UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DISERTAČNÍ PRÁCE

Fuzzy pravděpodobnostní prostory

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí disertační práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracovala: **Mgr. Pavla Rotterová**
Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika
Studijní obor: 1103V004 Aplikovaná matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2018

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Mgr. Pavla Rotterová

Název práce: Fuzzy pravděpodobnostní prostory

Typ práce: Disertační práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2018

Abstrakt: V ekonomické praxi je náhodný jev mnohdy vágně vymezen jako např. vysoká míra inflace. Takové neurčité jevy je vhodné modelovat pomocí fuzzy množin. Nejprve je tedy předložená disertační práce zaměřena na rozšíření pravděpodobnostního prostoru na případ fuzzy jevů. Zejména je studována problematika vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů, kde jsou nejprve zkoumány případy využívající ostrou pravděpodobnostní míru. V této kategorii je porovnána nejznámější pravděpodobnostní míra, která vyjadřuje pravděpodobnost fuzzy jevu pomocí reálného čísla, s tzv. fuzzy pravděpodobnostmi - fuzzy množinami, jejichž funkce příslušnosti je nějakým způsobem odvozena z pravděpodobností α-řezů fuzzy jevů. Následuje definice fuzzy pravděpodobnostní míry. Pravděpodobnosti fuzzy jevů jsou poté rozšířeny na případ fuzzy pravděpodobnostní míry a jsou zanalyzovány jejich vlastnosti. V rámci aplikací těchto pravděpodobností v teorii rozhodování za rizika je práce zaměřena na aparát rozhodovací matice. Její prvky vyjadřují důsledky daných variant za daných stavů světa. Varianty jsou poté porovnávány na základě jejich očekávaných hodnot a rozptylů. Následně jsou uvažovány fuzzy stavy světa a popsány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa. Mezi nimi je popsán také pohled na rozhodovací matici, kdy jsou informace v ní obsažené chápány jako systém bází fuzzy pravidel, a ne jako běžně uvažovaný systém diskrétních náhodných veličin. Na závěr jsou uvedeny a vzájemně srovnány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Vše je ilustrováno na názorných příkladech.

Klíčová slova: Fuzzy jevy, fuzzy pravděpodobnostní míra, fuzzy pravděpodobnostní prostor, fuzzy rozhodovací matice, pravděpodobnosti fuzzy jevů.

Počet stran: 112

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Mgr. Pavla Rotterová

Title: Fuzzy Probability Spaces

Type of thesis: Dissertation thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2018

Abstract: In economical practice, a random event is often vaguely defined. like e.g. a high inflation rate. It is appropriate to model such indeterminate events by means of tools of fuzzy sets theory. First, the dissertation thesis is focused on the extension of the probability space to the case of fuzzy events. Particularly, it is studied a problem how probabilities of fuzzy events can be expressed where approaches using the crisp probability measure are examined at first. In this category, the most used probability measure, which expresses probability of a fuzzy event by a real number, is compared with so-called fuzzy probabilities, whose membership functions are somehow derived from probabilities of α-cuts of fuzzy events. Then, the fuzzy probability measure is defined. After that, the probabilities of fuzzy events are extended to the case of the fuzzy probability measure and their properties are analysed. Within applications of these probabilities in the models of decision making under risk, the thesis is focused on the apparatus of a decision matrix. Its elements express results of particular alternatives under particular states of the world. Then, the alternatives are compared based on their expected values and their variances. After that, the states of the world representing fuzzy events are fuzzified and possible approaches to the decision matrix with fuzzy states of the world are described. Among them, it is also described a view of the decision matrix which understood information contained in it as a fuzzy rule-based system and not as a commonly considered system of discrete random variables. At the end, two possible approaches to the decision matrix with fuzzy states of the world, fuzzy results of alternatives, and underlying fuzzy probability measure are described and compared. Everything is illustrated in examples.

Key words: Fuzzy events, fuzzy probability measure, fuzzy probability space, fuzzy decision matrix, probabilities of fuzzy events.

Number of pages: 112

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu disertační práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za čas, který mi věnoval při konzultacích v průběhu celého mého studia, a cenné rady při zpracování této práce. Dále patří velký dík mému manželovi a mému synovi za to, že se mnou měli trpělivost po celou dobu mého studia a poskytli mi potřebný čas k sepsání článků i disertační práce.

Použité značení

Ω	universum
χ_A	charakteristická funkce množiny A
μ_A	funkce příslušnosti fuzzy množiny A
$\mathcal{F}(\Omega)$	třída všech fuzzy množin definovaných na Ω
$Ker\,A$	jádro fuzzy množiny A
$Supp\,A$	nosič fuzzy množiny A
A_α	α-řez fuzzy množiny A
$hgt(A)$	výška fuzzy množiny A
$A \cup B, A \cap B$	sjednocení a průnik fuzzy množin A a B
A^{c}	doplněk fuzzy množiny A
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$	množina všech fuzzy čísel
$\mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$	množina všech fuzzy čísel na intervalu $\langle a, b\rangle$
$\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$	lichoběžníkové fuzzy číslo A určené svými význačnými hodnotami
$\langle a_1, a_2, a_4\rangle$	trojúhelníkové fuzzy číslo A určené svými význačnými hodnotami
$A < B, A \leq B$	fuzzy číslo A je menší než fuzzy číslo B, fuzzy číslo A je menší nebo rovno fuzzy číslu B

$cog(A)$	těžiště fuzzy množiny A
$f : \Omega \to \Psi$	zobrazení f z Ω do Ψ
f_F	fuzzy rozšíření zobrazení f
P	pravděpodobnostní míra
$\mathcal{A}$	σ-algebra náhodných jevů
$(\Omega, \mathcal{A})$	měřitelný prostor
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	pravděpodobnostní prostor
$\mathcal{A}_F$	σ-algebra fuzzy náhodných jevů
$P_Z(A)$	pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu A dle Zadeha
$P_Y(A)$	fuzzy pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu A dle Yagera
$\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$	množina všech pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$
$\mathcal{F}\left(\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})\right)$	množina všech fuzzy množin na $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$
P_F	fuzzy pravděpodobnostní míra
$(\Omega, \mathcal{A}_F)$	fuzzy měřitelný prostor
$P_{FZ}(A)$	pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu A dle Zadeha rozšířená na případ fuzzy pravděpodobnostní míry

Kapitola 1

Úvod

1.1. Současný stav poznání

S pravděpodobnostními prostory a zejména s pravděpodobnostmi náhodných jevů se často setkáváme v reálném životě. Například předpověď počasí se udává s určitou pravděpodobností, že dané počasí opravdu nastane. Náhodné jevy však mohou být popsány také neurčitě, což matematicky modelujeme pomocí aparátu teorie fuzzy množin. Disertační práce se tedy zabývá rozšířením přesně popsaných náhodných jevů na náhodné jevy neurčitě popsané. Následně je rozšířen také pravděpodobnostní prostor na případ neurčitě popsaného, tj. fuzzy, pravděpodobnostního prostoru a ten je v aplikační části využit v nástroji pro podporu rozhodování za rizika.

V práci bude uvažován pravděpodobnostní prostor zavedený Kolmogorovem [29] v roce 1933. Tvoří jej množina všech elementárních jevů, množina uvažovaných náhodných jevů a pravděpodobnostní míra. Pravděpodobnostní míra je základem teorie pravděpodobnosti, kterou se zabývá mnoho publikací, např. [3, 12, 14, 22, 28].

Teorie fuzzy množin, za jejíž pomoci bude v pravděpodobnostním prostoru modelována neurčitost, byla představena Zadehem [69] v roce 1965. Umožňuje matematicky modelovat vágně popsané pojmy.

V praktických aplikacích mohou být vágně popsané také náhodné jevy. Jejich matematickým vyjádřením pomocí fuzzy množin se zabýval Zadeh [70]. Množina náhodných jevů byla zobecněna na případ fuzzy náhodných jevů a její vlastnosti dokázali Negoita a Ralescu [36].

Nejstarší a nejčastěji používaná pravděpodobnostní míra pro fuzzy náhodné jevy byla představena Zadehem [70]. Tato míra je použita např. v [35, 66, 67] a vyjadřuje pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu jako reálné číslo.

Yager [61] však píše, že intuitivně se jeví býti přirozené, aby pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu byla také fuzzy. V literatuře lze tedy najít také přístupy, kdy pravděpodobností fuzzy náhodného jevu je fuzzy číslo nebo obecně jen fuzzy množina. Tyto přístupy lze rozdělit na práce zaměřené teoreticky, jako např. [24, 34, 33, 46, 44, 45, 54], a práce zaměřené na praktické aplikace jako [5, 18, 25, 57, 61, 62].

V praxi se setkáváme i s problémy, kdy nemáme dostatek informací o pravděpodobnostní míře na uvažovaném univerzu. V takových případech může být pravděpodobnostní míra modelována také za pomoci aparátu teorie fuzzy množin (viz [4, 31, 38, 57]).

V literatuře již bylo definováno také několik fuzzy pravděpodobnostních prostorů, které uvažují některou ze zmíněných pravděpodobnostních měr, anebo spíše rozebírají jejich vlastnosti. Je to studováno např. v [5, 24, 44, 54, 57, 60, 59, 68]. Avšak práce zaměřené na praktické aplikace jsou zejména [5, 57, 68].

Fuzzy pravděpodobnostní prostory, resp. fuzzy pravděpodobnostní rozdělení, lze využít ve statistice k řešení úloh, při nichž všechny informace nejsou známy zcela přesně, např. jestliže nám při experimentu nějaké pozorování zcela chybí, anebo neznáme jeho přesnou hodnotu. Statickými metodami pro fuzzy data a odhadem fuzzy parametrů rozdělení pravděpodobnosti z fuzzy dat se zabývá Viertl [59]. Rozšíření známých rozdělení pravděpodobnosti na případ jejich neurčitě popsaných parametrů studoval Buckley [6, 7].

Jinou oblastí, v níž fuzzy pravděpodobnostní prostory mohou nalézt uplatnění, je teorie rozhodování za rizika. Zde se využívají rozhodovací matice, které mohou být užitečným nástrojem pro podporu rozhodování také ve vágně definovaném, tj. fuzzy, prostředí. Rozhodovací matice, kterým se věnují např. v [16, 21, 39, 65], modelují situace, ve kterých důsledky možných variant rozhodnutí závisí na stavech světa, jež mohou nastat. Rozhodovacími maticemi s fuzzy prvky se zabývají např. v [57]. Využití různých agregačních operátorů v rozhodovací matici s podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou a příslušnými fuzzy pravděpodobnostmi stavů světa je rozebráno v [53].

V [57] je uvažována rozhodovací matice, ve které jsou stavy světa vyjádřeny pomocí fuzzy množin na univerzu, na němž je dáno rozdělením pravděpodobnosti. Autoři navrhli v tomto případě postupovat shodně jako v případě přesně popsaných stavů světa, tj. určili pravděpodobnosti fuzzy stavů světa pomocí vzorce navrženého Zadehem v [70]. V rámci tohoto přístupu jsou důsledky variant chápány jako diskrétní náhodné veličiny nabývající fuzzy hodnot s pravděpodobnostmi uvažovaných stavů světa.

1.2. Cíle disertační práce

Cíle disertační práce jsou:

1. Popsat možné způsoby fuzzifikace ostrého pravděpodobnostního prostoru na případ fuzzy jevů a fuzzy pravděpodobnostní míry.

2. Prozkoumat různé způsoby vyjádření pravděpodobnosti fuzzy jevu na základě ostré pravděpodobnostní míry a vzájemně srovnat jejich vlastnosti.

3. Navrhnout možné vyjádření pravděpodobnosti fuzzy jevu na základě fuzzy pravděpodobnostní míry a prozkoumat jeho vlastnosti.

4. Ukázat možné aplikace fuzzy pravděpodobnostních prostorů při rozhodování za rizika. Zaměřit se na jejich využití v nástroji rozhodovací matice v několika úrovních její fuzzifikace a popsat možné přístupy k jejímu řešení. Popsané přístupy vzájemně srovnat a ilustrovat na příkladech.

1.3. Struktura a výsledky disertační práce

Nyní představíme náplň následujících kapitol disertační práce a zmíníme výsledky, kterých bylo dosaženo.

Druhá kapitola je věnována základním pojmům a vztahům z teorie fuzzy množin. Její náplní jsou zejména fuzzy čísla. Je zde také popsán fuzzy vážený průměr s normovanými fuzzy váhami. V poslední části této kapitoly je připomenuta báze fuzzy pravidel a dva inferenční algoritmy, využité v kapitole 4 této práce.

Ve třetí kapitole je fuzzifikován Kolmogorovův pravděpodobnostní prostor. V části věnované pravděpodobnostnímu prostoru se σ-algebrou fuzzy jevů a ostrou pravděpodobnostní mírou jsou dokázány některé vlastnosti Zadehovy pravděpodobnostní míry, které dosud v literatuře zkoumány nebyly. Dále jsou dokázány fuzzifikované vlastnosti pravděpodobnostní míry, které zachovávají fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů dle Yagerovy definice. Dokázáno je také zachování některých fuzzifikovaných vlastností pravděpodobnostní míry pro fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů dle Klementa a novějšího Yagerova přístupu. Vždy je zhodnocena vhodnost daného přístupu k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů.

Ve druhé části třetí kapitoly je nově definována fuzzy pravděpodobnostní míra jako fuzzy množina ostrých pravděpodobnostních měr, jejíž α-řezy mají vlastnosti analogické vlastnostem fuzzy čísla. Ve třetí části je nově rozšířena Zadehova pravděpodobnost fuzzy jevů na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Jsou zde dokázány její vlastnosti coby pravděpodobnostní míry a posouzena její vhodnost.

Čtvrtá kapitola obsahuje aplikace fuzzifikovaných pravděpodobnostních prostorů na rozhodovací matici. Nejprve je zkoumána rozhodovací matice s expertně zadanými fuzzy pravděpodobnostmi stavů světa. Poté jsou popsány dva možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa. Jsou zde také uvedeny vzorce pro výpočet očekávaných hodnot důsledků variant a korektní vzorce pro výpočet jejich rozptylů. Problematika výpočtu rozptylů důsledků variant byla řešena v [49].

Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa a fuzzy důsledky variant za daných stavů světa byla popsána pomocí systému bází fuzzy pravidel v [51]. V tomto článku byly také srovnány vzorce pro výpočet charakteristik variant na základě popisu rozhodovací matice jako systému bází fuzzy pravidel s těmi, které byly použity autory v [57].

Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa popsaná pomocí systému bází fuzzy pravidel byla rozšířena na případ podkladové diskrétní fuzzy pravděpodobnostní míry v [50]. Tento problém byl v [41] rozšířen na případ, kdy stavy světa stejně jako důsledky variant jsou modelovány pomocí fuzzy množin definovaných na univerzu, na kterém je dáno diskrétní rozdělení fuzzy pravděpodobnosti.

V poslední části čtvrté kapitoly jsou popsány a vzájemně srovnány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant i podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Popsané přístupy jsou také ilustrovány na příkladech.

Kapitola 2

Fuzzy množiny

Druhá kapitola je věnována fuzzy množinám. Nejprve je zde rozebrán rozdíl mezi množinou a fuzzy množinou, na který navazuje popis základních operací s fuzzy množinami. Dále je představena speciální třída fuzzy množin, tzv. fuzzy čísla, a popsáno počítání s nimi včetně jejich fuzzy váženého průměru. Poslední část kapitoly je věnována jazykovým proměnným a možnému způsobu popisu vztahů mezi nimi.

2.1. Od množin k fuzzy množinám

V této kapitole je vysvětlen rozdíl mezi množinami, které budou dále nazývány ostrými množinami (v angličtině označovanými jako crisp sets), a fuzzy množinami. Následně jsou zde zavedeny základní pojmy pro práci s fuzzy množinami, které budou později využity.

Teorie množin byla zavedena Cantorem [9] v roce 1874. Cantor chápe množinu jako souhrn jejích prvků. V současném pojetí lze množinu jednoznačně určit také pomocí její charakteristické funkce.

Definice 2.1. *Nechť je dána neprázdná množina* Ω*.* Charakteristickou funkcí množiny $A \subseteq \Omega$ *nazveme funkci* $\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$*, jejíž hodnota se pro libovolné* $\omega \in \Omega$ *určí následovně:*

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{pokud } \omega \in A, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka 2.1. *V dalším textu bude Ω označovat neprázdnou množinu, tzv. univerzum.*

Příklad 2.1. *Jednoduchým příkladem množiny je množina jablek v košíku nebo množina aut vyrobených v posledních pěti letech. Jablko totiž je v košíku, anebo není. Podobně, auto bylo vyrobeno v posledních pěti letech, nebo je starší.*

Charakteristická funkce množiny tedy popisuje, zda daný prvek ω do této množiny patří či nikoliv, tj. nabývá jen dvou hodnot. Jejím zobecněním na případ, kdy může nabývat nekonečně mnoha hodnot, získáme funkci příslušnosti fuzzy množiny. Fuzzy množiny představil Zadeh [69] v roce 1965 a jsou definovány právě pomocí jejich funkcí příslušnosti.

Definice 2.2. Fuzzy množina A na Ω *je určena svou funkcí příslušnosti*

$$\mu_A : \Omega \to \langle 0, 1 \rangle.$$

Pro libovolné $\omega \in \Omega$ nazveme hodnotu $\mu_A(\omega)$ stupněm příslušnosti prvku ω k fuzzy množině A.

Příklad 2.2. *Jako příklady lze uvést množinu všech červených jablek v košíku a množinu všech nových aut. Některá jablka totiž nemusí být celá červená, mohou být zpola žlutá. Podobně, od kdy auto označíme za nové? Je nové auto maximálně rok staré? U neurčitých pojmů jako je právě červené jablko nebo nové auto nejsme schopni určit přesnou hranici, od níž prvek, tj. jablko nebo auto, má danou vlastnost.*

Pro dané $\omega \in \Omega$ vyjadřuje sutpeň příslušnosti $\mu_A(\omega) = 1$, že daný prvek ω zcela náleží do fuzzy množiny A; $\mu_A(\omega) = 0$ značí, že daný prvek ω do fuzzy množiny A nenáleží. Daný prvek ω náleží do fuzzy množiny A pouze zčásti, pokud $\mu_A(\omega) \in (0, 1)$.

Poznámka 2.2. *V dalším textu bude $\mathcal{F}(\Omega)$ značit třídu všech fuzzy množin definovaných na neprázdném univerzu Ω.*

Nyní budou zavedeny dále používané pojmy z teorie fuzzy množin. Jedná se o jádro fuzzy množiny, nosič fuzzy množiny, α-řez fuzzy množiny a výšku fuzzy množiny. Uvedeme také vlastnosti α-řezů fuzzy množin, které budou v dalším textu využity.

Definice 2.3. Jádrem fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, *označeném* $Ker\, A$ *(z anglického slova kernel), rozumíme*

$$Ker\, A = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) = 1\} .$$

Definice 2.4. Nosičem fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, *označeném* $Supp\, A$ *(z anglického slova support), rozumíme*

$$Supp\, A = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) > 0\} .$$

Definice 2.5. *Pro libovolné* $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ *rozumíme* α-řezem fuzzy množiny A, *označeném* A_α,

$$A_\alpha = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) \geq \alpha\} .$$

Poznámka 2.3. *Pro* $\alpha = 0$ *rozumíme* α*-řezem libovolné fuzzy množiny celé univerzum* Ω.

Poznámka 2.4. *Množina* $A \subseteq \Omega$ *může být chápána jako speciální případ fuzzy množiny* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, *a to takové, že* $A_\alpha = A$ *pro všechna* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *a* $A_0 = \Omega$.

Věta 2.1. *Pro* α*-řezy libovolná fuzzy množiny* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ *platí:*

1. $A_\alpha \subseteq A_\beta$ *pro všechna* $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$,
2. $A_\alpha = \bigcap_{0 \leq \beta < \alpha} A_\beta$ *pro všechna* $0 < \alpha \leq 1$,
3. $Supp\, A = \bigcup_{\alpha \in (0,1\rangle} A_\alpha$.

Důkaz. Viz [47]. □

Poznámka 2.5. *V [47] je ukázáno, že fuzzy množinu lze zavést pomocí systému jejích* α*-řezů* A_α, $\alpha \in (0, 1\rangle$, *který splňuje vlastnosti z věty 2.1. Její funkci příslušnosti pak lze pro libovolné* $\omega \in \Omega$ *zapsat* $\mu_A(\omega) = \sup\{\alpha \mid \omega \in A_\alpha\}$.

Definice 2.6. Výškou fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$*, označenou hgt*$(A)$ *(z anglického slova height), rozumíme*

$$\mathrm{hgt}(A) = \sup \{\mu_A(\omega) | \omega \in \Omega\} .$$

Definice 2.7. *Má-li fuzzy množinu* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ *výšku* $\mathrm{hgt}(A) = 1$*, pak se nazývá* normální*. V opačném případdě se nazývá* subnormální.

V závěru podkapitoly ještě zavedeme inkluzi a rovnost dvou fuzzy množin.

Definice 2.8. Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ je podmnožinou fuzzy množiny $B \in \mathcal{F}(\Omega)$*, značíme* $A \subseteq B$*, pokud pro každé* $\omega \in \Omega$ *platí*

$$\mu_A(\omega) \leq \mu_B(\omega).$$

Definice 2.9. Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ je rovna fuzzy množině $B \in \mathcal{F}(\Omega)$*, značíme* $A = B$*, pokud pro každé* $\omega \in \Omega$ *platí*

$$\mu_A(\omega) = \mu_B(\omega).$$

Inkluzi a rovnost dvou fuzzy množin lze vyjádřit také pomocí jejich α-řezů, jak uvádí následující věta.

Věta 2.2. *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$*. Pak pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *platí:*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha,$$

$$A = B \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha.$$

Důkaz. Tvrzení o inkluzi plyne přímo z definic 2.5 a 2.8. Tvrzení o rovnosti plyne z definic 2.5 a 2.9. □

2.2. Základní operace s fuzzy množinami

S fuzzy množinami lze podobně jako s ostrými množinami provádět různé operace. Podrobně se jimi zabývají např. [13, 27, 47]. Tato část se zabývá průnikem, sjednocením a doplňkem fuzzy množin. Tyto operace představují rozšíření operací s ostrými množiny na případ fuzzy množin. Uvedené definice představil Zadeh [69] ve svém prvním článku o fuzzy množinách. Klir [27] je nazývá *standardní fuzzy operace.*

Definice 2.10. Průnik a sjednocení dvou fuzzy množin $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ a $B \in \mathcal{F}(\Omega)$ *představují fuzzy množiny* $A \cap B \in \mathcal{F}(\Omega)$ *a* $A \cup B \in \mathcal{F}(\Omega)$, *jejichž funkce příslušnosti jsou pro libovolné* $\omega \in \Omega$ *dány*

$$\mu_{A\cap B}(\omega) = \min\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\},$$
$$\mu_{A\cup B}(\omega) = \max\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\}.$$

Věta 2.3. *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$. *Pak pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *platí:*

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha,$$
$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha.$$

Důkaz. Viz [27]. □

Definice 2.11. Doplněk fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ *představuje fuzzy množina* $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}(\Omega)$, *jejíž funkce příslušnosti je pro libovolné* $\omega \in \Omega$ *dána*

$$\mu_{A^{\mathsf{c}}}(\omega) = 1 - \mu_A(\omega).$$

Věta 2.4. *Pro doplněk libovolné fuzzy množiny* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ *platí:*

$$(A^{\mathsf{c}})_\alpha = \left(\bigcup_{\beta > 1-\alpha} A_\beta\right)^{\mathsf{c}} \text{ pro každé } \alpha \in (0, 1\rangle.$$

Důkaz. Viz [27]. □

Poznámka 2.6. *V teorii a praxi se používají také zobecněné operace průniku, sjednocení a doplňku. Tyto zobecněné operace se obecně zavádí axiomaticky. Operátory pro zobecněný průnik se nazývají t-normy, pro zobecněné sjednocení se jedná o t-konormy (více viz např. [13, 27]). Z těchto operaci jsou nejpoužívanější tzv. Lukasiewiczova t-norma a t-konorma (nazývány také odvážný průnik a odvážné sjednocení). Jejich výsledky více odpovídají lidskému uvažování než výsledky výše definovaných operací.*

2.3. Fuzzy čísla

Fuzzy čísla představují třídu fuzzy množin na reálné ose. Umožňují matematicky popsat neurčitá množství, a proto se využívají v reálných aplikacích. V literatuře lze nalézt různé definice fuzzy čísel v návaznosti na různé definice fuzzy množin, a to např. v [13, 27, 47, 59]. V této práci budeme uvažovat následující definici fuzzy čísla.

Definice 2.12. Fuzzy číslem *nazveme fuzzy množinu* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$*, pro kterou platí:*

1. $Ker\, A \neq \emptyset$*;*
2. A_α *jsou uzavřené intervaly pro všechna* $\alpha \in (0, 1\rangle$*;*
3. $Supp\, A$ *je omezený.*

Definice 2.13. *Řekneme, že* fuzzy číslo A je definováno na intervalu $\langle a, b\rangle$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a \leq b$*, pokud*

$$Supp\, A \subseteq \langle a, b\rangle.$$

Poznámka 2.7. *Třídu všech fuzzy čísel na reálné ose budeme dále značit* $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$*. Třídu všech fuzzy čísel na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *budeme značit* $\mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$*.*

Nyní se zaměříme na funkce příslušnosti fuzzy čísla. Následující věta tvrdí, že funkce příslušnosti fuzzy čísla může být obecně definována po částech.

Věta 2.5. *Nechť* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$*.* A *je fuzzy číslo tehdy a jen tehdy, když existuje čtveřice reálných čísel* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ *takových, že pro funkci příslušnosti fuzzy množiny* A *platí:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & pokud\ x \in \langle a_2, a_3\rangle, \\ L(x), & pokud\ x \in (-\infty, a_2), \\ R(x), & pokud\ x \in (a_3, \infty), \end{cases}$$

kde $L : (-\infty, a_2) \to \langle 0, 1)$ *je funkce neklesající, spojitá zprava a platí pro ni, že* $L(x) = 0$*, pokud* $x \in (-\infty, a_1)$*;* $R : (a_3, \infty) \to \langle 0, 1)$ *je funkce nerostoucí, spojitá zleva a taková, že* $R(x) = 0$*, pokud* $x \in (a_4, \infty)$*.*

Důkaz. Viz [27]. □

Ve větě 2.5 jsou využita čtyři reálná čísla označená a_1, a_2, a_3, a_4. V následující definici je nazveme *význačných hodnotami fuzzy čísla.*

Definice 2.14. Význačnými hodnotami fuzzy čísla $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ *nazveme čtveřici reálných čísel* a_1, a_2, a_3, a_4 *takových, že* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, $\langle a_1, a_4 \rangle = Cl(Supp\,A)$ *a* $\langle a_2, a_3 \rangle = Ker\,A$, *kde* $Cl(Supp\,A)$ *označuje uzávěr nosiče fuzzy čísla* A.

V praktických aplikacích se často používají *lineární fuzzy čísla*, tj. fuzzy čísla s lineárními levými i pravými částmi funkce příslušnosti, a to kvůli jednoduchosti jejich zadávání. Stačí totiž zadat pouze jejich význačné hodnoty.

Definice 2.15. Lineárním fuzzy číslem určeným čtveřicí jeho význačných hodnot a_1, a_2, a_3, a_4 *rozumíme fuzzy číslo* A, *jehož funkce příslušnosti je určena pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *následovně*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{pro } x \in \langle a_1, a_2), \\ 1 & \text{pro } x \in \langle a_2, a_3 \rangle, \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{pro } x \in (a_3, a_4 \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozlišujeme dva základní typy lineárních fuzzy čísel, a to *fuzzy čísla trojúhelníková* a *fuzzy čísla lichoběžníková.* Pro význačné hodnoty trojúhelníkového fuzzy čísla A platí, že $a_2 = a_3$, tj. jeho jádro je jednoprvkové. Naproti tomu jádro lichoběžníkového fuzzy čísla představuje uzavřený interval.

Poznámka 2.8. *Lichoběžníkové fuzzy číslo* A *určené čtveřicí jeho význačných hodnot budeme v dalším textu označovat* $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$. *Trojúhelníkové fuzzy číslo* A *určené trojicí jeho význačných hodnot budeme v dalším textu označovat* $\langle a_1, a_2, a_4 \rangle$. *V případě, že některá význačná hodnota lineárního fuzzy čísla bude dána desetinným číslem, budou k oddělení význačných hodnot tohoto fuzzy čísla použity středníky místo čárek.*

Fuzzy čísla lze zapsat i jiným způsobem než pomocí jejich význačných hodnot, a to pomocí tzv. *dolních a horních funkcí* reprezentujících krajní hodnoty jejich α-řezů.

Věta 2.6. *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Pak existují funkce $\underline{a} : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ a $\overline{a} : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$, které jsou zleva spojité, splňují nerovnosti*

$$\underline{a}(\alpha) \leq \underline{a}(\beta) \leq \overline{a}(\beta) \leq \overline{a}(\alpha) \quad \text{pro každé } 0 \leq \alpha < \beta \leq 1$$

a pro které platí

$$\begin{aligned} A_\alpha =& \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \quad \text{pro všechna } \alpha \in (0,1\rangle, \\ Cl(SuppA) =& \langle \underline{a}(0), \overline{a}(0)\rangle. \end{aligned}$$

Důkaz. Viz [40]. □

Poznámka 2.9. *Reálné číslo c lze také vyjádřit pomocí horních a dolních funkcí, a to jako $\underline{c}(\alpha) = \overline{c}(\alpha) = c$ pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$.*

Poznámka 2.10. *Fuzzy číslo A určené pomocí jeho horních a dolních funkcí budeme v dalším textu označovat $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$.*

Na závěr kapitoly ještě zmiňme *uspořádání fuzzy čísel*, které bude využito v aplikační části práce. Nejprve popíšeme základní uspořádání fuzzy čísel, a to na základě uspořádání jejich α-řezů. Zadefinujeme pouze případ, kdy jedno fuzzy číslo je menší než druhé. Rovnost byla totiž představena již v kapitole 2.1.

Definice 2.16. *Nechť $A, B \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$, $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$ a $B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$. Pak řekneme, že A* je menší než *B, značíme $A < B$, pokud současně platí:*

a) $A_\alpha \leq B_\alpha$, tj. $\underline{a}(\alpha) \leq \underline{b}(\alpha)$ a zároveň $\overline{a}(\alpha) \leq \overline{b}(\alpha)$ pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$,

b) $A_\alpha < B_\alpha$, tj. $\underline{a}(\alpha) < \underline{b}(\alpha)$ a zároveň $\overline{a}(\alpha) \leq \overline{b}(\alpha)$, nebo $\underline{a}(\alpha) \leq \underline{b}(\alpha)$ a zároveň $\overline{a}(\alpha) < \overline{b}(\alpha)$ pro alespoň jedno $\alpha \in (0,1\rangle$.

Pokud platí pouze a)*, pak řekneme, že A* je menší nebo rovno *B, značíme $A \leq B$.*

Fuzzy čísla lze uspořádat také na základě uspořádání jejich číselných charakteristik (viz např. [13]). Dále využijeme pouze uspořádání na základě *těžišť* fuzzy množin. Těžiště fuzzy čísla je vyjádřeno reálným číslem a představuje analogii ke střední hodnotě náhodné veličiny.

Definice 2.17. Těžiště *fuzzy množiny A je reálné číslo $cog(A)$ určené*

$$cog(A) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x) \cdot x \, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x) \, dx}. \tag{2.1}$$

2.4. Výpočty s fuzzy čísly

Výpočty s fuzzy čísly jsou založeny na principu rozšíření. Ten představuje základ pro fuzzy aritmetiku zobecňující intervalovou aritmetiku na případ fuzzy čísel. Jak princip rozšíření, tak intervalová aritmetika počítající s α-řezy fuzzy čísel jsou popsány v této kapitole. Na závěr je v podkapitole 2.4.1 představeno konkrétní využití principu rozšíření, a to ve fuzzy váženém průměru.

Princip rozšíření byl představen Zadehem v jeho trojici článků o jazykové aproximaci a přibližném usuzování [71, 72, 73], kde se často uplatňuje. Zavedeme jej zde v obecné formě pro fuzzy množiny. Jak je známo, fuzzy čísla představují speciální případy fuzzy množin. Obecně princip rozšíření funkce f zobrazující jedno univerzum do univerza druhého indukuje, jak použitím funkce f získáme obraz fuzzy množiny, definované na prvním univerzu, na univerzu druhém.

Definice 2.18. *Nechť Ω a Ψ jsou univerza a nechť je dáno zobrazení $f : \Omega \to \Psi$. Pak* fuzzifikací *tohoto* zobrazení*, rozumíme zobrazení $f_F : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{F}(\Psi)$, které každé fuzzy množině $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ přiřazuje její obraz $f_F(A) \in \mathcal{F}(\Psi)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in \Psi$ následovně*

$$\mu_{f_F(A)}(y) = \begin{cases} \sup \{\mu_A(x) | x \in \Omega, f(x) = y\}, & \textit{pokud } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{pokud } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Intervalová aritmetika pracující s α-řezy fuzzy čísel je popsána např. v [27]. V tomto případě je fuzzy číslo chápána jako systém jeho α-řezů. Každý α-řez je pak určen svými krajními hodnotami, které se používají při výpočtech obdobně jako krajní hodnoty intervalů.

Uvažujme fuzzy čísla $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$ a $B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$ taková, mezi nimiž nejsou žádné vzájemné vztahy, tzv. interakce. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl získáme následovně

$$A + B = \left\{ \langle \underline{a}(\alpha) + \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) + \overline{b}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle \right\},$$

$$A - B = \left\{ \langle \underline{a}(\alpha) - \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) - \underline{b}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle \right\},$$

$$\begin{aligned} A \cdot B = \Big\{ \langle &\min \left\{ \underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha) \right\}, \\ &\max \left\{ \underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha) \right\} \rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : B = \Big\{ \langle &\min \left\{ \underline{a}(\alpha) : \underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha) : \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) : \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) : \overline{b}(\alpha) \right\}, \\ &\max \left\{ \underline{a}(\alpha) : \underline{b}(\alpha), \underline{a}(\alpha) : \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) : \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) : \overline{b}(\alpha) \right\} \rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle \Big\}. \end{aligned}$$

Poznámka 2.11. *Intervalovou aritmetiku pracující s α-řezy fuzzy čísel lze použít pouze v případech, kdy nejsou žádné interakce mezi fuzzy čísly. V případě, že vzájemné interakce mezi fuzzy čísly existují, lze použít tzv. princip rozšíření s podmínkou. V tomto případě se do podmínek principu rozšíření zapíší vzájemné vztahy mezi fuzzy čísly a výpočet se provede s jejích uvažováním. Příkladem takových fuzzy čísel s interakcemi jsou dále zmíněné normované fuzzy váhy i m-tice fuzzy pravděpodobností.*

2.4.1. Fuzzy vážený průměr

Popíšeme fuzzy rozšíření operace váženého průměru na případ fuzzy čísel, a to na základě výše představeného principu rozšíření. Zavedeme vzorce pro výpočet fuzzy váženého průměru s tzv. normovanými fuzzy váhami a zmíníme i případ, kdy váhy jsou vyjádřeny reálnými čísly.

V praktických aplikacích, např. při agregaci dílčích hodnocení do hodnocení celkového ve vícekriteriálním rozhodování nebo při výpočtu očekávané hodnoty v diskrétních modelech při rozhodování za rizika, se často využívá *vážený průměr* tak, jak jej zavádí následující definice.

Definice 2.19. *Nechť $u_1, \ldots, u_m$ jsou reálná čísla. Nechť $v_1, \ldots, v_m$, $v_j \in \mathbb{R}$, $v_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m} v_j = 1$, představují normované váhy přiřazené číslům $u_1, \ldots, u_m$. Pak definujeme* vážený průměr *jako reálné číslo u následovně*

$$u = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot u_j.$$

Abychom mohli vhodným způsobem fuzzifikovat vážený průměr, zaveďme nejprve tzv. *normované fuzzy váhy* (viz např. [8, 40]).

Definice 2.20. *Fuzzy čísla V_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nazveme* normovanými fuzzy váhami*, pokud pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ a pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ platí: pro libovolné $v_j \in V_{j\alpha}$ existují $v_i \in V_{i\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$, takové, že*

$$v_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{m} v_i = 1\ .$$

Normované fuzzy váhy vyjadřují neurčité podíly na celku rozděleném na části.

Nyní již zaveďme tzv. *fuzzy vážený průměr fuzzy čísel s normovanými fuzzy váhami*, který dále v práci využijeme.

Definice 2.21. Fuzzy vážený průměr fuzzy čísel $U_j = \left\{\langle \underline{u_j}(\alpha), \overline{u_j}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0, 1\rangle\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$,* s normovanými fuzzy váhami $V_j = \left\{\langle \underline{v_j}(\alpha), \overline{v_j}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0, 1\rangle\right\}$, *$j = 1, 2, \ldots, m$, je fuzzy číslo na intervalu $\langle a, b\rangle$, které označíme $U = \{\langle \underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0, 1\rangle\}$, jehož funkce příslušnosti je pro libovolné $u \in \langle a, b\rangle$ dána vzorcem*

$$\mu_U(u) = \max \left\{ \min \{\mu_{V_1}(v_1), \ldots, \mu_{V_m}(v_m), \mu_{U_1}(u_1), \ldots, \mu_{U_m}(u_m)\} \mid \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot u_j = u, \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{m} v_j = 1,\ v_j \geq 0, u_j \in \langle a, b\rangle,\ j = 1, 2, \ldots, m \right\}\ .$$

Prakticky se fuzzy vážený průměr většinou počítá pomocí α-řezů pro vybraná $\alpha \in (0, 1\rangle$. Funkce příslušnosti výsledného fuzzy váženého průměru se pak určí aproximací. Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí:

$$\underline{u}(\alpha) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot \underline{u_j}(\alpha) \mid v_j \in \langle \underline{v_j}(\alpha), \overline{v_j}(\alpha)\rangle, j = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m} v_j = 1 \right\},$$

$$\overline{u}(\alpha) = \max \left\{ \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot \overline{u_j}(\alpha) \mid v_j \in \langle \underline{v_j}(\alpha), \overline{v_j}(\alpha)\rangle, j = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m} v_j = 1 \right\}.$$

Poznámka 2.12. *Speciálním případem fuzzy váženého průměru fuzzy čísel s normovanými fuzzy váhami je* fuzzy vážený průměr fuzzy čísel s normovanými reálnými váhami*, kdy jsou váhy přiřazené fuzzy číslům* $U_j \in \mathcal{F}_N(\langle a,b\rangle)$, $j = 1,2,\ldots,$ m, $U_j = \left\{\langle \underline{u_j}(\alpha), \overline{u_j}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\right\}$*, vyjádřeny reálnými čísly* v_j, $j = 1,2,\ldots,$ m, $\sum_{j=1}^{m} v_j = 1$. *Pak se* α*-řez fuzzy váženého průměru* $U \in \mathcal{F}_N(\langle a,b\rangle)$, $U = \{\langle \underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in (0,1\rangle\}$*, pro libovolné* $\alpha \in (0,1\rangle$ *získá následovně*

$$\underline{u}(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot \underline{u_j}(\alpha),$$

$$\overline{u}(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot \overline{u_j}(\alpha).$$

2.5. Jazyková proměnná a báze fuzzy pravidel

Náplní této části práce jsou zejména definice jazykové proměnné, jazykové škály a báze fuzzy pravidel. Poté jsou uvedeny Sugenův a zobecněný Sugenův inferenční algoritmus k získání výstupů z dané báze fuzzy pravidel.

Jazyková proměnná představuje rozšíření reálné proměnné, v níž zaměňuje číselné hodnoty za slova. Jazyková proměnná je tedy proměnná, která nabývá slovně popsaných hodnot, tzv. *termů*. Každému termu pak na základě daného sémantického pravidla přiřazuje jeho matematický význam. Představil ji Zadeh ve své trojici článků o jazykové proměnné a jejich aplikacích v přibližném usuzování [71, 72, 73].

Definice 2.22. *Uspořádanou pětici* $(\mathcal{X}, T(\mathcal{X}), \langle a,b\rangle, G, M)$*, kde* $\mathcal{X}$ *je název jazykové proměnné,* $T(\mathcal{X}) = \{\mathcal{T}_1,\ldots,\mathcal{T}_s\}$ *je množina jejích jazykových termů,* $\langle a,b\rangle$ *je univerzum,* G *představuje syntaktické pravidlo pro generování termů z* $T(\mathcal{X})$ *a* M *je sémantické pravidlo přiřazující každé jazykové hodnotě její matematický význam, nazveme* jazykovou proměnnou.

V praktických aplikacích hodnoty jazykové proměnné často tvoří speciální strukturu, tzv. jazykovou škálu. Než ji však bude možné představit, je třeba nejprve zadefinovat *fuzzy rozklad uzavřeného intervalu* $\langle a,b\rangle$.

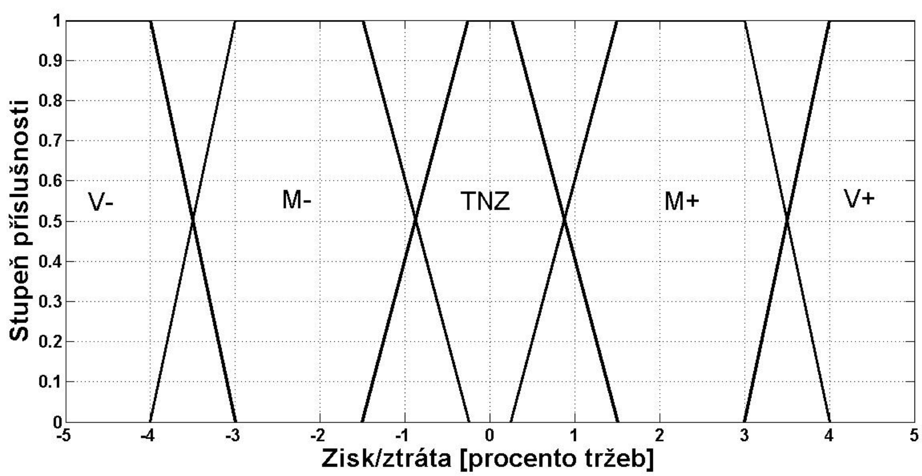
Definice 2.23. *Fuzzy čísla* $T_i \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, $i = 1, \dots, s$, *tvoří* fuzzy rozklad uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$, *pokud pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *platí, že*

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_{T_i}(x) = 1.$$

Jazyková škála pak představuje množinu jazykových hodnot, jejichž matematické významy tvoří fuzzy rozklad uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$ a jsou indexovány na základě jejich lineárního uspořádání.

Definice 2.24. *Jazyková proměnná* $(\mathcal{X}, T(\mathcal{X}), \langle a, b\rangle, G, M)$, $T(\mathcal{X}) = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_s\}$, *tvoří* jazykovou škálu, *pokud fuzzy čísla* $T_i = M(\mathcal{T}_i)$, $i = 1, \dots, s$, $T_i \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, *jsou očíslována ve shodě s jejich lineárním uspořádáním, tj.* $T_1 < T_2 < \dots < T_s$ *(viz definice 2.16) a tvoří fuzzy rozklad intervalu* $\langle a, b\rangle$ *(viz definice 2.23).*

Příklad 2.3. *Uvažujme jazykovou škálu zobrazenou na obrázku 2.1. Tuto škálu tvoří jazykové termy „velká ztráta“ ($V-$), „malá ztráta“ ($M-$), „téměř nulový zisk či ztráta“ (TNZ), „malý zisk“ ($M+$) a „velký zisk“ ($V+$).*



Obrázek 2.1: Příklad jazykové škály

Další možné uplatnění jazykových proměnných představuje tzv. *báze fuzzy pravidel*. Báze fuzzy pravidel slouží k jazykovému popisu matematických závislostí mezi vstupními a výstupními proměnnými, které jsou modelovány pomocí jazykových proměnných. V kapitole zabývající se praktickými aplikacemi je využita pouze báze pravidel s jednou vstupní a jednou výstupní proměnnou, která vždy přiřazuje jedné hodnotě vstupní proměnné jednu hodnotu výstupní proměnné.

Definice 2.25. *Nechť jsou dány dvě jazykové proměnné* $(\mathcal{S}, T(\mathcal{S}), \langle a, b\rangle, G_s, M_s)$ *a* $(\mathcal{H}, T(\mathcal{H}), \langle c, d\rangle, G_h, M_h)$, *kde* $T(\mathcal{S}) = \{\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m\}$, $M_s(\mathcal{S}_j) = S_j$, $j = 1, \ldots, m$, $S_j \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, $T(\mathcal{H}) = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k\}$, $M_h(\mathcal{H}_k) = H_k$, $k = 1, \ldots, l$, $l \leq m$, $H_k \in \mathcal{F}_N(\langle c, d\rangle)$.

Bází fuzzy pravidel *nazveme množinu m pravidel ve tvaru:*

$$\textit{Jestliže } \mathcal{S} \textit{ je } \mathcal{S}_j, \textit{ pak } \mathcal{H} \textit{ je } \mathcal{H}_k,\ j = 1 \ldots, m,\ k = 1, \ldots, l,\ l \leq m.$$

Poznámka 2.13. *Vstupy a výstupy z báze fuzzy pravidel, tj. levé a pravé strany pravidel, nejsou v některých případech popsány slovně, ale číselně. V těchto případech báze fuzzy pravidel slovně popisuje vztah mezi hodnotami dvou reálných proměnných, popř. mezi jazykovou proměnnou a reálnou proměnnou.*

Později budeme uvažovat, že množina $T(\mathcal{S})$ představuje množinu možných stavů světa. Množina $T(\mathcal{H})$ bude představovat množinu důsledků dané varianty za daných stavů světa S_j. Při vztahu mezi stavy světa a důsledky za daných stavů světa popsanými pro danou variantu pomocí báze fuzzy pravidel nás bude zajímat, jak získáme nějaký celkový důsledek této varianty. Přesněji řečeno, chceme z dané báze fuzzy pravidel získat nějaký výstup. Využijeme k tomu Sugenova inferenčního algoritmu nebo Zobecněného Sugenova inferenčního algoritmu.

Sugenův inferenční algoritmus, představený Sugenem [55] v roce 1985, předpokládá, že matematickou reprezentací hodnot vstupní proměnné jsou fuzzy čísla zatímco hodnoty výstupní proměnné představují reálná čísla. Výstupem z báze fuzzy pravidel je v tomto případě reálné číslo.

Nechť je dána báze fuzzy pravidel ve tvaru:

$$\text{Jestliže } \mathcal{S} \text{ je } \mathcal{S}_j, \text{ pak } h \text{ je } h_k,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, l,\ l \leq m,$$

kde $M_s(\mathcal{S}_j) = S_j$, $S_j \in \mathcal{F}_N\left(\langle a, b\rangle\right)$ a $h_j \in \mathbb{R}$. Nechť je dána vstupní hodnota S'. Pak výstup h^S, $h^S \in \mathbb{R}$, se z dané báze fuzzy pravidel získá

$$h^S = \frac{\sum_{j=1}^{m} \operatorname{hgt}(S_j \cap S') \cdot h_j}{\sum_{j=1}^{m} \operatorname{hgt}(S_j \cap S')}. \tag{2.2}$$

Naproti tomu *Zobecněný Sugenův inferenční algoritmus*, popsaný v [56], pracuje s fuzzy čísly na obou stranách pravidel. Výstupem z báze fuzzy pravidel je pak fuzzy číslo.

Nechť je dána báze fuzzy pravidel ve tvaru:

Jestliže $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S}_j$, pak $\mathcal{H}$ je $\mathcal{H}_k$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, l$, $l \leq m$,

kde $M_s(\mathcal{S}_j) = S_j$, $S_j \in \mathcal{F}_N\left(\langle a, b\rangle\right)$, $M_h(\mathcal{H}_j) = H_j$ a $H_j \in \mathcal{F}_N(\langle c, d\rangle)$. Nechť je dána vstupní hodnota S'. Pak výstup H^S, $H^S \in \mathcal{F}_N(\langle c, d\rangle)$, se z dané báze fuzzy pravidel získá

$$H^S = \frac{\sum_{j=1}^{m} \operatorname{hgt}(S_j \cap S') \cdot H_j}{\sum_{j=1}^{m} \operatorname{hgt}(S_j \cap S')}. \tag{2.3}$$

Kapitola 3

Fuzzy pravděpodobnostní prostor

Náplní této kapitoly je fuzzifikace pravděpodobnostního prostoru. Nejprve je definován pravděpodobnostní prostor a připomenuty základní vlastnosti pravděpodobnostní míry. Následně jsou popsány tři typy fuzzy pravděpodobnostních prostorů, kde jsou rozšířeny jevy na případ fuzzy jevů, σ-algebra náhodných jevů na případ σ-algebry fuzzy jevů a pravděpodobnostní míra na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Pravděpodobnosti fuzzy jevů mohou být vyjádřeny vícero způsoby. Způsoby popsané v literatuře jsou analyzovány v příslušných částech této kapitoly, popř. jsou navrženy přístupy nové.

3.1. Pravděpodobnostní prostor

V této části je definován pravděpodobnostní prostor a popsány vlastnosti pravděpodobnostní míry. Pravděpodobnostní prostor byl zaveden Kolmogorovem [29] v roce 1933.

Začněme definicí σ-algebry, kterou tvoří náhodné jevy na daném neprázdném univerzu Ω.

Definice 3.1. σ-algebra $\mathcal{A}$ náhodných jevů *představuje neprázdnou třídu množin, která je uzavřená vzhledem ke sjednocení spočetně mnoha množin a doplňku, tj. platí:*

1. *Pokud* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, *pak také* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

2. *Pokud* $A \in \mathcal{A}$, *pak také* $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$.

Poslední ze složek pravděpodobnostního prostoru je *pravděpodobnostní míra*. Abychom funkci P mohli nazvat pravděpodobnostní mírou (poprvé byla představena Kolmogorovem [29]), musí splňovat tři axiomy uvedené v následující definici.

Definice 3.2. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu všech elementárních jevů a $\mathcal{A}$ přestavuje σ-algebru náhodných jevů.* Pravděpodobnostní mírou *nazveme každou reálnou funkci P, která splňuje následující axiomy:*

1.

$$P(A) \geq 0 \text{ pro každé } A \in \mathcal{A}; \tag{3.1}$$

2.

$$P(\Omega) = 1; \tag{3.2}$$

3. pro každou posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ takovou, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3.3}$$

Obecně je tedy pravděpodobnostní míra množinová funkce, která je nezáporná (axiom (3.1)), normovaná (tj. pravděpodobnost celého univerza je rovna jedné - axiom (3.2)) a spočetně aditivní (axiom (3.3)).

Analogicky může být *pravděpodobnostní míra* definována jako zobrazení $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$, které každému náhodnému jevu $A \in \mathcal{A}$ přiřazuje jeho pravděpodobnost $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$, splňující (3.2) a (3.3).

Nyní se dostáváme k *pravděpodobnostnímu prostoru*, který zavádí následující definice.

Definice 3.3. Pravděpodobnostním prostorem *nazveme uspořádanou trojici* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *kde Ω označuje neprázdnou množinu všech elementárních jevů, $\mathcal{A}$ přestavuje σ-algebru náhodných jevů a $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1 \rangle$ je pravděpodobnostní míra.*

V aplikační části této práce budeme uvažovat, že množina všech elementárních jevů Ω je tvořena všemi možnými budoucími stavy světa.

Na závěr ještě zaveďme pojem *měřitelný prostor*, tj. prostor na němž není uvažována konkrétní míra.

Definice 3.4. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu všech elementárních jevů a $\mathcal{A}$ přestavuje σ-algebru náhodných jevů. Uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ pak nazveme* měřitelným prostorem*.*

Měřitelný prostor dále využijeme při fuzzifikaci pravděpodobnostní míry.

3.1.1. Vlastnosti pravděpodobnostní míry

Nyní ukážeme další vlastnosti pravděpodobnostní míry a rozebereme také její interpretaci.

Každá pravděpodobnostní míra má také další vlastnosti, které hrají velkou roli v praktických aplikacích. Tyto vlastnosti jsou uvedeny v následující větě.

Věta 3.1. *Pro pravděpodobnostní míru P platí:*

1. $P(\emptyset) = 0$*;*
2. *pro každé $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $P(A) \leq P(B)$;*
3. *pro každé $A, B \in \mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;*
4. *pro každé $A \in \mathcal{A}$: $P(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P(A)$;*
5. *pro každé $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ platí: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.*

Důkaz. Důkazy vlastností 1. - 4. viz [30]. Poslední vlastnost je důsledkem platnosti axiomů (3.2) a (3.3). $\square$

Ještě popišme interpretaci pravděpodobností. Pravděpodobnost $P(A)$ jednoznačně určeného ostrého jevu A je běžně chápána jako míra šance, že daný jev A nastane někdy v budoucnu. Např. pokud A označuje jev „úroková míra bude menší nebo rovna 2 % p.a.“ a $P(A) = 0,5$, pak víme, že je zde zcela totožná šance, že úroková míra bude menší nebo rovna 2 % p.a., nebo, že úroková míra bude větší než 2 % p.a. Jinými slovy, pokud bychom neustále opakovali daný proces, pak by relativní četnosti výskytu obou možností konvergovaly k 50 %.

V dalších částech budeme studovat zachování popsaných vlastností také pro různé způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů.

3.2. Fuzzy pravděpodobnostní prostor

Pravděpodobnostní prostor popsaný v kapitole 3.1 může být fuzzifikován různými způsoby. σ-algebra může být rozšířena na případ fuzzy jevů. Obdobně můžeme také uvažovat ostrou anebo fuzzy pravděpodobnostní míru.

V následujících podkapitolách tedy představíme různé způsoby fuzzifikace pravděpodobnostního prostoru, tj. různé varianty tzv. fuzzy pravděpodobnostního prostoru. Součástí této části je také popis různých způsobů vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů včetně průzkumu jejich vlastností.

3.2.1. Pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou fuzzy jevů a ostrou pravděpodobnostní mírou

V této části je daný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ rozšířen na případ fuzzy jevů. Je zde popsán přístup navržený Zadehem [68].

Zadeh ve skutečnosti uvažoval $\Omega = \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{A} = \mathcal{B}_n$, kde $\mathcal{B}_n$ značí σ-algebru Borelovských množin na $\mathbb{R}^n$ (více o Borelovských množinách a teorii míry lze nalézt např. v [17]). Popsaný způsob rozšíření však může být bez jakýchkoli modifikací aplikován také na případ obecného univerza Ω a obecné σ-algebry $\mathcal{A}$.

Nejprve určeme, jaké fuzzy množiny definované na Ω představují *fuzzy jevy*. Zaheh [70] zavedl pojem fuzzy jev následovně:

Definice 3.5. Fuzzy jevem *nazveme fuzzy množinu* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, *jejíž funkce příslušnosti je* $\mathcal{A}$*-měřitelná, tj.* $A_\alpha \in \mathcal{A}$ *pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$.

Příklad 3.1. *Pro srovnání s ostrým jevem A uvažovaným v části 3.1.1 uvažujme* *vágně popsané jevy „nízká úroková míra“ a „příští rok se očekává úroková míra asi 2 %“. Oba tyto jevy představují neurčitý popis budoucího stavu, a proto by měly být matematicky popsány pomocí aparátu teorie fuzzy množin.*

Nyní definujme pojem *σ-algebra fuzzy jevů* shodně jako v [36], abychom s ním mohli dále pracovat.

Definice 3.6. σ-algebra $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů *představuje neprázdnou třídu fuzzy množin, která je uzavřená vzhledem ke sjednocení spočetně mnoha fuzzy množin, doplňku a jejímž prvkem je také celé univerzum, tj. platí:*

1. *pro každé $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}_F$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_F$,*
2. *pro každé $A \in \mathcal{A}_F$: $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}_F$,*
3. *$\Omega \in \mathcal{A}_F$.*

Jevy na daném univerzu tvoří σ-algebru $\mathcal{A}$ (viz definice 3.1), pokud splňují první dvě podmínky z definice 3.6. Fuzzy jevy však k tvorbě σ-algebry $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů musí splnit ještě jednu podmínku navíc: Samotné univerzum musí být prvkem σ-algebry $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů. Potřeba této vlastnosti je způsobena definicemi operací s fuzzy množinami popsanými v kapitole 2.2. Sjednocením fuzzy jevu a doplňkového fuzzy jevu (viz definice 2.11) totiž obecně nezískáme celé univerzum Ω.

Následující věta tvrdí, že fuzzy jevy na daném univerzu Ω tvoří σ-algebru fuzzy jevů.

Věta 3.2. *Množina všech fuzzy jevů na Ω tvoří* σ-algebru $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů *na Ω.*

Důkaz. Viz [36]. □

Vzájemný vztah mezi σ-algebrou $\mathcal{A}$ a σ-algebrou $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů popisuje následující poznámka.

Poznámka 3.1. *σ-algebra $\mathcal{A}$ obsahuje všechny náhodné jevy na univerzu Ω. Naproti tomu fuzzy σ-algebra $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů obsahuje kromě těchto náhodných jevů* *navíc také všechny fuzzy jevy na univerzu Ω. Pokud tedy chápeme ostré jevy jako speciální případ fuzzy jevů, tzn. množiny jako speciální případ fuzzy množin (viz pozn. 2.4), pak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_F$.*

Kvůli využití v aplikační části práce ještě zaveďme pojem *fuzzy měřitelný prostor*, tj. měřitelný prostor, do jehož σ-algebry paří kromě náhodných jevů také fuzzy náhodné jevy.

Definice 3.7. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu elementárních jevů a $\mathcal{A}_F$ σ-algebru fuzzy jevů. Pak uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A}_F)$ nazveme* fuzzy měřitelným prostorem.

Nyní se dostáváme k fuzzy pravděpodobnostnímu prostoru. Naším cílem je zkonstruovat uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{\mathcal{A}_F})$, kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, $\mathcal{A}_F$ značí σ-algebru fuzzy jevů a $P_{\mathcal{A}_F}$ představuje rozšíření pravděpodobnostní míry P na případ fuzzy jevů.

Pravděpodobnostní míru P lze na případ fuzzy jevů rozšířit různými způsoby. Dále nejprve popíšeme způsob, kdy je pravděpodobnost nějakého fuzzy jevu vyjádřena reálným číslem. Následně se zaměříme na tři způsoby výpočtů pravděpodobností fuzzy jevů vyjádřených pomocí fuzzy množin.

Způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů budou zkoumány z následujících dvou hledisek:

1. Matematické vlastnosti pravděpodobnostní míry P popsané v kapitolách 3.1 a 3.1.1 by měly být nějakým způsobem zachovány i v případě fuzzy jevů.

2. Interpretace pravděpodobnosti ostrého jevu by měla nějakým způsobem zůstat zachována i v případě fuzzy jevů.

Druhý aspekt je motivován úvahou R. Yagera v [61]: „Otázka, jaký je význam pravděpodobnosti nějakého fuzzy jevu, je obtížná. Její zkoumání by mělo být provázeno otázkou: Co znamená výrok, že fuzzy jev nastal?“ Problém je následující: Pravděpodobnost jednoznačně určeného ostrého jevu je běžně interpretována jako míra šance, že daný jev nastane v budoucnosti. Např. je-li pravděpodobnost ostrého jevu „zítra bude průměrná denní teplota nejméně 30 °C" rovna 0,5, pak jsou zcela totožné šance, že zítřejší průměrná teplota bude nejméně 30 °C, anebo, že bude nižší. Nicméně, zítra budeme schopni určit, zda uvažovaný ostrý jev nastal, nebo nenastal. Nyní uvažujme neurčitě popsaný jev „zítra bude horký den". Vyjádřením tohoto fuzzy jevu jako fuzzy množiny ve skutečnosti přiřazujeme každé denní teplotě stupeň, ve kterém bude splněna podmínka „horký den". Pokud bude v tomto případě stupeň naplnění podmínky z otevřeného intervalu (0,1), tzn. bude-li zítřejší den považován za horký pouze částečně, nebudeme schopni jednoznačně rozhodnout, zda daný fuzzy jev nastal, nebo nenastal. Budeme schopni pouze říci, že tento fuzzy jev nastal v jistém stupni. Stupně příslušnosti totiž obecně nemají pravděpodobnostní interpretaci. Tato skutečnost by se měla nějakým způsobem projevit ve způsobu vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů.

Pravděpodobnost fuzzy jevu zavedená Zadehem [70]

Obsahem této části je rozšíření pravděpodobnostní míry P na případ fuzzy jevů, kdy je pravděpodobnost fuzzy jevu vyjádřena reálným číslem. Následuje průzkum vlastností této rozšířené pravděpodobnostní míry, který byl publikován v [43, 52], a definice příslušného fuzzy pravděpodobnostního prostoru.

Zadeh [70] definoval pravděpodobnost $P_Z(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$ jako očekávanou hodnotu jeho funkce příslušnosti μ_A, tj. pomocí Lebesgueova-Stieltjesova integrálu

$$P_Z(A) = E(\mu_A) = \int_{\omega \in \Omega} \mu_A(\omega) dP. \tag{3.4}$$

Existence tohoto integrálu plyne přímo z předpokladu, že funkce příslušnosti μ_A je $\mathcal{A}$-měřitelná.

Ze vzorce (3.4) je zřejmé, že $P_Z : \mathcal{A}_F \to \langle 0, 1 \rangle$. Navíc v [36] je ukázáno, že P_Z splňuje také potřebné axiomy pravděpodobnostní míry, tj. $P_Z(\Omega) = 1$ a pro každé $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí:

$P_Z\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_Z(A_i)$. Zaveďme tedy příslušný fuzzy pravděpodobnostní prostor.

Definice 3.8. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu elementárních jevů a $\mathcal{A}_F$ představuje σ-algebru fuzzy jevů. Pak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_Z)$, kde P_Z je dána vzorcem (3.4), nazveme* fuzzy pravděpodobnostním prostorem se Zadehovou pravděpodobnostní mírou*.*

Vztah mezi klasickou pravděpodobností a Zadehovou pravděpodobností ostrého jevu popisuje poznámka 3.2. Plyne z ní, že pro ostrý jev obě pravděpodobnosti splývají.

Poznámka 3.2. *Pro jakýkoli jev $A \in \mathcal{A}$ platí, že $\mu_A(\omega) = 1$ pouze pro $\omega \in A$ a $\mu_A(\omega) = 0$ pro $\omega \notin A$. Proto $P_Z(A) = P(A)$.*

Nyní ukažme, že pravděpodobnostní míra P_Z splňuje také další vlastnosti pravděpodobnostní míry (uvedené ve větě 3.1), což bylo společně s její interpretací zkoumáno v [43, 52].

Věta 3.3. *Pro pravděpodobnostní míru P_Z platí:*

1. $P_Z(\emptyset) = 0$;
2. *pokud $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, pak $P_Z(A) \leq P_Z(B)$;*
3. *pro každé $A, B \in \mathcal{A}_F$: $P_Z(A \cup B) = P_Z(A) + P_Z(B) - P_Z(A \cap B)$;*
4. *pro každé $A \in \mathcal{A}_F : P_Z(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P_Z(A)$;*
5. *pokud $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_F$ tvoří fuzzy rozklad Ω, tj. $\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(\omega) = 1$ pro každé $\omega \in \Omega$, pak*
$$\sum_{i=1}^{n} P_Z(A_i) = 1.$$

Důkaz.

1. $P_Z(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$;

2. důkaz viz [70];

3. důkaz viz [70];

4. $P_Z(A^c) = E(\mu_{A^c}) = E(1 - \mu_A) = 1 - E(\mu_A) = 1 - P_Z(A)$, kde $E(\cdot)$ značí střední hodnotu výrazu uvedeného v závorkách;

5. $\sum_{i=1}^{n} P_Z(A_i) = \sum_{i=1}^{n} E(\mu_{A_i}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}\right) = E(\mathbf{1}) = 1$, kde $\mathbf{1}$ je náhodná veličina na Ω taková, že $\mathbf{1}(\omega) = 1$ pro každé $\omega \in \Omega$.

$\square$

Můžeme tedy vidět, že z matematického hlediska představuje zobrazení P_Z dané pomocí vzorce (3.4) korektní rozšíření pravděpodobnostní míry P. Toto je pravděpodobně důvod, proč se jedná o v odborné literatuře nejrozšířenější způsob vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů. Vyvstává však otázka, zda pro fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$, který není ostrý, hodnota $P_Z(A)$ představuje jeho pravděpodobnost tak, jak je běžně chápána. Tento problém bude nyní rozebrán podrobněji.

Uvažujme vágně popsaný jev „úroková míra bude nízká“ matematicky popsaný fuzzy množinou A. Pokud $P_Z(A) = 0,5$, pak můžeme v budoucnu očekávat úrokovou míru i % p.a. takovou, že $\mu_A(i) = 0,5$, tj. očekávaný stupeň, v jakém i odpovídá termu „malá“, je roven $0,5$. Jedná se tedy o odlišný význam, než má běžná interpretace pravděpodobnosti ostrého jevu. Vůbec se netýká šance, se kterou nastane jev A v budoucnosti. Pokud ve skutečnosti totiž v budoucnu nastane úroková míra i^* % p.a. taková, že $\mu_A(i^*) \in (0, 1)$, nebudeme schopni dokonce ani jednoznačně rozhodnout, zda jev A nastal nebo nenastal, tedy zda úroková míra i je nebo není „malá“. Jediným případem, kdy by hodnota $P_Z(A)$ mohla mít stejný význam jako pravděpodobnost ostrého jevu popsaná v kapitole 3.1.1, je ten, kdy stupeň příslušnosti $\mu_A(u)$ je interpretován jako pravděpodobnost, že prvek u náleží jevu A. Takovou interpretaci stupňů příslušnosti uvažovala Hisdal [19]. Nicméně, stupně příslušnosti standardně nemají pravděpodobnostní interpretaci. $P_Z(A)$ vyjadřuje pouze jaký stupeň splnění podmínky, popsané pomocí A, můžeme očekávat v budoucnosti. Pouze pokud $P_Z(A) = 0$, můžeme říci, že fuzzy jev A nikdy nenastane (podmínka nebude nikdy splněna v nenulovém stupni), a pokud $P_Z(A) = 1$, můžeme konstatovat, že fuzzy jev A je jistý (podmínka bude vždy zcela splněna).

Jiná pravděpodobnostní interpretace $P_Z(A)$ může být odvozena ze vztahu představeného Höhlem [20], který je ekvivalentní s (3.4) (dokázáno např. v [57]) a který má následující podobu:

$$P_Z(A) = \int_0^1 P(A_\alpha) d\alpha \quad \text{pro libovolné } A \in \mathcal{A}_F.$$

Tedy $P_Z(A)$ může být viděna jako průměr pravděpodobností konkrétních α-řezů A_α.

Pro případ, kdy $P_Z(A) \in (0, 1)$ a $A \in \mathcal{A}_F$ není ostrá množina, ilustrujme problém pomocí dvou příkladů. V prvním je univerzum Ω tvořeno konečně mnoha elementárními jevy. V druhém příkladě je uvažováno $\Omega = \mathbb{R}$.

Příklad 3.2. *Uvažujme příklad, který původně pochází od Yagera [61]. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ je množina lidí a $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ je fuzzy množina vysokých lidí dána následovně*

$$A = \{^{0,7}|_{\omega_1}, ^{0,3}|_{\omega_2}, ^{0,5}|_{\omega_3}, ^{1}|_{\omega_4}\},$$

kde prvky množiny A jsou ve tvaru ${}^{\mu_A(\omega_i)}|_{\omega_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Provedeme-li experiment, při kterém náhodně vybereme jednu osobu $\omega \in \Omega$ s následujícími vlastnostmi

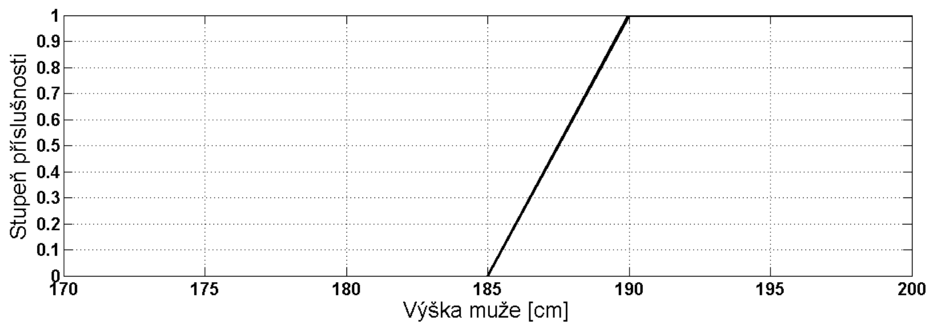
$$P(\omega = \omega_1) = 0,5, P(\omega = \omega_2) = 0,3, P(\omega = \omega_3) = 0,1 \text{ a } P(\omega = \omega_4) = 0,1.$$

Pak pravděpodobnost fuzzy jevu A, tj. pravděpodobnost výběru vysoké osoby, počítaná dle (3.4), bude

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \mu_A(\omega_i) \cdot P(\omega = \omega_i) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,1 = \\ = 0,59.$$

Výsledek $0,59$ vyjadřuje očekávaný stupeň příslušnosti, ve kterém bude náhodně vybraná osoba vysoká. Avšak nemůžeme obecně říci, že zde existuje 59% šance, že náhodně vybraná osoba bude vysoká.

Příklad 3.3. *Uvažujme, že výška mužů v určité oblasti je normálně rozdělená se střední hodnotou* 177 *cm a směrodatnou odchylkou* 7 *cm. Dále uvažujme fuzzy jev* $T =$ *„muž je vysoký", jehož funkce příslušnosti* μ_T *je na obrázku 3.1.*



Obrázek 3.1: Fuzzy jev „vysoký muž"

Pravděpodobnost fuzzy jevu T *počítaná podle Zadehovy definice* (3.4) *je následující*

$$P(T) = \int_{185}^{\infty} \mu_T(x) \cdot \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-177)^2}{98}\right\} dx \doteq 0,071.$$

Hodnota 0,071 však nevyjadřuje šanci, že muž z dané oblasti, kterého náhodně potkáme, bude vysoký. Tato hodnota nám pouze říká, že střední hodnota stupně příslušnosti náhodně potkaného muže k fuzzy jevu „vysoký muž" je 0,071, což je odlišný význam.

Další problém představuje skutečnost, že hodnota $P_Z(A)$ nám nedává žádnou informaci o fuzziness (tj. neurčitosti) fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. To je hlavní důvod, proč Yager [61] a také Talašová a Pavlačka [57] přišli s myšlenkou, že pravděpodobnost fuzzy jevu by měla být také fuzzy, což bude analyzováno v další části.

Fuzzy pravděpodobnost fuzzy jevu počítaná s využitím ostré pravděpodobnostní míry P

Dále se zaměříme na odlišný způsob vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů na základě ostré pravděpodobnostní míry P, a to pomocí fuzzy množiny na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nazývané fuzzy pravděpodobnost. S motivací pro tento přístup přišel

Yager [61]: „Intuitivně se zdá být nepřirozené, aby pravděpodobnost fuzzy množin byla vyjádřena ostrým číslem. Bylo by přirozenější, kdyby pravděpodobnost byla vyjádřena fuzzy číslem. Fuzziness nevzniká díky nedostatečné znalosti pravděpodobnostní míry, ale je způsobena neurčitostí fuzzy jevů.“ Zaměříme se tedy na tři způsoby definování fuzzy pravděpodobností fuzzy jevů, které byly publikovány v odborné literatuře.

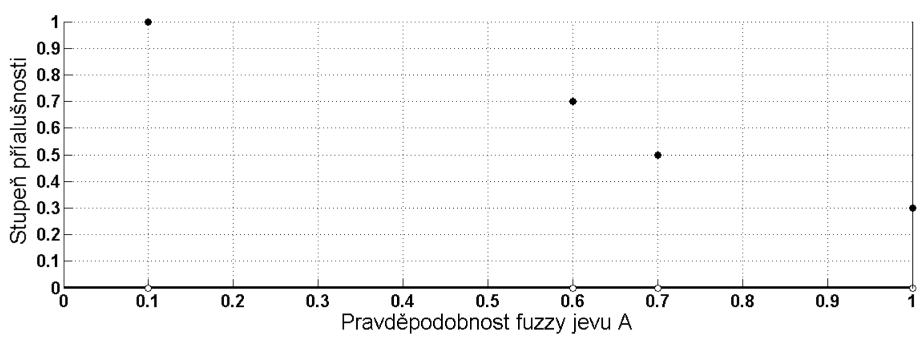
Fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů podle Yagera [61]

První způsob vyjádření fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu představil Yager [61]. Později stejnou myšlenku nastínili Talašová a Pavlačka [57]. Velice podobnou ideu uvažoval také Zadeh v [68], ale pouze pro diskrétní univerzum Ω s konečným počtem prvků.

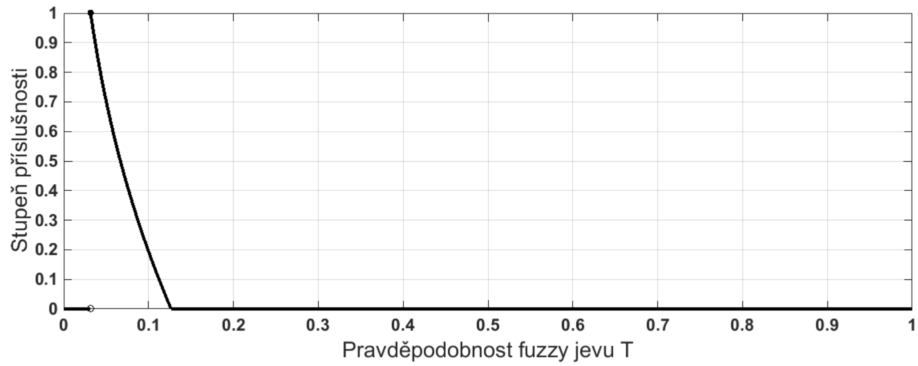
Yager [61] zavedl pravděpodobnosti fuzzy jevů pomocí zobrazení $P_Y : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0,1\rangle)$ definovaného následovně: Pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ je pro všechna $p \in \langle 0,1\rangle$ funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ dána

$$\mu_{P_Y(A)}(p) = \begin{cases} \max\{\alpha \mid p = P(A_\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \mid p = P(A_\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Jelikož $A_\alpha \in \mathcal{A}$ pro jakékoli $\alpha \in (0,1\rangle$, jsme schopni určit všechny pravděpodobnosti $P(A_\alpha)$. Uvažujme například fuzzy jev A z příkladu 3.2 a fuzzy jev T z příkladu 3.3. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobností $P_Y(A)$ a $P_Y(T)$ jsou zobrazeny na obrázcích 3.2 a 3.3.



Obrázek 3.2: Funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(A)}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu A



Obrázek 3.3: Funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(T)}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu T

Posuďme nyní vhodnost tohoto přístupu. Nejprve se zaměřme na interpretaci fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. Ze vzorce (3.5) můžeme dle Yagera [62] vidět, že stupeň příslušnosti pravděpodobnosti $p \in \langle 0, 1 \rangle$ k fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ je větší než 0, pokud p vyjadřuje pravděpodobnost splnění podmínky dané fuzzy jevem A alespoň ve stupni α. Existuje zde tedy jasná pravděpodobnostní interpretace fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$, která odpovídá běžnému významu pravděpodobnosti (viz diskuze v úvodu této podkapitoly).

Prozkoumejme nyní, zda jsou vlastnosti pravděpodobnostní míry zachovány pro P_Y. Pro libovolný ostrý jev $A \in \mathcal{A}$ plyne přímo ze vzorce (3.5), že fuzzy pravděpodobnost $P_Y(A)$ „splývá“ s hodnotou $P(A)$, tj. $\mu_{P_Y(A)}(p) = 1$ pro $p = P(A)$ a $\mu_{P_Y(A)}(p) = 0$ pro libovolné $p \neq P(A)$. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(\Omega)$ je proto dána následovně: $\mu_{P_Y(\Omega)}(1) = 1$ a $\mu_{P_Y(\Omega)}(p) = 0$ pro libovolné $p \in \langle 0, 1)$.

Vlastnost pravděpodobnostní míry daná vzorcem (3.3) může být pro P_Y pozorována tak, jak uvádí následující věta.

Věta 3.4. *Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ jsou vzájemně disjunktní, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro libovolné $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Pak funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ může být získána z funkcí příslušnosti fuzzy pravděpodobností $P_Y(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, následujícím způsobem:*

$\mu_{P_Y(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}(p) =$

$$
= \begin{cases} \max\left\{\alpha \mid p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i,\ p_i = \max\left\{q \mid \mu_{P_Y(A_i)}(q) \geq \alpha\right\},\ i = 1, 2, \ldots\right\}, \\ \quad \textit{pokud nejméně jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0,\ \textit{jinak.} \end{cases} \tag{3.6}
$$

Důkaz. Pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ předpoklady implikují, že α-řezy z $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jsou rovny $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i\alpha}$, a že $A_{i\alpha} \cap A_{j\alpha} = \emptyset$ pro libovolné $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Pak pro libovolné $p \in \langle 0, 1\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{P_Y(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}(p) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \max\left\{\alpha \mid p = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i\alpha})\right\}, & \textit{pokud } \left\{\alpha \mid p = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i\alpha})\right\} \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{jinak,} \end{array} \right\} = \\
&= \begin{cases} \max\left\{\alpha \mid p = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i\alpha})\right\}, & \textit{pokud } \left\{\alpha \mid p = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i\alpha})\right\} \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vzorec (3.6) poté plyne přímo ze skutečnosti, že

$$
P(A_{i\alpha}) = \max\left\{q \mid \mu_{P_Y(A_i)}(q) \geq \alpha\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots
$$

□

Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(\emptyset)$ je dána analogicky jako funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(\Omega)}$, tj. platí: $\mu_{P_Y(\emptyset)}(0) = 1$ a $\mu_{P_Y(\emptyset)}(p) = 0$ pro libovolné $p \in (0, 1\rangle$.

Nyní uvažujme, že jsou dány fuzzy jevy $A, B \in \mathcal{A}_F$ takové, že $A \subseteq B$, tj. $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$. Prověřme vzájemné vztahy mezi jejich fuzzy pravděpodobnostmi $P_Y(A)$ a $P_Y(B)$. Yager [61] poukázal na to, že obecně mohou mít fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ a $P_Y(B)$ zcela odlišné nosiče. Náleží-li p do nosičů obou fuzzy pravděpodobností, pak $\mu_{P_Y(A)}(p) \leq \mu_{P_Y(B)}(p)$. Je však otázkou, zda je tento vztah nějakou fuzzifikací vlastnosti 2 z věty 3.1. Proto Pavlačka a Rotterová [43] zkoumali uspořádání fuzzy pravděpodobností. Ukázali, že pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí: $\min\{p \mid p \in P_Y(A)_\alpha\} \leq \min\{p \mid p \in P_Y(B)_\alpha\}$ a $\max\{p \mid p \in P_Y(A)_\alpha\} \leq \max\{p \mid p \in P_Y(B)_\alpha\}$. Tyto nerovnosti plynou ze skutečnosti, že $P(A_\alpha) \leq P(B_\alpha)$ pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$. Můžeme tedy říci, že $P_Y(A)$ je menší nebo rovno $P_Y(B)$.

Vlastnosti pravděpodobnostní míry (3) a (4) z věty 3.1 mohou být pro P_Y pozorovány následovně.

Věta 3.5. *Nechť $A, B \in \mathcal{A}_F$. Pak pro libovolné $p \in \langle 0,1\rangle$ může být funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A \cup B)$ získána z funkcí příslušnosti fuzzy pravděpodobností $P_Y(A)$, $P_Y(B)$ a $P_Y(A \cap B)$ takto:*

$$\mu_{P_Y(A\cup B)}(p) =$$
$$= \begin{cases} \max\Big\{\alpha \mid p = p_A + p_B - p_{A\cap B},\ p_A = \max P_Y(A)_\alpha, p_B = \max P_Y(B)_\alpha, \\ \quad p_{A\cap B} = \max P_Y(A\cap B)_\alpha\Big\}, & \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0, & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz může být proveden analogicky jako důkaz věty 3.4. Je však třeba uvažovat skutečnost, že pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$ platí: $P((A\cup B)_\alpha) = P(A_\alpha \cup B_\alpha) = P(A_\alpha) + P(B_\alpha) - P(A_\alpha \cap B_\alpha) = P(A_\alpha) + P(B_\alpha) - P((A\cap B)_\alpha)$. $\square$

Věta 3.6. *Nechť $A \in \mathcal{A}_F$ a nechť A^{c} představuje doplněk fuzzy množiny A. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A^{\mathsf{c}})$ může být z funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ pro libovolné $p \in \langle 0,1\rangle$ získána*

$$\mu_{P_Y(A^{\mathsf{c}})}(p) = \begin{cases} \max\left\{\alpha \mid 1-p = \sup\{q \mid \mu_{P_Y(A)}(q) > 1-\alpha\}\right\}, \\ \quad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0,\ \textit{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Pro libovolné $A \in \mathcal{A}_F$ je pro libovolné $p \in \langle 0,1\rangle$ funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A^{\mathsf{c}})$ dána

$$\mu_{P_Y(A^{\mathsf{c}})}(p) = \left\{\begin{matrix} \max\{\alpha \mid p = P(A^{\mathsf{c}}_\alpha)\}, & \textit{pokud } \{\alpha \mid p = P(A^{\mathsf{c}}_\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \textit{jinak,} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{cases} \max\left\{\alpha \mid 1-p = P\left(\bigcup_{\beta>1-\alpha} A_\beta\right)\right\}, \\ \quad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0,\ \textit{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož α-řezy fuzzy množiny jsou vnořené (viz vlastnost (1) z věty 2.1),

$$P\left(\bigcup_{\beta>1-\alpha} A_\beta\right) = \sup\{q \mid q = P(A_\beta),\ \beta > 1-\alpha\}.$$

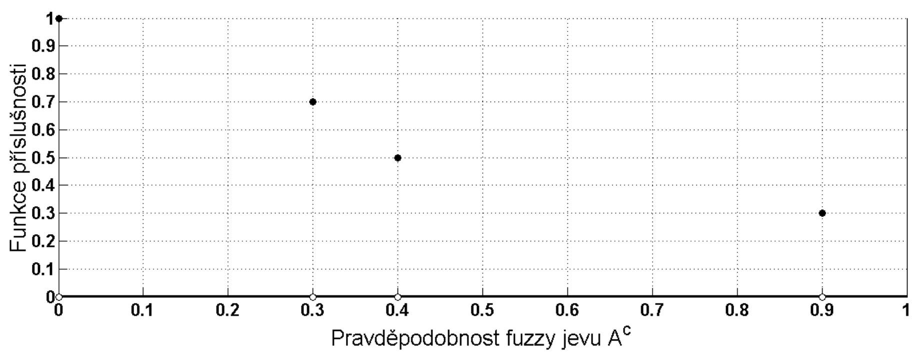
Proto

$$\mu_{P_Y(A^c)}(p) = \left\{ \begin{array}{l} \max\left\{\alpha \mid 1-p = \sup\left\{q \mid q = P(A_\beta),\ \beta > 1-\alpha\right\}\right\}, \\ \qquad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0,\ \textit{jinak,} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \max\left\{\alpha \mid 1-p = \sup\{q \mid \mu_{P_Y(A)}(q) > 1-\alpha\}\right\}, \\ \qquad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0,\ \textit{jinak.} \end{array} \right.$$

□

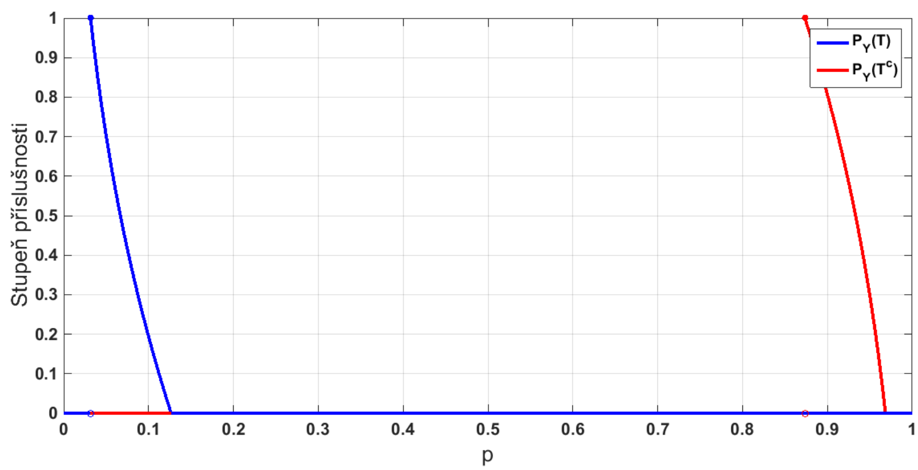
Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A^c)$ doplňku fuzzy jevu A z příkladu 3.2 je na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(A^c)}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu A^c

Můžeme tedy shrnout, že zobrazení $P_Y : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0, 1\rangle)$ dané vzorcem (3.5) nějakým způsobem zachovává téměř všechny vlastnosti pravděpodobnostní míry uvažované v kapitolách 3.1 a 3.1.1. Nezachová se pouze poslední vlastnost, tj. součet Yagerových pravděpodobností fuzzy jevů tvořících fuzzy rozklad univerza se nerovná jedné, jak ukazuje příklad 3.4. Pozorování těchto vlastností však není zcela přímočaré, tzn. nemůžeme např. použít pouze princip rozšíření pro sčítání a odčítaní fuzzy pravděpodobností. Ani Yager nezkoumal tyto fuzzy pravděpodobnosti z hlediska jejich praktického využití. Obecně lze říci, že se s těmito fuzzy pravděpodobnostmi velice obtížně pracuje.

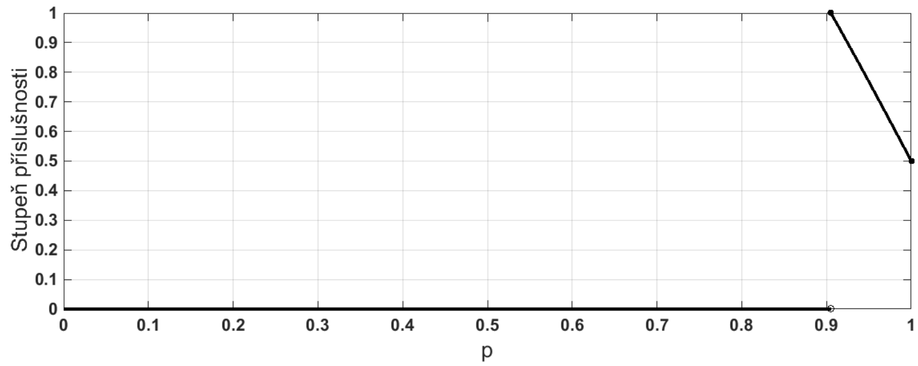
Příklad 3.4. *Uvažujme opět fuzzy jev $T =$ „muž je vysoký", jehož funkce příslušnosti je dána obrázkem 3.1, tj. vyjádřena lichoběžníkovým fuzzy číslem $\langle 185, 190, \infty, \infty \rangle$. Navíc uvažujme doplněk tohoto fuzzy jevu $T^{\mathsf{c}} =$ „muž není vysoký" s funkcí příslušnosti vyjádřenou lichoběžníkovým fuzzy číslem $\langle 0, 0, 185, 190 \rangle$. Tyto fuzzy jevy tvoří fuzzy rozklad univerza, kterým je kladná část reálné osy. Funkce příslušnosti Yagerorvých fuzzy pravděpodobností obou fuzzy jevů, spočítané pomocí (3.5) s uvažovaným podkladovým normálním rozdělením s parametry $\mu = 177$ a $\sigma = 7$, jsou ukázány na obrázku 3.5. Funkce příslušnosti Yagerovy fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu $T \cup T^{\mathsf{c}}$ je zobrazena na obrázku 3.6. Z tohoto obrázku je jasně vidět, že $\mu_{P_Y(T \cup T^{\mathsf{c}})}(1) = 0,5$. Ačkoli tedy T a T^{c} tvoří fuzzy rozklad univerza, Yagerova fuzzy pravděpodobnost jejich sjednocení se nerovná „asi jedné".*



Obrázek 3.5: Funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(T)}(\cdot)$ a $\mu_{P_Y(T^{\mathsf{c}})}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobností fuzzy jevů T a T^{c}

Fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů dle Klementa [25] a Yagera [62]

Stručně popišme také další dva způsoby, kterými lze definovat fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů pomocí pravděpodobnostní míry P, a to navržené Klementem [25] a Yagerem [62]. V obou přístupech autoři předpokládali diskrétní univerzum Ω s konečným počtem prvků. Jejich definice fuzzy pravděpodobností fuzzy jevů však bez jakýchkoli problémů můžeme rozšířit také na případ spojitého univerza



Obrázek 3.6: Funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(T \cup T^{\mathsf{c}})}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti sjednocení fuzzy jevů T a T^{c}

Ω.

Klement [25] představil zobrazení $P_K : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0, 1\rangle)$ definované následovně (pro zjednodušení zápisu zde uvádíme ekvivalentní verzi Klementovy definice prezentovanou Yagerem [62]): Pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ je funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_K(A)$ pro libovolné $p \in \langle 0, 1\rangle$ dána

$$\mu_{P_K(A)}(p) = \sup \{\alpha \mid P(A_\alpha) \geq p\}. \tag{3.7}$$

Pro libovolné $A \in \mathcal{A}_F$ je funkce příslušnosti $\mu_{P_K(A)}$ nerostoucí a zleva spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Jako hlavní výhodu tohoto přístupu oproti P_Y Klement [25] považoval monotonii P_K vzhledem k inkluzi fuzzy množin, tj. pokud $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, pak $P_K(A) \subseteq P_K(B)$. Tato vlastnost však nemůže být chápána jako zobecnění vlastnosti 2 z věty 3.1.

Na základě (3.7) Yager [62] interpretoval $\mu_{P_K(A)}(p)$ jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna nejméně p“. Je-li však jev A neostrý, není zcela zřejmé co znamená tvrzení „pravděpodobnost jevu A“. Uveďme tedy výstižnější interpretaci $P_K(A)$. Ze vzorce (3.7) plyne, že, pokud $\mu_{P_K(A)}(p) = \alpha$, pak „pravděpodobnost alespoň α stupně splnění podmínky dané pomocí A je rovna alespoň p“. Tato interpretace je platná také pro $\alpha = 0$, což je významný rozdíl oprati interpretaci $\mu_{P_Y(A)}(p)$. Nicméně můžeme pozorovat, že zobrazení P_K nepředstavuje rozšíření pravděpodobnostní míry P, protože poskytuje jiný druh informace. Jelikož $P_Y(A) \subseteq P_K(A)$ pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$, Yager [62] uvedl, že v případě ostrých jevů nesou fuzzy pravděpodobnosti P_K méně informace než P_Y. Poznamenejme, že tato poznámka může být očividně rozšířena také na případ fuzzy jevů.

Yager [62] vyšel z Klementovy definice fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu P_K, a představil zobrazení $\hat{P} : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0, 1 \rangle)$. Postupoval následovně:

Nechť A^{c} představuje doplněk fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. Nechť A^{c}_{α} označuje α-řez fuzzy jevu A^{c}. Funkce příslušnosti k $P_K(A^{\mathsf{c}})$ je dána pro všechna $p \in \langle 0, 1 \rangle$ pomocí

$$\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p) = \sup \left\{ \alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_{\alpha}) \geq p \right\}.$$

Podle Yagera [62] vyjadřuje $\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p)$ stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost, že *nenastane* jev A, je rovna alespoň p“. Přesněji řečeno, pokud $\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p) = \alpha$, pak pravděpodobnost toho, že „stupeň splnění podmínky dané pomocí A je nejvýše $1 - \alpha$“, je alespoň p.

Pak Yager [62] definoval $P_*(A)$ jako

$$P_*(A) = 1 - P_K(A^{\mathsf{c}}),$$

tj. pro všechna $p \in \langle 0, 1 \rangle$,

$$\mu_{P_*(A)}(p) = \mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(1 - p) = \sup \left\{ \alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_{\alpha}) \geq 1 - p \right\}. \tag{3.8}$$

Yager [62] interpretoval $\mu_{P_*(A)}(p)$ jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna nejvýše p“. Opět můžeme pozorovat, že tato interpretace není zcela jednoznačná. Uveďme tedy výstižnější interpretaci. Můžeme jednoduše vidět, že

$$\sup \left\{ \alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_{\alpha}) \geq 1 - p \right\} = \sup \left\{ \alpha \mid 1 - P\left(\bigcup\nolimits_{\beta > 1-\alpha} A_{\beta} \right) \geq 1 - p \right\} =$$
$$= \sup \left\{ \alpha \mid P\left(\bigcup\nolimits_{\beta > 1-\alpha} A_{\beta} \right) \leq p \right\}.$$

Tedy $\mu_{P_*(A)}(p) = \alpha$ znamená, že pravděpodobnost toho, že „podmínka daná pomocí jevu A je splněna ve stupni větším než $1 - \alpha$“, je nejvýše p.

Nakonec Yager [62] definoval fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$ jako

$$\hat{P}(A) = P_K(A) \cap P_*(A),$$

tj. funkce příslušnosti k $\hat{P}(A)$ je pro libovolné $p \in \langle 0, 1\rangle$ dána následovně:

$$\mu_{\hat{P}(A)}(p) = \min\left\{\mu_{P_K(A)}(p), \mu_{P_*(A)}(p)\right\}.$$

Při interpretaci $\hat{P}(A)$ vyšel Yager [62] z interpretací $P_K(A)$ a $P_*(A)$. $\mu_{\hat{P}(A)}(p)$ interpretoval jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna přesně p“. Tato interpretace je však sporná. Jak lze vidět ze vzorců (3.7) a (3.8), $\mu_{\hat{P}(A)}(p) = \alpha$ znamená pouze, že α je nejvyšší stupeň takový, že pravděpodobnost toho, že „podmínka daná jevem A je splněna alespoň ve stupni α“ je alespoň p, a pravděpodobnost toho, že „podmínka daná jevem A je splněna ve stupni alespoň $1-\alpha$“, je nejvýše p. Tento význam však neodpovídá Yagerově výkladu. Fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ má jasnou pravděpodobnostní interpretaci, je však diskutabilní, zda toto je očekávaný druh informace, který by měla fuzzy pravděpodobnost fuzzy jevu vyjadřovat.

Jinou otázkou je, jak by se mělo s fuzzy pravděpodobnostmi $\hat{P}$ počítat, a tedy ověřovat zachování fuzzifikovaných vlastností pravděpodobnostní míry. Yager [62] navíc ukázal, že pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ takový, že existuje alespoň jedno $\omega \in \Omega$ s $\mu_A(\omega) \notin \{0, 1\}$ a $P(\{\omega\}) > 0$, fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ není normální fuzzy množina (tj. její jádro je prázdná množina). Z praktického hlediska to však není dobrá vlastnost.

3.2.2. Pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou

V této části se zaměříme na případ, kdy je uvažována σ-algebra $\mathcal{A}$ a fuzzy je pouze podkladová pravděpodobnostní míra.

Uvažujme daný měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$ dle definice 3.4 a na něm zaveďme fuzzy pravděpodobnostní míru.

Poznámka 3.3. *Konvexní kombinací pravděpodobnostních měr P_1 a P_2 budeme rozumět pravděpodobnostní míru $P = \lambda \cdot P_1 + (1-\lambda) \cdot P_2$ pro libovolné $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Pro pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ pak tedy platí: $P(A) = \lambda \cdot P_1(A) + (1-\lambda) \cdot P_2(A)$.*

Definice 3.9. *Nechť $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$ označuje množinu všech pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A}))$ je množina všech fuzzy množin na množině $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$. Pak $P_F \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A}))$ nazveme* fuzzy pravděpodobnostní mírou, *pokud*

1. *P_F je normální fuzzy množina, tzn. existuje alespoň jedna pravděpodobnostní míra $P \in \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že $\mu_{P_F}(P) = 1$.*
2. *Pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí:*
   - (a) *$P_{F,\alpha}$ je konvexní množina, tj. pro každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ a každé $P_1, P_2 \in P_{F,\alpha}$ platí: $(\lambda \cdot P_1 + (1 - \lambda) \cdot P_2) \in P_{F,\alpha}$;*
   - (b) *pro každý náhodný jev $A \in \mathcal{A}$ existuje minimum i maximum množiny $\{P(A) \mid P \in P_{F,\alpha}\}$.*

Poznámka 3.4. *V případě diskrétního univerza Ω bývá $P_{F,\alpha}$ pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ v anglicky psané literatuře označováno jako* credal set *(viz např. [1, 2, 11, 23, 58]).*

Fuzzy pravděpodobnost libovolného náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ představuje fuzzy množina $P_F(A)$ určená svými α-řezy $P_F(A)_\alpha = \{p \in \langle 0, 1\rangle \mid p = P(A), P \in P_{F,\alpha}\}$, $\alpha \in (0, 1\rangle$. Z podmínek kladených v definici 3.9 na fuzzy pravděpodobnostní míru P_F vyplývá, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou $P_F(A)_\alpha$ uzavřené intervaly. Plyne z nich také, že jádro $Ker\, P_F(A)$ je neprázdné. Protože pravděpodobnost $P(A)$ jevu A vždy náleží do intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tak nosič $Supp\, P_F(A) \subseteq \langle 0, 1\rangle$, tzn. je omezený. $P_F(A)$ je tedy fuzzy číslo. Tato fuzzy pravděpodobnost se prakticky spočítá následovně: Označme α-řez $P_F(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha}\rangle$ pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$. Krajní hodnoty tohoto α-řezu jsou pak dány

$$p^L_{A,\alpha} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \chi_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}, \tag{3.9}$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \chi_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}. \tag{3.10}$$

Nyní uvažujme konečné univerzum Ω. Abychom na něm mohli určit fuzzy pravděpodobnosti jevů, je nejprve třeba zavést tzv. *m-tici fuzzy pravděpodobností.*

Definice 3.10. *Nechť* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. *Nechť* $P_F(\{\omega_k\}) \in \mathcal{F}_N(\langle 0, 1\rangle)$, $k = 1, \ldots, m$, *jsou fuzzy pravděpodobnosti elementárních jevů. Řekneme, že* $P_F(\{\omega_1\})$, $\ldots, P_F(\{\omega_m\})$ *tvoří* m-tici fuzzy pravděpodobností, *jestliže pro libovolné* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *a libovolné* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *platí, že pro libovolné* $p_j \in P_F(\{\omega_j\})_\alpha$ *existují* $p_k \in P_F(\{\omega_k\})_\alpha, k = 1, \ldots, m, k \neq j$, *takové, že* $p_j + \sum_{k=1,k\neq j}^{m} p_k = 1$.

Z definice 3.10 je vidět, že m-tice fuzzy pravděpodobností splňuje stejnou podmínku jako normované fuzzy váhy definované v části 2.4.1.

Konkrétní možné podoby fuzzy pravděpodobnostní míry a výpočty fuzzy pravděpodobností jsou ukázány v následujících dvou příkladech. V prvním z nich je uvažováno konečné univerzum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. Krajní hodnoty α-řezu fuzzy pravděpodobnosti $P_F(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha}\rangle$ libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ se pomocí m-tice fuzzy pravděpodobností $P_F(\{\omega_1\})$, $\ldots, P_F(\{\omega_m\})$ pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ určí

$$p^L_{A,\alpha} = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} \chi_A(\omega_j) \cdot p_j \mid p_j \in P_F(\{\omega_j\})_\alpha, j = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right\}, \tag{3.11}$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max\left\{\sum_{j=1}^{m} \chi_A(\omega_j) \cdot p_j \mid p_j \in P_F(\{\omega_j\})_\alpha, j = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right\}. \tag{3.12}$$

Vzorce (3.11) a (3.12) představují aplikaci vzorců (3.9) a (3.10) na případ konečného univerza.

Příklad 3.5. *Představme si, že házíme kostkou, která má šest stran* $s_1, \ldots, s_6$. *Uvažujme, že kostka není zcela pravidelná. Předpokládejme, že fuzzy pravděpodobnost padnutí jakékoli strany je rovna fuzzy číslu* $P_F(\{s_j\}) = \langle 1/8, 1/6, 1/4\rangle$, $j \in \{1, \ldots, 6\}$. *Ukažme si, jak se určí pravděpodobnost jevu* $L =$ *„hodíme stranu kostky označenou lichým indexem“.*

V uvažovaném případě je výsledkem fuzzy číslo $P_F(L)$, *které lze určit pomocí fuzzy váženého průměru s uvažováním šestice fuzzy pravděpodobností namísto normovaných fuzzy vah, tj. pomocí vzorců* (3.11) *a* (3.12). *Pro libovolné* $\alpha \in (0, 1\rangle$

se α-řez $P_F(L)_\alpha = \langle p^L_{L,\alpha}, p^U_{L,\alpha}\rangle$ určí

$$p^L_{L,\alpha} = \min\left\{\sum_{j=1}^{6} \chi_L(s_j)\cdot p_j \mid p_j \in P_F(\{s_j\})_\alpha, j = 1,\ldots,6, \sum_{j=1}^{6} p_j = 1\right\},$$

$$p^L_{L,\alpha} = \max\left\{\sum_{j=1}^{6} \chi_L(s_j)\cdot p_j \mid p_j \in P_F(\{s_j\})_\alpha, j = 1,\ldots,6, \sum_{j=1}^{6} p_j = 1\right\}.$$

Fuzzy pravděpodobnost fuzzy jevu L je rovna fuzzy číslu $\langle 3/8, 1/2, 5/8\rangle$.

V následujícím příkladě předpokládejme univerzum $\Omega = \mathbb{R}$. Fuzzy pravděpodobnost uvažovaného jevu se pak určí pomocí speciálních případů vzorců (3.9) a (3.10).

Příklad 3.6. *Uvažujme univerzum $\mathbb{R}$ s daným normálním rozdělením pravděpodobnosti a na něm jev A. Parametry normálního rozdělení pravděpodobnosti nejsou přesně známy. Jsou vyjádřeny pomocí fuzzy čísel μ_F a σ_F (takový případ je uvažován v [6, 7]). Parametry mohou být určeny expertně, anebo odhadnuty z dat (viz [59]). Ukažme, jak se počítá fuzzy pravděpodobnost ostrého jevu A.*

Označme α-řez fuzzy pravděpodobnosti $P_F(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha}\rangle$ pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$. Krajní hodnoty tohoto α-řezu jsou získány pomocí speciálních případů vzorců (3.9) a (3.10), tj. pomocí

$$p^L_{A,\alpha} = \min\left\{\int_{x\in A} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\}dx \mid \mu\in\mu_{F,\alpha}, \sigma\in\sigma_{F,\alpha}\right\},$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max\left\{\int_{x\in A} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\}dx \mid \mu\in\mu_{F,\alpha}, \sigma\in\sigma_{F,\alpha}\right\}.$$

Nyní zaveďme obecně fuzzy pravděpodobnostní prostor, v němž fuzzy je pouze pravděpodobnostní míra.

Definice 3.11. *Nechť Ω značí neprázdnou třídu všech elementárních jevů, $\mathcal{A}$ je σ-algebra náhodných jevů a P_F představuje fuzzy pravděpodobnostní míru danou definicí 3.9. Pak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$ nazveme* pravděpodobnostním prostorem s fuzzy pravděpodobnostní mírou.

Pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou lze obecně použít v případech, kdy známe univerzum, na něm přesně popsané jevy, ale nemáme dostatek informací o rozdělení pravděpodobnosti na onom univerzu. Můžeme mít např. jen přibližné expertní odhady parametrů rozdělení pravděpodobnosti nebo pracovat s fuzzy daty a odhadnout fuzzy parametry přímo z těchto dat (viz [59]). Uvažovaný pravděpodobnostní prostor je dále využit v aplikační části této práce.

3.2.3. Pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou fuzzy jevů a fuzzy pravděpodobnostní mírou

Nyní se dostáváme k případu, kdy jsou obě fuzzifikované složky pravděpodobnostního prostoru popsané v předchozích dvou částech uvažovány současně. Naším cílem je zkonstruovat uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{F\mathcal{A}_F})$, kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, $\mathcal{A}_F$ značí σ-algebru fuzzy jevů a $P_{F\mathcal{A}_F}$ představuje rozšíření fuzzy pravděpodobnostní míry P_F na případ fuzzy jevů.

V následující podkapitole popíšeme možný způsob, jak definovat fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů pomocí fuzzy pravděpodobnostní míry a prověříme její vlastnosti.

Rozšíření Zadehovy pravděpodobnostní míry na případ fuzzy pravděpodobnostní míry

Obsahem této části práce je rozšíření pravděpodobnostní míry P_Z na případ obecné fuzzy pravděpodobnostní míry zavedené definicí 3.9. Toto rozšíření bylo poprvé využito v [50], kde však byla uvažována pouze diskrétní fuzzy pravděpodobnostní míra.

Rozšíření Zadehovy pravděpodobnosti libovolného fuzzy náhodného jevu $A \in \mathcal{A}_F$ na případ fuzzy pravděpodobnostní míry P_F představuje $P_{FZ}(A) \in \mathcal{F}(\Omega)$ určená svými α-řezy $P_{FZ}(A)_\alpha = \{p \in \langle 0,1 \rangle \mid p = \int_{\omega \in \Omega} \mu_A(\omega) dP,\ P \in P_{F,\alpha}\}$, $\alpha \in (0,1\rangle$. Z podmínek kladených na fuzzy pravděpodobnostní míru P_F v definici 3.9 plyne, že pro každé $A \in \mathcal{A}_F$ a každé $\alpha \in (0,1\rangle$ jsou α-řezy $P_{FZ}(A)_\alpha$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu A uzavřené intervaly. Dále z nich plyne, že jádro

$Ker\, P_{FZ}(A)$ je neprázdné. Nosič $Supp\, P_{FZ}(A) \subseteq \langle 0, 1\rangle$, tzn. je omezený. $P_{FZ}(A)$ je tedy fuzzy číslo. Obecně proto platí: $P_{FZ} : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}_N(\langle 0, 1\rangle)$. Prakticky se pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ krajní hodnoty α-řezu $P_{FZ}(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha}\rangle$ spočítají takto:

$$p^L_{A,\alpha} = \min \left\{ \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega) dP \mid P \in P_{F,\alpha} \right\}, \tag{3.13}$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max \left\{ \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega) dP \mid P \in P_{F,\alpha} \right\}. \tag{3.14}$$

Poznámka 3.5. *Výpočet fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZ}(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$ bude v dalším textu zapsán také symbolicky jako*

$$P_{FZ}(A) = (\mathcal{F}) \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega) dP_F. \tag{3.15}$$

Ilustrujme na příkladech, jak vypadají fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevů A a T z příkladů 3.2 a 3.3.

Příklad 3.7. *Opět uvažujme, že $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ je množina lidí a $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ je fuzzy množina vysokých lidí dána následovně*

$$A = \{^{0,7}|_{\omega_1}, ^{0,3}|_{\omega_2}, ^{0,5}|_{\omega_3}, ^{1}|_{\omega_4}\},$$

kde prvky množiny A jsou stále ve tvaru $^{A(\omega_i)}|_{\omega_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

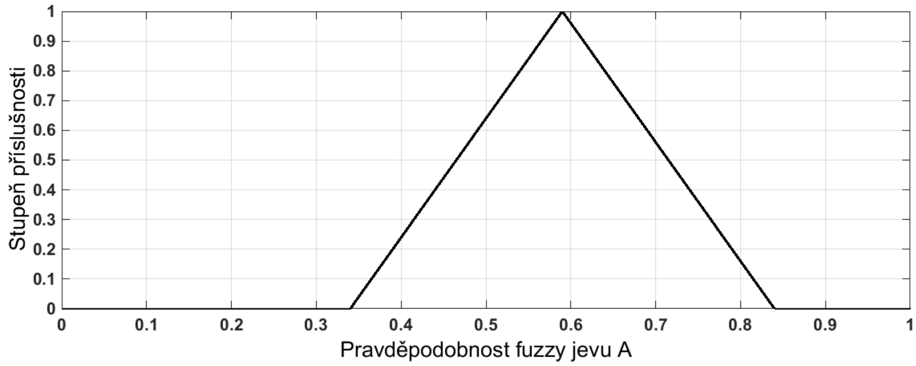
Provedeme-li experiment, při kterém náhodně vybereme jednu osobu $\omega \in \Omega$ s následujícími fuzzy pravděpodobnostmi elementárních jevů

$$P_F(\omega = \omega_1) = \langle 0,4; 0,5; 0,6\rangle, P_F(\omega = \omega_2) = \langle 0,2; 0,3; 0,4\rangle,$$
$$P_F(\omega = \omega_3) = \langle 0; 0,1; 0,2\rangle \text{ a } P_F(\omega = \omega_4) = \langle 0; 0,1; 0,2\rangle.$$

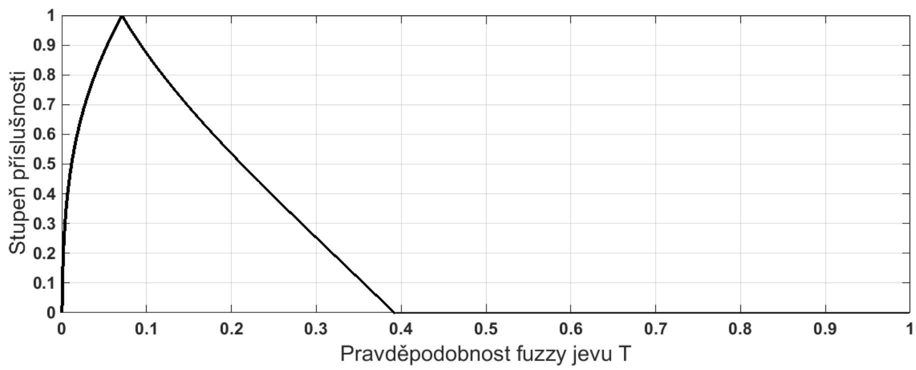
Pak bude mít funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZ}(A)$ výběru vysoké osoby, počítaná dle vzorců (3.13) a (3.14), podobu zobrazenou na obrázku 3.7.

Příklad 3.8. *Uvažujme, že výška mužů v určité oblasti je normálně rozdělená s fuzzy střední hodnotou $\langle 170, 177, 185\rangle$ cm a fuzzy směrodatnou odchylkou $\langle 5, 7, 9\rangle$ cm. Dále opět uvažujme fuzzy jev T = „muž je vysoký“, jehož funkce příslušnosti μ_T je znázorněna na obrázku 3.1 v příkladě 3.3.*

Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZ}(T)$ je ukázána na obrázku 3.8.



Obrázek 3.7: Funkce příslušnosti $\mu_{P_{FZ}(A)}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu A



Obrázek 3.8: Funkce příslušnosti $\mu_{P_{FZ}(T)}(\cdot)$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu T

Nyní ukažme, že P_{FZ} zachovává zobecněné vlastnosti pravděpodobnostní míry dané vzorci (3.2) a (3.3).

Věta 3.7. *$P_{FZ}(\Omega) = 1$.*

Důkaz. $P_{FZ}(\Omega) = (\mathcal{F}) \int_{\omega\in\Omega} 1 dP_F$. Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou krajní hodnoty intervalu $P_{FZ}(\Omega)_\alpha = \langle p^L_{\Omega,\alpha}, p^U_{\Omega,\alpha}\rangle$ získány následovně:

$$p^L_{\Omega,\alpha} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} 1dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \min\left\{P(\Omega) \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = 1,$$

$$p^U_{\Omega,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} 1dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \max\left\{P(\Omega) \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = 1.$$

□

Věta 3.8. *Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ jsou takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Pak se $P_{FZ}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ rovná fuzzy číslu, jehož α-řez $\langle p^L_{sum,\alpha}, p^U_{sum,\alpha}\rangle$ se pro* *libovolné* $\alpha \in (0,1\rangle$ *určí:*

$$p^L_{sum,\alpha} = \min\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$

$$p^U_{sum,\alpha} = \max\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Důkaz. Pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ lze krajní hodnoty intervalu $P_{FZ}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)_\alpha = \langle p^L_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\alpha}, p^U_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\alpha}\rangle$ vyjádřit

$$\begin{aligned}
p^L_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\alpha} &= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega}\mu_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega}\max_{i=1,2,\dots}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}, \\
p^U_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\alpha} &= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}\mu_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}\max_{i=1,2,\dots}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

kde maximum ze stupňů příslušnosti může být nahrazeno jejich součtem díky předpokladu věty o disjunktnosti fuzzy jevů. □

Jelikož $\mathcal{A}_F$ tvoří σ-algebru fuzzy jevů na Ω, tak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{FZ})$ lze nazvat *fuzzy pravděpodobnostním prostorem* určeným následující definicí.

Definice 3.12. *Nechť* Ω *značí neprázdnou třídu všech elementárních jevů,* $\mathcal{A}_F$ *je* σ*-algebra fuzzy jevů a* P_{FZ} *představuje Zadehovu fuzzy pravděpodobnostní míru rozšířenou na případ fuzzy jevů. Pak uspořádanou trojici* $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{FZ})$ *nazveme* fuzzy pravděpodobnostním prostorem.

Ukažme nyní, že fuzzy pravděpodobnostní míra P_{FZ} splňuje také další vlastnosti pravděpodobnostní míry (uvedené ve větě 3.1).

Věta 3.9. *Pro fuzzy pravděpodobnostní míru* P_{FZ} *platí:*

1. $P_{FZ}(\emptyset) = 0$;
2. *pokud* $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, *pak* $P_{FZ}(A) \leq P_{FZ}(B)$;
3. *pro každé* $A, B \in \mathcal{A}_F$ *se* $P_{FZ}(A \cup B)$ *rovná takovému fuzzy číslu, že pro libovolné* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *se jeho* α*-řez* $\langle p^L_{A\cup B,\alpha},\, p^U_{A\cup B,\alpha}\rangle$ *určí:*
$$p^L_{A\cup B,\alpha} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$
$$p^U_{A\cup B,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$
4. *pro každé* $A \in \mathcal{A}_F : P_{FZ}(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P_{FZ}(A)$;
5. *pokud* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_F$ *tvoří fuzzy rozklad* Ω, *tj.* $\sum_{i=1}^n \mu_{A_i}(\omega) = 1$ *pro každé* $\omega \in \Omega$, *pak se součet fuzzy pravděpodobností* $P_{FZ}(A_1), \ldots, P_{FZ}(A_n)$ *fuzzy jevů* $A_1, \ldots, A_n$ *při zohlednění interakcí mezi nimi rovná* 1.

Důkaz.

1. Analogicky jako důkaz věty 3.7, ale platí $P_{FZ}(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$.

2. Pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$ je dle věty 2.2 $A_\alpha \subseteq B_\alpha$. Pro výpočet jejich fuzzy pravděpodobnosti tedy platí

$$\min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A_\alpha}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} \leq \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{B_\alpha}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$

$$\max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A_\alpha}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} \leq \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{B_\alpha}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$

z čehož plyne tvrzení věty.

3. Pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ lze krajní hodnoty intervalu $P_{FZ}\left(A \cup B\right)_\alpha = \langle p^L_{A\cup B,\alpha}, p^U_{A\cup B,\alpha}\rangle$ vyjádřit

$$\begin{aligned}
p^L_{A\cup B,\alpha} &= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cup B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \max\left\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\right\} dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega) + \mu_B(\omega) - \min\left\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\right\} dP \mid \right. \\
&\qquad\qquad \left. P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid \right. \\
&\qquad\qquad \left. P \in P_{F,\alpha}\right\}, \\
p^U_{A\cup B,\alpha} &= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cup B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \max\left\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\right\} dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega) + \mu_B(\omega) - \min\left\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\right\} dP \mid \right. \\
&\qquad\qquad \left. P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid \right. \\
&\qquad\qquad \left. P \in P_{F,\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

4. Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ lze krajní hodnoty intervalu $P_{FZ}\left(A^{\mathsf{c}}\right)_{\alpha} = \langle p^L_{A^{\mathsf{c}},\alpha}, p^U_{A^{\mathsf{c}},\alpha}\rangle$ vyjádřit

$$
\begin{aligned}
p^L_{A^{\mathsf{c}},\alpha} &= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A^{\mathsf{c}}}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \left(1 - \mu_A(\omega)\right) dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} 1dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \min\left\{1 - \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= 1 - \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}, \\
p^U_{A^{\mathsf{c}},\alpha} &= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A^{\mathsf{c}}}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \left(1 - \mu_A(\omega)\right) dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} 1dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= \max\left\{1 - \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = \\
&= 1 - \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.
\end{aligned}
$$

5. Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ lze krajní hodnoty intervalu $\langle p^L_{sum,\alpha}, p^U_{sum,\alpha}\rangle$ představujícího α-řez součtu fuzzy pravděpodobností $P_{FZ}(A_1), \ldots, P_{FZ}(A_n)$ fuzzy jevů $A_1, \ldots, A_n$ při zohlednění interakcí mezi nimi vyjádřit

$$
\begin{aligned}
p^L_{sum,\alpha} &= \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} \\
&= \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} 1dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\} = P(\Omega) = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p^U_{sum,\alpha} &= \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega\in\Omega}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P\in P_{F,\alpha}\right\}\\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\mu_{A_i}(\omega)dP \mid P\in P_{F,\alpha}\right\}\\
&= \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}1dP \mid P\in P_{F,\alpha}\right\} = P(\Omega) = 1.
\end{aligned}
$$

□

Ukázali jsme, že zobrazení P_{FZ} dané pomocí vzorců (3.13) a (3.14) zachovává fuzzifikované vlastnosti pravděpodobnostní míry. Z matematického hlediska se tedy jedná o korektní rozšíření pravděpodobnostní míry P. Zobrazení P_{FZ} však představuje pouze rozšíření pravděpodobnostní míry P_Z na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Proto je zde také zachována problematická interpretace pravděpodobností fuzzy jevů popsaná v kapitole 3.2.1. Zobrazení P_{FZ} však zachovává neurčitost informace o pravděpodobnostním rozdělení.

3.3. Diskrétní fuzzy náhodná veličina

V této části zobecníme diskrétní náhodnou veličinu definovanou na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s konečnou množinou elementárních jevů na případ tzv. fuzzy náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru s fuzzy pravděpodobnostní mírou. Uvedeme také vzorce pro výpočet očekávané hodnoty a rozptylu fuzzy náhodné veličiny, které budou využity v aplikační části této práce.

Začněme připomenutím významu pojmu *diskrétní náhodná veličina.*

Definice 3.13. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$, je pravděpodobnostní prostor. Pak každé zobrazení $o : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme* diskrétní náhodnou veličinou.

Ve fuzzy případě uvažujeme namísto pravděpodobnostní míry P fuzzy pravděpodobnostní míru P_F. Definujme tedy *fuzzy náhodnou veličinu.*

Definice 3.14. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$ *je pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou. Pak každé zobrazení* $\tilde{o} : \Omega \to \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ *nazveme* fuzzy náhodnou veličinou.

Poznámka 3.6. *V případě pravděpodobnostního prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$ *s fuzzy pravděpodobnostní mírou a konečnou množinou elementárních jevů* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$*, budeme zobrazení* $\tilde{o}$ *dané definicí 3.14 nazývat* diskrétní fuzzy náhodnou veličinou.

Pokračujme definováním obecných vzorců pro výpočet fuzzy očekávané hodnoty a fuzzy rozptylu diskrétní fuzzy náhodné veličiny, které jsou vyjádřeny pomocí principu rozšíření.

Definice 3.15. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$*, kde* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$*, je pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou. Nechť* $P_F(\{\omega_1\}), \ldots, P_F(\{\omega_r\})$ *tvoří m-tici fuzzy pravděpodobností elementárních jevů. Nechť* $\tilde{o} : \Omega \to \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ *je diskrétní fuzzy náhodná veličina taková, že* $\tilde{o}(\omega_k) = O_k$*,* $k = 1, \ldots, r$. Fuzzy očekávanou hodnotou *diskrétní fuzzy náhodné veličiny* $\tilde{o}$ *nazveme fuzzy číslo* $E\tilde{o}$ *s funkcí příslušnosti definovanou pro každé* $o \in \mathbb{R}$

$$\mu_{E\tilde{o}}(o) = \max\Bigg\{ \min\left\{\mu_{P_F(\{\omega_1\})}(p_1), \ldots, \mu_{P_F(\{\omega_r\})}(p_r), \mu_{O_1}(o_1), \ldots, \mu_{O_r}(o_r)\right\} \mid \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot o_k = o, p_k \in \langle 0, 1\rangle, k = 1, \ldots, r, o_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 \Bigg\}. \quad (3.16)$$

Fuzzy rozptylem *diskrétní fuzzy náhodné veličiny* $\tilde{o}$ *nazveme fuzzy číslo* $var\,\tilde{o}$ *s funkcí příslušnosti definovanou pro každé* $o \in \mathbb{R}$

$$\mu_{var\,\tilde{o}}(o) = \max\Bigg\{ \min\left\{\mu_{P_F(\{\omega_1\})}(p_1), \ldots, \mu_{P_F(\{\omega_r\})}(p_r), \mu_{O_1}(o_1), \ldots, \mu_{O_r}(o_r)\right\} \mid \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot \left(o_k - \sum_{j=1}^{r} p_j \cdot o_j\right)^2 = o, p_k \in \langle 0, 1\rangle, k = 1, \ldots, r, o_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 \Bigg\}. \quad (3.17)$$

Poznámka 3.7. *Fuzzy očekávaná hodnota diskrétní fuzzy náhodné veličiny daná vzorcem 3.16 je definována pomocí fuzzy váženého průměru* $o_1 \ldots, o_r$ *s normovanými fuzzy váhami* $P_F(\{\omega_1\}), \ldots, P_F(\{\omega_r\})$ *popsaného v části 2.4.1.*

Poznámka 3.8. *Označme α-řez fuzzy rozptylu* $var\,\tilde{o}_\alpha = \langle var\, o^L_\alpha, var\, o^U_\alpha \rangle$ *pro libovolné* $\alpha \in (0,1\rangle$*. Pak krajní hodnoty tohoto α-řezu mohou být pomocí známého vztahu z teorie pravděpodobnosti* $var\, o = Eo^2 - (Eo)^2$ *získány vyřešením dvojice úloh matematického programování pro dané* $\alpha \in (0,1\rangle$

$$var\, o^L_\alpha = \min\left\{ \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot o_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{r} p_k \cdot o_k \right)^2 \mid p_k \in P_F(\{\omega_k\})_\alpha, k = 1, \dots, r, \right.$$

$$\left. o_k \in O_{k,\alpha}, \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 \right\},$$

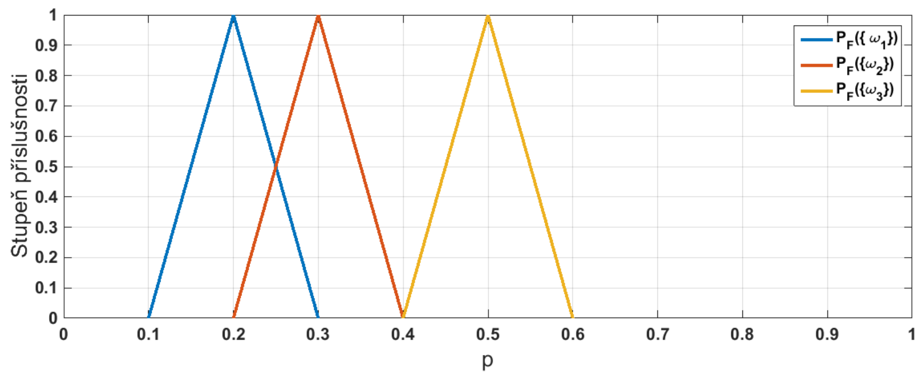
$$var\, o^U_\alpha = \max\left\{ \sum_{k=1}^{r} p_k \cdot o_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{r} p_k \cdot o_k \right)^2 \mid p_k \in P_F(\{\omega_k\})_\alpha, k = 1, \dots, r, \right.$$

$$\left. o_k \in O_{k,\alpha}, \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 \right\}.$$

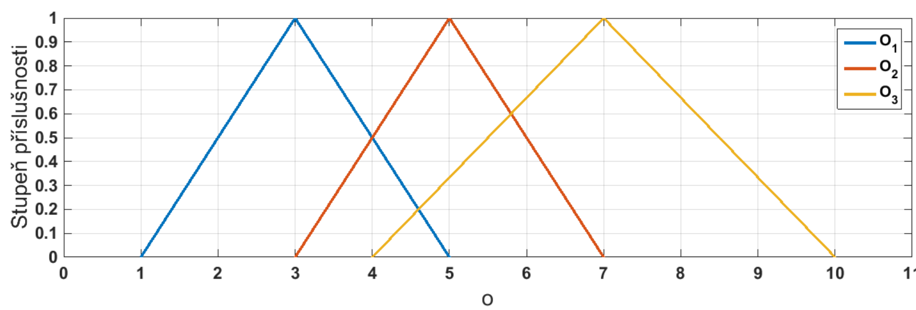
V závěru kapitoly ilustrujme, jak vypadá fuzzy očekávaná hodnota a fuzzy rozptyl diskrétní fuzzy náhodné veličiny nabývající tří hodnot s trojicí fuzzy pravděpodobností.

Příklad 3.9. *Uvažujme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$*, v němž* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$*. Uvažujme fuzzy pravděpodobnosti* $P_F(\{\omega_1\}) = \langle 0,1; 0,2; 0,3 \rangle$, $P_F(\{\omega_2\}) = \langle 0,2; 0,3; 0,4 \rangle$ *a* $P_F(\{\omega_3\}) = \langle 0,4; 0,5; 0,6 \rangle$*, které tvoří trojici fuzzy pravděpodobností zobrazenou na obrázku 3.9. Na daném fuzzy pravděpodobnostním prostoru uvažujme diskrétní fuzzy náhodnou veličinu $\tilde{o}$ nabývající fuzzy hodnot:* $\tilde{o}(\{\omega_1\}) = O_1 = \langle 1, 3, 5 \rangle$, $\tilde{o}(\{\omega_2\}) = O_2 = \langle 3, 5, 7 \rangle$, $\tilde{o}(\{\omega_3\}) = O_3 = \langle 4, 7, 10 \rangle$*, jejichž funkce příslušnosti jsou na obrázku 3.10.*

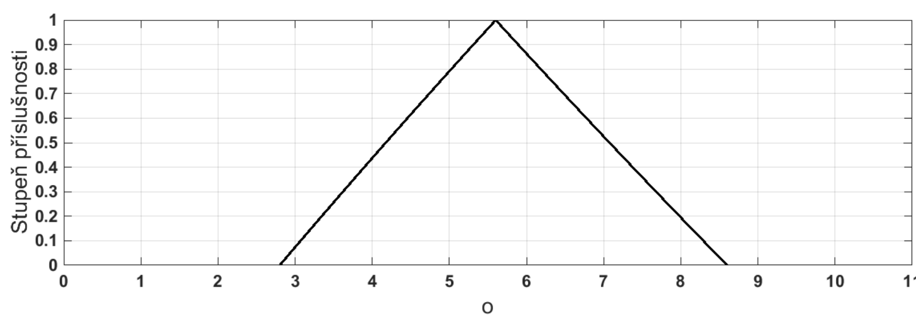
Fuzzy očekávaná hodnota $E\tilde{o}$, jejíž funkce příslušnosti je ukázána na obrázku 3.11, je spočítána pomocí vzorce (3.16)*. Fuzzy rozptyl $var\,\tilde{o}$, spočítaný pomocí* (3.17)*, je vyobrazen na obrázku 3.12.*



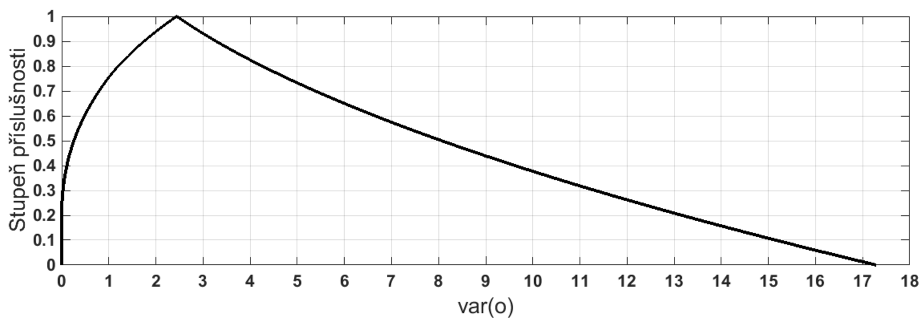
Obrázek 3.9: Trojice fuzzy pravděpodobností $P_F(\{\omega_1\})\dots,P_F(\{\omega_3\})$



Obrázek 3.10: Fuzzy hodnoty fuzzy náhodné veličiny $\tilde{o}$



Obrázek 3.11: $E(\tilde{o})$



Obrázek 3.12: $var(\tilde{o})$

Kapitola 4

Aplikace fuzzy pravděpodobnostních prostorů ve fuzzifikovaných rozhodovacích maticích

V aplikační části práce se zaměříme na aplikace fuzzy pravděpodobnostních prostorů na jeden nástroj pro podporu rozhodování za rizika, a to na rozhodovací matici. Rozhodovací matice popisuje, jak důsledky uvažovaných variant závisí na skutečnosti, který z možných stavů světa nastane. Začneme popisem rozhodovací matice za rizika, ve které je vše ostré. Dále prozkoumáme rozhodovací matici s expertně zadanými pravděpodobnostmi stavů světa. Poté budou fuzzifikovány stavy světa a popsány dva možné přístupy k řešení rozhodovací matice s fuzzy stavy světa. U každého přístupu bude uvedeno, jak se počítá (fuzzy) očekávaný důsledek a (fuzzy) rozptyl důsledků variant. Následně budou popsány a vzájemně srovnány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Popsané přístupy budou ilustrovány na příkladech.

4.1. Rozhodovací matice

Nejprve představíme známou rozhodovací matici (viz např. [10, 15, 65]) modelující nějaký konkrétní rozhodovací problém za rizika, při kterém je cílem vybrat jednu variantu z množiny všech dostupných variant. Následně si popíšeme, jak spočítat očekávanou hodnotu a rozptyl důsledků dané varianty. Dále uvedeme rozhodovací pravidla, která budou v příkladech využita k výběru nejlepší varianty.

Předpokládejme, že je daný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak má *rozhodovací matice* obvykle formu tabulky 4.1. Varianty, mezi nimiž rozhodovatel vybírá, jsou označeny $x_1, \ldots, x_n$. $S_1, \ldots, S_m$, kde $S_j \in \mathcal{A}$ pro $j = 1, \ldots, m$, zastupují vzájemně disjunktní stavy světa (tj. $S_j \cap S_k = \emptyset$ pro jakákoli $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$). $p_1, \ldots, p_m$ představují pravděpodobnosti stavů věta $S_1, \ldots,$ S_m, tj. $p_j = P(S_j)$. Pro jakékoli $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ vyjadřuje $h_{i,j}$ důsledek dané varianty x_i za daného stavu světa S_j.

Důsledek dané varianty x_i za daných stavů světa S_j, $j = 1, \ldots, m$, představuje diskrétní náhodnou veličinu $H_i : \{S_1, \ldots, S_m\} \to \mathbb{R}$, která nabývá hodnot $h_{i,j} = H_i(S_j)$ s pravděpodobnostmi p_j, $j = 1, \ldots, m$.

	S_1 p_1	S_2 p_2	$\cdots$ $\cdots$	S_m p_m	EH_i	$var\ H_i$
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1	$var\ H_1$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2	$var\ H_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n	$var\ H_n$

Tabulka 4.1: Rozhodovací matice

Varianty se obvykle uspořádávají na základě jejich *očekávaných důsledků* EH_i, $i = 1, \ldots, n$, a *rozptylů* jejich *důsledků* $var\ H_i$, $i = 1, \ldots, n$, počítaných

$$EH_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot h_{i,j},$$

$$var\ H_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (h_{i,j} - EH_i)^2 .$$

Nejlepší varianta je následně vybrána na základě nějakého rozhodovacího pravidla. V následujících částech využijeme dvě rozhodovací pravidla, a to pravidlo očekávané hodnoty a pravidlo očekávané hodnoty a rozptylu.

Na základě *pravidla očekávané hodnoty* platí pro nejlepší variantu x_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, následující

$$EH_{i_0} = \max_{i=1,2,\ldots n} EH_i.$$

Pravidlo očekávané hodnoty a rozptylu považuje variantu x_i za lepší než variantu x_j, pokud

$$EH_i > EH_j \quad \text{a zároveň} \quad var\, H_i \leq var\, H_j,$$

nebo

$$EH_i \geq EH_j \quad \text{a zároveň} \quad var\, H_i < var\, H_j.$$

Při použití tohoto pravidla však můžeme narazit na problém, že některé varianty budou vzájemně nesrovnatelné. Získáme tedy množinu tzv. nedominovaných variant, mezi nimiž nebudeme schopni na základě uvažovaného rozhodovacího pravidla vybrat tu nejlepší. Pak je možné použít např. tzv. komparativní analýzu (viz např. [15]), ale ta v této práci nebude dále uvažována.

Nyní bude popsaná rozhodovací matice ilustrována na příkladech. V prvním je uvažováno diskrétní univerzum i diskrétní podkladová pravděpodobnostní míra, zatímco ve druhém jsou univerzum i pravděpodobnostní míra spojité.

Příklad 4.1. *Uvažujme následující situaci: Můžeme realizovat jeden ze dvou možných projektů, označených x_1 a x_2. Budoucí zisk z obou projektů závisí pouze na skutečnosti, jaký druh vládnoucí koalice bude sestaven po parlamentárních volbách. Předpokládejme, že může být sestaveno pouze šest koalic, označených $\omega_1, \ldots, \omega_6$. Pro jednoduchost navíc předpokládejme, že pravděpodobnosti sestavení jednotlivých koalic jsou všechny stejné. Je tedy dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, $\mathcal{A}$ je množina všech podmnožin univerza Ω a P je pravděpodobnostní míra taková, že $P(\{\omega_k\}) = 1/6$, $k = 1, \ldots, 6$.*

Rozlišme tři možnosti (stavy světa) - pravicová vláda (S_1), středová vláda (S_2) a levicová vláda (S_3). Nechť jsou tyto tři stavy stavy světa vyjádřeny pomocí množin na Ω:

$$S_1 = \{\omega_1, \omega_2\},$$

$$S_2 = \{\omega_3, \omega_4\}\,,$$
$$S_3 = \{\omega_5, \omega_6\}\,.$$

Pravděpodobnosti těchto stavů světa jsou určeny pomocí $P(S_j) = \sum_{k=1}^{6} \chi_{S_j}(\omega_k) \cdot 1/6,\ j = 1, 2, 3.$

Jak závisí budoucí zisk (v %) na skutečnosti, který ze tři možných typů vlády nastane po volbách, je uvedeno v rozhodovací matici dané tabulkou 4.2. Očekávané hodnoty a rozptyly obou variant byly určený pomocí vzorců popsaných výše v této části.

	S_1 1/3	S_2 1/3	S_3 1/3	EX_i	$var\,X_i$
x_1	15	0	-4	3.67	66.89
x_2	15	-3	0	4.00	62.00

Tabulka 4.2: Budoucí zisk (v %) projektů x_1 a x_2 v závislosti na typu vlády

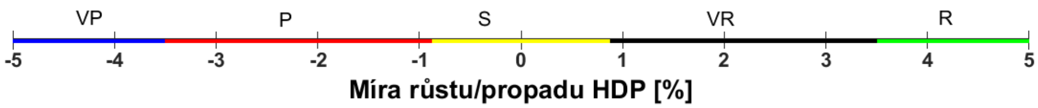
Jak pomocí pravidla očekávané hodnoty, tak také pomocí pravidla očekávané hodnoty a rozptylu, popsaných výše, bychom se rozhodli realizovat projekt x_2*. Z tabulky 4.2 totiž plyne, že* $EX_2 > EX_1$ *a současně* $var\,X_2 < var\,X_1$.

Příklad 4.2. *Porovnejme akcie* x_1 *a* x_2 *na základě budoucích zhodnocení jejich cen. Uvažujme následující stavy ekonomiky: „velký propad ekonomiky“ (VP), „propad ekonomiky“ (P), „stagnace ekonomiky“ (S), „růst ekonomiky“ (R) a „velký růst ekonomiky“ (VR). Předpokládejme, že uvažované stavy světa jsou určeny pouze vývojem hrubého domácího produktu (dále jen HDP). Navíc uvažujme, že předpověď vývoje HDP (v %) na příští rok ukazuje jeho normálně rozdělený růst se střední hodnotou* $\mu = 1$ *a směrodatnou odchylkou* $\sigma = 2$.

Stavy ekonomiky, které tvoří rozklad univerza představujícího všechny možné úrokové míry, jsou dány obrázkem 4.1 jako následující intervaly: $VP = (-\infty; -3,5\rangle$, $P = (-3,5; -0,875\rangle$, $S = (-0,875; 0,875)$, $R = \langle 0,875; 3,5)$ *a* $VR = \langle 3,5; \infty)$*. Jejich pravděpodobnosti jsou počítány pomocí*

$$P(S_j) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{S_j}(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x-1)^2}{4} \right\} dx, \ \ kde\ S_j = VP, P, S, R, VR.$$

Uvažujme také, že předpovědi budoucích zhodnocení cen akcií (v %) jsou dány expertně. Spolu s pravděpodobnostmi stavů světa jsou uvedeny v tabulce 4.3. Očekávané hodnoty a rozptyly byly opět určený dle vzorců popsaných výše.



Obrázek 4.1: Stavy ekonomiky

	VP	P	S	R	VR	EX_i	$var\,X_i$
	0,012	0,162	0,301	0,419	0,106		
x_1	-34	-13,5	0	14,5	30,5	6,699	185,221
x_2	-36	-15,5	0	14	29	5,982	190,013

Tabulka 4.3: Rozhodovací matice obsahující budoucí zhodnocení cen akcií (v %)

Podobně jako v předchozím příkladě je i zde pomocí obou rozhodovacích pravidel stejná akcie lepší, a to akcie x_1. Z tabulky 4.3 je totiž vidět, že $EX_1 > EX_2$ a $var\,X_1 < var\,X_2$.

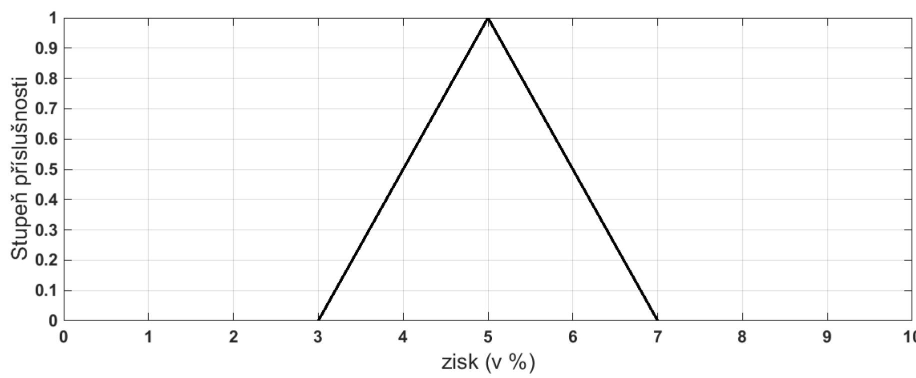
V obou příkladech jsme uvažovali ostré důsledky variant. V následující podkapitole je budeme uvažovat vágně popsané, tj. fuzzy.

4.2. Rozhodovací matice s fuzzy důsledky variant a expertně zadanými pravděpodobnostmi stavů světa

Nyní se zaměřme na rozhodovací matici s expertně určenými pravděpodobnostmi stavů světa a fuzzy důsledky variant. Po představení uvažované rozhodovací matice budou uvedeny korektní vzorce pro výpočet očekávaných důsledků variant a jejich rozptylů. Využití popsané rozhodovací matice bude na závěr ilustrováno na příkladě.

Nejprve ale popišme možné důvody a způsoby zadání fuzzy důsledků variant. Pro rozhodovatele může být obtížné popsat všechny důsledky variant reálnými čísly. Jedním důvodem může být nedostatek informací způsobený např. nepřesnostmi měření anebo špatnou kvalitou přenosu dat. Jiným důvodem může být fakt, že pro rozhodovatele je přirozenější popsat důsledky variant slovně než pomocí čísel. Obecně jsou zde tedy dvě možnosti, jak vyjádřit fuzzy důsledek dané varianty.

První možností je zadat fuzzy důsledek přímo pomocí fuzzy čísla. V některých modelech může být jeho nosič omezen pouze na uzavřený interval, nejčastěji $\langle 0, 1 \rangle$. Nějaký expert může např. popsat důsledek konkrétní varianty pomocí fuzzy čísla „asi pětiprocentní zisk“, jehož funkce příslušnosti je ukázána na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Příklad expertně zadaného důsledku nějaké varianty

Druhou možnost vyjádření fuzzy důsledků varianty představuje jejich popis pomocí hodnot jazykové proměnné, která byla představena v části 2.5. Expert nebo rozhodovatel popíše výstupy variant za konkrétních stavů světa pomocí vhodných jazykových termů, jejichž matematické významy jsou dány příslušnými fuzzy čísly. Příklad jazykové škály byl uveden již dříve na obrázku 2.1 v příkladě 2.3.

Rozhodovací matice s fuzzy důsledky variant je dána tabulkou 4.4. Jsou v ní uvažovány neurčité pouze důsledky $H_{i,j} \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, variant $x_1, \ldots, x_n$ za daných stavů světa, které zůstávají ostré, tj. vyjádřené pomocí intervalů. Uvažovaným stavům světa jsou expertně přiřazené jejich fuzzy pravděpodobnosti $P_E(S_1), \dots, P_E(S_m)$, které tvoří m-tici fuzzy pravděpodobností (viz definice 3.10). Expert buď přímo zadá m-tici fuzzy pravděpodobností, anebo fuzzy pravděpodobnosti odhadne pomocí lichoběžníkových či trojúhelníkových fuzzy čísel $P_E(S_j)'$, $j = 1, \dots, m$, $P_E(S_j)' = \langle p_j'^1, p_j'^2, p_j'^3, p_j'^4 \rangle$, splňujících podmínky

$$\sum_{j=1}^{m} p_j'^1 \leq 1, \ \sum_{j=1}^{m} p_j'^2 \leq 1, \ , \sum_{j=1}^{m} p_j'^3 \geq 1, \ \sum_{j=1}^{m} p_j'^4 \geq 1.$$

m-tice fuzzy pravděpodobností $P_E(S_j)$, $j = 1, \dots, m$, $P_E(S_j) = \langle p_j^1, p_j^2, p_j^3, p_j^4 \rangle$, fuzzy stavů světa se pak z pravděpodobností $P_E(S_1)', \dots, P_E(S_m)'$ získá následující transformací

$$p_j^1 = \max\left\{ p_j^{1'}, 1 - \sum_{i=1, i\neq j}^{m} p_i^{4'} \right\}, \ p_j^2 = \max\left\{ p_j^{2'}, 1 - \sum_{i=1, i\neq j}^{m} p_i^{3'} \right\},$$

$$p_j^3 = \min\left\{ p_j^{3'}, 1 - \sum_{i=1, i\neq j}^{m} p_i^{2'} \right\}, \ p_j^4 = \min\left\{ p_j^{4'}, 1 - \sum_{i=1, i\neq j}^{m} p_i^{1'} \right\}.$$

Tato transformace pro lichoběžníková fuzzy čísla, popsaná v [8], odstraňuje nekonzistentnost expertních odhadů.

	S_1 $P_E(S_1)$	S_2 $P_E(S_2)$	$\cdots$ $\cdots$	S_m $P_E(S_m)$	EH_i	$var\ H_i$
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1	$var\ H_1$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2	$var\ H_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n	$var\ H_n$

Tabulka 4.4: Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa a jejich expertně zadanými fuzzy pravděpodobnostmi

Vzorce pro výpočet očekávaných důsledků EH_i, $i = 1, \dots, n$, variant a jejich rozptylů $var H_i$, $i = 1, \dots, n$, byly publikovány v [57]. Vzorec pro výpočet rozptylu však nebral v úvahu vzájemný vztah mezi důsledky $H_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, m$, variant za daných stavů světa a jejich očekávanou hodnotou EH_i. V [49] tedy Rotterová a Pavlačka navrhli správný vzorec, který tyto závislosti uvažuje.

Popišme, jak určit očekávaný důsledek EH_i varianty x_i a rozptyl $var\,H_i$ jejich důsledků. Očekávaný důsledek EH_i se počítá pomocí fuzzy váženého průměru (viz definice 2.21), tj. pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ se krajní hodnoty intervalu $EH_{i,\alpha} = \langle Eh^L_{i,\alpha}, Eh^U_{i,\alpha}\rangle$ určí

$$Eh^L_{i,\alpha} = \min\left\{\sum_{j=1}^m p_j \cdot h_{i,j} \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1,\dots,m, \sum_{j=1}^m p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\}, \tag{4.1}$$

$$Eh^U_{i,\alpha} = \max\left\{\sum_{j=1}^m p_j \cdot h_{i,j} \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1,\dots,m, \sum_{j=1}^m p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\}. \tag{4.2}$$

Krajní hodnoty α-řezu rozptylu $var\ H_{i,\alpha} = \langle var\ h^L_{i,\alpha}, var\ h^U_{i,\alpha}\rangle$ se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ určí

$$\begin{aligned} var\ h^L_{i,\alpha} = \min &\left\{\sum_{j=1}^m p_j \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^m p_k \cdot h_{i,k}\right)^2 \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1,\dots,m,\right. \\ &\left.\sum_{j=1}^m p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} var\ h^U_{i,\alpha} = \max &\left\{\sum_{j=1}^m p_j \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^m p_k \cdot h_{i,k}\right)^2 \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1,\dots,m,\right. \\ &\left.\sum_{j=1}^m p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Na závěr ilustrujme využití rozhodovací matice popsané výše na příkladě s uvažovaným diskrétním univerzem. V případě spojitého univerza by byl postup řešení shodný.

Příklad 4.3. *Uvažujme zadání příkladu 4.1. Uvažujme tedy měřitelný prostor* $(\Omega, \mathcal{A})$*, kde* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ *a* $\mathcal{A}$ *je množina všech podmnožin univerza* Ω*.*

Opět rozlišme tři možné stavy světa - pravicová vláda (S_1*), středová vláda (*S_2*) a levicová vláda (*S_3*). Uvažujme však, že jejich pravděpodobnosti jsou určeny expertně, a to následovně:*

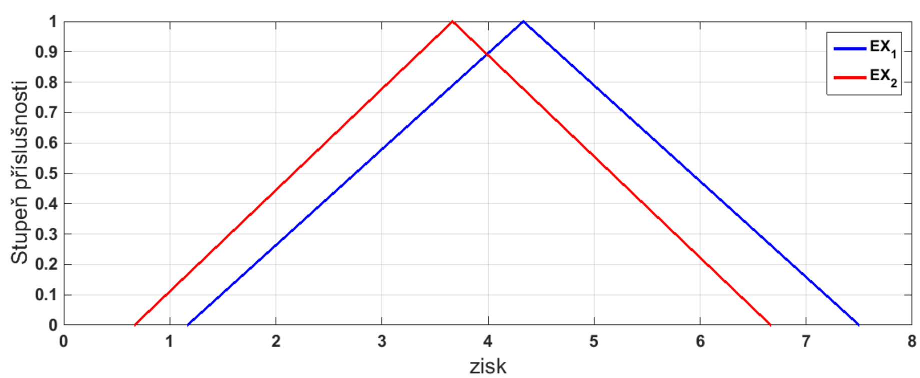
$$P_E(S_1) = \langle 1/6, 1/3, 1/2\rangle,\ \ P_E(S_2) = \langle 1/3, 1/2, 2/3\rangle,\ \ P_E(S_3) = \langle 0, 1/6, 1/3\rangle.$$

Pro jednoduchost uvažujme, že budoucí zisky (v %) z možné realizace projektů x_1 a x_2 jsou vyjádřeny reálnými čísly. Jak tyto zisky závisí na skutečnosti, který ze tři možných typů vlády nastane po volbách, je uvedeno v rozhodovací matici dané tabulkou 4.5.

	S_1 $P_E(S_1)$	S_2 $P_E(S_2)$	S_3 $P_E(S_3)$
x_1	15	0	-4
x_2	15	-3	0

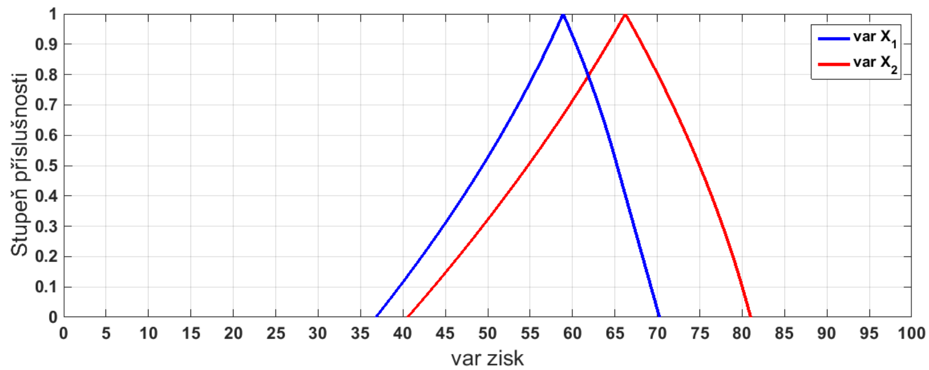
Tabulka 4.5: Budoucí zisk (v %) projektů x_1 a x_2 v závislosti na typu vlády

Výpočet očekávaných hodnot a rozptylů byl proveden pomocí vzorců (4.1), (4.2), (4.3) *a* (4.4). *Funkce příslušnosti získaných fuzzy charakteristik jsou zobrazeny na obrázcích 4.3 a 4.4. Jejich význačné hodnoty a těžiště jsou uvedeny v tabulce 4.6. Na základě těchto výsledků (vizuálního porovnání α-řezů funkcí příslušnosti či srovnání fuzzy čísel na základě jejich těžišť) bychom měli pomocí obou uvažovaných rozhodovacích pravidel zvolit realizaci projektu x_1.*



Obrázek 4.3: Fuzzy očekávané hodnoty projektů x_1 a x_2

V této i předchozí části jsme v příkladech uvažovali ostré stavy světa, tj. každá koalice $\omega_1, \ldots, \omega_6$ patřila vždy pouze do jednoho stavu světa. V následující podkapitole se přiblížíme lidskému uvažování. Budeme uvažovat, že tyto koalice mohou částečně náležet do více stavů světa.



Obrázek 4.4: Fuzzy rozptyly projektů x_1 a x_2

Charakteristika	Význačné hodnoty	Těžiště
EX_1	$\langle 1,167; 4,333; 7,500\rangle$	4,333
EX_2	$\langle 0,667; 3,667; 6,667\rangle$	3,667
$var\ X_1$	$\langle 36,806; 58,889; 70,250\rangle$	56,061
$var\ X_2$	$\langle 40,556; 66,222; 81,000\rangle$	63,553

Tabulka 4.6: Výsledné fuzzy charakteristiky

4.3. Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa

Nyní uvažujme rozhodovací matici, ve které jsou neurčitě popsané pouze stavy světa. V tomto případě je lze korektně matematicky vyjádřit pomocí fuzzy množin definovaných na univerzu Ω, jehož tvoří fuzzy rozklad.

V části 4.3.1 je popsána rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, kde jejich pravděpodobnosti jsou určeny přístupy popsanými v části 3.2.1, tj. na základě dané ostré pravděpodobnostní míry P na univerzu Ω. Podkapitola 4.3.2 je následně věnována novému přístupu k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa při uvažování dané ostré pravděpodobnostní míry na univerzu Ω, při jehož využití jsou informace obsažené v rozhodovací matici chápány jako systém bází fuzzy pravidel.

4.3.1. Rozhodovací matice s pravděpodobnostmi fuzzy stavů světa počítanými na základě ostré pravděpodobnostní míry P

Uvažujme rozhodovací matici s fuzzy stavy světa matematicky popsanými pomocí fuzzy množin tvořících fuzzy rozklad univerza Ω. Dále uvažujme, že známe pravděpodobnostní míru P na univerzu Ω, na jejímž základě budeme počítat pravděpodobnosti fuzzy stavů světa. Nejprve se zaměříme na výpočet pravděpodobností fuzzy stavů světa dle Zadeha [70]. Poté zmíníme také přístup uvažovaný Yagerem [61]. Oboje pravděpodobnosti budou využity v rozhodovací matici k získání očekávaných důsledků uvažovaných variant a jejich rozptylů.

Začněme rozhodovací maticí danou tabulkou 4.7, kde jsou pravděpodobnosti fuzzy stavů světa vyjádřeny reálným číslem tak, jak to navrhl Zadeh [70]. Taková rozhodovací matice byla zkoumána v [42]. Fuzzy stavy světa $S_1, \ldots, S_m$ představují fuzzy náhodné jevy, které tvoří fuzzy rozklad univerza Ω, tj. $\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) = 1$ pro libovolné $\omega \in \Omega$. Proměnné $p_{Z1}, \ldots, p_{Zm}$, kde $p_{Zj} := P_Z(S_j)$, $j = 1, \ldots, m$, zastupují pravděpodobnosti fuzzy stavů světa dané vzorcem (3.4). Jelikož fuzzy stavy světa tvoří fuzzy rozklad univerza Ω, mohou být důsledky při výběru varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, chápány jako hodnoty diskrétní náhodné veličiny H_i^Z, která nabývá hodnot $h_{i,j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, s pravděpodobnostmi $p_{Z1}, \ldots, p_{Zm}$.

	S_1 p_{Z1}	S_2 p_{Z2}	$\cdots$ $\cdots$	S_m p_{Zm}	EH_i	$var\ H_i$
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1^Z	$var\ H_1^Z$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2^Z	$var\ H_2^Z$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n^Z	$var\ H_n^Z$

Tabulka 4.7: Rozhodovací matice s ostrými pravděpodobnostmi fuzzy stavů světa

Abychom varianty $x_1, \ldots, x_n$ mohli vzájemně srovnat, je třeba určit očekávané hodnoty $EH_1^Z, \ldots, EH_n^Z$ jejich důsledků a rozptyly $var\ H_1^Z, \ldots, var\ H_n^Z$ těchto důsledků. Pro $i = 1, \ldots, n$ se počítají

$$EH_i^Z = \sum_{j=1}^{m} p_{Zj} \cdot h_{i,j}, \tag{4.5}$$

$$var\ H_i^Z = \sum_{j=1}^{m} p_{Zj} \cdot (h_{i,j} - EH_i^Z)^2. \tag{4.6}$$

Můžeme tedy vidět, že díky využití Zadehových ostrých pravděpodobností fuzzy stavů světa, dospějeme k přímočarému rozšíření rozhodovací matice. Nyní, zanalyzujme problémy spojené s tímto způsobem rozšíření rozhodovací matice.

V části 4.1 popisoval prvek $h_{i,j}$ z rozhodovací matice dané tabulkou 4.1 důsledek při výběru varianty x_i, pokud nastane stav světa S_j. Uvažujeme-li však fuzzy stavy světa namísto ostrých, objevuje se zásadní otázka: Co znamená říci, že „fuzzy stav světa S_j nastane“? Uvažujme, že nějaké konkrétní $\omega \in \Omega$ nastalo. Pokud $\mu_{S_j}(\omega) = 1$, pak je zřejmé, že důsledek při výběru varianty x_i je přesně $h_{i,j}$. Avšak jaký je důsledek výběru varianty x_i, pokud $0 < \mu_{S_j}(\omega) < 1$ (což také znamená, že $0 < \mu_{S_k}(\omega) < 1$ pro nějaké $k \neq j$)? V případě rozhodovací matice s fuzzy stavy světa není tedy nejspíše vhodné zacházet s důsledkem výběru varianty x_i jako s diskrétní náhodnou veličinou H_i^Z, která nabývá hodnot $h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}$. Navíc ačkoli $p_{Z1}, \ldots, p_{Zm}$ mají vlastnosti pravděpodobnostní míry, mají odlišný význam. Obecně totiž vyjadřují očekávaný stupeň příslušnosti, ve kterém konkrétní stav světa nastane. Nemají tedy běžnou pravděpodobnostní interpretaci - míra šance, že daný jev nastane v budoucnosti, kterou v případě rozhodovací matice očekáváme.

Proto nemůžeme zkonstatovat, že hodnoty $EH_1^Z, \ldots, EH_n^Z$, dané pomocí (4.5), a $var\ H_1^Z, \ldots, var\ H_n^Z$, počítané pomocí (4.6), vyjadřují očekávané důsledky variant a rozptyly důsledků variant. Uspořádání variant založené na těchto charakteristikách je tedy diskutabilní.

Ukažme nyní popisovanou rozhodovací matici na příkladech z části 4.1, které zobecníme na uvažovanou problematiku.

Příklad 4.4. *Uvažujme zadání příkladu 4.1 a fuzzifikujme uvažované stavy světa. Uvažujme tedy fuzzy pravděpodobnostní prostor se Zadehovou pravděpodobnostní* *mírou* $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_Z)$, *kde* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$, $\mathcal{A}_F$ *je množina všech fuzzy podmnožin univerza* Ω *a* P_Z *je pravděpodobnostní míra popsaná v části 3.2.1. Pro pravděpodobnostní míru* P *také platí, že* $P(\{\omega_k\}) = 1/6$, $k = 1, \dots, 6$.

Rozlišme tři možné fuzzy stavy světa - pravicová vláda (S_1)*, středová vláda* (S_2) *a levicová vláda* (S_3)*. Nechť jsou tyto tři stavy stavy světa vyjádřeny pomocí fuzzy množin na* Ω*:*

$$S_1 = \left\{ {}^{1}|_{\omega_1}, {}^{0.8}|_{\omega_2}, {}^{0.2}|_{\omega_3}, {}^{0}|_{\omega_4}, {}^{0}|_{\omega_5}, {}^{0}|_{\omega_6} \right\},$$
$$S_2 = \left\{ {}^{0}|_{\omega_1}, {}^{0.2}|_{\omega_2}, {}^{0.8}|_{\omega_3}, {}^{1}|_{\omega_4}, {}^{0.5}|_{\omega_5}, {}^{0}|_{\omega_6} \right\},$$
$$S_3 = \left\{ {}^{0}|_{\omega_1}, {}^{0}|_{\omega_2}, {}^{0}|_{\omega_3}, {}^{0}|_{\omega_4}, {}^{0.5}|_{\omega_5}, {}^{1}|_{\omega_6} \right\},$$

kde prvky fuzzy množin jsou ve tvaru ${}^{\mu_{S_j}(\omega_k)}|_{\omega_k}$, $j = 1, 2, 3$, *a* $k = 1, \dots, 6$*. Vidíme, že fuzzifikací stavů světa modelujeme fakt, že některé koalice nejsou jednoznačně levicové, pravicové nebo středové. Ale pokud bychom museli uvažovat ostré stavy světa, tak bychom získali typy vlády uvažované v příkladě 4.1. Akorát u koalice* ω_5 *bychom mohli být na vážkách, do kterého typu vlády ji zahrnout.*

Jak závisí budoucí zisk (v %) na skutečnosti, který ze tři možných typů vlády nastane po volbách, je uvedeno v rozhodovací matici dané tabulkou 4.8, kde jsou uvedeny také Zadehovy pravděpodobnosti fuzzy stavů světa spočítané pomocí (3.4).

$$\begin{aligned}
EX_1^Z &= 0,333 \cdot 15 + 0,417 \cdot 0 + 0,25 \cdot (-4) = 4, \\
EX_2^Z &= 0,333 \cdot 15 + 0,417 \cdot (-3) + 0,25 \cdot 0 = 3,75 \\
var\ X_1^Z &= 0,333 \cdot (15-4)^2 + 0,417 \cdot (0-4)^2 + 0,25 \cdot (-4-4)^2 = 63, \\
var\ X_2^Z &= 0,333 \cdot (15-3,75)^2 + 0,417 \cdot (-3-3,75)^2 + 0,25 \cdot (0-3,75)^2 = \\
&= 64,688.
\end{aligned}$$

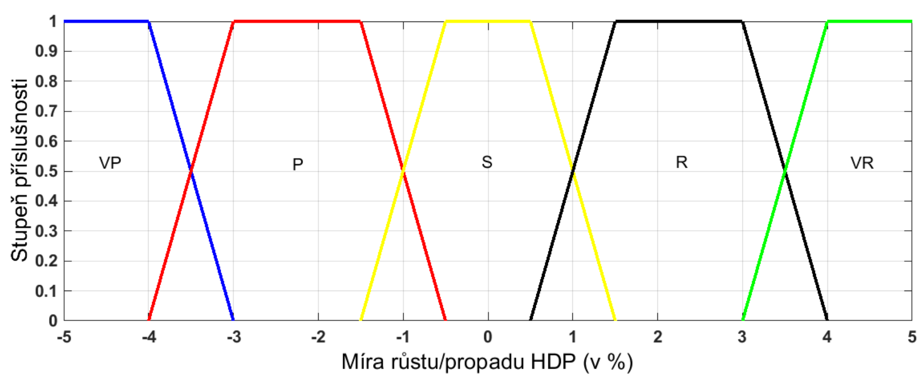
Pomocí obou uvažovaných rozhodovacích pravidel bychom se měli opět rozhodnout realizovat projekt x_1*. Avšak kvůli sporné interpretaci charakteristik* EX_i^Z*,* $i = 1, 2$*, a* $var\ X_i^Z$ *není doporučení zvolit variantu* x_1 *příliš důvěryhodné.*

Příklad 4.5. *Uvažujme zadání příkladu 4.2. Porovnejme opět akcie* X_1 *a* X_2 *na základě budoucích zhodnocení jejich cen. Uvažujme stejně označené stavy*

	S_1 $0,333$	S_2 $0,417$	S_3 $0,250$	EX_i	$var\,X_i$
x_1	15	0	-4	4,00	63,000
x_2	15	-3	0	3,75	64,688

Tabulka 4.8: Budoucí zisk (v %) projektů x_1 a x_2 v závislosti na typu vlády

ekonomiky: „velký propad ekonomiky“ (VP), „propad ekonomiky“ (P), „stagnace ekonomiky“ (S), „růst ekonomiky“ (R) a „velký růst ekonomiky“ (VR). Předpokládejme také, že uvažované stavy světa jsou určeny pouze vývojem HDP. Navíc stále uvažujme, že předpověď vývoje HDP (v %) na příští rok ukazuje normálně rozdělený růst se střední hodnotou $\mu = 1$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 2$. Stavy ekonomiky jsou však vyjádřeny pomocí fuzzy množin, které tvoří fuzzy rozklad univerza. Jejich funkce příslušnosti jsou zobrazeny na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Fuzzy stavy ekonomiky

Pravděpodobnosti fuzzy stavů ekonomiky jsou počítány následovně:

$$P(S_j) = \int_{\mathbb{R}} \mu_{S_j}(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{4}\right\} dx, \text{ kde } S_j = VP, P, S, R, VR.$$

Uvažujme také předpovědi budoucího zhodnocení cen akcií (v %) shodné jako v příkladě 4.2. Spolu s pravděpodobnostmi fuzzy stavů ekonomiky jsou uvedeny v tabulce 4.9. Očekávané hodnoty a rozptyly zhodnocení cen akcií byly určeny pomocí vzorců (4.5) a (4.6).

	VP 0,013	P 0,148	S 0,339	R 0,392	VR 0,108	EX_i	$var\ X_i$
x_1	-34	-13,5	0	14,5	30,5	6,537	182,173
x_2	-36	-15,5	0	14	29	5,856	189,790

Tabulka 4.9: Rozhodovací matice obsahující budoucí zhodnocení cen akcií (v %) s fuzzy stavy ekonomiky a pravděpodobnostmi dle Zadeha [70]

Podobně jako v příkladě na rozhodovací matici, v níž bylo vše ostré, je i zde pomocí obou rozhodovacích pravidel stejná akcie lepší, a to akcie x_1. Z tabulky 4.9 je totiž vidět, že $EX_1 > EX_2$ a $var\ X_1 < var\ X_2$.

Nyní se zaměřme na případ, kdy jsou pravděpodobnosti fuzzy jevů získávány pomocí jejich α-řezů. Uvažujme pouze první přístup popsaný v části 3.2.1, tj. uvažujme fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(S_1), \ldots, P_Y(S_m)$ fuzzy stavů světa $S_1, \ldots,$ S_m tvořících fuzzy rozklad univerza Ω. Rozhodovací matice je pak daná tabulkou 4.10. Jak již bylo uvedeno v části 3.2.1, Yager [61] se nezabýval praktickými výpočty s těmito fuzzy pravděpodobnostmi. Rotterová a Pavlačka [52] ukázali jednu možnost, jak by mohly jít počítat očekávané hodnoty a rozptyly důsledků uvažovaných variant. Tato možnost se však nejeví býti vhodná pro praktické účely.

	S_1 $P_Y(S_1)$	S_2 $P_Y(S_2)$	$\cdots$ $\cdots$	S_m $P_Y(S_m)$		
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1^Y	$var\ H_1^Y$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2^Y	$var\ H_2^Y$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n^Y	$var\ H_n^Y$

Tabulka 4.10: Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa a jejich fuzzy pravděpodobnostmi $P_Y(S_1), \ldots, P_Y(S_m)$

Nechť $\alpha \in (0, 1\rangle$. Pro libovolný stav světa S_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, je důsledek varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, roven $h_{i,j}$ s pravděpodobností $P(S_{j\alpha})$ ve stupni příslušnosti α. Avšak obecně $\sum_{j=1}^{m} P(S_{j\alpha}) \neq 1$. Proto označme

$$P(S_j|\alpha) = \begin{cases} \frac{P(S_{j\alpha})}{\sum_{k=1}^{m} P(S_{k\alpha})}, & \text{pokud } \sum_{k=1}^{m} P(S_{k\alpha}) \neq 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Platí, že $P(S_j|\alpha) \in \langle 0,1\rangle$ pro všechna j. $\sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) = 1$ mimo případu, kdy $P(S_j|\alpha) = 0$ pro všechna j, který nastane např. obsahuje-li každé jádro $Core\, S_j$ pouze jeden prvek a je-li pravděpodobnostní rozdělení dané na Ω spojité. $P(S_1|\alpha), \ldots, P(S_m|\alpha)$ mohou být interpretovány jako pravděpodobnosti stavů světa, pokud nastal nějaký prvek $\omega \in \Omega$ náležící do alespoň jednoho $S_{j\alpha}$.

Očekávaná hodnota důsledku dané varianty x_i v uvažovaném stupni α je pak dána

$$E(H_i|\alpha) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \cdot h_{i,j}, & \text{pokud } \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \neq 0, \\ \text{neexistuje}, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Stupeň příslušnosti *fuzzy očekávaného důsledku* EH_i^Y varianty x_i je poté dán pro všechna $h_i \in \langle 0,1\rangle$

$$\mu_{EH_i^Y}(h_i) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1\rangle \mid h_i = E(H_i|\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \in (0,1\rangle \mid \\ & h_i = E(H_i|\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Nyní se zaměřme na získání fuzzy rozptylu. V uvažovaném stupni α, využijeme $P(S_j|\alpha) \in \langle 0,1\rangle$ pro všechna $j = 1,\ldots,m$ a $E(H_i|\alpha)$, které byly definovány pomocí (4.7) a (4.8). Rozptyl $var\ (H_i|\alpha)$ důsledků varianty x_i v uvažovaném stupni α je dán

$$var\ (H_i|\alpha) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} (h_{i,j} - E(H_i|\alpha))^2 \cdot P(S_j|\alpha), & \text{pokud } \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \neq 0, \\ \text{neexistuje}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

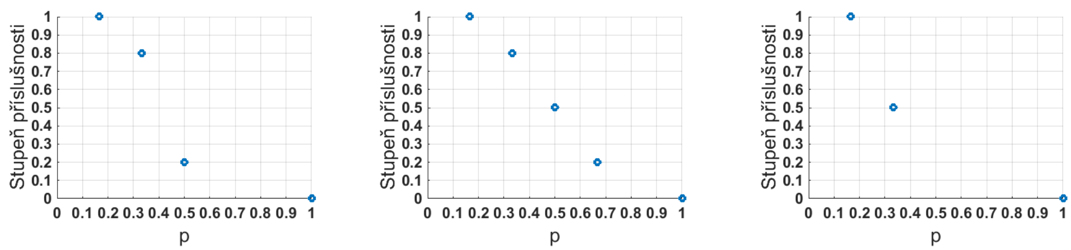
Stupeň příslušnosti *fuzzy rozptylu* $var H_i^Y$ důsledků varianty x_i je pak dán pro všechna $h_i \in \langle 0,1\rangle$

$$\mu_{var\ H_i^Y}(h_i) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1\rangle \mid h_i = var\ (H_i|\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \in (0,1\rangle \mid \\ & h_i = var\ (H_i|\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Nejlepší varianta může být nalezena pomocí vizuálního porovnání funkcí příslušnosti fuzzy středních hodnot $EH_1^Y, \dots, EH_n^Y$ a fuzzy rozptylů $var\ H_1^Y$, …, $var\ H_n^Y$ a následně aplikováním příslušného rozhodovacího pravidla (viz kapitola 4.1). Jinou možností je na výsledné fuzzy charakteristiky nejprve aplikovat nějakou defuzzifikační metodu (viz kapitola 2.3) a poté teprve rozhodovací pravidlo.

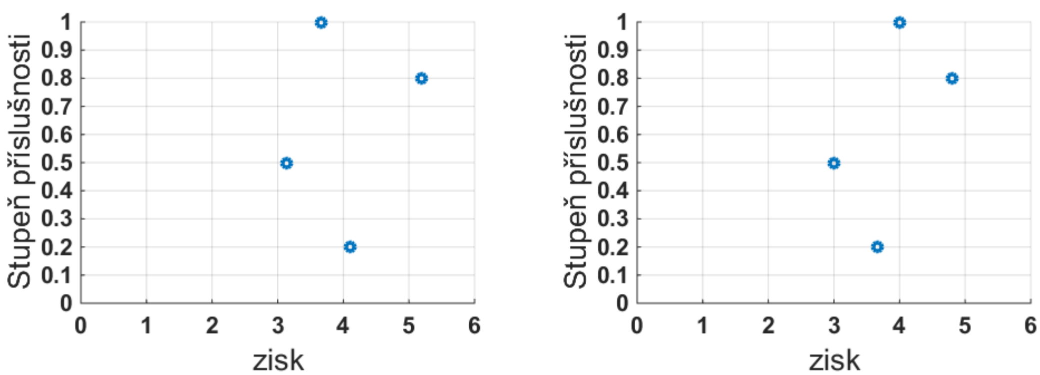
Ilustrujme nyní uvažovanou rozhodovací matici opět na dvojici příkladů.

Příklad 4.6. *Uvažujme zadání příkladu 4.4. Pravděpodobnosti fuzzy stavů světa však nyní vyjádřeme podle Yagera [61]. Výsledné fuzzy pravděpodobnosti možných typů vlády, spočítané pomocí* (3.5)*, jsou na obrázku 4.6.*



(a) $P_Y(S_1)$ (b) $P_Y(S_2)$ (c) $P_Y(S_3)$

Obrázek 4.6: Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobností fuzzy jevů S_1, S_2, S_3



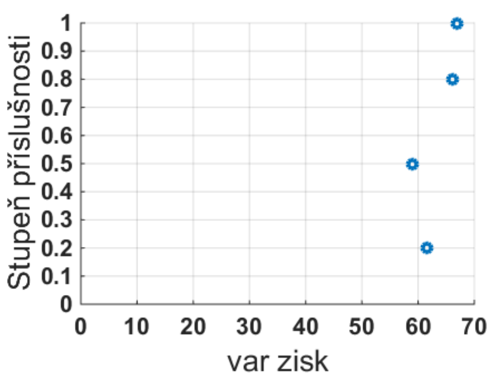
(a) EX_1^Y (b) EX_2^Y

Obrázek 4.7: Funkce příslušnosti fuzzy očekávaných důsledků projektů x_1 a x_2

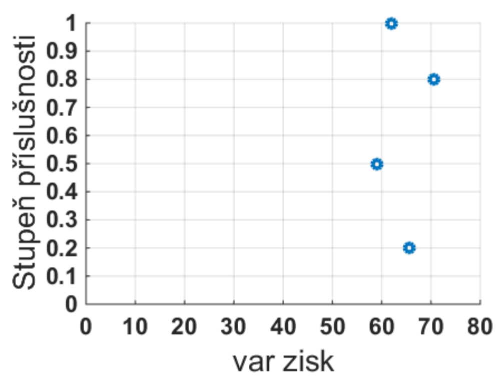
Pro ilustraci si ukažme, jak se určí střední hodnota EX_1^Y v jednotlivých stupních příslušnosti pomocí pravděpodobností $P(S_j|\alpha)$, $j = 1, 2, 3$, $\alpha = 0,2; 0,5; 0,8; 1$, *fuzzy stavů světa:*

$$\begin{aligned} E(X_1|0,2) &= \frac{1}{3}\cdot 15 + \frac{4}{9}\cdot 0 + \frac{2}{9}\cdot(-4) = \frac{37}{9}, \\ E(X_1|0,5) &= \frac{2}{7}\cdot 15 + \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{2}{7}\cdot(-4) = \frac{22}{7}, \\ E(X_1|0,8) &= \frac{2}{5}\cdot 15 + \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot(-4) = \frac{26}{5}, \\ E(X_1|1) &= \frac{1}{3}\cdot 15 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(-4) = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Střední hodnota EX_2^Y v příslušných stupních příslušnosti se určí analogicky.



(a) $var\, X_1^Y$



(b) $var\, X_2^Y$

Obrázek 4.8: Funkce příslušnosti fuzzy rozptylů důsledků projektů x_1 a x_2

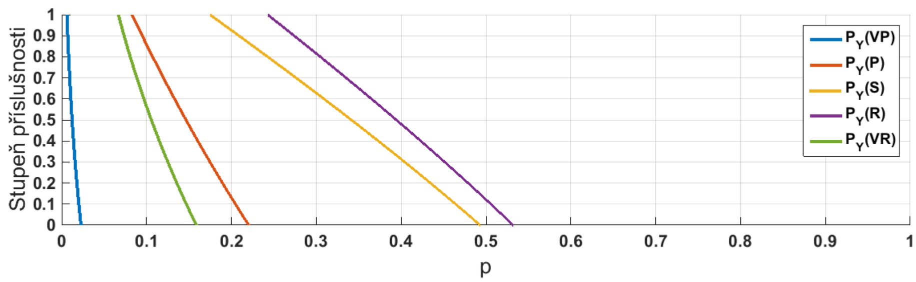
Funkce příslušnosti fuzzy očekávaných hodnot EX_1^Y, EX_2^Y, spočítaných pomocí (4.9), a fuzzy rozptylů $var\, X_1^Y$, $var\, X_2^Y$, spočítaných pomocí (4.10), jsou pak zobrazeny na obrázcích 4.7 a 4.8. Tyto očekávané hodnoty a rozptyly mohou být srovnány na základě jejich α-řezů. Pro jednoduchost je však srovnáme na základě jejich těžišť. Těžiště, spočítaná pomocí (2.1), jsou uvedena v tabulce 4.11.

Ná základě těžišť bychom při rozhodování pomocí pravidla maximalizujícího očekávanou hodnotu měli realizovat projekt x_1. Budeme-li však navíc uvažovat i rozptyl, pak na základě maximalizace těžiště očekávané hodnoty a minimalizace těžiště rozptylu nejsme schopni vybrat lepší projekt.

Charakteristika	Těžiště
EX_1^Y	4,088
EX_2^Y	4,029
$var\ X_1^Y$	64,655
$var\ X_2^Y$	64,452

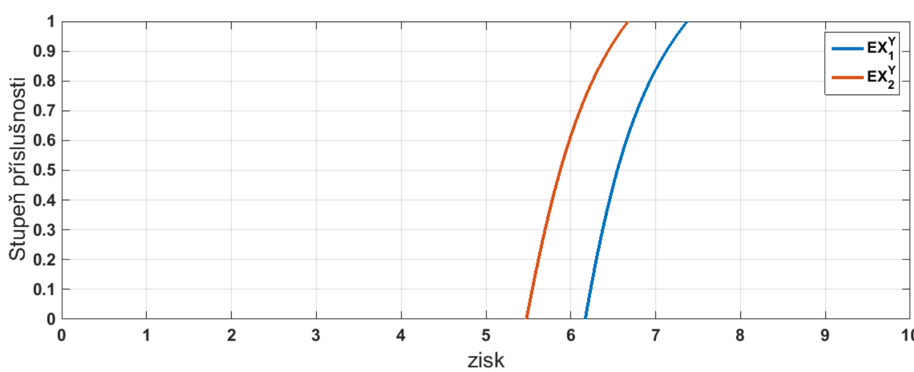
Tabulka 4.11: Těžiště fuzzy charakteristik

Příklad 4.7. *Uvažujme zadání příkladu 4.5. Pravděpodobnosti fuzzy stavů světa opět vyjádřeme podle Yagera [61]. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti možných fuzzy stavů ekonomiky, spočítané pomocí* (3.5)*, jsou na obrázku 4.9.*

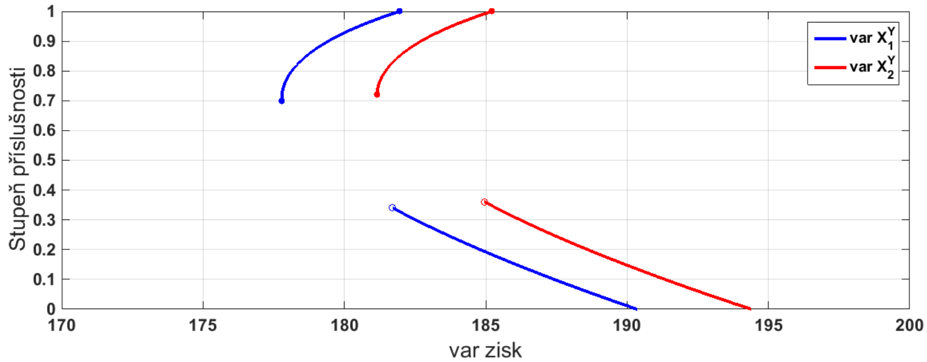


Obrázek 4.9: Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobností fuzzy stavů ekonomiky

Funkce příslušnosti fuzzy středních hodnot a fuzzy rozptylů, spočítané pomocí (4.9) *a* (4.10)*, jsou vyobrazeny na obrázcích 4.10 a 4.11.*



Obrázek 4.10: Funkce příslušnosti fuzzy očekávaných zhodnocení cen akcií X_1 a X_2



Obrázek 4.11: Funkce příslušnosti fuzzy rozptylů zhodnocení cen akcií X_1 a X_2

Charakteristika	Těžiště
EX_1^Y	6,812
EX_2^Y	6,132
$var\ X_1^Y$	180,137
$var\ X_2^Y$	183,657

Tabulka 4.12: Těžiště fuzzy charakteristik

Pro srovnání akcií opět využijme těžišť spočítaných charakteristik a následně aplikujme rozhodovací pravidla, popsaná v části 4.1. Hodnoty těžišť fuzzy čísel, spočítaných dle (2.1), jsou uvedeny v tabulce 4.12. Podle obou rozhodovacích pravidel se akcie X_1 jeví jako správná volba.

Přístup k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa a jejich fuzzy pravděpodobnostmi dle Yagera [61] již nebude dále uvažován kvůli svému výpočetnímu postupu založenému na normování fuzzy pravděpodobností po α-řezech, který se z praktického hlediska nejeví příliš vhodný.

4.3.2. Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa chápána jako systém bází fuzzy pravidel

Nyní představme zcela odlišný přístup k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, který byl popsán v [42]. Nejprve opět uvažujme daný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ obdobně jako v předchozí části.

	S_1	S_2	$\cdots$	S_m		
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1^S	$var\ H_1^S$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2^S	$var\ H_2^S$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n^S	$var\ H_n^S$

Tabulka 4.13: Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa chápána jako systém bází fuzzy pravidel

Vezměme v úvahu problémy spojené s přístupem k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa využívajícího Zadehových pravděpodobností rozebrané v předchozí části. Při tomto přístupu byly důsledky při výběru konkrétní varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, chápány jako diskrétní náhodná veličina H_i^Z nabývající hodnot $h_{i,1}$, $\ldots, h_{i,m}$ s pravděpodobnostmi $p_{Z1}, \ldots, p_{Zm}$. Namísto toho nyní uvažujme rozhodovací matici s fuzzy stavy světa danou tabulkou 4.13. Informace o důsledku při výběru varianty x_i mohou být vyjádřeny pomocí následující báze fuzzy pravidel:

$$\begin{aligned}
&\text{Jestliže stav světa je } S_1,\ \text{pak důsledek varianty } x_i \text{ je } h_{i,1}.\\
&\vdots\\
&\text{Jestliže stav světa je } S_m,\ \text{pak důsledek varianty } x_i \text{ je } h_{i,m}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Vzhledem k charakteru uvažované báze fuzzy pravidel je vhodné k získání výstupu z báze fuzzy pravidel (4.11) využít Sugenův inferenční algoritmus, představený Sugenem [55] a daný vzorcem (2.2), tj. pro libovolné $\omega \in \Omega$ je výstup při výběru varianty x_i dán

$$H_i^S(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}}{\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega)} = \sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}, \tag{4.12}$$

kde jsme využili předpokladu $\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) = 1$ pro libovolné $\omega \in \Omega$.

Jelikož je na univerzu Ω dána pravděpodobnostní míra P, H_i^S představuje náhodnou veličinu. Distribuční funkce náhodné veličiny H_i^S je dána pro libovolné $h \in \mathbb{R}$ následovně:

$$F_{H_i^S}(h) = P(H_i^S \leq h) = \int_{\{\omega \in \Omega | H_i^S(\omega) \leq h\}} dP.$$

Poznámka 4.1. *Ze vzorce (4.12) můžeme vidět, že v případě uvažování ostrých stavů světa $S_1, \ldots, S_m$, se náhodné veličiny $H_1^S, \ldots, H_n^S$ shodují s diskrétními náhodnými veličinami $H_1, \ldots, H_n$ nabývajícími hodnot $h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}$, $i = 1, \ldots, n$, s pravděpodobnostmi $p_j = P(S_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Tento nový přístup tedy také představuje rozšíření rozhodovací matice na případ fuzzy stavů světa.*

Varianty $x_1, \ldots, x_n$ mohou být uspořádány na základě očekávaných hodnot a rozptylů náhodných veličin $H_1^S, \ldots, H_n^S$ podobně jako u předchozích přístupů. Odvoďme tedy nyní vzorce pro výpočet těchto charakteristik. Zároveň je porovnejme s charakteristikami náhodných veličin $H_1^Z, \ldots, H_n^Z$.

Nejprve ukažme, že střední hodnoty náhodných veličin $H_1^S, \ldots, H_n^S$ se shodují s $EH_1^Z, \ldots, EH_n^Z$. Pro $i = 1, \ldots, n$ platí:

$$EH_i^S = \int_\Omega H_i^S(\omega)dP = \int_\Omega \sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}\, dP = \sum_{j=1}^m \int_\Omega \mu_{S_j}(\omega)\, dP \cdot h_{i,j} =$$

$$= \sum_{j=1}^m p_{Zj} \cdot h_{i,j} = EH_i^Z. \tag{4.13}$$

Oba přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa tedy vedou k totožným očekávaným důsledkům.

Nicméně, ukažme, že rozptyly náhodných veličin $H_1^S, \ldots, H_n^S$ se obecně liší od $var\ H_1^Z, \ldots, var\ H_n^Z$. Pro $i = 1, \ldots, n$ je rozptyl $var\ H_i^S$ získán následovně:

$$var\ H_i^S = E\left(H_i^S\right)^2 - \left(EH_i^S\right)^2 = \int_\Omega H_i^S(\omega)^2\, dP - \left(EH_i^S\right)^2 =$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \right)^2 dP - \left(EH_i^S\right)^2. \tag{4.14}$$

Pro $var\ H_i^Z$, $i = 1, \ldots, n$, platí, že

$$var\ H_i^Z = E\left(H_i^Z\right)^2 - \left(EH_i^Z\right)^2 = \sum_{j=1}^m p_{Zj} \cdot h_{i,j}^2 - \left(EH_i^Z\right)^2 =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}^2\, dP - \left(EH_i^Z\right)^2.$$

Využitím $\left(EH_i^S\right)^2 = \left(EH_i^Z\right)^2$ tedy dostáváme

$$var\ H_i^Z - var\ H_i^S = \int_\Omega \sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}^2\, dP - \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}\right)^2 dP =$$

$$= \int_\Omega \left[\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^m \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}\right)^2\right] dP \geq 0.$$

Integrand je jistě nezáporný (představuje rozptyl diskrétní náhodné veličiny, která nabývá hodnot $h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}$ s „pravděpodobnostmi“ $\mu_{S_1}(\omega), \ldots, \mu_{S_m}(\omega)$). Dále je zřejmé, že rozdíl rozptylů je roven nule tehdy a jen tehdy, když $h_{i,j} = h_{i,k}$ pro libovolné $j \neq k$ takové, že obě $E\mu_{S_j}$ a $E\mu_{S_k}$ jsou kladné.

Zatímco se tedy očekávané hodnoty náhodných veličin $H_1^S, \ldots, H_n^S$ a $H_1^Z, \ldots,$ H_n^Z shodují, jejich rozptyly se obecně liší. To znamená, že uspořádání variant na základě očekávaných hodnot a rozptylů jejich důsledků se pro oba přístupy může lišit. Nyní ukažme přístup k rozhodovací matice s fuzzy stavy světa jako systému bází fuzzy pravidel na příkladech.

Příklad 4.8. *Uvažujme zadání příkladu 4.4. Avšak nyní nebudeme uvažovat žádné pravděpodobnosti fuzzy stavů světa. Namísto toho zkonstruujme náhodné proměnné H_1^S a H_2^S. Jelikož univerzum Ω je diskrétní, H_1^S a H_2^S jsou diskrétní náhodné veličiny. Pomocí vzorce (4.12) získáme:*

$$H_1^S(\omega_1) = 1,\ H_1^S(\omega_2) = 0,9,\ H_1^S(\omega_3) = 0,6,$$

$$H_1^S(\omega_4) = 0,5,\ H_1^S(\omega_5) = 0,3,\ a\ H_1^S(\omega_6) = 0,1,$$

$$H_2^S(\omega_1) = 1,\ H_2^S(\omega_2) = 0,84,\ H_2^S(\omega_3) = 0,36,$$

$$H_2^S(\omega_4) = 0,2,\ H_2^S(\omega_5) = 0,35\ a\ H_2^S(\omega_6) = 0,5.$$

Obě náhodné veličiny H_1^S a H_2^S nabývají těchto hodnot s pravděpodobnostmi rovnými $1/6$.

Očekávané hodnoty EH_1^S a EH_2^S, spočítané pomocí (4.13), se shodují s EH_1^Z a EH_2^Z z příkladu 4.4, tj. $EH_1^S = 0,5667$ a $EH_2^S = 0,5417$. Rozptyly náhodných veličin H_1^S a H_2^S jsou získány následovně:

$$var\ H_1^S = \frac{\sum_{k=1}^6 (H_1^S(\omega_k) - 0.5667)^2}{6} = 0,0989,$$

$$var\ H_2^S = \frac{\sum_{k=1}^{6}(H_2^S(\omega_k) - 0.5417)^2}{6} = 0,0812.$$

Můžeme tedy vidět, že v tomto případě nejsme schopni rozhodnout mezi projekty x_1 a x_2 na základě pravidla maximalizace očekávané hodnoty a minimalizace rozptylu, protože $EH_1^S > EH_2^S$ a $var\ H_1^S > var\ H_2^S$.

Příklad 4.9. *Nyní uvažujme zadání příkladu 4.5. Rozhodovací matice je nyní dána tabulkou 4.14. Očekávané hodnoty a rozptyly byly opět určeny pomocí vzorců (4.13) a (4.14).*

	VP 0,013	P 0,148	S 0,339	R 0,392	VR 0,108	EX_i	$var\ X_i$
x_1	-34	-13,5	0	14,5	30,5	6,537	166,503
x_2	-36	-15,5	0	14	29	5,856	169,894

Tabulka 4.14: Rozhodovací matice obsahující budoucí zhodnocení cen akcií s fuzzy stavy ekonomiky

Podobně jako u předchozích přístupů k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa je i zde pomocí obou rozhodovacích pravidel stejná akcie lepší, a to akcie X_1. Z tabulky 4.14 totiž plyne, že $EX_1^S > EX_2^S$ a $var\ X_1^S < var\ X_2^S$.

4.4. Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou

V této části se zaměříme na rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant i fuzzy pravděpodobnostní mírou. Budeme ji nazývat *fuzzy rozhodovací matice.*

Nejprve však stručně připomeňme fuzzy pravděpodobnostní míru. Důvodem k jejímu uvažování v rozhodovací matici může být např. nedostatek informací o rozdělení pravděpodobnosti na uvažovaném univerzu nebo odhadnutí jeho parametrů z fuzzy dat (viz např. [59]). Obecně byla fuzzy pravděpodobnostní míra P_F zavedena v části 3.2.2. Vlastnosti Zadehovy pravděpodobnostní míry rozšířené na případ fuzzy jevů, označené P_{FZ}, byly prozkoumány v části 3.2.3.

V následujících podkapitolách se zaměříme na dva přístupy k uvažované fuzzy rozhodovací matici. Nejprve v části 4.4.1 popíšeme přístup využívající fuzzifikovaných Zadehových pravděpodobností fuzzy stavů světa, které byly zavedeny v části 3.2.3 a tvoří m-tici fuzzy pravděpodobností. Poté v části 4.4.2 představíme přístup k fuzzy rozhodovací matici, který reprezentuje informace v ní obsažené pomocí systému bází fuzzy pravidel. Tento přístup k fuzzy rozhodovací matici s expertně zadanými pravděpodobnostmi elementárních jevů byl řešen v [50]. V [41] je tento přístup popsán na fuzzy rozhodovací matici s diskrétní podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Praktické využití fuzzy rozhodovací matice chápané jako systém bází pravidel k porovnání akcií je popsáno v [48]. Na závěr v podkapitole 4.4.3 oba přístupy k fuzzy rozhodovací matici srovnáme.

4.4.1. Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a fuzzifikovanými Zadehovými pravděpodobnostmi stavů světa

V této části popišme přístup k fuzzy rozhodovací matici využívající fuzzifikovaných Zadehových pravděpodobností fuzzy stavů světa vyjádřených pomocí fuzzy čísel.

Uvažujme fuzzy rozhodovací matici danou tabulkou 4.15. V rozhodovací matici značí $x_1, \ldots, x_n$ varianty rozhodovatele. $H_{i,j} \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$, $i = 1 \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, představují důsledky těchto variant za daných fuzzy stavů světa $S_1, \ldots,$ S_m, které tvoří fuzzy rozklad univerza Ω. Těmto fuzzy stavům světa přiřazujeme jejich fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZj} = P_{FZ}(S_j)$, $j = 1, \ldots, m$, počítané na základě podkladové fuzzy pravděpodobnostní míry P_F pomocí vzorců (3.13) a (3.14). Ve vzorcích pro výpočet charakteristik variant však budou tyto fuzzy pravděpodobnosti kvůli vzájemným interakcím vyjádřeny pomocí vzorců pro jejich výpočet.

Libovolný řádek rozhodovací matice vyjadřuje hodnoty diskrétní fuzzy náhodné veličiny H_i^Z, $i \in \{1, \ldots, n\}$, která nabývá fuzzy hodnot $H_{i,1}, \ldots, H_{i,m}$ s fuzzy pravděpodobnostmi $P_{FZ1}, \ldots, P_{FZm}$.

Poznámka 4.2. *V případě rozhodovací matice popsané v části 4.1, tj. rozhodo-*

	S_1	S_2	$\cdots$	S_m		
	P_{FZ1}	P_{FZ2}	$\cdots$	P_{FZm}		
x_1	$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$\cdots$	$H_{1,m}$	EH_1^Z	$var\ H_1^Z$
x_2	$H_{2,1}$	$H_{2,2}$	$\cdots$	$H_{2,m}$	EH_2^Z	$var\ H_2^Z$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$H_{n,1}$	$H_{n,2}$	$\cdots$	$H_{n,m}$	EH_n^Z	$var\ H_n^Z$

Tabulka 4.15: Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou

vací matice bez jakékoli fuzzifikace, diskrétní náhodné veličiny H_i^Z, $i = 1, \dots, n$, splývají s diskrétními náhodnými veličinami $H_1, \dots, H_n$ nabývajících hodnot $h_{i,1}$, $\dots$, $h_{i,m}$, $i = 1, \dots, n$, s pravděpodobnostmi $p_j = P(S_j)$, $j = 1, \dots, m$. Tento přístup tedy představuje rozšíření rozhodovací matice na případ fuzzy stavů světa, fuzzy důsledků variant a podkladové fuzzy pravděpodobnostní míry.

Ukažme, jak lze získat charakteristiky fuzzy náhodné veličiny H_i^Z, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ označme α-řez $H_{i,j,\alpha} = \langle h_{i,j,\alpha}^L, h_{i,j,\alpha}^U \rangle$. Pak pro libovolnou variantu x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, a libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ je α-řez fuzzy očekávané hodnoty $EH_{i,\alpha}^Z = \langle Eh_{i,\alpha}^{Z,L}, Eh_{i,\alpha}^{Z,U} \rangle$ dán následovně:

$$Eh_{i,\alpha}^{Z,L} = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^L \mid P \in P_{F,\alpha} \right\}, \tag{4.15}$$

$$Eh_{i,\alpha}^{Z,U} = \max \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^U \mid P \in P_{F,\alpha} \right\}. \tag{4.16}$$

Výpočet fuzzy rozptylu $var\, H_i^Z$ je komplikovanější. Kvůli vzájemným závislostem mezi fuzzy důsledky $H_{i,1}, \dots, H_{i,m}$ a fuzzy očekávanou hodnotou EH_i^Z je α-řez $var\, H_{i,\alpha}^Z = \langle var\, h_{i,\alpha}^{ZL}, var\, h_{i,\alpha}^{ZU} \rangle$ fuzzy rozptylu důsledků varianty určen následovně: Označme

$$z(h_{i,1}, \dots h_{i,m}, P) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} \int_{t \in \Omega} \mu_{S_k}(t) dP \cdot h_{i,k} \right)^2. \tag{4.17}$$

Poté se krajní hodnoty α-řezu určí

$$var\, h_{i,\alpha}^{ZL} = \min\left\{z(h_{i,1}, \dots h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \dots, m, P \in P_{F,\alpha}\right\}, \tag{4.18}$$

$$var\, h_{i,\alpha}^{ZU} = \max\left\{z(h_{i,1}, \dots h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \dots, m, P \in P_{F,\alpha}\right\}. \tag{4.19}$$

V části 3.2.3 bylo ukázáno, že z matematického hlediska představuje P_{FZ} fuzzy pravděpodobnostní míru. Jedná se však pouze o rozšíření pravděpodobnostní míry P_Z na případ podkladové fuzzy pravděpodobnostní míry, proto interpretační problémy popsané v části 3.2.1 zůstávají zachovány. Navíc bylo v části 3.2.1 diskutováno, že není jasné, co znamená výrok „fuzzy stav světa nastal". Proto nelze říci, že hodnoty EH_i^Z, $i = 1, \dots, n$, dané pomocí (4.15) a (4.16), a $var\, H_i^Z$, $i = 1, \dots, n$, dané vzorci (4.18) a (4.19), vyjadřují očekávané důsledky a rozptyly důsledků variant. Věrohodnost uspořádání variant na základě těchto charakteristik je tedy otázkou.

4.4.2. Rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou chápána jako systém bází fuzzy pravidel

V této části budou informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici popsány pomocí systému bází fuzzy pravidel podobně jako v části 4.3.2. Uvažujme tedy daný pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$.

	S_1	S_2	$\cdots$	S_m		
x_1	$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$\cdots$	$H_{1,m}$	EH_1^S	$var\, H_1^S$
x_2	$H_{2,1}$	$H_{2,2}$	$\cdots$	$H_{2,m}$	EH_2^S	$var\, H_2^S$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$H_{n,1}$	$H_{n,2}$	$\cdots$	$H_{n,m}$	EH_n^S	$var\, H_n^S$

Tabulka 4.16: Fuzzy rozhodovací matice chápána jako systém bází fuzzy pravidel

Nejprve popišme uvažovanou fuzzy rozhodovací matici danou tabulkou 4.16. V tabulce značí $x_1, \dots, x_n$ varianty rozhodovatele a $S_1, \dots, S_m$ fuzzy stavy světa tvořící fuzzy rozklad univerza Ω. Pro libovolné $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ vyjadřuje $H_{i,j}$ fuzzy důsledek varianty x_i za daného fuzzy stavu světa S_j. Informace o fuzzy důsledcích při výběru libovolné varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, mohou být vyjádřeny pomocí následující báze fuzzy pravidel:

$$\begin{array}{l} \text{Jestliže stav světa je } S_1, \text{ pak důsledek varianty } x_i \text{ je } H_{i,1}. \\ \vdots \\ \text{Jestliže stav světa je } S_m, \text{ pak důsledek varianty } x_i \text{ je } H_{i,m}. \end{array}$$

K získání výstupu z této báze fuzzy pravidel je vhodné použít Zobecněný Sugenův inferenční algoritmus daný vzorcem (2.3). Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ a libovolné $\omega \in \Omega$ označme $H_{i,j,\alpha} = \langle h^L_{i,j,\alpha}, h^U_{i,j,\alpha}\rangle$, $j = 1, \ldots, m$, a $H^S_{i,\alpha}(\omega) = \langle h^{SL}_{i,\alpha}(\omega), h^{SU}_{i,\alpha}(\omega)\rangle$. Pak se krajní hodnoty α-řezu $H^S_{i,\alpha}(\omega)$ výstupu z báze fuzzy pravidel získají

$$h^{S,L}_{i,\alpha}(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h^L_{i,j,\alpha},$$

$$h^{S,U}_{i,\alpha}(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h^U_{i,j,\alpha}.$$

Jelikož je na univerzu Ω uvažována fuzzy pravděpodobnostní míra P_F, tak $H^S_i : \Omega \to \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ může být chápána jako fuzzy náhodná veličina. Vyjádřeme tedy její očekávanou hodnotu EH^S_i a rozptyl $var\, H^S_i$.

Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ se α-řez $EH^S_{i,\alpha} = \langle Eh^{SL}_{i,\alpha}, Eh^{SU}_{i,\alpha}\rangle$ fuzzy očekávané hodnoty určí

$$Eh^{SL}_{i,\alpha} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h^L_{i,j,\alpha} dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}, \tag{4.20}$$

$$Eh^{SU}_{i,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h^U_{i,j,\alpha} dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}. \tag{4.21}$$

Pro výpočet fuzzy rozptylu nejprve označme

$$s(h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}, P) =$$

$$= \int_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} - \int_{t\in\Omega} \sum_{k=1}^{m} \mu_{S_k}(t) \cdot h_{i,k} dP \right)^2 dP. \tag{4.22}$$

Pak se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ α-řez $var\, H_{i,\alpha}^{S} = \langle var\, h_{i,\alpha}^{SL}, var\, h_{i,\alpha}^{SU} \rangle$ získá

$$var\, h_{i,\alpha}^{SL} = \min \left\{ s(h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha} \right\}, \tag{4.23}$$

$$var\, h_{i,\alpha}^{SU} = \max \left\{ s(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha} \right\}. \tag{4.24}$$

4.4.3. Srovnání obou přístupů

Srovnejme fuzzy očekávané hodnoty EH_i^Z, $i \in \{1, \ldots, n\}$, a EH_i^S stejně jako fuzzy rozptyly $var\, H_i^S$ a $var\, H_i^Z$. Na závěr ilustrujme oba přístupy k fuzzy rozhodovací matici na dvojici příkladů.

Nejprve srovnejme fuzzy očekávané hodnoty.

Věta 4.1. *Nechť EH_i^S je fuzzy očekávaná hodnota fuzzy náhodné veličiny H_i^S a EH_i^Z je fuzzy očekávaná hodnota fuzzy náhodné veličiny H_i^Z. Pak platí: $EH_i^S = EH_i^Z$.*

Důkaz. Nechť pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ jsou $EH_{i,\alpha}^{Z} = \langle Eh_{i,\alpha}^{ZL}, Eh_{i,\alpha}^{ZU} \rangle$ a $EH_{i,\alpha}^{S} = \langle Eh_{i,\alpha}^{SL}, Eh_{i,\alpha}^{SU} \rangle$ α-řezy fuzzy očekávaných hodnot. Pro krajní hodnoty α-řezu $EH_{i,\alpha}^{S}$ platí:

$$Eh_{i,\alpha}^{SL} = \min \left\{ \int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j,\alpha}^{L} dP \mid P \in P_{F,\alpha} \right\} =$$

$$= \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^{L} \mid P \in P_{F,\alpha} \right\} = Eh_{i,\alpha}^{ZL},$$

$$Eh_{i,\alpha}^{SU} = \max \left\{ \int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j,\alpha}^{U} dP \mid P \in P_{F,\alpha} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^{U} \mid P \in P_{F,\alpha} \right\} = Eh_{i,\alpha}^{ZU}$$

Všechny α-řezy se tedy shodují. A proto $EH_i^S = EH_i^Z$. □

Nyní určeme vzájemný vztah mezi fuzzy rozptyly důsledků variant.

Věta 4.2. *Nechť var H_i^S je fuzzy rozptyl fuzzy náhodné veličiny H_i^S a var H_i^Z je fuzzy rozptyl fuzzy náhodné veličiny H_i^Z. Pak platí: var $H_i^S \leq$ var H_i^Z.*

Důkaz. Nechť $z(h_{i,1},\ldots,h_{i,m},P)$ a $s(h_{i,1},\ldots h_{i,m},P)$ jsou pomocné funkce definované pomocí (4.17) a (4.22). Pro zjednodušení důkazu označme pro daná $h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}$, $j = 1,\ldots,m$,

$$Eh_i = \int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} dP = \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j}.$$

Rozdíl funkcí $z(h_{i,1},\ldots h_{i,m},P)$ a $s(h_{i,1},\ldots,h_{i,m},P)$ můžeme vyjádřit následovně:

$$d(h_{i,1},\ldots h_{i,m},P) = z(h_{i,1},\ldots h_{i,m},P) - s(h_{i,1},\ldots,h_{i,m},P) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot (h_{i,j} - Eh_i)^2 - \int_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} - Eh_i \right)^2 dP =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot \left(h_{i,j}^2 - 2 \cdot h_{i,j} \cdot Eh_i + Eh_i^2\right) -$$

$$- \int_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \right)^2 dP + 2 \cdot \int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \cdot Eh_i dP -$$

$$- \int_{\omega\in\Omega} Eh_i^2 dP = \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j}^2 -$$

$$- 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j} \cdot Eh_i + \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot Eh_i^2 -$$

$$- \int_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \right)^2 dP + 2 \cdot \int_{\omega\in\Omega} \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \cdot Eh_i dP -$$

$$- \int_{\omega\in\Omega} Eh_i^2 dP = \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega\in\Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j}^2 - Eh_i^2 -$$

$$- \int_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \right)^2 dP + Eh_i^2 =$$

$$= \int_{\omega \in \Omega} \left[\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j} \right)^2 \right] dP$$

kde jsme využili vztahu, že pro libovolné $\omega \in \Omega$ platí $\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) = 1$.

Integrand je vždy nezáporný (představuje rozptyl diskrétní náhodné veličiny, která nabývá hodnot $h_{i,j}$, $j = 1, \ldots, m$, s „pravděpodobnostmi“ $\mu_{S_j}(\omega)$, $j = 1, \ldots, m$). Nule se rovná pouze v případě, kdy $h_{i,j} = h_{i,k}$ pro každé $j \neq k$ takové, že nosiče fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZ}(S_j)$ a $P_{FZ}(S_k)$ stavů světa S_j a S_k jsou podmnožinou intervalu $(0, \infty)$. Funkce $d(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P)$ je tedy vždy nezáporná.

Jelikož $d(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P)$ je pomocná funkce pro výpočet fuzzy rozdílu D_i mezi fuzzy rozptyly $var\, H_i^Z$ a $var\, H_i^S$, tak pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou krajní hodnoty α-řezu $D_{i,\alpha} = \langle d_{i,\alpha}^L, d_{i,\alpha}^U \rangle$ fuzzy rozdílu dány následovně:

$$d_{i,\alpha}^L = \min \left\{ d(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) | h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha} \right\},$$
$$d_{i,\alpha}^U = \max \left\{ d(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) | h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha} \right\}.$$

Vhledem k nezápornosti pomocné funkce $d(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P)$ obsahují α-řezy fuzzy rozdílu D_i pouze nezáporné hodnoty. Platí tedy, že $var\, H_{i,\alpha}^Z \geq var\, H_{i,\alpha}^S$, a proto $var\, H_i^Z \geq var\, H_i^S$. □

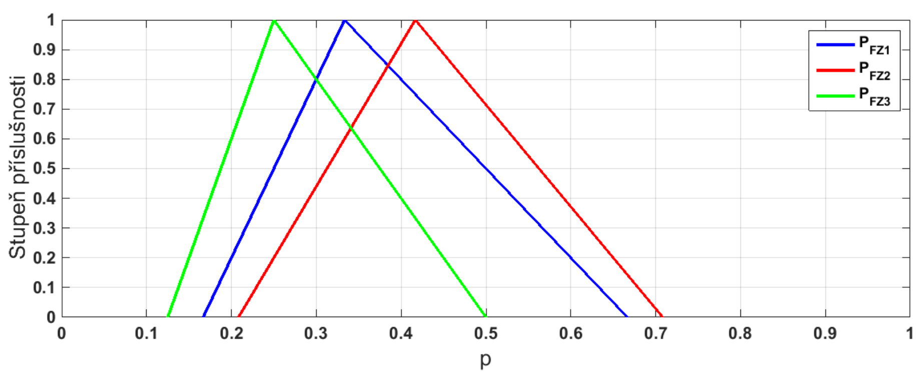
Ačkoli se fuzzy očekávané hodnoty EH_i^Z a EH_i^S shodují, fuzzy rozptyly $var\, H_i^Z$ a $var\, H_i^S$ se obecně liší. Tato skutečnost může významně ovlivnit uspořádání variant ve fuzzy rozhodovací matici. Ilustrujme využití fuzzy rozhodovací matice opět na dvojici příkladů.

Příklad 4.10. *Uvažujme situaci, kdy vybíráme jeden ze dvou projektů, označených x_1 a x_2, obdobně jako v předchozích příkladech s diskrétní podkladovou pravděpodobnostní mírou. Nechť budoucí zisk obou projektů opět závisí pouze na skutečnosti, jaká vládní koalice bude sestavena po parlamentárních volbách. Pravděpodobnosti sestavení těchto koalic nejsou přesně známy. Máme k dispozici pouze jejich expertní odhady pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel $P_F(\{\omega_k\}) = \langle 1/12, 1/6, 1/3 \rangle$, $k = 1, \ldots, 6$.*

Rozlišme tři možné situace - pravicová vláda (S_1), středová vláda (S_2) a levicová vláda (S_3), které jsou vyjádřeny pomocí fuzzy množin definovaných na Ω shodně jako v příkladě 4.4. Jak závisí budoucí zisk (v %) na tom, jaký typ vlády nastane, je uvedeno v tabulce 4.17. Budoucí zisky jsou vyjádřeny pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel určených jejich význačnými hodnotami. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobností fuzzy stavů světa, spočítaných pomocí (3.13) *a* (3.14)*, jsou vyobrazeny na obrázku 4.12.*

	S_1 P_{FZ1}	S_2 P_{FZ2}	S_3 P_{FZ3}
x_1	$\langle 10, 15, 20\rangle$	$\langle -3, 0, 3\rangle$	$\langle -12, -4, 4\rangle$
x_2	$\langle 10, 15, 20\rangle$	$\langle -12, -3, 9\rangle$	$\langle -4, 0, 4\rangle$

Tabulka 4.17: Budoucí fuzzy zisk (v %) projektů v závislosti na typu vlády



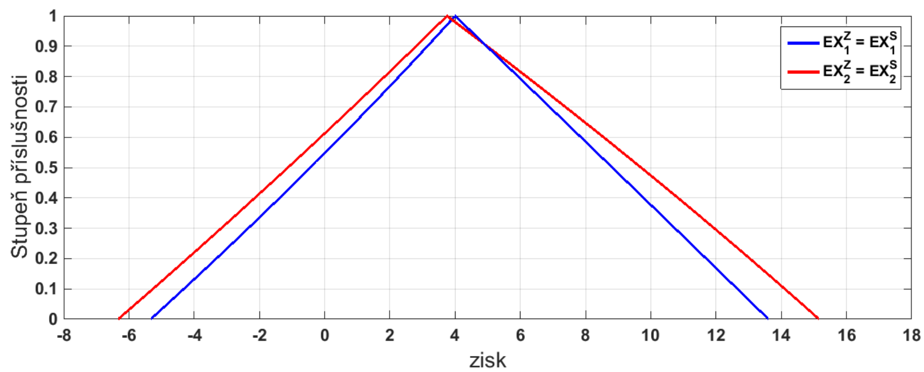
Obrázek 4.12: Fuzzy pravděpodobnosti fuzzy stavů světa

Sestrojme fuzzy náhodné veličiny X_1^S a X_2^S představující budoucí fuzzy zisky z projektů x_1 a x_2. Fuzzy výstupy z báze fuzzy pravidel odvozené z fuzzy rozhodovací matice, tj. trojúhelníková fuzzy čísla $X_1^S(\omega_1), \ldots, X_1^S(\omega_6)$ a $X_2^S(\omega_1), \ldots, X_2^S(\omega_6)$, jsou dána tabulkou 4.18.

Určeme nyní fuzzy očekávané hodnoty i fuzzy rozptyly výstupů obou projektů. Funkce příslušnosti fuzzy očekávaných hodnot, určených pomocí (4.15) *a* (4.16) *nebo* (4.20) *a* (4.21)*, a fuzzy rozptylů obou projektů, spočítané pomocí* (4.18), (4.19), (4.23) *a* (4.24)*, jsou ukázány na obrázcích 4.13 a 4.14. Jejich význačné hodnoty i těžiště jsou uvedeny v tabulce 4.19.*

	X_1^S	X_2^S
ω_1	$\langle 10, 15, 20\rangle$	$\langle 10, 15, 20\rangle$
ω_2	$\langle 7,4; 12; 16,6\rangle$	$\langle 5,6; 11,4; 17,8\rangle$
ω_3	$\langle -0,4; 3; 6,4\rangle$	$\langle -7,6; 0,6; 11,2\rangle$
ω_4	$\langle -3, 0, 3\rangle$	$\langle -12, -3, 9\rangle$
ω_5	$\langle -7,5; -2; 3,5\rangle$	$\langle -8; -1,5; 6,5\rangle$
ω_6	$\langle -12, -4, 4\rangle$	$\langle -4, 0, 4\rangle$

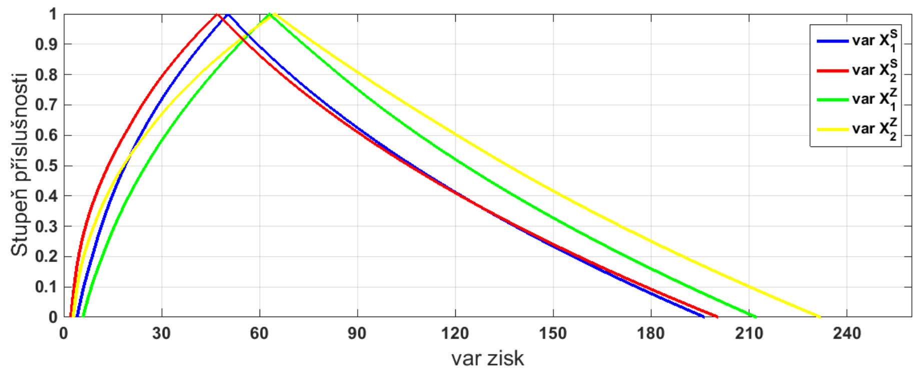
Tabulka 4.18: Výstupy ze systému bází fuzzy pravidel pro uvažované koalice



Obrázek 4.13: Fuzzy očekávané hodnoty projektů x_1 a x_2

Budeme-li rozhodovat pouze na základě těžišť fuzzy očekávaných hodnot, pak bychom měli zvolit variantu x_2. Vezmeme-li v úvahu navíc také těžiště fuzzy rozptylů uvažovaných projektů, pak na základě přístupu k fuzzy rozhodovací matici uvažujícího výpočty fuzzy pravděpodobností nejsme schopni zvolit lepší variantu, protože $cog(EX_1^Z) < cog(EX_2^Z)$ a zároveň $cog(var\, X_1^Z) < cog(var\, X_2^Z)$. Budeme--li však chápat informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici jako systém bází fuzzy pravidel, pak bychom měli zvolit variantu x_2, protože $cog(EX_1^S) < cog(EX_2^S)$ a zároveň $cog(var\, X_1^S) > cog(var\, X_2^S)$.

Příklad 4.11. *Porovnejme dvě akcie, X_1 a X_2, vzhledem k budoucímu zhodnocení jejich cen obdobně jako v předchozích příkladech se spojitou podkladovou pravděpodobnostní mírou. Uvažujme opět následující stavy ekonomiky: „velký propad ekonomiky“ (VP), „propad ekonomiky“ (P), „stagnace ekonomiky“ (S), „růst ekonomiky“ (R) a „velký růst ekonomiky“ (VR). Jejich funkce příslušnosti*



Obrázek 4.14: Fuzzy rozptyly projektů x_1 a x_2

Charakteristika	Význačné hodnoty	Těžiště
$EX_1^Z = EX_1^S$	$\langle -5,333; 4.000; 13,608 \rangle$	4,173
$EX_2^Z = EX_2^S$	$\langle -6.333; 3.750; 15,158 \rangle$	4,328
$var\ X_1^Z$	$\langle 5,889; 63.000; 212,250 \rangle$	85,742
$var\ X_2^Z$	$\langle 2,854; 64.068; 232,000 \rangle$	90,029
$var\ X_1^S$	$\langle 4,126; 50.333; 196,454 \rangle$	75,605
$var\ X_2^S$	$\langle 2,198; 47.033; 200,850 \rangle$	73,767

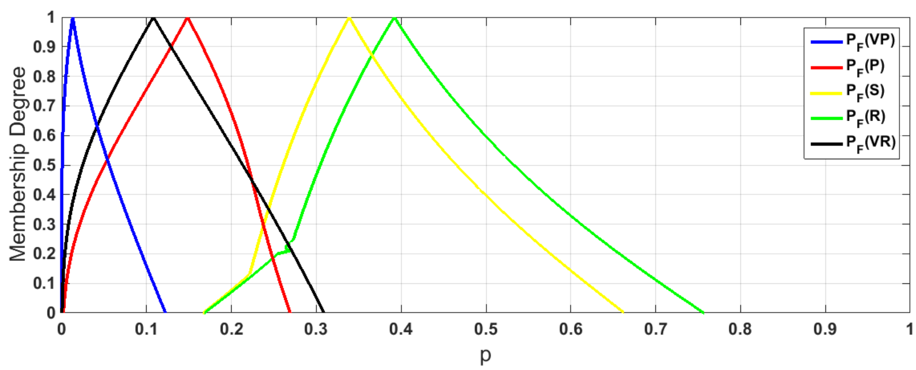
Tabulka 4.19: Výsledné fuzzy charakteristiky

stále tvoří fuzzy rozklad univerza a jsou zobrazeny na obrázku 4.5. Dále uvažujme, že fuzzy stavy světa závisí pouze na vývoji HDP a že předpověď vývoje růstu/poklesu HDP (v %) na příští rok ukazuje normálně rozdělený růst HDP s fuzzy střední hodnotou $\mu_F = \langle 0, 1, 2 \rangle$ a fuzzy směrodatnou odchylkou $\sigma_F = \langle 1, 2, 3 \rangle$. Dále uvažujme expertně stanovené budoucí hodnoty akcií vyjádřené lichoběžníkovými fuzzy čísly, jejichž význačné hodnoty jsou dané tabulkou 4.20. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobností fuzzy stavů světa jsou vyobrazeny na obrázku 4.15.

	VP $P_F(VP)$	P $P_F(P)$	S $P_F(S)$	R $P_F(R)$	VR $P_F(VR)$
x_1	$\langle -50, -37, -31, -27 \rangle$	$\langle -24, -17, -10, -5 \rangle$	$\langle -5, -3, 3, 8 \rangle$	$\langle 5, 12, 17, 24 \rangle$	$\langle 20, 27, 34, 43 \rangle$
x_2	$\langle -45, -40, -32, -25 \rangle$	$\langle -22, -20, -11, 5 \rangle$	$\langle -5, -3, 3, 6 \rangle$	$\langle 0, 12, 16, 17 \rangle$	$\langle 20, 26, 33, 52 \rangle$

Tabulka 4.20: Rozhodovací matice obsahující budoucí zhodnocení cen akcií (v %)

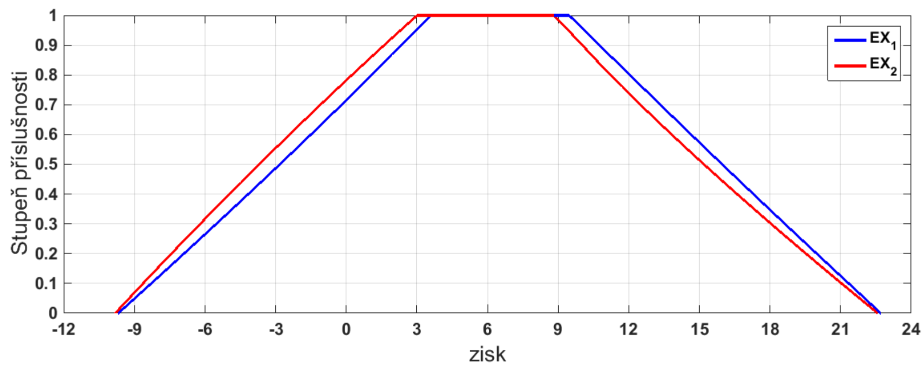
Funkce příslušnosti fuzzy očekávaných hodnot a fuzzy rozptylů jsou na obrázcích 4.16 a 4.17. Jejich význačné hodnoty i těžiště jsou dány tabulkou 4.21. Na základě *maximalizace těžiště fuzzy očekávané hodnoty bychom měli vybrat akcii* X_1. *Budeme-li navíc uvažovat i rozptyly, pak bychom na základě maximalizace těžiště fuzzy očekávané hodnoty a minimalizace těžiště fuzzy rozptylu počítaného s fuzzifikovanými Zadehovými pravděpodobnostmi měli zvolit také akcii* X_1, *jelikož* $cog(EX_1) > cog(EX_2)$ *a zároveň* $cog(var\,X_1^Z) < cog(var\,X_2^Z)$. *Budeme-li chápat informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici jako systém bází fuzzy pravidel, pak nejsme na základě maximalizace těžiště fuzzy očekávané hodnoty a minimalizace těžiště fuzzy rozptylu bohužel schopni vybrat lepší akcii, protože* $cog(EX_1) > cog(EX_2)$ *a zároveň* $cog(var\,X_1^S) > cog(var\,X_2^S)$.



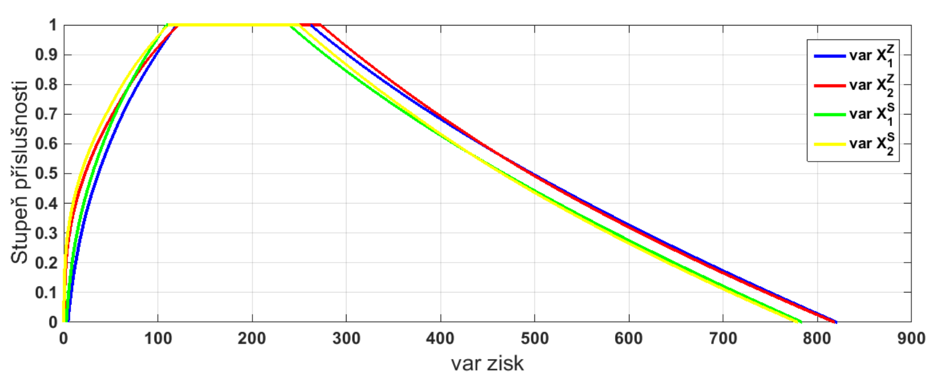
Obrázek 4.15: Fuzzy pravděpodobnosti fuzzy stavů světa

Charakteristika	Význačné hodnoty	Těžiště
EX_1	$\langle -9,660; 3,604; 9,468; 22,700 \rangle$	6,527
EX_2	$\langle -9,789; 3,013; 8,807; 22,571 \rangle$	6,206
$var\ X_1^Z$	$\langle 4,501; 119,931; 261,842; 819,560 \rangle$	327,384
$var\ X_2^Z$	$\langle 0,330; 121,699; 272,581; 818,021 \rangle$	327,487
$var\ X_1^S$	$\langle 2,786; 109,210; 239,171; 782,786 \rangle$	309,514
$var\ X_2^S$	$\langle 0,166; 110,876; 249,322; 778,719 \rangle$	309,126

Tabulka 4.21: Výsledné fuzzy charakteristiky



Obrázek 4.16: Fuzzy očekávané hodnoty



Obrázek 4.17: Fuzzy rozptyly

Závěr

Disertační práce byla zaměřena na problematiku fuzzy pravděpodobnostních prostorů a jejich aplikace v rozhodování za rizika. Práce byla složena ze dvou hlavních částí, a to teoretické a aplikační.

V teoretické části byly nejprve popsány potřebné pojmy a operace z teorie fuzzy množin. Poté následovala nejvýznamnější kapitola práce věnovaná fuzzy pravděpodobnostním prostorům. Známý ostrý pravděpodobnostního prostor byl postupně fuzzifikován, při čemž vznikaly případy fuzzy pravděpodobnostních prostorů, které byly dále studovány. Na pravděpodobnostním prostoru se σ-algebrou fuzzy jevů a ostrou pravděpodobnostní mírou byly studovány čtyři možné způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů, a to dle Zadeha [70], Yagera [61], Klementa [25] a Yagera [62]. Bylo zjištěno, že Zadehovy pravděpodobnosti splňují všechny vlastnosti pravděpodobnostní míry, ale mají problematickou interpretaci. Interpretace pravděpodobností dle Yagera [61] je bezproblémová, ale obtížně se s nimi počítá a nesplňují jednu fuzzifikovanou vlastnost pravděpodobnostní míry, která je od ní očekávána. Poslední dva způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů nemají potřebné vlastnosti pravděpodobnostní míry a i jejich interpretace je obtížná.

K tvorbě pravděpodobnostního prostoru s fuzzy pravděpodobnostní mírou byla tato fuzzy pravděpodobnostní míra nově definována. Představuje ji fuzzy množina ostrých pravděpodobnostních měr, která je normální a jejíž α-řezy jsou konvexní a uzavřené množiny pravděpodobnostních měr. Výpočty fuzzy pravděpodobností ostrých jevů byly ilustrovány na příkladech.

Na pravděpodobnostním prostoru se σ-algebrou fuzzy jevů a fuzzy pravděpodobnostní mírou byly rozšířeny Zadehovy pravděpodobnosti fuzzy jevů na případ fuzzy pravděpodobnostní míry a zkoumány jejich vlastnosti. Bylo dokázáno, že splňují požadované fuzzifikované vlastnosti pravděpodobnostní míry. Jejich problematická interpretace však zůstala zachována.

V závěru teoretické části byla popsána ještě fuzzy náhodná veličina a obecné vzorce pro výpočet její fuzzy očekávané hodnoty a jejího fuzzy rozptylu.

Aplikační část práce byla zaměřena na využití popsaných fuzzy pravděpodobnostních prostorů v jednom rozhodovacím nástroji pro podporu rozhodování za rizika, a to v rozhodovací matici. Nejprve byla popsána rozhodovací matice, v níž bylo vše ostré. Poté byly v rozhodovací matici uvažovány expertně zadané fuzzy pravděpodobnosti fuzzy stavů světa, kdy se očekávaná hodnota důsledků variant počítá pomocí fuzzy váženého průměru. Rozptyl se počítá na základě principu rozšíření, ale vzorec musí brát v potaz vzájemné interakce mezi důsledky konkrétní varianty a jejich očekávanou hodnotou. Následně byly fuzzifikovány stavy světa.

Byly popsány dva možné přístupy k řešení rozhodovací matice s fuzzy stavy světa. První přístup spočíval ve výpočtech pravděpodobností fuzzy jevů na základě uvažované podkladové pravděpodobnostní míry. Byly uvažovány pravděpodobnosti fuzzy jevů dle Zadeha [70] a Yagera [61], ale použití ani jedněch z nich není bezproblémové. Druhý přístup k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa také uvažoval danou podkladovou pravděpodobnostní míru. Informace obsažené v rozhodovací matici však chápal jako systém bází fuzzy pravidel.

Na závěr byla uvažována rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou, tj. fuzzy rozhodovací matice. Byly popsány dva možné přístupy k jejímu řešení. Prvním přístup byl založen na výpočtu Zadehových pravděpodobností fuzzy stavů světa rozšířených na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Druhý přístup opět chápal informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici jako systém bází fuzzy pravidel, jejichž výstupy představují fuzzy náhodné veličiny. Oba přístupy k fuzzy rozhodovací matici byly vzájemně porovnány. Bylo dokázáno, že očekávané hodnoty fuzzy náhodných veličin získané pomocí obou přístupů se shodují, zatímco rozptyl výstupů z báze fuzzy pravidel je vždy menší nebo roven rozptylu důsledků dané varianty počítanému pomocí Zadehovvých pravděpodobností fuzzy stavů světa rozšířených na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Proto volba přístupu k fuzzy rozhodovací matici může ovlivnit uspořádání variant, což bylo ilustrováno na příkladech.

Literatura

[1] Abellán, J., Gómez, J.: *Measures of divergence on credal sets.* Fuzzy Sets and Systems **11/157** (2006), s. 1514–1531.

[2] Abellán, J., Moral, S.: *Upper entropy of credal sets. Applications to credal classification.* International Journal of Approximate Reasoning **2–3/39** (2005), s. 235–255.

[3] Athreya, K.B., Lahiri, S.N.: *Measure Theory and Probability Theory.* Springer, New York, 2006.

[4] Baudrit, C., Couso, I., Dubois, D.: Joint propagation of probability and possibility in risk analysis: Towards a formal framework. Int. J. Approx. Reason. **45** (2007), s. 82–105.

[5] Beer, M.: *Fuzzy Probability Theory.* In: Encyclopedia of Complexity and System Science. Springer, 2009, s. 4047–4059.

[6] Buckley, J. J.: *Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications.* Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

[7] Buckley, J. J.: *Simulating Fuzzy Systems.* Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

[8] Campos, L. D. a kol.: *P*robability intervals - a tool of uncertain reasoning. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems **2** (1994), s. 167–196.

[9] Cantor, G.: *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **77** (1874), s. 258–262.

[10] Chankong, V., Haimes, Y.Y.: *Multiobjective decision making: theory and methodology.* Elsevier Science B.V., New York, 1983.

[11] Cozman, F.G.: *Separation Properties of Sets of Probability Measures* in Proceedings of the Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence 2000, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2000, s. 107–114.

[12] Durrett, R.: *Probability: Theory and Examples (4. vydání)*. Cambridge University Press, New York, 2010.

[13] Dubois, D., Prade, H: *Fundamentals of fuzzy sets (1. vydání)*. Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 2000.

[14] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (3. vydání)*. John Wiley & Sons, New York, 1968.

[15] Fotr, J. a kol.: *Manažerské rozhodování: postupy, metody, nástroje (1. vydání)*. Ekopress, Praha, 2006.

[16] Ganoulis, J.: *Engineering Risk Analysis of Water Pollution: Probabilities and Fuzzy Sets (2. vydání)*. John Wiley & Sons, 2008.

[17] Halmos, P.R.: *Measure Theory*. Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1974.

[18] Hesamian, G., Shams, M.: *A Note on Fuzzy Probability of a Fuzzy Event*. International Journal of Intelligent Systems **7/22** (2016), s. 676–685.

[19] Hisdal, E.: *Are grades of membership probabilities?* Fuzzy Sets and Systems **3/25** (1988), s. 325–348.

[20] Höhle, U.: *Maße auf unscharfen Mengen*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **3/36** (1976), s. 179–188.

[21] Huynh, V. a kol.: *A Fuzzy Target Based Model for Decision Making Under Uncertainty*. Fuzzy Optimization and Decision Making **3/6** (2007), 255–278.

[22] Jaynes, E.T., Bretthorst, G.L.: *Probability Theory: The Logic of Science (1. vydání)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[23] Karlsson, A.: *Evaluating Credal Set Theory as a Belief Fremework in High-Level Information Fusion for Automated Decision-Making*. Örebro University, Örebro, 2010.

[24] Klement, E.P.: *Characterization of finite fuzzy measure using Markoff-kernels*. J. Math. Anal Appl. **75** (1980), s. 330–339.

[25] Klement, E.P.: *Some remarks on a paper of R.R. Yager*. Inf. Sci. **27** (1982), s. 211–220.

[26] Klement, E.P.: *Characterization of Fuzzy Measures Constructed by Means of Triangular Norms*. Journal of Methematical Analysis and Applications **86** (1982), s. 345–358.

[27] Klir, G.J., Yuan, B: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications (1. vydání)*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 2005.

[28] Knill, O.: *Probability and Stochastic Processes with Applications (1. vydání)*. Overseas Press, Daryagan (India), 2009.

[29] Kolmogorov, A.N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1. vydání)*. Julius Springer, Berlin, 1933.

[30] Kunderová, P.: *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky (2. vydání)*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2004.

[31] Li, W. a kol: *Fuzzy probability measures (FPM) based non-symmetric membership function: Engineering examples of ground subsidence due to underground mining*. Engineering Applications of Artificial Intelligence **3/23** (2010), s. 420–431.

[32] Loeb, P.A.: *Conversion from Nonstandard to Standard Measure Spaces and Applications in Probability Theory*. Transactions of the American Mathematical Society **11** (1973), s. 113–122.

[33] Mesiar, R.: *Fuzzy sets and probability theory*. Tatra Mountains Math. Publ. **1** (1992), s. 105–123.

[34] Mesiar, R.: *Symetric fuzzy probability measures and the Bayes formula*. BUSEFAL **34** (1988), s. 44–50.

[35] Montes, I. a kol.: *Characterization of continuous t-norms compatible with Zadeh's probability of fuzzy events*. Fuzzy Sets Syst **228** (2013), s. 29–43.

[36] Negoita, C.V., Ralescu, D.: *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis (1. vydání)*. Birkhäuser Verlag–Edituria Technica, Stuttgart, 1975.

[37] Neveu, J.: *Note on the Tightness of the Metric on the Set of Complete sub σ-algebra of a Probability Space*. The Annals of Marhematical Statistics **4/43** (1972), s. 1369–1371.

[38] Okuda, T., Tanaka, H., Asai, K.: *Formulation of fuzzy decision problems with fuzzy information using probability of fuzzy events*. Inform. Control **2/38** (1978), s. 135–147.

[39] Özkan,I., Türken, I.B.: *Uncertainty and fuzzy decisions* in Chaos Theory in Politics, Springer Netherlands, 2014, s. 17–27.

[40] Pavlačka, O.: *Fuzzy metody rozhodování*, Disertační práce, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2007.

[41] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices in Case of a Discrete Underlying Fuzzy Probability Measure* in Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Springer International Publishing, 2018, s. 129–137.

[42] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices Viewed as Fuzzy Rule-Based Systems* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 641–644.

[43] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Probability of fuzzy events* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 760–765.

[44] Piasecki, K.: *Extension of fuzzy P-measure*. BUSEFAL **05** (1984).

[45] Piasecki, K.: *On one relationship between classical probability measure and fuzzy P-measure*. BUSEFAL **07** (1985).

[46] Piasecki, K.: *Probability of fuzzy events defined on denumerable additive measure*. Fuzzy Sets Syst **3/17** (1985), s. 271–284.

[47] Ramík, J., Vlach, M.: *Generalized Concavity in Fuzzy Optimization And Decision Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2002.

[48] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Comparison of Stocks using a Fuzzy Decision Matrix* in Knowledge for Market Use 2017: People In Enomics – Decisions, Behavior and Normative Models, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2017, s. 165–172.

[49] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Computing Fuzzy Variances of Evaluations of Alternatives in Fuzzy Decision Matrices* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 735–740.

[50] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Decision matrices under risk with fuzzy states of the world and underlying discrete fuzzy probability measure* in MME2017: Conference Proceedings, University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic, 2017, s. 626–631.

[51] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *New Approach to Fuzzy Decision Matrices*. Acta Polytechnica Hungarica **5/14** (2017), s. 85–102.

[52] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Probability of Fuzzy Events and Their Use in Decision Matrices*. Int. J. Mathematics in Operational Research **4/9** (2016), s. 423–435.

[53] Sibiladze, G. a kol.: *Associated Probabilities of a Fuzzy Measure in the Aggregations of Fuzzy Probabilistic Mean Operators*. Computer Science & Telecommunications **1/45** (2015), s. 93–123.

[54] Smets, P.: *Probability of fuzzy events: an axiomatic approach*. Fuzzy Sets and Systems **7** (1982), s. 153–164.

[55] Sugeno, M.: *Industrial applications of fuzzy control*. Elsevier Science Pub. Co., New York, 1985.

[56] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*. Univerzita Palackého, Olomouc, 2003.

[57] Talašová, J., Pavlačka, O.: *Fuzzy Probability Spaces and Their Applications in Decision Making*. Austrian Journal of Statistics **2&3/35** (2006), s. 347–356.

[58] Vejnarová, J.: *Operator of Composition for Credal Sets* in 8th International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications, France, 2013, s. 335–364.

[59] Viertl, R.: *Statistical Methods for Fuzzy Data (1. vydání)*. Wiley, Chichester, 2011.

[60] Xia, Z.: *Fuzzy probability system: fuzzy probability space (1)*. Fuzzy sets and systems **120** (2001), s. 469–486.

[61] Yager, R.R.: *A note on probabilities of fuzzy events*. Information Sciences **2/18** (1979), s. 113–129.

[62] Yager, R.R.: *A representation of the probability of a fuzzy subset*. Fuzzy Sets Syst **3/13** (1984), s. 273–283.

[63] Yamada, T.: *On a comparizon theorem for solutions of stochastic differentials equations and its applications*. Kyoto Journal of Mathemmatics **3/13** (1973), s. 497–512.

[64] Yang, J., Singh, M.G.: *An Evidential Reasoning Approach for Multiple-Attribute Decision Making with Uncertainty*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **1/24** (1994), s. 1–18.

[65] Yoon, K.P., Hwang, Ch.: *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction (1. vydání)*. SAGE Publications, California, 1995.

[66] Yu, D. a kol.: *Uncertainty measures for fuzzy relations and their applications*. Appl. Soft Comput. **7** (2007), s. 1135–1143.

[67] Zadeh, L.A.: *A note on similarity-based definitions of possibility and probability*. Inf. Sci. **267** (2014), s. 334–336.

[68] Zadeh, L.A.: *Fuzzy Probabilities*. Information Processing & Management **2/20** (1984), s. 363–372.

[69] Zadeh, L.A.: *Fuzzy Sets*. Information and Control **3/8** (1965), s. 338–353.

[70] Zadeh, L.A.: *Probability Measures of Fuzzy Events*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **2/23** (1968), s. 421–427.

[71] Zadeh, L.A.: *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I*. Imformation Sciences **3/8** (1975), s. 199–249.

[72] Zadeh, L.A.: *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II*. Information Sciences **4/8** (1975), s. 301–357.

[73] Zadeh, L.A.: *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—III*. Information Sciences **1/9** (1975), s. 43–80.

Životopis

Osobní údaje

Jméno a příjmení	**Mgr. Pavla Rotterová**
Rodné příjmení	Melicheríková
Datum narození	5. 12. 1988
E-mail	pavla.melich@gmail.com

Vzdělání

2013 - dosud	Doktorský studijní obor Aplikovaná matematika Disertační práce Fuzzy pravděpodobnostní prostory Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta
2011 - 2013	Magisterský studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii Diplomová práce Využití matematických modelů ve strojírenském podniku se zaměřením na tepelné elektrárny a skládkové hospodářství Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta
2009 - 2011	Bakalářský studijní obor Ekonomika a procesní management Návrh optimalizace procesů komplexní obnovy elektráren Vysoké učení technické v Brně, Podnikatelská fakulta

Výzkumná stáž

03/2014 - 05/2014	Výzkumná stáž zaměřená na fuzzy pravděpodobnostní prostory Technická univerzita ve Vídni, Ústav statistiky a matematických metod v ekonomii

Publikační činnost

2018

Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices in Case of a Discrete Underlying Fuzzy Probability Measure* in Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Springer International Publishing, 2018, s. 129–137.

2017

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *New Approach to Fuzzy Decision Matrices*. Acta Polytechnica Hungarica **5/14** (2017), s. 85–102.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Decision matrices under risk with fuzzy states of the world and underlying discrete fuzzy probability measure* in MME2017: Conference Proceedings, University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic, 2017, s. 626–631.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Comparison of Stocks using a Fuzzy Decision Matrix* in Knowledge for Market Use 2017: People In Enomics – Decisions, Behavior and Normative Models, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2017, s. 165–172.

2016

Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices Viewed as Fuzzy Rule-Based Systems* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 641–644.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Computing Fuzzy Variances of Evaluations of Alternatives in Fuzzy Decision Matrices* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 735–740.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Probability of Fuzzy Events and Their Use in Decision Matrices*. Int. J. Mathematics in Operational Research **4/9** (2016), s. 423–435.

2015	Pavlačka, O., Rotterová, P., Nevidal, O.: *Problems Connected with Applying VaR for Computing Solvency Capital Requirement in Insurance Companies* in MME2015: Conference Proceedings, University of West Bohemia, Plzeň, Czech Republic, 2015, s. 612–617.
2014	Melicheríková, P.: *A Cost-based Model for Support of Decision-making about a Spare-parts Storage* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 649–654.
	Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Probability of fuzzy events* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 760–765.

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

AUTOREFERÁT DISERTAČNÍ PRÁCE

Fuzzy pravděpodobnostní prostory

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí disertační práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracovala: **Mgr. Pavla Rotterová**
Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika
Studijní obor: 1103V004 Aplikovaná matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2018

Výsledky obsažené v disertační práci byly získány během doktorského studia oboru Aplikovaná matematika na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Uchazeč: **Mgr. Pavla Rotterová**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Školitel: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Oponenti: **doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**
Úsek pro strategické plánování a kvalitu
Rektorát
Univerzita Palackého v Olomouci

doc. RNDr. Michal Holčapek, Ph.D.
Oddělení teoretického výzkumu
Ústav pro výzkum a aplikace fuzzy modelování
Ostravská univerzita

Autoreferát byl rozeslán dne ....

Obhajoba disertační práce se koná dne .... v .... hod. před komisí pro obhajobu disertační práce doktorského studijního oboru Aplikovaná matematika v učebně .... v budově PřF UP na třídě 17. listopadu v Olomouci.

S disertační prací je možno se seznámit na studijním oddělení Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci.

Obsah

Abstrakt

V ekonomické praxi je náhodný jev mnohdy vágně vymezen jako např. vysoká míra inflace. Takové neurčité jevy je vhodné modelovat pomocí fuzzy množin. Nejprve je tedy předložená disertační práce zaměřena na rozšíření pravděpodobnostního prostoru na případ fuzzy jevů. Zejména je studována problematika vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů, kde jsou nejprve zkoumány případy využívající ostrou pravděpodobnostní míru. V této kategorii je porovnána nejznámější pravděpodobnostní míra, která vyjadřuje pravděpodobnost fuzzy jevu pomocí reálného čísla, s tzv. fuzzy pravděpodobnostmi - fuzzy množinami, jejichž funkce příslušnosti je nějakým způsobem odvozena z pravděpodobností α-řezů fuzzy jevů. Následuje definice fuzzy pravděpodobnostní míry. Pravděpodobnosti fuzzy jevů jsou poté rozšířeny na případ fuzzy pravděpodobnostní míry a jsou zanalyzovány jejich vlastnosti. V rámci aplikací těchto pravděpodobností v teorii rozhodování za rizika je práce zaměřena na aparát rozhodovací matice. Její prvky vyjadřují důsledky daných variant za daných stavů světa. Varianty jsou poté porovnávány na základě jejich očekávaných hodnot a rozptylů. Následně jsou uvažovány fuzzy stavy světa a popsány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa. Mezi nimi je popsán také pohled na rozhodovací matici, kdy jsou informace v ní obsažené chápány jako systém bází fuzzy pravidel, a ne jako běžně uvažovaný systém diskrétních náhodných veličin. Na závěr jsou uvedeny a vzájemně srovnány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Vše je ilustrováno na názorných příkladech.

Klíčová slova: Fuzzy jevy, fuzzy pravděpodobnostní míra, fuzzy pravděpodobnostní prostor, fuzzy rozhodovací matice, pravděpodobnosti fuzzy jevů.

Abstract in English

In economical practice, a random event is often vaguely defined. like e.g. a high inflation rate. It is appropriate to model such indeterminate events by means of tools of fuzzy sets theory. First, the dissertation thesis is focused on the extension of the probability space to the case of fuzzy events. Particularly, it is studied a problem how probabilities of fuzzy events can be expressed where approaches using the crisp probability measure are examined at first. In this category, the most used probability measure, which expresses probability of a fuzzy event by a real number, is compared with so-called fuzzy probabilities, whose membership functions are somehow derived from probabilities of α-cuts of fuzzy events. Then, the fuzzy probability measure is defined. After that, the probabilities of fuzzy events are extended to the case of the fuzzy probability measure and their properties are analysed. Within applications of these probabilities in the models of decision making under risk, the thesis is focused on the apparatus of a decision matrix. Its elements express results of particular alternatives under particular states of the world. Then, the alternatives are compared based on their expected values and their variances. After that, the states of the world representing fuzzy events are fuzzified and possible approaches to the decision matrix with fuzzy states of the world are described. Among them, it is also described a view of the decision matrix which understood information contained in it as a fuzzy rule-based system and not as a commonly considered system of discrete random variables. At the end, two possible approaches to the decision matrix with fuzzy states of the world, fuzzy results of alternatives, and underlying fuzzy probability measure are described and compared. Everything is illustrated in examples.

Key words: Fuzzy events, fuzzy probability measure, fuzzy probability space, fuzzy decision matrix, probabilities of fuzzy events.

1. Úvod

Obsahem předkládané disertační práce jsou fuzzy pravděpodobnostní prostory a jejich aplikace v rozhodování za rizika. Práce je tedy složena ze dvou hlavních částí, a to teoretické a aplikační.

V teoretické části jsou nejprve popsány potřebné základní pojmy z teorie fuzzy množin. Poté je známý ostrý pravděpodobnostní prostor postupně fuzzifikován, při čemž vznikají případy fuzzy pravděpodobnostního prostoru, které jsou dále studovány. Na těchto pravděpodobnostních prostorech jsou zkoumány možné způsoby vyjádření pravděpodobností neurčitě popsaných, tj. fuzzy, jevů. Je analyzováno, zda zachovávají požadované vlastnosti pravděpodobnostní míry, a studována vhodnost jejich interpretace. V závěru teoretické části je ještě popsána fuzzy náhodná veličina.

Aplikační část práce je zaměřena na využití popsaných fuzzy pravděpodobnostních prostorů v rozhodovacím nástroji za rizika zvaném rozhodovací matice. Rozhodovací matice popisuje, jak důsledky srovnávaných variant závisí na skutečnosti, který z možných stavů světa nastane. Nejprve je popsána rozhodovací matice, v níž je vše ostré. Následně jsou zfuzzifikovány stavy světa a studovány možné přístupy k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa. Nakonec je v aplikační části práce uvažována tzv. fuzzy rozhodovací matice, tj. rozhodovací matice s fuzzy stavy světa, fuzzy důsledky variant a podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou. Jsou popsány a vzájemně srovnány dva možné přístupy k jejímu řešení, které mohou vést k odlišnému uspořádání srovnávaných variant.

2. Současný stav poznání

V práci je uvažován pravděpodobnostní prostor zavedený Kolmogorovem [30] v roce 1933. Tvoří jej množina všech elementárních jevů, množina uvažovaných náhodných jevů a pravděpodobnostní míra. Pravděpodobnostní míra je základem teorie pravděpodobnosti, kterou se zabývá mnoho publikací, např. [11, 17, 19, 24, 29].

Teorie fuzzy množin, za jejíž pomoci bude v pravděpodobnostním prostoru modelována neurčitost, byla představena Zadehem [54] v roce 1965. Umožňuje matematicky modelovat vágně popsané pojmy.

V praktických aplikacích mohou být vágně popsané také náhodné jevy. Jejich matematickým vyjádřením pomocí fuzzy množin se zabýval Zadeh [55]. Množina náhodných jevů byla zobecněna na případ fuzzy náhodných jevů a její vlastnosti dokázali Negoita a Ralescu [35].

Nejstarší a nejčastěji používaná pravděpodobnostní míra pro fuzzy náhodné jevy byla představena Zadehem [55]. Tato míra je použita např. v [34, 51, 52] a vyjadřuje pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu jako reálné číslo.

Yager [48] však píše, že intuitivně se jeví býti přirozené, aby pravděpodobnost fuzzy náhodného jevu byla také fuzzy. V literatuře lze tedy najít také přístupy, kdy pravděpodobností fuzzy náhodného jevu je fuzzy číslo nebo obecně jen fuzzy množina. Tyto přístupy lze rozdělit na práce zaměřené teoreticky, jako např. [26, 33, 32, 40, 38, 39, 42], a práce zaměřené na praktické aplikace jako [13, 21, 28, 44, 48, 49].

V praxi se setkáváme i s problémy, kdy nemáme dostatek informací o pravděpodobnostní míře na uvažovaném univerzu. V takových případech může být pravděpodobnostní míra modelována také za pomoci aparátu teorie fuzzy množin (viz [12, 31, 36, 44]).

V literatuře již bylo definováno také několik fuzzy pravděpodobnostních prostorů, které uvažují některou ze zmíněných pravděpodobnostních měr, anebo spíše rozebírají jejich vlastnosti. Je to studováno např. v [13, 26, 38, 42, 44, 47, 46, 53]. Avšak práce zaměřené na praktické aplikace jsou zejména [13, 44, 53].

Fuzzy pravděpodobnostní prostory, resp. fuzzy pravděpodobnostní rozdělení, lze využít také ve statistice k řešení úloh, při nichž všechny informace nejsou známy zcela přesně, např. jestliže nám při experimentu nějaké pozorování zcela chybí, anebo neznáme jeho přesnou hodnotu. Statickými metodami pro fuzzy data a odhadem fuzzy paramatrů rozdělení pravděpodobnosti z fuzzy dat se zabývá Viertl [46]. Rozšířením známých rozdělení pravděpodobnosti na případ jejich neurčitě popsaných parametrů studoval Buckley [14, 15].

Jinou oblastí, v níž fuzzy pravděpodobnostní prostory mohou nalézt uplatnění, je teorie rozhodování za rizika. Zde se využívají rozhodovací matice, které mohou být užitečným nástrojem pro podporu rozhodování také ve vágně definovaném, tj. fuzzy, prostředí. Rozhodovací matice, kterým se věnují např. v [20, 23, 37, 50], modelují situace, ve kterých důsledky možných variant rozhodnutí závisí na stavech světa, jež mohou nastat. Rozhodovacími maticemi s fuzzy prvky se zabývají např. v [44]. Využití různých agregačních operátorů v rozhodovací matici s podkladovou fuzzy pravděpodobnostní mírou a příslušnými fuzzy pravděpodobnostmi stavů světa je rozebráno v [41].

V [44] je uvažována rozhodovací matice, ve které jsou stavy světa vyjádřeny pomocí fuzzy množin na univerzu, na němž je dáno rozdělením pravděpodobnosti. Autoři navrhli v tomto případě postupovat shodně jako v případě přesně popsaných stavů světa, tj. určili pravděpodobnosti fuzzy stavů světa pomocí vzorce navrženého Zadehem v [55]. V rámci tohoto přístupu jsou důsledky variant chápány jako diskrétní náhodné veličiny nabývající fuzzy hodnot s pravděpodobnostmi uvažovaných fuzzy stavů světa.

3. Cíle disertační práce

Cíle disertační práce jsou:

1. Popsat možné způsoby fuzzifikace ostrého pravděpodobnostního prostoru na případ fuzzy jevů a fuzzy pravděpodobnostní míry.

2. Prozkoumat různé způsoby vyjádření pravděpodobnosti fuzzy jevu na základě ostré pravděpodobnostní míry a vzájemně srovnat jejich vlastnosti.

3. Navrhnout možné vyjádření pravděpodobnosti fuzzy jevu na základě fuzzy pravděpodobnostní míry a prozkoumat jeho vlastnosti.

4. Ukázat možné aplikace fuzzy pravděpodobnostních prostorů při rozhodování

za rizika. Zaměřit se na jejich využití v nástroji rozhodovací matice v několika úrovních její fuzzifikace a popsat možné přístupy k jejímu řešení. Popsané přístupy vzájemně srovnat a ilustrovat na příkladech.

4. Teoretická východiska práce

Disertační práce je založena na fuzzifikaci pravděpodobnostního prostoru, zkoumání vlastností pravděpodobností fuzzy jevů a jejich uplatnění ve fuzzifikované rozhodovací matici.

Nejprve připomeňme *pravděpodobnostní prostor* a další *vlastnosti pravděpodobnostní míry*. Kolmogorov [30] zavedl pravděpodobnostní prostor jako uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde Ω značí neprázdnou množinu všech elementárních jevů, tzv. univerzum, $\mathcal{A}$ představuje σ-algebru náhodných jevů, tj. množinu všech podmnožin Ω, a $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnostní míra, která přiřazuje každému náhodnému jevu $A \in \mathcal{A}$ jeho pravděpodobnost $P(A) \in \langle 0, 1\rangle$ splňující:

1. $P(A) \geq 0$ pro každé $A \in \mathcal{A}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. pro každou posloupnost množin $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ takovou, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1}$$

Každá pravděpodobnostní míra P má také následující další vlastnosti, které hrají důležitou roli v praktických aplikacích:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. pro každé $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$: $P(A) \leq P(B)$;
3. pro každé $A, B \in \mathcal{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
4. pro každé $A \in \mathcal{A}$: $P(A^c) = 1 - P(A)$;

5. pro každé $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ platí: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Nyní popišme základní pojmy z *teorie fuzzy množin*. Fuzzy množina A na neprázdném univerzu Ω je určena svou funkcí příslušnosti $\mu_A : \Omega \to \langle 0, 1\rangle$. Množina všech fuzzy množin na Ω bude značena $\mathcal{F}(\Omega)$. Jádrem a nosičem fuzzy množiny A, označeným $Ker\, A$ a $Supp\, A$, nazveme $Ker\, A = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) = 1\}$ a $Supp\, A = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) > 0\}$. Pro libovolné $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ představuje $A_\alpha = \{\omega \in \Omega \mid \mu_A(\omega) \geq \alpha\}$ α-řez fuzzy množiny A, přičemž je uvažováno, že $A_0 = \Omega$ a $A_1 = Ker\, A$.

Množina všech α-řezů $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \langle 0,1\rangle}$ libovolné fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ má následující vlastnosti:

$$A_\alpha \subseteq A_\beta \quad \text{pro všechna } 0 \leq \beta < \alpha \leq 1,$$

$$A_\alpha = \bigcap_{0 \leq \beta < \alpha} A_\beta \quad \text{pro všechna } 0 < \alpha \leq 1,$$

$$Supp\, A = \bigcup_{\alpha \in (0,1\rangle} A_\alpha.$$

Fuzzy množina může být také zavedena pomocí systému svých α-řezů $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \langle 0,1\rangle}$, který splňuje právě uvedené vlastnosti.

Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je speciálním případem fuzzy množiny, jejíž funkce příslušnosti μ_A se v takovém případě schoduje s charakteristickou funkcí χ_A množiny A. Pro množinu $A \in A$ platí, že $Supp\, A = A$ a $A_\alpha = A$ pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$.

Řekneme, že fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ je podmnožinou fuzzy množiny $B \in \mathcal{F}(\Omega)$, značíme $A \subseteq B$, pokud $\mu_A(\omega) \leq \mu_B(\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$.

Průnik a sjednocení dvou fuzzy množin $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$ definujme jako fuzzy množiny $A \cap B \in \mathcal{F}(\Omega)$ a $A \cup B \in \mathcal{F}(\Omega)$. Jejich funkce příslušnosti jsou pro každé $\omega \in \Omega$ dány $\mu_{A \cap B}(\omega) = \min\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\}$ a $\mu_{A \cup B}(\omega) = \max\{\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)\}$.

Doplněk fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(\Omega)$ představuje fuzzy množina $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}(\Omega)$, jejíž funkce příslušnosti je pro libovolné $\omega \in \Omega$ dána $\mu_{A^{\mathsf{c}}}(\omega) = 1 - \mu_A(\omega)$.

Fuzzy rozklad neprázdné množiny Ω je tvořen konečným počtem fuzzy množin $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{F}(\Omega)$, které pro každé $\omega \in \Omega$ splňují $\sum_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(\omega) = 1$.

Fuzzy číslem nazveme fuzzy množinu $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, jejíž jádro je neprázdné, jejíž α-řezy jsou uzavřené intervaly pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ a jejíž nosič je omezený. Množina všech fuzzy čísel na reálné přímce bude značena $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Množina všech fuzzy čísel, jejichž nosič je podmnožinou intervalu $\langle a, b\rangle$, bude značena $\mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$.

Popišme také *rozhodovací matici*, která je základem aplikační část práce. Rozhodovací matice prezentuje, jak závisí důsledky srovnávaných variant na možných stavech světa, a je obvykle dána tabulkou 1. Varianty, mezi nimiž rozhodovatel vybírá, jsou označeny $x_1, \ldots, x_n$. $S_1, \ldots, S_m$, kde $S_j \in \mathcal{A}$ pro $j = 1, \ldots, m$, zastupují vzájemně disjunktní stavy světa (tj. $S_j \cap S_k = \emptyset$ pro jakákoli $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$). $p_1, \ldots, p_m$ představují pravděpodobnosti stavů věta $S_1, \ldots, S_m$, tj. $p_j = P(S_j)$. Pro jakékoli $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ vyjadřuje $h_{i,j}$ důsledek dané varianty x_i za daného stavu světa S_j.

	S_1 p_1	S_2 p_2	$\cdots$ $\cdots$	S_m p_m	EH_i	$var\, H_i$
x_1	$h_{1,1}$	$h_{1,2}$	$\cdots$	$h_{1,m}$	EH_1	$var\, H_1$
x_2	$h_{2,1}$	$h_{2,2}$	$\cdots$	$h_{2,m}$	EH_2	$var\, H_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$h_{n,1}$	$h_{n,2}$	$\cdots$	$h_{n,m}$	EH_n	$var\, H_n$

Tabulka 1: Rozhodovací matice

Důsledek dané varianty x_i za daných stavů světa S_j, $j = 1, \ldots, m$, představuje diskrétní náhodnou veličinu $H_i : \{S_1, \ldots, S_m\} \to \mathbb{R}$, která nabývá hodnot $h_{i,j} = H_i(S_j)$ s pravděpodobnostmi p_j, $j = 1, \ldots, m$.

Varianty se obvykle uspořádávají na základě jejich *očekávaných důsledků* EH_i, $i = 1, \ldots, n$, a *rozptylů* jejich *důsledků* $var\, H_i$, $i = 1, \ldots, n$, počítaných

$$EH_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot h_{i,j},$$

$$var\, H_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (h_{i,j} - EH_i)^2 .$$

Nejlepší varianta je následně vybrána na základě nějakého rozhodovacího pravidla.

5. Popis vlastního řešení a původní výsledky

5.1. Fuzzy pravděpodobnostní prostory

V této části jsou popsány tři případy fuzzy pravděpodobnostního prostoru, a to pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou fuzzy jevů, pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou a pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou fuzzy jevů a fuzzy pravděpodobnostní mírou, tzv. fuzzy pravděpodobnostní prostor. Jsou zde uvedeny také možné způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů, které byly v disertační práci zkoumány. Část popsaných výsledků byla publikována v [3, 8].

5.1.1. Pravděpodobnostní prostor se σ-algebrou fuzzy jevů

Nejprve zavedeme pojem fuzzy jev dle [55] a také σ-algebru fuzzy jevů, kterou dle [35] tvoří všechny fuzzy jevy na Ω. Poté popíšeme fuzzy pravděpodobnostní prostory se σ-algebrou fuzzy jevů.

Definice 5.1. Fuzzy jevem *nazveme fuzzy množinu* $A \in \mathcal{F}(\Omega)$*, jejíž funkce příslušnosti je* $\mathcal{A}$*-měřitelná, tj.* $A_\alpha \in \mathcal{A}$ *pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$*.*

Definice 5.2. σ-algebra $\mathcal{A}_F$ fuzzy jevů *představuje neprázdnou třídu fuzzy množin, pro které platí:*

1. *pro každé* $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}_F$*:* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_F$*,*
2. *pro každé* $A \in \mathcal{A}_F$*:* $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}_F$*,*
3. $\Omega \in \mathcal{A}_F$*.*

Nyní se dostáváme k pravděpodobnostnímu prostoru se σ-algebrou fuzzy jevů. Naším cílem je zkonstruovat uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{\mathcal{A}_F})$, kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, $\mathcal{A}_F$ značí σ-algebru fuzzy jevů a $P_{\mathcal{A}_F}$ představuje rozšíření pravděpodobnostní míry P na případ fuzzy jevů.

Pravděpodobnostní míru P lze na případ fuzzy jevů rozšířit různými způsoby. Dále nejprve popíšeme způsob, kdy je pravděpodobnost nějakého fuzzy jevu vyjádřena reálným číslem. Následně uvedeme tři způsoby výpočtů pravděpodobností fuzzy jevů vyjádřených pomocí fuzzy množin.

Způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů byly zkoumány z následujících dvou hledisek:

1. Matematické vlastnosti pravděpodobnostní míry P popsané v Teoretických východiscích práce by měly být nějakým způsobem zachovány i v případě fuzzy jevů.

2. Interpretace pravděpodobnosti ostrého jevu by měla nějakým způsobem zůstat zachována i v případě fuzzy jevů.

Zadeh [55] definoval pravděpodobnost $P_Z(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$ jako očekávanou hodnotu jeho funkce příslušnosti μ_A, tj. pomocí Lebesgueova-Stieltjesova integrálu

$$P_Z(A) = E(\mu_A) = \int_{\omega \in \Omega} \mu_A(\omega) dP. \tag{2}$$

Ze vzorce (2) je zřejmé, že $P_Z : \mathcal{A}_F \to \langle 0, 1 \rangle$. Navíc v [35] je ukázáno, že P_Z splňuje také potřebné axiomy pravděpodobnostní míry, tj. $P_Z(\Omega) = 1$ a pro každé $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, platí: $P_Z\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_Z(A_i)$. Zaveďme tedy příslušný pravděpodobnostní prostor.

Definice 5.3. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu elementárních jevů a $\mathcal{A}_F$ představuje σ-algebru fuzzy jevů. Pak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_Z)$, kde P_Z je dána vzorcem (2), nazveme* fuzzy pravděpodobnostním prostorem se Zadehovou pravděpodobnostní mírou.

Pravděpodobnostní míra P_Z splňuje také další vlastnosti pravděpodobnostní míry, jak tvrdí následující věta.

Věta 5.1. *Pro pravděpodobnostní míru P_Z platí:*

1. $P_Z(\emptyset) = 0$;
2. *pokud* $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, *pak* $P_Z(A) \leq P_Z(B)$;
3. *pro každé* $A, B \in \mathcal{A}_F$: $P_Z(A \cup B) = P_Z(A) + P_Z(B) - P_Z(A \cap B)$;
4. *pro každé* $A \in \mathcal{A}_F : P_Z(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P_Z(A)$;
5. *pokud* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_F$ *tvoří fuzzy rozklad* Ω, *tj.* $\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(\omega) = 1$ *pro každé* $\omega \in \Omega$, *pak*
$$\sum_{i=1}^{n} P_Z(A_i) = 1.$$

Můžeme tedy vidět, že z matematického hlediska představuje zobrazení P_Z dané pomocí vzorce (2) korektní rozšíření pravděpodobnostní míry P. Toto je pravděpodobně důvod, proč se jedná o v odborné literatuře nejrozšířenější způsob vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů. Vyvstává však otázka, zda pro fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$, který není ostrý, hodnota $P_Z(A)$ představuje jeho pravděpodobnost tak, jak je běžně chápána. Tento problém bude nyní rozebrán podrobněji

Uvažujme vágně popsaný jev „úroková míra bude nízká“ matematicky popsaný fuzzy množinou A. Pokud $P_Z(A) = 0,5$, pak můžeme v budoucnu očekávat úrokovou míru i % p.a. takovou, že $\mu_A(i) = 0,5$, tj. očekávaný stupeň, v jakém i odpovídá termu „malá“, je roven $0,5$. Jedná se tedy o odlišný význam, než má běžná interpretace pravděpodobnosti ostrého jevu, tj. míra šance, s níž uvažovaný jev nastane v budoucnosti. Vůbec se totiž takové šance netýká. Pokud ve skutečnosti v budoucnu nastane úroková míra i^* % p.a. taková, že $\mu_A(i^*) \in (0,1)$, nebudeme schopni dokonce ani jednoznačně rozhodnout, zda jev A nastal nebo nenastal, tedy zda úroková míra i je nebo není „malá“. Jediným případem, kdy by hodnota $P_Z(A)$ mohla mít stejný význam jako pravděpodobnost ostrého jevu, je ten, kdy stupeň příslušnosti $\mu_A(u)$ je interpretován jako pravděpodobnost, že prvek u náleží jevu A. Takovou interpretaci stupňů příslušnosti uvažovala Hisdal [22].

Další problém představuje skutečnost, že hodnota $P_Z(A)$ nám nedává žádnou informaci o fuzziness (tj. neurčitosti) fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. To je hlavní důvod, proč Yager [48] a také Talašová a Pavlačka [44] přišli s myšlenkou, že pravděpodobnost fuzzy jevu by měla být také fuzzy, což bude analyzováno dále.

Zaměřme se tedy na tři odlišné způsoby vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů na základě ostré pravděpodobnostní míry P, a to pomocí fuzzy množiny na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nazývané fuzzy pravděpodobnost.

Yager [48] zavedl pravděpodobnosti fuzzy jevů pomocí zobrazení $P_Y : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0, 1\rangle)$ definovaného následovně: Pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ je pro všechna $p \in \langle 0, 1\rangle$ funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ dána

$$\mu_{P_Y(A)}(p) = \begin{cases} \max\{\alpha \mid p = P(A_\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \mid p = P(A_\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3}$$

Jelikož $A_\alpha \in \mathcal{A}$ pro jakékoli $\alpha \in (0, 1\rangle$, jsme schopni určit všechny pravděpodobnosti $P(A_\alpha)$.

Posuďme nyní vhodnost tohoto přístupu. Nejprve se zaměřme na interpretaci fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. Ze vzorce (3) můžeme dle Yagera [49] vidět, že stupeň příslušnosti pravděpodobnosti $p \in \langle 0, 1\rangle$ k fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ je větší než 0, pokud p vyjadřuje pravděpodobnost splnění podmínky dané fuzzy jevem A alespoň ve stupni α. Existuje zde tedy jasná pravděpodobnostní interpretace fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$, která odpovídá běžnému významu pravděpodobnosti.

Prozkoumejme nyní, zda jsou vlastnosti pravděpodobnostní míry zachovány pro P_Y. Pro libovolný ostrý jev $A \in \mathcal{A}$ plyne přímo ze vzorce (3), že fuzzy pravděpodobnost $P_Y(A)$ „splývá“ s hodnotou $P(A)$, tj. $\mu_{P_Y(A)}(p) = 1$ pro $p = P(A)$ a $\mu_{P_Y(A)}(p) = 0$ pro libovolné $p \neq P(A)$. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(\Omega)$ je proto dána následovně: $\mu_{P_Y(\Omega)}(1) = 1$ a $\mu_{P_Y(\Omega)}(p) = 0$ pro libovolné $p \in \langle 0, 1)$.

Vlastnost pravděpodobnostní míry daná vzorcem (1) může být pro P_Y pozorována tak, jak uvádí následující věta.

Věta 5.2. *Nechť* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ *jsou vzájemně disjunktní, tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro libovolné* $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. *Pak funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti* $P_Y\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ *může být získána z funkcí příslušnosti fuzzy pravděpodobností* $P_Y(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *následujícím způsobem:*

$$\mu_{P_Y(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)}(p) =$$
$$= \begin{cases} \max\left\{\alpha \mid p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i,\ p_i = \max\left\{q \mid \mu_{P_Y(A_i)}(q) \geq \alpha\right\},\ i = 1, 2, \ldots\right\}, \\ \quad \textit{pokud nejméně jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0, \ \textit{jinak.} \end{cases}$$

Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(\emptyset)$ je dána analogicky jako funkce příslušnosti $\mu_{P_Y(\Omega)}$, tj. platí: $\mu_{P_Y(\emptyset)}(0) = 1$ a $\mu_{P_Y(\emptyset)}(p) = 0$ pro libovolné $p \in (0, 1\rangle$.

Nyní uvažujme, že jsou dány fuzzy jevy $A, B \in \mathcal{A}_F$ takové, že $A \subseteq B$, tj. $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$. Prověřme vzájemné vztahy mezi jejich fuzzy pravděpodobnostmi $P_Y(A)$ a $P_Y(B)$. Yager [48] poukázal na to, že obecně mohou mít fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ a $P_Y(B)$ zcela odlišné nosiče. Náleží-li p do nosičů obou fuzzy pravděpodobností, pak $\mu_{P_Y(A)}(p) \leq \mu_{P_Y(B)}(p)$. Je však otázkou, zda je tento vztah nějakou fuzzifikací vlastnosti 2 z dalších vlastností pravděpodobnostní míry. Proto bylo v [3] zkoumáno uspořádání fuzzy pravděpodobností. Bylo ukázáno, že pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí: $\min\{p \mid p \in P_Y(A)_\alpha\} \leq \min\{p \mid p \in P_Y(B)_\alpha\}$ a $\max\{p \mid p \in P_Y(A)_\alpha\} \leq \max\{p \mid p \in P_Y(B)_\alpha\}$. Tyto nerovnosti plynou ze skutečnosti, že $P(A_\alpha) \leq P(B_\alpha)$ pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$. Můžeme tedy říci, že $P_Y(A)$ je menší nebo rovno $P_Y(B)$.

Vlastnosti pravděpodobnostní míry (3) a (4) z dalších vlastností pravděpodobnostní míry mohou být pro P_Y pozorovány následovně.

Věta 5.3. *Nechť* $A, B \in \mathcal{A}_F$. *Pak pro libovolné* $p \in \langle 0, 1\rangle$ *může být funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti* $P_Y(A \cup B)$ *získána z funkcí příslušnosti fuzzy pravděpodobností* $P_Y(A)$, $P_Y(B)$ *a* $P_Y(A \cap B)$ *takto:*

$$\mu_{P_Y(A \cup B)}(p) =$$

$$= \begin{cases} \max \Big\{ \alpha \mid p = p_A + p_B - p_{A\cap B},\ p_A = \max P_Y(A)_\alpha, p_B = \max P_Y(B)_\alpha, \\ \quad p_{A\cap B} = \max P_Y(A\cap B)_\alpha \Big\}, \qquad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0, \qquad \textit{jinak.} \end{cases}$$

Věta 5.4. *Nechť $A \in \mathcal{A}_F$ a nechť A^{c} představuje doplněk fuzzy množiny A. Funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A^{\mathsf{c}})$ může být z funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(A)$ pro libovolné $p \in \langle 0,1\rangle$ získána*

$$\mu_{P_Y(A^{\mathsf{c}})}(p) = \begin{cases} \max \big\{ \alpha \mid 1-p = \sup\{q \mid \mu_{P_Y(A)}(q) > 1-\alpha\}\big\}, \\ \quad \textit{pokud alespoň jedno takové } \alpha \textit{ existuje,} \\ 0, \ \textit{jinak.} \end{cases}$$

Můžeme tedy shrnout, že zobrazení $P_Y : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0,1\rangle)$ dané vzorcem (3) nějakým způsobem zachovává téměř všechny vlastnosti pravděpodobnostní míry uvažované v Teoretických východiscích práce. Nezachová se pouze poslední vlastnost, tj. součet Yagerových pravděpodobností fuzzy jevů tvořících fuzzy rozklad univerza se nerovná jedné. Pozorování těchto vlastností však není zcela přímočaré, tzn. nemůžeme např. použít pouze princip rozšíření pro sčítání a odčítaní fuzzy pravděpodobností. Ani Yager nezkoumal tyto fuzzy pravděpodobnosti z hlediska jejich praktického využití. Obecně lze říci, že se s těmito fuzzy pravděpodobnostmi velice obtížně pracuje.

Klement [28] představil zobrazení $P_K : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0,1\rangle)$ definované následovně (pro zjednodušení zápisu je zde uvedena ekvivalentní verze Klementovy definice prezentovaná Yagerem [49]): Pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ je funkce příslušnosti fuzzy pravděpodobnosti $P_K(A)$ pro libovolné $p \in \langle 0,1\rangle$ dána

$$\mu_{P_K(A)}(p) = \sup\{\alpha \mid P(A_\alpha) \geq p\}. \tag{4}$$

Pro libovolné $A \in \mathcal{A}_F$ je tedy funkce příslušnosti $\mu_{P_K(A)}$ nerostoucí a zleva spojitá na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Jako hlavní výhodu tohoto přístupu oproti P_Y Klement [28] považoval monotonii P_K vzhledem k inkluzi fuzzy množin, tj. pokud $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, pak $P_K(A) \subseteq P_K(B)$. Tato vlastnost však nemůže být chápána jako zobecnění vlastnosti 2 z dalších vlastností pravděpodobnostní míry.

Na základě (4) Yager [49] interpretoval $\mu_{P_K(A)}(p)$ jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna nejméně p“. Je-li však jev A neostrý, není zcela zřejmé co znamená tvrzení „pravděpodobnost jevu A“. Uveďme tedy výstižnější interpretaci $P_K(A)$. Ze vzorce (4) plyne, že, pokud $\mu_{P_K(A)}(p) = \alpha$, pak „pravděpodobnost alespoň α stupně splnění podmínky dané pomocí A je rovna alespoň p“. Tato interpretace je platná také pro $\alpha = 0$, což je významný rozdíl oprati interpretaci $\mu_{P_Y(A)}(p)$. Nicméně můžeme pozorovat, že zobrazení P_K nepředstavuje rozšíření pravděpodobnostní míry P, protože poskytuje jiný druh informace.

Yager [49] vyšel z Klementovy definice fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu P_K, a představil zobrazení $\hat{P} : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}(\langle 0, 1\rangle)$. Postupoval následovně:

Nechť A^{c} představuje doplněk fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$. Nechť A^{c}_α označuje α-řez fuzzy jevu A^{c}. Funkce příslušnosti k $P_K(A^{\mathsf{c}})$ je dána pro všechna $p \in \langle 0, 1\rangle$ pomocí

$$\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p) = \sup \left\{\alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_\alpha) \geq p\right\}.$$

Podle Yagera [49] vyjadřuje $\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p)$ stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost, že nenastane jev A, je rovna alespoň p“. Přesněji řečeno, pokud $\mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(p) = \alpha$, pak pravděpodobnost toho, že „stupeň splnění podmínky dané pomocí A je nejvýše $1 - \alpha$“, je alespoň p.

Pak Yager [49] definoval $P_*(A)$ jako

$$P_*(A) = 1 - P_K(A^{\mathsf{c}}),$$

tj. pro všechna $p \in \langle 0, 1\rangle$,

$$\mu_{P_*(A)}(p) = \mu_{P_K(A^{\mathsf{c}})}(1 - p) = \sup \left\{\alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_\alpha) \geq 1 - p\right\}. \tag{5}$$

Yager [49] interpretoval $\mu_{P_*(A)}(p)$ jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna nejvýše p“. Opět můžeme pozorovat, že tato interpretace není zcela jednoznačná. Uveďme tedy výstižnější interpretaci. Můžeme jednoduše vidět, že

$$\begin{aligned}\sup \left\{\alpha \mid P(A^{\mathsf{c}}_\alpha) \geq 1 - p\right\} &= \sup \left\{\alpha \mid 1 - P\left(\bigcup_{\beta > 1-\alpha} A_\beta\right) \geq 1 - p\right\} = \\ &= \sup \left\{\alpha \mid P\left(\bigcup_{\beta > 1-\alpha} A_\beta\right) \leq p\right\}.\end{aligned}$$

Tedy $\mu_{P_*(A)}(p) = \alpha$ znamená, že pravděpodobnost toho, že „podmínka daná pomocí jevu A je splněna ve stupni větším než $1 - \alpha$“, je nejvýše p.

Nakonec Yager [49] definoval fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ fuzzy jevu $A \in \mathcal{A}_F$ jako

$$\hat{P}(A) = P_K(A) \cap P_*(A),$$

tj. funkce příslušnosti k $\hat{P}(A)$ je pro libovolné $p \in \langle 0, 1\rangle$ dána následovně:

$$\mu_{\hat{P}(A)}(p) = \min\left\{\mu_{P_K(A)}(p), \mu_{P_*(A)}(p)\right\}.$$

Při interpretaci $\hat{P}(A)$ vyšel Yager [49] z interpretací $P_K(A)$ a $P_*(A)$. $\mu_{\hat{P}(A)}(p)$ interpretoval jako stupeň pravdivosti tvrzení „pravděpodobnost jevu A je rovna přesně p“. Tato interpretace je však sporná. Jak lze vidět ze vzorců (4) a (5), $\mu_{\hat{P}(A)}(p) = \alpha$ znamená pouze, že α je nejvyšší stupeň takový, že pravděpodobnost toho, že „podmínka daná jevem A je splněna alespoň ve stupni α“ je alespoň p, a pravděpodobnost toho, že „podmínka daná jevem A je splněna ve stupni alespoň $1 - \alpha$“, je nejvýše p. Tento význam však neodpovídá Yagerově výkladu. Fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ má jasnou pravděpodobnostní interpretaci, je však diskutabilní, zda toto je očekávaný druh informace, který by měla fuzzy pravděpodobnost fuzzy jevu vyjadřovat.

Jinou otázkou je, jak by se mělo s fuzzy pravděpodobnostmi $\hat{P}$ počítat, a tedy ověřovat zachování fuzzifikovaných vlastností pravděpodobnostní míry. Yager [49] navíc ukázal, že pro libovolný fuzzy jev $A \in \mathcal{A}_F$ takový, že existuje alespoň jedno $\omega \in \Omega$ s $\mu_A(\omega) \notin \{0, 1\}$ a $P(\{\omega\}) > 0$, je jádro fuzzy pravděpodobnost $\hat{P}(A)$ prázdná množina. Z praktického hlediska to však není dobrá vlastnost.

5.1.2. Pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou

Nejprve budou zavedeny potřebné pojmy a představeny vzorce pro výpočet pravděpodobností ostrých jevů. Poté zadefinujeme pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou a tzv. fuzzy náhodnou veličinu.

Definice 5.4. *Nechť Ω značí neprázdnou množinu všech elementárních jevů a $\mathcal{A}$ přestavuje σ-algebru náhodných jevů. Uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ pak nazveme* měřitelným prostorem.

Poznámka 5.1. *Konvexní kombinací pravděpodobnostních měr P_1 a P_2 budeme rozumět pravděpodobnostní míru $P = \lambda \cdot P_1 + (1 - \lambda) \cdot P_2$ pro libovolné $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ pak tedy platí: $P(A) = \lambda \cdot P_1(A) + (1 - \lambda) \cdot P_2(A)$.*

Definice 5.5. *Nechť $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$ označuje množinu všech pravděpodobnostních měr na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A}))$ je množina všech fuzzy množin na množině $\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$. Pak $P_F \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A}))$ nazveme* fuzzy pravděpodobnostní mírou*, pokud*

1. *P_F je normální fuzzy množina, tzn. existuje alespoň jedna pravděpodobnostní míra $P \in \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že $\mu_{P_F}(P) = 1$.*

2. *Pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí:*

   (a) $P_{F,\alpha}$ je konvexní množina, tj. pro každé $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ a každé $P_1, P_2 \in P_{F,\alpha}$ platí: $(\lambda \cdot P_1 + (1 - \lambda) \cdot P_2) \in P_{F,\alpha}$;

   (b) pro každý náhodný jev $A \in \mathcal{A}$ existuje minimum i maximum množiny $\{P(A) \mid P \in P_{F,\alpha}\}$.

Fuzzy pravděpodobnost libovolného náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ představuje fuzzy množina $P_F(A)$ určená svými α-řezy $P_F(A)_\alpha = \{p \in \langle 0, 1 \rangle \mid p = P(A), P \in P_{F,\alpha}\}$, $\alpha \in (0, 1\rangle$. Z podmínek kladených v definici 5.5 na fuzzy pravděpodobnostní míru P_F vyplývá, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ jsou $P_F(A)_\alpha$ uzavřené intervaly. Plyne z nich také, že jádro $Ker\, P_F(A)$ je neprázdné. Protože pravděpodobnost $P(A)$ jevu A vždy náleží do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tak nosič $Supp\, P_F(A) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$, tzn. je omezený. $P_F(A)$ je tedy fuzzy číslo. Tato fuzzy pravděpodobnost se prakticky spočítá následovně: Označme α-řez $P_F(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha} \rangle$ pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$. Krajní hodnoty tohoto α-řezu jsou pak dány

$$p^L_{A,\alpha} = \min \left\{ \int_{\omega \in \Omega} \chi_A(\omega) dP \mid P \in P_{F,\alpha} \right\},$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \chi_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Nakonec zaveďme pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou a definujme tzv. fuzzy náhodnou veličinu, která je využita v aplikační části práce.

Definice 5.6. *Nechť Ω značí neprázdnou třídu všech elementárních jevů, $\mathcal{A}$ je σ-algebra náhodných jevů a P_F představuje fuzzy pravděpodobnostní míru danou definicí 5.5. Pak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$ nazveme* pravděpodobnostním prostorem s fuzzy pravděpodobnostní mírou*.*

Definice 5.7. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$ je pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou. Pak každé zobrazení $\tilde{o} : \Omega \to \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ nazveme* fuzzy náhodnou veličinou*.*

5.1.3. Fuzzy pravděpodobnostní prostor

Nyní popíšeme případ, kdy jsou obě fuzzifikované složky pravděpodobnostního prostoru popsané v předchozích dvou částech uvažovány současně. Nejprve budou rozšířeny pravděpodobnosti fuzzy jevů dle Zadeha [55] na případ fuzzy pravděpodobnostní míry a prověřeny jejich vlastnosti. Toto rozšíření bylo poprvé využito v [6], kde však byla uvažována pouze diskrétní fuzzy pravděpodobnostní míra. Poté zavedeme příslušný fuzzy pravděpodobnostní prostor.

Rozšíření Zadehovy pravděpodobnosti libovolného fuzzy náhodného jevu $A \in \mathcal{A}_F$ na případ fuzzy pravděpodobnostní míry P_F představuje $P_{FZ}(A) \in \mathcal{F}(\Omega)$ určená svými α-řezy $P_{FZ}(A)_\alpha = \{p \in \langle 0,1\rangle \mid p = \int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP,\ P \in P_{F,\alpha}\}$, $\alpha \in (0,1\rangle$. Z podmínek kladených na fuzzy pravděpodobnostní míru P_F v definici 5.5 plyne, že pro každé $A \in \mathcal{A}_F$ a každé $\alpha \in (0,1\rangle$ jsou α-řezy $P_{FZ}(A)_\alpha$ fuzzy pravděpodobnosti fuzzy jevu A uzavřené intervaly. Dále z nich plyne, že jádro $Ker\, P_{FZ}(A)$ je neprázdné. Nosič $Supp\, P_{FZ}(A) \subseteq \langle 0,1\rangle$, tzn. je omezený. $P_{FZ}(A)$ je tedy fuzzy číslo. Prakticky se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ krajní hodnoty α-řezu

$P_{FZ}(A)_\alpha = \langle p^L_{A,\alpha}, p^U_{A,\alpha}\rangle$ spočítají takto:

$$p^L_{A,\alpha} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}, \tag{6}$$

$$p^U_{A,\alpha} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}. \tag{7}$$

Z výše uvedeného proto plyne: $P_{FZ} : \mathcal{A}_F \to \mathcal{F}_N(\langle 0,1\rangle)$. Obsahem následujících vět je, že P_{FZ} zachovává zobecněné vlastnosti pravděpodobnostní míry.

Věta 5.5. $P_{FZ}(\Omega) = 1$.

Věta 5.6. *Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_F$ jsou takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Pak se $P_{FZ}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)$ rovná fuzzy číslu, jehož α-řez $\langle p^L_{sum,\alpha}, p^U_{sum,\alpha}\rangle$ se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ určí:*

$$p^L_{sum,\alpha} = \min\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$

$$p^U_{sum,\alpha} = \max\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\omega\in\Omega} \mu_{A_i}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Věta 5.7. *Pro fuzzy pravděpodobnostní míru P_{FZ} platí:*

1. $P_{FZ}(\emptyset) = 0$;

2. *pokud $A, B \in \mathcal{A}_F$, $A \subseteq B$, pak $P_{FZ}(A) \leq P_{FZ}(B)$;*

3. *pro každé $A, B \in \mathcal{A}_F$ se $P_{FZ}(A \cup B)$ rovná takovému fuzzy číslu, že pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ se jeho α-řez $\langle p^L_{A\cup B,\alpha},\ p^U_{A\cup B,\alpha}\rangle$ určí:*

$$p^L_{A\cup B,\alpha} = \min\Bigg\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\Bigg\},$$

$$p^U_{A\cup B,\alpha} = \max\Bigg\{\int_{\omega\in\Omega} \mu_A(\omega)dP + \int_{\omega\in\Omega} \mu_B(\omega)dP - \int_{\omega\in\Omega} \mu_{A\cap B}(\omega)dP \mid P \in P_{F,\alpha}\Bigg\}.$$

4. pro každé $A \in \mathcal{A}_F : P_{FZ}(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P_{FZ}(A)$;

5. pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_F$ tvoří fuzzy rozklad Ω, tj. $\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(\omega) = 1$ pro každé $\omega \in \Omega$, pak se součet fuzzy pravděpodobností $P_{FZ}(A_1), \dots, P_{FZ}(A_n)$ fuzzy jevů $A_1, \dots, A_n$ při zohlednění interakcí mezi nimi rovná 1.

Zobrazení P_{FZ} dané pomocí vzorců (6) a (7) tedy zachovává fuzzifikované vlastnosti pravděpodobnostní míry. Z matematického hlediska se proto jedná o korektní rozšíření pravděpodobnostní míry P. Zobrazení P_{FZ} však představuje pouze rozšíření pravděpodobnostní míry P_Z na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Proto je zde také zachována problematická interpretace Zadehových pravděpodobností fuzzy jevů popsaná v části 5.1.1.

Jelikož $\mathcal{A}_F$ tvoří σ-algebru fuzzy jevů na Ω, tak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{FZ})$ lze nazvat *fuzzy pravděpodobnostním prostorem* určeným následující definicí.

Definice 5.8. *Nechť Ω značí neprázdnou třídu všech elementárních jevů, $\mathcal{A}_F$ je σ-algebra fuzzy jevů a P_{FZ} představuje Zadehovu fuzzy pravděpodobnostní míru rozšířenou na případ fuzzy jevů. Pak uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{FZ})$ nazveme* fuzzy pravděpodobnostním prostorem.

5.2. Fuzzifikované rozhodovací matice

V této části bude nejprve popsán přístup k rozhodovací matici s expertně zadanými pravděpodobnostmi stavů světa. V rámci tohoto přístupu bude představen korektní vzorec pro výpočet rozptylu výsledků variant, který byl publikován v [5]. Poté bude uveden přístup k rozhodovací matici s fuzzy stavy světa uvažující pravděpodobnosti fuzzy stavů světa dle Yagera [48], jehož podstatná část byla publikována v [8]. Tento přístup se však nejeví býti vhodný pro praktické aplikace. Následně budou popsány a vzájemně srovnány dva možné přístupy k fuzzy rozhodovací matici, z nichž jeden je původní celý a druhý zčásti. Větší část těchto výsledků včetně jejich aplikací a speciálních případů byla publikována v [1, 2, 4, 6, 7].

5.2.1. Rozhodovací matice s expertně zadanými pravděpodobnostmi stavů světa

Nejprve bude zavedena tzv. m-tici fuzzy pravděpodobností. Poté bude popsána rozhodovací matici s fuzzy stavy světa a uveden korektní vzorce pro výpočet rozptylu výsledků variant.

Definice 5.9. *Nechť* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$. *Nechť* $P_F(\{\omega_k\}) \in \mathcal{F}_N(\langle 0,1\rangle)$, $k = 1, \ldots, m$, *jsou fuzzy pravděpodobnosti. Pak* $P_F(\{\omega_1\}), \ldots, P_F(\{\omega_m\})$ *tvoří* m-tici fuzzy pravděpodobností, *jestliže pro libovolné* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *a libovolné* $\alpha \in (0,1\rangle$ *platí, že pro libovolné* $p_j \in P_F(\{\omega_j\})_\alpha$ *existují* $p_k \in P_F(\{\omega_k\})_\alpha, k = 1, \ldots, m$, $k \neq j$, *takové, že* $p_j + \sum_{k=1,k\neq j}^{m} p_k = 1$.

Uvažujme rozhodovací matici danou tabulkou 1. Předpokládejme však, že uvažovaným stavům světa $S_1, \ldots, S_m$ jsou expertně přiřazeny jejich fuzzy pravděpodobnosti $P_E(S_1), \ldots, P_E(S_m)$ tak, aby vytvořili m-tici fuzzy pravděpodobností. Navíc předpokládejme, že důsledky variant $x_1, \ldots, x_n$ za daných stavů světa $S_1, \ldots, S_m$ jsou vyjádřeny pomocí fuzzy čísel $H_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Popišme, jak určit rozptyl $var\, H_i$ výsledků varianty x_i. Krajní hodnoty α-řezu rozptylu $var\ H_{i,\alpha} = \langle var\ h_{i,\alpha}^L, var\ h_{i,\alpha}^U\rangle$ se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ určí

$$var\ h_{i,\alpha}^L = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot h_{i,k}\right)^2 \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1, \ldots, m,\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\},$$

$$var\ h_{i,\alpha}^U = \max\left\{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot h_{i,k}\right)^2 \mid p_j \in P_E(S_j)_\alpha, j = 1, \ldots, m,\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}\right\}.$$

5.2.2. Rozhodovací matice s pravděpodobnostmi fuzzy stavů světa dle Yagera [48]

Opět uvažujme rozhodovací matici danou tabulkou 1. Nyní však fuzzifikujme stavy světa, tzn. vyjádřeme je pomocí fuzzy množin tvořících fuzzy rozklad univerza Ω, tj. $\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) = 1$ pro libovolné $\omega \in \Omega$. Na rozdíl od předchozí části však navíc uvažujme, že známe pravděpodobnostní míru P na univerzu Ω, pomocí které užitím vzorce (3) získáme fuzzy pravděpodobnosti $P_Y(S_1)$, ..., $P_Y(S_m)$ fuzzy stavů světa $S_1, \ldots, S_m$ dle Yagera [48].

Jelikož fuzzy stavy světa tvoří fuzzy rozklad univerza Ω, mohou být důsledky při výběru varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, chápány jako hodnoty diskrétní náhodné veličiny H_i, která nabývá hodnot $h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}$ s pravděpodobnostmi $P_Y(S_1), \ldots, P_Y(S_m)$. Podívejme se tedy nyní, jak lze určit její očekávanou hodnotu EH_i^Y a rozptyl $var\, H_i^Y$.

Nechť $\alpha \in (0, 1\rangle$. Pro libovolný stav světa S_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, je důsledek varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, roven $h_{i,j}$ s pravděpodobností $P(S_{j\alpha})$ ve stupni příslušnosti α. Avšak obecně $\sum_{j=1}^{m} P(S_{j\alpha}) \neq 1$. Proto označme

$$P(S_j|\alpha) = \begin{cases} \frac{P(S_{j\alpha})}{\sum_{k=1}^{m} P(S_{k\alpha})}, & \text{pokud } \sum_{k=1}^{m} P(S_{k\alpha}) \neq 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{8}$$

Platí, že $P(S_j|\alpha) \in \langle 0, 1\rangle$ pro všechna j. $\sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) = 1$ mimo případu, kdy $P(S_j|\alpha) = 0$ pro všechna j, který nastane např. obsahuje-li každé jádro $Core\, S_j$ pouze jeden prvek a je-li pravděpodobnostní rozdělení dané na Ω spojité. $P(S_1|\alpha), \ldots, P(S_m|\alpha)$ mohou být interpretovány jako pravděpodobnosti stavů světa, pokud nastal nějaký prvek $\omega \in \Omega$ náležící do alespoň jednoho $S_{j\alpha}$.

Očekávaná hodnota důsledku dané varianty x_i v uvažovaném stupni α je pak dána

$$E(H_i|\alpha) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \cdot h_{i,j}, & \text{pokud } \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \neq 0, \\ \text{neexistuje}, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{9}$$

Stupeň příslušnosti *fuzzy očekávaného důsledku* EH_i^Y varianty x_i je poté dán pro všechna $h_i \in \langle 0, 1\rangle$

$$\mu_{EH_i^Y}(h_i) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1\rangle \mid h_i = E(H_i|\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \in (0,1\rangle \mid \\ & h_i = E(H_i|\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{10}$$

Nyní se zaměřme na získání fuzzy rozptylu. V uvažovaném stupni α, využijeme $P(S_j|\alpha) \in \langle 0, 1\rangle$ pro všechna $j = 1, \ldots, m$ a $E(H_i|\alpha)$, které byly definovány pomocí (8) a (9). Rozptyl $var\ (H_i|\alpha)$ důsledků varianty x_i v uvažovaném stupni α je dán

$$var\ (H_i|\alpha) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m}(h_{i,j} - E(H_i|\alpha))^2 \cdot P(S_j|\alpha), & \text{pokud } \sum_{j=1}^{m} P(S_j|\alpha) \neq 0, \\ \text{neexistuje}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Stupeň příslušnosti *fuzzy rozptylu* $var H_i^Y$ důsledků varianty x_i je pak dán pro všechna $h_i \in \langle 0, 1\rangle$

$$\mu_{var\ H_i^Y}(h_i) = \begin{cases} \sup\{\alpha \in (0,1\rangle \mid h_i = var\ (H_i|\alpha)\}, & \text{pokud } \{\alpha \in (0,1\rangle \mid \\ & h_i = var\ (H_i|\alpha)\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{11}$$

V Teoretických východiscích práce popisoval prvek $h_{i,j}$ z rozhodovací matice dané tabulkou 1 důsledek při výběru varianty x_i, pokud nastane stav světa S_j. Uvažujeme-li však fuzzy stavy světa namísto ostrých, objevuje se zásadní otázka: Co znamená říci, že „fuzzy stav světa S_j nastává“? Uvažujme, že nějaké konkrétní $\omega \in \Omega$ nastalo. Pokud $\mu_{S_j}(\omega) = 1$, pak je zřejmé, že důsledek při výběru varianty x_i je přesně $h_{i,j}$. Avšak jaký je důsledek výběru varianty x_i, pokud $0 < \mu_{S_j}(\omega) < 1$ (což také znamená, že $0 < \mu_{S_k}(\omega) < 1$ pro nějaké $k \neq j$)? V případě rozhodovací matice s fuzzy stavy světa není tedy nejspíše vhodné zacházet s důsledkem výběru varianty x_i jako s diskrétní náhodnou veličinou, která nabývá hodnot $h_{i,1}, \ldots, h_{i,m}$.

5.2.3. Fuzzy rozhodovací matice

V této části budou popsány a vzájemně srovnány dva přístupy k fuzzy rozhodovací matici. První uvažuje fuzzifikované Zadehovy pravděpodobností fuzzy stavů světa. Druhý chápe informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici pomocí systému tzv. bází fuzzy pravidel.

Nejprve uvažujme daný fuzzy pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}_F, P_{FZ})$. Opět uvažujme také rozhodovací matici danou tabulkou 1. Nyní však uvažujme jak fuzzy stavy světa $S_1, \ldots, S_m$, které tvoří fuzzy rozklad univerza Ω, tak také fuzzy důsledky $H_{i,j} \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$, $i = 1 \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, variant $x_1, \ldots, x_n$ za daných fuzzy stavů světa. Těmto fuzzy stavům světa přiřazujeme jejich fuzzy pravděpodobnosti $P_{FZj} = P_{FZ}(S_j)$, $j = 1, \ldots, m$, počítané na základě podkladové fuzzy pravděpodobnostní míry P_F pomocí vzorců (6) a (7). Ve vzorcích pro výpočet charakteristik variant však budou tyto fuzzy pravděpodobnosti kvůli vzájemným interakcím vyjádřeny pomocí vzorců pro jejich výpočet.

Libovolný řádek uvažované fuzzy rozhodovací matice vyjadřuje hodnoty fuzzy náhodné veličiny H_i^Z, $i \in \{1, \ldots, n\}$, která nabývá fuzzy hodnot $H_{i,1}, \ldots, H_{i,m}$ s fuzzy pravděpodobnostmi $P_{FZ1}, \ldots, P_{FZm}$. Ukažme tedy, jak lze získat charakteristiky této fuzzy náhodné veličiny. Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ označme α-řez $H_{i,j,\alpha} = \langle h_{i,j,\alpha}^L, h_{i,j,\alpha}^U \rangle$. Pak pro libovolnou variantu x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, a libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ je α-řez fuzzy očekávané hodnoty $EH_{i,\alpha}^Z = \langle Eh_{i,\alpha}^{Z,L}, Eh_{i,\alpha}^{Z,U} \rangle$ dán následovně:

$$Eh_{i,\alpha}^{Z,L} = \min \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^L \mid P \in P_{F,\alpha} \right\},$$

$$Eh_{i,\alpha}^{Z,U} = \max \left\{ \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot h_{i,j,\alpha}^U \mid P \in P_{F,\alpha} \right\}.$$

Výpočet fuzzy rozptylu $var\, H_i^Z$ je komplikovanější. Kvůli vzájemným závislostem mezi fuzzy důsledky $H_{i,1}, \ldots, H_{i,m}$ a fuzzy očekávanou hodnotou EH_i^Z je α-řez $var\, H_{i,\alpha}^Z = \langle var\, h_{i,\alpha}^{ZL}, var\, h_{i,\alpha}^{ZU} \rangle$ fuzzy rozptylu důsledků varianty určen následovně: Označme

$$z(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\omega \in \Omega} \mu_{S_j}(\omega) dP \cdot \left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} \int_{t \in \Omega} \mu_{S_k}(t) dP \cdot h_{i,k} \right)^2.$$

Poté se krajní hodnoty α-řezu určí

$$var\, h_{i,\alpha}^{ZL} = \min\left\{z(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha}\right\},$$
$$var\, h_{i,\alpha}^{ZU} = \max\left\{z(h_{i,1}, \ldots h_{i,m}, P) \mid h_{i,j} \in H_{i,j,\alpha}, j = 1, \ldots, m, P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Ačkoli z matematického hlediska představuje P_{FZ} fuzzy pravděpodobnostní míru, jedná se pouze o rozšíření pravděpodobnostní míry P_Z na případ podkladové fuzzy pravděpodobnostní míry, proto interpretační problémy popsané v části 5.1.1 zůstávají zachovány. Navíc bylo v části 5.2.2 diskutováno, že není jasné, co znamená výrok „fuzzy stav světa nastal“. Proto nelze říci, že hodnoty EH_i^Z, $i = 1, \ldots, n$, a $var\, H_i^Z$, $i = 1, \ldots, n$, vyjadřují očekávané důsledky a rozptyly důsledků variant. Věrohodnost uspořádání variant na základě těchto charakteristik je tedy otázkou.

Nyní vysvětleme informace obsažené ve fuzzy rozhodovací matici pomocí systému tzv. bází fuzzy pravidel. Uvažujme daný pravděpodobnostní prostor s fuzzy pravděpodobnostní mírou $(\Omega, \mathcal{A}, P_F)$. V rozhodovací matici uvažované v této části nyní vůbec nevyužijeme fuzzy pravděpodobnosti fuzzy stavů světa.

Informace o fuzzy důsledcích při výběru libovolné varianty x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, mohou být vyjádřeny pomocí následující báze fuzzy pravidel:

Jestliže stav světa je S_1, pak důsledek varianty x_i je $H_{i,1}$.
$\vdots$
Jestliže stav světa je S_m, pak důsledek varianty x_i je $H_{i,m}$.

K získání výstupu z této báze fuzzy pravidel je vhodné použít Zobecněný Sugenův inferenční algoritmus (viz [43]). Pro libovolné $\alpha \in (0, 1\rangle$ a libovolné $\omega \in \Omega$ označme $H_{i,j,\alpha} = \langle h_{i,j,\alpha}^L, h_{i,j,\alpha}^U\rangle$ a $H_{i,\alpha}^S(\omega) = \langle h_{i,\alpha}^{SL}(\omega), h_{i,\alpha}^{SU}(\omega)\rangle$. Pak se krajní hodnoty α-řezu $H_{i,\alpha}^S(\omega)$ výstupu z báze fuzzy pravidel získají

$$h_{i,\alpha}^{S,L}(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j,\alpha}^L,$$

$$h_{i,\alpha}^{S,U}(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) \cdot h_{i,j,\alpha}^U.$$

Jelikož je na univerzu Ω uvažována fuzzy pravděpodobnostní míra P_F, tak $H_i^S : \Omega \to \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ může být chápána jako fuzzy náhodná veličina. Vyjádřeme tedy její očekávanou hodnotu EH_i^S a rozptyl $var\, H_i^S$.

Pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ se α-řez $EH_{i,\alpha}^S = \langle Eh_{i,\alpha}^{SL}, Eh_{i,\alpha}^{SU}\rangle$ fuzzy očekávané hodnoty určí

$$Eh_{i,\alpha}^{SL} = \min\left\{\int_{\omega\in\Omega}\sum_{j=1}^{m}\mu_{S_j}(\omega)\cdot h_{i,j,\alpha}^{L}dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\},$$

$$Eh_{i,\alpha}^{SU} = \max\left\{\int_{\omega\in\Omega}\sum_{j=1}^{m}\mu_{S_j}(\omega)\cdot h_{i,j,\alpha}^{U}dP \mid P \in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Pro výpočet fuzzy rozptylu nejprve označme

$$s(h_{i,1},\ldots,h_{i,m},P) =$$
$$= \int_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{j=1}^{m}\mu_{S_j}(\omega)\cdot h_{i,j} - \int_{t\in\Omega}\sum_{k=1}^{m}\mu_{S_k}(t)\cdot h_{i,k}dP\right)^2 dP.$$

Pak se pro libovolné $\alpha \in (0,1\rangle$ α-řez $var\, H_{i,\alpha}^S = \langle var\, h_{i,\alpha}^{SL}, var\, h_{i,\alpha}^{SU}\rangle$ získá

$$var\, h_{i,\alpha}^{SL} = \min\left\{s(h_{i,1},\ldots,h_{i,m},P) \mid h_{i,j}\in H_{i,j,\alpha}, j=1,\ldots,m, P\in P_{F,\alpha}\right\},$$

$$var\, h_{i,\alpha}^{SU} = \max\left\{s(h_{i,1},\ldots h_{i,m},P) \mid h_{i,j}\in H_{i,j,\alpha}, j=1,\ldots,m, P\in P_{F,\alpha}\right\}.$$

Na závěr srovnejme fuzzy očekávané hodnoty EH_i^Z, $i\in\{1,\ldots,n\}$, a EH_i^S stejně jako fuzzy rozptyly $var\, H_i^S$ a $var\, H_i^Z$.

Následující věty popisují vzájemný vztah mezi fuzzy očekávanými hodnotami a mezi fuzzy rozptyly.

Věta 5.8. *Nechť EH_i^S je fuzzy očekávaná hodnota fuzzy náhodné veličiny H_i^S a EH_i^Z je fuzzy očekávaná hodnota fuzzy náhodné veličiny H_i^Z. Pak platí: $EH_i^S = EH_i^Z$.*

Věta 5.9. *Nechť $var\, H_i^S$ je fuzzy rozptyl fuzzy náhodné veličiny H_i^S a $var\, H_i^Z$ je fuzzy rozptyl fuzzy náhodné veličiny H_i^Z. Pak platí: $var\, H_i^S \leq var\, H_i^Z$.*

6. Přínosy původních výsledků

V rámci pravděpodobnostního prostoru se σ-algebrou fuzzy jevů byly zanalyzovány přístupy k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů na základě ostré pravděpodobnostní míry. Byly prozkoumány jejich matematické vlastnosti i interpretace. Bylo ukázáno, že žádný ze zkoumaných přístupů není příliš vhodný k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů.

Fuzzy pravděpodobnostní míra byla nově definována v části týkající se pravděpodobnostního prostoru s fuzzy pravděpodobnostní mírou. V odborné literatuře totiž nebyla nalezena obecná definice fuzzy pravděpodobnostní míry vhodná k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů. Přístup k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů dle Zadeha [55] byl rozšířen na případ fuzzy pravděpodobnostní míry. Přestože z matematického hlediska se jedná o fuzzy pravděpodobnostní míru, ani tento přístup není vhodný k vyjádření pravděpodobností fuzzy jevů kvůli jeho interpretačním problémům.

Pro rozhodovací matici s expertně zadanými pravděpodobnostmi stavů světa byl korektně zformulován vzorec pro výpočet rozptylu důsledků uvažovaných variant. Původní vzorec, použitý v odborné literatuře, totiž nebral v úvahu vzájemné závislosti mezi důsledky dané varianty a jejich očekávanou hodnotou, a proto zbytečně zvětšoval neurčitost počítaného rozptylu.

V rámci rozhodovací matice s fuzzy stavy světa a jejich fuzzy pravděpodobnostmi dle Yagera [48] byly navrženy možné postupy, jak určit očekávané hodnoty a rozptyly důsledků variant.

Pro fuzzy rozhodovací matici bylo ukázáno, že je problematické chápat důsledky dané varianty jako hodnoty fuzzy náhodné veličiny nabývající těchto hodnot s pravděpodobnostmi fuzzy stavů světa. Proto byl představen nový přístup k fuzzy rozhodovací matici. V rámci tohoto přístupu je fuzzy rozhodovací matice chápána jako systém bází fuzzy pravidel. Tento nový přístup je bez interpretačních problémů. Navíc byly srovnány fuzzy očekávané hodnoty a fuzzy rozptyly získané pomocí obou přístupů k fuzzy rozhodovací matici. Bylo dokázáno, že ačkoli se fuzzy očekávané hodnoty shodují, fuzzy rozptyly se obecně liší. Tato skutečnost může významně ovlivnit uspořádání variant ve fuzzy rozhodovací matici.

Seznam publikací

[1] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices in Case of a Discrete Underlying Fuzzy Probability Measure* in Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Springer International Publishing, 2018, s. 129–137.

[2] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices Viewed as Fuzzy Rule-Based Systems* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 641–644.

[3] Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Probability of fuzzy events* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 760–765.

[4] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Comparison of Stocks using a Fuzzy Decision Matrix* in Knowledge for Market Use 2017: People In Enomics – Decisions, Behavior and Normative Models, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2017, s. 165–172.

[5] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Computing Fuzzy Variances of Evaluations of Alternatives in Fuzzy Decision Matrices* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 735–740.

[6] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Decision matrices under risk with fuzzy states of the world and underlying discrete fuzzy probability measure* in MME2017: Conference Proceedings, University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic, 2017, s. 626–631.

[7] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *New Approach to Fuzzy Decision Matrices.* Acta Polytechnica Hungarica **5/14** (2017), s. 85–102.

[8] Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Probability of Fuzzy Events and Their Use in Decision Matrices.* Int. J. Mathematics in Operational Research **4/9** (2016), s. 423–435.

Použitá literatura

[9] Abellán, J., Gómez, J.: *Measures of divergence on credal sets.* Fuzzy Sets and Systems **11/157** (2006), s. 1514–1531.

[10] Abellán, J., Moral, S.: *Upper entropy of credal sets. Applications to credal classification.* International Journal of Approximate Reasoning **2–3/39** (2005), s. 235–255.

[11] Athreya, K.B., Lahiri, S.N.: *Measure Theory and Probability Theory.* Springer, New York, 2006.

[12] Baudrit, C., Couso, I., Dubois, D.: Joint propagation of probability and possibility in risk analysis: Towards a formal framework. Int. J. Approx. Reason. **45** (2007), s. 82–105.

[13] Beer, M.: *Fuzzy Probability Theory.* In: Encyclopedia of Complexity and System Science. Springer, 2009, s. 4047–4059.

[14] Buckley, J. J.: *Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications.* Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

[15] Buckley, J. J.: *Simulating Fuzzy Systems.* Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

[16] Cozman, F.G.: *Separation Properties of Sets of Probability Measures* in Proceedings of the Sixteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence 2000, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2000, s. 107–114.

[17] Durrett, R.: *Probability: Theory and Examples (4. vydání).* Cambridge University Press, New York, 2010.

[18] Dubois, D., Prade, H: *Fundamentals of fuzzy sets (1. vydání).* Kluwer Academic Publishers, Boston-London-Dordrecht, 2000.

[19] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (3. vydání).* John Wiley & Sons, New York, 1968.

[20] Ganoulis, J.: *Engineering Risk Analysis of Water Pollution: Probabilities and Fuzzy Sets (2. vydání).* John Wiley & Sons, 2008.

[21] Hesamian, G., Shams, M.: *A Note on Fuzzy Probability of a Fuzzy Event.* International Journal of Intelligent Systems **7/22** (2016), s. 676–685.

[22] Hisdal, E.: *Are grades of membership probabilities?* Fuzzy Sets and Systems **3/25** (1988), s. 325–348.

[23] Huynh, V. a kol.: *A Fuzzy Target Based Model for Decision Making Under Uncertainty.* Fuzzy Optimization and Decision Making **3/6** (2007), 255–278.

[24] Jaynes, E.T., Bretthorst, G.L.: *Probability Theory: The Logic of Science (1. vydání).* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[25] Karlsson, A.: *Evaluating Credal Set Theory as a Belief Fremework in High-Level Information Fusion for Automated Decision-Making.* Örebro University, Örebro, 2010.

[26] Klement, E.P.: *Characterization of finite fuzzy measure using Markoff-kernels*. J. Math. Anal Appl. **75** (1980), s. 330–339.

[27] Klement, E.P.: *Characterization of Fuzzy Measures Constructed by Means of Triangular Norms*. Journal of Methematical Analysis and Applications **86** (1982), s. 345–358.

[28] Klement, E.P.: *Some remarks on a paper of R.R. Yager*. Inf. Sci. **27** (1982), s. 211–220.

[29] Knill, O.: *Probability and Stochastic Processes with Applications (1. vydání)*. Overseas Press, Daryagan (India), 2009.

[30] Kolmogorov, A.N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1. vydání)*. Julius Springer, Berlin, 1933.

[31] Li, W. a kol: *Fuzzy probability measures (FPM) based non-symmetric membership function: Engineering examples of ground subsidence due to underground mining*. Engineering Applications of Artificial Intelligence **3/23** (2010), s. 420–431.

[32] Mesiar, R.: *Fuzzy sets and probability theory*. Tatra Mountains Math. Publ. **1** (1992), s. 105–123.

[33] Mesiar, R.: *Symetric fuzzy probability measures and the Bayes formula*. BUSEFAL **34** (1988), s. 44–50.

[34] Montes, I. a kol.: *Characterization of continuous t-norms compatible with Zadeh's probability of fuzzy events*. Fuzzy Sets Syst **228** (2013), s. 29–43.

[35] Negoita, C.V., Ralescu, D.: *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis (1. vydání)*. Birkhäuser Verlag–Edituria Technica, Stuttgart, 1975.

[36] Okuda, T., Tanaka, H., Asai, K.: *Formulation of fuzzy decision problems with fuzzy information using probability of fuzzy events*. Inform. Control **2/38** (1978), s. 135–147.

[37] Özkan,I., Türken, I.B.: *Uncertainty and fuzzy decisions* in Chaos Theory in Politics, Springer Netherlands, 2014, s. 17–27.

[38] Piasecki, K.: *Extension of fuzzy P-measure*. BUSEFAL **05** (1984).

[39] Piasecki, K.: *On one relationship between classical probability measure and fuzzy P-measure*. BUSEFAL **07** (1985).

[40] Piasecki, K.: *Probability of fuzzy events defined on denumerable additive measure*. Fuzzy Sets Syst **3/17** (1985), s. 271–284.

[41] Sibiladze, G. a kol.: *Associated Probabilities of a Fuzzy Measure in the Aggregations of Fuzzy Probabilistic Mean Operators*. Computer Science & Telecommunications **1/45** (2015), s. 93–123.

[42] Smets, P.: *Probability of fuzzy events: an axiomatic approach*. Fuzzy Sets and Systems **7** (1982), s. 153–164.

[43] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*. Univerzita Palackého, Olomouc, 2003.

[44] Talašová, J., Pavlačka, O.: *Fuzzy Probability Spaces and Their Applications in Decision Making*. Austrian Journal of Statistics **2&3/35** (2006), s. 347–356.

[45] Vejnarová, J.: *Operator of Composition for Credal Sets* in 8th International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications, France, 2013, s. 335–364.

[46] Viertl, R.: *Statistical Methods for Fuzzy Data (1. vydání)*. Wiley, Chichester, 2011.

[47] Xia, Z.: *Fuzzy probability system: fuzzy probability space (1)*. Fuzzy sets and systems **120** (2001), s. 469–486.

[48] Yager, R.R.: *A note on probabilities of fuzzy events*. Information Sciences **2/18** (1979), s. 113–129.

[49] Yager, R.R.: *A representation of the probability of a fuzzy subset*. Fuzzy Sets Syst **3/13** (1984), s. 273–283.

[50] Yoon, K.P., Hwang, Ch.: *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction (1. vydání)*. SAGE Publications, California, 1995.

[51] Yu, D. a kol.: *Uncertainty measures for fuzzy relations and their applications*. Appl. Soft Comput. **7** (2007), s. 1135–1143.

[52] Zadeh, L.A.: *A note on similarity-based definitions of possibility and probability*. Inf. Sci. **267** (2014), s. 334–336.

[53] Zadeh, L.A.: *Fuzzy Probabilities*. Information Processing & Management **2/20** (1984), s. 363–372.

[54] Zadeh, L.A.: *Fuzzy Sets*. Information and Control **3/8** (1965), s. 338–353.

[55] Zadeh, L.A.: *Probability Measures of Fuzzy Events*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **2/23** (1968), s. 421–427.

Životopis

Osobní údaje

Jméno a příjmení	**Mgr. Pavla Rotterová**
Rodné příjmení	Melicheríková
Datum narození	5. 12. 1988
E-mail	pavla.melich@gmail.com

Vzdělání

2013 - dosud	Doktorský studijní obor Aplikovaná matematika Disertační práce Fuzzy pravděpodobnostní prostory Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta
2011 - 2013	Magisterský studijní obor Aplikace matematiky v ekonomii Diplomová práce Využití matematických modelů ve strojírenském podniku se zaměřením na tepelné elektrárny a skládkové hospodářství Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta
2009 - 2011	Bakalářský studijní obor Ekonomika a procesní management Návrh optimalizace procesů komplexní obnovy elektráren Vysoké učení technické v Brně, Podnikatelská fakulta

Výzkumná stáž

03/2014 - 05/2014	Výzkumná stáž zaměřená na fuzzy pravděpodobnostní prostory Technická univerzita ve Vídni, Ústav statistiky a matematických metod v ekonomii

Publikační činnost

2018

Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices in Case of a Discrete Underlying Fuzzy Probability Measure* in Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Springer International Publishing, 2018, s. 129–137.

2017

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *New Approach to Fuzzy Decision Matrices*. Acta Polytechnica Hungarica **5/14** (2017), s. 85–102.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Decision matrices under risk with fuzzy states of the world and underlying discrete fuzzy probability measure* in MME2017: Conference Proceedings, University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic, 2017, s. 626–631.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Comparison of Stocks using a Fuzzy Decision Matrix* in Knowledge for Market Use 2017: People In Enomics – Decisions, Behavior and Normative Models, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2017, s. 165–172.

2016

Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Fuzzy Decision Matrices Viewed as Fuzzy Rule-Based Systems* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 641–644.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Computing Fuzzy Variances of Evaluations of Alternatives in Fuzzy Decision Matrices* in MME2016: Conference Proceedings, Technical University of Liberec, Liberec, Czech Republic, 2016, s. 735–740.

Rotterová, P., Pavlačka, O.: *Probability of Fuzzy Events and Their Use in Decision Matrices*. Int. J. Mathematics in Operational Research **4/9** (2016), s. 423–435.

2015	Pavlačka, O., Rotterová, P., Nevidal, O.: *Problems Connected with Applying VaR for Computing Solvency Capital Requirement in Insurance Companies* in MME2015: Conference Proceedings, University of West Bohemia, Plzeň, Czech Republic, 2015, s. 612–617.
2014	Melicheríková, P.: *A Cost-based Model for Support of Decision-making about a Spare-parts Storage* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 649–654.
	Pavlačka, O., Rotterová, P.: *Probability of fuzzy events* in MME2014: Conference Proceedings, Palacký University, Olomouc, Czech Republic, 2014, s. 760–765.