě gymnaziálních žáků jeden týden, v případě seminářů v rámci matematických soustředění byl časový odstup mezi testy pouze jediný den.

Úkolem prvního z dvojice testů bylo zjistit, jaké mají žáci znalosti z oboru dělitelnosti přirozených čísel a jakým způsobem je dokáží při samotném vyhodnocení testu uplatnit.

Druhý z testů zkoumal schopnost žáků nalézt obecná pravidla při vytváření souboru prvků s danou vlastností. Důležitou součástí testu bylo rozhodnutí, zda zkoumaná vlastnost platí obecně nebo zda pouze pro některé vhodné číselné kombinace.

Čas vyhrazený prvnímu testu byl stanoven na 45 minut, čas určený na řešení druhého testu byl 75 minut.

Po absolvování těchto dvou testů byli žáci podrobněji seznámeni se správnými odpověďmi na jednotlivé otázky, dále jim byly pomocí korektních definic zavedeny pojmy invariant a poloinvariant. Na několika jednoduchých příkladech pak byly žákům prezentovány možnosti uplatnění metody invariantů a poloinvariantů při řešení některých úloh.

V následujících testech žáci prokazovali schopnost rozlišit, zda je popisovaná vlastnost či metrický vztah invariantem nebo poloinvariantem. Poslední z uvedených testů měl za úkol zjistit, do jaké míry jsou žáci schopni některé z invariantů vypozorovat a kvantitativně popsat.

Didaktický test 1

1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou *vždy* pravdivá a která nikoli.
   (a) Každé přirozené číslo dává při dělení dvěma stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (b) Každé přirozené číslo dává při dělení třemi stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (c) Každé přirozené číslo dává při dělení šesti stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (d) Každé přirozené číslo dává při dělení devíti stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (e) Každé přirozené číslo dává při dělení dvacíti sedmi stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
2. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou *vždy* pravdivá a která nikoli.
   (a) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný dvěma.

(b) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný třemi.

(c) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šesti.

(d) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný devíti.

3. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou *vždy* pravdivá a která nikoli.

   (a) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šesti.

   (b) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný patnácti.

   (c) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šestnácti.

   (d) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šedesáti.

   (e) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný sto šedesáti.

Řešení a statistické vyhodnocení didaktického testu 1

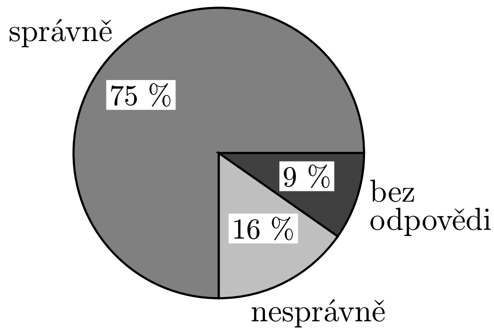
1. Dělitelnost a kriteria dělitelnosti:

   (a) Číslo je dělitelné dvěma, právě když je jeho poslední číslice 0, 2, 4, 6 nebo 8. Ciferný součet proto nemusí dávat stejný zbytek při dělení dvěma. Protipříkladem je např. číslo 12, které je dělitelné dvěma, ale jeho ciferný součet $1 + 2 = 3$ dělitelný dvěma není.

   Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	75 %
nesprávně	16 %
bez odpovědi	9 %



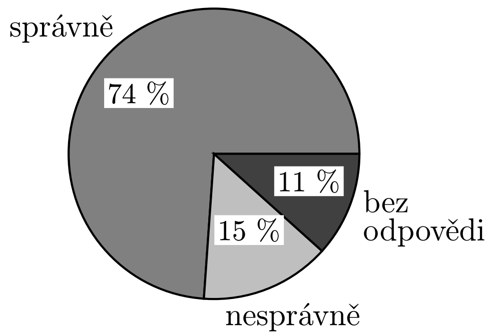
Pro většinu žáků nepředstavuje dělitelnost číslem 2 větší problém, část z nich však chybně kriterium dělitelnosti číslem 2 aplikovala i na ciferný součet daného čísla.

(b) Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi (základní kriterium dělitelnosti číslem tři). Přičteme-li k danému číslu číslo jedna, zvětší se jeho ciferný součet také o jedna (je-li jeho poslední číslice různá od 9), nebo poklesne o hodnotu $9k-1$, kde k je počet devítek na konci původního čísla. Zbytek při dělení čísla třemi je proto stejný jako zbytek při dělení jeho ciferného součtu třemi.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	74 %
nesprávně	15 %
bez odpovědi	11 %



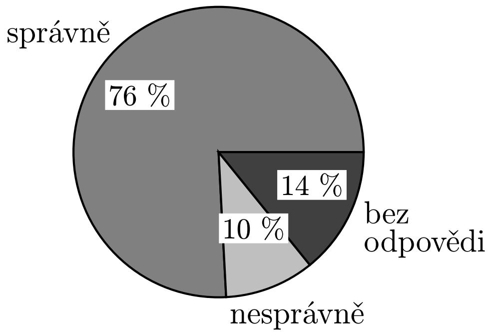
Většina žáků kriterium dělitelnosti číslem 3 ovládá, někteří z nich však nedokázali správně vyhodnotit, že zbytek při dělení je u čísla i jeho ciferného součtu rovněž stejný.

(c) Číslo je dělitelné šesti, právě když je současně dělitelné dvěma i třemi. Protože dané tvrzení není splněno poslední jeho číslice 0, 2, 4, 6 nebo 8. Ciferný součet nemusí dávat stený zbytek při dělení dvěma. Protipříkladem je např. číslo 12, které je dělitelné šesti, ale jeho ciferný součet $1 + 2 = 3$ dělitelný šesti není.

Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	76 %
nesprávně	10 %
bez odpovědi	14 %



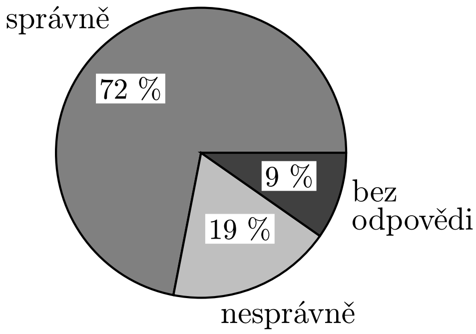
Test prokázal, že dělitelnost číslem 6 je žákům zřejmá. Chybné závěry většinou plynuly z předchozích chybných úvah o dělitelnosti čísly 2 a 3.

(d) Číslo je dělitelné devíti, právě když je jeho ciferný součet dělitelný devíti (základní kriterium dělitelnosti číslem 9). Přičteme-li k danému číslu číslo jedna, zvětší se jeho ciferný součet také o jedna (je-li jeho poslední číslice různá od 9), nebo poklesne o hodnotu $9k - 1$, kde k je počet devítek na konci původního čísla. Zbytek při dělení čísla devíti je proto stejný jako zbytek při dělení jeho ciferného součtu devíti.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	72 %
nesprávně	19 %
bez odpovědi	9 %



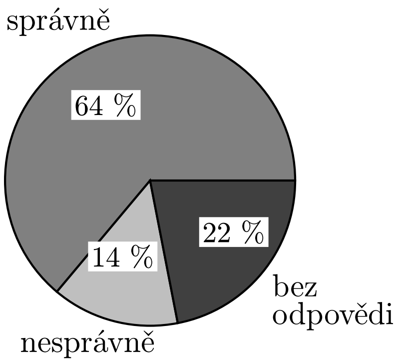
Z testu plyne, že většina žáků kriterium dělitelnosti číslem 9 ovládá, mnozí však nedokázali správně vyhodnotit, že zbytek při dělení je u čísla i jeho ciferného součtu rovněž stejný.

(e) Číslo je dělitelné dvacíti sedmi, právě když je dělitelné devíti a jeho podíl po dělení devíti je násobkem čísla tři. Dělitelnost ciferného součtu daného čísla číslem 27 zaručuje pouze dělitelnost daného čísla číslem 9.

Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	64 %
nesprávně	14 %
bez odpovědi	22 %



Z testu vyplynulo, že pro žáky je dělitelnost číslem 27 obtížným úkolem. Správné odpovědi vycházely především z nalezení vhodného protipříkladu. Někteří z žáků nesprávně usuzovali, že pro děli-

telnost číslem 27 platí analogické tvrzení jako pro dělitelnost číslem 9.

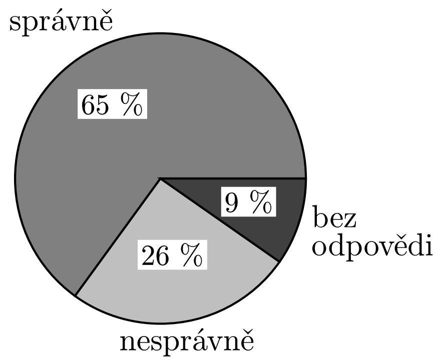
2. Dělitelnost součtu šesti po sobě jdoucích přirozených čísel postupně čísly 2, 3, 6 a 9.

   (a) Mezi šesti po sobě jdoucími přirozenými čísly jsou vždy tři čísla sudá a tři čísla lichá. Součet těchto šesti čísel je tedy číslo liché a nemůže být proto dělitelný dvěma.

   Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	65 %
nesprávně	26 %
bez odpovědi	9 %



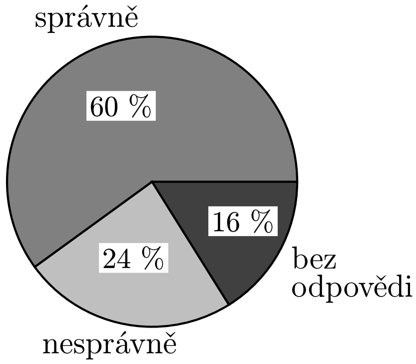
Šetření prokázalo, že za většinou nesprávných odpovědí se skrývá skutečnost, že žáci sice správně určili, že polovina čísel je sudá a polovina lichá, ale chybně vyvodili závěry o dělitelnosti součtu těchto čísel.

   (b) Zbytky při dělení daného čísla třemi pro šestici po sobě jdoucích čísel jsou postupně buď 0, 1, 2, 0, 1, 2 nebo 1, 2, 0, 1, 2, 0 nebo 2, 0, 1, 2, 0, 1. Ve všech třech případech je součet zbytků roven číslu 6, proto je součet šesti po sobě jdoucích přirozených čísel násobkem čísla 3.

   Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	60 %
nesprávně	24 %
bez odpovědi	16 %



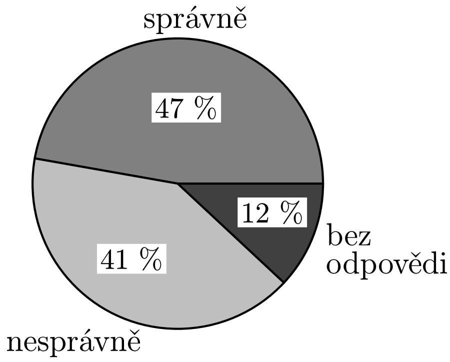
Za většinou nesprávných odpovědí se skrývá skutečnost, že žáci sice správně určili, že dvě čísla jsou násobkem čísla 3, ale chybně vyvodili závěry o zbytcích ostatních čtyř čísel a tím i o dělitelnosti součtu celé šestice čísel.

(c) Zbytky při dělení daného čísla šesti pro šestici po sobě jdoucích přirozených čísel jsou postupně buď 0, 1, 2, 3, 4, 5, nebo libovolná jiná cyklická permutace těchto šesti čísel. Ve všech případech je součet všech šesti zbytků roven číslu 15, a proto součet těchto šesti čísel při dělení šesti dává zbytek 3.

Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	47 %
nesprávně	41 %
bez odpovědi	12 %



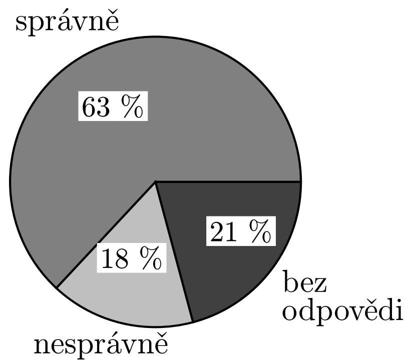
Z výsledků testu vyplynulo, že překvapivě velké množství nesprávných odpovědí vycházelo z úvahy, že mezi šesticí čísel je vždy jedno násobkem čísla 6 a tudíž je i součet celé šestice dělitelný číslem 6.

(d) Uvažujeme-li šestici čísel 1, 2, 3, 4, 5 a 6, snadno vidíme, že součet těchto čísel je roven 21 a není proto násobkem devíti.

Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	63 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	21 %



Test odhalil, že většina nesprávných odpovědí vycházela z mylného závěru, že existence dvou násobků čísla 3 v dané šestici čísel zaručuje dělitelnost devíti. Zhruba pětina žáků nedokázala danou situaci vyhodnotit vůbec a ponechala otázku bez odpovědi.

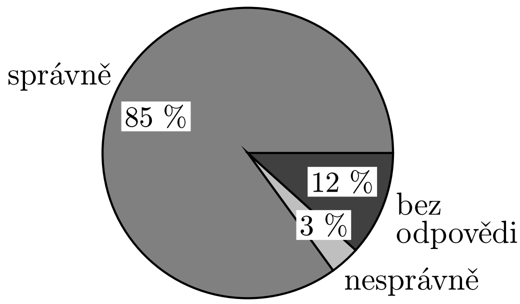
3. Dělitelnost součinu šesti po sobě jdoucích přirozených čísel postupně čísly 6, 15, 16, 60 a 160.

(a) Součin šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný číslem $6! = 720$ a libovolným dělitelem tohoto čísla. Číslo 6 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Platí navíc, že právě jedno z šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy nutně dělitelné šesti.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	85 %
nesprávně	3 %
bez odpovědi	12 %



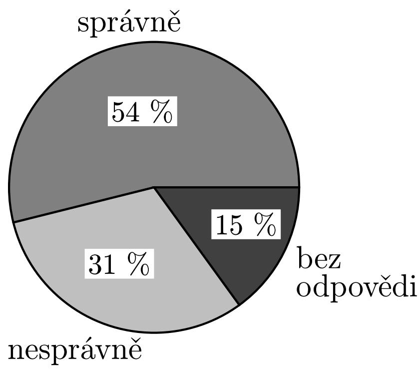
Většina odpovědí byla správná, úloha nečinila žákům větší potíže.

(b) Číslo 15 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Platí navíc, že alespoň jedno z čísel je dělitelné pěti a alespoň jedno ze zbylých čísel je dělitelné třemi.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	54 %
nesprávně	31 %
bez odpovědi	15 %



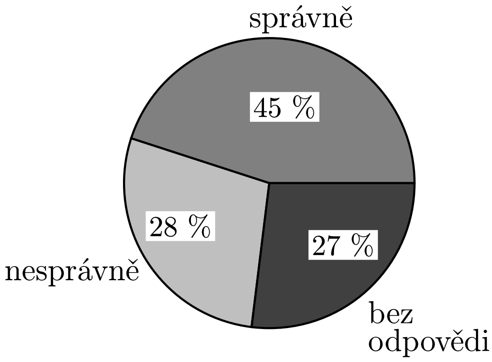
Test prokázal, že dělitelnost číslem 15 činila už žákům větší potíže, někteří nesprávně tvrdili, že daný součet je sudý a nemůže být proto dělitelný lichým číslem.

(c) Číslo 16 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Platí navíc, že alespoň jedno z čísel je dělitelné čtyřmi a dvě další čísla jsou sudá.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	45 %
nesprávně	28 %
bez odpovědi	27 %



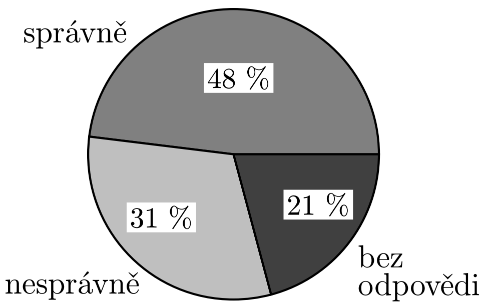
Výsledky testu prokázaly, že při rozhodování o dělitelnosti číslem 16 někteří žáci mylně usuzovali, že tři sudá čísla mezi činiteli zaručují pouze dělitelnost číslem 8, nikoli číslem 16.

(d) Číslo 60 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Platí navíc, že alespoň jedno z čísel je dělitelné pěti, alespoň jedno je dělitelné čtyřmi a alespoň jedno je dělitelné třemi. Protože čísla 5, 4 a 3 jsou po dvou nesoudělná, je daný výraz dělitelný součinem těchto tří čísel, tj. je dělitelný šedásáti.

Dané tvrzení platí.

Úspěšnost žáků:

správně	48 %
nesprávně	31 %
bez odpovědi	21 %



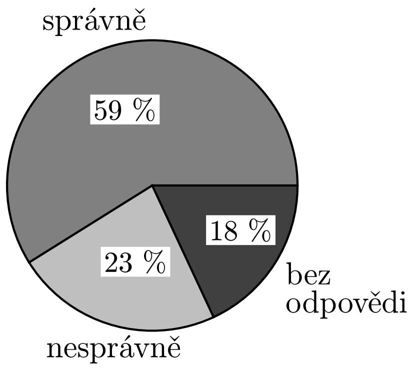
Test prokázal, že dělitelnost vyššími čísly je pro určitou skupinu žáků již velmi náročný úkol. Pro některé žáky již bylo číslo 60 natolik veliké, že vůbec nepředpokládali možnost dělitelnosti součinu dané šestice čísel číslem 60.

(e) Číslo 160 není dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení neplatí. Uvážíme-li právě součin čísel 1, 2, 3, 4, 5 a 6, máme šestici čísel, která danou podmínku nesplňuje.

Dané tvrzení neplatí.

Úspěšnost žáků:

správně	59 %
nesprávně	23 %
bez odpovědi	18 %



Z výsledku testu plyne, že při rozhodování o dělitelnosti číslem 160 více než polovina žáků uvedla správnou odpověď, avšak v mnoha případech toho bylo dosaženo na základě nesprávné úvahy o velikosti čísla 160.

Ve druhém testu bylo úkolem žáků vyhodnotit, zda některá tvrzení jsou splněna pouze pro určitou kombinaci čísel nebo zda je tvrzení obecně pravdivé či nepravdivé. V případě, že tvrzení je platné pouze pro jistou kombinaci čísel, bylo jejich úkolem také vhodným způsobem určit podmínky, které tuto platnost zaručují.

Didaktický test 2

1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení mohou být pravdivá. Určete, za jakých podmínek je tvrzení pravdivé.
   (a) Každé přirozené číslo dává při dělení dvěma stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (b) Každé přirozené číslo dává při dělení třemi stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (c) Každé přirozené číslo dává při dělení šesti stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (d) Každé přirozené číslo dává při dělení devíti stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
   (e) Každé přirozené číslo dává při dělení dvacíti sedmi stejný zbytek jako jeho ciferný součet.
2. Rozhodněte, která z následujících tvrzení mohou být pravdivá. Určete, za jakých podmínek je tvrzení pravdivé.
   (a) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný dvěma.
   (b) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný třemi.
   (c) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šesti.
   (d) Součet libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný devíti.
3. Rozhodněte, která z následujících tvrzení mohou být pravdivá. Určete, za jakých podmínek je tvrzení pravdivé.
   (a) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šesti.

(b) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný patnácti.

(c) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šestnácti.

(d) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný šedesáti.

(e) Součin libovolných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný sto šedesáti.

Pro hodnocení tohoto druhého testu byla zvolena širší škála hodnocení. Jako částečně správné byly brány odpovědi, kdy žáci nalezli vhodnou vyhovující kombinaci čísel, která splňovala dané podmínky, resp. kdy nedokázali úplně korektně objasnit nutné podmínky toho, že taková kombinace možná není, ale na konkrétních příkladech dospěli k poznatkům směřujícím ke správnému zdůvodnění. Řešení, která směřovala ke správné kombinaci čísel, ale vycházela ze špatných předpokladů či úvah, byla hodnocena jako nevyhovující.

Řešení a statistické vyhodnocení didaktického testu 2

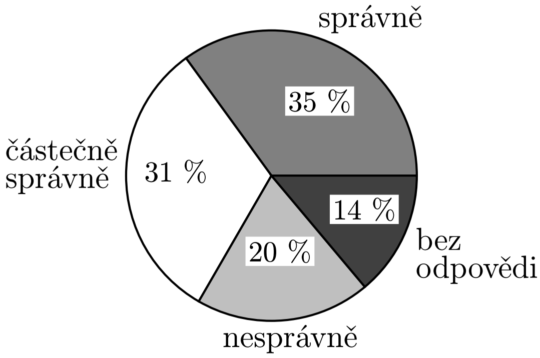
1. Dělitelnost a kriteria dělitelnosti:

   (a) Číslo je dělitelné dvěma, právě když je jeho poslední číslice 0, 2, 4, 6 nebo 8. Mají-li být číslo i jeho ciferný součet sudá čísla, musí být součet všech jeho cifer kromě číslice na pozici řádu jednotek také sudý. Mají-li být číslo i jeho ciferný součet lichá čísla, musí být součet všech jeho cifer kromě číslice na pozici řádu jednotek sudý (poslední číslice je lichá).

   Dané tvrzení platí jen pro vhodnou skupinu čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	35 %
částečně správně	31 %
nesprávně	20 %
bez odpovědi	14 %



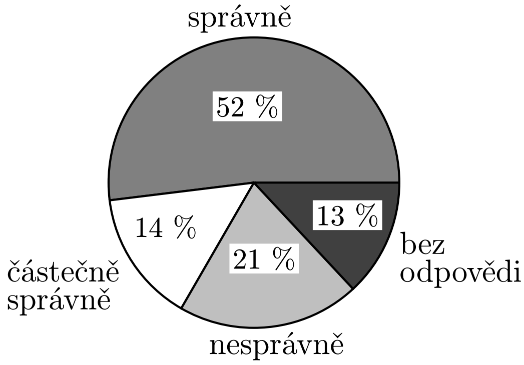
Z testu vyplynulo, že pro většinu žáků nepředstavuje dělitelnost číslem 2 větší problém, přesto však určení obecných podmínek dělitelnosti ciferného součtu je problémem větší části žáků. Ve srovnání s prvním testem mírně vzrostl počet nesprávných odpovědí i řešení bez uvedené odpovědi.

(b) Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi (základní kriterium dělitelnosti číslem tři). Přičteme-li k danému číslu číslo jedna, zvětší se jeho ciferný součet také o jedna (je-li jeho poslední číslice různá od 9), nebo poklesne o hodnotu $9k - 1$, kde k je počet devítek na konci původního čísla. Zbytek při dělení čísla třemi je proto stejný jako zbytek při dělení jeho ciferného součtu třemi.

Dané tvrzení platí vždy.

Úspěšnost žáků:

správně	52 %
částečně správně	14 %
nesprávně	21 %
bez odpovědi	13 %



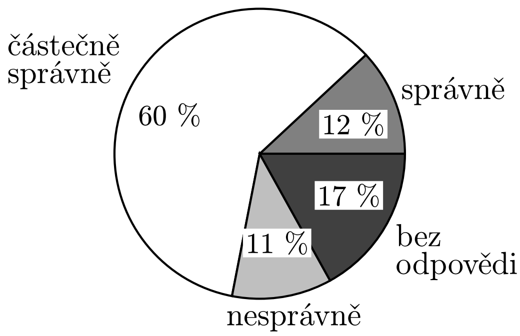
Test prokázal, že většina žáků kriterium dělitelnosti číslem 3 zná, někteří však chápou kriterium pouze jako jednostrannou implikaci. Přestože v prvním testu odpovědělo 74 % žáků, že tvrzení platí vždy, ve druhém testu klesl počet správných odpovědí na 52 %. Někteří žáci se však snažili podmínky splnitelnosti definovat způsobem ekvivalentním kriteriu dělitelnosti, tato řešení byla brána jako částečně správná.

(c) Číslo je dělitelné šesti, právě když je současně dělitelné dvěma i třemi. Dělitelnost třemi je splněna vždy. Proto musí platit stejná podmínka jako při dělitelnosti dvěma. Platí tedy, že součet všech jeho cifer kromě číslice na pozici řádu jednotek musí být sudý.

Dané tvrzení platí jen pro vhodnou skupinu čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	12 %
částečně správně	60 %
nesprávně	11 %
bez odpovědi	17 %



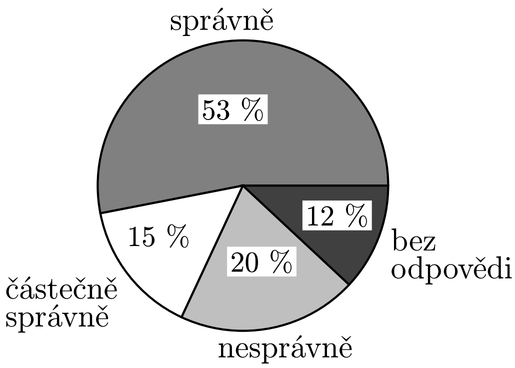
Z výsledků testu plyne, že přestože je dělitelnost číslem 6 žákům zřejmá, nedokáží nalézt obecné podmínky splnitelnosti daného tvrzení. Většina žáků však správně uvedla, že pro platnost daného tvrzení musí být splněna dělitelnost oběma čísly 2 a 3.

(d) Číslo je dělitelné devíti, právě když je jeho ciferný součet dělitelný devíti (základní kriterium dělitelnosti číslem 9). Přičteme-li k danému číslu číslo jedna, zvětší se jeho ciferný součet také o jedna (je-li jeho poslední číslice různá od 9), nebo poklesne o hodnotu $9k-1$, kde k je počet devítek na konci původního čísla. Zbytek při dělení čísla devíti je proto stejný jako zbytek při dělení jeho ciferného součtu devíti.

Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	53 %
částečně správně	15 %
nesprávně	20 %
bez odpovědi	12 %



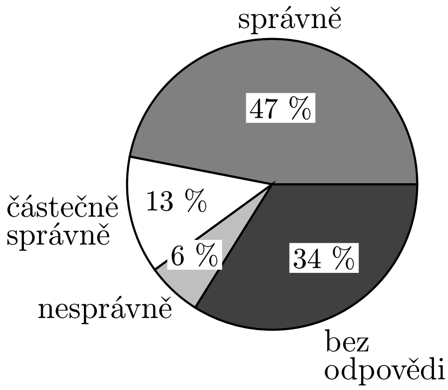
Test poukázal na skutečnost, že většina žáků kriterium dělitelnosti číslem 9 zná, někteří však chápou kriterium pouze jako jednostrannou implikaci. Přestože v prvním testu odpovědělo 72 % žáků, že tvrzení platí vždy, ve druhém testu klesl počet správných odpovědí na 53 %. Někteří žáci se však snažili podmínky splnitelnosti definovat způsobem ekvivalentním kriteriu dělitelnosti, tato řešení byla brána jako částečně správná.

(e) Číslo je dělitelné dvacíti sedmi, právě když je dělitelné devíti a jeho podíl po dělení devíti je násobkem čísla tři. Dělitelnost ciferného součtu daného čísla číslem dvacet sedm zaručuje pouze dělitelnost čísla devíti. Obecné podmínky, které zaručují stejné zbytky při dělení čísla i jeho ciferného součtu číslem 27, je velmi obtížné určit.

Dané tvrzení platí jen pro vhodnou skupinu čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	47 %
částečně správně	13 %
nesprávně	6 %
bez odpovědi	34 %



Test prokázal, že pro žáky je dělitelnost číslem 27 velmi obtížným úkolem. Za správná byla považována taková řešení, která uváděla, že tvrzení je splněno jen pro některá čísla, a některá z takových čísel uvedli. Za částečně správná byla považována řešení, kde bylo uvedeno pouze vhodné číslo, ale chyběla informace o tom, zda tvrzení platí vždy nebo jen pro některá čísla.

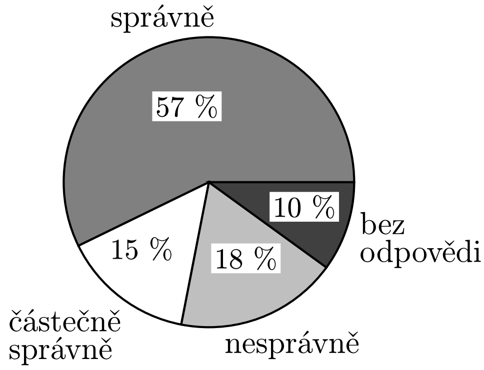
2. Součet šesti po sobě jdoucích přirozených čísel.

   (a) Mezi šesti po sobě jdoucími přirozenými čísly jsou vždy tři sudá a tři lichá čísla. Součet těchto šesti čísel je tedy vždy číslo liché.

   Dané tvrzení neplatí pro žádnou šestici po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	57 %
částečně správně	15 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	10 %



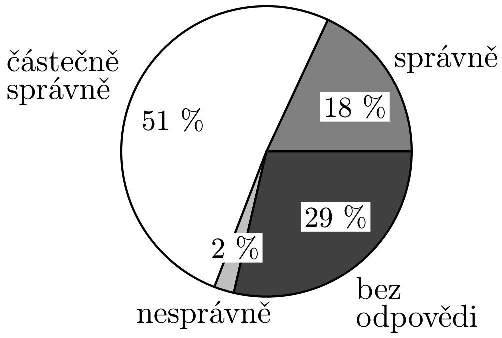
Ze zkoumání součtu několika šestic přirozených čísel vypozorovali mnozí z žáků, že součtem je liché číslo. 15 % žáků však nedokázalo tuto informaci zobecnit, tato řešení byla považována za částečně správná.

   (b) Zbytky při dělení daného čísla třemi pro šestici po sobě jdoucích čísel jsou postupně buď 0, 1, 2, 0, 1, 2 nebo 1, 2, 0, 1, 2, 0 nebo 2, 0, 1, 2, 0, 1. Ve všech třech případech je součet zbytků roven číslu 6, proto je součet šesti po sobě jdoucích přirozených čísel násobkem čísla 3.

   Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	18 %
částečně správně	51 %
nesprávně	2 %
bez odpovědi	29 %



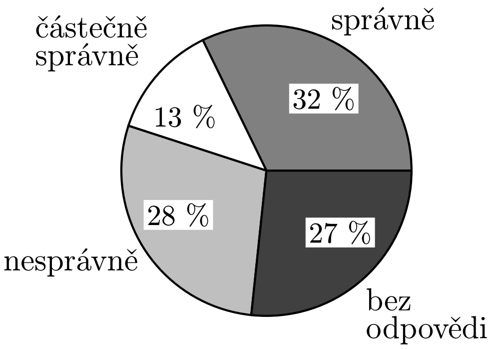
Z výsledků testu vyplývá, že ze zkoumání součtu několika šestic přirozených čísel vypozorovali mnozí z žáků, že součet je dělitelný šesti, někteří z nich však potvrdit tuto hypotézu již nedokázali. Naopak někteří žáci při obecném vyjádření sice správně určili, že dvě čísla jsou násobkem čísla 3, ale chybně vyvodili závěry o zbytcích ostatních čtyř čísel a tím i o dělitelnosti součtu celé šestice čísel.

(c) Zbytky při dělení daného čísla šesti pro šestici po sobě jdoucích čísel jsou postupně buď 0, 1, 2, 3, 4, 5 nebo libovolná jiná cyklická permutace těchto šesti čísel. Ve všech případech je součet zbytků roven číslu 15, proto součet těchto šesti čísel při dělení šesti dává zbytek 3.

Dané tvrzení neplatí pro žádnou šestici po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	32 %
částečně správně	13 %
nesprávně	28 %
bez odpovědi	27 %



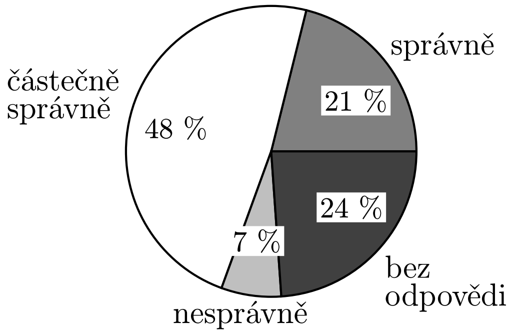
Ve srovnání s prvním testem se zvýšil počet žáků, kteří ponechali otázku nezodpovězenou, protože nedokázali zobecnit poznatky plynoucí z několika konrétních případů. Zatímco v prvním testu 41 % žáků rozhodlo, že tvrzení neplatí nikdy, ve druhém testu klesl počet těchto žáků na 28 %. V situaci, kdy nedokázali své tvrzení, že daný součet není násobkem čísla 6, nějakým způsobem zdůvodnit, raději ponechali otázku bez odpovědi.

(d) Vezmeme-li šestici přirozených čísel n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ a $n+5$, vidíme, že součet těchto čísel je $6n+15 = 3\cdot(2n+5)$. Nutnou podmínkou pro dělitelnost čísla devíti je, že výraz $(2n+5)$ je násobkem čísla 3. To je splněno jen tehdy, jestliže číslo n dává při dělení třemi zbytek 2.

Dané tvrzení platí pouze pro vhodnou šestici po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	21 %
částečně správně	48 %
nesprávně	7 %
bez odpovědi	24 %



Ve srovnání s prvním testem znatelně poklesl počet nesprávných odpovědí, a to v souvislosti se zjištěním, že pro některé šestice čísel je součet dělitelný devíti a pro některé není. Správné určení podmínek však žákům činilo opět problémy.

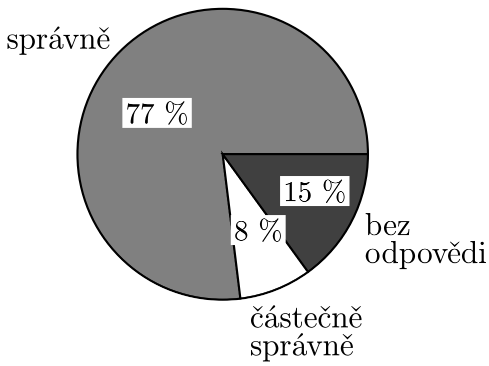
3. Součin šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný číslem $6! = 720$ a také libovolným dělitelem tohoto čísla.

   (a) Číslo 6 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Většina odpovědí se opírala o poznatek, že mezi šesti po sobě jdoucími přirozenými čísly je vždy jedno, které je násobkem šesti.

   Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	77 %
částečně správně	8 %
nesprávně	0 %
bez odpovědi	15 %



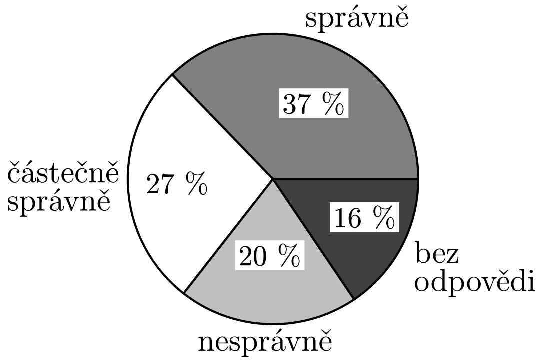
Výsledky obou testů jsou srovnatelné, pouze někteří z žáků nedokázali svůj úsudek zdůvodnit a ponechali otázku raději bez odpovědi.

(b) Číslo 15 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Správné odpovědi využívaly faktu, že alespoň jedno z čísel je dělitelné pěti a alespoň jedno další číslo je dělitelné třemi.

Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	37 %
částečně správně	27 %
nesprávně	20 %
bez odpovědi	16 %



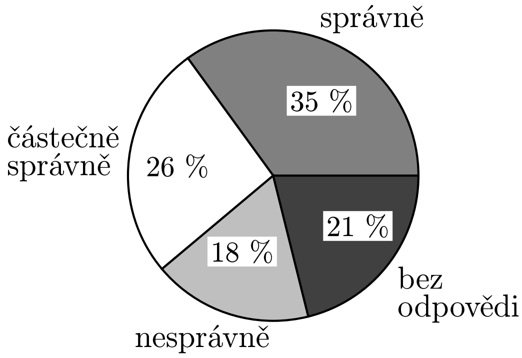
Při zkoumání dělitelnosti číslem 15 výrazně poklesl v porovnání s prvním testem počet nesprávných odpovědí. Důvodem poklesu bylo zjištění, že pro náhodně vybrané šestice čísel je součin skutečně dělitelný číslem 15, čímž byla mylná hypotéza některých žáků vyvrácena.

(c) Číslo 16 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Správná zdůvodnění spočívala převážně v poznatku, že alespoň jedno číslo je dělitelné čtyřmi a další dvě čísla jsou sudá.

Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	35 %
částečně správně	26 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	21 %



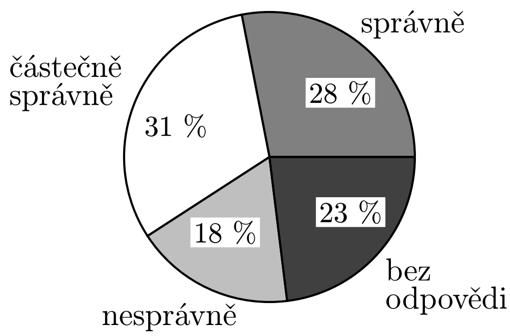
Také v tomto případě došlo k poklesu nesprávných odpovědí. Důvodem bylo opět zjištění, že pro náhodně vybrané šestice čísel je součin skutečně dělitelný číslem 16, čímž byla mylná hypotéza některých žáků vyvrácena.

(d) Číslo 60 je dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení platí vždy. Správná zdůvodnění spočívala převážně v poznatku, že alespoň jedno z čísel je dělitelné pěti, alespoň jedno čtyřmi a alespoň jedno třemi. Za správné zdůvodnění lze považovat také poznatek, že právě jedno z čísel je dělitelné šesti, alespoň jedno pěti a alespoň jedno další číslo je sudé.

Dané tvrzení vždy platí.

Úspěšnost žáků:

správně	28 %
částečně správně	31 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	23 %



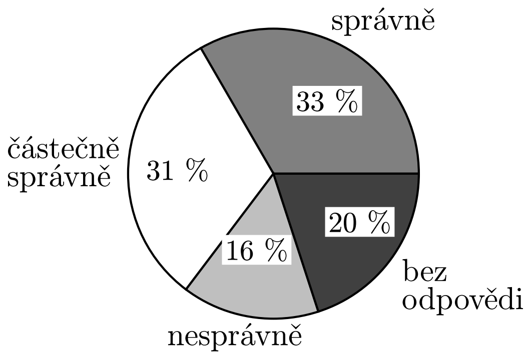
Přestože rozhodnutí o dělitelnosti číslem 60 bylo v prvním testu pro určitou skupinu žáků velmi náročné a téměř třetina žáků uvedla, že tvrzení neplatí, nesprávných odpovědí ve druhém testu opět výrazně ubylo.

(e) Číslo 160 není dělitelem čísla 720, proto dané tvrzení neplatí. Aby dané tvrzení bylo splněno, musí být součin dělitelný nejen pěti, ale také číslem 32. V součinu se vyskytují celkem tři sudá čísla, proto musí být v součinu zastoupena buď dvě čísla dělitelná čtyřmi, nebo alespoň jedno číslo dělitelné osmi.

Dané tvrzení platí jen pro vhodnou šestici po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úspěšnost žáků:

správně	33 %
částečně správně	31 %
nesprávně	16 %
bez odpovědi	20 %



U dělitelnosti číslem 160 byly výsledky obou testů srovnatelné, celkový počet správných a částečně správných odpovědí byl opět nadpoloviční.

2.2 Geometrické invarianty

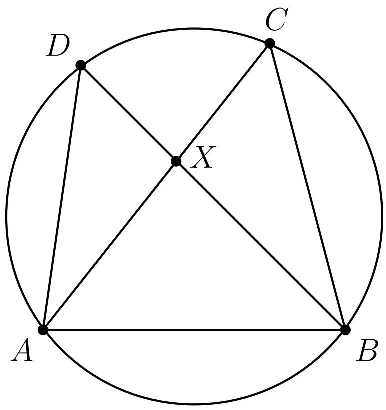
V dalším testu byla žákům předložena série příkladů, ve kterých bylo jejich úkolem rozhodnout, zda daný vztah je či není invariantem, a příkladů, ve kterých bylo zapotřebí určit, za jakých podmínek bude daná vlastnost splněna. Test byl opět primárně určen žákům druhých ročníků a zaměřen byl tentokrát na invarianty geometrické. Testovány byly znalosti a dovednosti žáků z planimetrie, týkající se obvodových a středových úhlů a mocnosti bodu ke kružnici. Dalším tématem bylo zkoumání jistých vlastností tětivových čtyřúhelníků.

Do testování tentokrát nebyli zapojeni všichni žáci druhých, ale pouze Ti žáci, kteří v první dvojici testů výrazněji uspěli a absolvovali následně základní seminář o invariantech a poloinvariantech. Semináře a následného testování se účastnili rovněž žáci z vyšších i nižších ročníků, kteří pravidelně navštěvují matematický kroužek a kteří se také pravidelně účastní různých matematických soutěží.

Vyhodnocení tohoto testu vychází z řešení 84 žáků, kteří byli seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant, celkový čas na řešení byl 100 minut. Ve druhé skupině 23 žáků, kteří nebyli s využitím invariantů a poloinvariantů seznámeni, byl test rozdělen na dvě samostatné části, kde pro každou bylo vyčleněno 50 minut. Žáci byli seznámeni se způsobem zaznamenávání odpovědí a byli požádáni o zápis svého myšlenkového postupu při vyhodnocování úloh.

Didaktický test 3

1. V kružnici je dána tětiva AB a body C a D, které leží ve stejné polorovině vyťaté přímkou AB na kružnici tak, že se úsečky AC a BD vzájemně protínají. Dále nechť X je průsečík těchto úseček AC a BD. Rozhodněte, která tvrzení jsou *vždy* pravdivá a která nikoli. V případě, že tvrzení *může* být splněno, určete, za jakých podmínek je to možné.



(a) $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BAD|$

(b) $v(C, AB) = v(D, AB)$

(c) $|AX| \cdot |CX| = |BX| \cdot |DX|$

(d) $|AX| \cdot |BX| = |CX| \cdot |DX|$

(e) $S_{AXB} = S_{CXD}$

(f) $S_{AXD} = S_{BXC}$

(g) $|AC| + |BC| = |AD| + |BD|$

(h) $|AC| \cdot |BC| = |AD| \cdot |BD|$

(i) $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$

(j) $|AD|^2 + |CD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

(k) $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |CD|^2$

Řešení a statistické vyhodnocení didaktického testu 3

1. (a) Protože mají obvodové úhly ACB i ADB stejnou velikost, musí součet dvou zbývajících úhlů v trojúhelnících být také stejný, tj.

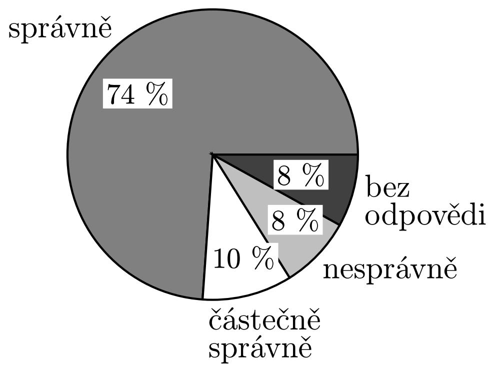
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BAD|$$

platí vždy.

Dané tvrzení je splněno vždy.

Úspěšnost žáků:

správně	74 %
částečně správně	10 %
nesprávně	8 %
bez odpovědi	8 %



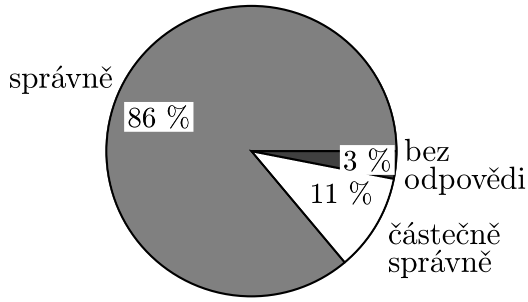
Tvrzení o konstantní velikosti obvodového úhlu patří mezi standardní znalosti žáků. Na vyšším porcentu úspěšnosti se podílí také fakt, že test byl gymnaziálním žákům předložen nedlouho po probrání středoškolské látky o středovém, obvodovém a úsekovém úhlu.

(b) Aby byla splněna tato podmínka, musí být body C i D stejně vzdálené od přímky AB, tj. musí být přímka CD rovnoběžná s AB.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	86 %
částečně správně	11 %
nesprávně	0 %
bez odpovědi	3 %



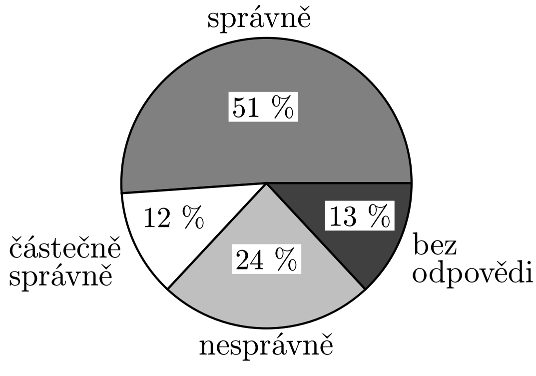
Z testu plyne, že tvrzení nečinilo žákům větší problémy. Vyjádření obsahu trojúhelníku pomocí výšky patří k základnímu učivu už na základní škole, resp. na nižším stupni gymnázia.

(c) Mocnost vnitřního bodu X ke kružnici k je definována jako záporné číslo, jehož hodnota je rovna součinu velikostí úseků XA a XC, kde AC je tětiva kružnice k, na níž leží příslušný bod X. Protože bod X je společným bodem dvou tětiv stejné kružnice, je dané tvrzení proto pro zmíněné body A, B, C a D splněno vždy.

Dané tvrzení je splněno vždy.

Úspěšnost žáků:

správně	51 %
částečně správně	12 %
nesprávně	24 %
bez odpovědi	13 %



Tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici patří mezi obtížnější partie planimetrie, přesto však nadpoloviční počet odpovědí byl správný.

Také v tomto případě se na vyšší úspěšnosti žáků podílela úzká souvislost s právě probíranou školskou látkou.

(d) Srovnáním podmínky

$$|AX| \cdot |BX| = |CX| \cdot |DX|$$

s předchozí podmínkou

$$|AX| \cdot |CX| = |BX| \cdot |DX|,$$

která vyjadřuje mocnost bodu X k dané kružnici k, dostaneme podmínky

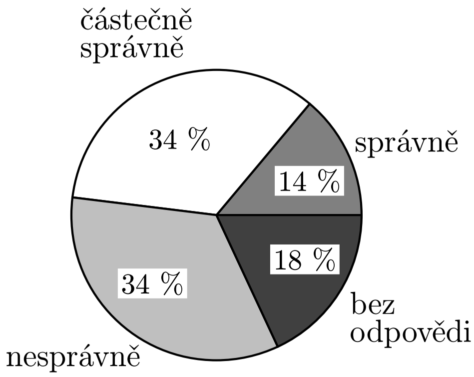
$$|AX| = |DX| \quad \text{a} \quad |BX| = |CX|.$$

Oba trojúhelníky ADX a BCX jsou proto rovnoramenné, kde výška vedená bodem X je kolmá na obě základny AD i BC, které proto musí být rovnoběžné.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	14 %
částečně správně	34 %
nesprávně	34 %
bez odpovědi	18 %



Počet správných odpovědí je ve srovnání s předchozí trojicí úloh znatelně menší. Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení objasnilo pouze 14 % žáků. Zhruba třetina žáků uvedla, že tvrzení je splněno pro rovnoramenný lichoběžník, ale nedovedli již dokázat, že v jiném případě dané tvrzení neplatí.

(e) Zvětšení obsahů obou trojúhelníků o obsah trojúhelníku BXC dostáváme

$$S_{AXB} + S_{BXC} = S_{CXD} + S_{BXC},$$

tj.

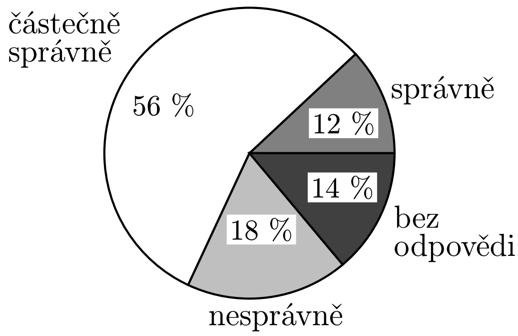
$$S_{ABC} = S_{BCD}.$$

Oba trojúhelníky mají stejnou stranu BC, proto i vzdálenost obou vrcholů A a D od BC je stejná. Tvrzení tak platí pouze v případě, že AD je rovnoběžné s BC.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	12 %
částečně správně	56 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	14 %



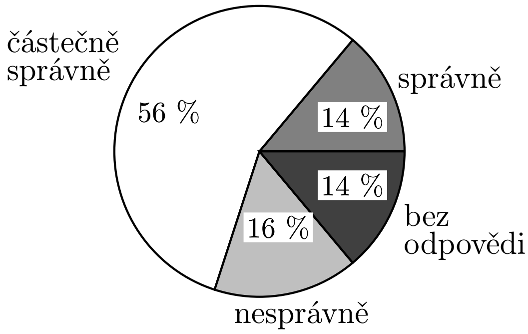
Počet správných odpovědí je ve srovnání s první trojicí úloh znatelně menší. Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení objasnilo pouze 12 % žáků. Zhruba polovina žáků uvedla, že tvrzení je splněno např. pro obdélník, ale nezvládli již dokázat, že nutnou podmínkou je rovnoběžnost příslušných stran čtyřúhelníku.

(f) Tvrzení je obdobné jako v předchozím případě a je splněno pouze v případě, že CD je rovnoběžné s AB.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	14 %
částečně správně	56 %
nesprávně	16 %
bez odpovědi	14 %



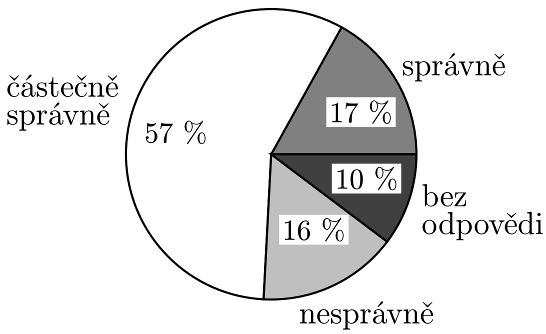
Počet správných odpovědí je ve srovnání s první trojicí úloh znatelně menší. Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení objasnilo pouze 14 % žáků. Zhruba polovina žáků uvedla, že tvrzení je splněno např. pro obdélník či rovnoramenný lichoběžník, ale nezvládli již ukázat, že rovnoběžnost příslušných stran čtyřúhelníku je také nutnou podmínkou.

(g) Všechny body, které mají od dvou pevně daných bodů konstantní součet vzdáleností, leží na elipse s ohnisky v bodech A a B. Průnikem elipsy a dané kružnice jsou maximálně dva body v dané polorovině. Vzhledem k osové symetrii obou útvarů podle osy úsečky AB jsou nutně přímky CD a AB rovnoběžné.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	17 %
částečně správně	57 %
nesprávně	16 %
bez odpovědi	10 %



Počet správných odpovědí je ve srovnání s první trojicí úloh opět znatelně menší. Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení vhodným způsobem objasnilo pouze 17 % žáků. Více než polovina žáků uvedla, že tvrzení je splněno pro rovnoramenný lichoběžník, ale nedokázali již zdůvodnit, že je to i nutná podmínka pro platnost daného tvrzení.

(h) Oba body C i D leží na stejném oblouku kružnice vyťatém tětivou AB, proto jsou obvodové úhly shodné a velikost sinů těchto úhlů je stejná. Proto je možno daný vztah rozšířit na tvar

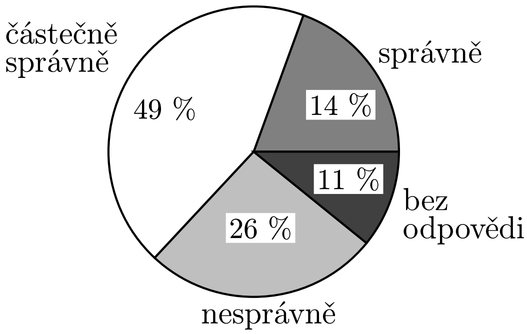
$$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|AD|\cdot|BD|\cdot\sin|\sphericalangle ADB|.$$

Dané předpisy vyjadřují rovnost obsahů obou daných trojúhelníků. Proto i výšky spuštěné z bodů C i D na stranu AB mají stejnou velikost. Dané tvrzení tedy platí pouze v případě, že CD je rovnoběžné s AB.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	14 %
částečně správně	49 %
nesprávně	26 %
bez odpovědi	11 %



Z testu je patrné, že správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení vhodným způsobem objasnilo pouze 14 % žáků. Téměř polovina žáků uvedla, že tvrzení je splněno pro rovnoramenný lichoběžník, ale nedokázali již zdůvodnit, že je to i nutná podmínka pro platnost daného tvrzení.

(i) Užitím kosinové věty pro dvojici shodných obvodových úhlů při vrcholech C a D dostaneme

$$\frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2}{2\,|AC| \cdot |BC|} = \frac{|AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2}{2\,|AD| \cdot |BD|}.$$

Dané tvrzení je splněno v případě, kdy

$$|AC| \cdot |BC| = |AD| \cdot |BD|,$$

tj. pro případ, kdy CD a AB jsou rovnoběžné, nebo v případě, kdy

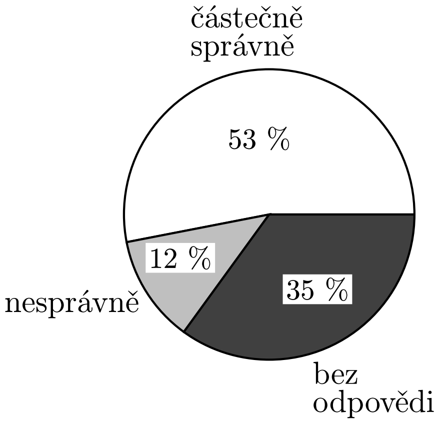
$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2,$$

tj. tehdy, jestliže AB je průměrem kružnice k.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	0 %
částečně správně	53 %
nesprávně	12 %
bez odpovědi	35 %



Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení nedokázal žádný z žáků. Více než polovina žáků však objevila nebo zapsala ekvivalentním způsobem alespoň jednu z podmínek.

(j) Dvojím užitím kosinové věty vyjádříme druhou mocninu velikosti úhlopříčky AC.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\,|AB| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle ABC|,$$

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2\,|AD| \cdot |DC| \cdot \cos |\sphericalangle ADC|.$$

Protože součet velikostí úhlů ABC a ADC je roven $180°$ (jedná se o tětivový čtyřúhelník), platí

$$-\cos|\sphericalangle ABC| = \cos|\sphericalangle ADC|.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme s využitím dané podmínky

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$

rovnici

$$2\,|AB|\cdot|DC|\cdot\cos|\sphericalangle ADC| - 2\,|AB|\cdot|BC|\cdot\cos|\sphericalangle ABC| = 0,$$

tj.

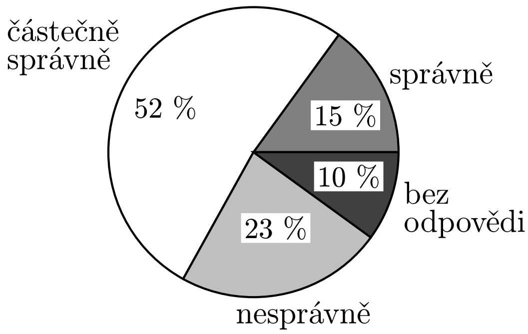
$$2\,(|AB|\cdot|BC| + |AD|\cdot|DC|)\cdot\cos|\sphericalangle ADC| = 0,$$

odkud plyne, že oba úhly ADC a ABC jsou pravé. AC je tedy průměrem kružnice.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

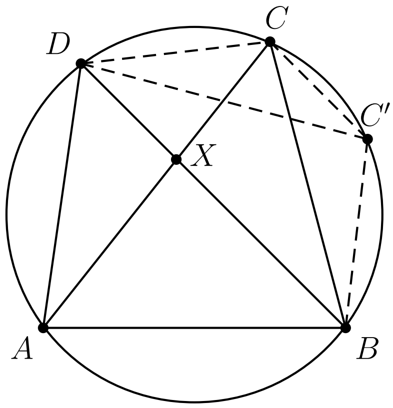
správně	15 %
částečně správně	52 %
nesprávně	23 %
bez odpovědi	10 %



Správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení vhodným způsobem objasnilo pouze 15 % žáků. Více než polovina žáků však správně uvedla, že tvrzení je splněno pro tětivový čtyřúhelník s příslušnými dvěma pravými úhly, ale nedokázali již zdůvodnit, že je to i nutná podmínka pro platnost daného tvrzení.

(k) Uvažujme na daném oblouku BD kromě bodu C takový bod C', pro který jsou splněny rovnosti $|DC| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$. Danou úlohu tím převedeme na úlohu předchozí, kdy zjišťujeme, kdy platí

$$|AB|^2 + |BC'|^2 = |AD|^2 + |DC'|^2.$$



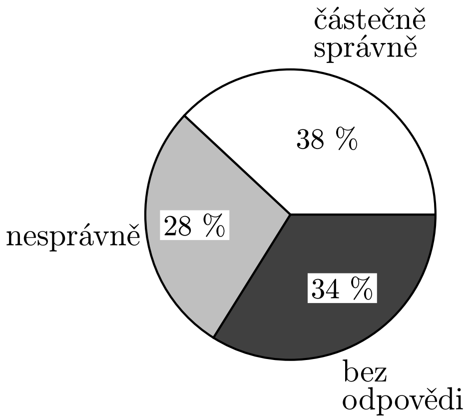
Je-li $C' \neq C$, pak AC' je nutně průměrem kružnice k. Protože přímka CC' je rovnoběžná s BD a úhel ACC' je pravý, lze nutnou podmínku splnitelnosti daného vztahu charakterizovat jako vzájemnou kolmost úhlopříček AC a BD.

Je-li $C' = C$, pak je čtyřúhelník $ABCD$ osově souměrný podle své úhlopříčky AC, a tedy i v tomto případě jsou úhlopříčky ve čtyřúhelníku $ABCD$ vzájemně kolmé.

Dané tvrzení platí jen pro určitou polohu bodů na kružnici.

Úspěšnost žáků:

správně	0 %
částečně správně	38 %
nesprávně	28 %
bez odpovědi	34 %



Jak je z výsledků testu patrné, správnou nutnou podmínku pro splnění daného tvrzení neobjasnil žádný z žáků. Více než třetina žáků však uvedla tvrzení, na jejichž základě by bylo možno nutné podmínky odvodit.

2.3 Poloinvarianty

V následujícím testu byla žákům předložena série příkladů, u kterých měli rozhodnout, jestli při příslušné transformaci zůstávají některé z veličin neměnné či zda nedochází k jejich jednostranným změnám, tj. zda se jejich hodnota nezvyšuje či nezmenšuje. Tématem byla opětovně zvolena dělitelnost v oboru přirozených čísel a vlastnosti podobných zobrazení, s nimiž se během svého studia mohli seznámit už v prvním, příp. na začátku druhého ročníku svého středoškolského studia.

V příkladech zaměřených na dělitelnost byly žákům předloženy dva na první pohled jednoduché problémy, které souvisely s hledáním největšího společného dělitele pomocí tzv. Eukleidova algoritmu a s dělením daného čísla postupně různými přirozenými čísly.

Úlohy zaměřené na zkoumání dělitelnosti čísel patří ke standardní látce, se kterou se můžeme setkat nejen v příkladech školské matematiky, ale také v soutěžních úlohách některých matematických soutěží. Pro řešení netradičních úloh však potřebujeme jistou dávku invence. Úlohy tohoto testu patří do kategorie mírně náročnějších, protože k jejich vyřešení je zapotřebí je nutno důsledně analyzovat danou situaci a správně vyhodnotit získané poznatky.

Geometrická část testu zkoumá schopnosti žáků uplatnit některé ze základních vlastností stejnolehlosti rovinných útvarů, konkrétně stejnolehlosti trojúhelníku.

Výzkum poukázal na dobré znalosti základních poznatků žáků, schopnost správně dané znalosti uplatnit při řešení nestandardních úloh je však nižší. S rostoucí mírou obtížnosti úlohy úměrně klesá počet srpávných odpovědí, stejně tak i narůstá počet žáků, kteří danou úlohu ponechají bez odpovědi.

Vyhodnocení tohoto testu vychází z řešení 79 žáků, kteří byli seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant, celkový čas na řešení byl 75 minut. Ve druhé skupině 26 žáků, kteří nebyli s využitím invariantů a poloinvariantů seznámeni, byl test rozdělen na dvě samostatné části, kde pro algebraickou část bylo vyčleněno 30 minut a pro geometrickou část 45 minut. Žáci byli seznámeni se způsobem zaznamenávání odpovědí a byli požádáni o zápis svého myšlenkového postupu při vyhodnocování úloh.

Didaktický test 4

1. Rozhodněte, která zda daná veličina zůstává konstantní, příp. zda se nezvětšuje, resp. nezmenšuje:
   (a) Zbytky při dělení daného přirozeného čísla většího než dva postupně čísly 2, 3, 4, atd.
   (b) Neúplné podíly při dělení daného přirozeného čísla většího než dva postupně čísly 2, 3, 4, atd.
   (c) Zbytky při postupném dělení v Eukleidově algoritmu hledání největšího společného dělitele daných dvou přirozených čísel.
   (d) Neúplné či úplné podíly při postupném dělení v Eukleidově algoritmu hledání největšího společného dělitele daných dvou přirozených čísel.

2. Rozhodněte, zda daná veličina zůstává konstantní, příp. zda se nezvětšuje, resp. nezmenšuje při zobrazení trojúhelníku ve stejnolehlosti s koeficientem $\kappa = -\frac{4}{5}$:

   (a) součet velikostí stran trojúhelníku $a + b + c$,

   (b) součin velikostí stran trojúhelníku abc,

   (c) součin velikostí kosinů úhlů trojúhelníku $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

   (d) hodnota výrazu $a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma$,

   (e) obsah trojúhelníku S,

   (f) hodnota výrazu $\dfrac{S}{abc}$,

   (g) hodnota výrazu $\dfrac{S}{a+b+c}$,

   (h) hodnota výrazu $\dfrac{S^2}{(a+b+c)abc}$,

   (i) hodnota výrazu $\dfrac{S^2}{(a^3+b^3+c^3)\sqrt[3]{abc}}$.

Řešení a statistické vyhodnocení didaktického testu 4

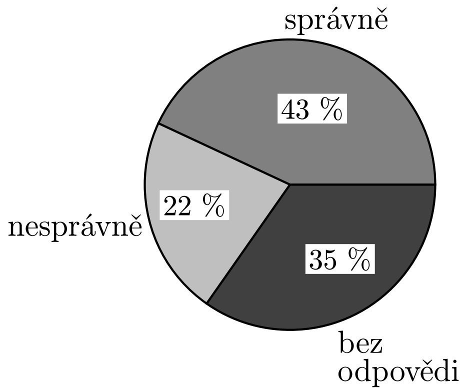
1. (a) Zbytky při dělení daného přirozeného čísla $k > 2$ postupně čísly 2, 3, 4, atd. nemohou tvořit ani posloupnost, která je neklesající, ani posloupnost, která je nerostoucí.

   Zatímco zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, … mohou postupně narůstat, zbytek při dělení číslem $k-2$ je roven číslu 2, zbytek při dělení číslem $k-1$ je roven číslu 1, zbytek při dělení číslem k je nulový a zbytek při dělení číslem větším než k je roven právě číslu k. Zbytky proto nemohou tvořit monotonní posloupnost.

Zbytky, které získáme při postupném dělení zvoleného čísla čísly 2, 3, 4, ..., nezachovávají monotonnost, nemohou tedy být ani invariantem ani poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	43 %
nesprávně	22 %
bez odpovědi	35 %



Správně vyhodnocených odpovědí bylo dvakrát více než nesprávných, nejvíce nesprávných odpovědí vycházelo z chybné úvahy, že s rostoucím dělitelem narůstá i zbytek při dělení daným číslem. Úloha nepatřila k nejobtížnějším, přesto však více než třetina žáků nedokázala svou odpověď vhodně formulovat či vyhodnotit.

(b) Pro všechna přirozená čísla n a k platí nerovnost

$$\frac{n}{k} > \frac{n}{k+1},$$

proto neúplné podíly splňují podmínku

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$$

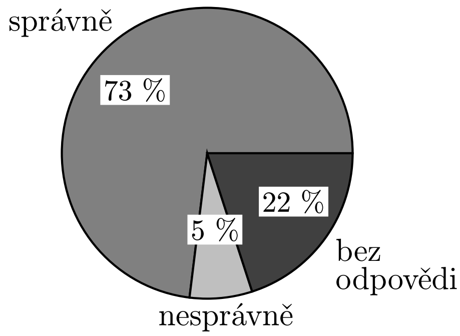
a tvoří tedy nerostoucí posloupnost. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje celou dolní část[1] čísla x.)

Neúplné podíly, které získáme při postupném dělení zvoleného čísla čísly 2, 3, 4, ... , vytvářejí monotonní (nerostoucí) posloupnost, jedná se proto o poloinvariant dané transformace.

[1] $\lfloor x \rfloor$ je takové celé číslo, pro které platí $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

<u>Úspěšnost žáků:</u>

správně	73 %
nesprávně	5 %
bez odpovědi	22 %



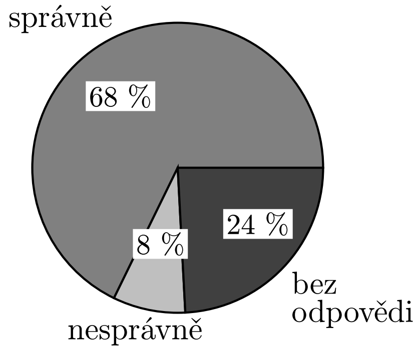
Z výsledků testu je patrné, že tato úloha nečinila žákům potíže. Většina správných odpovědí argumentovala nepřímou úměrností mezi dělitelem a podílem.

(c) Hledání největšího společného dělitele daných dvou přirozených čísel pomocí Eukleidova algoritmu je založeno na tom, že se zbytek, který získáme při dělení dvou přirozených čísel (větší číslo je dělencem, menší dělitelem), stává v následujícím kroku dělitelem a předchozí dělitel novým dělencem. Zbytek při dělení je vždy menší než dělitel, tedy než předchozí zbytek. Posloupnost zbytků proto tvoří klesající posloupnost.

Zbytky při dělení získané užitím Eukleidova algoritmu vytvářejí monotonní klesající posloupnost, jedná se proto o poloinvariant dané transformace.

Úspěšnost žáků:

správně	68 %
nesprávně	8 %
bez odpovědi	24 %



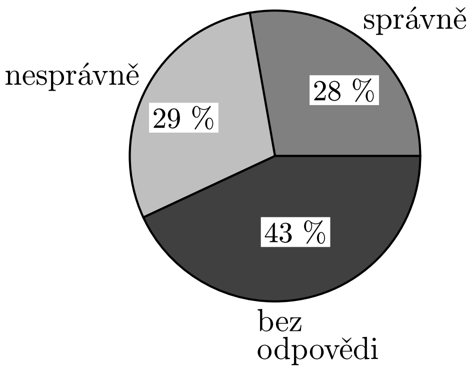
Test prokázal, že úloha nečinila žákům větší potíže. Téměř čtvrtina z celkového počtu žáků však Eukleidův algoritmus nedokázala formulovat a z toho důvodu ponechali žáci otázku bez odpovědi.

(d) Neúplné či úplné podíly při postupném dělení v Eukleidově algoritmu hledání největšího společného dělitele daných dvou čísel tvořit nerostoucí či neklesající posloupnost nemusí. Poslední podíl (který je pochopitelně úplný, neboť poslední zbytek v Eukleidově algoritmu je nutně nulový) je roven přirozenému číslu většímu než jedna. První neúplný podíl však může nabývat libovolné hodnoty.

Neúplné podíly při dělení získané užitím Eukleidova algoritmu nezachovávají monotonnost, nemohou tedy být ani invariantem ani poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	28 %
nesprávně	29 %
bez odpovědi	43 %



Počet žáků, kteří na danou úlohu odpověděli správně, je srovnatelný s počtem žáků s odpovědí nesprávnou. Nejčastější nesprávnou odpovědí bylo tvrzení, že následující neúplný podíl nemůže být větší než předchozí, příp. že je nutně menší než podíl předchozí. I přes znalost algoritmu mnozí žáci nedokázali vyhodnotit danou situaci a raději ponechali otázku nezodpovězenou.

2. Při zobrazení trojúhelníku ve stejnolehlosti s koeficientem

$$\kappa = -\frac{4}{5}$$

zůstávají zachovány velikosti všech úhlů. Velikosti všech zobrazovaných úseček se zmenší o jednu pětinu, proto platí

$$a' = \frac{4}{5}a, \quad b' = \frac{4}{5}b, \quad c' = \frac{4}{5}c.$$

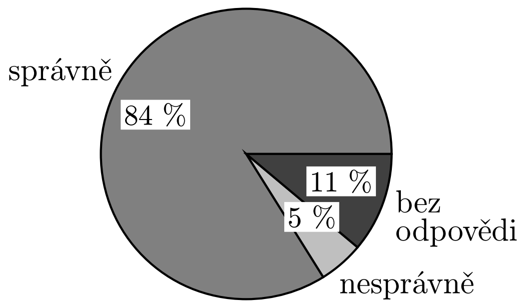
(a) Součet $a + b + c$ velikostí stran trojúhelníku se změní na hodnotu

$$a' + b' + c' = \frac{4}{5}(a + b + c).$$

Součet velikostí stran trojúhelníku se zmenšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	84 %
nesprávně	5 %
bez odpovědi	11 %



Většina odpovědí byla správných. Test prokázal, že úloha nečinila žákům větší potíže.

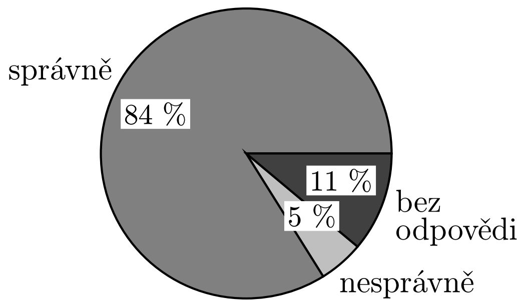
(b) Součin abc velikostí stran trojúhelníku se změní na hodnotu

$$a'b'c' = \left(\frac{4}{5}\right)^3 abc = \frac{64}{125} abc.$$

Součin velikostí stran trojúhelníku se zmenšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	84 %
nesprávně	5 %
bez odpovědi	11 %



Většina odpovědí byla správných. Test prokázal, že úloha nečinila žákům větší potíže.

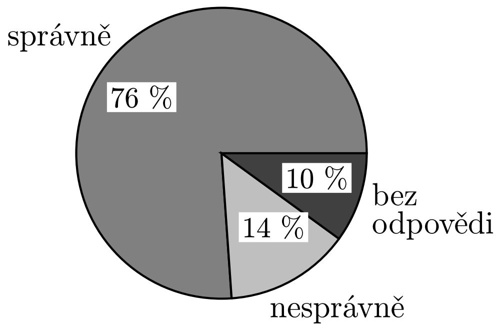
(c) Velikosti úhlů zůstávají stejné, proto i kosiny těchto úhlů jsou neměnné. Součin kosinů velikostí úhlů trojúhelníku proto zůstává konstantní, tj. platí

$$\cos\alpha' \cos\beta' \cos\gamma' = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Hodnota daného výrazu se nemění, je tedy invariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	76 %
nesprávně	14 %
bez odpovědi	10 %



Jak plyne z výledků testu, většina odpovědí byla správných, úloha nečinila žákům větší potíže, přesto však někteří nesprávně vyhodnotili, že se velikosti úhlů také změní.

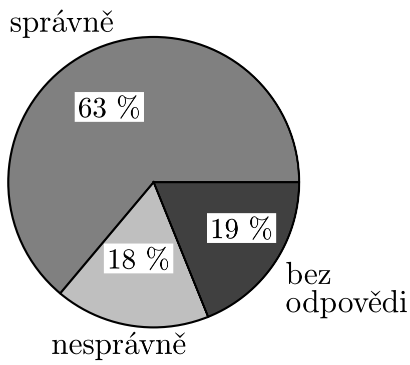
(d) Velikosti úhlů zůstávají stejné, proto i siny velikostí těchto úhlů jsou neměnné. Hodnota výrazu $a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma$ se změní na hodnotu

$$a'\sin\alpha' + b'\sin\beta' + c'\sin\gamma' = \frac{4}{5}(a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma).$$

Hodnota daného výrazu se zmenšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	63 %
nesprávně	18 %
bez odpovědi	19 %



Počet správných odpovědí byl ve srovnání s předchozími otázkami menší, někteří žáci nesprávně uvedli, že daný výraz je invariantem.

(e) Obsah trojúhelníku lze vyjádřit mnoha způsoby. Vyjdeme např. ze vztahu

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

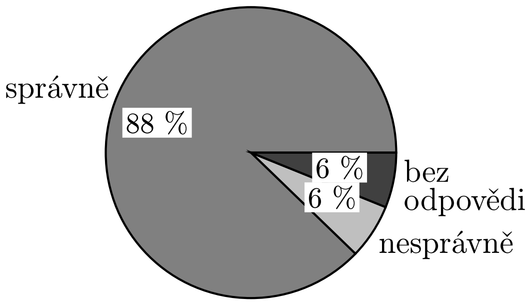
Při použití uvedené transformace se obsah trojúhelníku změní na hodnotu

$$S' = \frac{1}{2} a'b' \sin\gamma' = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 ab \sin\gamma = \frac{16}{25} S.$$

Hodnota daného výrazu se zmenšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	88 %
nesprávně	6 %
bez odpovědi	6 %



Většina odpovědí byla správných. Z výsledků testu plyne, že úloha nečinila žákům větší potíže.

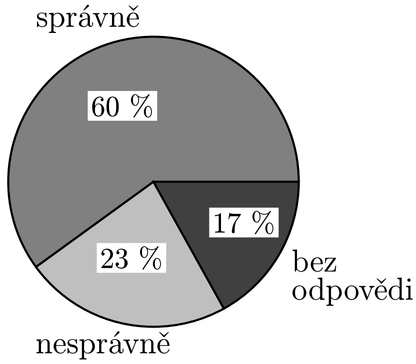
(f) Využitím předchozího výsledku můžeme snadno zjistit hodnotu daného výrazu po transformaci. Po dosazení tak dostáváme

$$\frac{S'}{a'b'c'} = \frac{\frac{16}{25} S}{\left(\frac{4}{5}\right)^3 abc} = \frac{5}{4} \cdot \frac{S}{abc}.$$

Hodnota daného výrazu se zvětšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	60 %
nesprávně	23 %
bez odpovědi	17 %



Počet správných odpovědí byl ve srovnání s předchozími otázkami menší, někteří žáci nesprávně vyhodnotili situaci a uvedli, že daný výraz je invariantem.

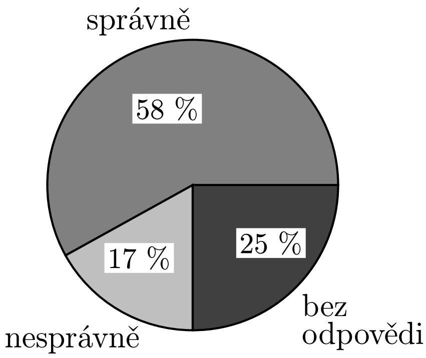
(g) Využitím předchozích výsledků můžeme snadno zjistit hodnotu daného výrazu po transformaci. Po dosazení tak dostáváme

$$\frac{S'}{a'+b'+c'} = \frac{\frac{16}{25}S}{\frac{4}{5}(a+b+c)} = \frac{4}{5}\cdot\frac{S}{a+b+c}.$$

Hodnota daného výrazu se zmenšuje, je tedy poloinvariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	58 %
nesprávně	17 %
bez odpovědi	25 %



Počet správných odpovědí byl ve srovnání s předchozími otázkami menší, někteří žáci nesprávně vyhodnotili situaci a uvedli, že daný výraz je invariantem.

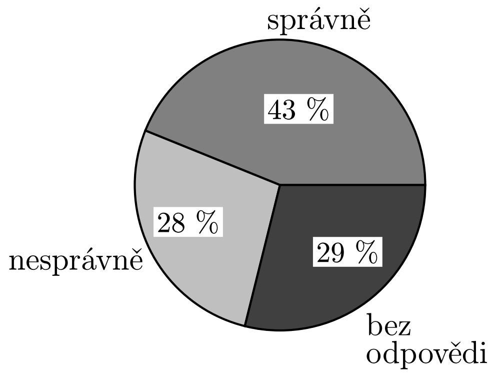
(h) Využitím předchozích výsledků můžeme snadno zjistit hodnotu daného výrazu po transformaci. Po dosazení tak dostáváme

$$\frac{(S')^2}{(a'+b'+c')a'b'c'} = \frac{\left(\frac{16}{25}\right)^2 S^2}{\frac{4}{5}(a+b+c)\left(\frac{4}{5}\right)^3 abc} = \frac{S^2}{(a+b+c)abc}.$$

Hodnota daného výrazu se nemění, je tedy invariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	43 %
nesprávně	28 %
bez odpovědi	29 %



S rostoucí obtížností úloh znatelně přibylo žáků, kteří úlohu nedokázali vyhodnotit a otázku nezodpověděli. Počet nesprávných odpovědí také narostl, protože se někteří žáci přiklonili k nesprávnému závěru, že daný výraz je poloinvariantem.

(i) Využitím předchozích výsledků můžeme snadno zjistit hodnotu daného výrazu po transformaci. Po dosazení tak dostáváme

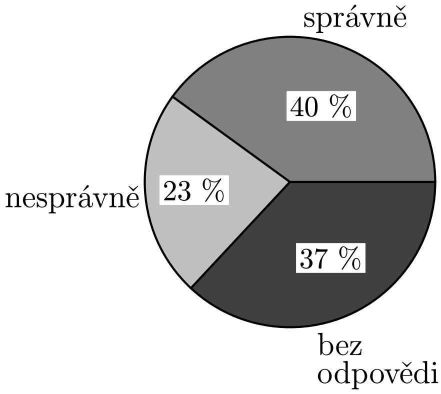
$$\frac{(S')^2}{\left[(a')^3+(b')^3+(c')^3\right]\sqrt[3]{a'b'c'}} = \frac{\left(\frac{16}{25}S\right)^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^3 (a^3+b^3+c^3)\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^3 abc}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^4 S^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^3 (a^3+b^3+c^3)\cdot\frac{4}{5}\sqrt[3]{abc}} = \frac{S^2}{(a^3+b^3+c^3)\sqrt[3]{abc}}.$$

Hodnota daného výrazu se nemění, je tedy invariantem.

Úspěšnost žáků:

správně	40 %
nesprávně	23 %
bez odpovědi	37 %



S rostoucí obtížností úloh znatelně přibylo žáků, kteří úlohu nedokázali vyhodnotit a otázku nezodpověděli. Počet nesprávných odpovědí také narostl, protože se někteří žáci přiklonili k nesprávnému závěru, že daný výraz je poloinvariantem.

2.4 Hledání invariantů

Poslední z testů byl zaměřen na schopnost žáků rozpoznat, které veličiny zůstávají konstantní pro danou transformaci, tj. jsou pro danou transformaci invariantem. Úkolem řešitelů bylo nalézt co nejvíce vlastností, které jsou invarianty.

U tohoto testu není provedeno statistické vyhodnocení, z něhož vyplývá, kolik procent žáků nalezlo jednotlivé dané invarianty. Cílem testu bylo přimět žáky samostatně nahlížet na problémové situace a vyhodnocovat poznatky, které při svém bádání objevili.

Test vypracovávalo celkově 67 žáků, z nichž všichni byli již dříve seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant. Celkový čas na řešení byl 60 minut.

Didaktický test 5

1. Najděte veličiny, resp. vlastnosti, které zůstávají zachovány

   (a) pro všechna reálná čísla c u kvadratické funkce dané funkčním předpisem
   $$y = (x - c)^2 - 1,$$

   (b) pro všechna reálná čísla c u kvadratické funkce dané funkčním předpisem
   $$y = (x - c)^2 - c^2,$$

   (c) pro všechna reálná čísla c u funkce s absolutní hodnotou dané funkčním předpisem
   $$y = |x - c| - 1,$$

   (d) pro všechna kladná reálná čísla c u funkce s absolutní hodnotou dané funkčním předpisem
   $$y = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}|x - c|.$$

Řešení didaktického testu 5

1. Veličiny, resp. vlastnosti, které zůstávají zachovány

   (a) pro všechna reálná čísla c u kvadratické funkce dané funkčním předpisem:
   $$y = (x - c)^2 - 1$$

   - grafem je parabola,
   - hodnota diskriminantu je rovna číslu 4,
   - rozdíl kořenů kvadratické funkce je roven číslu 2,
   - hodnota minima kvadratické funkce je rovna -1,
   - velikost obsahu plochy mezi křivkou grafu a osou x na intervalu $\langle c - 1; c + 1\rangle$ je konstantní,

- vrcholy všech parabol určených daným funkčním předpisem mají souřadnice $V[c, -1]$, leží proto všechny na přímce

$$y = -1.$$

(b) pro všechna reálná čísla c u kvadratické funkce dané funkčním předpisem:

$$y = (x - c)^2 - c^2$$

- grafem je parabola,
- graf prochází počátkem kartézské soustavy souřadnic $O[0, 0]$,
- vrcholy všech parabol určených daným funkčním předpisem mají souřadnice $V[c, -c^2]$, leží proto všechny na parabole

$$y = -x^2.$$

(c) pro všechna reálná čísla c u funkce s absolutní hodnotou dané funkčním předpisem:

$$y = |x - c| - 1$$

- grafem je lomená čára,
- obě polopřímky svírají stále úhel 90°,
- rozdíl hodnot průsečíků dané funkce s osou x je roven číslu 2,
- hodnota minima dané funkce je rovna -1,
- velikost obsahu plochy mezi křivkou grafu a osou x na intervalu $\langle c - 1; c + 1\rangle$ je konstantní,
- minimum nabývají všechny funkce dané funkčním předpisem v bodech, jejichž souřadnice je $V[c, -1]$, leží proto všechny na přímce

$$y = -1.$$

(d) pro všechna kladná reálná čísla c u funkce s absolutní hodnotou dané funkčním předpisem:

$$y = \frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}\,|x - c|$$

- grafem je lomená čára,
- jedna ze dvou polopřímek prochází počátkem kartézské soustavy souřadnic $O[0,0]$,
- velikost obsahu plochy pod křivkou grafu na intervalu $\langle 0; 2c\rangle$ je rovna číslu 1,
- maximum nabývají všechny funkce dané funkčním předpisem v bodech, jejichž souřadnice je $V[c; \frac{1}{c}]$, leží proto všechny na jedné z větví rovnoosé hyperboly

$$xy = 1.$$

2.5 Hodnocení testů

Každý z testů byl zaměřen na zkoumání jiného jevu, přesto však na sebe testy určitým způsobem navazovaly. Získané výsledky dílčích testů dávají jistý obraz vývoje logického myšlení řešitelů.

Daná série testů neměla za úkol sledovat vývoj myšlení jednotlivých řešitelů, hlavním úkolem bylo zjistit, zda jsou žáci získané nové poznatky schopni vhodným způsobem uplatnit při řešení dalších úloh.

Hodnocení didaktických testů 1 a 2

Hlavním úkolem první dvojice testů bylo poukázat na rozdílnost nutných a postačujících podmínek v matematice. První z dvojice testů měl za úkol zjistit, jaké mají žáci znalosti z oboru dělitelnosti přirozených čísel a jakým způsobem je dokáží při samotném vyhodnocení testu uplatnit. Druhý z testů zkoumal schopnost žáků nalézt obecná pravidla při vytváření souboru prvků s danou vlastností. Důležitou součástí testu bylo rozhodnutí, zda zkoumaná vlastnost platí obecně nebo zda pouze pro některé vhodné číselné kombinace.

Přestože otázky byly ve své podstatě stejné, projevila se u některých žáků nejistota při rozhodování. Přestože v prvním ze dvojice testů žáci určili, že zkoumané tvrzení je splněno vždy, ve druhém testu někteří z nich odpověděli, že tvrzení platí jen pro vhodnou kombinaci čísel.

Celkově test navíc prokázal, že žákům středních škol jsou otázky z okruhu dělitelnosti přirozených čísel blízké a srozumitelné, o čemž svědčí celkový počet procent jednak správných, ale také zodpovězených či nezodpovězených otázek.

Hodnocení didaktického testu 3

V dalším testu byla žákům předložena série příkladů, ve kterých bylo jejich úkolem rozhodnout, zda daný vztah je či není invariantem, a příkladů, ve kterých bylo zapotřebí určit, za jakých podmínek bude daná vlastnost splněna. Testovány byly znalosti a dovednosti žáků z planimetrie, týkající se obvodových a středových úhlů a mocnosti bodu ke kružnici. Dalším tématem bylo zkoumání jistých vlastností tětivových čtyřúhelníků.

Do tohoto testování byli zapojeni žáci, kteří byli seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant a kteří měli možnost seznámit se s řešením několika příkladů využívajících algebraické invarianty.

Geometrie u běžných žáků nepatří k oblíbeným partiím matematiky. Srovnávací test (není zde statisticky dopodrobna vyhodnocován) u žáků, kteří nebyli seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant, má svou vypovídající hodnotu především v procentu žáků, kteří úlohu neřešili vůbec. O řešení úlohy (a to ani dílčí) se nepokusilo u nejjednodušší z úloh 52 % a u nejobtížnější z úloh celkem 86 % žáků.

Z výsledků tohoto testu vyplynulo, že žáci, kteří jsou seznámeni s pojmy inavariant a poloinvariant a jejich využití při řešení úloh, jsou schopni mnohem lépe vypozorovat a vyhodnotit některé ze zkoumaných invariantů geometrických. Mnozí však nejsou schopni přesně specifikovat podmínky, které zaručují platnost daného tvrzení, to ale do jisté míry koresponduje s hodinovou dotací planimetrie (a matematiky vůbec) na středních školách. Správné řešení předložili převážně žáci, kteří se pravidelně účastní matematických soutěží a kteří navštěvují matematické kroužky, semináře na školách či se účastní různých matematických soustředění.

Hodnocení didaktického testu 4

V následujícím testu byla žákům předložena série příkladů, u kterých měli rozhodnout, jestli při příslušné transformaci zůstávají některé z veličin neměnné či zda nedochází k jejich jednostranným změnám, tj. zda se jejich hodnota nezvyšuje či nezmenšuje.

V příkladech zaměřených na dělitelnost byly žákům předloženy dva na první pohled jednoduché problémy, které souvisely s hledáním největšího společného dělitele pomocí tzv. Eukleidova algoritmu a s dělením daného čísla postupně různými přirozenými čísly. Geometrická část testu zkoumala schopnosti žáků uplatnit některé ze základních vlastností stejnolehlosti rovinných útvarů, konkrétně stejnolehlosti trojúhelníku.

Srovnávací test (opět zde není statisticky dopodrobna vyhodnocován) u žáků, kteří nebyli seznámeni s pojmy invariant a poloinvariant, má svou vypovídající hodnotu tentokrát v procentu žáků, kteří úlohu vyřešili chybně. Podíl nesprávných odpovědí (bráno pouze z odpovězených odpovědí) u algebraických úloh se pohyboval v rozmezí od 47 % do 72 % žáků a u úloh geometrických od 20 % do 75 % žáků.

Tento test prokázal, že rozhodnutí, zda je, resp. není daná veličina poloinvariantem, patří k těm náročnějším. Pro žáky je nejtěžší úkolem korektně zdůvodnit, proč daná veličina nesplňuje dané podmínky. K řešení pak často docházejí intuitivně, pouze na základě několika singulárních případů, své hypotézy ale zdůvodnit nedokáží.

Hodnocení didaktického testu 5

Poslední z testů byl zaměřen na schopnost žáků rozpoznat, které veličiny zůstávají konstantní pro danou transformaci, tj. jsou pro danou transformaci invariantem. Úkolem řešitelů bylo nalézt co nejvíce vlastností, které jsou invarianty.

Při závěrečném rozboru úloh s žáky vyplynulo, že některé z vlastností považovali za takovou samozřejmost, že ji ani do seznamu nalezených invariantů nezahrnuli (např. poznatek o tvaru a otevřenosti grafu dané funkce).

Z tohoto důvodu není test vyhodnocován statisticky. Za zmínku stojí některé z poznatků o obsahu plochy mezi křivkou a danou souřadnou osou. Tyto postřehy svědčí o schopnostech některých žáků vhodně aplikovat nabyté poznatky o invariantech v dalších úlohách.

Kapitola 3

Invarianty a poloinvarianty v úlohách

Jednotlivé úlohy vyskytující se v matematice je možno třídit mnoha způsoby, tedy nejen z hlediska využité metody řešení úlohy, tj. na úlohy založené na principu invariantů, úlohy využívající poloinvariantů a úlohy smíšené, kdy jsou použity obě zmíněné metody.

Jedním z vhodných způsobů třídění těchto úloh je jejich rozdělení podle oblastí matematiky, v nichž se daná úloha vyskytuje. Třídění, které je prezentováno v této práci, není samozřejmě úplné, ale nabízí určitý náhled na nejčastější oblasti matematiky, ve kterých je možno zmíněné metody řešení úloh výhodně využít.

V jednotlivých podkapitolách jsou na několika úlohách ukázány možnosti využití jednotlivých metod řešení, u těchto úloh je uvedeno úplné řešení, tentokrát však bez didaktického komentáře.

Další prezentované úlohy jsou již neřešené, uvedené pouze s odkazem na zdroj úlohy, slouží jako určitá databáze příkladů pro samostatné studium řešitelů.

3.1 Úlohy o pokrývání

Jednou z konkrétních oblastí matematiky, kde je možno se s invarianty setkat, jsou úlohy o pokrývání roviny jedním nebo více typy útvarů. Nejjednodušší variantou je pokrývání čtvercové či obdélníkové desky (například si ji lze představit jako šachovnici nebo její část) tzv. polyminy (viz např. [10]). Pod pojmem polymino si můžeme snadno představit souvislý útvar složený z konečného počtu jednotkových čtverců, které na sebe navazují pouze prostřednictvím celých svých stran. Přesněji bychom mohli definovat, že žádné polymino nerozdělí rovinu na dvě a více disjunktních oblastí, tj. nevzniká žádná vnitřní oblast polymina. Daná polymina tak mohou být buď přímá (tj. ve tvaru obdélníku $1 \times n$) nebo jsou uskupena dle nějakých pravidel.[1]

Hovoříme-li obecně o šachovnici, nemáme většinou na mysli pouze klasickou čtvercovou desku o osmi polích v každém směru. Pod pojem šachovnice zahrnujeme všechny čtvercové desky s celočíselným počtem polí. Budeme-li v následujících příkladech hovořit o šachovnicích, budeme tak činit pouze v případech, kdy jsou pole desky pravidelně střídavě označena v obou kolmých směrech dvěma barvami. V ostatních případech se budeme držet přesnějšího pojmu čtvercová deska (daného typu).

Metoda invariantů je právě nejčastějším principem, kterého se užívá při důkazových úlohách existence či naopak neexistence takového pokrytí. Principem důkazu je vhodné číselné nebo barevné označení jednotlivých polí pravoúhelníkové sítě tak, aby polymino, které na danou šachovnici umísťujeme, pokrylo vždy daný počet polí stejného typu. To pak následně využijeme pro samotný důkaz existence či neexistence takového typu pokrytí desky.

Metoda založená na vhodném přiřazení symbolů jednotlivým polím patří k modernějším typům metod, kterým se souhrnně říká *metody kódování*. Pomocí vztahů mezi vhodně vybranými sousedními symboly lze následně rozhodnout o chování celého systému či dané části systému. Následným de-

[1] Podle podobnosti s některými písmeny abecedy je pak často označujeme jako např. L-trimino, T-tetromino, W-pentomino apod.

šifrováním důsledků takového typu zakódování jednotlivých polí získáme informace, které mohou pomoci k vyřešení daného problému.

Způsobů, jak označit jednotlivá pole desky, je samozřejmě několik. Vybrat takové označení, které nám umožní úlohu vyřešit, je tak základem úspěšného vyřešení problému. Ukažme na několika příkladech, jak pomocí vhodného označení polí získáme invariant, který můžeme využít pro vyřešení úlohy.

Pro žáky je nejobtížnějším krokem nalezení vhodného kódování. Způsob označení jednotlivých polí v jednom příkladě nemusí být klíčem k vyřešení příkladu jiného. Setkají-li se však žáci s jistým druhem kódování, snaží se nejprve ověřit, zda takový způsob označení polí napomůže vyřešení nového problému. V opačném případě se jen pokoušejí mírně daná kódování modifikovat, a to přesto, že důkladná analýza problému bývá tou nejjednodušší cestou pro správný způsob označení polí.

Příklad 12 (viz např. [8])

Rozhodněte, zda je možné čtvercovou desku typu 8×8 vyplnit pomocí jednoho čtvercového tetromina (čtverec 2×2) a patnácti L-tetromin (útvar složený ze 4 jednotkových čtverců ve tvaru písmene L). $\square$

Řešení. Jak už bylo zmíněno, metoda invariantů bývá využívána převážně jako důkazová metoda neexistence takového pokrytí. Vyplníme jednotlivá pole desky následujícím způsobem. Do prvního, třetího, pátého a sedmého sloupce vepíšeme číslo 1, do zbývajících polí číslo 0. Máme tak stejný počet jedniček a nul, a to 32.

1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0

Pokud k pokrytí čtvercové desky použijeme čtvercové tetromino, pokryje, bez ohledu na jeho polohu na desce, vždy právě dvě pole s číslem jedna a dvě pole s číslem nula. Naproti tomu L-tetromino bude pokrývat vždy buď jedno pole s jedničkou a tři pole s nulou, nebo naopak, jedno pole s nulou a tři pole s jedničkou.

Použijeme-li tedy patnáct L-tetromin, pokryjeme patnáctkrát lichý počet nul a patnáctkrát lichý počet jedniček. Celkový počet pokrytých polí s jedničkami, stejně tak i pokrytých polí s nulami, je tedy vyjádřen lichým číslem. To je ale ve sporu s tím, že bychom společně s umístěním čtvercového tetromina pokryli 32 polí s jedničkou a 32 polí s nulou. (Invariantem je tak parita daného počtu polí daného typu.) ■

Příklad 13 (viz např. [10])

Ze čtvercové desky $(2n + 1) \times (2n + 1)$ je odděleno jedno rohové pole. Určete, pro která přirozená n lze takto upravenou desku pokrýt dominy tak, že jedna polovina domin je na dané desce orientována jiným směrem než druhá polovina. □

Řešení. Bez újmy na obecnosti nechť je odděleno levé horní pole. V prvním řádku i v prvním sloupci je tak $2n$ polí, která můžeme pokrýt n dominy (polovina je vodorovně, polovina svisle). Zbývá tedy oblast $2n \times 2n$. Označme pole tohoto čtverce opět po sloupcích střídavě pomocí jedniček a nul. (Pro 8×8 je situace znázorněna na obrázku.)

1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0

Celkový počet dominových kostek, který lze na tuto šachovnici umístit, je roven $2n^2$, přičemž n^2 jich leží vodorovně a n^2 svisle. Každé vodorovně ležící domino pokrývá dvojici různých čísel, tj. pokrývá stejný počet nul a jedniček. Každé svisle ležící domino pokrývá dvojici stejných čísel, tj. pokrývá sudý počet nul a sudý počet jedniček. Protože jedniček a nul je na šachovnici stejný počet, musí být pomocí svisle ležících domin pokrytý také stejný sudý počet nul a jedniček. Proto je n^2 a tedy i n číslo sudé. Pro takovou čtvercovou desku velmi snadno ověříme, že alespoň jedno pokrytí splňující podmínky ze zadání existuje, např. rozdělení na dvě stejné obdélníkové desky typu $2n \times n$, kdy jednu desku vyplňujeme dominy ve vodorovném směru a druhou desku dominy ve svislém směru. ■

Příklad 14 (viz např. [20])

Rozhodněte, zda lze čtvercovou desku typu 10×10 pokrýt 25 přímými tetrominy. □

Řešení. Pole čtvercové desky vhodně vyplníme čísly 1, 2, 3 a 4 tak, aby libovolná 4 sousední pole ve vodorovném i ve svislém směru obsahovala všechna čtyři čísla. Obarvení tedy může být následující:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Každé přímé tetromino v tomto případě pokrývá čtyři různá čísla. Na dané čtvercové desce je sice zapsáno 25krát číslo 1 a 25krát číslo 3, ale jen 24krát číslo 4. Číslo 2 zapsáno na desce celkem 26krát. Není proto možné šachovnici daným způsobem pokrýt. V případě umístění 24 tetromin zůstávají poslední čtyři pole s čísly 1, 2, 2, 3. Tato pole však nemohou být součástí žádného tetromina. ■

Příklad 15

Ze šachovnice 8×8 jsou oddělena protilehlá rohová pole. Dokažte, že tuto šachovnici nelze pokrýt 31 dominy. □

Řešení. Je-li šachovnice obarvena standardním způsobem, jsou odstřižena dvě pole stejné barvy, tj. např. bílá. Na šachovnici tak zůstává 32 polí černých a 30 polí bílých. Každé domino pokrývá dvojici různých barev, proto po pokrtí 30 dominy zbývají na šachovnici dvě pole barvy černé, která už pokrýt jednou kostkou není možné. ■

Další úlohy využívající invariantů a poloinvariantů, které souvisejí se šachovnicemi či nějakými typy pravoúhelníkových desek, mají svou podstatu v transformacích, které můžeme aplikovat na vybraný řádek, sloupec či šikmou řadu. Danou transformací rozumíme buď nějakou číselnou operaci nebo záměnu polí podle jistých, předem daných pravidel.

Není tedy zapotřebí dělit šachovnici či desku na samostatné díly. I zde však vhodné kódovaní může usnadnit řešiteli úlohu. Ukázkou mohou být následující tři úlohy.

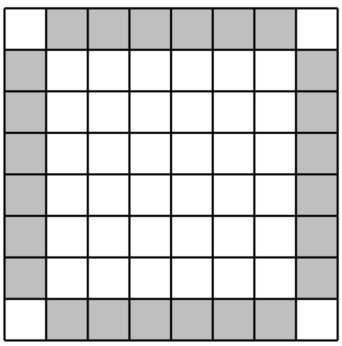
Příklad 16 (autor Radek Horenský)

Na každém poli šachovnice 8×8 je položen černý žeton, jen v prvním řádku jsou střídavě (pravidelně) umístěny bílé a černé žetony. Máme možnost zvolit si libovolnou vodorovnou, svislou nebo šikmou řadu (tj. řadu rovnoběžnou s některou z daných diagonál) a změnit barvu všech žetonů v dané řadě na opačnou. Rozhodněte, zda můžeme po konečném počtu těchto operací docílit toho, že:

a) všechna pole po obvodu šachovnice budou pokryta žetony stejné barvy (pole uvnitř mohou být pokryta libovolně).

b) všechna bílá pole šachovnice budou pokryta žetony bílé barvy a všechna černá pole šachovnice budou pokryta žetony černé barvy. □

Řešení. Ukážeme, že taková situace nastat nemůže. Uvažujme všechna pole na obvodu šachovnice vyjma rohových polí. (Viz obrázek.)



Ať zvolíme řadu libovolně, vždy tato řada bude obsahovat sudý počet z těchto uvažovaných polí, a to 6, 2 nebo 0. Při každém takovém přebarvení polí zůstane zachována parita počtu bílých i černých polí v této oblasti. Na počátku je však na těchto polích umístěno 21 černých žetonů a 3 žetony bílé. V každém kroku tedy zůstává počet žetonů dané barvy vyjádřen lichým číslem. Nelze tak dostat 24 žetonů stejné barvy, jak by bylo zapotřebí u pokrytí obvodu jednotnou barvou.

Nelze proto ani docílit situace, kdy by žetony na šachovnici pravidelně měnily svou barvu, i v tomto případě by na uvažovaných polích musel být sudý počet bílých a černých polí, což však nelze. ■

Příklad 17 (56. ročník MO, A-III-1)

Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$, $(n \geq 2)$ postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou. □

Řešení. Pro sudá n je daná úloha řešitelná, protože lze nalézt cestu vycházející z rohového pole tak, že postupně projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$. Ukažme, že pro lichá $n \geq 3$ taková cesta neexistuje. Uvažujme šachovnici s černým polem v rohu. Každý tah „šikmo“ spojí dvě pole stejné barvy ze sousedních řad šachovnice. Pro lichá n je však počet černých polí v libovolných dvou sousedních řadách odlišný. Proto minimálně jedno pole v první řadě a jedno pole v poslední řadě není možno spojit „šikmo“ s jiným polem šachovnice. Vzhledem k tomu, že obě pole nemohou být koncovým polem cesty (cesta může končit tahem „přímo“, který spojuje dvě sousední pole různé barvy, ale takové pole může být jen jedno), není možné danou šachovnici předepsaným způsobem projít. ■

Poznámka: Invariant, který lze při řešení této úlohy použít, je dán rozdílem počtu černých polí na lichých řádcích a počtu černých polí na sudých řádcích šachovnice $n \times n$. Tento rozdíl je v případě lichého n roven číslu n. Při dodržení všech podmínek uvedených v zadání (každé černé pole ze sudé řady je spojeno s nějakým černým polem z liché řady) však může tento rozdíl být roven maximálně číslu 1.

Příklad 18 (viz např. [17], [20])

Na každém poli čtvercové tabulky $2\,009 \times 2\,009$ je zapsáno nějaké celé číslo, přičemž součet všech čísel v tabulce je 2 009. V každém kroku můžeme změnit znaménka u každého z čísel v libovolné řadě či sloupci. Rozhodněte, zda můžeme po konečném počtu takových operací získat situaci, kdy v žádném řádku ani sloupci není záporný součet. □

Řešení. Je-li součet v každém řádku i sloupci nezáporný, je úloha vyřešena. V opačném případě vybereme řadu či sloupec, kde je součet čísel záporný. Po změně znamének bude tento součet kladný a díky tomu se součet čísel v celé tabulce zvýší. Vzhledem k tomu, že tento součet nemůže neustále narůstat (je limitován součtem absolutních hodnot čísel z původní tabulky), musíme proto po konečném počtu kroků získat tabulku s nezápornými součty v každém řádku i sloupci. ■

3.1.1 Další úlohy pro samostatnou práci

Dalšími vhodnými úlohami, které mohou vhodně rozvíjet schopnosti a dovednosti žáků, jsou určité modifikace řešených úloh z této podkapitoly. Jedním ze způsobů modifikace úlohy je změna tvaru daného polymina, jiným je naopak zobecnění daného problému pro obecnou velikost obdélníkové či čtvercové desky.

V literatuře (viz např. [20]), [10], [11]) je uveřejněno mnoho úloh o pokrývání rovinných desek, některé z úloh mají svou analogii také ve vyplňování krychle či kvádru prostorovými útvary, které vzniknou „slepením“ několika jednotkových krychlí, podobně jako je tomu u polymin. I zde je možné nalézt vhodné kódování buněk a objevit příslušné invarianty.

Příklad 19 (viz např. [20]), [11])

Dokažte, že šachovnici 8×8 nelze pokrýt patnácti T-tetrominy a jedním čtvercovým tetrominem. □

Příklad 20 (autor Radek Horenský)

Dokažte, že šachovnici $2n \times 2n$ nelze pokrýt lichým počtem T-tetromin a lichým počtem čtvercovým tetrominem. □

Příklad 21 (autor Radek Horenský)

Dokažte, že šachovnici $n \times n$ lze beze zbytku pokrýt T-tetrominy pouze tehdy, je-li n dělitelné čtyřmi. □

Příklad 22 (viz např. [20])

Rozhodněte, které pole šachovnice 8×8 může zůstat nepokryté, jestliže zbytek šachovnice pokryjeme dvaceti jedním přímým triminem. □

3.2 Úlohy založené na dělitelnosti

Velká část úloh využívajících číselných invariantů je založena na dobrém zvládnutí práce s kriterii dělitelnosti. Nejčastějším kriteriem je dělitelnost číslem 2, které je častěji prezentováno jako parita daného výrazu. Ukázalo se, že dalšími významnými kriterii z hlediska dělitelnosti jsou kriteria založená na dělitelnosti čísly 3 a 9, některé příklady jsou založeny na skryté dělitelnosti i jinými čísly, především se jedná o prvočísla 5, 7 a 11.

Některé z úloh využívajících dělitelností byly podrobně popsány a vyřešeny v předchozích kapitolách, řešení několika dalších úloh bude prezentováno nyní.

Příklad 23 (autor Radek Horenský)

Rozhodněte, zda je možno čísla $1, 2, \ldots, 33$ rozdělit do 11 skupin po třech číslech tak, že největší číslo v každé skupině je rovno součtu zbývajících dvou?

□

Řešení. Ukážeme, že to nelze. V každé skupině se vyskytují buď všechna tři čísla sudá nebo jedno číslo sudé a dvě lichá. To ale znamená, že lichých čísel musí být celkově sudý počet. To je ale v rozporu se zadáním, protože mezi čísly 1 až 33 je právě 17 lichých čísel a 16 sudých.

Invariantem je v tomto případě parita součtu všech čísel. V každé uvažované skupině musí být součet sudý, kdežto celkový součet čísel od 1 do 33 je roven 561, tedy číslu lichému. ■

Příklad 24 (viz např. [3])

Dokažte, že rovnice

$$a^2 + b^2 = 3(s^2 + t^2)$$

nemá řešení v oboru přirozených čísel. □

Řešení. Předpokládejme, že existuje uspořádaná čtveřice (a_1, b_1, t_1, s_1) přirozených čísel, která vyhovuje rovnici

$$a_1^2 + b_1^2 = 3(s_1^2 + t_1^2).$$

Je patrné, že levá strana rovnice je dělitelná číslem 3. Zbytek, který lze získat při dělení druhé mocniny přirozeného čísla číslem 3, může nabývat pouze hodnoty 0 (je-li číslo dělitené číslem 3) nebo hodnoty 1 (v případě, že dané číslo je s číslem 3 nesoudělné).

Součet dvou druhých mocnin může být dělitelný číslem 3 pouze v případě, kdy obě hodnoty a_1 i b_1 jsou násobky čísla 3. Je tedy

$$a_1 = 3a_2, \quad b_1 = 3b_2.$$

Dosazením za a_1 a b_1 po snadné úpravě obdržíme

$$3(a_2^2 + b_2^2) = s_1^2 + t_1^2.$$

Z analogických důvodů jsou také t_1 i s_1 násobky čísla 3. Je tedy

$$t_1 = 3t_2, \quad s_1 = 3s_2.$$

Po opětovném dosazení a vydělení obou stran získané rovnice číslem 3 lze získat rovnici

$$a_2^2 + b_2^2 = 3(s_2^2 + t_2^2).$$

Získali jsme tak uspořádanou čtveřici (a_2, b_2, t_2, s_2) přirozených čísel, která také vyhovuje dané rovnici, přičemž

$$a_1 > a_2, \quad b_1 > b_2, \quad s_1 > s_2, \quad t_1 > t_2.$$

Uvedený postup lze opětovně aplikovat na získanou rovnici a získat tak nekonečné řetězce přirozených čísel, kde odpovídající si složky řetězců jsou složkami řešení dané rovnice. To ale podle FMID není možné.

Dostáváme se tak do sporu s předpokladem, že existuje uspořádaná čtveřice přirozených čísel, která splňuje rovnici

$$a^2 + b^2 = 3(s^2 + t^2).$$

Daná rovnice tedy nemá řešení v oboru přirozených čísel. ■

Příklad 25 (autor Radek Horenský)

Mějme v kartézské soustavě obarveny mřížové body následujícím způsobem: Je-li obarven bod $[a, b]$, můžeme obarvit i bod $[a + 1, b + 1]$. Jsou-li obě souřadnice bodu $[a, b]$ sudé, můžeme obarvit i bod $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b]$. Jsou-li obarveny body $[a, b]$ a $[b, c]$, lze obarvit i bod $[a, c]$. Na počátku byl obarven bod $[36, 64]$. Rozhodněte, zda bude obarven po konečném počtu kroků také bod $[49, 81]$. □

Řešení. Sledujme, jak se mění rozdíl daných souřadnic při jednotlivých transformacích. Počáteční rozdíl $b-a$ je 28. Přičteme-li k oběma souřadnicím číslo 1, zůstane rozdíl zachován. Ukažme, že rozdíl zůstává násobkem čísla 7.

Je-li $b-a$ rozdílem dvou sudých čísel a současně násobkem sedmi, je vzhledem k nesoudělitelnosti čísel 2 a 7 dělitelný sedmi i rozdíl polovičních hodnot. Stejně tak z dělitelnosti číslem 7 pro rozdíly $b - a$ a $c - b$ plyne dělitelnost i pro rozdíl $c - a$. Všechny obarvené body tedy mají rozdíl souřadnic roven násobku sedmi. Mezi tyto body ale rozhodně nepatří bod $[49, 81]$, protože $81 - 49 = 32$ není násobkem sedmi.

Dělitelnost daného rozdílu číslem 7 zůstává při všech popsaných transformacích zachována, je tedy invariantem. ■

3.2.1 Další úlohy pro samostatnou práci

Dalšími vhodnými úlohami, které mohou vhodně rozvíjet schopnosti a dovednosti žáků, jsou různé diofantické rovnice či vhodné modifikace již dříve prezentovaných úloh.

V literatuře můžeme objevit řadu publikací, v nichž jsou uveřejněny a řešeny různé diofantické rovnice. O oblibě této tematiky mezi autory matematických úloh svědčí fakt, že téměř v každém ročníku Matematické olympiády jsou alespoň dvě úlohy založené na dělitelnosti vhodným číslem.

Příklad 26 (viz např. [20])

Statečný rytíř se utkal s trojhlavým drakem a chtěl předvést svoji statečnost tak, že drakovi usekne všechny hlavy. To mu ovšem nevyšlo. Ukázalo se, že po useknutí jedné hlavy drakovi narostou tři nové. Rytíř ale urputně pokračoval v sekání hlav. Ve chvíli, kdy se rozhodl boj vzdát, drakovi napočítal 2 006 hlav. Počítal správně? □

Příklad 27 (autor Radek Horenský)

Rozhodněte, pro jaká přirozená čísla k nelze čísla $1, 2, 3, \ldots, 3k$ rozdělit do k skupin po třech číslech tak, že největší číslo v každé skupině je rovno součtu zbývajících dvou? □

Příklad 28 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři přirozená čísla, která tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti? □

Příklad 29 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři přirozená čísla, která tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti? □

Příklad 30 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do n. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Pro která n můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři po sobě jdoucí přirozená čísla? □

Příklad 31 (autor Radek Horenský)

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do n. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla zapsaná na tabuli a místo nich napíšeme na tabuli jejich součin. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Dokažte, že pro žádné n nemůžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři přirozená čísla, která tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. □

Příklad 32 (viz např. [20])

Anna má krabici, v níž je osm krabiček. Některé z těchto krabiček obsahují osm menších krabiček, z nichž některé obsahují osm ještě menších krabiček. Je možné, aby v této konfiguraci krabiček (nezávisle na jejich velikosti) bylo 1 000 krabiček prázdných? □

Příklad 33 (59. ročník MO, A-III-3)

Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

a) Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?

b) Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany. □

Příklad 34 (viz např. [3])

Jsou dány posloupnosti (x_n) a (y_n) zadané rekurentními předpisy

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n, \quad \text{kde} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4,$$

$$y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n, \quad \text{kde} \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2.$$

a) Ukažte, že pro všechna nezáporná celá n platí $x_n^2 - 5y_n^2 = -4$.

b) Předpokládejme, že a a b jsou přirozená čísla taková, že vyhovují předpisu $a^2 - 5b^2 = -4$. Ukažte, že existuje přirozené číslo k takové, že $a = x_k$ a $b = y_k$. □

Příklad 35 (viz např. [3])

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$2^x - 1 = xy.$$

□

Příklad 36 (viz např. [3])

V oboru celých nezáporných čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = xyz.$$

□

Příklad 37 (viz např. [3], 22. ročník IMO)

Najděte maximální hodnotu výrazu $m^2 + n^2$, jestliže m a n jsou celá čísla mezi čísly 1 a 1 981, která vyhovují rovnici

$$\left(n^2 - mn + m^2\right)^2 = 1.$$

□

Příklad 38 (viz např. [3])

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel (a, b), pro něž je $a^2 + b^2 + 1$ násobkem $ab + a + b$. □

Příklad 39 (51. ročník MO, B-I-4)

Je dáno n $(n \geq 2)$ přirozených čísel, s nimiž můžeme provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a nahradíme je jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční $n-$tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže n se rovná

a) 2 000,

b) 35,

c) 3,

d) 17.

□

3.3 Úlohy z kombinatorické geometrie

Pod souhrnný pojem kombinatorická geometrie je možno zahrnout mnoho dílčích geometrických oblastí. Do této kategorie spadají úlohy o pokrývání desek nepřekrývajícími se nebo překrývajícími se danými útvary, úlohy o počtu stěn, vrcholů či hran daného mnohostěnu, úlohy zkoumající vztahy mezi body, úsečkami, resp. přímkami v rovině, úlohy vyžadující nalezení vhodného obarvení bodů či úseček v rovině, aj.

V této podkapitole bude poukázáno na metodu, při níž lze vhodným označením či očíslováním objektů docílit a pomocí jistého kvantitativního invariantu rozhodnout, zda je možno pomocí zadaných pravidel danou kobminaci prvků vytvořit či nikoli.

Příklad 40 (autor Radek Horenský)

V každém vrcholu pravidelného dvanáctiúhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout do jediného vrcholu dvanáctiúhelníku. □

Řešení. Označme vrcholy daného dvanáctiúhelníku po řadě čísly 1 až 12. Přemístíme-li dvě mince na sousední pole, potom se součet čísel „pod oběma mincemi“ nezmění (nenastane-li přesun jedné mince mezi vrcholy s čísly 1 a 12) nebo se daný součet zvětší či zmenší právě o 12. Pokud by bylo možno přemístit všechny mince na jedinou hromádku, byl by celkový součet čísel pod všemi mincemi násobkem dvanácti. Jejich součet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$$

však násobkem dvanácti není, při dělení dvanácti dává zbytek 6. Zbytek při dělení 12 je tedy invariantem. Dané mince nelze proto přemístit do jediného vrcholu. ■

Příklad 41 (58. ročník MO, A-I-6, autor Radek Horenský)

V každém vrcholu pravidelného 2 008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
a) na 8 hromádek po 251 minci,
b) na 251 hromádek po 8 mincích. □

Řešení. Očíslujme vrcholy daného mnohoúhelníku po řadě čísly 1, 2, …, 2 008. Přiřaďme každé minci číslo vrcholu, v němž se (aktuálně) nachází. Všimněme si, jak se změní součet S všech 2 008 čísel přiřazených jednotlivým mincím, když povoleným způsobem přesuneme libovolnou dvojici mincí. Nenastane-li přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008, hodnota součtu S se zřejmě nezmění, neboť jedné z přesouvaných mincí se přiřazené číslo o 1 zvětší, druhé přesouvané minci se přiřazené číslo o 1 zmenší (čísla přiřazená ostatním mincím, jež zůstaly na místě, se nezmění).

Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008 nastane (a nejde-li přitom o pouhou výměnu dvou mincí mezi vrcholy 1 a 2 008), součet S se změní na hodnotu $S \pm 2\,008$, neboť čísla přiřazená přesouvaným mincím se buď obě zvětší, nebo obě zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a 2 007. Po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční hodnoty $S_0 = 1 + 2 + ... + 2\,008$ změní na hodnotu $S = S_0 + 2\,008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1\,004 \cdot 2\,009$.

a) Máme-li získat 8 hromádek po 251 minci, musí být výsledný součet S násobkem 251. To je však splněno vždy, neboť $S = 251(8k + 4 \cdot 2\,009)$. Stačí proto nalézt aspoň 1 postup, jak mince dle daných podmínek přemístit. Budeme-li mince z dvojic vrcholů 1 a 2 008, 2 a 2 007, atd. přesouvat vždy v opačném směru, snadno vytvoříme 8 hromádek o 251 minci např. ve vrcholech 1 001, 1 002, 1 003, …, 1 008.

b) Ukážeme, že získat 251 hromádek po 8 mincích nelze. Kdybychom připustili, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po 8 mincích, musel by součet S být násobkem 8. Číslo $2\,008k$ násobkem osmi je, číslo $1\,004 \cdot 2\,009$ nikoliv. Tím je tvrzení o neexistenci přeskupení daného počtu mincí dokázáno. ■

Příklad 42 (58. ročník MO, A-III-5, autor Radek Horenský)

V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \le k \le n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \le k \le n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n+1-k$ mincí. □

Řešení. Ukážeme, že to lze provést pro $n = 6k+1$ nebo pro $n = 6k-1$. Uvažujme součin aktuálního počtu mincí ve vrcholu a indexu daného vrcholu. Označme S součet všech těchto součinů. Na začátku je to

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \ldots + n\cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

na konci

$$S' = 1\cdot n + 2\cdot(n-1) + \ldots + n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Nenastane-li přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a n, hodnota součtu S se nezmění, neboť jedna z přesouvaných mincí hodnotu S o 1 zvýší, druhá z mincí hodnotu S o 1 sníží. Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a n nastane (a nejde-li přitom o pouhou výměnu dnou mincí mezi vrcholy 1 a n), součet S se změní na hodnotu $S\pm n$, neboť obě přesouvané mince hodnotu S buď zvětší, nebo zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a $n-1$. Rozdíl konečného a počátečního stavu $S-S'$ tedy musí být násobkem n. Tento rozdíl

$$S - S' = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

je násobkem n pouze tehdy, je-li $n-1$ nebo $n+1$ násobkem 6.

Současně je však třeba ukázat, že v takovém případě toto přeskupení lze provést. Jednou z možností je např. následující postup. Přesuneme $n-1$ mincí z vrcholu n na vrchol 1 (o 1 pole, přes rozhraní), $n-3$ mincí z vrcholu $n-1$ na vrchol 2 (o 3 pole, přes rozhraní) atd. Celkem provedeme

$$(n-1)\cdot 1+(n-3)\cdot 3+\ldots 2\cdot(n-2)=$$
$$=n\cdot\Big(1+3+\ldots+(n-2)\Big)-\Big(1^2+3^2+\ldots+(n-2)^2\Big)=$$
$$=n\cdot(n-1)^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n\cdot\frac{(n-1)(5n-4)}{6}$$

tahů. V obou případech, tj. pro $n=6k+1$ i pro $n=6k-1$ nabývá zlomek $\frac{1}{6}(n-1)(5n-4)$ celočíselných hodnot, celkový počet tahů je tedy násobkem čísla n. Všechny tyto tahy však lze kompenzovat pohybem libovolné mince v opačném směru o příslušný počet celých kol. ■

Komentář k uvedenému řetězci úloh

- První z trojice úloh byla úlohou motivační, kdy základem pro správné vyřešení úlohy bylo objevení vhodného invariantu. Tímto invariantem je zbytek, který získáme při dělení součtu všech čísel pod jednotlivými mincemi číslem 12.
- Druhá úloha, na rozdíl od předchozí úlohy, už vyžaduje (kromě řešení obdobného problému v jedné z částí) také nalezení vhodného způsobu přemísťování mincí. Jakým způsobem jsou oba objevené poznatky využity, je ukázáno ve druhé části úlohy.
- Třetí, závěrečná úloha vyžaduje od žáků (kromě nalezení vhodného invariantu a způsobu přemísťování mincí) již abstraktní myšlení a logicky správně podložené zdůvodnění, za jakých podmínek je dané přemístění možné.

Jinou možností využití geometrického kombinatorického přístupu je nalezení vhodného uspořádání prvků ve vytvořených skupinách, čímž je možno minimalizovat či maximalizovat hodnotu jistého výrazu a ukázat tak, že se jedná o poloinvariant.

Příklad 43 (viz např. [29])

V rovině je dáno celkem 2 008 bodů. Dokažte, že existuje 1 004 disjunktních úseček, které mají krajní body v těchto daných bodech. □

Řešení. Spojíme-li libovolným způsobem dané body do dvojic, lze vypočítat daný součet velikostí takových úseček. Jestliže spolu úsečky nemají žádný společný bod, jsme hotovi. V opačném případě vyberme takové dvě úsečky, které mají společný průsečík. Nechť jsou to úsečky KL a MN. Nahraďme tuto dvojici úseček jinou dvojicí, a to KM a LN. Protože dané body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku $KMLN$, bude dle trojúhelníkové nerovnosti součet délek úseček KM a LN menší než součet délek úseček KL a MN. Součet délek všech 1 004 úseček se tedy zmenší.

Protože existuje jen konečný počet možností, jak body na počátku pospojovat, existuje také jen konečný počet možností pro daný součet délek všech těchto 1 004 úseček. V určité fázi proto musíme po konečném počtu kroků dojít k situaci, kdy jsou všechny úsečky disjunktní. ■

Příklad 44 (autor Radek Horenský)

Ve třídě, kde jsou jen studentky s blond nebo s černými vlasy, má každá dívka lichý počet kamarádek. První den se rozhodne první dívka, že přizpůsobí barvu svých vlasů většině svých kamarádek, tj. mají-li převahu černovlasé kamarádky, rozhodne se pro černou barvu barvu vlasů, v opačném případě zvolí blond vlasy. Druhý den se ke stejnému kroku rozhodne druhá dívka, atd. (Poté, co danou volbu provede i poslední dívka, pokračuje opět dívka první.) Dokažte, že po jisté době si už žádná z dívek nebude své vlasy přebarvovat na opačnou barvu. □

Řešení. Uvažujme všechny dvojice kamarádek, které mají opačnou barvu vlasů. Počet takových dvojic označme S. Pokud se rozhodne dívka pro změnu barvy svých vlasů, znamená to, že měla původně více kamarádek s jinou barvou vlasů než kamarádek se stejnou barvou vlasů. Po obarvení se tedy počet S dvojic kamarádek s různou barvou vlasů musí nutně snížit. Vzhledem k tomu, že je tento počet vyjádřen nezáporným celým číslem, nemůže se zmenšovat do nekonečna. Proto po určité době musí dosáhnout své minimální hodnoty a žádná z dívek si už nebude přebarvovat své vlasy. ■

3.3.1 Další úlohy pro samostatnou práci

Mezi další vhodné úlohy, které mohou pomoci rozvíjet schopnosti a dovednosti žáků v oblasti kombinatorické geometrie, je možno zařadit také několik úloh z 60. ročníku Matematické olympiády, které účelně propojují kombinatorický přístup s vhodným označením stěn krychle.

Příklad 45 (60. ročník MO, A-I-5)

Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. □

Příklad 46 (60. ročník MO, návodná úloha k soutěžní úloze A-I-5)

Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno číslo, přičemž všechna čísla nejsou stejná. V jednom kroku čísla na každé stěně krychle nahradíme aritmetickým průměrem stávajících čísel na všech čtyřech sousedních stěnách. Rozhodněte, zda po několika krocích mohou být na stěnách krychle opět původní čísla. □

Příklad 47 (60. ročník MO, A-II-4)

Nechť **M** je množina šesti navzájem různých kladných celých čísel, jejichž součet je 60. Všechna je napíšeme na stěny krychle, na každou právě jedno z nich. V jednom kroku zvolíme libovolné tři stěny krychle se společným vrcholem a každé z čísel na těchto třech stěnách zvětšíme o 1. Určete počet všech takových množin M, jejichž čísla lze napsat na stěny krychle uvedeným způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla. □

V literatuře můžeme objevit rovněž mnoho příkladů, jejichž řešení je založeno na minimalizaci hodnoty daného výrazu, na vhodném uspořádání nebo rozdělení prvků či na vhodném očíslování jednotlivých polí.

Příklad 48 (autor Radek Horenský)

Zlodějka Mína každého dne večer těsně před zavírací dobou přepadne ve městě poštu a v noci se přesune do nejbližšího sousedního města, v němž se nachází pošta. Následující den opět před zavírací dobou svůj čin zopakuje v daném městě a opět se přesouvá do aktuálně nejbližšího města, atd. V pondělí 15. června 2 009 byla již podruhé za poslední dobu vyloupena pošta ve městě M. V obou případech byla identifikována jako pachatelka přepadení Mína. Policie dle hesla „třikrát a dost“ se proto rozhodla danou poštu ve městě M hlídat. Kdy byla Mína zatčena?

Poznámka: Žádná dvě města nejsou od sebe stejně vzdálená, vždy existuje jen jediné město, které je nejbližší. □

Příklad 49 (viz např. [29])

V rovině je dáno n přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a n bodů, z nichž ani jeden neleží na žádné z přímek. Uvažujme úsečky, které vycházejí z daného bodu a jsou kolmé k dané přímce. Dokažte, že lze každé přímce přiřadit bod tak, že se těchto n odpovídajících kolmých úseček vzájemně neprotne. □

Příklad 50 (viz např. [21])

Pravidelný $(2n+1)-$úhelník je rozřezán pomocí vzájemně se neprotínajících úhlopříček na $2n-1$ trojúhelníků. Dokažte, že alespoň tři trojúhelníky jsou rovnoramenné. □

Příklad 51 (viz např. [20])

V oblíbené hře *Patnáctka* je na šachovnici o rozměrech 4×4 jedno prázdné pole. Na ostatních polích leží mince, náhodně očíslované od 1 do 15. Dvě pole spolu *sousedí*, pokud mají společnou stranu. V jednom *tahu* vezmeme minci z pole sousedícího s prázdným polem a do prázdného pole ji položíme. Existuje konečný počet tahů, po kterých jsou mince označené k a $16-k$ prohozeny pro každé $k = 1, 2, \ldots, 7$ (jinými slovy můžeme mince uspořádat „v opačném pořadí“)? □

Příklad 52 (viz např. [20], [4])

V krychli o rozměrech $3\times 3\times 3$ je jedna z 27 buněk prázdná a ostatní jsou vyplněny jednotkovými krychlemi očíslovanými 1 až 26. Dvě buňky spolu *sousedí*, pokud mají společnou stěnu. V jednom *tahu* vezmeme krychli z buňky sousedící s prázdnou buňkou a do prázdné buňky ji vložíme. Existuje konečný počet tahů, po kterých jsou krychle označené k a $27-k$ prohozeny pro každé $k = 1, 2, \ldots, 13$ (jinými slovy můžeme krychle uspořádat „v opačném pořadí“)? □

3.4 Hry

Některé hry spojené například s odebíráním sirek z některé z daných hromádek jsou založeny na nalezení vhodné taktiky boje, která jednomu z hráčů zaručuje při dodržení určitého strategického postupu buď vítězství nebo alespoň neprohru. Základem této strategie je nalezení jistého invariantu, který právě tuto výhodu danému hráči zaručuje. Obdobnou strategii můžeme nalézt i u her, v nichž se pravidelně střídají dva hráči při pohybu nějaké figurky na hrací desce, nejčastěji na šachovnici.

Mezi nejčastěji se vyskytující strategie zaručující vítězství nebo alespoň neprohru patří princip symetrie, princip „minimax“ (každý z hráčů se snaží maximalizovat svou výhru a současně minimalizovat výhru soupeře) a princip vítězné strategie (hráč dokáže na každý soupeřův tah odpovědět tak, že mu neumožní vyhrát).

Na několika příkladech představíme možnost využití práce s invarianty při určování vítězné strategie.

Příklad 53

Jirka a Petr hrají následující hru. K danému jednomístnému přirozenému číslu nejprve přičte Jirka číslo 1, 2 nebo 3. Poté Petr k získanému součtu přičte také jedno z trojice čísel 1, 2 nebo 3. Vítězem se stane ten, který jako první dosáhne trojmístného čísla. Určete, který z chlapců dosáhne vítězství, je-li počátečním zadaným číslem číslo 1. □

Řešení. Vítězem se stane (v případě, že oba chlapci volí nejlepší strategii) ten z dvojice chlapců, který svůj tah zahajuje na hodnotě 99, 98 nebo 97, protože svým tahem snadno docílí hodnoty 100 nebo více. Naopak v případě, kdy je hodnota součtu na počátku jeho tahu rovna 96, je nucen svým taheem nabídnout vítězství soupeři, protože přičtením libovolného čísla z trojice 1, 2 nebo 3 připraví soupeři vyhrávající pozici.

Prohraje tedy ten, kdo začíná svůj tah na hodnotě 96. Stejně tak ale prohrává i ten, kdo začíná na hodnotě 92, neboť soupeř na jeho libovolný tah odpoví dosažením nevyhrávajícího součtu 96. Prohrávajícími jsou tak všechny celočíselné násobky čísla 4. Protože jako první svůj tah provádí Jirka, může si zajistit vítězství ve hře přičtením čísla 3 a pak dodržováním taktiky, kdy Petr musí začínat svůj tah na násobku čísla 4, tj. v prohrávající pozici.

V případě, že by počátečním číslem byl celočíselný násobek čísla 4, bude mít vítězství zaručeno Petr. ■

Příklad 54 (viz např. [20])

Jirka a Petr mají dva sáčky bonbonů. V jednom sáčku je 20 bonbónů, ve druhém sáčku je 21 bonbónů. Oba chlapci se pravidelně střídají, začíná Jirka. V každém tahu musí hráč sníst obsah jednoho sáčku a část, nikoli však všechny bonbóny, z druhého sáčku přesunout do prázdného sáčku. Prohrává ten hráč, který už nemůže táhnout. Existuje pro jednoho z chlapců vítězná strategie? □

Řešení. Vyhrát může Jirka, pokud bude postupovat podle následující strategie: V obou sáččích nechej lichý počet bonbonů. Petr v takovém případě bude muset odebrat lichý počet bonbónů z jednoho sáčku a druhý sáček rozdělit na dvě části, kde v jedné bude sudý počet bonbonů. Jirka vyprázdní sáček s lichým počtem bonbónů a sudý počet bonbónů rozdělí na dvě části s lichým počtem bonbónů. Protože hra musí vzhledem ke konečnému počtu bonbónů na počátku také skončit, stane se vítězem Jirka. Pro Petra totiž po konečném počtu tahů musí nastat situace, kdy po odebrání lichého počtu bonbónů z jednoho sáčku zůstane ve druhém pouze jediný bonbón, který už není možno rozdělit na dvě hromádky, proto v takovém okamžiku nutně prohrává. ■

Poznámka: Jednou z variant popsané strategie je rozdělení bonbónů na dvě hromádky, kdy na jedné je jeden bonbón a na druhé lichý počet bonbónů. Soupeř musí odebrat bonbón, který je samostatně v sáčku, protože by jinak neměl možnost dokončit svůj tah. Druhou hromádku tak musí dělit na lichý a sudý počet bonbónů. Další postup je stejný jako ve výše popsané strategii.

Příklad 55 (viz např. [20])

Na tabuli je napsáno číslo 2 006!, které je dle definice faktoriálu rovno součinu čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,005 \cdot 2\,006.$$

Při hře se Jirka s Petrem pravidelně střídají a hrají podle následujícího pravidla. Pokud je na tabuli napsáno číslo x, hráč zvolí kladné celé číslo $y \leq x$, které má méně než 20 různých prvočíselných dělitelů, a na tabuli místo x napíše hodnotu rozdílu $x - y$. Vítězem se stává ten hráč, který na tabuli napíše číslo 0. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie? □

Řešení. Nechť p_i označuje i-té prvočíslo a nechť

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{20}$$

je součin těchto prvočísel. Pokud je na tabuli napsáno číslo $x < p$, pak hráč, který je v tu chvíli právě na tahu, může vyhrát, odečte-li právě toto číslo x.

Samo číslo p znamená špatnou pozici, protože odečíst lze pouze číslo menší nežli p a výsledné číslo má méně než 20 prvočíselných dělitelů. V takovém případě bude vítězem druhý hráč. Uvažujme nyní všechny pozice, které jsou celočíselným násobkem čísla p, tj. pozice $k \cdot p$. Tato pozice neumožní danému hráči přímo zvítězit a dokonce mu neumožní ani odečíst takové číslo y, aby výsledek zapisovaný na tabuli byl ve tvaru $m \cdot p$, kde $m \in \{0, 1, 2, \cdot k - 1\}$. V takovém případě by totiž odečítané číslo x muselo být násobkem čísla p, a tedy by muselo mít alespoň 20 prvočíselných dělitelů.

Je-li na tabuli číslo, které není násobkem p, pak existuje nějaké k přirozené takové, že dané číslo x leží v otevřeném intervalu

$$(k \cdot p; (k+1) \cdot p)\,.$$

Hráč, který je v této situaci na tahu, vyhraje, pokud odečte takové číslo, které zanechá výsledek $k \cdot p$. Soupeř nutně zapisuje na tabuli číslo, které násobkem čísla p není.

Vzhledem k tomu, že původní pozice, tj. číslo 2 006! je zcela jistě násobkem čísla p, může druhý hráč vždy uplatnit pravidlo, které na tabuli zanechává celočíselný násobek čísla p. Vzhledem k tomu, že existuje pouze konečný počet tahů dané hry, musí popsaná strategie nutně přinést vítězství druhému z hráčů. ■

3.4.1 Další úlohy pro samostatnou práci

Mezi další vhodné úlohy, které mohou pomoci rozvíjet schopnosti a dovednosti žáků v oblasti nalezení výherní strategie, je možno zařadit kromě úloh Matematické olympiády také úlohy tzv. „rekreační" matematiky.

Příklad 56 (viz např. [29])

Studenti A a B si zvolí jedno celé číslo a sdělí ho svému učiteli. Ten na tabuli napíše dvě celá čísla a oznámí studentům, že jedno z nich je součtem jejich dvou čísel. Poté se jich střídavě (tj. postupně A, B, A, B, A, …) ptá, zda mohou určit číslo druhého ze studentů. Dokažte, že po konečném počtu kroků některý ze studentů odpoví kladně. (Předpokládejme, že oba studenti jsou inteligentní i pravdomluvní.) □

Příklad 57 (viz např. [20])

Tom a Jerry hrají na šachovnici následující hru. Do dolního levého rohu šachovnice postaví krále. Nejprve hraje Tom, pak Jerry, pak Tom, atd. V každém tahu musejí krále posunout o jedno políčko nahoru, doprava nebo úhlopříčně doprava nahoru. Prohrává ten, kdo už nemá kam táhnout. Existuje pro jednoho z hráčů vítězná strategie? □

Příklad 58 (viz např. [1])

Máme dvě hromádky kamenů, na první je 15 kamenů, na druhé 20 kamenů. Ve svém tahu můžeme vzít libovolný počet kamenů, ale pouze z jedné hromádky. Prohrává ten, kdo nemůže provést svůj tah. Který ze dvou hráčů má vítěznou strategii, ten, který začíná, nebo ten, který je druhý na tahu? □

Příklad 59 (59. ročník MO, B-I-1)

Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné je 2 009, ve druhé je 2 010 a v poslední je 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru. □

Závěr

Cílem disertační práce bylo poukázat na některé z netradičních přístupů a metod řešení matematických úloh, které mohou řešitelům pomoci nalézt odpovědi i v těch případech, kdy tradiční postupy řešení úloh selhávají nebo jsou velmi náročné. Prezentované metody invariantů a poloinvariantů nevyžadovaly složité úpravy výrazů, nebylo zapotřebí spousty vzorců a výpočtů. Základem řešení byly postupy využívající neměnnosti (invariantnosti) hodnot některých veličin a postupy, které jsou založeny na zachování jistých, někdy i ne na první pohled zřejmých vlastností sledovaných objektů.

Pro vhodnou systematickou přípravu žáků byly vybrány z mnoha českých i mezinárodních publikací příklady, které napomáhaly rozvoji schopnosti lépe se orientovat v dané problematice a které rozvíjely schopnosti a dovednosti žáků při řešení těchto úloh. Pro snadnější náhled do problematiky byly autorem vytvořeny další úlohy, které společně s úlohami převzatými z literatury daly základ sbírce úloh, která může sloužit žákům i učitelům nejen na středních školách k jejich samostudiu.

Některé z autorových úloh byly použity ve školním a následně i v ústředním kole 58. ročníku Matematické olympiády, jiné byly prezentovány v rámci přednášek, besed a seminářů s žáky v matematických kroužcích, resp. na odborné mezinárodní konferenci pro učitele.

V rámci didaktického výzkumu autor vytvořil několik dílčích testů, které měly za úkol zjistit, do jaké míry jsou schopni žáci rozpoznat vlastnosti, které zůstávají zachovány, zda žáci dokáží invarianty a poloinvarianty vhodným způsobem použít při řešení matematických úloh a především zda jsou jejich schopnosti a dovednosti řešit úlohy daného typu rozvíjeny více než u žáků, kteří se s pojmem invariantu a poloinvariantu během svého studia dosud nesetkali.

Každý z testů byl zaměřen na zkoumání jiného jevu, přesto však na sebe testy určitým způsobem navazovaly. První test měl za úkol zjistit, jaké mají žáci znalosti z oboru dělitelnosti přirozených čísel a jakým způsobem je dokáží při samotném vyhodnocení testu uplatnit. Druhý test zkoumal schopnost žáků nalézt obecná pravidla při vytváření souboru prvků s danou vlastností. *Celkově tyto dva testy prokázaly, že středoškolským žákům jsou otázky z okruhu dělitelnosti přirozených čísel blízké a poměrně srozumitelné.*

V dalším testu žáci rozhodovali, zda daný vztah je či není invariantem, a za jakých podmínek bude daná vlastnost splněna. Testovány byly znalosti a dovednosti žáků z planimetrie, týkající se obvodových a středových úhlů a mocnosti bodu ke kružnici. *Test prokázal, že žáci, kteří jsou systematicky vedeni, jsou schopni mnohem lépe vypozorovat a vyhodnotit některé ze zkoumaných invariantů. Mnozí však nejsou schopni přesně specifikovat podmínky, které zaručují platnost daného tvrzení.*

V testu, kdy žáci měli rozhodnout, zda příslušná transformace je či není invariantem, resp. poloinariantem, bylo největším problémem žáků korektně zdůvodnit, proč daná veličina nesplňuje dané podmínky. Dokážou hypotézy vytvářet, ale zdůvodnit je již nedokážou. *Výsledky posledního z testů však naopak svědčí o schopnostech žáků vhodně aplikovat získané poznatky o invariantech v dalších úlohách.*

Prvotní předpoklad, že žáci, kteří byli s danou problematikou více obeznámeni, budou dosahovat lepších výsledků, byl v rámci provedeného výzkumu potvrzen. Totéž se týká řešení testových úloh a následně i při řešení úloh navazujících na testy byla míra jejich úspěšnosti znatelně větší než u ostatních žáků.

Z výsledků výzkumu dále vyplývá, že systematická práce s matematicky nadanými žáky doplněná vhodně volenými úlohami má velký vliv na rozvoj jejich myšlení. Ačkoli zpočátku neměli někteří z nich žádnou představu o invariantech či poloinvariantech, dokázali je po jisté době sami v příkladech vypozorovat a vhodným způsobem využít při řešení úloh složitějších.

Celkový přínos práce nespočívá pouze v sestavení uceleného materiálu, který slouží k dalšímu studiu dané problematiky, ale může posloužit mimo jiné také pedagogům na středních školách jako sbírka monotematicky zaměřených úloh pro práci s matematicky nadanými žáky. Stejně tak může sloužit žákům středních škol a dalším zájemcům o uvedenou problematiku k jejímu dokonalejšímu zvládnutí, přičemž jim dá možnost přistoupit k problémům z různých úhlů pohledu.

Seznam použité literatury

[1] *Agachanov, N. Ch. – Podlipskij, O. K.*: Matematičeskije olimpiady Moskovskoj oblasti 1993 – 2005 (rusky), Fizmatkniga, Moskva 2006.

[2] *Andreescu, T. – Feng, Z.*: 102 Combinatorial Problems (From the Training of the USA IMO Team), Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin 2003.

[3] *Andreescu, T. – Andrica, D.*: An Introduction to Diophantine Equations, GIL Publishing House, Zalău, 2002.

[4] *Becheanu, M. – Enescu, B.*: Balkan Mathematical Olympiads 1984 – 2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007.

[5] *Botková, P.*: Metoda nekonečného klesání při řešení diofantovských rovnic, diplomová práce, KAG PřF UP, Olomouc 2009.

[6] *Calábek, P. – Švrček, J. – Vaněk, V. – Zhouf, J.*: Péče o matematické talenty v České republice, Vydavatelství UP, Olomouc 2010.

[7] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York, Inc. 1998.

[8] *Galperin, G. A. – Tolpygo, A. K.*: Moskovskije matematičeskije olimpiady (rusky), Prosvěščenije, Moskva 1986.

[9] *Gein, A.*: Searching for Invariants, Manuscript.

[10] *Golomb, S. W.*: Polyominoes (Puzzles, Patterns, Problems and Packing), Princetown University Press, New Persey 1994.

[11] *Hadwiger, H. – Debrunner, H.*: Kombinatornaja geometrija na ploskosti (rusky), Nauka, Moskva 1966.

[12] *Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.*: Equations and Inequalities: Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory, Springer-Verlag, New York, 2000.

[13] *Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.*: Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry, Springer-Verlag, New York, 2003.

[14] *Horenský, R.*: Invarianty a poloinvarianty ve školské matematice, MFI, roč. 17, 2007/08, č. 2, str. 73-80, Olomouc.

[15] *Horenský, R.*: Invarianty, poloinvarianty a gradované řetězce matematických úloh, MFI, roč. 18, 2008/09, č. 10, str. 577-587, Olomouc.

[16] *Horenský, R.*: Invarianty ve školské matematice, sborník MAKOS, 2007.

[17] *Kanel-Belov, A. J. – Kovaldži, A. K.*: Kak rešajut nestandartnyje zadači (rusky), MCBMO, Moskva 1997.

[18] *Kurliandčik, L. D. – Fomin, D. V.*: Etjudy o poluinvariante (rusky), KVANT, 1989, č. 7, str. 63-68, Moskva.

[19] *Leung, T.*: The Method of Infinite Descent, Mathematical Excalibur, Vol. 10, Num. 4, October 2005 – November 2005.

[20] *Makrides, G. a kol.*: Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách, MATH.EU Projekt, 2006.

[21] *Subeva, N.*: Turnir na gradovete (bulharsky), Institut po matematika i informatika, Sofie 2007.

[22] *Švrček, J.*: Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh, Vydavatelství UP, Olomouc 2008.

[23] *Švrček, J.*: Úvod do kombinatoriky, Vydavatelství UP, Olomouc 2003.

[24] *Švrček, J. – Calábek, P.*: Sbírka netradičních matematických úloh, Prometheus, Praha 2007.

[25] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka, SNTL, Praha 1988.

[26] *Tabov, J. B. – Taylor, P. J.*: Methods of Problem Solving (Book 1), Australian Mathematics Trust, Canberra 1996.

[27] *Tabov, J. B. – Taylor, P. J.*: Methods of Problem Solving (Book 2), Australian Mathematics Trust, Canberra 2002.

[28] *Taylor, PJ (ed.)*: Tournament of the Towns, 1980 to 1984, Questions and Solutions, Australian Mathematics Trust, 1993.

[29] *Tsvetkova, I.*: Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems, Mathematics Competitions Vol. 23 No 2, 2010.

[30] *Ufnarovski, V.*: Mathematical Aquarium, Shtiintsa, Kishinev, Inc. 1987.

[31] *Vasiliev, N. – Jegorov, A.*: Problemy vsesojuznych matematičeskich olympiad (rusky), Nauka, Moskva 1988.

[32] *Vilenkin, N. J.*: Kombinatorika, SNTL, Polytechnická knižnice, Praha 1977.

[33] *Zhouf, J.*: Tvorba matematických problémů pro talentované žáky, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogicka fakulta, 2010.

[34] http://www.math.muni.cz/mo (ke dni 21. 3. 2011).

[35] http://www.kag.upol.cz/memo (ke dni 21. 3. 2011).

[36] http://www.imomath.com (ke dni 21. 3. 2011).

[37] http://www.matematickyklokan.net (ke dni 21. 3. 2011).

[38] http://www.kag.upol.cz/turnajmest/ (ke dni 21. 3. 2011).