Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kombinatorické úlohy ve středoškolských matematických olympiádách

Vypracoval:	**Bc. Jiří Lásko**
Studijní program:	N1407 Chemie
Studijní obor:	Chemie – Matematika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	29. květen 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Calábka, Ph.D., a že jsem použil zdrojů, které uvádím v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne 18. května 2015

....

Bc. Jiří Lásko

Poděkování

Děkuji RNDr. Pavlu Calábkovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi ochotně poskytoval při vypracování diplomové práce.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Jiří Lásko
Název práce	Kombinatorické úlohy ve středoškolských matematických olympiádách
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2015
Abstrakt	Diplomová práce se zabývá formulací základních kombinatorických principů, které jsou následně použity při řešení kombinatorických úloh charakteru matematické olympiády. Hlavním cílem práce je vytvořit sbírku příkladu z kombinatoriky s využitím jednotlivých ročenek matematické olympiády. Z didaktického hlediska by měla sbírka pomoci žákům a vyučujícím při probírání kombinatoriky v matematických kroužcích.
Klíčová slova	pravidlo součtu a součinu, pravidlo bijekce, Dirichletův princip, princip inkluze a exkluze, metoda rozkladu, metoda rekurze, metoda dílčích problémů
Počet stran	76
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Bc. Jiří Lásko
Title	Combinatorial problems in mathematical olympiads
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.
The year of presentation	2015
Abstract	This diploma thesis is dealing with formulation of basic combinatorial principles used for solving combinatorial exercises of the mathematical Olympiad character. The main goal of the thesis is to create collection of combinatorial exercises with the usage of individual yearbooks of the mathematical Olympiad. From the didactic point of view the collection should help students and teachers when discussing combinatory in mathematic clubs.
Keywords	sum rule, product rule, counting by bijection, pigeonhole principle, principle of inclusion and exclusion, induction method, recursion, divide and conguer
Number of pages	76
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Použité označení

Symbol	Význam
$a \in A$	a je prvkem množiny A
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$	kartézský součin množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$\mathcal{P}(\mathcal{A})$	systém všech podmnožin množiny A
$\|A\|$	mohutnost množiny A
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	uspořádaná n-tice
$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$	neuspořádaná n-tice
$V_k(n)$	počet všech k-členných variací z n prvků
$V'_k(n)$	počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků
$P(n)$	počet všech permutací z n prvků
$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$	počet všech permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují k_1-krát, k_2-krát, …, k_n-krát
$K_k(n)$	počet všech k-členných kombinací z n prvků
$K'_k(n)$	počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků
$n!$	n faktoriál
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k

Úvod

Matematická olympiáda (dále jen MO) je celostátní soutěž z matematiky, vyhlašovaná Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy a pořádaná Jednotou českých matematiků a fyziků, která slouží k vyhledávaní a rozvíjení talentovaných žáků v oblasti matematiky a informatiky. Soutěž je určená žákům základních a středních škol. Na středních školách jsou v oblasti matematiky vypsány tři kategorie. Kategorie C je určena žákům 1. ročníků středních škol, kategorie B je určena žákům 2. ročníků středních škola a kategorie A je pro žáky 3. a 4. ročníků středních škol. Ve všech třech kategoriích probíhá MO v domácím, školním a krajském kole. Pouze v kategorii A se koná také ústřední kolo. Nejúspěšnějších řešitelé v ústředním kole MO jsou pozváni na výběrové soustředění MO. Na závěr soustředění je vybráno šest nejlepších soutěžících, kteří následně reprezentují Českou republiku pří Středoevropské matematické olympiádě a při Mezinárodní matematické olympiádě [1]. V letošním školním roce (2014/2015) proběhl již 64. ročník MO. Jednou z velmi oblíbených matematických disciplín, která je často zařazovaná do úloh různé obtížnosti ve všech třech středoškolských kategoriích, je kombinatorika.

Nejstarší dochované texty z kombinatoriky se datují do období staré Číny a Indie, ale počátek systematického studia kombinatoriky nastal až s rozvojem pravděpodobnostního počtu v oblasti hazardních her na přelomu 16. a 17. století. V této době došlo k rozvoji tzv. *klasické kombinatoriky*, která se zabývá především otázkou stanovení počtu všech k-tic z daných n prvků splňující předepsané vlastnosti. K největšímu rozvoji kombinatoriky dochází v průběhu 20. století, kdy jsou kombinatorické postupy a úvahy stále častěji využívány při řešení problémů z oblasti algebry a geometrie, což vede k vnitřní diferenciaci kombinatoriky a vzniku samostatných disciplín (např. diskrétní matematika, teorie grafů apod.) [2].

Cílem této diplomové práce je vytvořit sbírku příkladů z kombinatoriky s využitím úloh zařazených v jednotlivých ročnících matematické olympiády. Práce je členěna do osmi kapitol. V první kapitole jsou zavedeny pojmy, především z teorie množin a klasické kombinatoriky, s nimiž se v dalším textu pracuje. Další kapitoly jsou postupně věnovány pravidlu součtu a součinu, pravidlu bijekce, Dirichletovu principu, principu inkluze a exkluze, metodě rozkladu, metodě rekurze a metodě dílčích problémů. Příklady uvedené v jednotlivých kapitolách jsou podle tématického zaměření členěny do některého z odstavců – úlohy z klasické kombinatoriky, úlohy o číslech, úlohy o geometrických objektech, úlohy o množinách, popřípadě jsou zařazeny do odstavce příklady a úlohy. V mnoha příkladech se využívá více než jedna z uvedených metod a proto jsou příklady přiřazeny k metodě, která při řešení převažuje nebo je její užití hlavní myšlenkou vedoucí k vyřešení celého příkladu. Rozčlenění příkladů k jednotlivým principům a metodám je proto pouze přibližné. V každém odstavci (ze druhé až osmé kapitoly) je vždy několik vyřešených příkladů a dále následují typově podobné neřešené příklady. Neřešené příklady jsou pro snazší odlišení označeny jako úlohy a samostatně číslovány.

V práci je využito dvou typů odkazů na použitou literaturu. První typem jsou klasické odkazy (v hranatých závorkách) na literaturu ze seznamu použité literatury. Druhý typ odkazů je použit u příkladů, které byly převzaty z jednotlivých ročenek MO. Například [MO 42 C – I – 4] odkazuje na čtvrtý příklad domácího kola (I) zařazený do 42. ročníků MO kategorie C.

Kapitola 1

Úvodní pojmy

V úvodní kapitole uvedeme některé pojmy, především z teorie množin a z oblasti klasické kombinatoriky, se kterými se v kombinatorice běžně pracuje.

V první kapitole autor vychází především z literatury [2, 3, 4, 5].

Na úvod uveďme, že kombinatorika se zabývá výhradně *konečnými množinami* (tj. množinami jejichž počet prvků lze vyjádřit celým nezáporným číslem) a proto tuto skutečnost nebudeme v dalším textu uvádět.

Definice 1.1.1 Nechť M je množina, která má n prvků (n je celé nezáporné číslo). *Mohutnost množiny M* (značíme $|M|$) udává počet prvků množiny M, tj. $|M| = n$. Pro prázdnou množinu platí, že $|\emptyset| = 0$.

Definice 1.1.2 Nechť M je množina. *Potenční množinou* množiny M nazýváme množinu všech podmnožin množiny M (značíme ji $\mathcal{P}(\mathcal{M})$).

Definice 1.1.3 Nechť M je neprázdná množina a nechť $a, b \in M$. *Neuspořádanou dvojicí* tvořenou prvky a a b rozumíme množinu $\{a, b\}$. Pro neuspořádanou dvojici tvořenou prvky a a b budeme v dále používat zápis $[a, b]$.

Poznámka. Pro přirozené číslo $k \geq 2$ lze obdobně definovat *neuspořádanou k-tici* tvořenou prvky množiny M, jako libovolnou k-prvkovou podmnožinu množiny M.

Definice 1.1.4 Nechť M je neprázdná množina a nechť $a, b \in M$. *Uspořádanou dvojicí* s prvním prvkem a a druhým prvkem b rozumíme množinu $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Pro uspořádanou dvojici s prvním prvkem a a druhým prvkem b budeme v dalším textu užívat zápis (a, b).

Poznámka. Pro přirozené číslo $k \geq 2$ lze rekurentně definovat *uspořádanou k-tici* prvků z množiny M, tj. jsou-li $a_i \in M$ (pro $i = 1, 2, \ldots, k$), pak

$$(a_1, a_2 \ldots, a_k) = (a_1, (a_2, \ldots, a_k)).$$

Věta 1.1.1 Nechť M je neprázdná množina a nechť $a_i, b_i \in M$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Pak

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \text{ právě tehdy, když } a_i = b_i$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definice 1.1.5 Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou neprázdné množiny. *Kartézským součinem* množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rozumíme množinu

$$A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k);\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k\}$$

a značíme jej

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k.$$

Poznámka. Je-li $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, pak kartézský součin $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ značíme A^n, tj.

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\text{-krát}} = A^k,$$

a nazýváme jej k-tou *kartézskou mocninou* množiny A.

Dále zavedeme dva pojmy, které jsou typické pro oblast kombinatorických úvah a s nimiž se čtenáři jistě setkali při určování jistých k-členných skupin sestavených z daných n prvků. Jsou to pojmy *n faktoriál* a *kombinační číslo*.

Definice 1.1.6 Nechť n je přirozené číslo. Symbol, který se používá ke stručnému zápisu součinu prvních n přirozených čísel, značíme $n!$ a nazýváme *n faktoriál*, tedy

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Definitoricky zavádíme $0! = 1$.

Definice 1.1.7 Nechť $k \leq n$ jsou celá nezáporná čísla. *Kombinační číslo* je symbol $\binom{n}{k}$ (čteme: „n nad k“), který se používá k označení zlomku $\frac{n!}{k!\,(n-1)!}$, tedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-1)!}.$$

Protože určovaní uspořádaných (resp. neuspořádaných) k-tic sestavených z daných n prvků s opakováním nebo bez opakování tvoří při výuce na středních školách hlavní a často jedinou část tématického celku kombinatorika, jsou v druhé části první kapitoly uvedeny jednotlivé pojmy, jenž se vžili pro označení k-členných skupiny sestavených z n prvků (tj. variace, permutace, kombinace), pouze pro připomenutí. Pro čtenáře je nejpřínosnější odvození, resp. metody využívané k odvození jednotlivých vzorců (používaných k vyjádření počtu daných k-členných skupin). K odvození jednotlivých vzorců je využito pravidel součtu a součinu a pravidla bijekce.

Definice 1.1.8 (variace) Nechť $k \leq n$ jsou přirozená čísla. *Variací k-té třídy* z dané n-prvkové množiny (*k-člennou variací* z n prvků) rozumíme každou uspořádanou k-tici sestavenou z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech k-členných variací sestavených z dané n-prvkové množiny budeme označovat symbolem $V_k(n)$.

Věta 1.1.2 Pro počet všech k-členných variací z n prvků platí

$$V_k(n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-činitelů}} = \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Důkaz. Nechť je dána n-prvková množina a k nechť je přirozené číslo takové, že $k \leq n$. Pak výběr prvního členu uspořádané k-tice, sestavené z prvků dané množiny, můžeme provést n způsoby. Druhý člen můžeme po výběru prvního členu vybrat $n-1$ způsoby, protože již nemůžeme použít prvek, který jsme vybrali na místo prvního členu. Pro výběr třetího členu (po výběru prvního a druhého členu) zbývá $n-2$ možností a tak dále, až pro výběr k-tého členu, po výběru všech předcházejících členu, nám zbude $n-(k-1)$ možností. Podle kombinatorického *pravidla součinu* tedy platí

$$V_k(n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k\text{-činitelů}}.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Definice 1.1.9 (permutace) Nechť n je přirozené číslo. *Permutací* z n prvků rozumíme každou uspořádanou n-tici sestavenou z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje právě jednou.

Počet všech permutací z n-prvků budeme označovat symbolem $P(n)$.

Poznámka. Permutace z n prvků je každá variace n-té třídy sestavená z dané n-prvkové množiny.

Věta 1.1.3 Pro počet všech permutací z n prvků platí

$$P(n) = n!.$$

Důkaz. Nechť n je přirozené číslo. Počet všech permutací z n prvků je roven počtu všech variací n-té třídy z n prvků a tedy

$$P(n) = V_n(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Podle definice faktoriálu tedy platí, že $P(n) = n!$. Tím je důkaz ukončen.

Definice 1.1.10 (kombinace) Nechť $k \leq n$ jsou celá nezáporná čísla. *Kombinací k-té třídy* z dané n-prvkové množiny (*k-člennou kombinací* z n prvků) rozumíme každou neuspořádanou k-tici sestavenou z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Počet všech kombinací k-té třídy z dané n-prvkové množiny budeme označovat symbolem $K_k(n)$.

Poznámka. Kombinace k-té třídy z n-prvkové množiny je k-prvková podmnožina dané n-prvkové množiny.

Například úlohu, určit kolik dvojjazyčných slovníků je třeba pro přímý překlad anglického, německého a českého jazyka (z každého jazyka do zbývajících dvou jazyků), lze chápat jako úlohu na určení všech dvouprvkových podmnožin dané tříprvkové množiny.

Věta 1.1.4 Pro počet všech k-členných kombinací z n prvků platí

$$K_k(n) = \binom{n}{k}.$$

Důkaz. Nechť $k \leq n$ jsou celá nezáporná čísla. Pak libovolných k prvků z dané n-prvkové množiny určuje právě jednu neuspořádanou k-tici a současně můžeme z těchto k prvků vytvořit $k!$ uspořádaných k-tic.

Uvažujme nyní všechny variace k-té třídy z dané n-prvkové množiny a uspořádejme je do skupin tak, že ve stejné skupině budou variace se stejnými prvky (variace lišící se pouze pořadím prvků). Počet variací v každé skupině je roven počtu všech permutací z k prvků, tedy $k!$. Každá skupina přestavuje jednu neuspořádanou k-tici z dané n-prvkové množiny a současně k-prvkovou podmnožinu dané n-prvkové množiny.

Počet všech námi vytvořených skupin tedy odpovídá počtu k-členných kombinací z dané n-prvkové množiny. Protože jsou jednotlivé skupiny po dvou disjunktní a přitom je v každé skupině právě $k!$ variací platí podle *pravidla součtu*, že

$$V_k(n) = k! \cdot K_k(n).$$

Odtud plyne

$$K_k(n) = \frac{1}{k!} \cdot V_k(n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Tím je věta dokázána.

Definice 1.1.11 (variace s opakováním) Nechť k, n jsou přirozená čísla. *Variací k-té třídy s opakováním* z dané n-prvkové množiny (*k-člennou variací s opakováním* z n prvků) rozumíme každou uspořádanou k-tici sestavenou z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet všech k-členných variací s opakováním sestavených z dané n-prvkové množiny budeme označovat symbolem $V_k'(n)$.

Věta 1.1.5 Pro počet všech k-členných variací s opakováním z n prvků platí

$$V_k'(n) = n^k.$$

Důkaz. Nechť k, n jsou přirozená čísla. Pak každý člen uspořádané k-tice sestavené z prvků dané n-prvkové množiny může vybrat právě n způsoby. Protože se prvky mohou v námi uvažované uspořádané k-tici opakovat, je výběr jednotlivých prvků nezávislý a podle *pravidla součinu* platí

$$V_k'(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n\text{-činitelů}} = n^k.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Definice 1.1.12 (permutace s opakováním) Nechť $k \geq n$ jsou přirozená čísla. *Permutací s opakováním* z n prvkové množiny rozumíme každou uspořádanou k-tici sestavenou z prvků této množiny tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

Počet všech permutací s opakováním z n-prvků, v nichž se první prvek opakuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát s tak dále až n-tý prvek k_n-krát, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, budeme označovat symbolem $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Poznámka.

(i) Definici 1.1.12 lze rozšířit i pro případ kdy $k_i = 0$, tj. pro případ kdy se ve vybrané k-tici i-tý prvek nevyskytuje.

(ii) Jestliže $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$ pak

$$P'(1, 1, \ldots, 1) = \frac{1 + 1 + \ldots + 1}{1!1! \ldots 1!} = n! = P(n).$$

Je zřejmé, že permutace bez opakování z n prvků jsou speciálním případem permutací s opakováním z n prvků.

Věta 1.1.6 Pro počet všech permutací s opakováním z n-prvků, v nichž se první prvek opakuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát a tak dále až n-tý prvek k_n-krát, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, platí

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2! \ldots k_n!} = \frac{k!}{k_1!k_2! \ldots k_n!}.$$

Důkaz. Nechť $k \geq n$ jsou přirozená čísla. Mějme uspořádanou k-tici složenou z prvků dané n-prvkové množiny tak, že se v ní první prvek (označme ho A) opakuje k_1-krát, druhý prvek (označme ho B) opakuje k_2-krát a tak dále, až n-tý prvek (označme ho N) opakuje k_n-krát (přitom platí, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$). Uvažujme nyní všechny uspořádané k-tice, ve kterých se i prvky stejného typu navzájem liší (tj. v dané uspořádané k-tici se nevyskytuje prvek A k_1-krát, prvek B k_2-krát, atd. až prvek N k_n-krát, ale nalezneme zde prvky $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}$, atd. až prvky $N_1, N_2, \ldots, N_{k_n}$).

Počet všech takto vytvořených uspořádaný k-tic odpovídá počtu všech permutací bez opakování z k prvku, tj.

$$P(k) = k! = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!.$$

Rozdělme námi vytvořené uspořádané k-tice do skupin tak, že ve stejné skupině jsou ty uspořádané k-tice, v nichž jsou zaměněny pouze prvky stejného typu. V každé skupině tedy existuje pro prvky typu A $k_1!$ permutací, pro prvky typu B $k_2!$ permutací, atd. až pro prvky typu N $k_n!$ permutací. Podle *pravidla součinu* tedy každá skupina obsahuje $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!$ uspořádaných k-tic. Uvědomme si, že každá skupina představuje právě jednu permutaci s opakování z n prvků, v níž se první prvek opakuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát, atd. až n-tý prvek k_n-krát. Pak podle *pravidla součtu a pravidla součinu* platí

$$P(k) = k! = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)! = P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) \cdot (k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!).$$

Tedy platí, že

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

Tím je důkaz ukončen.

Definice 1.1.13 (kombinace s opakováním) Nechť k je celé nezáporné číslo a n je přirozené číslo. *Kombinací k-té třídy s opakováním* z dané n-prvkové množiny (*k-člennou kombinací s opakováním* z n prvků) rozumíme každou neuspořádanou k-tici sestavenou z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek může opakovat.

Počet všech kombinací k-té třídy s opakováním z dané n-prvkové množiny budeme označovat symbolem $K'_k(n)$.

Věta 1.1.7 Pro počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků platí

$$K'_k(n) = \binom{k+n-1}{k}.$$

Důkaz. Nechť k je celé nezáporné číslo a n je přirozené číslo. Uvažujme všechny neuspořádané k-tice vytvořené z prvků dané n-prvkové množiny $M = \{A, B, C, \ldots, N\}$

tak, že se v ní prvky mohou opakovat, tj. všechny kombinace s opakováním z n prvků. Označme jako $p(i)$ (kde $i \in M$) počet výskytů prvku i ve vybrané neuspořádané k-tici. Uvědomme si, že pro danou neuspořádanou k-tici je $\sum_{i \in M} p(i) = k$.

Přiřaďme nyní každé neuspořádané k-tici posloupnost koleček a svislých čar (oddělovačů) tak, že postupně napíšeme $p(A)$ koleček, svislou čáru, $p(B)$ koleček, svislou čáru, $p(C)$ koleček, svislou čáru, ..., svislou čáru a $p(N)$ koleček. Například pro čtyřprvkovou množinu $M = \{A, B, C, D\}$ odpovídá neuspořádané pětici $[A, A, C, C, D]$ posloupnost $(\circ\circ || \circ\circ | \circ)$ a obráceně posloupnosti $(\circ | \circ | \circ\circ\circ |)$ přiřadíme neuspořádanou pětici $[A, B, C, C, C]$. Označíme-li počet prvků vzniklé posloupnosti l, pak platí

$$
\begin{aligned}
l &= p(A) \text{ koleček } + \text{ svislá čára } + p(B) \text{ koleček } + \text{ svislá čára } + \\
&\quad + p(C) \text{ koleček } + \text{ svislá čára } + \ldots + \text{ svislá čára } + p(N) \text{ koleček } = \\
&= [p(A) + p(B) + p(C) + \ldots + p(N)] \text{ koleček } + (n-1)\text{-svislých čar } = \\
&= k\text{-koleček } + (n-1)\text{-svislých čar.}
\end{aligned}
$$

Podle výše popsané konstrukce přiřadíme každé neuspořádané k-tici právě jednu uspořádanou $(k+n-1)$-tici, ve které se opakují právě dva prvky (kolečko a svislá čára) a naopak každé uspořádané $(k+n-1)$-tici, v níž se opakují právě dva prvky, jsme schopni vždy přiřadit právě jednu neuspořádanou k-tici (vytvořili jsme tedy bijekci). Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků leze tedy ztotožnit s počtem všech permutací s opakováním dvou prvků, v nichž se první prvek opakuje k-krát a druhý prvek $(n-1)$-krát. Odtud plyne

$$K'_k(n) = P'(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Věta je tímto dokázána.

V úlohách o číslech budeme často využívat pozičního zápisu daných přirozených čísel v desítkové soustavě podle následující věty.

Věta 1.1.8 Nechť je dáno přirozené číslo a. Pak jej lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, kde n je přirozené číslo, čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou některá z čísel $0, 1, \ldots, 9$ a platí, že $a_n \neq 0$.

V dalších úlohách o číslech budeme využívat rozklad daného čísla na součin prvočísel a rozklad čísla pomocí binomické věty.

Věta 1.1.9 Nechť je dáno přirozené číslo $q > 1$. Pak jej vždy můžeme zapsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$q = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n},$$

kde $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ jsou prvočísla a $r_1, r_2, \ldots, r_n$ jsou přirozená čísla.

Definice 1.1.14 Rozklad přirozeného čísla q na n činitelů uvedený v předcházející větě se nazývá *kanonický (prvočíselný) rozklad čísla q.*

Věta 1.1.10 (binomická věta) Pro všechna reálná (komplexní) čísla a, b a každé celé nezáporné číslo n platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

neboli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

V úlohách z geometrie se budeme často zabývá otázkou rozmístění několika útvarů U_1, $U_2, \ldots, U_n$ do daného útvaru U tak, aby se tyto útvary (tj. útvary $U_1, U_2, \ldots, U_n$) nepřekrývaly, popřípadě aby daný útvar U celý vyplnili.

Definice 1.1.15 Řekneme, že útvary U_1 a U_2 se *překrývají*, právě když mají aspoň jeden společný vnitřní bod. V opačném případě, řekneme, že útvary U_1 a U_2 se *nepřekrývají.*

Definice 1.1.16 Nechť je dán útvar U a systém útvarů $S = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Řekneme, že systém útvarů S

(i) *pokrývá* útvar U (popřípadě, že útvar U je *pokryt* systémem S), pakliže platí $U \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$,

(ii) je *uložen* v útvaru U, jestliže se nepřekrývají žádné dva útvary U_i a U_j $(i \neq j)$ ze systému S a navíc platí, že $\cup_{i=1}^{n} U_i \subseteq U$,

(iii) *vyplňuje* útvar U (případně, že útvar U je *vyplněn* systémem S), je-li útvar U, v němž je systém S uložen, zároveň systémem S pokryt (tj. platí, že $\cup_{i=1}^{n} U_i = U$).

Kapitola 2

Pravidlo součtu a součinu

Mezi nejjednodušší a běžně užívaná pravidla v kombinatorice patří pravidlo součtu a pravidlo součinu.

Pojmy uvedené v druhé kapitoly jsou čerpány z literatury [3, 4].

Věta 2.1.1 (pravidlo součtu) Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, které jsou po dvou disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$) a nechť $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Pak pro počet prvků množiny A platí

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Důkaz. Zřejmě platí, že každý prvek $a \in A$ patří právě do jedné z množin A_i, kde $i = 1, ..., n$. Proto je na obou stranách dokazované rovnosti započítán právě jednou a počet prvků na pravé straně je shodný s počtem prvku na levé straně. Tím je tvrzení dokázáno.

Věta 2.1.2 (pravidlo součinu) Nechť n je přirozené číslo. Uvažujme uspořádanou n-tici takovou, že její první člen lze vybrat k_1 způsoby, druhý člen v závislosti na výběru prvního členu k_2 způsoby a tak dále až n-tý člen v závislosti na výběru prvního, druhého až $n-1$ členu k_n způsoby. Pak počet všech takovýchto uspořádaných n-tic je roven součinu $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Důkaz. Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce vzhledem k n.

(i) Pro $n = 1$ tvrzení platí.

(ii) Nechť dané tvrzení platí pro určité $n \geq 2$. Ukážeme nyní, že tvrzení platí také pro $n + 1$.

Všechny uspořádané $(n + 1)$-tice rozdělíme do skupin tak, že ve stejné skupině budou právě ty $(n+1)$-tice, které se shodují v prvních n-prvcích. Takto vytvořené skupiny jsou jistě po dvou disjunktní. Protože $(n+1)$-ní prvek můžeme vybrat k_{n+1} způsoby, obsahuje každá skupina právě k_{n+1} uspořádaných $(n+1)$-tic.

Podle indukčního předpokladu odpovídá počet skupin součinu $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$. S využitím pravidla součtu dostáváme, že celkový počet všech uspořádaných $(n+1)$-tic lze vyjádřit jako součin $(k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n) \cdot k_{n+1} = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{n+1}$.

Uvedené tvrzení tedy platí i pro přirozené číslo $n+1$.

Spojením částí (i) a (ii) je dokázáno, že dané tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo n.

Tím je důkaz ukončen.

Poznámka.

(i) Je-li $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uspořádaná n-tice taková, že každý prvek x_i patří do nějaké neprázdné konečné množiny A_i (kde $i = 1, \ldots, n$) pak pravidlo součinu udává počet všech takových to uspořádaných n-tic, tj. počet prvků kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

(ii) V mnoha příkladech se užívá pravidlo součtu a součinu společně.

2.1 Úlohy z klasické kombinatoriky

V prvním odstavci této kapitoly uvedeme několik příkladů a úloh, z oblasti klasické kombinatoriky, která je čtenářům jistě dobře známa.

Příklad 2.1.1

Určitá dopravní linka vyjíždí z dané zastávky vždy v celou hodinu, v sudých hodinách jezdí v intervalu 15 minut a v lichých hodinách v intervalu 20 minut. Kolik dopravních spojů této linky lze využít mezi 8:00 a 11:59?

Řešení.

Zkoumejme danou úlohu ve čtyřech hodinových intervalech:

8:00 - 8:59 – 4 spoje

9:00 - 9:59 – 3 spoje

10:00 - 10:59 – 4 spoje

11:00 - 11:59 – 3 spoje.

Takto jsme získali čtyři navzájem disjunktní množiny (čtyři intervaly), jejichž sjednocení je celá zkoumaná množina (interval 8:00 - 11:59). Podle pravidla součtu tedy v době mezi 8:00 a 11:59 můžeme využít 14 spojů zkoumané dopravní linky.

Příklad 2.1.2 [MO 38 B – II – 2]

Devět judistů se rozhodlo uspořádat vylučovací turnaj následujícím způsobem: V každém kole se z dosud neporažených zápasníků určí losem dvojice zápasníků, která se utká. Vítěz posledního (osmého) zápasu se stává vítězem turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů takovéto soutěže.

Řešení.

Do prvního kola může nastoupit 9 zápasníků, z nichž lze losem vytvořit $\binom{9}{2}$ dvojic, přičemž zvítězit může první anebo druhý zápasník, tj. existuje celkem $2\cdot\binom{9}{2}$ možností, jak může první kolo proběhnout. Do druhého kola postoupí vítěz prvního kola a zbylých sedm zápasníků, tj. celkem 8 zápasníků. Z nich opět losem určíme jednu dvojici, která se utká ve druhém kole. Možných průběhů druhého kola je (vzhledem k tomu, že opět může zvítězit kterýkoliv z dané dvojice zápasníků) $2\cdot\binom{8}{2}$. Takto určíme všechny možné průběhy jednotlivých kol.

Počet všech možných průběhů této soutěže je podle pravila součinu

$$2\cdot\binom{9}{2}\cdot 2\cdot\binom{8}{2}\cdot\ldots\cdot 2\cdot\binom{2}{2} = 9\cdot 8\cdot 8\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 9\cdot(8!)^2.$$

Příklad 2.1.3 [MO 38 B – S – 1]

Je dáno přirozené číslo n. Určete počet permutací $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, pro která je součin

$$(a_1 - 1)\cdot(a_2 - 2)\cdot\ldots\cdot(a_n - n)$$

číslo liché.

Řešení.

Daný součin bude lichý, pokud žádný z činitelů není číslo sudé. To znamená, že pro i liché (kde $i = 1, 2\ldots, n$) musí být číslo a_i sudé a naopak pro i sudé musí být a_i liché číslo. To je možné, jen pokud je n sudé číslo; jinak by mezi čísly $1, 2, \ldots, n$ nebyl stejný počet sudých a lichých čísel. Čísla $a_1, a_3, \ldots a_{n-1}$ jsou tedy sudá čísla a čísla $a_2, a_4, \ldots, a_n$ jsou lichá. Počet možností jak uspořádat sudá (resp. lichá) čísla je $(\frac{n}{2})!$ (jedná se o permutací čísel $1, 3, \ldots, n-1$, resp. čísel $2, 4, \ldots, n$).

Počet všech hledaných permutací je $((\frac{n}{2})!)^2$, pro n sudé, resp. 0 pro n liché.

Úloha 2.1.1 [MO 32 Z – III – 3]

Na číselnou osu umístíme do obrazu čísla O figurku. Figurkou pohybujeme tak, že ji při každém tahu přemístíme do obrazu sousedního celého čísla, doprava nebo doleva.

Figurka se může vracet, obrazem některého čísla může projít několikrát. Z obrazu čísla O se máme dostat do obrazu čísla 5 právě devíti tahy. Kolika různými cestami může figurka jít?

Úloha 2.1.2 [MO 43 C – I – 3]

Šachového turnaje hraného systéme každý s každým se zúčastnili jen prváci a druháci. Navzdory tomu, že druháků bylo třikrát více než prváku, získali dohromady jen o 3 body více než prváci. Určete počet žáků, kteří se zúčastnili turnaje, víte-li že za výhru se uděluje jeden bod, za remízu půl bodu a za prohru žádný bod.

Úloha 2.1.3 [MO 38 A – S – 1]

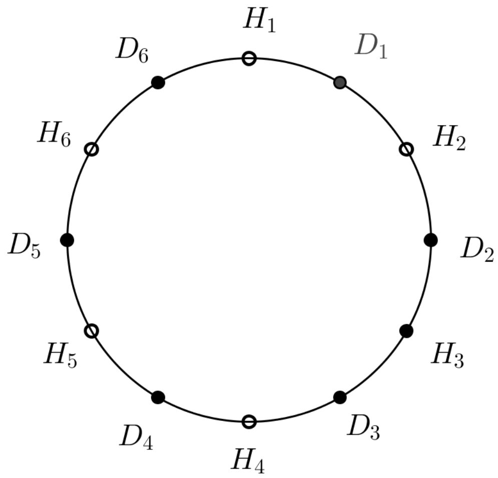
Množina M má právě n prvků. Kolik existuje dvojic množin (B, C) takových, že $B \subset C \subset M$? (Prázdná množina a množina X jsou podmnožiny množiny X.)

Úloha 2.1.4 [MO 16 A – P – 3]

Ve třídě je 15 dvoumístných lavic a 27 žáků. Kolika způsoby je možno žáky rozsadit, jestliže určití dva žáci mají sedět vedle sebe (z výchovných důvodů) a žádná lavice nemá zůstat prázdná?

Úloha 2.1.5 [MO 17 D – P – 2]

Při slavnosti sedí u kulatého stolu 6 hochů $H_1, H_2, \ldots, H_6$ a 6 dívek $D_1, D_2, \ldots, D_6$, rozmístěných tak, že vedle sebe sedí vždy střídavě chlapec a dívka (viz obr. 2.1).



Obr. 2.1

Před koncem slavnosti odešli dva chlapci a dvě dívky. Přitom obě místa, která uvolnili chlapci, oddělují obě místa uvolněná děvčaty. (Např. mohli odejít H_1, H_3, D_2, D_5, ale nemohly odejít H_1, H_3, D_4, D_6.)

Zjistěte, kolika způsoby lze vybrat takovou dvojici chlapců a dvojici děvčat.

2.2 Úlohy o číslech

V tomto odstavci ukážeme několik aplikací pravidel součtu a součinu v úlohách o číslech.

Příklad 2.2.1

Určete součet přirozených čísel 1 až 50, v jejichž dekadické zápise se žádná číslice neopakuje.

Řešení.

Nejprve, s využitím známého vzorce pro určení součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti, zjistíme, že součet prvních padesáti přirozených čísel je $\frac{50}{2}(1+50) = 1275$. Přirozená čísla, která jsou menší než číslo padesát a v nichž se některá číslice opakuje jsou čísla 11, 22, 33 a 44. Jejich součet je 110. S využitím pravidla součtu, tedy námi hledaný součet získáme, jako rozdíl součtu prvních padesáti přirozených čísel a součtu všech čísel menších než padesát, v nichž se některá číslice opakuje, tj. $1275-110 = 1165$.

Příklad 2.2.2 [MO 28 C – I – 2]

Zjistěte počet všech uspořádaných trojic přirozených čísel x, y, z, které vyhovují rovnici

$$xyz = 1\,000\,000.$$

Řešení.

Rozkladem čísla 1 000 000 na prvočinitele, (tj. $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 2^5$) zjistíme, že pro uspořádanou trojici čísel x, y, z platí

$$x = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}, \qquad y = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}, \qquad z = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3},$$

kde α_1, β_i jsou celá nezáporná čísla taková, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6.$$

Pro $i, j, k = 1, 2, 3$ platí:

$\alpha_i\alpha_j\alpha_k$	600	510	420	411	330	321	222
Počet čísel ve tvaru $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$	3	6	6	3	3	6	1

Počet všech čísel $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$ a tedy i čísel $\beta_i\beta_j\beta_k$ je tedy 28. Počet všech uspořádaných trojic x, y, z je podle kombinatorického pravidla součinu $28 \cdot 28 = 784$.

Úloha 2.2.1 [MO 28 B – I – 1]

Nechť symbol $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ ($x_1 \neq 0$) označuje dekadický zápis přirozeného čísla. Kolik je navzájem různých sedmiciferných přirozených čísel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, pro které platí

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_6x_5x_4x_3x_2x_1 = x_7x_7x_7x_7x_7x_7\,?$$

Úloha 2.2.2 [MO 28 C – II – 3a]

Označme M množinu všech sedmiciferných čísel sestavených z číslic $1, 2, \ldots, 7$ bez opakování.

a) Určete počet všech čísel z množiny M dělitelných číslem 25.

b) Určete počet všech čísel z množiny M dělitelných číslem 15.

Úloha 2.2.3 [MO 44 A – II – 1]

Kolik patnácticiferných čísel složených z číslic 3 a 8 je dělitelných 11?

Úloha 2.2.4 [MO 1 B – I – 6]

Buď n přirozené číslo. Kolik je mezi čísly n^2 a $(n+2)^2$ přirozených čísel, z nichž žádné není druhou mocninou přirozeného čísla?

Úloha 2.2.5 [MO 51 C – II – 1]

Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leq a < b \leq 86$), pro která je součin ab dělitelný třemi.

Úloha 2.2.6 [MO 56 B – II – 3]

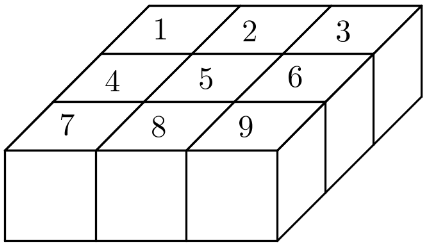
Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $(a-b)(b-c) > 0$. Dokažte, že z číslic $0, 1, \ldots, 9$ je možno sestavit více něž 25 000 desetimístných vlnitých čísel, které obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice 0 nemůže být na prvním místě).

2.3 Úlohy o geometrických objektech

V posledním odstavci druhé kapitoly se budeme zabývat příklady o geometrických objektech, které lze vyřešit užitím pravidla součtu a součinu.

Příklad 2.3.1 [MO 32 Z – III – 3 (SR)]

Dřevěný kvádr s rozměry 3 cm $\times$ 3 cm $\times$ 1 cm celý obarvíme červeně, potom ho čtyřmi rovinami rozřežeme na 9 kostek o rozměrech 1 cm $\times$ 1 cm $\times$ 1 cm. Vrchní stěny kostiček označíme čísly 1 až 9 (viz obr. 2.2) a kostky promícháme. Kolika různými způsoby lze z kostiček opět složit červený kvádr, v němž jsou všechna čísla na horní stěně?



Obr. 2.2

Řešení.

Kostka s číslem 5 musí ležet vždy uprostřed – tj. máme jedinou možnost, jak kostku s číslem 5 umístit. Kostky s čísly 1, 3, 7 a 9 musí být vždy v rozích kvádru – existuje celkem $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ takových to rozmístění. Obdobně existuje i 24 možností, jak rozmístit zbylé čtyři kostky. Podle pravidla součinu lze z daných kostiček složit kvádr celkem $1 \cdot 24 \cdot 24 = 576$ způsoby. V tomto počtu jsou ale započítány vždy čtyři kvádry, které jsou vůči sobě pouze pootočeny o 90°. Budeme-li takovéto kvádry považovat za shodné, pak je jen $\frac{576}{4} = 144$ možností, jak daný kvádr sestavit.

Příklad 2.3.2 [MO 29 Z – II – 3]

Je dán pravidelný 33-úhelník $A_1A_2\ldots A_{33}$. Určete počet úseček spojujících jeho vrcholy, které mají aspoň jeden společný bod s trojúhelníkem $A_{11}A_{22}A_{33}$.

Řešení.

Z každého z bodu A_1 až A_{10} vychází vždy 23 úseček, které mají aspoň jeden společný bod s daným trojúhelníkem $A_{11}A_{22}A_{33}$ – jsou to úsečky spojující bod A_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ s body $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{33}$. Obdobně vychází vždy po 23 úsečkách z každého z bodů $A_{12}, A_{13}, \ldots A_{21}$ a z každého z bodů $A_{23}, A_{24}, \ldots, A_{32}$.

Všechny úsečky vycházející z bodů A_{11}, A_{22}, A_{33} a spojující tyto body s ostatními body daného 33-úhelníku mají zřejmě vždy aspoň jeden společný bod s trojúhelníkem $A_{11}A_{22}A_{33}$. Pro každý bod A_{11}, A_{22}, A_{33} je těchto úseček 32.

Protože jsme každou z výše popsaných úseček započetli dvakrát je hledaný počet

$$\frac{30 \cdot 23 + 3 \cdot 32}{2} = 393.$$

Úloha 2.3.1 [MO 44 B – S – 2]

V rovině je dáno n bodů. Jestliže je navzájem pospojujeme přímkami, procházejí tyto přímky danými body a vytvářejí nové průsečíky. Dokažte, že počet těchto nových průsečíků není větší než

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Úloha 2.3.2 [MO 3 B – I – 12]

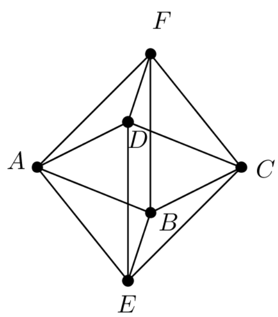
Obdélník, jehož rozměry jsou přirozená čísla a, b, je rozdělen na ab shodných čtverců. Stočme tento obdélník do pláště rotačního válce tak, aby strana obdélníka, která má velikost a, se stala obvodem podstavy tohoto válce. Vrcholy zmíněných shodných čtverců vytvoří na plášti tzv. mřížové body. Každé dva různé mřížové body spojíme přímkou, kterou nazveme příčka.

a) Kolik je těch příček, které procházejí vnitřkem vytvořeného válce?

b) Dostaneme více takových příček, když stočíme větší nebo menší stranu obdélníka v podstavnou kružnici rotačního válce?

Úloha 2.3.3 [MO 43 C – II – 4]

Tentokrát si náš starý známí pavouk Hubert vybral na svoje hry v kabinetě matematiky drátěný model pravidelného osmistěnu. Jeho stěny tvoří 8 rovnostranných trojúhelníku (viz obr. 2.3). Na každé stěně pospojoval Hubert středy příslušných hran. Z kolika cest nejkratší délky si může Hubert vybrat, aby se v takto vzniklé síti pavučin a drátů dostal z vrcholu E do vrcholu F.



Obr. 2.3

Úloha 2.3.4 [MO 15 D – P – 4]

Vrcholy, středy stran a průsečík úhlopříček čtverce tvoří skupinu devíti bodů. Kolik trojúhelníků má všechny tři vrcholy v těchto devíti bodech?

Kapitola 3

Pravidlo bijekce

V úlohách o určení počtu prvků dané množiny často s výhodou ztotožníme každý prvek z dané množiny s právě jedním prvkem z množiny, jejíž počet prvků známe, nebo jsme ho schopni snadno zjistit. Přitom požadujeme, aby měl také každý prvek ze zvolené (nové) množiny právě jeden vzor v zadané množině, tj. snažíme se nalézt bijektivní zobrazení mezi těmito dvěma množinami.

V této kapitole je čerpáno z literatury [6, 7].

Věta 3.1.1 (pravidlo bijekce) Nechť A, B jsou konečné množiny. Pak $|A| = |B|$ (množiny A, B mají stejný počet prvků) právě tehdy, když existuje *bijekce* (vzájemně jednoznačné zobrazení) $\varphi : A \to B$.

Poznámka. Užijeme-li při řešení příkladu pravidla bijekce musíme:

(i) Nalézt vhodnou množinu jejíž počet prvků známe, nebo jsme ho schopni snadno určit.

(ii) Přesvědčit se, že mezi novou a zadanou množinou existuje bijektivní zobrazení.

(ii) Určit počet prvků nové množiny.

3.1 Příklady a úlohy

V tomto odstavci uvedeme několik základních příkladu na aplikaci pravidla bijekce.

Příklad 3.1.1

Kolika způsoby je možné z řady 25 chlapců sestavit družstvo na volejbal, pokud mezi vybranými chlapci nemají být žádní dva, kteří stojí vedle sebe?

Řešení.

Chlapcům můžeme přiřadit posloupnost nul a jedniček tak, že vybraným šesti chlapcům přiřadíme jedničku a ostatním nulu. Takové přiřazení je jistě vzájemně jednoznačné. Našli jsme tedy bijekci. Stejný počet řešení jako daný příklad má tedy i úloha určit kolika způsoby, lze umístit do posloupnosti 19 nul 6 jedniček tak, aby žádné dvě jedničky nestáli vedle sebe. 19 nul vytváří 20 přihrádek, do nichž lze umístit 6 jedniček právě $\binom{20}{6}$ způsoby.

Volejbalové družstvo lze tedy sestavit právě $\binom{20}{6} = 38\,760$ způsoby.

Příklad 3.1.2 [MO 1 A – I – 12]

Buď $ABCD$ čtverec. Uvnitř strany AB zvolme m různých bodů a veďme jimi rovnoběžky se stranou BC. Podobně uvnitř strany BC zvolme n různých bodů a veďme jimi rovnoběžky ke straně AB.

Kolik pravoúhlých rovnoběžníků vzniklo provedenou konstrukcí?

Řešení.

Popsanou konstrukcí vzniknou dvě soustavy rovnoběžných přímek – první je tvořena $m+2$ přímkami (započítáváme i přímky, na nichž leží strany čtverce) a druhá $n+2$ přímkami. Protože strany každého pravoúhlého rovnoběžníku leží na dvou dvojicích rovnoběžných přímek a naopak každé dvě dvojice navzájem různých rovnoběžných přímek vymezují právě jeden pravoúhlý rovnoběžník, je podle pravidla bijekce hledaný počet rovnoběžníků stejný jako počet dvou dvojic navzájem různých rovnoběžných přímek – první dvě rovnoběžky jsou z první soustavy rovnoběžek a druhé dvě rovnoběžky jsou z druhé soustavy rovnoběžek.

V první soustavě lze vytvořit $\binom{m+2}{2}$ rovnoběžek a ve druhé soustavě $\binom{n+2}{2}$ rovnoběžek. Počet všech hledaných pravoúhlých rovnoběžníků je podle pravidla součinu

$$\binom{m+2}{2} \cdot \binom{n+2}{2}.$$

Příklad 3.1.3 [MO 39 A – S – 2]

V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Pak existuje aspoň $\frac{1}{6}n(n-1)$ trojúhelníků s vrcholy v daných bodech, které neobsahují žádný další z daných bodů. Dokažte.

Řešení.

Vybereme libovolné body A, B ze zadaných n bodů. Dále určíme bod Z (ze zadaných bodů) tak, aby výška trojúhelníku ABC na stranu AB byla co nejmenší. V takovém případě už nebude trojúhelník ABC obsahovat žádný ze zbylých zadaných bodů.

Ke každé dvojici daných bodů jsme tedy schopni určit jednoznačně trojúhelník splňující dané předpokladů. Celkem lze takto vybrat $\binom{n}{2}$ dvojic. Protože má trojúhelník tři strany a každá strana je určena právě jednou dvojicí ze zadaných n bodů, existuje aspoň

$$\frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{1}{6}n(n-1)$$

trojúhelníků splňující dané předpoklady.

Úloha 3.1.1

V jazykové učebně je lavice ve tvaru půlkružnice o 16 místech. Určete, kolika způsoby je v této učebně možné na písemný test rozsadit 7 žáků tak, aby mezi každými dvěma žáky bylo aspoň jedno volné místo?

Úloha 3.1.2

Pan Josefi, majitel prosperující firmy zabývající se kovovýrobou, koupil od sousední firmy halu s půdorysem obdélníku o rozměrech 50×120 metrů. Jediný vjezd do této haly je ale na protilehlé straně (120 metrů dlouhé), než je stávající kovovýrobní komplex. Pan Josefi se proto rozhodl původní vjezd zazdít a vybourat tři nová vrata z druhé strany. Při prozkoumaní stavební dokumentace haly zjistil, že stěna haly je tvořena nosnými pilíři, které jsou od sebe vzdáleny dva metry (dva pilíře jsou umístěny i v rozích stěny). Nová vrata mají být široká aspoň 3,5 metru. Z důvodu statiky objektu lze odstranit jen pilíře, které nestojí vedle sebe. Kolika způsoby může pan Josefi vybourat tři nové vjezdy?

Úloha 3.1.3 [MO 43 A – III – 3]

Nechť je dán konvexní $2n$-úhelník M. Délkou úhlopříčky rozumíme počet stran $2n$-úhelníka M, které tato úhlopříčka od daného $2n$-úhelníku M odřezává. Nechť je v $2n$-úhelníku M vyznačeno n úhlopříček tak, že z každého vrcholu vychází právě jedna. Potom počet úhlopříček sudé délky je sudý. Dokažte.

Úloha 3.1.4 [MO 54 A – S – 1]

Určete počet všech nekonečných aritmetických posloupností celých čísel, které mají mezi svými prvními deseti členy obě čísla 1 a 2005.

Kapitola 4

Dirichletův princip

Následující kapitola je věnována tzv. *Dirichletovu (přihrádkovému) principu*, který je důležitým a často používaným kombinatorickým principem v mnoha úlohách především existenčního charakteru.

Pojmy uvedené v této kapitole jsou čerpány z literatury [3, 8].

Nejjednodušší tvar Dirichletova principu uvádí následující věta.

Věta 4.1.1 Nechť je $k+1$ předmětů uloženo do k přihrádek. Pak existuje aspoň jedna přihrádka, ve které jsou nejméně dva předměty.

Při řešení složitějších úloh pracujeme se zobecněným tvarem Dirichletova principu.

Věta 4.1.2 Nechť je $nk+1$ předmětů uloženo do k přihrádek. Pak existuje aspoň jedna přihrádka, ve které je nejméně $n+1$ předmětů.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť m_i (pro $i = 1, 2, \ldots, k$) udává počet předmětů v i-té přihrádce. Předpokládejme sporem, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ je $m_i \leq n$. Pak ale platí

$$nk + 1 = m_1 + m_2 + \ldots + m_k \leq \underbrace{n + n + \ldots + n}_{k\text{-krát}} = nk,$$

což je spor. Tím je dané tvrzení dokázáno.

V úlohách z geometrie budeme pracovat s následujícím zněním Dirichletova principu.

Věta 4.1.3 Nechť je v rovině dán útvar U a konečný systém útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_n$, které útvar U pokrývají tak, že hranice útvaru U je totožná s hranicí systému útvaru $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Je-li S obsah útvaru U a jsou-li $S_1, S_2, \ldots, S_n$ po řadě obsahy útvarů

$U_1, U_2, \ldots U_n$ a platí-li, že
$$S < S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$
pak se aspoň dva z útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_n$ překrývají.

Důkaz. Nechť je dán v rovině útvar U a konečný systém útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_n$, jejichž hranice je totožná s hranicí útvaru U. Předpokládejme dále sporem, že se pak žádné dva útvary ze systému $U_1, U_2, \ldots, U_n$ nepřekrývají. To ale znamená, že útvar U je systémem útvarů $U_1, U_2, \ldots, U_n$ vyplněn a tedy
$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$
kde S je obsah útvaru U a $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jsou po řadě obsahy útvarů $U_1, U_2, \ldots U_n$. A to je spor. Tím je důkaz proveden.

4.1 Úlohy z klasické kombinatoriky

V prvním odstavci ukážeme využití Dirichletova principu, při řešení příkladů z oblasti klasické kombinatoriky a z oblasti teorie množin.

Příklad 4.1.1 [MO 42 C – I – 4]

V matematické soutěži řešil každý žák 30 úloh. Za správně vyřešenou úlohu obdržel 4 body, špatně vyřešená úloha znamenala -1 bod, 0 bodů bylo za úlohu, kterou neřešil. Kolik muselo být účastníků, abychom mohli s jistotou tvrdit, že dva žáci skončili se stejným počtem bodů?

Řešení.

Každý žák mohl v soutěží dosáhnout celkový bodový součet od -30 bodů (jestliže řešil všech 30 úloh špatně) až do 120 bodů (při správném vyřešení všech 30 úloh) s výjimkou součtu 119, 118, 117, 114, 113 a 109 bodů, které se při daném bodovacím systému nedají žádným způsobem dosáhnout. Možných výsledků s soutěži je tedy $151 - 6 = 145$. Podle Dirichletova principu to znamená, že když se soutěže zúčastní aspoň 146 žáků, můžeme s jistotou tvrdit, že aspoň dva žáci skončili se stejným počtem bodů.

Příklad 4.1.2 [MO 37 B – II – 2]

Dokažte, že na šachovnici 8×8 nelze rozmístit sedm střelců tak, aby všechna pole šachovnice byla ohrožena.

Řešení.

Máme-li rozmístit sedm střelců na šachovnici 8×8, pak na polích jedné z barev (černé nebo bílé) mohou být umístěny nejvýše tři střelci. Jestliže tyto tři střelce rozestavíme (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je budeme umísťovat na bílá pole) tak, aby každé pole ohrožoval nejvýše jeden střelec, pak každý s této trojce střelců ohrožuje právě čtyři bílá pole na obvodu šachovnice. Všech bílých polí při obvodu šachovnice je 14, ale zkoumaná trojce bílých střelců z nich ohrožuje pouze 10. To znamená, že nejméně 2 pole jsou neohrožena. Tím je úloha dokázána.

Úloha 4.1.1 [MO 45 A – II – 4]

Děti se v táboře dělili do družin následujícím způsobem: Vedoucí určil mezi dětmi několik náčelníků. Každý náčelník si pak do své družiny vzal všechny své kamarády z tábora (kamarádství je vzájemné). Kupodivu to vyšlo *dobře*, tedy tak, že se náčelníci nemuseli o žádné dítě hádat, žádné dítě nezbilo a žádní dva náčelníci nebyli kamarádi. Podruhé určil vedoucí jiný počet náčelníků. Mohlo rozdělení dětí popsaným způsobem opět dopadnout *dobře*?

Úloha 4.1.2 [MO 28 B – II – 2]

Je dána šachovnice tvaru $n \times n$. Jaký největší počet figurek lze na šachovnici rozmísti tak, aby žádné dvě figurky nestáli na sousedních políčkách? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společnou stranu nebo roh.)

Úloha 4.1.3 [MO 45 A – III – 3]

Je dáno šest tříprvkových podmnožin konečné množiny X. Dokažte, že prvky množiny X je možné obarvit dvěma barvami tak, aby žádná ze šesti daných podmnožin nebyla jednobarevná, tj. neměla všechny tři prvky stejné barvy.

Úloha 4.1.4 [MMO 14 – 1]

Dokažte, že v libovolné množině deseti různých přirozených čísel existují dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že součty jejich prvků jsou stejné.

Úloha 4.1.5 [MMO 6 – 4]

Sedmnáct osob si navzájem dopisuje, každý se všemi ostatními. V celé korespondenci se objevují jen tři různá témata. Každá dvojce osob si spolu píše jen o jednom z těchto témat.

Dokažte, že existují aspoň tři osoby, které si navzájem píší o stejném tématu.

Úloha 4.1.6 [MO 50 C – I – 5]

Třicet maturantů jednoho gymnázia si podalo přihlášku k dalšímu studiu na některou ze šesti fakult Českého vysokého učení technického. Využili možnost podat více přihlášek, a tak polovina žáků podala přihlášku aspoň na tři fakulty, třetina si podala přihlášku na více než tři fakulty. Na fakultu architektury se s ohledem na talentovou přijímací zkoušku nepřihlásil nikdo. Dokažte, že na některou ze zbývajících pěti fakult se přihlásilo méně než dvacet studentů.

Úloha 4.1.7 [MO 51 C – S – 1]

Do sportovního kroužku chodí 21 chlapců. Na posledních dvou schůzkách nikdo nechyběl, chlapci se pokaždé rozdělili do tří družstev po sedmi hráčích. Dokažte, že někteří tři hráči byli obě schůzky spolu v jednom družstvu.

Úloha 4.1.8 [MO 59 B – II – 2]

V matematické soutěži bylo zadáno 7 úloh a za každou z nich mohl soutěžící získat 0, 1, nebo 2 body. Soutěže se zúčasnilo 60 žáků. Za každou úlohu bylo uděleno aspoň 95 bodů. Dokažte, že mezi soutěžícími najdeme dva tak, že každou z úloh vyřešil aspoň jeden z nich za 2 body.

4.2 Úlohy o číslech

V následujících příkladech, je Dirichletův princip využit při řešení úloh o číslech.

Příklad 4.2.1 [MO 42 A – I – 5]

Ve čtvercovém schématu je zapsánu 1000×1000 celých čísel. Přitom každá dvě sousední čísla v řádku nebo ve sloupci se liší nejvýše o 100. Dokažte, že mezi zapsanými čísly je jedno, jež se ve schématu vyskytuje aspoň šestkrát.

Řešení.

Zvolme libovolná dvě čísla ve schématu. Od jednoho k druhému se můžeme dostat nanejvýš $999 + 999 = 1998$ kroky tak, že postupně procházíme přes sousední čísla. Žádná dvě čísla ve schématu se tedy neliší více než o 199 800, proto čísla ve schématu nabývají nanejvýš 199 801 různých hodnot. Kdyby ve schématu byla každá hodnota zastoupena nejvýše pětkrát, nebylo by v něm více než $5 \cdot 199801 < 10^6$ čísel, je jich tam však milión. Ve schématu tedy musí být aspoň jedno číslo zastoupeno nejméně šestkrát.

Příklad 4.2.2 [MO 30 B – P – 2]

Pro každé přirozené číslo n existují navzájem různá přirozená čísla r, s tak, že číslo

$$3^r - 3^s$$

je dělitelné číslem n. Dokažte.

Řešení.

Uvažujme $n + 1$ čísel $3^1, 3^2, \ldots, 3^{n+1}$. Při dělení těchto čísel číslem n, získáme n zbytků $(0, 1, \ldots, n - 1)$. Podle Dirichletova principu musí tedy aspoň dvě z uvedených $n+1$ čísel dávat při dělení číslem n stejné zbytky. Nechť jsou to čísla 3^r a 3^s. Pak platí

$$3^r = k_1 \cdot n + z,\ 3^s = k_2 \cdot n + z,$$

kde k_1, k_2 jsou vhodná celá nezáporná čísla a z je zbytek, tj. $z \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tedy platí, že

$$3^r - 3^s = (k_1 - k_2) \cdot n,$$

nebo-li, že zkoumaný rozdíl je dělitelný číslem n. Tím je úloha vyřešena.

Úloha 4.2.1 [MO 45 B – I – 3]

Zvolíme-li libovolně 11 různých dvojciferných čísel, vždy z nich lze vybrat dvě skupiny čísel, které mají stejný počet prvků, neobsahují žádný společný prvek a dávají stejný součet. Dokažte.

Úloha 4.2.2 [MO 25 C – II – 2a]

Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 čísle tak, že rozdíl každých dvou z nich je dělitelný pěti.

Úloha 4.2.3 [MO 30 B – I – 1]

Pro každé přirozené číslo n existují dva navzájem různí dělitele d_1, d_2 čísla $9\,000\,000$ takové, že n dělí rozdíl $d_1 - d_2$. Dokažte.

4.3 Úlohy o geometrických objektech

V tomto odstavci je Dirichletův princip aplikován na příkladech z oblasti geometrie.

Příklad 4.3.1 [MO 42 C – S – 3]

Uvnitř čtverce o straně 2 je dáno 61 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{2}}{2}$, uvnitř kterého leží aspoň 16 těchto bodů.

Řešení.

Daný čtverec můžeme rozdělit na čtyři čtverce o straně 1; každému z těchto čtverců opíšeme kružnici s poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kruhy ohraničené těmito kružnicemi zcela pokrývají vnitřek daného čtverce. Kdyby v každém z těchto kruhů leželo nejvýše 15 bodů, nemohlo by v celém čtverci být dohromady více než $4 \cdot 15 = 60 < 61$ bodů. Proto aspoň v jednom z kruhů musí ležet aspoň 16 bodů.

Příklad 4.3.2 [MO 25 B – II – 2b]

Na vrchlíku kulové plochy o poloměru 1 s výškou 1 jsou umístěny čtyři různé body tak, že žádný z nich neleží na hraniční kružnici vrchlíku. Dokažte, že aspoň dva z nich mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

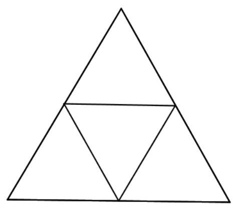
Řešení.

Označíme S „severní pól“ vrchlíku. Vzdálenost libovolného bodu vrchlíků, jenž neleží na hraniční kružnici, od bodu S je menší než $\sqrt{2}$. Pokud některý z daných bodů splyne s bodem S, pak tvrzení platí. Jestliže žádný z uvažovaných čtyř bodů nesplyne s bodem S pak podle Dirichletova principu aspoň dvěma z uvažovaných čtyř bodů procházejí „poledníky", které se protnou v bodě S pod úhlem nepřesahujícím $90°$. Snadno se vidí, že vzdálenost těchto dvou bodů je menší než $\sqrt{2}$. Tím je úloha dokázána.

Příklad 4.3.3 [MO 42 B – II – 4]

Záhon tvaru rovnostranného trojúhelníka je pokryt pěti navzájem shodnými plachtami tvaru rovnostranného trojúhelníku. (Části plachet se mohou překrývat i přesáhnout záhon.) Dokažte, že na pokrytí záhonu stačí čtyři tyto plachty.

Řešení. Jednu z pěti plachet musejí být přikryty aspoň dva body z množiny, která je tvořena třemi vrcholy trojúhelníku a třemi středy jeho stran. To ale znamená, že strana plachty je přinejmenším rovna aspoň polovině strany celého záhonu. Ten se pak dá pokrýt čtyřmi plachtami podle obr. 4.1.



Obr. 4.1

Příklad 4.3.4 [MO 29 B – P – 2]

Na šachovnici tvaru 20×20 je vyznačeno 31 navzájem různých šachovnic tvaru 8×8. Dokažte, že existuje pole, které patří aspoň šesti z vyznačených šachovnic.

Řešení.

Proložme šachovnicí 20×20 souřadnicový systém tak, že řádky očíslujeme od zdola nahoru a sloupce zleva doprava. Snadno vidíme, že každá šachovnice 8×8, která je umístěná v šachovnici 20×20 musí obsahovat právě jedno z polí (8, 8), (8, 16), (16, 8), (16, 16). Protože

$$\frac{31}{4} \geq 7,$$

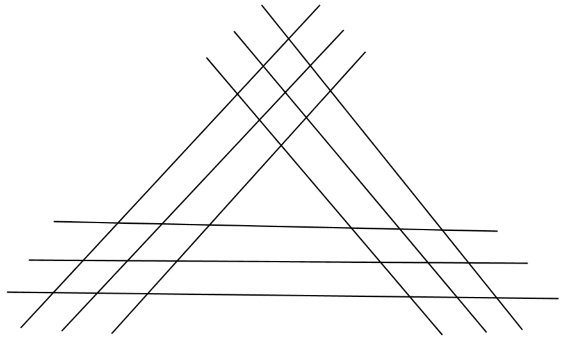
je dokonce některé z polí šachovnice 20×20 obsaženo v 8 z vyznačených šachovnic typu 8×8.

Příklad 4.3.5 [MO 36 C – I – 4]

Jakým nejmenším možným počtem barev je možné obarvit průsečíky devíti přímek na obr. 4.2 tak, aby na žádné této přímce neleželi dva body téže barvy?

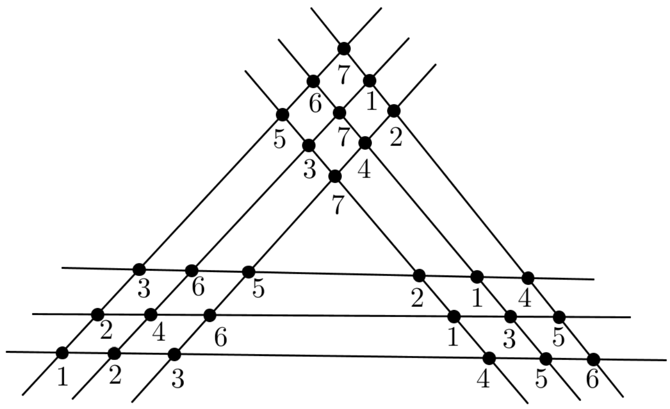
Řešení.

Protože každá z přímek protne šest dalších přímek, je třeba nejméně šest barev. Z celkových 27 bodů by při obarvení šesti barvami bylo vždy aspoň pět bodů obarveno



Obr. 4.2

toutéž barvou. Každý bod je průsečíkem dvou přímek a protože na jedné přímce nemohou ležet dva a více bodů téže barvy, potřebovali bychom deset přímek. K dispozici je však pouze devět přímek. Tedy k obarvení je třeba aspoň sedm barev a jak je ukázáno na obr. 4.3, sedm barev stačí.



Obr. 4.3

Úloha 4.3.1 [MO 42 C – II – 3]

V kruhu o poloměru 1 je dáno 77 různých bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}$, ve kterém leží aspoň 13 těchto bodů.

Úloha 4.3.2 [MO 25 C – II – 3a]

Uvnitř kružnice o poloměru 1 jsou dány čtyři různé body. Dokažte, že jsou mezi nimi dva, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

Úloha 4.3.3 [MO 43 B – II – 4]

Každý vrchol krychle s hranou délky a obarvíme jednou ze tří barev. Dokažte, že potom mezi těmito vrchol existují dva stejné barvy, jejichž vzdálenost je větší než $\frac{7}{5}\,a$.

Úloha 4.3.4 [MO 44 C – II – 4]

Každému bodu jednotkové kostky je přiřazena právě jedna ze čtyř barev. Dokažte, že pro libovolné takovéto obarvení existují na kostce dva body stejné barvy, jejichž vzdálenost je aspoň $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Úloha 4.3.5 [MO 26 A – III – 1]

V krychli s velikostí hrany 1 je dáno 2 050 bodů. Dokažte, že mezi nimi existuje pět takových, že leží uvnitř koule o poloměru $\frac{1}{9}$.

Úloha 4.3.6 [MO 33 A – I – 5]

V kouli o poloměru 1 je dáno 73 různých bodů. Dokažte, že z těchto bodů lze vybrat 13 navzájem různých, které leží uvnitř nějaké koule s poloměrem $\frac{5}{6}$.

Úloha 4.3.7 [MO 31 A – III – 4]

V kruhu o poloměru 1 je zvoleno 64 navzájem různých bodů. Dokažte, že z nich lze vybrat 10 navzájem různých bodů, které leží v některém kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$.

Úloha 4.3.8 [MO 39 C – I – 1]

Čtverec 100×100 je rozdělen na 10 000 jednotkových čtverců. Do nich jsou libovolným způsobem vepsána čísla 1 až 10 000 (do různých čtverců různá čísla). Dokažte, že pak existují dva sousední čtverce, v nichž jsou čísla lišící se aspoň o 51. Čtverce považujeme za sousední, mají-li společnou stranu.

Úloha 4.3.9 [MO 59 A – III – 2]

Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

Úloha 4.3.10 [MO 26 B – I – 5]

V rovině je dáno 50 bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Dokažte:

a) Trojúhelníky určené trojicemi daných bodů mají aspoň 200 vnitřních úhlů, jejichž velikost je menší než 8°.

b) Z těchto 200 vnitřních úhlů má aspoň 100 velikost nepřesahující $7°30'$.

Úloha 4.3.11 [MO 30 A – III – 6]

Uvnitř koule o objemu V je dáno 11 různých bodů. Potom existují roviny ρ a σ, které obě obsahují střed koule a určují výseč o objemu $\frac{1}{8}V$, která ve svém vnitřku neobsahuje žádný z daných 11 bodů. Dokažte.

Kapitola 5

Princip inkluze a exkluze

Dalším důležitým kombinatorickým principem, který lze využít v mnoha příkladech je *princip inkluze a exkluze.*

V této kapitole vychází autor z literatury [2, 3, 8].

Ukažme si nejprve nejjednodušší variantu tohoto principu.

Věta 5.1.1 Nechť M_1 a M_2 jsou konečné množiny. Pak pro počet prvků sjednocení $M_1 \cup M_2$ platí

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|.$$

Vyslovme toto tvrzení pro tři konečné množiny.

Věta 5.1.2 Nechť M_1, M_2 a M_3 jsou konečné množiny. Pak pro počet prvků sjednocení $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_3 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.$$

Důkaz. Uvažujme libovolný prvek m, který leží aspoň v jedné z množin M_i $(i = 1, 2, 3)$. Nyní musíme rozlišit tři případy. Pokud leží prvek m v právě jedné z množin M_i, pak je na obou stranách dokazovaného součtu započítán jedenkrát. Jestliže leží v právě dvou množinách, pak je na levé straně započten jednou a na pravé straně dvakrát se znaménkem plus a jednou se znaménkem mínus – dohromady také jednou. Leží-li prvek m současně ve všech třech množinách, pak je na levé straně započítán jednou a na pravé straně čtyřikrát se znaménkem plus a třikrát se znaménkem mínus, tj. celkem taktéž jedenkrát. Tím je důkaz dokončen.

Obdobným způsobem nyní dokážeme i obecný tvar principu inkluze a exkluze pro n konečných množin.

Věta 5.1.3 (princip inkluze a exkluze) Nechť M_i (pro $i = 1, 2, \ldots, n$) jsou konečné množiny. Pak platí

$$|M_1| \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |M_i \cap M_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n| =$$

$$= \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots j_r\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Důkaz. Nechť m je libovolný prvek patřící do sjednocení všech množin M_i, kde $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť prvek m náleží právě do $s \le n$ z těchto n množin.

Na levé straně dokazovaného vztahu se prvek m vyskytuje jednou. Na pravé straně je pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ prvek m započítán právě v $\binom{s}{r}$ sčítancích typu

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|.$$

Vyjádříme-li součet všech sčítanců, v nichž je prvek m započítán, dostaneme následující kombinatorickou identitu (důkaz například v [2])

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \ldots + (-1)^{s+1} \binom{s}{s} = \binom{s}{0} = 1.$$

Tím je důkaz ukončen.

Věta 5.1.4 (duální princip inkluze a exkluze) Nechť M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) jsou konečné množiny. Pak platí

$$|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n| = \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Důkaz. Postupnou aplikací principu inkluze a exkluze získáme:

$$|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n| = \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_r}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} \Big(|M_i| + |M_j| - |M_i \cap M_j| \Big) +$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}\Big(|M_i|+|M_j|+|M_k|-|M_i\cap M_j|-|M_i\cap M_k|-|M_j\cap M_k|+|M_i\cap M_j\cap M_k|\Big)-\dots$$

$$\dots+(-1)^{n+1}|M_1\cup M_2\cup\dots\cup M_n|=\sum_{i=1}^{n}|M_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|M_i\cap M_j|+$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|M_i\cap M_j\cap M_k|-\dots+(-1)^{n+1}|M_1\cup M_2\cup\dots\cup M_n|,$$

což vzhledem k větě 5.1.3 jistě platí. Tím je důkaz proveden.

Poznámka. V některých příkladech lze vzorec z předchozí věty zjednodušit. A to v případě, že je každý z $\binom{n}{r}$ sčítanců $|M_{j_1}\cap M_{j_2}\cap\dots\cap M_{j_r}|$ stejný – označme jej $m(r)$. Vzorec pak přejde do tvaru

$$|M_1\cup M_2\cup\dots\cup M_n|=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\cdot\binom{n}{r}\cdot m(r).$$

5.1 Příklady a úlohy

V tomto odstavci uvedeme několik příkladů, k jejichž řešení lze využít princip inkluze a exkluze.

Příklad 5.1.1 [MO 29 A – I - 5]

Na škole pracuje 64 žáků v pěti zájmových kroužcích. Každý kroužek má aspoň 19 členů. Žádný žák nepracuje ve více než třech kroužcích, ale každé tři kroužky mají aspoň jednoho společného člena. Dokažte, že existují dva kroužky, které mají společných aspoň pět členů.

Řešení.

Označme $M_1, M_2, \dots, M_5$ množiny všech členů prvního až pátého kroužku. Ze zadání příkladu a podle principu inkluze a exkluze platí

$$|M_1\cup M_2\cup\dots\cup M_5|=\sum_{i=1}^{5}|M_i|-\sum_{1\le i<j\le 5}|M_i\cap M_j|+\sum_{1\le i<j<k\le 5}|M_i\cap M_j\cap M_k|.$$

Protože

$$\sum_{i=1}^{5}|M_i|\ge 5\cdot 19=95$$

a

$$\sum_{1\le i<j<k\le 5}|M_i\cap M_j\cap M_k|\ge\binom{5}{3}\cdot 1=10,$$

platí, že

$$\sum_{1\le i<j\le 5} |M_i \cap M_j| = \sum_{i=1}^{5} |M_i| + \sum_{1\le i<j<k\le 5} |M_i \cap M_j \cap M_k| - 64 \ge$$

$$\ge 95 + 10 - 64 = 41.$$

Pokud by každé dva kroužky měli nejvýše čtyři společné členy, pak

$$\sum_{1\le i<j\le 5} |M_i \cap M_j| = \binom{5}{2} \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40.$$

Ale protože platí

$$\sum_{1\le i<j\le 5} |M_i \cap M_j| \ge 41,$$

musí existovat dva kroužky, které mají aspoň pět společných členů.

Tím je úloha vyřešena.

Příklad 5.1.2 [MO 22 B – P – 1]

Tři konečné množiny M_1, M_2, M_3 mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků. Počet prvků množiny $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ je s. Dokažte:

a) Je-li $n_1 + n_2 + n_3 \ge 2s + 1$, má průnik všech tří množin aspoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin aspoň jeden prvek je $n_1 + n_2 + n_3 \ge s + 2$.

Dokažte dále, že podmínka b) není dostačující pro to, aby tři množiny měly neprázdný průnik.

Řešení.

a) Podle duálního principu inkluze a exkluze platí:

$$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cup M_2| - |M_1 \cup M_3| - |M_2 \cup M_3| + |M_1 \cup M_2 \cup M_3|.$$

Uvědomme si, že pro $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ platí $|M_i \cup M_j| \le |M_1 \cup M_2 \cup M_3|$, tj.

$$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| \ge |M_1| + |M_2| + |M_3| - 2|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = n_1 + n_2 + n_3 - 2s,$$

což vzhledem k předpokladu $n_1 + n_2 + n_3 \ge 2s + 1$ znamená, že

$$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| \ge 1.$$

b) Označme p počet prvků průnik množin $M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Užitím principu inkluze a exkluze a nerovnosti $|M_i \cap M_j| \ge |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$, kde $i \neq j$ a $i, j = 1, 2, 3$ získáme

$$s = |M_1 \cup M_2 \cup M_3| \ge |M_1| + |M_2| + |M_3| - 2|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = n_1 + n_2 + n_3 - 2p,$$

vzhledem k předpokladu $p \ge 1$ platí

$$s \le n_1 + n_2 + n_3 - 2,$$

neboli

$$n_1 + n_2 + n_3 \geq s + 2.$$

V poslední části důkazu máme ukázat, že platí-li podmínka

$$n_1 + n_2 + n_3 \geq s + 2,$$

nemusejí mít množiny M_1, M_2, M_3 neprázdný průnik. Jako příklad kdy za splnění uvedené podmínky nemají dané tři množiny prázdný průnik uveďme: $|M_1| = 3$, $|M_2| = 5$, $|M_3| = 4$, $|M_1 \cap M_2| = 2$, $|M_1 \cap M_3| = 1$, $|M_2 \cap M_3| = 3$ a $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = \emptyset$, tj. podmínka $n_1 + n_2 + n_3 = 12 \geq 8 = s + 2$ je splněna, ale průnik množin M_1, M_2, M_3 je prázdný.

Tím je důkaz ukončen.

Příklad 5.1.3 [MO 36 A – I – 6]

Šachovnice se skládá z 8×8 polí vytvářejících čtverce. Věž je jedna z figur, jimiž se hraje šach. Řekneme, že věž je neohrožená, jestliže v řádku a sloupci, ve kterém se nalézá, už není jiná věž.

a) Určete počet všech takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je každá z věží neohrožená.

b) Určete počet rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožená.

c) Určete počet rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožená a žádné dvě nejsou v témže řádku.

d) Řešte úlohy b) a c) pro čtvercovou šachovnici skládající se z $n \times n$ polí, přičemž rozmisťujeme k věží ($1 \leq k \leq n$).

Řešení.

Máme-li rozmístit osm věží na šachovnici tak, aby žádná z nich nebyla ohrožena, pak žádné dvě z uvažovaných osmi věží nemohou ležet ve stejném řádku ani sloupci. První věž může tedy v prvním sloupci umístit 8 způsoby. Druhou věže můžeme v druhém sloupci umístit již jen 7 způsoby, atd. až osmou věž lze v osmém sloupci umístit už jen jedním způsobem. Podle pravidla součinu existuje celkem

$$8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$$

možností, jak věže rozmístit.

Úlohy b) a c) snadno určíme z obecné úlohy pro šachovnicí o $n \times n$ polích, na níž je rozmístěno k věží. Zabývejme se proto úlohou d). Očíslujme uvažované věže $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

(i) Označme $A_1, A_2, \ldots, A_k$ množiny všech rozmístění, v nichž jsou po řadě věže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ neohroženy. Počet všech rozmístění, ve kterých je aspoň jedna z uvažovaných k věží neohrožena odpovídá počtu prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$. Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}|,$$

kde se sčítá přes všechny j-prvkové podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$. Stačí proto určit $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j|$, tedy počet rozmístění, v nichž jsou věže $v_1, v_2, \ldots, v_j$ neohroženy. Věž v_1 můžeme umístit do libovolného z n^2 políček. Věž v_2 již nemůže ležet ve stejném řádku ani sloupci jako věž v_1, existuje pro ni tedy $(n-1)^2$ políček, atd. až pro věž v_j existuje $(n-j+1)^2$ políček. Věže $v_{j+1}, \ldots, v_k$ můžeme umístit libovolně do zbylých $(n-j)^2$ políček. Počet těchto rozmístění odpovídá počtu všech $(k-j)$-prvkových variací z $(n-j)^2$-prvkové množiny, tj. $\binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!$. Tedy platí, že

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j| = n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Pro počet všech rozmístění, v nichž je aspoň jedna z věží $v_1, v_2, \ldots, v_k$ neohrožena, platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)! =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

Hledaný počet P všech stejných (neočíslovaných) věží získáme podělením předešlého vztahu počtem všech shodných rozmístění jednotlivých věží (těch je $k!$), tj.

$$P = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 \binom{(n-j)^2}{k-j}(k-j)!.$$

(ii) Obdobným způsobem vyřešíme i druhou část úlohy. Označme $B_1, B_2, \ldots, B_k$ množiny všech rozmístění, v nichž nejsou po řadě věže $v_1, v_2, \ldots, v_k$ neohroženy a zároveň žádné dvě věže nejsou ve stejném řádku. Podle principu inkluze a exkluze platí

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} |B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap \ldots \cap B_{j_k}|,$$

kde se sčítá přes všechny j-prvkové podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$. Protože

$$|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_j| = n^2(n-1)^2 \ldots (n-j+1)^2 (n-j)^{k-j}(n-j)(n-j-1)\ldots(n-k+1),$$

je

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^2 (j!)^2 (n-j)^{k-j} \binom{n-j}{k-j}(k-j)!.$$

Hledaný počet Q nerozlišených věží získáme stejně jako v předešlém případě podělením získaného vztah číslem $k!$ (počet všech shodných rozmístění jednotlivých věží), tedy

$$Q = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}\binom{n}{j}^2 (j!)^2(n-j)^{k-j}\binom{n-j}{k-j}(k-j)!.$$

Úloha 5.1.1 [MO 29 A – P – 4]

Jsou dány konečné množiny M_1, M_2, M_3, M_4. Symbolem $|M|$ označíme počet prvků množiny M. Dokažte, že platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| -$$

$$-|M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4| +$$

$$+|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4| -$$

$$-|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|.$$

Úloha 5.1.2 [MO 22 B – I – 3]

Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektrotechnické výrobky. Kolik osob nejméně koupilo výrobky všech tří druhů? Jestliže každá z uvedených 100 osob si koupila jeden z uvedených výrobků, kolik z uvedených osob nejvýše koupilo výrobky všech tří druhů?

Úloha 5.1.3 [MO 29 A – III – 6]

Nechť M je množina pěti bodů v prostoru, z nichž žádné čtyři neleží v jedné rovině. Dále nechť R je množina sedmi roviny s následujícími vlastnostmi:

a) Každá rovina z množiny R obsahuje aspoň jeden bod z množiny M.

b) Žádný z bodů množiny M neleží v pěti rovinách množiny R.

Dokažte, že existují takové dva různé body $P, Q \in M$, že přímka PQ není průsečnicí žádných dvou rovin z množiny R.

Úloha 5.1.4 [MO 22 C – I – 1]

Množiny $M_1, M_2, M_3, M_4, M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ mají po řadě n_1, n_2, n_3, n_4 a s prvků, přitom platí $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \emptyset$. Dokažte, že platí

$$2s \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4.$$

Může nastat rovnost a v kterém případě?

Kapitola 6

Metoda rozkladu

Mezi klasické kombinatorické problémy patří rozložení daného objektu na systém navzájem disjunktních objektů, jejichž sjednocením dostaneme původní objekt. V tomto textu se zaměříme především na příklady, v nichž se nechá s výhodou využít metody rozkladu čísel a konečných množin.

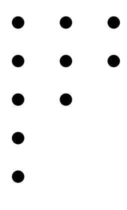
V této kapitole je čerpáno z literatury [3].

Definice 6.1.1 *Rozkladem* přirozeného čísla n na k sčítanců rozumíme každou k-tici

$$r = (r_1, r_2, \ldots, r_k),$$

kde $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_k$ jsou přirozená čísla taková, že $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$ se nazývají *složky rozkladu* r.

Poznámka. Každý rozklad libovolného přirozeného čísla n na součet k složek lze znázornit pomocí tzv. *Ferrerova grafu.* Jedná se o diagram, ve kterém jsou v každém z jeho k řádků znázorněny jednotlivé složky rozkladu pomocí příslušného počtu bodů (i-té složce rozkladu přísluší i-tý řádek, kde $i = 1, 2, \ldots, k$). Jako příklad uveďme diagram, který znázorňuje rozklad $(3, 3, 2, 1, 1)$ čísla 10 na 5 složek:



Obr. 6.1

Definice 6.1.2 Systém $l = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ neprázdných podmnožin množiny S, které jsou po dvou disjunktní (tj. $S_i \cap S_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, k$) a jejichž sjednocením získáme původní množinu S se nazývá *rozklad množiny* S *na* k *tříd.*

6.1 Úlohy o množinách

V prvním odstavci této kapitoly jsou zařazeny příklady, v nichž se využívá rozkladu konečných množin.

Příklad 6.1.1 [MO 21 A – III – 5]

Kolik dvojic navzájem disjunktních podmnožin má množina o n prvcích?

Řešení.

Nejprve určíme počet všech uspořádaných dvojic navzájem disjunktních podmnožin dané n-prvkové množiny. První podmnožina, označme ji A, může mít $0, 1, \ldots, n$ prvků. Nechť A má k prvků ($k = 0, 1, \ldots, n$). Druhá podmnožina, označme ji B, pak může mít už jen $0, 1, \ldots, n-k$ prvků. Nechť má množina B j prvků ($j = 0, 1 \ldots, n-k$). Podmnožinu A lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby, podmnožinu B $\binom{n-k}{j}$ způsoby. Uspořádanou dvojici sestavenou z podmnožiny A a B lze vybrat

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\right]$$

způsoby. Podle známé identity (důkaz například v [2]) je

$$\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} = 2^{n-k}.$$

Užitím binomické věty získáme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\,2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

Počet uspořádaných dvojic je tedy 3^n. Každá neuspořádaná dvojice navzájem disjunktních podmnožin dané n-prvkové množiny je v počtu 3^n započítaná dvakrát. Výjimku tvoří případ kdy $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$. Hledaný počet všech navzájem disjunktních podmnožiny dané n-prvkové množiny je $\dfrac{3^n+1}{2}$.

Příklad 6.1.2 [MO 39 A – I – 5]

Je-li G graf takový, že z každého jeho vrcholu vychází nejméně $2m-1$ hran, lze vrcholy grafu rozdělit do dvou disjunktních množin A a B tak, že z každého vrcholu v A vychází nejméně m hran do vrcholů B a z každého vrcholu v B vychází nejméně m hran do vrcholů v A. Dokažte.

Řešení.

Nechť G je graf, z jehož každého vrcholů vychází nejméně $2m-1$ hran. Hledejme disjunktní rozklad množiny všech vrcholů V daného grafu G, tj. $V = A \cup B$ a $A \cap B = \emptyset$

tak, aby mezi množinami A a B bylo „mnoho hran“. Uvažujme z množiny všech možných rozkladů ten, při němž je počet hran mezi množinami A a B největší. Ukažme, že se jedná o rozklad s požadovanou vlastností.

Kdyby z libovolného vrcholu $v \in A$ vedlo do B nejvýše $m-1$ hran, dostali bychom přemístěním v z A do B nový rozklad $A \backslash \{v\}$, $B \cup \{v\}$, který bude mít mezi oběma množinami více hran než původní rozklad, protože v je podle předpokladu s ostatními vrcholy v A spojen aspoň m hranami. Tím je úloha vyřešena.

Příklad 6.1.3 [MO 39 A – II – 4]

Zjistěte, kolik existuje pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ čísel $1, 2, \ldots, 10$ takových, že současně platí:

(a) $a_i > a_{2i}$ $(1 \leq i \leq 5)$,

(b) $a_j > a_{2j+1}$ $(1 \leq j \leq 4)$.

Řešení.

Nechť pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ splňuje obě nerovnosti. Označme symbolem $a_i \to a_j$ relaci $a_i > a_j$ a uspořádejme čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ do následujícího schématu:

$$\begin{tikzcd}
 & & & a_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & a_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & a_3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & a_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & & a_5 \arrow[dr] & a_6 & a_7 \\
a_8 & & a_9 & & a_{10} &
\end{tikzcd}$$

Obr. 6.2

Zřejmě $a_1 = 10$. Zbývá devět čísel $(1, 2, \ldots, 9)$, které dle schématu rozdělíme na dvě disjunktní množiny obsahující tři a šest čísel. To znamená $\binom{9}{3}$ možností.

V každém z těchto rozdělení můžeme vždy jednoznačně určit hodnotu a_2 jako maximální prvek šestiprvkové množiny a hodnotu a_3 jako maximální prvek tříprvkové množiny.

Pro volbu hodnot a_6 a a_7 máme dvě možnosti. Čísla $a_4, a_5, a_8, a_9, a_{10}$ musíme rozdělit do dvou disjunktních množin se třemi a dvěma prvky, což lze provést $\binom{5}{2}$ způsoby. Hodnoty a_4 a a_5 jsou v každém takovémto rozdělení jednoznačně určeny jako maximální prvky v příslušných podmnožinách. Prvky a_8 a a_9 může v každém z uvažovaných rozdělení určit dvěma způsoby a prvek a_{10} je již jednoznačně určen výběrem prvku a_5. Dohromady tedy dostaneme, že existuje

$$\binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 3\,360$$

různých pořadí splňujících dané podmínky.

Příklad 6.1.4 [MO 34 C – I – 1]

Dokažte, že pro každý rozklad množiny $M = \{1, 2, \dots, 15\}$ na dvě disjunktní podmnožiny A, B platí: alespoň v jedné z množin A, B lze nalézt tři navzájem různá čísla x, y, z tak, že x je největší společný dělitel čísel y, z.

Řešení.

Předpokládejme sporem, že existuje rozklad množiny M na dvě disjunktní podmnožiny A, B tak, že v žádné z množin A, B neleží tři navzájem různá čísla x, y, z, pro která je číslo x největším společným dělitelem čísel y, z. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že množina A obsahuje číslo 1. Množina A pak neobsahuje žádnou dvojici nesoudělných čísel (různých od čísla 1) z množiny M, protože jednička dělí i všechna nesoudělná čísla.

Množina B nemůže současně obsahovat čísla 3, 9, 15 ani trojici čísel 2, 4, 14, musí tedy v množině A ležet aspoň jedno z čísel 3, 9, 15 a současně aspoň jedno z čísel 2, 4, 14. To je ale spor s tím, že množina A nemůže obsahovat žádné dvě čísla větší než 1, která by byla nesoudělná.

Tím je příklad vyřešen.

Příklad 6.1.5 [MO 35 A – II – 3b]

Pro n přirozené označme M_n množinu všech jednoprvkových a dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Je-li $n \geq 3$, lze ke každé $(n-2)$-prvkové podmnožině P množiny M_n najít dvouprvkovou podmnožinu $\{i, j\}$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou je

$$\{\{i\}, \{j\}, \{i, j\}\} \cap P = \emptyset.$$

Dokažte.

Řešení.

Předpokládejme, že P obsahuje k $(0 \leq k \leq n-2)$ dvouprvkových a $n-2-k$ jednoprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, pak v množině $\{1, 2 \dots, n\}$ zbývá právě $k+2$ takových čísel i, že $\{i\} \notin P$. Z nich lze vytvořit $\binom{k+2}{2}$ dvouprvkových podmnožin. Musíme tedy ověřit, že

$$\binom{k+2}{2} > k.$$

Po úpravě

$$(k+2)(k+1) > 2k,$$

což jistě platí pro každé $k \geq 0$. Tím je úloha vyřešena.

Úloha 6.1.1 [MO 38 A – I – 2]

Najděte nejmenší přirozené číslo r, pro něž existují podmnožiny A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 množiny $\{1, 2, \dots, r\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ platí

$$|A_i| = 5, \qquad |A_i \cup A_{i+1}| = 10 \qquad (A_6 = A_1).$$

Úloha 6.1.2 [MMO 30 – 1]

Dokažte, že množina $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ se dá napsat jako sjednocení dvou disjunktních množin $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

(1) každá z množin A_i má právě 17 prvků,

(2) součet všech čísel z množiny A_i je pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, 117\}$ stejný.

Úloha 6.1.3 [MO 23 B – I – 1]

a) Dokažte, že následující úloha není řešitelná: Máme sestrojit dvě neprázdné podmnožiny A, B množiny $\mathbb{R}$ reálných čísle tak, aby $\mathbb{R} = A \cup B$, dále aby aspoň jedna z množin $\mathbb{R} \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus B$ nebyla prázdná a aby pro libovolná čísla $a \in A$, $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$ platilo

$$a + a' \in A,$$

$$a + b \in B,$$

$$b + b' \in A.$$

b) Dokažte, že pokud ve formulaci úlohy a) nahradíme množinu $\mathbb{R}$ množinou $\mathbb{Z}$ všech celých čísel, pak existuje právě jedna dvojce množin A, B s požadovanými vlastnostmi. Najděte ji.

Úloha 6.1.4 [MO 45 C – I – 2]

Rozhodněte, zda lze množinu čísel $1, 2, \ldots, 1995$ rozdělit na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo

a) dvakrát,

b) třikrát,

c) čtyřikrát

více čísel než ve druhé skupině a aby součty čísel v obou skupinách byli stejné.

Úloha 6.1.5 [MO 45 C – II – 1]

Zjistěte, pro která přirozená čísla n je možné množinu $1, 2, \ldots, n$ rozložit na dvě skupiny tak, aby v první skupině bylo třikrát více čísel než ve druhé a aby součty čísel v obou skupinách byli stejné.

Úloha 6.1.6 [MO 34 B – I – 6]

K, M, N jsou konečné množiny reálných čísle s počtem prvků po řadě k, m, n. Označme L množinu všech čísel ve tvaru $x + y + z$, kde $x \in K$, $x \in M$ a $z \in N$. Ukažte, že množina L má aspoň $k + m + n - 2$ prvků.

Úloha 6.1.7 [MO 35 A – III – 1]

Nechť n je přirozené číslo a S množina podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ s touto vlastností: Pro každé dvě množiny $M_1 \in S$, $M_2 \in S$ má množina $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ sudý počet prvků. Určete největší možný počet prvků množiny S.

Úloha 6.1.8 [MO 38 B – I – 6]

Nechť t je přirozené číslo a $n = \dfrac{3^t - 1}{2}$. Dokažte, že množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze rozdělit na t disjunktních podmnožin $A_1, A_2, \ldots, A_t$ tak, že žádná množina A_i neobsahuje čísla x, y, z s vlastností $x + y = z$.

Úloha 6.1.9 [MO 16 D – II – 3]

Přirozená čísla $1, 2, \ldots, 12$ jsou rozdělena do čtyřech skupin po třech číslech. Součet čísel každé této skupiny je nejvýše 20. Dokažte, že v žádném takovém rozkladu se nevyskytuje skupina $\{5, 6, 7\}$.

Úloha 6.1.10 [MO 49 A – S – 3]

Určete nejmenší přirozené k, pro které platí: Vybereme-li libovolných k různých čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, pak mezi vybranými čísly existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667.

Úloha 6.1.11 [MO 54 A – I – 1]

Neprázdnou množinu přirozených čísel nazveme *malou*, když má méně prvků než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin M, které jsou podmnožinami množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ a mají tuto vlastnost: patří-li do M dvě různá čísla x a y patří do M rovněž číslo $|x - y|$.

Úloha 6.1.12 [MO 54 A – III – 2]

Zjistěte, pro která m existuje právě 2^{15} podmnožin X množiny $\{1, 2, \ldots, 47\}$ s vlastností: číslo m je nejmenší prvek množiny X a pro každé $x \in X$ platí buď $x + m \in X$, nebo $x + m > 47$.

Úloha 6.1.13 [MO 56 A – I – 4]

Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ rozdělit

a) na dvě,

b) na tří

navzájem disjunktní množiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků.

6.2 Úlohy o číslech

V tomto odstavci jsou uvedeny především úlohy, v nichž se využívá rozkladu čísel pomocí jejich zápisu v desítkové soustavě.

Příklad 6.2.1 [MO 42 C – II – 1]
Jestli je pěticiferné číslo $6AB73$ dělitelné 99, pak je dělitelné také 19. Dokažte.

Řešení.
Víme, že

$$6AB73 = 60073 + 1000A + 100B = 606 \cdot 99 + 79 + 990A + 10A + 99B + B =$$

$$= 99(606 + 10A + B) + 79 + 10A + B.$$

Aby bylo toto číslo dělitelné 99, musí být $10A + B = 20$. Číslo $6AB73$ se tedy rovná číslu 62 073, které je dělitelné číslem 19, což se mělo dokázat.

Příklad 6.2.2 [MO 40 C – I – 1]
Kolik je čtyřciferných čísel s touto vlastností: Jestliže v něm škrtneme kteroukoliv číslici, nedostaneme číslo dělitelné třemi.

Řešení.
Použijeme známé tvrzení, že zbytek při dělení čísla třemi je stejný jako při dělení třemi ciferného součtu tohoto čísla. Například v případě čtyřciferného čísla m o číslicích a, b, c, d je $m = 100a + 100b + 10c + d = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$, odtud vidíme, že rozdíl čísla m a jeho ciferného součtu $a + b + c + d$ je dělitelný třemi

Má-li číslo m požadovanou vlastnost, nesmějí žádné tři jeho číslice dávat při dělení třemi stejný zbytek. Jinak by byl jejich součet dělitelný třemi, a tím by bylo dělitelné třemi i číslo, které bychom dostali z čísla m vynecháním zbývající čtvrté číslice. Ze stejného důvodu nesmějí žádné tři číslice čísla m dávat při dělení třemi navzájem různé zbytky. Zbývá tedy pouze možnost, že dvě číslice dávají stejný zbytek a zbývající dvě rovněž, avšak různý od prvního.

Dávají-li například dvě číslice zbytek 1 a zbývající dvě zbytek 2, není součet žádných tří z nich dělitelný třemi. Tyto dvě číslice se zbytkem 1 můžeme ze čtyř číslic vybrat celkem šesti způsoby, přitom každá z nich se může rovnat 1, 4 nebo 7. Zbývající dvě vybereme z číslic 2, 5 nebo 8. Máme tedy celkem $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 486$ možností.

Podobně je tomu u zbytků 0 a 1 nebo 0 a 2. Avšak číslice se zbytkem 0 se při dělení třemi může rovnat 0, 3, 6 nebo 9 (4 možnosti), proto nyní dostáváme dvakrát $6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 864$, tedy 1 728 možností. Z nich však musíme vynechat ty případy, v nichž je na prvním místě číslice 0, takové číslo by nebylo čtyřciferné. Je-li na prvním místě nula, je ještě na jednom místě číslice dělitelná třemi (0, 3, 6, 9), na dalších dvou místech pak jsou číslice 1, 4, 7 nebo 2, 5, 8. Musíme tedy vyloučit $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 216$ případů.

Výsledek úlohy je $486 + 1\,728 - 216 = 1\,998$.

Příklad 6.2.3 [MO 27 C – P – 1]

Kolika způsoby je možné číslo 78 rozložit na součet tří přirozených čísel. Přitom dva rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců, tedy například rozklady $10 + 10 + 58$, $10 + 58 + 10$, $58 + 10 + 10$, považujeme za stejné.

Řešení.

Uvažujme všechny uspořádané trojce přirozených čísel, jejichž součet je číslo 78. První člen uspořádané trojce (první sčítanec), označme jej p, můžeme vybrat libovolně, tj. $p = 1, 2, \ldots, 76$. Druhý člen, označme jej q lze libovolně vybrat už jen z čísel $1, 2, \ldots, 78 - p - 1$. Třetí člen je již určen jednoznačně jako $78 - p - q$. Při pevně zvoleném p existuje $78 - p - 1$ takových to uspořádaných trojic a protože $p = 1, 2, \ldots, 76$ je těchto trojic $79 + 75 + \ldots + 1 = (76 + 1) + (75 + 2) + \ldots + (39 + 38) = 38 \cdot 77 = 2\,926$. Rozlišíme následující případy.

(i) Všechny tři sčítance jsou shodné pouze v případě rozkladu $28 + 28 + 28$.

(ii) Rozkladů, v nichž jsou právě dva stejné sčítance, je 37. Jsou to rozklady $1+1+76$, $2 + 2 + 74$, …, $38 + 38 + 2$.

(iii) Počet všech uspořádaných trojic, které mají všechny tři členy navzájem různé, zjistíme, odečteme-li od všech uspořádaných trojic (těch je 2 926) všechny uspořádané trojic, které mají všechny členy stejné (jedna uspořádaná trojce), resp. všechny uspořádané trojice, v nichž se dva členy opakují (pro každý takový to rozklad existují tři uspořádané dvojce – celkem tedy odčítáme $3 \cdot 37 = 111$ uspořádaných trojic. Celkem je tedy

$$2\,926 - 1 - 111 = 2\,814$$

uspořádaných trojic, jejichž členy se navzájem liší. Mezi těmito uspořádanými trojicemi je vždy šest trojic sestavených ze stejných členů (počet všech permutací z tříprvkové množiny). Počet rozkladu (neuspořádaných trojic), ve kterých se sčítance navzájem liší je tedy $\dfrac{2\,814}{6} = 469$.

Počet všech rozkladů čísla 78 na součet tří sčítanců dle podmínek v zadání je

$$469 + 37 + 1 = 507.$$

Příklad 6.2.4 [MO 27 C – P – 2]

Je-li přirozené číslo $n > 10$ druhou mocninou lichého čísla, pak je předposlední cifra dekadického zápisu čísla n číslo sudé. Dokažte.

Řešení.

Zapišme-li číslo, jehož druhou mocninou je číslo n, ve tvaru $10a + b$, kde a je celé číslo a b je liché přirozené číslo menší než 10, pak je $n = 100 \cdot a^2 + 10 \cdot 2ab + b^2$.

Předposlední cifru tohoto čísla získáme sečtením desítek v čísle b^2 a jednotek v čísle $2ab$. Protože $b = 1, 3, 5, 7, 9$ je b^2 číslo sudé; číslo $2ab$ je také sudé, proto je sudý i jejich součet a tedy i předposlední cifra daného čísla n.

Úloha 6.2.1 [MO 21 C – I – 2]

Dokažte, že každé přirozené číslo $n > 10$ lze rozložit aspoň dvojím způsobem na součet dvou přirozených čísel tak, že prvý sčítanec je prvočíslo a druhý sčítanec je číslo složené.

Úloha 6.2.2 [MO 29 Z – P – 3]

Určete dvojici různých trojciferných čísel, která má tyto dvě vlastnosti:

a) v desítkové soustavě mají čísla zápis xyz nebo zyx,

b) mají co největšího společného dělitele.

Úloha 6.2.3 [MO 45 C – I – 5]

Určete všechna čtyřciferná čísla A, která mají pro každé $k = 2, 3, 4, \ldots, 9$ tuto vlastnost: Vepíšeme-li cifru k mezi prostřední cifry čísla A, dostaneme pěticiferné číslo, které je násobkem čísla k.

Úloha 6.2.4 [MO 21 Z – P – 1]

Ciferný součet kladného trojciferného prvočísla p_1 je dvojciferné prvočíslo p_2. Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslo $p_3 > 2$. Najděte všecky takové trojce prvočísel p_1, p_2, p_3.

Úloha 6.2.5 [MO 21 C – I – 2]

Dokažte, že každé přirozené číslo $n > 10$ lze rozložit aspoň dvojím způsobem na součet dvou přirozených čísel, z nichž jedno je prvočíslo a druhé číslo složené.

Úloha 6.2.6 [MO 32 Z – III – 1 (SR)]

K dvojcifernému přirozenému číslu připočítejte číslo k němu obrácené, tj. číslo, které z daného čísla získáme záměnou jeho cifer. Najděte všechna dvojciferná přirozená čísla, o nichž platí, že součet daného čísla a čísla k němu obrácenému je druhou mocninu přirozeného čísla.

Úloha 6.2.7 [MO 32 C – I – 4]

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž třetí mocnina končí skupinou cifer 56 789.

Úloha 6.2.8 [MO 45 C – S – 1]

Rozložte všemi možnými způsoby číslo 1 996 na součet několika (aspoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel.

Úloha 6.2.9 [MO 1 B – II – 2]

Najděte všechna čtyřciferná čísla tvaru $aabb$ (kde $a \neq 0$ a b jsou arabské cifry), která jsou druhou mocninou celého čísla.

Úloha 6.2.10 [MO 3 A – I – 15]

Najděte všechna přirozená čísla, která se rovnají jedenáctinásobku svého ciferného součtu v desítkové soustavě.

Úloha 6.2.11 [MO 23 A – III – 3]

Pro každé přirozené číslo m, které je v dekadickém zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájem různé, označme jako $f(m)$ součet všech přirozených čísel různých od m, které z čísla m dostaneme záměnou pořadí jeho číslic (například $f(302) = 023 + 230 + 320 + 203 + 032 = 808$).

Najděte všechna přirozené čísla x, pro která platí $f(x) = 138\,012$.

Úloha 6.2.12 [MO 25 Z – P – 2]

Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných trojciferných čísel, z nichž prvé je v desítkové soustavě zapsáno týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný 9 a 11.

Úloha 6.2.13 [MO 44 C – I – 1]

Určete všechna čtyřciferná čísla dělitelná 4, pro než platí: Jestliže v čísle vyměníme první dvě číslice, dostaneme číslo dělitelné 7. Jestliže v čísle vyměníme prostření dvě číslice, dostaneme čísla dělitelné 5. Jestliže v čísle vyměníme poslední dvě číslice, dostaneme číslo dělitelné 9.

Úloha 6.2.14 [MO 44 C – II – 1]

Určete rozklad všech čtyřmístných čísel n s vlastností: Jestliže k číslu n přičteme čtyřmístné číslo n', které má v desítkové soustavě opačné pořadí číslic než číslo n, dostaneme číslo, které je dělitelné 70.

Úloha 6.2.15 [MO 46 C – I – 1]

Číslo 4 896 je dělitelné jak svým prvním dvojčíslím (48), tak i svým posledním dvojčíslím (96). Kolik je čtyřciferných čísel s touto vlastností, která jsou navíc dělitelná číslem 17?

Úloha 6.2.16 [MO 46 C – II – 1]

Ve čtyřciferném čísle se rovnají první a druhá číslice a třetí a čtvrtá číslice. Určete toto číslo, víte-li, že je druhou mocninou přirozeného čísla.

Úloha 6.2.17 [MO 32 Z – III – 2]

Součet tří celých kladných čísel, z nichž každé se rovná součinu zbývajících dvou, je 47. Která jsou to čísla? Najděte všechna řešení úlohy.

Úloha 6.2.18 [MO 46 C – S – 3]

Najděte všechny čtyřciferná přirozená čísla, pro která platí: Součet součinů každých dvou čísel ze čtveřice čísel se součinem zbývajících dvou čísel je roven 51.

6.3 Úlohy o geometrických objektech

V posledním odstavci této kapitoly jsou zařazeny úlohy, využívající rozklad určitého geometrického objektu na systém několika dalších objektů.

Příklad 6.3.1 [MO 33 A – I – 4]

Určete největší přirozené číslo n s touto vlastností: Existuje konvexní n-úhelník, který lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu vzájemně se nepřekrývajících pravoúhlých trojúhelníků s ostrými úhly 30° a 60°.

Řešení.

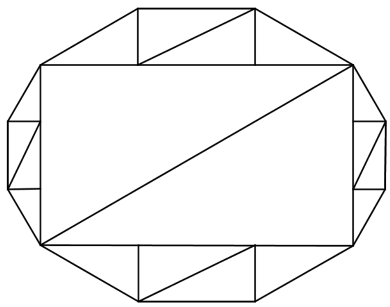
Nechť $A_1A_2\ldots A_n$ je konvexní n-úhelník, jehož libovolný vnitřní úhle lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu nepřekrývajících se úhlů velikosti 30°, 60° a 90°. To znamená, že libovolný vnitřní úhel α zkoumaného n-úhelníku, lze vyjádřit jako $\alpha = k \cdot 30°$, kde $k = 1, 2, 3, 4, 5$ (pro $k \geq 6$ se již nejedná o konvexní n-úhelník) – jeho maximální hodnota je tedy $\alpha = 150°$. S využitím známého vztahu pro součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku $s = (n-2) \cdot 180°$, získáme rovnici

$$(n-2) \cdot 180° \leq 150n,$$

jejímž řešením je zřejmě

$$n \leq 12.$$

Existence konvexního 12-úhelníku, jenž je konvexní n-úhelník s největším počtem vrcholů vyhovující zadání úlohy (tj. konvexní n-úhelník vyplněný konečným sjednocením nepřekrývajících se pravoúhlých trojúhelníku s vnitřními úhly 30° a 60°), je znázorněna na obr. 6.3.



Obr. 6.3

Příklad 6.3.2 [MO 33 C – I – 3]

Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Dřevěnou krychli o hraně délky n natřeme na červeno a rozřežeme $3(n-1)$ rovinnými řezy na n^3 malých krychliček o hraně délky 1.

a) Kolik malých krychliček bude mít jednu červenou stěnu, kolik dvě červené stěny, kolik tři červené stěny?

b) Je možné z malých krychliček sestavit kvádr o rozměrech $1 \times (4n-8) \times (4n-8)$ tak, aby jedna jeho čtvercová stěna o rozměrech $(4n-8)\times(4n-8)$ byla vybarvena jako šachovnice?

Řešení.

a) Tři červené stěny mají krychličky, které ležely u vrcholů velké krychle – je jich tedy 8. Dvě červené stěny mají krychličky, jež byli u jedné z 12 hrany krychle, ale ne ve vrcholu – těch je $12 \cdot (n-2)$. Jednu červeně obarvenou stěnu mají krychličky, které ležely v některé z šesti stěn krychle, ale ne u žádné hrany – jejich počet je $6 \cdot (n-2)^2$.

b) K sestavení kvádru, jehož jedna stěna o rozměrech $(4n-8)\times(4n-8)$ je vybarvena jako šachovnice, potřebujeme $\dfrac{(4n-8)^2}{2}$ obarvených krychliček a stejný počet neobarvených krychliček. Počet všech krychliček, které mají aspoň jednu červenou stěnu je $6n^2 - 12n + 8$. Pro n tedy musí platit

$$\frac{(4n-8)^2}{2} \leq 6n^2 - 12n + 8,$$

tj.

$$(n-5)^2 \leq 13.$$

Této podmínce vyhovují následující přirozená čísla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Z celkového počtu n^3 obarvených i neobarvených krychliček musíme sestavit šachovnici o $(4n-8)^2$ polích. Na neobarvené pole lze jistě použít i neobarvenou stěnu z některé krychličky, jejíž některé další stěny jsou natřené. Proto musí platit

$$(4n-8)^2 \leq n^3.$$

Z uvedených čísel vyhovují jen případy pro $n = 3, 4$.

Tím je příklad vyřešen.

Příklad 6.3.3 [MO 29 A – III – 3]

Množina M vznikla z roviny vyjmutím tří bodů A, B, C, které jsou vrcholy trojúhelníku. Jaký je nejmenší počet konvexních množin, jejichž sjednocení je množina M?

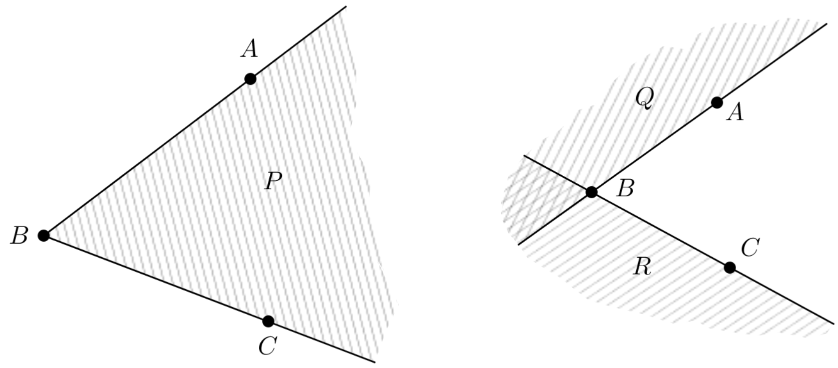
Řešení.

Ukážeme, že nejmenší počet konvexních množin, jejichž sjednocení je celá množina M jsou tři množiny. K tomu je třeba dokázat současná platnost následujících tvrzení:

(i) Množina M lze vyjádřit jako sjednocení tří konvexních množin.

(ii) Množina M nelze vyjádřit jako sjednocení dvou konvexních množin.

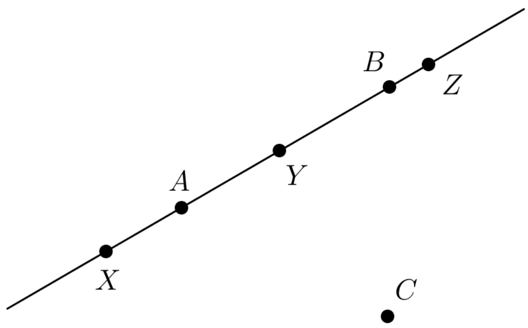
(i) Nejprve dokážeme první část tvrzení. Sestrojme tři konvexní množiny P, Q, R takové, že $M = P \cup Q \cup R$. Nechť P je množina všech bodu, které leží uvnitř úhlu ABC anebo uvnitř úseček AB, BC (viz obr. 6.4). Dále nechť Q je množina všech bodů, které leží mimo polorovinu ABC anebo na polopřímce opačné k polopřímce AB (vyjma



Obr. 6.4

bodu A). Obdobně nechť R je množina všech bodů v rovině, které leží mimo polorovinu BCA anebo na polopřímce opačné k polopřímce CB (vyjma bodu C). Snadno vidíme, že P, Q, R jsou konvexní množiny jejichž sjednocením je množina M.

(ii) Druhou část tvrzení budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že množina M lze vyjádřit jako sjednocení dvou konvexních množin U, V. Zvolme na přímce AB tři navzájem různé body X, Y, Z tak, že bod A leží uvnitř úsečky XY a bod B leží uvnitř úsečky YZ (viz obr. 6.5).



Obr. 6.5

Body $X, Y, Z \in M = U \cup V$. Pak jedna z množin U, V musí obsahovat dva z bodů X, Y, Z. Ať je to množina U. Za předpokladu že množina U je konvexní, rozlišme tyto tři případy:

a) $X, Y \in U$ pak $A \in U$,

b) $X, Z \in U$ pak $B \in U$,

c) $Y, Z \in U$ pak $A \in U$,

což je ve všech třech případech spor s $A, B \notin M$.

Tím je úloha vyřešena.

Příklad 6.3.4 [MO 30 C – I – 1]

Kostka o hraně délky 5 je složena ze 125 jednotkových kostek. Určete nejmenší a největší povrch tělesa, které vznikne odstraněním tří hranolů složených z pěti jednotkových kostek z původní kostky o hraně 5 tak, že žádné dva z odstraněných hranolů nemají společný žádný bod ani stejný směr.

Řešení.

Libovolný hranol $5 \times 1 \times 1$ můžeme z kostky $5 \times 5 \times 5$ odstranit třemi způsoby:

(i) Odstraněním hranolu, který obsahuje hranu krychle, zmenšíme povrch o 2.

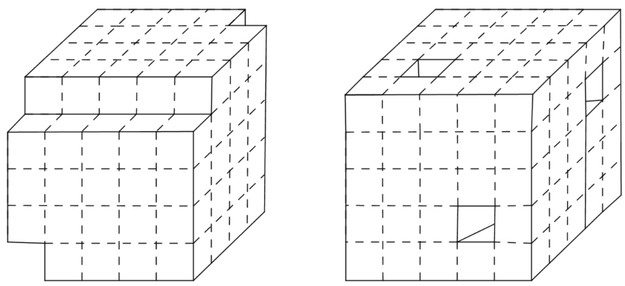
(ii) Odstraněním hranolu, jenž leží v některé stěně krychle a jehož nejdelší hrana je různá od každé hrany krychle, zvětšíme povrch o 8.

(iii) Odstraním hranolu, který má se stěnami krychle společné pouze obě čtvercové podstavy 1×1, zvětšíme povrch o 18.

Těleso s největším povrchem získáme, odstraníme-li z dané krychle tři hranoly popsané v bodě (iii), které se vzájemně nedotýkají a které mají různý směr. Povrch tohoto tělesa je $6 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 18 = 204$.

Naopak těleso s nejmenším povrchem získáme, odstraníme-li z dané krychle tři hranoly popsané v bodě (i), které se vzájemně nedotýkají a které mají různý směr. Povrch tohoto tělesa je $6 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 146$.

Příklad takových to dvou těles je znázorněn na následujícím obrázku.



Obr. 6.6

Úloha 6.3.1 [MO 33 C – S – 3b]

Dřevěný pravidelný šestiboký hranol H má podstavnou hranu délky n a výšku $6n$, číslo n je přirozené. Hranol natřeme červeně a rozřežeme na krychličky o hraně délky 1. Zjistěte, pro která n lze z krychliček slepit dutou krychli K o hraně délky $2n$, jejíž vnější povrch je celý červený?

Úloha 6.3.2 [MO 35 C – II – 2]

Bodem S prochází pět rovin, z nichž žádné tři nemají společnou přímku. Na kolik částí rozdělí tyto roviny celý prostor? (Předpokládejme, že rovina dělí prostor na dvě části, dvě různoběžné roviny na čtyři části apod.)

Úloha 6.3.3 [MO 33 B – S – 3b]

V rovině je dáno k množin přímek $M_1, M_2, \ldots, M_k$, každá z množin M_i se skládá z m navzájem různých rovnoběžných přímek. Pro $i \neq j$ nejsou přímky množiny M_i rovnoběžné s přímkami množiny M_j a žádné tři přímky množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ neprochází jedním bodem. Určete na kolik částí dělí rovinu přímky z množiny $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$.

Úloha 6.3.4 [MO 38 A – II – 4]

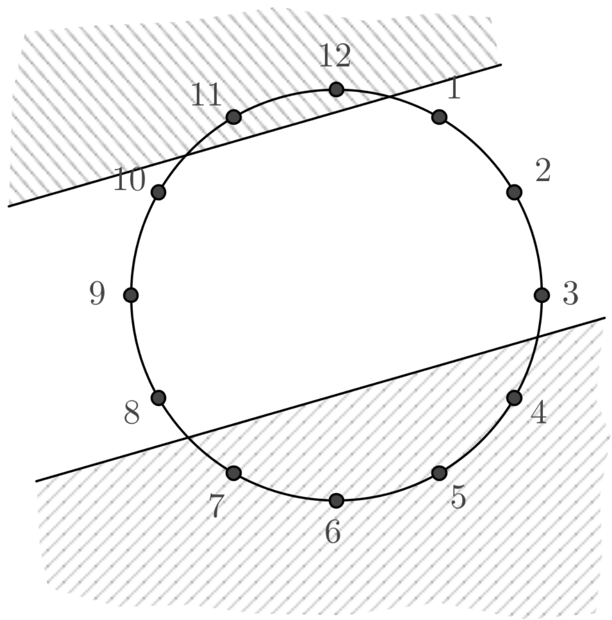
Je dáno n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, které neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat? (Rozklady porovnáváme jako neuspořádané dvojice množin.)

Úloha 6.3.5 [MO 10 B – I – 3]

Máme rozdělit lichoběžník na tří nepřekrývající se trojúhelníky o stejných obsazích. Zjistěte, zda je úloha řešitelná pro každý lichoběžník. V případě, kdy je úloha řešitelná, najděte všechny způsoby takového rozdělení.

Úloha 6.3.6 [MO 25 Z – II – 3]

Na obrázku je znázorněn hodinový ciferník a dvě rovnoběžné přímky (viz obr. 6.7), z nichž žádné neprochází žádným z bodů 1 až 12. Změňte polohu přímek tak, aby součet čísel ležících v každé z vyšrafovaných polorovin byl roven součtu čísel ležících v pásu rovnoběžek.



Obr. 6.7

Úloha 6.3.7 [MO 32 A – S – 2]

Určete všechna přirozená čísla n, pro která lze rovnostranný trojúhelník se stranou délky n rozložit na navzájem se nepřekrývající lichoběžníky se stranami délky 1, 1, 1, 2.

Úloha 6.3.8 [MO 48 A – I – 6]

Z papíru byl slepen model čtyřstěnu, jehož každé dvě protilehlé stany jsou shodné. Rozhodnete, zda můžeme model rozříznout podél tří úseček tak, aby ho pak bylo možno rozvinout do roviny a vznikl přitom obdélník. Existují pro pravidelný čtyřstěn dva uvažované způsoby rozřezání, při nichž vzniknou neshodné obdélníky?

Úloha 6.3.9 [MO 53 C – I – 1]

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a jeden obdélník 3×1.

Úloha 6.3.10 [MO 56 C – I – 2]

Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

Kapitola 7

Metoda rekurze

V této kapitole uvedeme několik úloh, jejíchž řešení je založeno na vytvoření posloupnosti nových problému $P_1, P_2, \dots, P_n$ ze zadaného problému P tak, že problém P_1 je zjednodušením původního problému P, problém P_2 je zjednodušením problému P_1, atd. až dojdeme k problému P_n, který je již triviální. Postupným vyřešení posloupnosti problémů $P_n, P_{n-1}, \dots P_1$ nakonec nalezneme řešení původního problému P. Výše popsaná metoda je označovaná jako tzv. *metoda rekurze*. Při řešení příkladů se obvykle snažíme nalézt vhodný rekurentní vzorec, pomocí něhož – na základě znalostí nejčastěji počtu řešení problémů $P_1, P_2, \dots, P_n$ – určíme počet řešení problému P_n [6].

7.1 Úlohy z klasické kombinatoriky

V prvním odstavci sedmé kapitoly jsou uvedeny příklady z oblasti klasické kombinatoriky, při jejichž řešení je výhodné nalézt a požít vhodný rekurentní vzorec.

Příklad 7.1.1 [MO 47 A – I – 3]
V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena A a B. Pro slova tohoto jazyka platí:

(i) Jediné slovo délky 1 je A.

(ii) Libovolná skupina písmen $X_1X_2X_3 \dots X_nX_{n+1}$ kde $X_i \in \{A, B\}$ pro každý index i tvoří slovo délky $n+1$, právě když obsahuje aspoň jedno písmeno A a přitom není tvaru $X_1X_2 \dots X_nA$, kde $X_1X_2 \dots X_n$ je slovo délky n.

Najděte

a) všechna slova délky 4,

b) vzorec pro počet p_n všech slov délky n.

Řešení.
a) Slova délky 2 jsou AB a BA. Nepřípustná slova délky 3 jsou BBB, ABA a BAA. Přípustná slova délky 3 pak jsou AAA, AAB, ABB, BAB, BBA. Nepřípustná slova

délky 4 je slovo BBB a dále slova, která získáme připsáním písmena A na konec přípustných slov délky 3, tj. slova $AAAA, AABA, ABBA, BABA, BBAA$. Všechna ostatní jsou přípustná – jsou to slova $AAAB, ABAA, BAAA, AABB, ABAB, BAAB, ABBB, BABB, BBAB, BBBA$.

b) Z části a) víme, že $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 10$. Nyní pomocí rekurentního vzorce vyjádříme vztah mezi p_{n+1} a p_n. K určení tohoto vztahu rozdělíme slova délky $n+1$ do dvou skupin:

(1) počet slov tvaru $\ldots A$ je právě $2^n - p_n$, protože před písmenem A nemůže být zapsáno žádné slovo délky n,

(2) počet slov tvaru $\ldots B$ je právě $2^n - 1$, protože před písmenem B nemůže být napsáno n písmen B.

Pro rekurentní vzorec tedy paltí:

$$p_{n+1} = (2^n - p_n) + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - p_n.$$

Ze vztahu pro p_{n+1} a p_{n+2} získáme následující tvar rekurentního vzorce:

$$p_{n+2} = 2^{n+2} - 1 - p_{n+1} = 2^{n+2} - 1 - (2^{n+1} - 1 - p_n) = p_n + 2^{n+1}.$$

Na základě posledního vzorce určíme hodnoty p_n odděleně pro sudé a liché indexy n:

(i) Pro liché $n = 2k - 1$ platí:

$$p_{2k-1} = p_{2k-3} + 2^{2k-2} = p_{2k-5} + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} = \ldots$$

$$\ldots = p_1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{k-2} + 4^{k-1} = \frac{4^k - 1}{3}.$$

(ii) Pro sudé $n = 2k$ platí:

$$p_{2k} = p_{2k-2} + 2^{2k-1} = p_{2k-4} + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} = \ldots$$

$$\ldots = p_2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} = 2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^2 + \ldots 2 \cdot 4^{k-2} + 2 \cdot 4^{k-1} = 2 \cdot \frac{4^k - 1}{3}.$$

Nalezené vzorce platí pro každé $k \geq 1$.

Úloha 7.1.1 [MO 47 A – S – 2]

V jistém jazyku jsou pouze dva znaky A a B. Přípustná jsou v něm jen taková slova, v nichž nestojí vedle sebe více než dva stejné znaky. Dokažte, že počty p_n všech přípustných slov délky n lze určit pomocí rovností $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ a $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ pro každé přirozené číslo k.

Úloha 7.1.2 [MO 50 A – III – 4]

V jistém jazyce je n písmen. Skupina písmen napsaných za sebou je slovo, právě když se mezi dvěma stejnými písmeny nenacházejí dvě stejná písmena. Určete počet všech slov maximální délky.

Úloha 7.1.3 [MO 53 A – I – 3]

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik" BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků.

Úloha 7.1.4 [MO 53 A – II – 2]

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují trojici AAA po sobě jdoucích písmen A ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá.

Úloha 7.1.5 [MO 53 A – III – 2]

Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A, ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B. Určete hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

Úloha 7.1.6 [MO 59 A – I – 5]

V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první a aby si vzal přesně n-tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese.

7.2 Úlohy o číslech

V tomto odstavci jsou uvedeny úlohy o číslech, jejichž formulace vyžaduje nalezení a použití vhodného rekurentního vzorec.

Příklad 7.2.1 [MO 31 B – I – 5]

Označme $M(n)$ počet všech uspořádaných n-tic nul a jedniček, v nichž se nevyskytují tři nuly vedle sebe.

a) Určete $M(13)$.

b) Rozhodněte, zda je $M(1000)$ sudé číslo.

Řešení.

a) Pro $n = 1, 2, 3, 4$ snadno odvodíme, že

$$M(1) = 2,\ M(2) = 4,\ M(3) = 7,\ M(4) = 13.$$

Pro $n \geq 5$ zjistíme hodnotu hledaného výrazu s využitím znalosti počtu předcházejících $(n-1)$-tic následujícím způsobem. Novou n-tici vytvoříme z $(n-1)$-tice připsáním jedničky nebo nuly na její konec. Zatímco jedničku lze doplnit na konec jakékoliv $(n-1)$-tice, u nuly musíme vyloučit $(n-1)$-tice zakončené trojčíslím 1, 0, 0. Nevyhovujících n-tic bychom takto vytvořili $M(n-4)$. Platí tedy

$$M(n) = 2 \cdot M(n-1) - M(n-4).$$

Výpočtem zjistíme, že $M(13) = 3\,136$.

b) Vypsáním několika členů s využitím námi odvozeného rekurentního vztahu zjistíme, že pro $n > 4$ je $M(n)$ liché tehdy a jen tehdy, když je $M(n-4)$ liché. Dále lze z vypsaných členů vyvodit, že $M(n)$ je liché, právě když lze n zapsat ve tvaru $n = 3+4k$ nebo $n = 4(k+1)$, kde k je libovolné celé nezáporné číslo a protože $1000 = 4 \cdot 250$, je číslo $M(1000)$ liché.

Úloha 7.2.1 [MO 31 B – S – 3b]

Kolik je přirozených čísel n s těmito vlastnostmi:

a) $10^3 \leq n < 10^4$, tj. n je čtyřciferné,

b) v desítkovém zápise čísla n vedle sebe nejsou žádné dvě sudé číslice.

Úloha 7.2.2 [MO 1 A – III – 2]

Tabulka čísel

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\
 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & & \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & g_3 & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

je sestavená takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž poslední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem, každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

Úloha 7.2.3 [MO 45 A – I – 3]

Posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ splňuje pro každé přirozené $n \geq 1$ tři rovnosti:

$$a_n + a_{2n} = a_{3n},$$

$$a_n + a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1},$$

$$a_n + a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Přitom víme, že všechny čtyři členy $a_1, a_{14}, a_{17}, a_{21}$ jsou prvočísla. Dokažte rovnost

$$a_{1995} = a_{2000}.$$

Úloha 7.2.4 [MO 57 A – I – 4]

Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všech možných délek k, pro které platí: $a_1 = 1$, $a_i | a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$.

7.3 Úlohy o geometrických objektech

Ve třetím odstavci sedmé kapitoly jsou zařazeny úlohy z geometrie, které lze vyřešit nalezením a aplikací vhodného rekurentního vzorce.

Příklad 7.3.1 [MO 34 A – III – 1]

V rovině je dán pravidelný 1 985-úhelník. Každou jeho stranu proložme přímkou. Určete počet částí, na které tyto přímky rozdělí rovinu.

Řešení.

Proložíme-li n přímek stranami pravidelného n-úhelníku, pak pro liché n platí, že žádné dvě z těchto přímek nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem. Počet oblastí, na které uvažovaných n přímek rozdělí rovinu, označme $g(n)$, pro $n \geq 3$.

1. Je-li $n = 3$, pak zřejmě platí $g(3) = 7$.

2. Pro $n > 3$ předpokládejme, že známe počet oblastí, na nichž rozdělí n přímek rovinu podle zadání úlohy, tj. známe $g(n)$. Uvažujme $(n+1)$-ní přímku, která protíná všech n přímek. Tato přímka je zbylými n přímkami rozdělena na $n+1$ částí a každá z těchto částí rozdělí původní oblast na dvě nové oblasti. Počet takto vzniklých oblastí lze proto vyjádřit vztahem

$$g(n+1) = g(n) + n + 1.$$

Platí tedy, že

$$g(n) = n + g(n-1) = n + (n-1) + \ldots + g(4) + g(3) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Speciálně pro $n = 1\,985$ je $g(1\,985) = 1\,985 \cdot 993 + 1 = 1\,971\,106$.

Úloha 7.3.1 [MO 15 A – III – 2]

V rovině je dáno n kružnic, z nichž každé dvě se protínají právě ve dvou bodech a žádným bodem neprochází tři z těchto kružnic. Určete celkový počet částí, na které dělí daná soustava kružnic rovinu. (Např. tři kružnice uvedených vlastností dělí rovinu na osm částí.)

Úloha 7.3.2 [MO 43 B – I – 5]

Určete největší možný počet částí, na které n kružnic rozdělí rovinu (n je přirozené číslo).

Úloha 7.3.3 [MO 23 B – II – 3a]

Je dána kružnice k a přirozené číslo n. Zjistěte největší a nejmenší počet částí, na které lze vnitřek kružnice k rozdělit n tětivami.

Úloha 7.3.4 [MO 16 A – I – 2]

V prostoru je dáno n rovin, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou a žádné čtyři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik oblastí dělí tyto roviny prostor.

(Návod. Předpokládejme znalost této věty: n přímek roviny, z nichž každé dvě jsou různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, dělí rovinu na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ oblastí.

Úloha 7.3.5 [MO 23 A – P – 2]

Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky 1. Každou stranu rozdělte na k stejných dílů. Sestrojte všechny úsečky rovnoběžné s příslušnými stranami; jejich krajní body jsou dělící body na stranách daného trojúhelníku. Vznikne tak síť složená z rovnostranných trojúhelníků. Určete počet všech trojúhelníků, které lze v síti najít.

Úloha 7.3.6 [MO 23 A – II – 3a]

V téže rovině leží kružnice $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ($n \geq 1$).

a) Najděte vzorec pro největší možný počet a_n oblastí, na které tyto kružnice rozdělí rovinu. Popište konstrukci n kružnic, které rozdělí rovinu na tento počet a_n oblastí. Jaký má odvozený výsledek význam pro Vennovy diagramy?

b) Budiž $n = 4$; popíšeme symbolem (1010) každou z oblastí, která leží uvnitř k_1, k_3 a vně k_2, k_4, symbolem (0100) každou z oblastí, která leží uvnitř k_2 a vně k_1, k_3, k_4 a obdobně dále. Ukažte, že je možné zvolit kružnice tak, že dělí rovinu na a_4 oblastí a každá z nich má jiný popis. Narýsujte obrázek.

Kapitola 8

Metoda dílčích problémů

V poslední kapitole jsou zařazeny příklady, při jejichž řešení se využívá tzv. *metoda dílčích problémů*. Tato metoda spočívá v rozdělení řešeného příkladu na několik totožných nebo vzájemně nesouvisejících dílčích problémů. Po vyřešení jednotlivých problémů se řešení celého příkladu určí na základě zkombinování (například pomocí pravidla součtu a součinu) výsledků dílčích problémů [6].

8.1 Úlohy o číslech

V prvním odstavci osmé kapitoly je zařazeno několik úloh o číslech, při jejichž řešení lze metodu dílčích problémů s výhodou použít.

Příklad 8.1.1 [MO 22 C – I – 2]

Určete součet všech šesticiferných čísel, z nichž každé má dekadický zápis obsahující každou z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Řešení.

Počet všech šesticiferných čísel, které vyhovují zadání úlohy je $6! = 720$. Nyní určíme jakými sčítanci přispějí součty čísel na jednotlivých pozicích (jednotky, desítky, až miliony) v dekadickém zápisu uvažovaných šesticiferných čísel (tj. vyřešíme šest jednodušších problémů) a poté tyto sčítance sečteme.

(i) Každá z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 zaujme první místo právě u 120 čísel. Číslice na prvním místě u šesticiferného čísla stojí na pozici statisíců a proto přispějí k celkovému součtu následujícím sčítancem

$$120 \cdot 1 \cdot 10^5 + 120 \cdot 2 \cdot 10^5 + 120 \cdot 3 \cdot 10^5 + 120 \cdot 4 \cdot 10^5 + 120 \cdot 5 \cdot 10^5 + 120 \cdot 6 \cdot 10^5 =$$

$$= 120 \cdot 10^5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \cdot 10^5 \cdot 21.$$

(ii) Obdobnou úvahou zjistíme, že cifry na 2. až 6. místě přispějí k výslednému součtu těmito sčítanci

$$120 \cdot 10^4 \cdot 21, \quad 120 \cdot 10^3 \cdot 21, \quad 120 \cdot 10^2 \cdot 21, \quad 120 \cdot 10 \cdot 21, \quad 120 \cdot 21.$$

Celkový součet zjistíme sečtením všech šesti sčítanců

$$120 \cdot 21 \cdot (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 120 \cdot 21 \cdot 111\,111.$$

Hledaný součet tedy je 279 999 720.

Příklad 8.1.2 [MO 36 C – II – 3a]
Zjistěte kolik řešení má soustava rovnic

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_6 + x_7 + x_8,$$
$$|x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8| = 1.$$

v oboru celých čísel.

Řešení.
Z druhé rovnice vidíme, že každé z čísle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se může rovnat buď 1 anebo -1. Rozlišíme následující čtyři případy:

(i) Jestliže $x_6 = x_7 = x_8 = -1$, pak je jedno z čísle $x_1, x_2, \ldots, x_5$ rovno $+1$ a ostatní dvě -1, tj. 5 možností.

(ii) Pokud $x_6 + x_7 + x_8 = -1$ (tj. $\binom{3}{2} = 3$ možností), pak právě dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_5$ jsou -1 a zbylé tři $+1$; to nastane pro $\binom{5}{2} = 10$ možnosti. Dohromady je tedy $3 \cdot 10 = 30$ možností.

(iii) Pakliže je jedno z čísel x_6, x_7, x_8 rovno -1 a zbylé dvě $+1$, pak podobnou úvahou jako v bodě (ii) dostaneme 30 možností.

(iv) Poslední situace, která může nastat je pro $x_6 = x_7 = x_8 = 1$. V tomto případě získáme stejně jako v bodě (i) 5 možností.

Zjistili jsem, že celkem existuje 70 řešení dané soustavy rovnic.

Úloha 8.1.1 [MO 28 B – II – 3a]
Určete kolik různých trojic přirozených čísel x, y, z splňuje rovnost

$$x^1 y^{97} z^9 = 19^{791} \cdot 97^9.$$

Úloha 8.1.2 [MO 28 A – III – 1]
Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech uspořádaných trojic (x, y, z) nezáporných celých čísel x, y, z, které vyhovují rovnici

$$x + 2y + 5z = 10n.$$

Úloha 8.1.3 [MO 8 C – I – 5]

Kolik čtveřic celých čísel a, b, c, d má tyto vlastnosti:

(i) Žádné dvě z čísel a, b, c, d si nejsou rovna.

(ii) Platí $a + b + c + d = 0$.

(iii) Každé z čísel a, b, c, d má absolutní hodnotu menší než 5.

(Čtveřici $1, 2, -3, 4$ považujeme za různou od čtveřice $2, -3, 4, 1$ apod.)

Úloha 8.1.4 [MO 8 C – II – 2]

Písařka píše na psacím stroji těsně za sebou přirozená čísla

$$123456789101112 \text{ atd.}$$

bez mezer a čárek; celkem takto napsala 1 000 číslic.

Vypočítejte, kolik při tom napsala sedmiček.

Úloha 8.1.5 [MO 8 D – I – 3]

Kolik napíšeme devítek, pokud vypíšeme všechna přirozená čísla od 1 do 5 555?

Úloha 8.1.6 [MO 55 A – III – 5]

Najděte všechny trojce navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

(i) $p \mid q + r$,

(ii) $q \mid r + 2p$,

(iii) $r \mid p + 3q$.

8.2 Úlohy o geometrických objektech

Ve druhém odstavci závěrečné kapitoly jsou zařazený úlohy o geometrických objektech, které lze vyřešit s pomocí metody dílčích problémů.

Příklad 8.2.1 [MO 40 B – I – 3]

V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny podmínky:

a) z každé trojce bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,

b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? Nakreslete příklad takového útvaru.

Řešení.

Rozlišme následující tři případy:

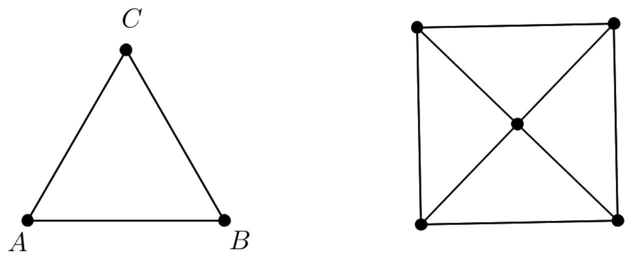
(i) Jestliže z některého z daných bodů (označme ho A) nevychází žádná úsečka, musejí být každé dva ze zbývajících 6 bodů spojeny, jinak by tyto dva body tvořily spolu s bodem A trojici, která by nesplňovala podmínku a). Šest bodů určuje $\binom{6}{2} = 15$ úseček.

(ii) Nechť z některého bodu A vychází pouze jedna úsečka, její druhý krajní bod označme B. Každé dva ze zbývajících pěti bodů musejí být opět spojeny úsečkou, je tedy v tomto případě třeba aspoň 11 úseček.

(iii) Nechť z některého bodu A vycházejí právě dvě úsečky (do bodů B, C). Každé dva ze zbývajících 4 bodů musejí být spojeny, to dává 6 úseček. Podmínka a) však bude splněna jen tehdy, bude-li každý z těchto 4 bodů spojen s B nebo s C (12 úseček) nebo budou-li spojeny body B, C (pak je třeba aspoň 9 úseček).

(iv) Vycházejí-li z každého bodu aspoň 3 úsečky, je jich celkem aspoň $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7$, tedy aspoň 11.

Nejmenší možný počet úseček je tedy 9. Příklad takovéhoto útvaru je znázorněn na obrázku 8.1.



Obr. 8.1

Příklad 8.2.2 [MO 22 C – II – 3b]

V rovině je dáno pět bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolika způsoby je možné vybrat čtyři z nich tak, aby tvořili vrcholy konvexního čtyřúhelníka?

Řešení.

Celkem mohou nastat tři případy:

(i) Pokud dané body tvoří konvexní pětiúhelník, pak vynecháním libovolného z těchto bodů získáme konvexní čtyřúhelník. V tomto případě má úloha pět řešení.

(ii) Dále se zabývejme případem, kdy čtyři body (např. A_1, A_2, A_3, A_4) tvoří konvexní čtyřúhelník a bod A_5 leží uvnitř tohoto čtyřúhelníku. Protože bod A_5 nemůže ležet na úhlopříčce A_1A_3 ani na úhlopříčce A_2A_4, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod A_5 leží uvnitř trojúhelníku A_1A_2B, kde bod B je průsečíkem úhlopříček A_1A_3 a A_2A_4. Pak vynecháním některého z bodů A_1, A_2, A_5 získáme čtyřúhelník požadovaných vlastností. V tomto případě má úloha tři řešení.

(iii) Poslední možnost nastane, jestliže tři body (např. A_1, A_2, A_3) budou tvořit vrcholy trojúhelníku a body A_4 a A_5 budou ležet uvnitř tohoto trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod A_5 leží uvnitř trojúhelníku A_1CA_4, kde C je průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4. Abychom získali konvexní čtyřúhelník můžeme ze těchto podmínek vypustit pouze bod A_2. V tomto případě tedy existuje jen jedno řešení.

Úloha může mít jedno, tří anebo pět řešení.

Příklad 8.2.3 [MO 22 C – I – 6]

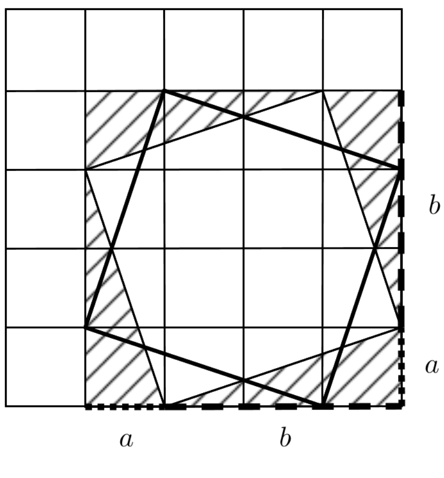
Je dána čtvercová šachovnice o 25 polích. Určete počet všech čtverců, z nich každý má všechny své vrcholy ve vrcholech čtverců šachovnice.

Řešení.

Počet všech čtverců složených z jednotlivých polí šachovnice je

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Ostatní čtverce nemají strany rovnoběžné se stranami pole šachovnice. Zvolme stranu pole za jednotku délky a označme délky průmětů dvou sousedních stran čtverce a, b. Situace je znázorněna na obr. 8.2 – průmět strany a je vyznačen tečkovaně, strany b čárkovaně. Pak platí $a + b \leq 5$.



Obr. 8.2

Je-li $a \neq b$, pak čtverců tohoto typu je dvojnásobný počet než čtverců složených z $(a + b)^2$ polí šachovnice (viz obr. 8.2). Pokud je $a = b$, pak čtverců tohoto druhu je stejně jako čtverců skládajících se z $(a+b)^2 = (2a)^2$ polí šachovnice. Počty všech čtverců, jejichž strany nejsou rovnoběžné se stranami polí šachovnice, jsou uvedeny v následující tabulce:

(a,b)	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$
Počet čtverců	$2\cdot 1=2$	$2\cdot 1=2$	$2\cdot 2^2=8$	$2^2=4$	$2\cdot 3^2=18$	$4^2=16$

Součet těchto čtverců je 50. Celkem tedy tedy zadání úlohy vyhovuje $55+50=105$ čtverců.

Příklad 8.2.4 [MO 42 C – I – 6]

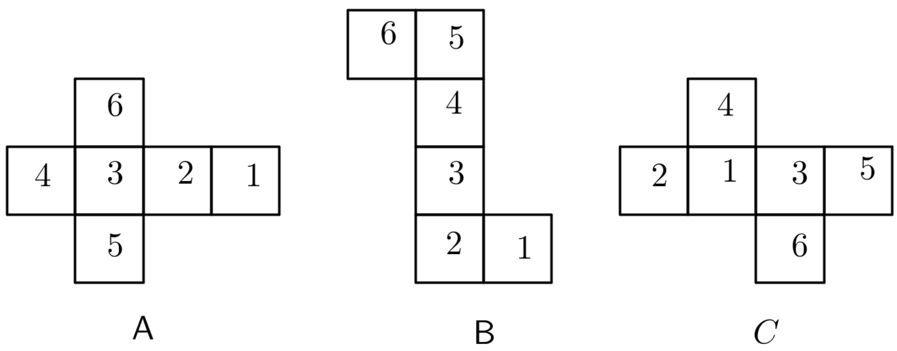
Ze sítí na obr. 8.3 můžeme složit tři kostky. Pokud je postavíme do sloupečku, na jeho bocích si můžeme shora dolů přečíst trojmístná čísla (některé číslice budou ležet na boku nebo budou vzhůru nohama). Tato čtyři čísla sečteme. Kolik takových součtů můžeme dostat?

Řešení.

Označme A kostku, jejíž síť je na obr. 8.3 – A. Na této kostce bude stěna s číslem 1 proti stěně s číslem 3, stěna s číslem 2 proti stěně s číslem 4 a stěna s číslem 5 proti stěně s číslem 6.

Jako B označíme kostku se sítí na obr. 8.3 – B. Na této kostce bude proti stěně s číslem 1 stěna s číslem 6, proti stěně s číslem 2 stěna s číslem 4 a proti stěně s číslem 3 stěna s číslem 5.

Na kostce C, se sítí na obr. 8.3 – C, je proti stěně s číslem 1 stěna s číslem 5, proti stěně s číslem 2 stěna s číslem 3 a proti stěně s číslem 4 stěna s číslem 6.



Obr. 8.3

Z toho vyplývá, že všecky tři kostky jsou navzájem různé. Předtím, než začneme uvažovat o možnostech počtu součtů čtyřech trojmístných čísel na stěnách sloupečku, si musíme uvědomit, že tento počet nezávisí na umístění kostek ve sloupečku ani na tom, které číslice jsou na „skrytých stěnách“ (horní a dolní) jednotlivých kostek. Přitom součet číslic na viditelných bočních stěnách horní kostky představuje stovky, na střední kostce počet desítek a na dolní kostce počet jednotek součtu. Možné polohy kostek ve sloupečku, které mají vliv na počet součtů, jsou zapsané v následující tabulce (indexy označujeme možné různé polohy příslušné kostky):

Plocha kostky	Číslice na horní, resp. na dolní stěně	Číslice viditelné na bočních stěnách a jejich součty
A_1	1; 3	$2+5+4+6=17$
A_2	2; 4	$1+5+3+6=15$
A_3	5; 6	$1+2+3+4=10$
B_1	1; 6	$2+3+4+5=14$
B_2	2; 4	$1+3+5+6=15$
B_3	3; 5	$1+2+4+6=13$
C_1	1; 5	$2+3+4+6=15$
C_2	2; 3	$1+4+5+6=16$
C_3	4; 6	$1+2+3+5=11$

Při uspořádání kostek do sloupečku máme celkem 6 různých možností, které můžeme znázornit tímto schématem:

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{A} \end{array}$$

Z toho, že všechny tři kostky jsou vzájemně různé a že rozdíl mezi největším a nejmenším možným součtem čtyřech viditelných číslic je méně než deset, vyplývá, že všem polohám jednotlivých kostiček při uspořádání ABC (shora dolů) odpovídá celkem $3\cdot 3\cdot 3=27$ různých součtů. Vzhledem k tomu, že pro každou kostku existuje jedna poloha se stejným součtem číslic na viditelných bočních stěnách (totiž 15), dostaneme při ostatních uspořádáních kostek ve sloupečku už menší počet nových součtů. A to:

(i) Při uspořádání BAC to bude $3\cdot 3\cdot 3-3=24$, protože součet v poloze $B_2A_2C_i$ je stejný jako v poloze $A_2B_2C_i$ (pro $i=1,2,3$).

(ii) Při uspořádání ACB to bude opět $3\cdot 3\cdot 3-3=24$, neboť součet v poloze $A_iC_1B_2$ je stejný jako v poloze $A_iB_2C_1, i=1,2,3$.

(iii) Při uspořádání CAB přibude už jen jen $3\cdot 3\cdot 3-5=22$ nových součtů, protože součet v poloze $C_1A_2B_i$ je stejný jako v poloze $A_2C_1B_i$ ($i=1,2,3$) a součet v poloze $C_1A_iB_2$ je stejný jako součet v poloze $B_2A_iC_1$, pro $i=1$ a $i=3$.

(iv) Při uspořádání BCA bude nových součtů opět jen $3\cdot 3\cdot 3-5=22$, protože součet v poloze $B_2C_iA_2$ je stejný jako součet v poloze $A_2C_iB_2$ (pro $i=1,2,3$) a součet v poloze $B_iC_1A_2$ je stejný jako součet v poloze $B_iA_2C_1$, $i=1,3$.

(v) Konečně při uspořádání CBA přibude už jen $3\cdot 3\cdot 3-7=20$ nových součtů, neboť součet v poloze $C_1B_2A_i$ je stejný jako v poloze $B_2C_1A_i$ ($i=1,2,3$), součet v poloze $C_1B_iA_2$ je stejný jako v poloze $A_2B_iC_1$ ($i=1,3$) a součet v poloze $C_iB_2A_2$ je stejný jako v poloze $C_iA_2B_2$ ($i=2,3$).

Celkem tedy můžeme dostat $27+2\cdot 24+2\cdot 22+20=139$ různých součtů.

Úloha 8.2.1 [MO 40 B – II – 3]

V rovině je dáno sedm bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom v každé čtveřici bodů jsou aspoň dvě dvojce spojené úsečkou a počet úseček je minimální. Zjistěte, kolik úseček takový útvar obsahuje a nakreslete příklad.

Úloha 8.2.2 [MO 40 A – I– 3]

V rovině je dáno devět bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny následující podmínky:

a) v každé trojici daných bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou,

b) počet úseček je minimální.

Kolik úseček obsahuje útvar, který tyto dvě podmínky splňuje? Načrtněte příklad takového útvaru.

Úloha 8.2.3 [MO 32 Z – II – 3]

Dřevěnou krychli o hraně délky 7 natřeme na červeno a pak ji rozřízneme rovinnými řezy na 7^3 krychliček o hraně délky 1. Kolik krychliček bude mít jednu červenou stěnu, kolik dvě červené stěny a kolik tři?

Úloha 8.2.4 [MO 32 Z – I – 4]

Z krychlí o hraně 1 cm jsme slepili krychli o hraně 4 cm. Potom jsme stěnám krychle přiřadili čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a 6 stejným způsobem jako na hrací kostce, tj. na protějších stěnách jsou čísla 1 a 6, 2 a 5, 3 a 4. Každé z těchto čísel jsme napsali na příslušné stěně do každého pole čtvercové sítě vytvořené hranami malých krychlí. Velkou krychli jsme pak opět rozdělili na původní malé krychle a pro každou malou krychli jsme vypočetli součet všech čísel, která na ní byla napsána.

Zjistěte:

a) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 2?

b) Kolik je celkem malých krychlí se součtem rovným číslu 6?

c) Jaký je největší možný součet a kolik existuje malých krychlí s tímto největším součtem?

Úloha 8.2.5 [MO 4 C – I – 6]

Určete, kolik tahů koněm lze provést na čtvercové šachovnici, která má n^2 polí (kde $n > 1$ je přirozené číslo).

Úloha 8.2.6 [MO 6 D – I – 7]

Určete, počet všech tahů, které může vykonat dáma na prázdné šachovnici 8×8. (Přitom považujeme tah z pole A na pole B za různý od tahu z pole B na pole A.)

Závěr

V předkládané diplomové práci na téma *Kombinatorické úlohy ve středoškolských matematických olympiádách*, jsem vymezil základní kombinatorické pojmy (variace, permutace, kombinace) a formuloval nejčastěji užívané kombinatorické principy a pravidla – pravidlo součtu a součinu a pravidlo bijekce, Dirichletů princip, princip inkluze a exkluze a dále metody rozkladu, rekurze a metodu dílčích problémů. Každé z těchto kombinatorických metod a principů jsem věnoval jednu kapitolu (kapitoly 2 až 8).

V jednotlivých kapitolách jsem vždy nejprve daný princip nebo metodu vymezil, popřípadě i dokázal. Dále jsem uvedl několik typových řešených příkladů a sérii úloh (tak jsem pro odlišení označil neřešené příklady) určených k procvičení dané problematiky. Tyto příklady a úlohy jsem navíc v každé kapitole rozčlenil, podle jejich tématického zaměření, do několika odstavců. Výjimku tvoří třetí a pátá kapitola (věnované pravidlu bijekce, resp. principu inkluze a exkluze), v nichž jsou všechny příklady uvedeny v odstavci s názvem „Příklady a úlohy“.

Ve druhé kapitole (věnované pravidlu součtu a součinu), čtvrté kapitole (věnované Dirichletovu principu) a sedmé kapitole (věnované metodě rekurze) jsem příklady, v nichž na povaze prvků, s nimiž se pracuje nezáleží, zařadil do odstavce s názvem „Úlohy z klasické kombinatoriky“. Příklady, v nichž se pracuje s čísly, jsem v těchto kapitolách shrnul do odstavce „Úlohy o číslech“ a příklady z oblasti geometrie do odstavce „Úlohy o geometrických objektech“.

V šesté kapitole (věnované metodě rozkladu) jsem místo odstavce „Úlohy z klasické kombinatoriky“ zařadil odstavec „Úlohy o množinách“ – všechny příklady, v něm uvedené, se zabývají rozkladem určitého systému množin. V poslední osmé kapitole (věnované metodě dílčích problémů) jsem příklady rozčlenil pouze do odstavců – „Úlohy o číslech“ a „Úlohy o geometrických objektech“.

Příklady, které jsem uvedl v diplomové práci vycházejí především z úloh zařazených v jednotlivých ročnících matematické olympiády. Tyto příklady jsem tématicky rozčlenil do výše popsaných kapitol a odstavců. Vznikla tak sbírka příkladů, která může posloužit především při přípravě nadaných žáků na matematickou olympiádu a jiné matematické soutěže.

Hlavní cíl této diplomové práce, tedy vytvořit sbírku úloh z kombinatoriky charakteru matematické olympiády, se mi podařilo splnit a doufám, že vzniklá sbírka opravdu (někdy v budoucnu) poslouží svému účelu.

Literatura

[1] *Organizační řád matematické olympiády.* Č.j.: MSMT-32436/2014-1, dostupné z: http://mo.webcentrum.muni.cz [citace k 18. 5. 2015].

[2] Herman, J., Kučera, R., Šimsa, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarikova univerzity, Brno, 2004.

[3] Švrček, J.: *Úvod do kombinatoriky.* Univerzita Palackého, Olomouc, 2008.

[4] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Prometheus, Praha, 2004.

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 2005.

[6] Engel, A.: *Problem-Solving Strategy.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1998.

[7] Vilenkin, N. J.: *Kombinatorika.* ŠMM, sv. 45, Mladá fronta, Praha.

[8] Markus D. A.: *Combinatorics (A Problem Oriented Approach).* The Mathematical Association of America, 1998.

[9] Kolektiv autorů: *Ročenky MO (1. – 64. ročník).* SPN, Praha.