UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

LUBOR MRVA
IV. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika a technická a informační výchova

POLOHOVÉ A METRICKÉ ÚLOHY V KÓTOVANÉM PROMÍTÁNÍ NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH
Diplomová práce

Vedoucí: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

OLOMOUC 2010

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jen uvedených pramenů a literatury.

Ve Veselíčku, 12. 4. 2010 ....

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D., za odborné vedení diplomové práce a poskytování rad, ale i učitelům středních škol, u nichž jsem prováděl výzkum.

◆ Obsah

◆ 1 Úvod

„Už od dob pravěku usilovali umělci o co nejvěrnější zobrazení předlohy. Mezi tyto umělecké skvosty se řadí také díla malířská, jenž zachytila dnes už v originále neexistující reálie, jako jsou stavby, příroda a celý životní styl té doby. Tito umělci však byli postaveni před nelehký úkol, neboť potřebovali, co nejvěrněji zobrazit prostorový objekt v rovině. Tohoto „optického klamu“ docílili kombinací odstínů barev a využitím osvětlení. Dnes je tento problém do značné míry vyřešen využitím fotografie.“ [1]

„Při zobrazování objektů v geometrii se však snažíme o to, aby byl obraz vytvořen bez použití barev a osvětlení. Takovýto obraz pak zobrazuje prostorový objekt jako rovinný útvar, jenž však zachovává co nejvíce geometrických vlastností originálu. Jednou z nejjednodušších možností, jak získat takový geometrický obraz, je promítání. Podle toho, co při jejím užití požadujeme znázornit, volíme typ promítání, neboť každá promítací metoda má z pohledu praxe určité výhody a nevýhody.“ [2]

„Zobrazování objektů na jednu průmětnu π v kótovaném promítání využíváme s výhodou například ve stavebnictví. Stavební plány nejsou totiž nic jiného než vhodně upravené a pro odborníka snadno čitelné průměty projektovaných staveb, jenž umožňují samotnou realizaci těchto návrhů.“ [3]

Absolvování Střední průmyslové školy stavební v Lipníku nad Bečvou mne přivedlo k výběru diplomové práce na téma „kótované promítání“.

V první části diplomové práce jsem se zaměřil na popis jednotlivých prvků (bod, přímka a rovina), jejich polohu vzhledem k průmětně π a jejich zobrazování do průmětny π. Text jsem doplnil tabulkami, v kterých upozorňuji na důležité rozdíly u popisovaných prvků nebo v jejich označení. Celou textovou část doprovázím spoustou obrázků v nezměněné velikosti včetně jejich zadání, které vykreslují danou situaci nejen v rovině, ale také v prostoru.

Na závěr této části jsem zařadil polohové a metrické úlohy, jenž jsem doplnil stručným popisem konstrukcí v jednotlivých krocích, abych tímto umožnil sledovat jejich postupný vývoj.

V druhé části diplomové práce uvádím 15 vytypovaných ukázkových příkladů včetně jejich zadání a řešení.

V třetí části diplomové práce se zabývám diplomovým testem zaměřeným na problematiku prostorové matematiky. V diplomovém testu jsem použil příklady z učebnic pro základní školy, jenž pak zpracovávali studenti 2. ročníku Střední průmyslové školy stavební v Lipníku nad Bečvou, 1. ročníku bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci a 4. Ročníku magisterského studijního programu Učitelství matematiky pro 2. Stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

[1] DRS, L. *Deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 1994, s. 12
[2] DRS, L. *Deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 1994, s. 12
[3] DRS, L. *Deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 1994, s. 12

◆ 2 Zobrazovací metody

Člověk se již od pradávna snažil vyřešit problém, jak co nejpřesněji zachytit daný předmět, celý objekt, či dokonce krajinu. A tak během svého vývoje trvajícího několik tisíciletí vymyslel nepřeberné množství způsobů, jak vzniklý problém řešit. Leckteré z nich upadly v zapomnění, ale jiné se naopak zdokonalily a v téměř nezměněné podobě se používají dodnes.

Tyto způsoby zachycování objektu nazýváme zobrazovací metody. „Zobrazovací metoda umožňuje jednoznačně určit prostorový útvar pomocí jeho rovinných obrazců.“ [4] Různé zobrazovací metody se vzájemně odlišují podle toho, co se od nich vyžaduje.

Mezi nejznámější zobrazovací metody deskriptivní geometrie patří tzv. promítání (též projekce). Promítání rozdělujeme na centrální a rovnoběžné. „Pravoúhlé (též ortogonální) promítání je rovnoběžné promítání, v kterém směr promítání je kolmý na průmětnu.“ [5]

Rozeznáváme tyto druhy pravoúhlého promítání:

- Kótované promítání (na jednu průmětnu π)
- Mongeovo promítání (na dvě průmětny π a ν)

Kótované promítání

„Kótované promítání – (na jednu průmětnu π) – prosté zobrazení euklidovského prostoru na množinu všech kótovaných průmětů bodů.“ [6] Jedním z nejběžnějších využití kótovaného promítání je zobrazování terénu tzv. topografická plocha.

„Topografická plocha – (též plocha terénu) – plocha omezené části zemského povrchu. Při jejím zobrazování užíváme kótované promítaní s vhodně volenou vodorovnou průmětnou.“ [7]

Mongeovo promítání

„Mongeovo promítání, (též pravoúhlé promítání na dvě (k sobě kolmé) průmětny) a) uspořádaná dvojice pravoúhlých promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, z nichž jedna se nazývá první průmětna a značí se π a druhá se nazývá druhá průmětna a značí se ν; b) prosté zobrazení bodů euklidovského prostoru na uspořádané dvojice bodů roviny ležících na přímkách kolmých k pevné přímce (základnici).“ [8]

---

[4] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 238
[5] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 158
[6] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 83
[7] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 208
[8] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 115

◆ 3 Práce s prvky – bod, přímka, rovina

K tomu, abychom mohli zobrazovat jakékoliv objekty, musíme nejprve bod, přímku a rovinu definovat.

➔ 3.1 Bod

„Bod je základní geometrický objekt, který byl vytvořen abstrakcí z drobných hmotných objektů (zrnka písku, otvory po vbodnutí jehly do některých materiálů apod.)
Euklidés napsal: Bod je to, co nemá délku, šířku ani výšku.“ [9]

✓ Zadání bodu

Umístění každého bodu v prostoru je dáno 3 souřadnicemi, jejichž hodnoty se vynášejí ve směru os x, y a z.

OBRÁZEK (3.1.1)
Zadání bodu

✓ Zobrazení bodu

Obecným bodem proložíme promítací paprsek p (přímka kolmá k průmětně π). V místě, průniku této promítací přímky p s průmětnou π se nachází průmět bodu A, jenž se označuje jako A_1. Tento bod představuje průmět hledaného bodu A. Aby však bylo označení průmětu bodu zcela správné a prostorově čitelné, je zapotřebí za půdorysný průmět bodu A_1 uvést i výšku bodu, která představuje vzdálenost příslušného bodu A od průmětny π (od průmětu bodu A_1) a je prezentována z-ovou souřadnicí: $A_1(3)$. Pokud by se tento údaj vynechal, nebylo by možné danou konstrukci prostorově přečíst, neboť by průmětu bodu A_1 odpovídala celá přímka kolmá na průmětnu π a procházející daným průmětem bodu A. Při řešení úloh by se pak například nedala určit poloha dvou přímek nebo viditelnost výsledné konstrukce.

OBRÁZEK (3.1.2)
Zobrazování bodu do průmětny π

✓ Vzájemná poloha bodu a průmětny π

Bod může mít vzhledem k průmětně π jednu z těchto poloh:

- obecná
    - nad průmětnou π
    - pod průmětnou π
- speciální
    - v průmětně π

Poloha bodu	Hodnota z-ové souřadnice
nad průmětnou π	kladná (nenulová)
pod průmětnou π	záporná (nenulová)
v průmětně π	Nulová

[9] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 19

Obecná poloha bodu

V obecné poloze jsou všechny body ležící libovolně v prostoru s výjimkou těch, jenž leží přímo v průmětně π. Průmětna π rozděluje prostor na dva poloprostory.

Bod nad průmětnou π

Dle úmluvy se nad průmětnou π nachází kladný poloprostor, proto všechny body v něm ležící mají kladnou z-ovou souřadnici (výšku). Tato z-ová souřadnice se uvádí v kulaté závorce za průmětem příslušného bodu: $A_1(3)$. Čím je vzdálenost od průmětny π větší, tím je z-ová souřadnice větší.

➢ Shrnutí:
- body ležící nad průmětnou π
- z-ová souřadnice bodů je kladná
- z-ová souřadnice bodu se uvádí u průmětu bodu v závorce: $A_1(3)$

OBRÁZEK (3.1.3)
Bod ležící nad průmětnou π

Bod pod průmětnou π

Pod průmětnou π je naopak záporný poloprostor, proto všechny body v něm ležící mají zápornou z-ovou souřadnici. Tato záporná souřadnice se zapisuje do závorky za průmětem příslušného bodu $B_1(-4)$. Platí, že čím vzdálenější je poloha bodu od průmětny π, tím větší je jeho záporná z-ová hodnota.

➢ Shrnutí:
- body ležící pod průmětnou π
- z-ová souřadnice bodů je záporná
- z-ová souřadnice bodu se uvádí u průmětu v závorce: $B_1(-4)$

OBRÁZEK (3.1.4)
Bod ležící pod průmětnou π

Speciální poloha bodu – bod v průmětně π

Průmětna π vytváří rozhraní mezi oběma poloprostory, proto body ležící v ní mají nulovou výšku a nespadají do kladného ani záporného poloprostoru. Výšková souřadnice bodu se uvádí za průmětem příslušného bodu: $C_1(0)$. Průmět bodu je však totožný se samotným bodem. Lze tedy napsat: $C = C_1(0)$. Kvůli zjednodušení popisu se však u průmětů bodů používá pouze zápisu: $C_1(0)$.

➢ Shrnutí:
- body leží v průmětně π
- z-ová souřadnice bodu je nulová
- průmětem bodu je samotný bod
- z-ová souřadnice bodů se uvádí u jeho příslušného průmětu v závorce: $C_1(0)$

OBRÁZEK (3.1.5)
Bod ležící v průmětně π

Poloha bodu	Příklad bodu	Popis půdorysného průmětu
nad průmětnou π	$A = [5; 4; 6]$	$A_1(6)$
pod průmětnou π	$B = [2; 3; -4]$	$B_1(-4)$
v průmětně π	$C = [8; 7; 0]$	$C_1(0)$

✓ Vzájemná poloha dvou bodů

Rozlišujeme tyto vzájemné polohy bodů:

Poloha dvojice bodů	Souřadnice *x*	Souřadnice *y*	Souřadnice *z*
totožnost	$x_A = x_B$	$y_A = y_B$	$z_A = z_B$
zobrazení na 1 průmět	$x_A = x_B$	$y_A = y_B$	$z_A \neq z_B$
stejná výška	$x_A = x_B$	$y_A \neq y_B$	$z_A = z_B$
stejná výška	$x_A \neq x_B$	$y_A = y_B$	$z_A = z_B$
stejná výška	$x_A \neq x_B$	$y_A \neq y_B$	$z_A = z_B$
obecná poloha	$x_A = x_B$	$y_A \neq y_B$	$z_A \neq z_B$
obecná poloha	$x_A \neq x_B$	$y_A = y_B$	$z_A \neq z_B$
obecná poloha	$x_A \neq x_B$	$y_A \neq y_B$	$z_A \neq Z_b$

V tabulce je přehled dvojic bodů vyskytujících se v prostoru. Z těchto možností se podrobněji zaměříme pouze na:

- dvojice bodů vzájemně totožných
- dvojice bodů zobrazovaných na jeden průmět

Dvojice splývajících bodů *A = B*

Dvojice bodů vzájemně totožných je případ, kdy dva body splývají. Například bod $A = [6;4;5]$ je totožný s bodem $B = [6;4;5]$. U půdorysného průmětu bodů se uvádí zápis obou bodů i s jejich z-ovou hodnotou: $A_1(5) = B_1(5)$.

➢ Shrnutí:
- dvojice bodů splývá
- dvojice bodů se shoduje v *x*, *y* a z souřadnicích
- půdorysný průmět dvojice totožných bodů se popisuje např.: $A_1(5) = B_1(5)$

OBRÁZEK (3.1.6)
Dvojice splývajících bodů

Dvojice bodů zobrazovaná na jeden průmět

Jedná se o dvojici bodů, která leží prostorově nad sebou a na jeden průmět se pouze zobrazuje. Dvojice bodů může ležet ve stejném poloprostoru (kladném nebo záporném) nebo v poloprostorech vzájemně opačných. Jejich poloha se shoduje v souřadnicích *x* a *y*, ale liší se v souřadnici *z*. Příkladem takové dvojice bodů může být: $A = [6;4;5]$ a $B = [6;4;2]$ Průměty bodů značíme: $A_1(5) = B_1(2)$.

➢ Shrnutí:

- dvojice bodů leží nad sebou – je různá
- dvojice bodů se liší pouze v z - ové souřadnici
- dvojice bodů se zobrazuje na jeden průmět
- u půdorysného průmětu bodů se uvádějí obě hodnoty: $A_1(5) = B_1(2)$

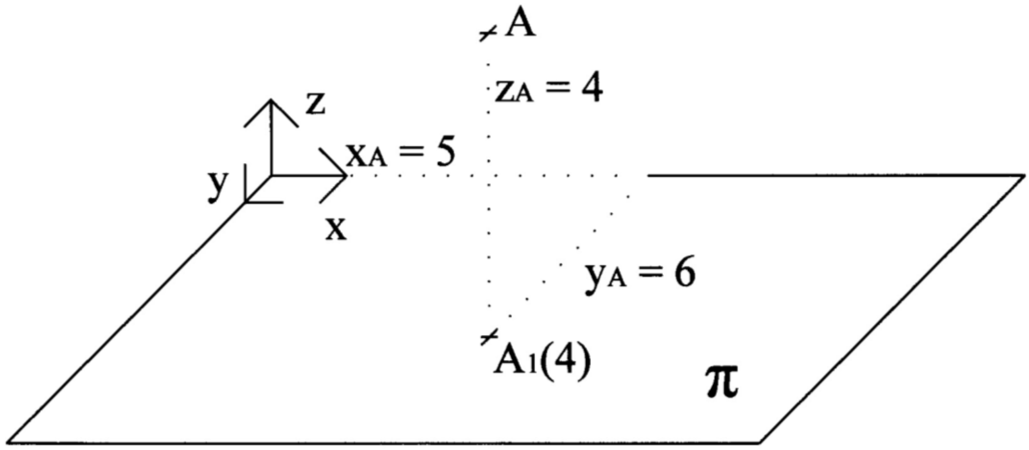
OBRÁZEK (3.1.7)
Dvojice bodů zobrazovaná na jeden průmět

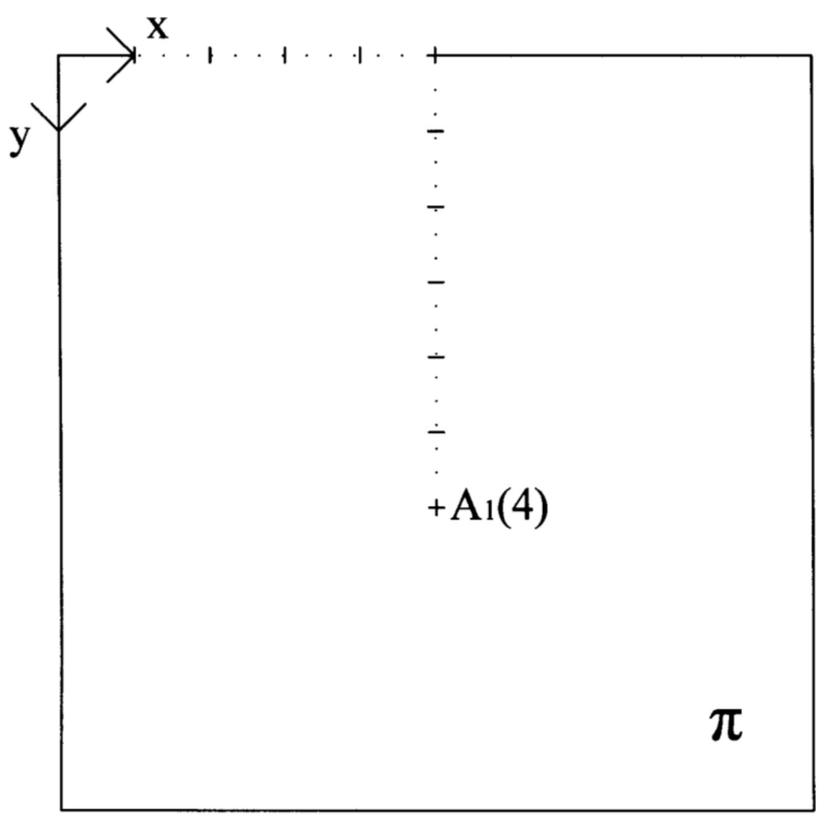
Poloha dvojice bodů	Příklad dvojice bodů	Popis průmětů bodů
dvojice v obecné poloze	$A = [2; -2; 7]$ / $B = [1; 4; 5]$	$A_1(7)$ / $B_1(5)$
dvojice totožných bodů	$A = [6; 4; 5]$ / $B = [6; 4; 5]$	$A_1(5) = B_1(5)$ nebo $A_1 = B_1(5)$
dvojice zobrazovaná na jeden průmět	$A = [6; 4; 5]$ / $B = [6; 4; 2]$	$A_1(5) = B_1(2)$

SEZNAM OBRÁZKŮ - BOD

3.1.1 Zadání bodu

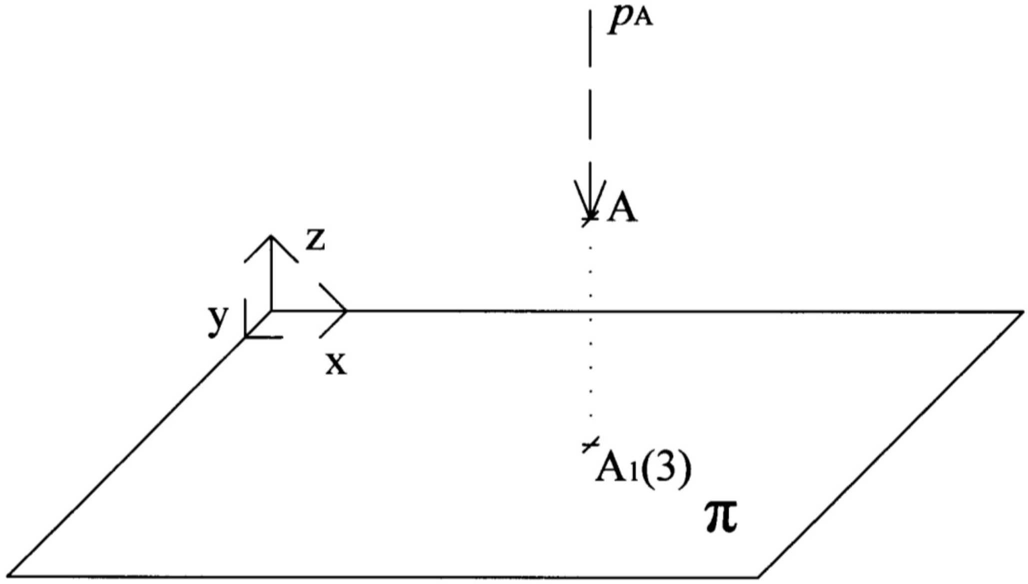
A = [5; 6; 4]

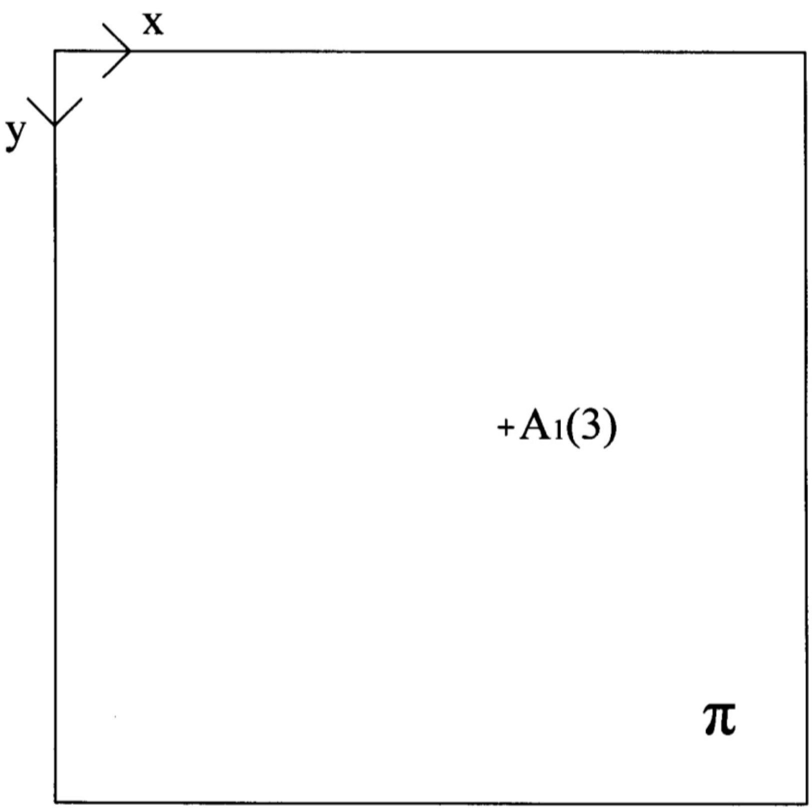




3.1.2 Zobrazení bodu do průmětny π

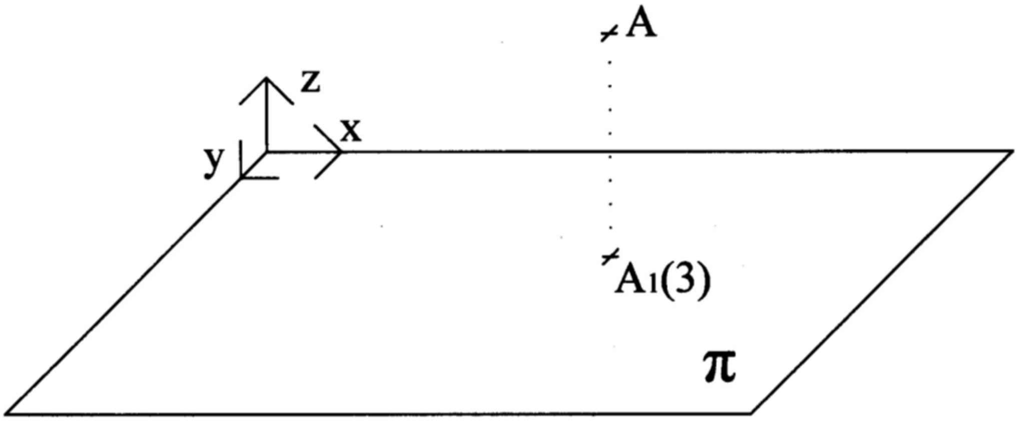
A = [6; 5; 3]

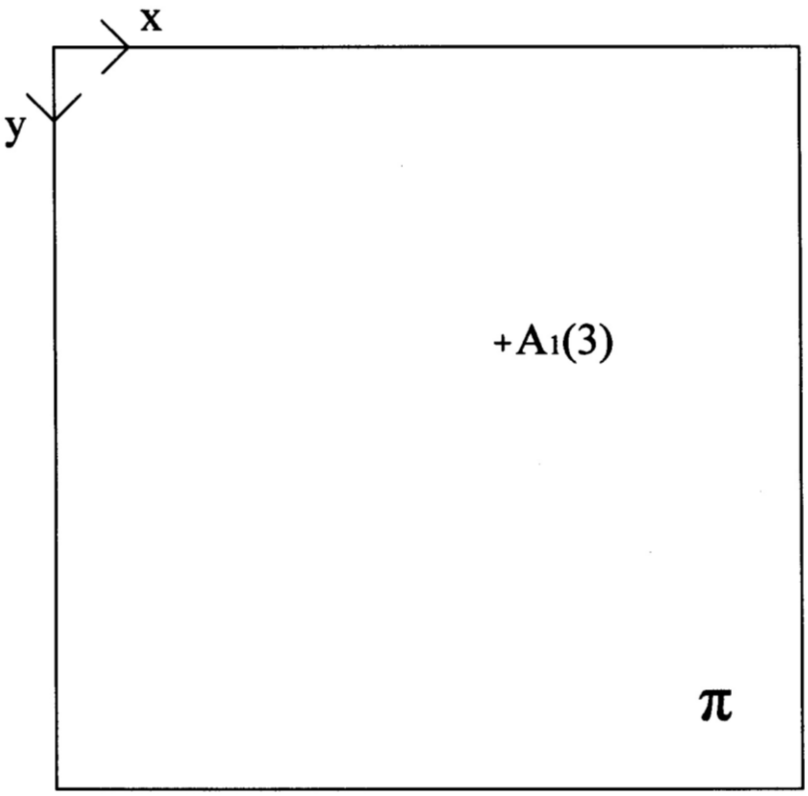




3.1.3 Bod ležící nad průmětnou π

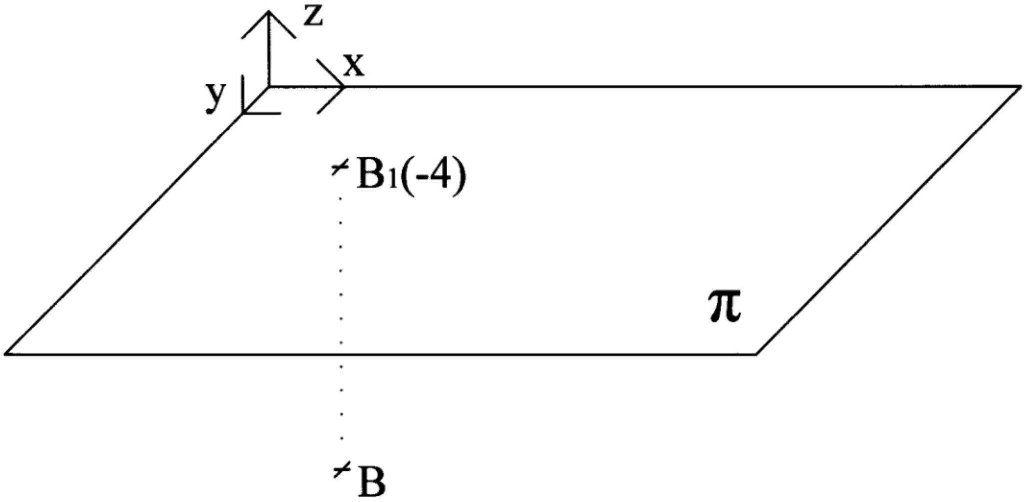
A = [6; 4; 3]

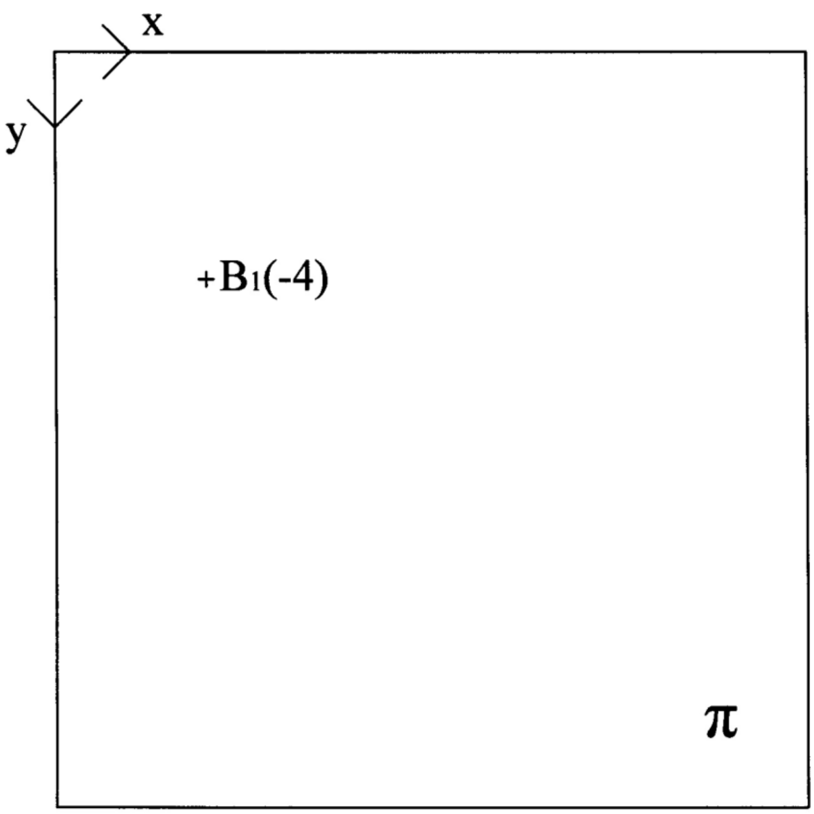




3.1.4 Bod ležící pod průmětnou π

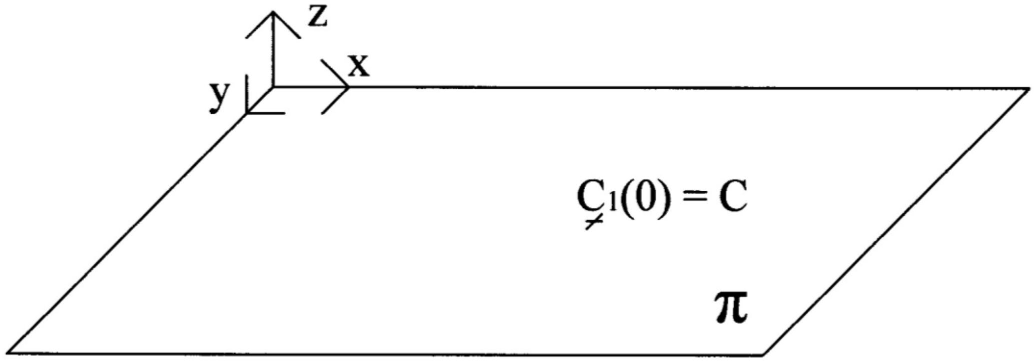
B = [2; 3; -4]

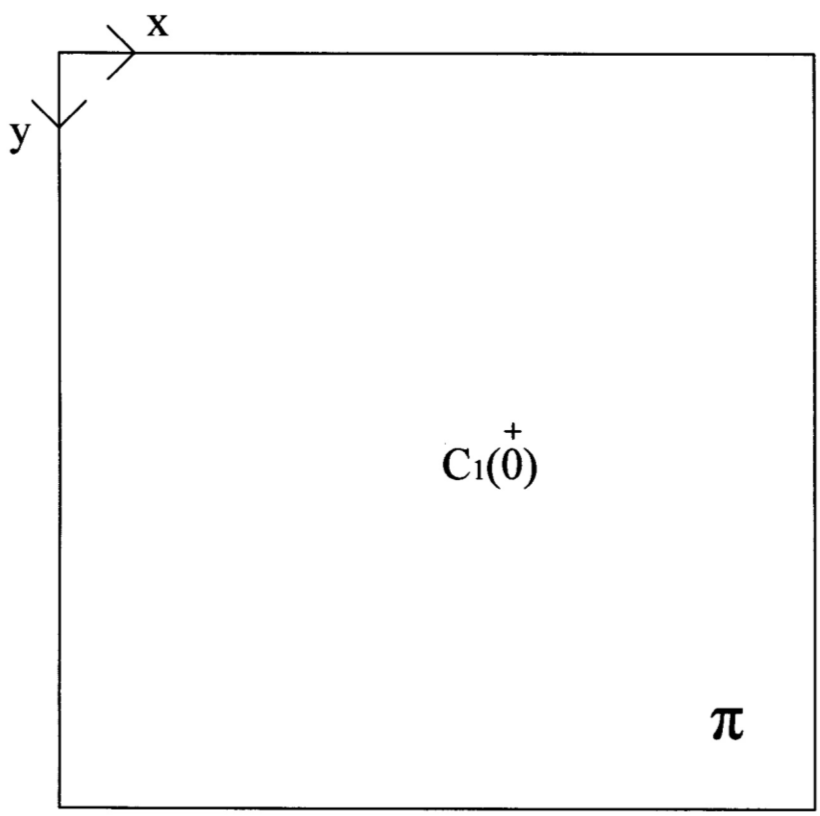




3.1.5 Bod ležící v průmětně π

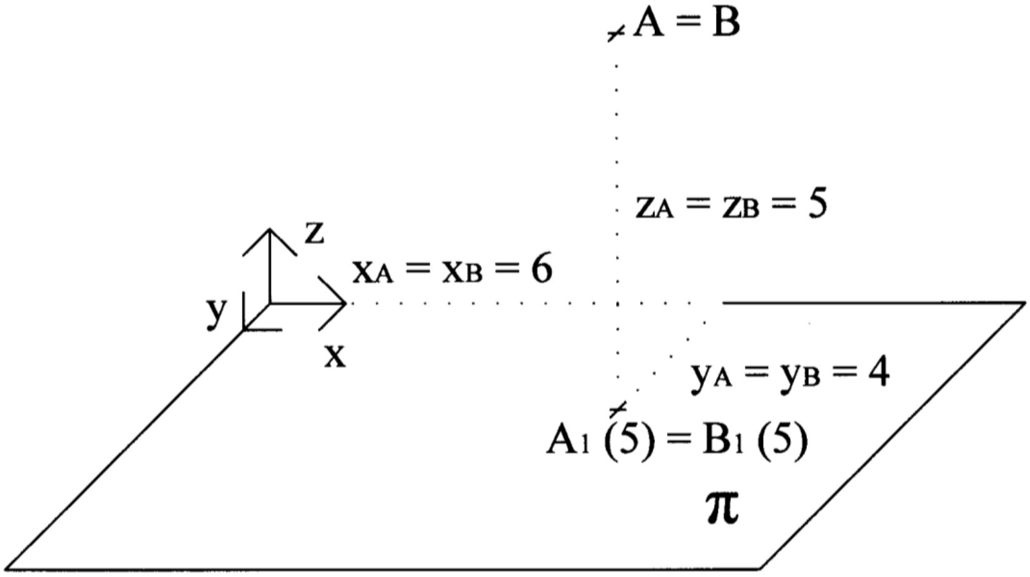
$C = [6; 5; 0]$

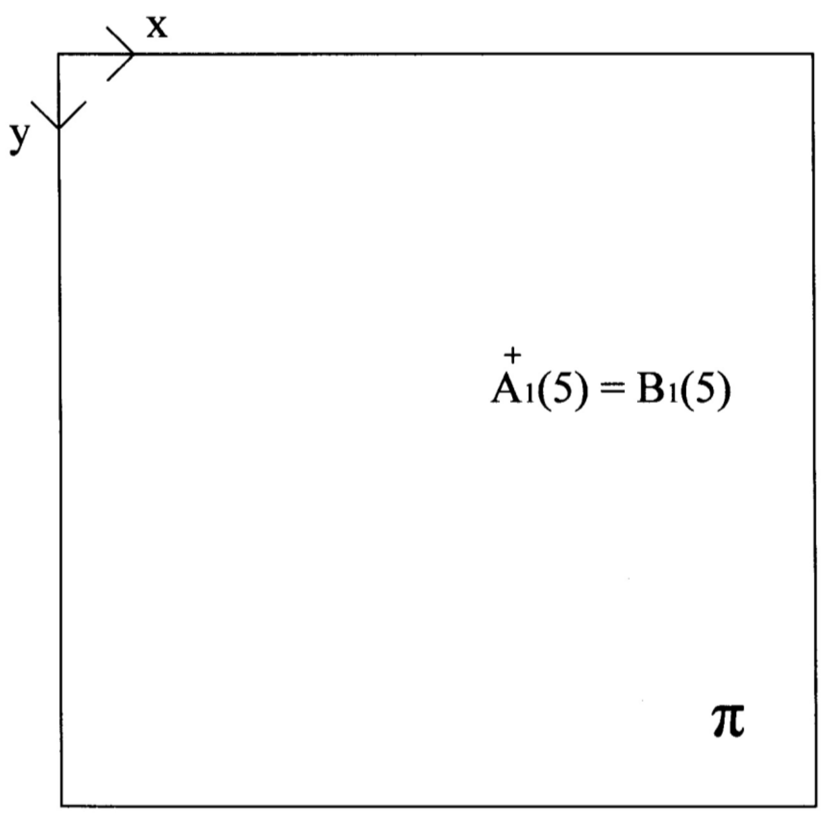




3.1.6 Dvojice splývajících bodů

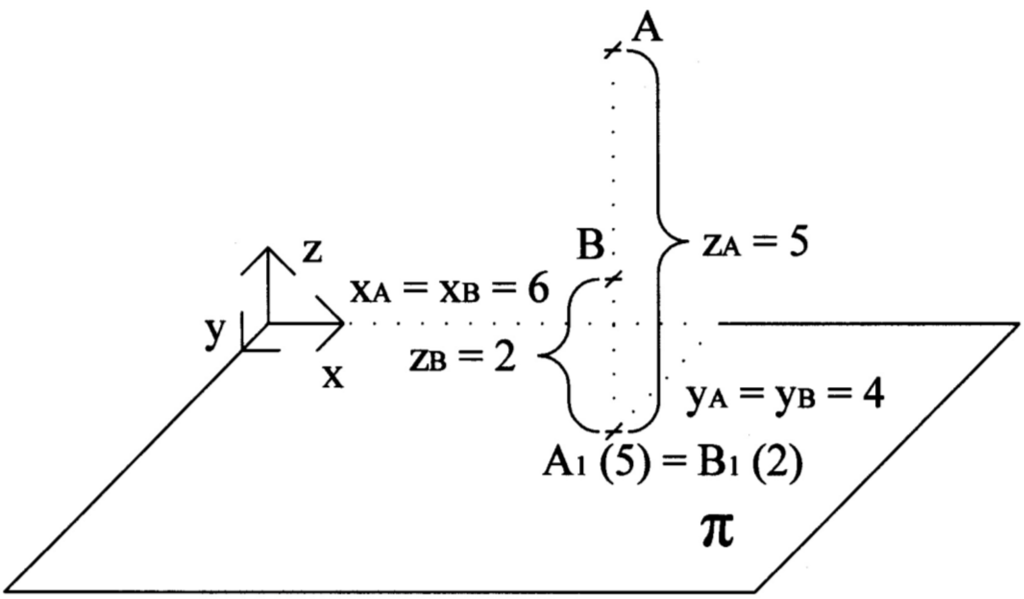
A = [6; 4; 5], B = [6; 4; 5]

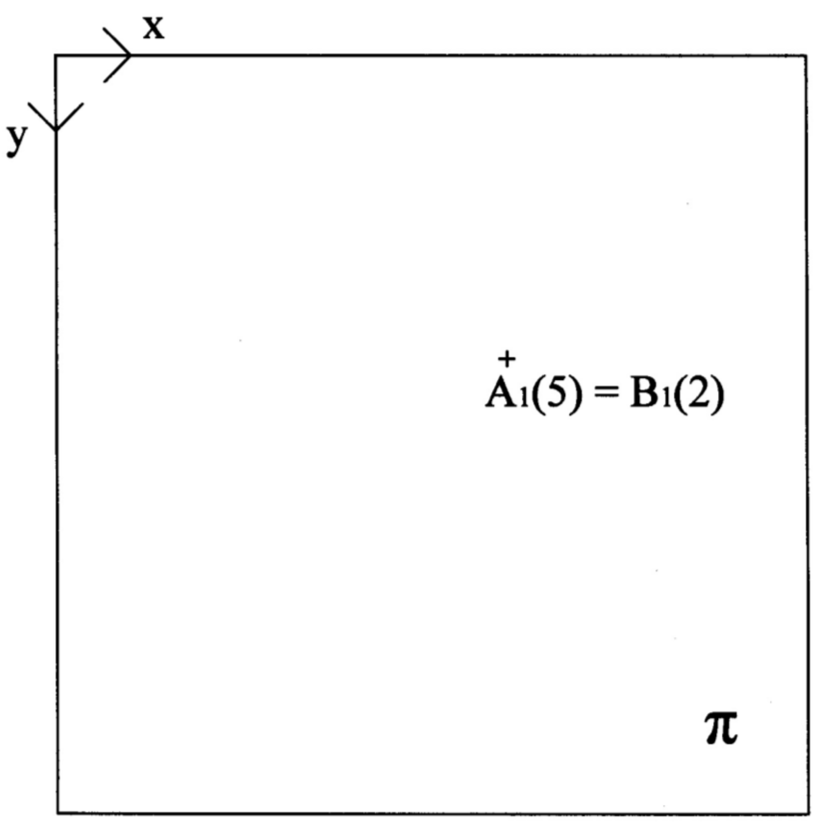




3.1.7 Dvojice bodů zobrazovaná na jeden průmět

A = [6; 4; 5], B = [6; 4; 2]





➔ **3.2 Přímka**

„Přímka je základní geometrický pojem, který byl vytvořen abstrakcí z tenkých napjatých předmětů (nití, provazců) či světelných paprsků procházejících štěrbinami.
Euklidés napsal: Přímka má jen délku.“ [10]

✓ **Zadání přímky**

Přímka je jednoznačně určena dvojicí různých bodů. Dvojicí totožných bodů, podobně jako bodem jedním, neprochází přímka jedna, ale nekonečně mnoho přímek.

OBRÁZEK (3.2.1)
Zadání přímky

✓ **Zobrazování přímky**

Při sestrojování průmětu přímky m, s pomocí promítacích paprsků sestrojíme nejprve průměty bodů A, B (A_1, B_1). Průmět m_1 přímky m je pak spojnice průmětů A_1, B_1 bodů A, B a leží v průmětně π. Průmět přímky m značíme m_1. Průmět každého dalšího bodu ležícího na zobrazované přímce m najdeme stejným způsobem jako u předchozí dvojice bodů. Hledaný průmět pak bude ležet na průniku promítacího paprsku příslušného bodu a průmětu přímky m. Tímto způsobem lze najít všechny průměty bodů ležících na přímce m. Množina promítacích paprsků všech bodů přímky m tvoří promítací rovinu přímky m a je proložená přímkou m kolmo k průmětně π. Promítací rovina χ protíná průmětnu π v přímce m_1, která je průmětem přímky m do průmětny π.

OBRÁZEK (3.2.2)
Zobrazení přímky v obecné poloze do průmětny π

Je-li přímka m kolmá k průmětně π, je jejím průmětem bod m_1 . Do tohoto bodu se zobrazují všechny body přímky m.

OBRÁZEK (3.2.3)
Zobrazení přímky kolmé k průmětně π do průmětny π

✓ **Vzájemná poloha přímky a průmětny π**

Přímka ležící v prostoru může mít vzhledem k průmětně π tyto polohy:

- obecná
    - různoběžná s průmětnou π
- speciální
    - rovnoběžná s průmětnou π
    - ležící v průmětně π (speciální případ přímky rovnoběžné s π)
    - kolmá k průmětně π (speciální případ přímky různoběžné s π)

[10] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 166

Poloha přímky k průmětně π	**Odchylka svíraná s průmětnou π**	**Společný počet bodů s průmětnou π**	**Zkreslení vzdáleností na přímce**
Obecná	(0°; 90°)	1	Ano
kolmá k π	90°	1	Ano
rovnoběžná s π	0°	0	Ne
ležící v π	0°	Nekonečno	Ne

Obecná poloha přímky - přímka různoběžná s průmětnou π

Přímka v obecné poloze svírá s průmětnou π odchylku větší než 0° a menší než 90° (není s ní rovnoběžná či kolmá ani v ní neleží). Vždy existuje bod, který je jejím průnikem s průmětnou π a nazývá se stopník. U různoběžné přímky dochází při zobrazování do průmětny π ke zkreslení velikosti úsečky ležící na přímce. Proto se velikost úsečky nemůže číst přímo v průmětně π, ale musí se provést konstrukce sklápění přímky (viz. úlohy). Při sklopení přímky se dá u sklopené konstrukce také vyčíst úhel, který svírá přímka se svým průmětem ležícím v průmětně π. Tento úhel nazýváme odchylka. Přímka ležící v obecné poloze má odchylku od průmětny π větší než 0° a menší než 90°.

➢ Shrnutí:
- úhel, který svírá přímka se svým půdorysným průmětem, nazýváme odchylka
- přímka svírá s průmětnou π odchylku vetší než 0° a menší než 90°
- při zobrazování úsečky ležící na přímce do průmětny π dochází ke zkreslení její velikosti
- průsečík přímky s průmětnou π nazýváme stopník
- jestliže je přímka různoběžná s průmětnou π, pak existuje právě jeden stopník

OBRÁZEK (3.2.4)
Přímka různoběžná s průmětnou π

Speciální polohy přímky

Vzhledem k průmětně π může nastat několik speciálních případů polohy přímky. Přímka rovnoběžná s průmětnou π (svírá s průmětnou π 0°) a nebo kolmá na průmětnu π (svírá s průmětnou π 90°).

Přímka rovnoběžná s průmětnou π

Zvláštním případem přímky rovnoběžné s průmětnou π je přímka ležící v průmětně π. Tu si však popíšeme samostatně.

Přímky rovnoběžné s průmětnou π je skupina přímek, u nichž je vzdálenost od průmětny π v každém bodě stejná a různá od nuly. Tyto přímky svírají s průmětnou π odchylku 0° a nemají s ní žádný průnik. Velikost úsečky, která leží na přímce, se zobrazí ve skutečné velikosti.

➢ Shrnutí:
- alespoň jeden bod ležící na přímce má nenulovou z-ovou souřadnici
- ve všech svých bodech má přímka konstantní (nenulovou) vzdálenost od průmětny π
- přímka svírá s průmětnou π odchylku 0°
- úsečka, která leží na přímce, se zobrazí ve skutečné velikosti

OBRÁZEK (3.2.5)
Přímka rovnoběžná s průmětnou π

Přímka ležící v průmětně π

Přímky ležící v průmětně π jsou speciální podskupinou přímek rovnoběžných s průmětnou π.

Přímky ležící v průmětně π jsou s průmětnou π rovnoběžné – svírají s ní odchylku 0°. Vzdálenost všech bodů přímky m od průmětny π je shodná. Úsečka AB, která leží na přímce m, se zobrazí ve skutečné velikosti. Rozdíl spočívá v tom, že na rozdíl od přímek rovnoběžných s průmětnou π mají tyto přímky s průmětnou π průnik, kterým je celá přímka m. Průnikem přímky ležící v průmětně π s průmětnou π je tedy samotná přímka – přímka je totožná se svým průmětem.

➢ Shrnutí:
- alespoň jeden bod ležící na přímce má nulovou z-ovou souřadnici
- ve všech svých bodech má přímka konstantní (nulovou) vzdálenost od průmětny π
- s průmětnou π svírá odchylku 0°
- v průmětně π nedochází ke zkreslení vzdáleností dvojice různých bodů ležících na přímce

OBRÁZEK (3.2.6)
Přímka ležící v průmětně π

Přímka kolmá na průmětnu π

Přímka kolmá na průmětnu π je pak zadána dvojicí různých bodů, jejichž průměty splývají. Jsou to body, které mají stejné velikosti souřadnic x a y, ale liší se velikostí z–ové souřadnice.

➢ Shrnutí:
- přímka svírá s průmětnou π odchylku 90°
- všechny body ležící na přímce mají stejnou souřadnici x a y a liší se pouze v souřadnici z
- průmětem přímky je bod
- všechny body ležící na této přímce se zobrazují do jediného bodu
- přímka má s průmětnou π průnik v jediném bodě

OBRÁZEK (3.2.7)
Přímka kolmá na průmětnu π

✓ **Vzájemná poloha dvojice přímek**

Každé dvě libovolné přímky vytvářejí tzv. dvojici přímek. Existují tyto typy dvojic přímek:

- rovnoběžné přímky
- různoběžné přímky
- mimoběžné přímky

Vzájemná poloha přímek	Přímky leží v jedné rovině	Počet společných bodů	Poznámka
Rovnoběžné přímky	Ano	0	
Splývající přímky (Rovnoběžné přímky)	Ano	nekonečně mnoho	Speciální případ rovnoběžnosti
Různoběžné přímky	Ano	1	
Mimoběžné přímky	Ne	0	Existují pouze v prostoru***)**

***)**V každé rovině se mohou vyskytovat pouze přímky, které jsou vzájemně rovnoběžné nebo různoběžné. Dvojice přímek, která by byla vzájemně mimoběžná, je záležitostí týkající se výhradně prostoru.

Rovnoběžné přímky

Speciální podskupinou rovnoběžných přímek jsou přímky vzájemně totožné. Ty si popíšeme samostatně později.

Každé dvě přímky, jejichž vzájemná odchylka je nulová, jsou rovnoběžné. Všechny body ležící na jedné přímce mají stejnou nenulovou vzdálenost od druhé přímky, proto tyto přímky nemají žádný společný bod – průnik. Můžeme si je tedy představit, jako dvě přímky vytyčující rovinný pás, který má po celé délce konstantní šířku. Pokud by tento pás protínala další přímka, svírala by s každou přímkou této dvojice stejnou odchylku.

➢ Shrnutí:
- rovnoběžky vymezují v rovině konstantně široký nenulový rovinný pás
- nemají žádný společný bod
- rovnoběžné přímky svírají s průmětnou π (příp. libovolnou rovinou) stejnou odchylku α
- u obou přímek dochází ke zkreslování vzdáleností dvojice bodů
- pokud existuje další přímka, jenž leží ve stejné rovině, pak s každou svírá stejnou odchylku

OBRÁZEK (3.2.8)
Dvojice rovnoběžných přímek v obecné poloze

Splývající přímky

Každé dvě přímky, které mají společné všechny body, jsou totožné. Odchylka takové dvojice přímek je 0° a vzájemná vzdálenost těchto dvou přímek je nulová.

➢ Shrnutí:
- splývající přímky se prezentují jako jedna
- vzdálenost dvojice splývajících přímek je nulová
- jejich vzájemně sevřená odchylka je nulová
- mají společné všechny body

OBRÁZEK (3.2.9)
Dvojice splývajících přímek v obecné poloze

Různoběžné přímky

Různoběžné přímky jsou každé dvě přímky, které leží v jedné rovině a mají společný právě jeden bod. Různoběžné přímky mají reálný průsečík.

➢ Shrnutí:
  - různoběžné přímky se protínají v průmětně a v prostoru – reálný průsečík
  - u obou přímek lze najít konkrétní bod, jejichž vzájemná vzdálenost bude nulová – jejich průnik
  - každá dvojice přímek určuje právě jednu rovinu

OBRÁZEK (3.2.10)
Dvojice různoběžných přímek v obecné poloze

Mimoběžné přímky

Každé dvě přímky, které neleží v jedné rovině a nemají žádný společný bod, jsou mimoběžné. Průměty mimoběžných přímek se protínají, ale samotné mimoběžné přímky se ve skutečnosti v prostoru neprotínají – zdánlivý průsečík. (viz. úlohy)

➢ Shrnutí:
  - u mimoběžných přímek se protínají pouze jejich půdorysné průměty – zdánlivý průsečík
  - dvojice mimoběžných přímek neurčuje rovinu
  - dvojice mimoběžných přímek se vyskytuje pouze v prostoru nikoliv v rovině

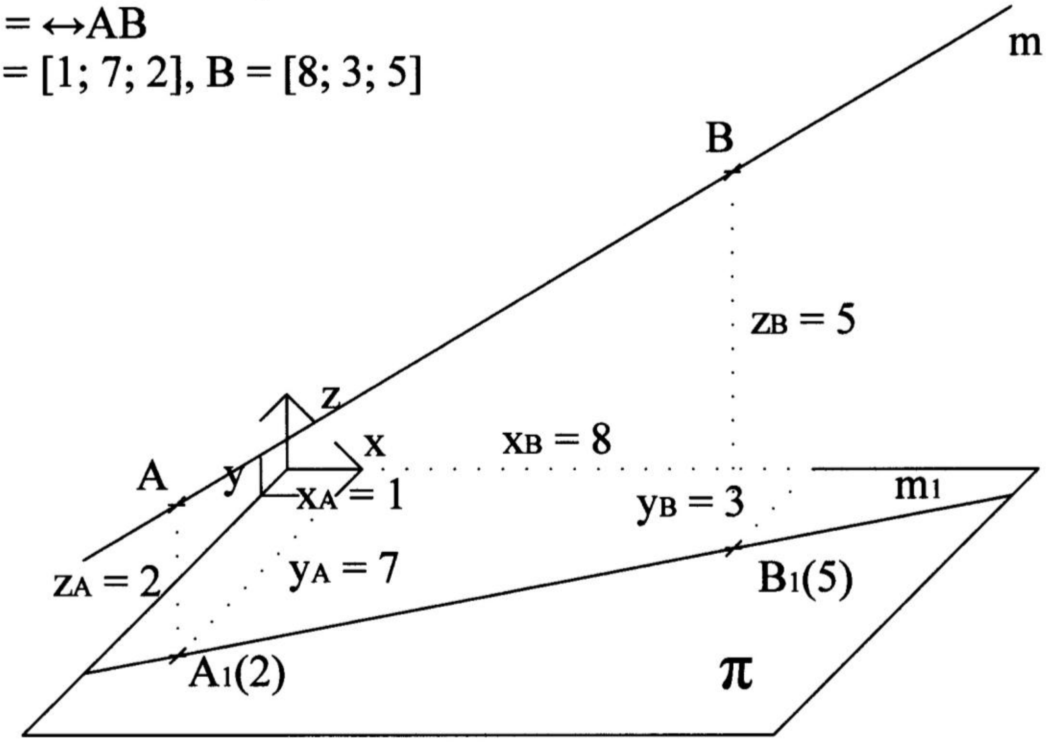
OBRÁZEK (3.2.11)
Dvojice mimoběžných přímek v obecné poloze

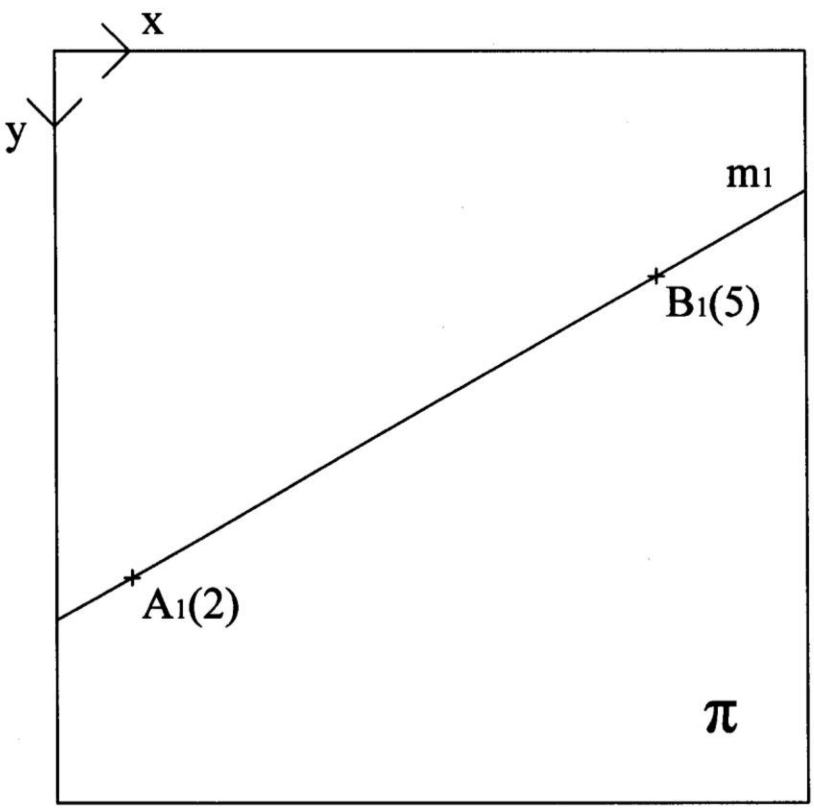
SEZNAM OBRÁZKŮ - PŘÍMKA

3.2.1 Zadání přímky

$m = \leftrightarrow AB$

$A = [1; 7; 2]$, $B = [8; 3; 5]$

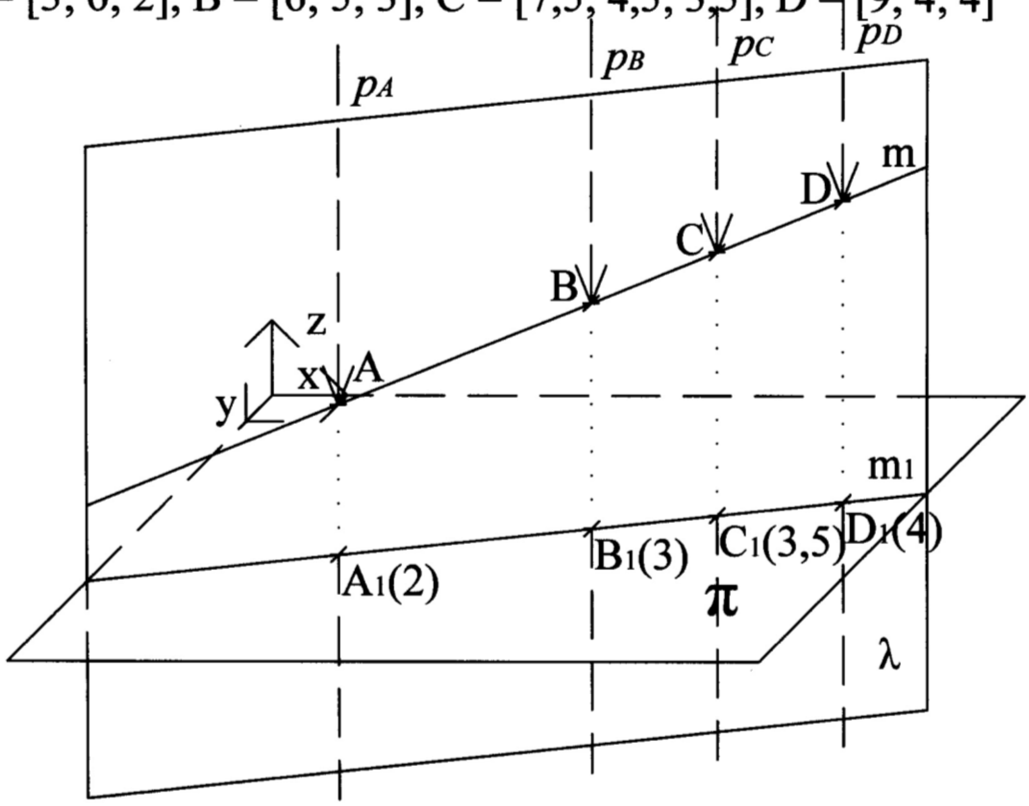


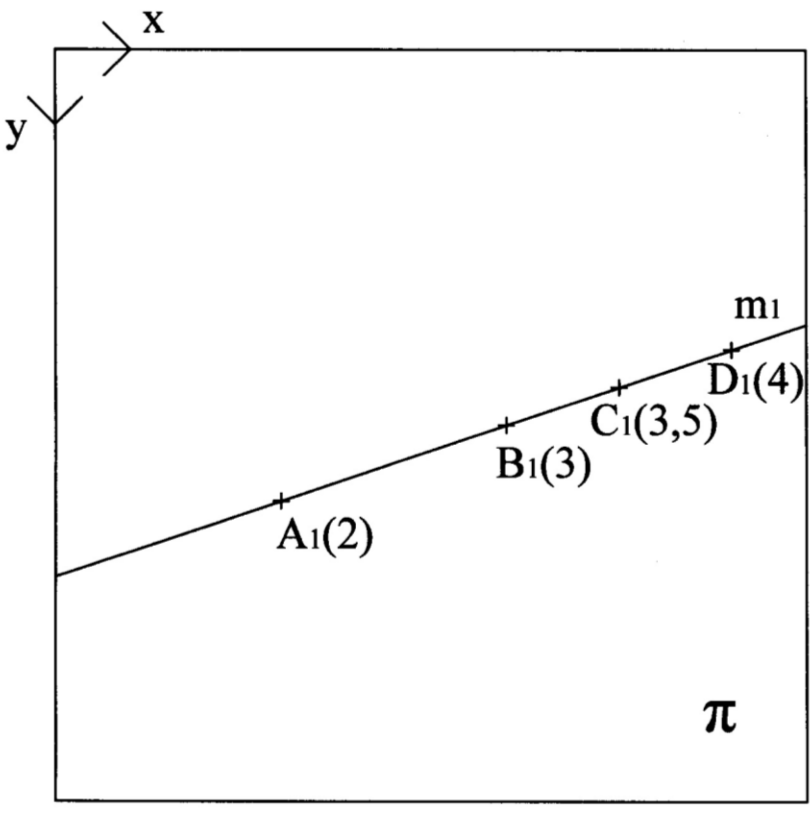


3.2.2 Zobrazení přímky v obecné poloze do průmětny π

m = ↔AB; C, D ∈ m

A = [3; 6; 2], B = [6; 5; 3], C = [7,5; 4,5; 3,5], D = [9; 4; 4]

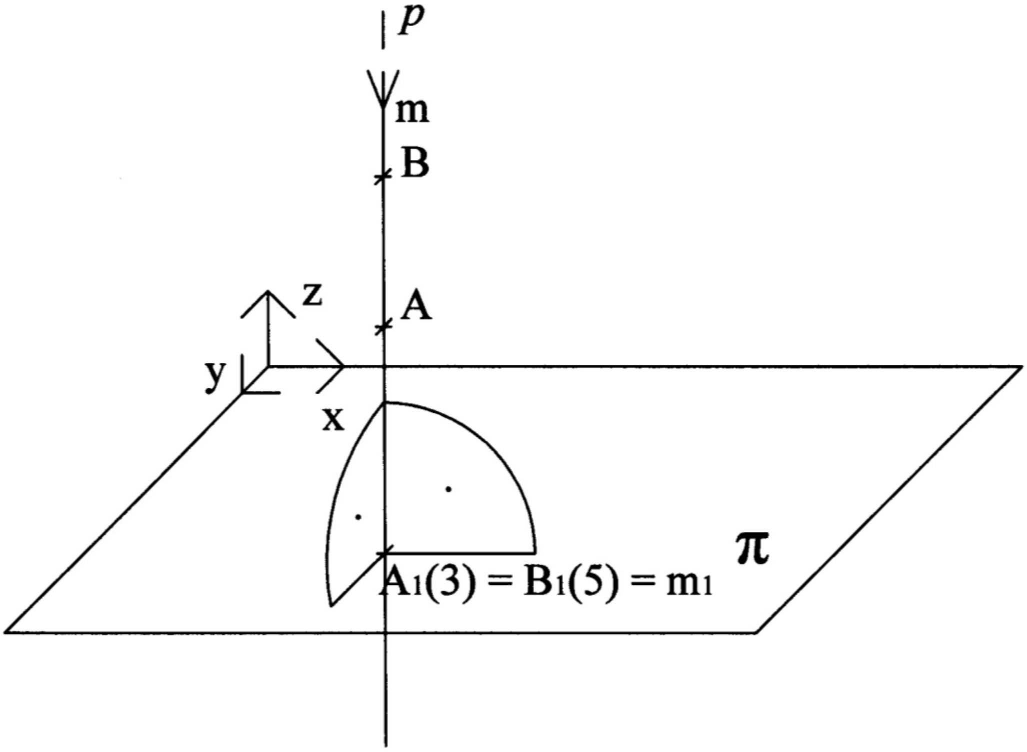


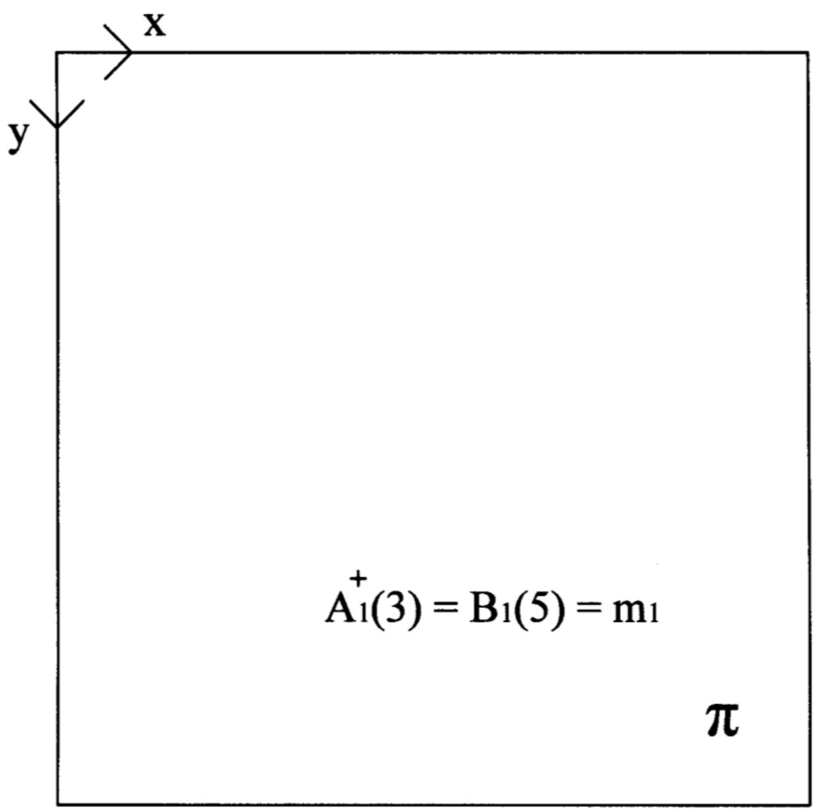


3.2.3 Zobrazení přímky kolmé k průmětně π do průmětny π

$m = \leftrightarrow AB$

$A = [4; 7; 3]$, $B = [4; 7; 5]$

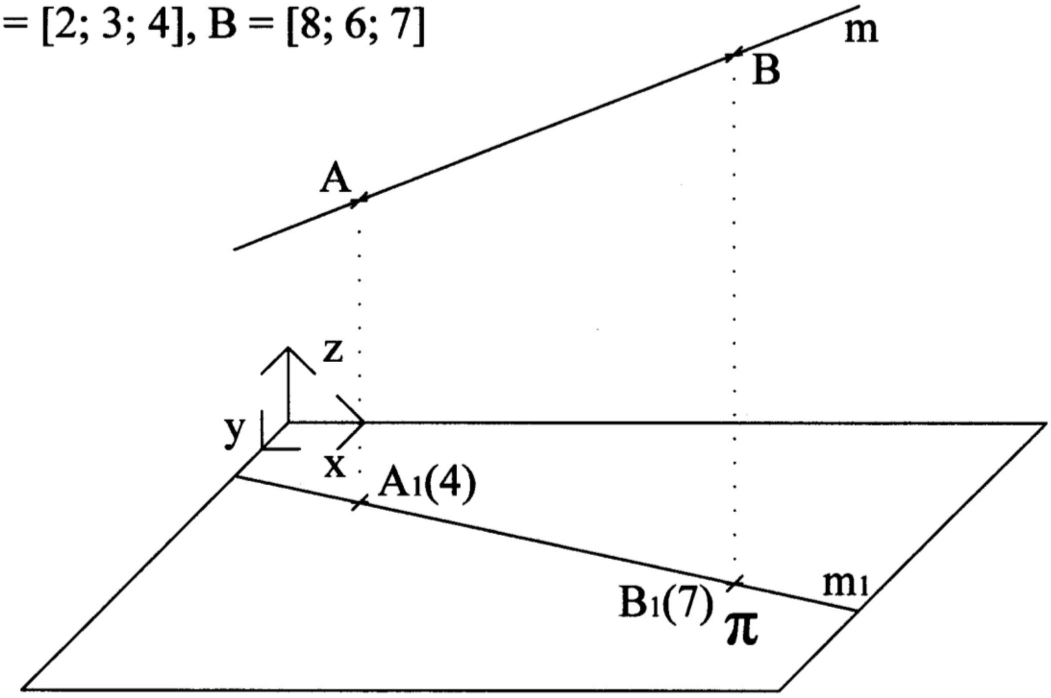


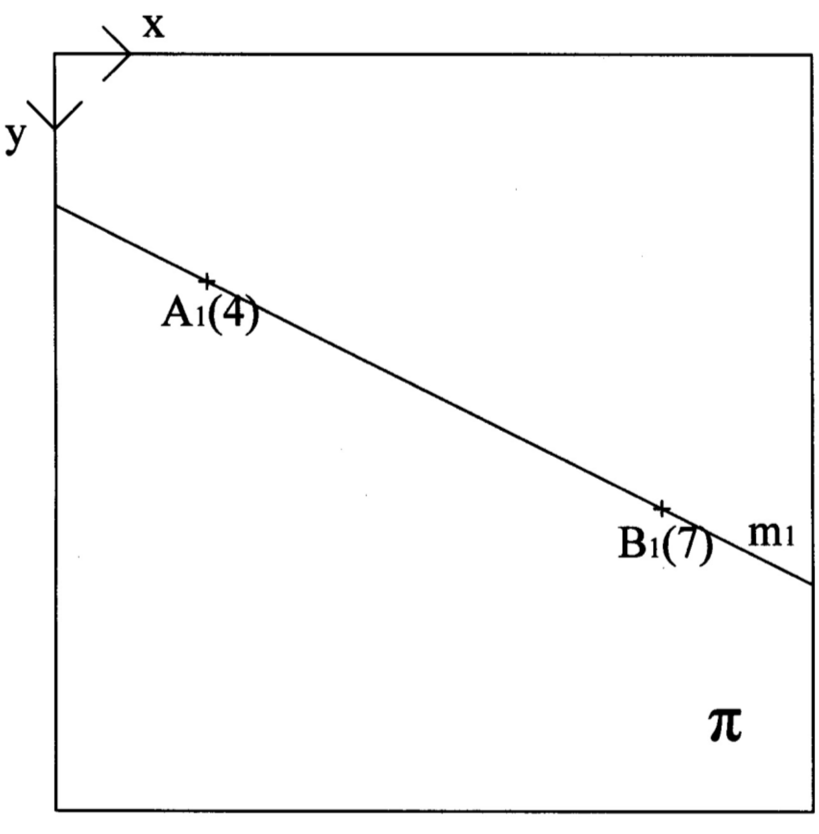


3.2.4 Přímka různoběžná s průmětnou π

$m = \leftrightarrow AB$

$A = [2; 3; 4]$, $B = [8; 6; 7]$

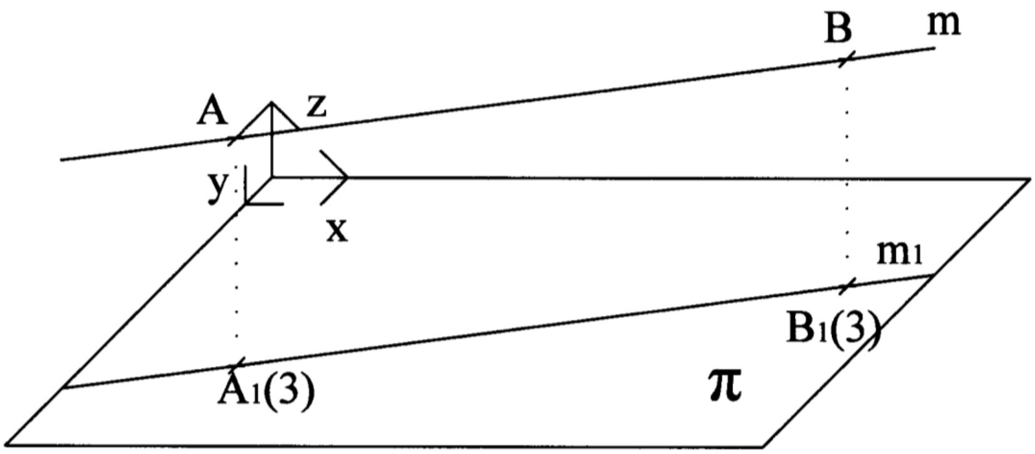


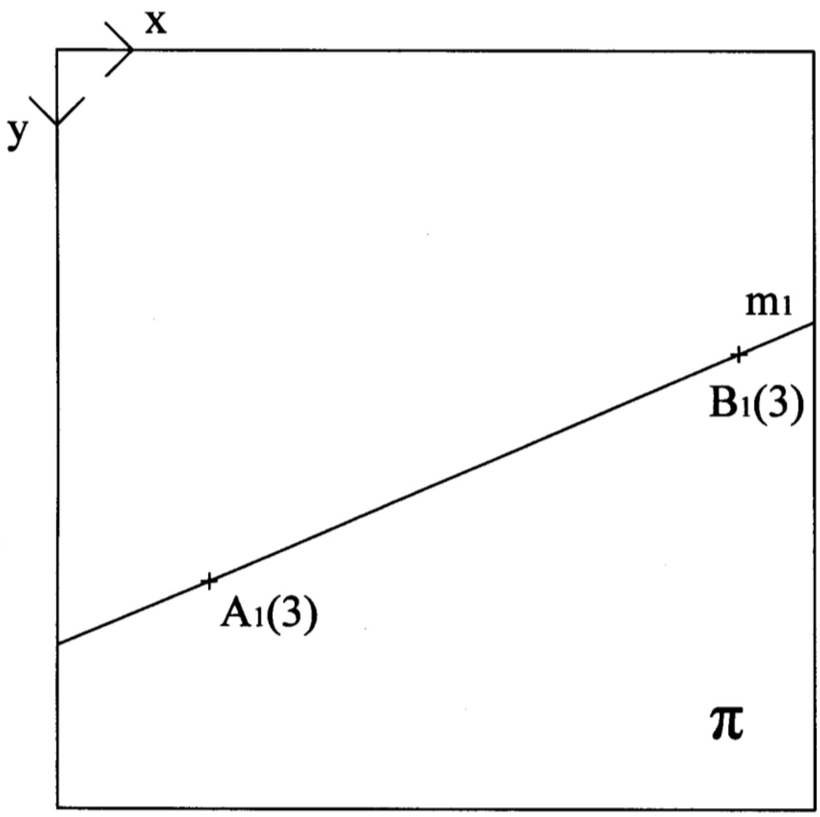


3.2.5 Přímka rovnoběžná s průmětnou π

m = ↔AB

A = [2; 7; 3], B = [9; 4; 3]

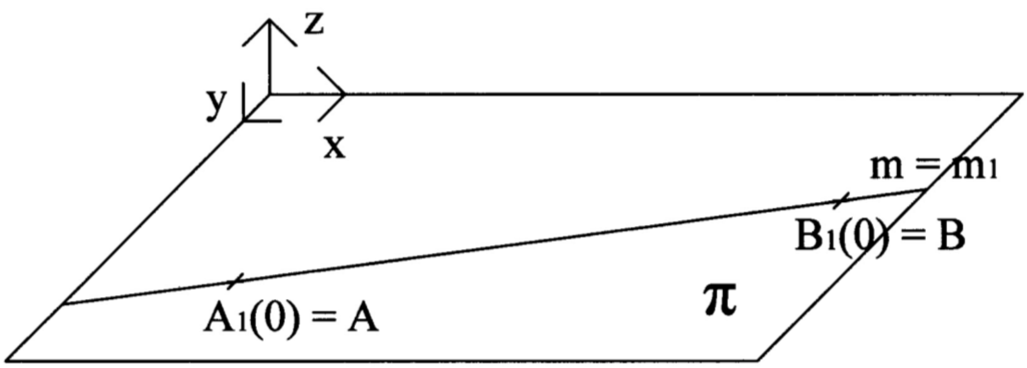


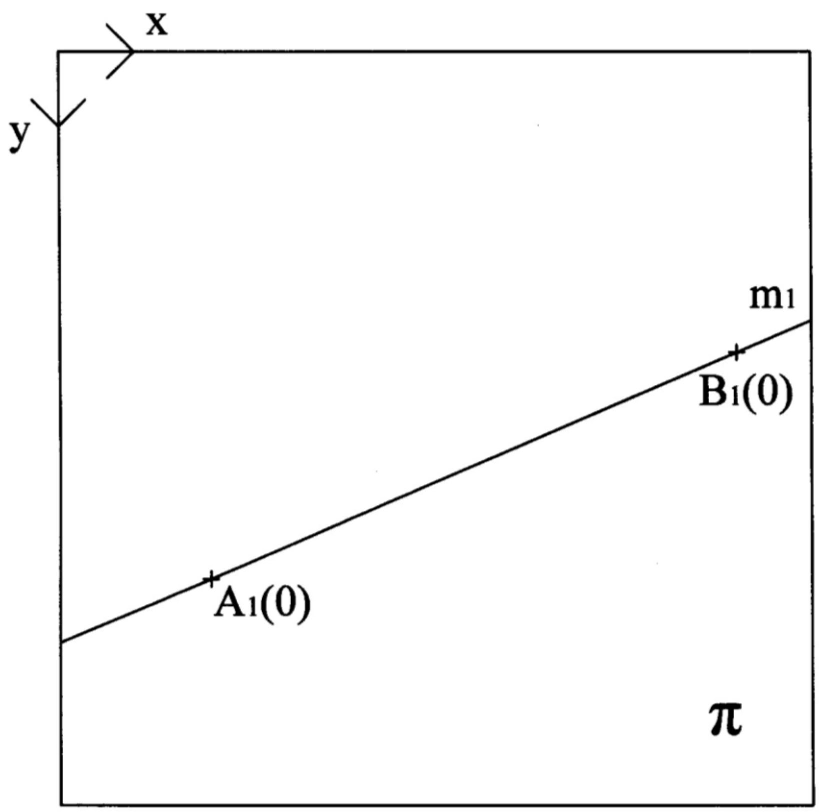


3.2.6 Přímka ležící v průmětně π

m = ↔AB

A = [2; 7; 0], B = [9; 4; 0]

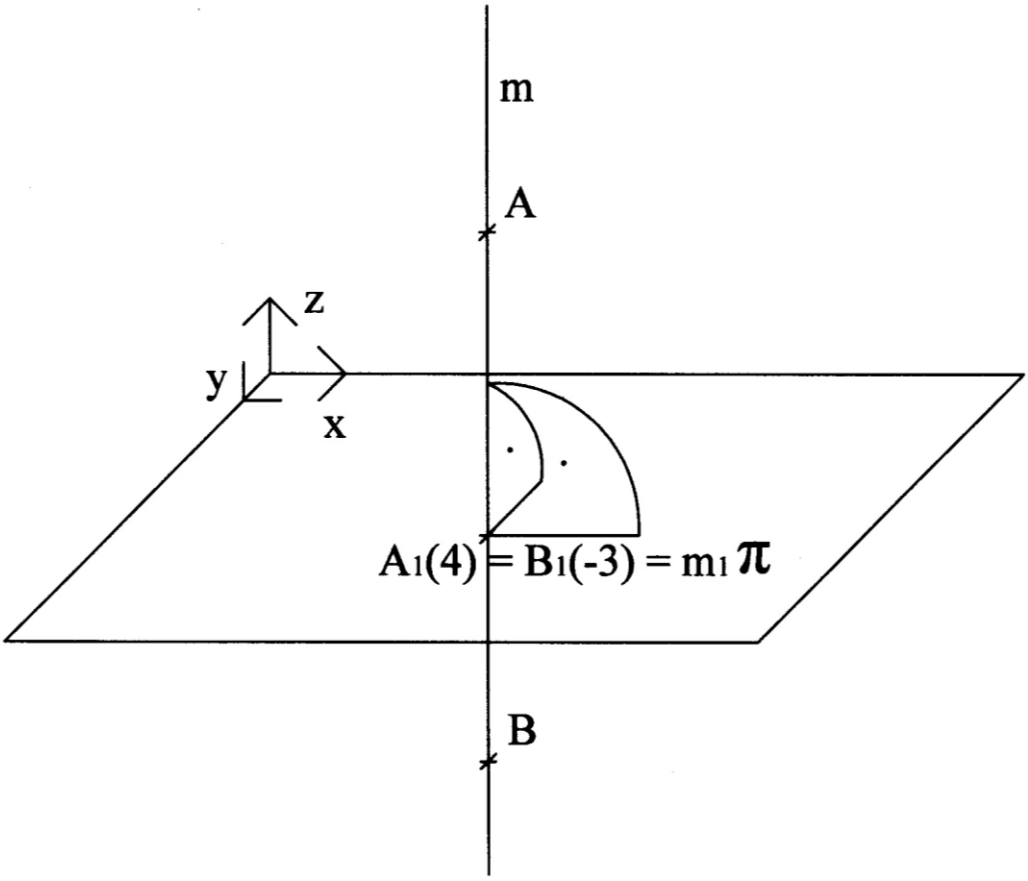


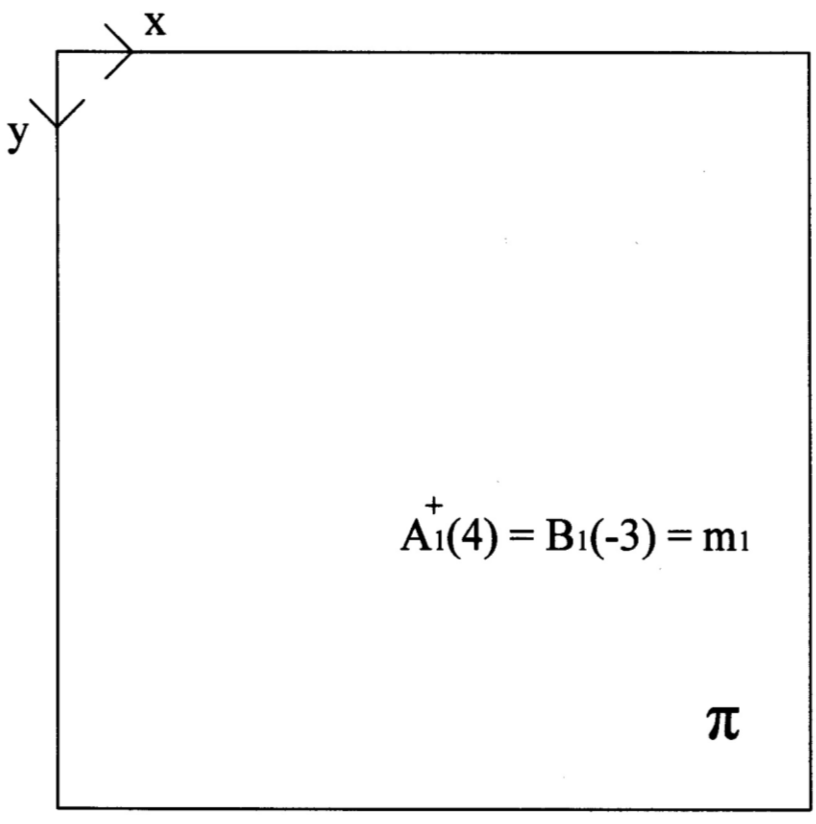


3.2.7 Přímka kolmá na průmětnu π

$m = \leftrightarrow AB$

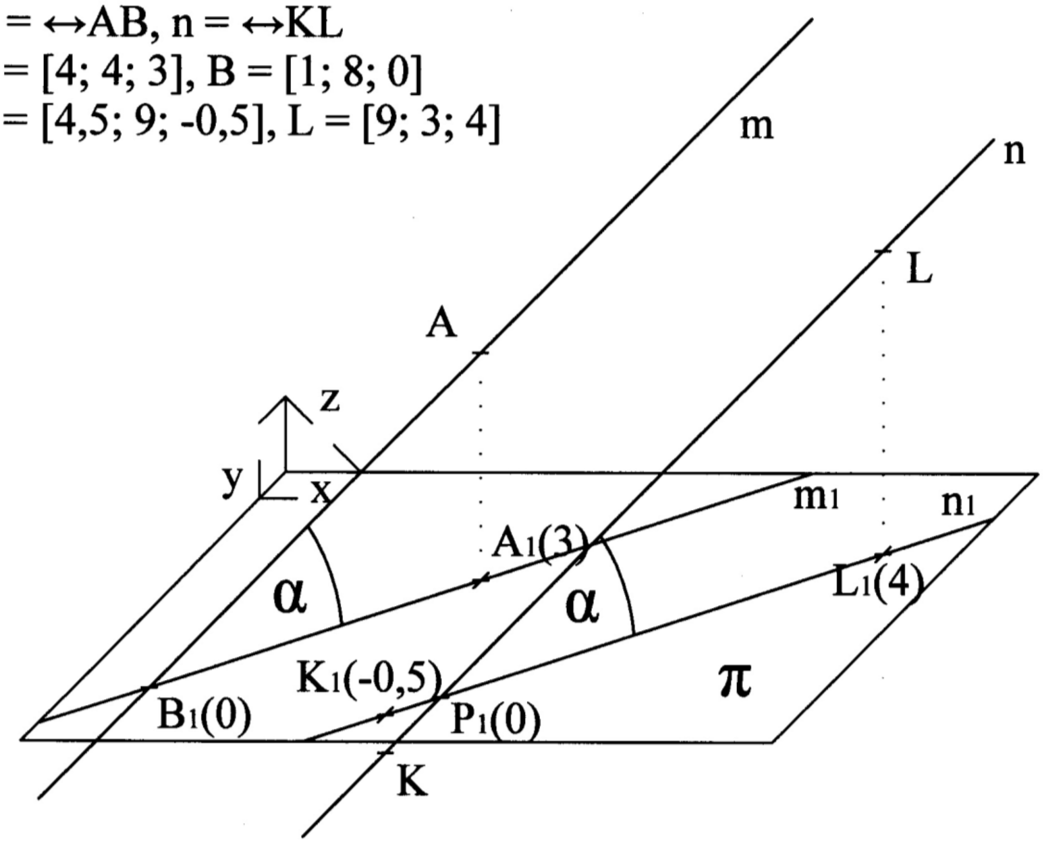
$A = [5; 6; 4]$, $B = [5; 6; -3]$

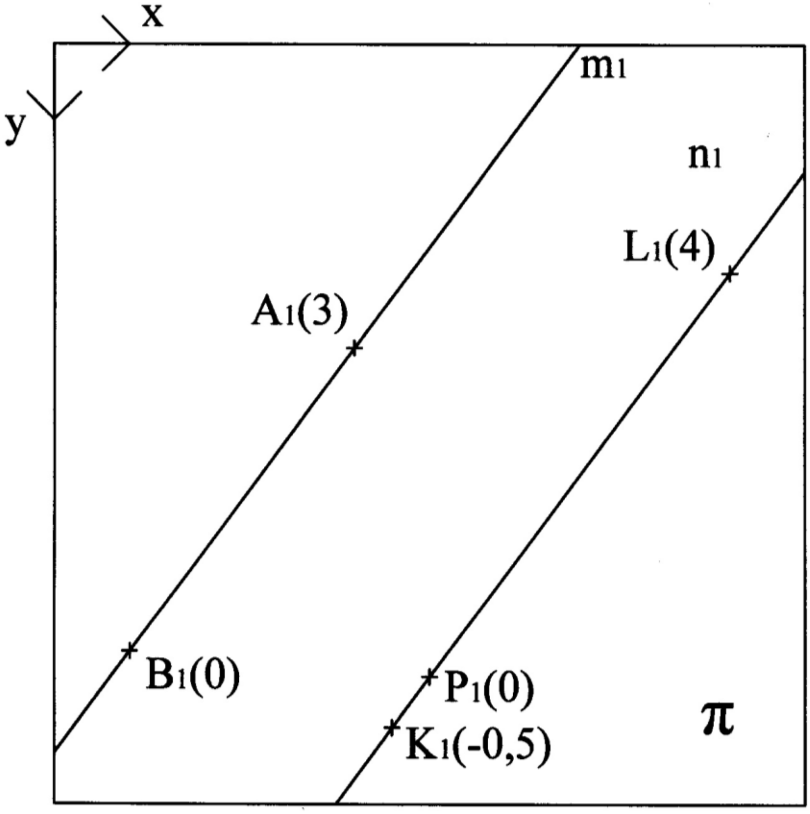




3.2.8 Dvojice rovnoběžných přímek v obecné poloze

m = ↔AB, n = ↔KL
A = [4; 4; 3], B = [1; 8; 0]
K = [4,5; 9; -0,5], L = [9; 3; 4]



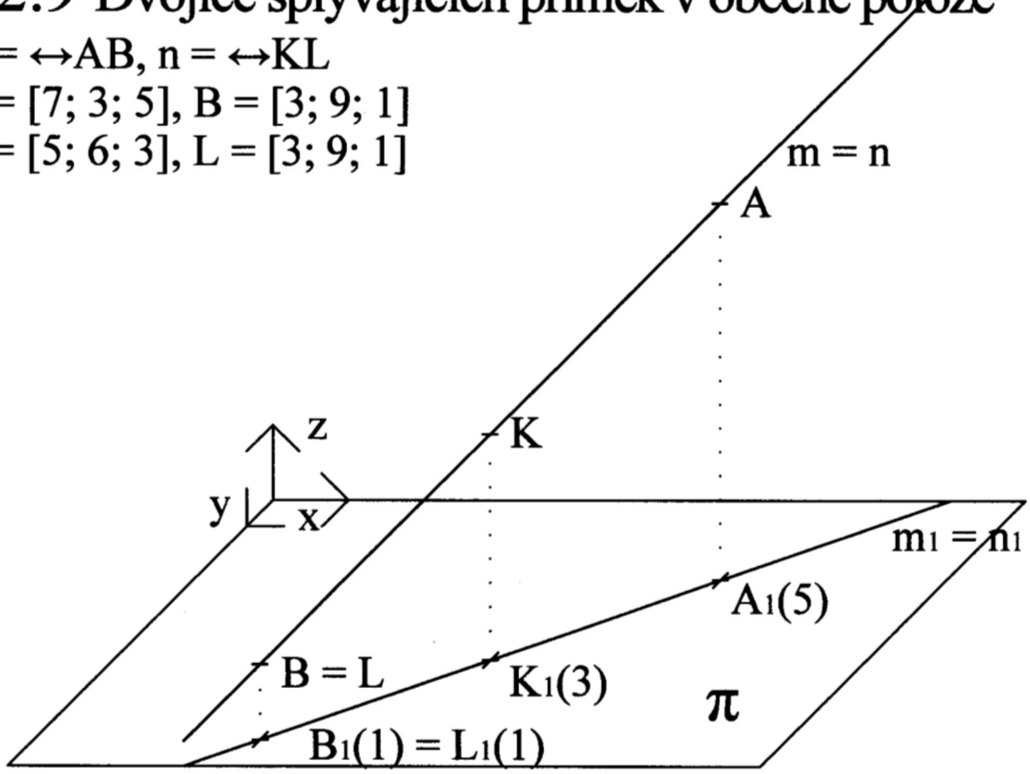


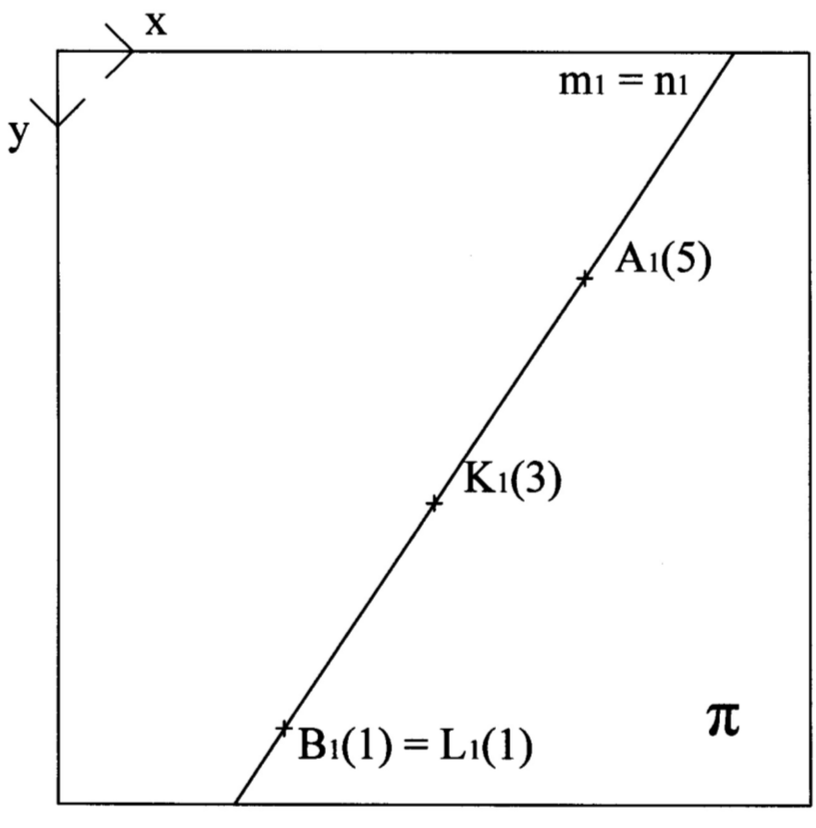
3.2.9 Dvojice splývajících přímek v obecné poloze

$m = \leftrightarrow AB$, $n = \leftrightarrow KL$

$A = [7; 3; 5]$, $B = [3; 9; 1]$

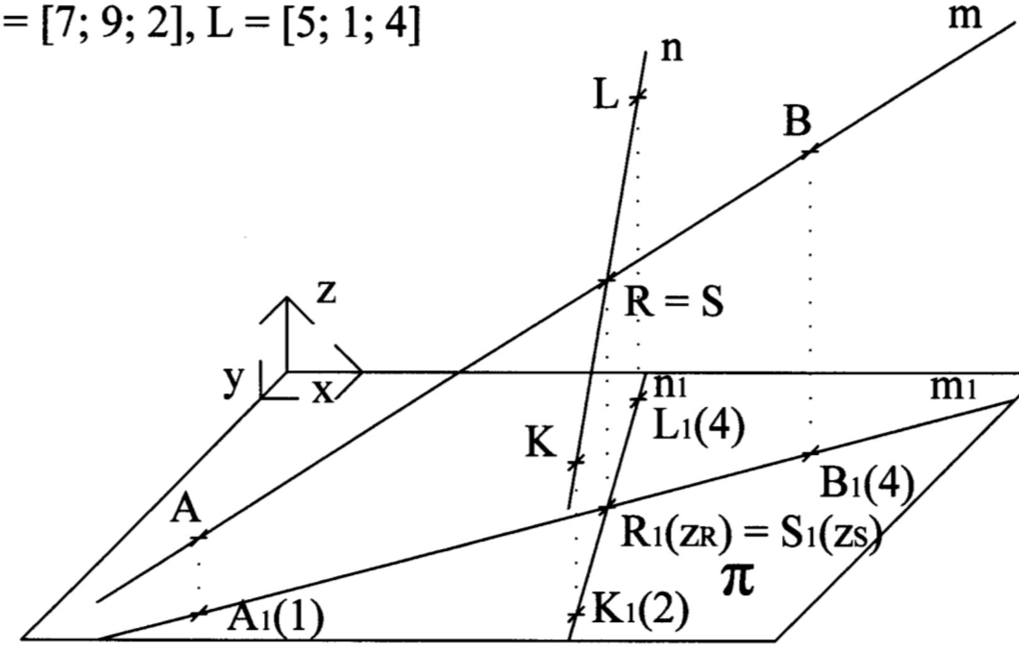
$K = [5; 6; 3]$, $L = [3; 9; 1]$

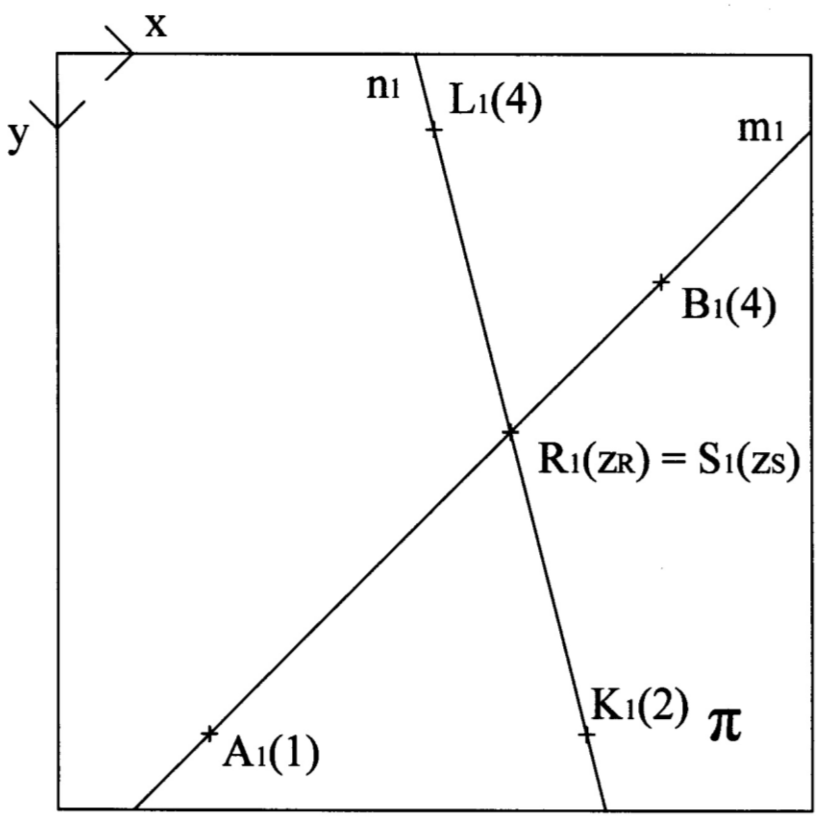




3.2.10 Dvojice různoběžných přímek v obecné poloze

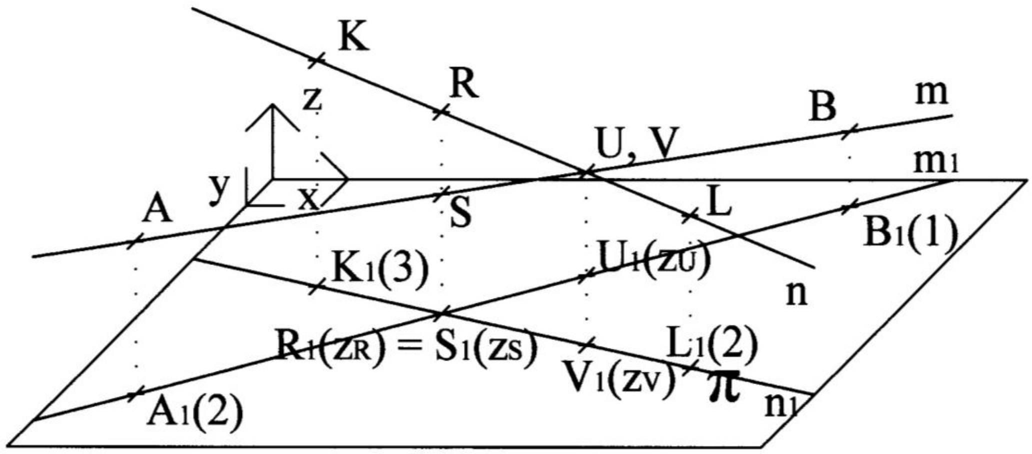
m = ↔AB, n = ↔KL
A = [2; 9; 1], B = [8; 3; 4]
K = [7; 9; 2], L = [5; 1; 4]

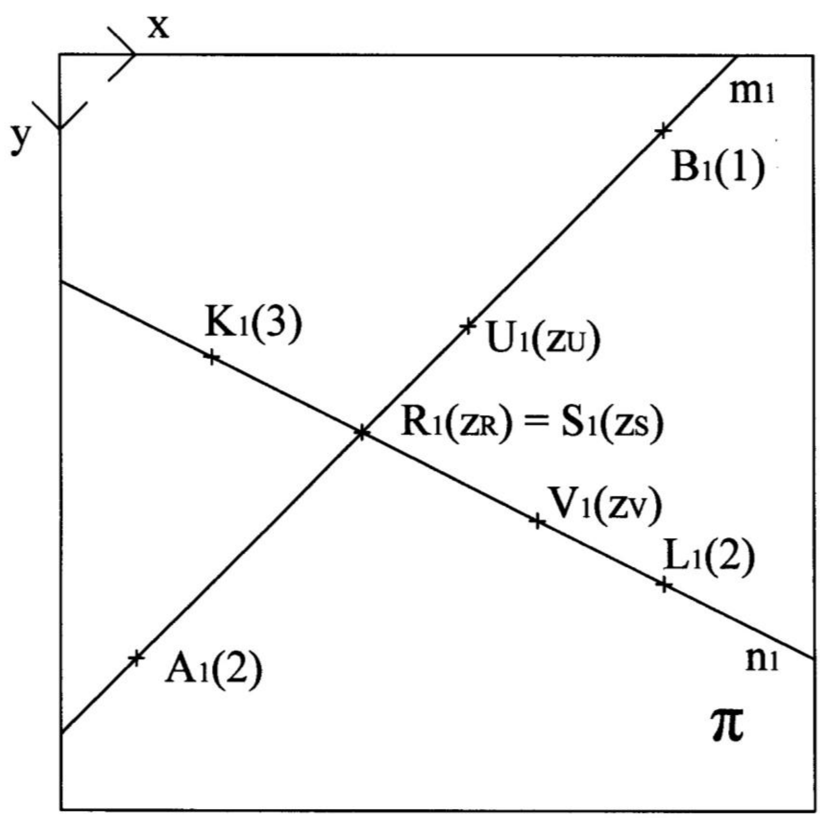




3.2.11 Dvojice mimoběžných přímek v obecné poloze

m = ↔AB, n = ↔KL
A = [1; 8; 2], B = [8; 1; 1]
K = [2; 4; 3], L = [8; 7; 2]





➔ **3.3 Rovina**

„Rovina je geometrický pojem, který byl vytvořen abstrakcí z napjatých blan či kůží, klidné vodní hladiny, ledové vrstvy, rovných částí zemského povrchu.
Euklidés napsal: Rovina má jen délku a šířku.“ [11]

✓ **Zadání roviny**

Rovina se může zadávat:

- třemi body
- bodem a přímkou
- dvěma přímkami (rovnoběžné přímky nebo různoběžné přímky)

Tři body

Rovina se obvykle zadává třemi body: $X = [x; 0; 0]$, $Y = [0; y; 0]$, $Z = [0; 0; z]$. Toto zadání zapisujeme stručně $\alpha = [x; y; z]$. Body X a Y leží v průmětně π a jejich spojnicí je stopa roviny α. Pomocí bodu $Z = [0; 0; z]$ je zadána poloha roviny vzhledem k průmětně π.

➢ Shrnutí:

- trojice bodů nesmí ležet v jedné přímce
- žádná dvojice z těchto tří bodů nesmí být totožná

OBRÁZEK (3.3.1)
Tři body (stručné zadání)

OBRÁZEK (3.3.2)
Tři body

Bod a přímka

Jedná se o případ, kdy je zadána jedna přímka a jeden bod. Tento bod však nesmí ležet na přímce, neboť by takto zadaná rovina nebyla jednoznačně určena. Při konstrukci stopy roviny se přímo využívá zadaných prvků (bod a přímka). Úlohy s tímto typem zadání je možné převést na předchozí typ zadání roviny pomocí tří bodů ($\rho = Ap$, $p = \leftrightarrow CD$).

➢ Shrnutí:

- bod nesmí ležet na přímce

OBRÁZEK (3.3.3)
Bod a přímka

Dvě přímky

Každá dvojice přímek udávající rovinu musí být pouze různoběžná nebo rovnoběžná. Stejně jako v předchozím případě se i u zadání „dvě přímky“ (různoběžné či rovnoběžné) využívá při konstrukci roviny (hledání stopy roviny) dvou zadaných přímek. Není nutné převádět zadání úlohy na jiný typ zadání, ale je to možné. Podobně jako u předchozího typu úlohy lze i toto zadání převést na zadání „tři body“. K sestrojení takto zadané roviny si stačí zvolit trojici

[11] *Slovník školské matematiky*. Brno: SPN, 1981, s. 173

libovolných bodů. Také zde však existuje případ, kdy není možné takto zadanou rovinu přesně určit. Jedná se o případ, který může nastat pouze u dvojice totožných přímek.

➢ Shrnutí:
- přímky nesmí být totožné
- přímky nesmí být mimoběžné
- při konstrukci roviny (hledání její stopy roviny) se přímo využívá daných přímek

OBRÁZEK (3.3.4, 3.3.5)
Dvě přímky (rovnoběžky)
Dvě přímky (různoběžky)

✓ **Vzájemná poloha roviny a průmětny π**

Rovina může mít vzhledem k průmětně π jednu z těchto poloh:

- obecná
  - různoběžná s průmětnou π
- speciální
  - rovnoběžná s průmětnou π
  - rovina totožná s průmětnou π (speciální případ roviny rovnoběžné s „π“)
  - kolmá na průmětnu π (speciální případ roviny různoběžné s „π“)

Poloha roviny k průmětně π	**Úhel svíraný s průmětnou π**	**Průnik roviny s průmětnou π / tvar průniku**	**Zkreslení vzdáleností v rovině*)**
Obecná rovina	(0°; 90°)	ano / přímka	Ano
kolmá k „π“	90°	ano / přímka	Ano
rovnoběžná s „π“	0°	ne	Ne
totožná s „π“	0°	ano / rovina	Ne

***)** Uznáváme, že tato informace může být poněkud zavádějící, neboť v každé rovině se nacházejí přímky, jejíž velikosti se při zobrazování do průmětny π nezkreslují. Odkazem „ne“ jsou zde tedy označeny jen ty roviny, u nichž nedochází ke zkreslení žádné obsažené přímky.

Obecná poloha roviny – rovina různoběžná s průmětnou π

O obecné poloze roviny ρ hovoříme v případě, když tato rovina svírá s průmětnou π odchylku větší než 0° a menší než 90°. Útvary, které leží v této rovině ρ se nezobrazí v průmětně π ve skutečné velikosti. Skutečnou velikost útvaru ležícího v rovině ρ sestrojíme otočením roviny ρ do průmětny π.

➢ Shrnutí:
- s průmětnou π svírá odchylku od 0° do 90°
- téměř všechny vzdálenosti přímky se při zobrazování do průmětny π zkreslují
- téměř všechny odchylky dvojice přímek se při zobrazování do průmětny π zkreslují
- všechny geometrické útvary se při zobrazování do průmětny π zkreslují
- průnikem roviny s průmětnou π je přímka – stopa roviny

OBRÁZEK (3.3.6)
Rovina různoběžná s průmětnou π

Speciální polohy roviny

Rovina rovnoběžná s průmětnou π

Rovina ρ je rovnoběžná s průmětnou π, jestliže každá přímka ležící v této rovině svírá se svým průmětem nulovou odchylku. Takováto rovina nemá průnik s průmětnou π, svírá s ní odchylku 0° a všechny body v ní ležící mají stejnou (kladnou nebo zápornou) z-ovou souřadnici. Útvary, které leží v rovině ρ, která je rovnoběžná s průmětnou π, se zobrazí do průmětny π ve skutečné velikosti.

➢ Shrnutí:
- rovina ρ svírá s průmětnou π nulovou odchylku
- rovina ρ je s průmětnou π rovnoběžná
- všechny body ležící v rovině ρ mají stejnou z-ovou souřadnici
- všechny body ležící v rovině ρ mají od průmětny π stejnou vzdálenost
- objekty ležící v této rovině se do průmětny π zobrazují ve skutečné velikosti
- rovina nemá průnik s průmětnou π

OBRÁZEK (3.3.7)
Rovina rovnoběžná s průmětnou π

Rovina splývající s průmětnou π

Jedná se o zvláštní polohu roviny a to tak speciální, že v příkladech se prakticky nevyskytuje. Tento typ roviny, stejně jako předchozí, svírá s průmětnou π odchylku 0°. Na rozdíl od předchozího typu má však s průmětnou π průnik. Jejím průnikem s průmětnou π je celá rovina. Všechny body ležící v rovině ρ, mají nulovou z-ovou souřadnici $\rho = \pi$.

➢ Shrnutí:
- rovina ρ svírá s průmětnou π odchylku 0°
- rovina ρ je totožná s průmětnou π
- průnikem roviny ρ s průmětnou π je celá rovina
- všechny body ležící v rovině ρ mají od průmětny π stejnou vzdálenost, která je rovna nule
- všechny body ležící v rovině ρ, mají nulovou z-ovou souřadnici
- objekty ležící v rovině ρ, se do průmětny π zobrazí ve skutečné velikosti

OBRÁZEK (3.3.8)
Rovina splývající s průmětnou π

Rovina kolmá na průmětnu π

Jedná se o speciální případ roviny ρ různoběžné s průmětnou π. Svírá-li alespoň jedna přímka roviny ρ s průmětnou π odchylku 90°, pak celá rovina svírá s průmětnou odchylku 90° - je na ni kolmá. Všechny přímky takovéto roviny se při zobrazování do průmětny zobrazují na jedinou přímku, která je průsečnicí roviny ρ s průmětnou π.

➢ Shrnutí:
- rovina ρ svírá s průmětnou π odchylku 90°
- rovina ρ má průnik s průmětnou π – stopu roviny
- všechny body roviny ρ se při promítání zobrazují do přímky - stopy roviny
- všechny objekty (body a přímky) ležící v rovině ρ se zobrazují do přímky - stopy

roviny
- hlavní přímky této roviny ρ jsou rovnoběžné s průmětnou π
- spádové přímky roviny ρ jsou kolmé na průmětnu π
- spádové přímky roviny ρ se zobrazují na body ležící na stopě roviny
- přímka kolmá k rovině ρ se v průmětně π zobrazí jako kolmice na stopu roviny

OBRÁZEK (3.3.9)
Rovina kolmá na průmětnu π

✓ Vzájemná poloha dvojice rovin

V prostoru existují dva typy dvojice rovin:

- rovnoběžné roviny
- různoběžné roviny

Vzájemná poloha dvojice rovin	Výskyt dvojice rovin v prostoru	Vzájemný průnik / tvar průniku
rovnoběžné roviny	Ano	Ne
totožné (rovnoběžné) roviny	Ano	Ano / rovina
různoběžné roviny	Ano	Ano / přímka
mimoběžné roviny	Ne	Ne

Roviny vzájemně rovnoběžné

Z dvojic rovnoběžných rovin zase vyloučíme tu podskupinu jejichž vzájemná vzdálenost je nulová – totožné roviny. Rovnoběžné roviny nemají společný žádný bod a jejich odchylka je nulová. Vzájemná vzdálenost dvojice rovin je nenulová a stejná ve všech bodech roviny. Obě roviny svírají s průmětnou π stejnou odchylku.

➢ Shrnutí:
- dvojice rovin nemá vzájemný průnik
- vzájemná odchylka dvojice rovin je nulová
- vzájemná vzdálenost dvojice rovin je nenulová
- dvojice rovin má v každém bodě stejnou vzájemnou vzdálenost
- dvojice rovin svírá s průmětnou π stejnou odchylku

OBRÁZEK (3.3.10)
Roviny vzájemně rovnoběžné

Roviny vzájemně splývající

Splývající roviny mají nulovou vzájemnou vzdálenost – leží na sobě. Dvojice rovin má společné všechny body a vzájemná odchylka je nulová.

➢ Shrnutí:
- průnikem dvojice rovin je celá rovina
- vzájemná odchylka dvojice rovin je nulová
- vzájemná vzdálenost dvojice rovin je nulová
- roviny svírají s průmětnou π stejné odchylky

OBRÁZEK (3.3.11)
Roviny vzájemně splývající

Roviny vzájemně různoběžné

Různoběžné jsou každé dvě roviny, jejichž vzájemně sevřená odchylka není nulová. Průnikem dvojice různoběžných rovin je přímka.

➢ Shrnutí:
- průnikem různoběžných rovin je přímka
- jejich vzájemná odchylka je nenulová

OBRÁZEK (3.3.12)
Roviny vzájemně různoběžné

✓ **Zobrazování roviny**

Zobrazování se při řešení úloh nepoužívá, neboť rovina při zobrazení na průmětnu π splývá s celou průmětnou π. Jestli-že je tedy nutné pracovat s prvky ležícími v rovině, jenž není rovnoběžná s průmětnou π, využijeme k zobrazení všech útvarů roviny konstrukci otáčení roviny

OBRÁZEK (3.3.13)
Zobrazení roviny v obecné poloze do průmětny π

✓ **Výskyt přímek v rovině a jejich vzájemné vlastnosti**

Hlavní a spádové přímky roviny

V každé rovině, která není rovnoběžná s průmětnou π zavádíme dva typy významných přímek:
- hlavní přímky roviny ρ (h^{ρ})
- spádové přímky roviny ρ (s^{ρ})

Hlavní přímky roviny ρ jsou přímky rovnoběžné se stopou roviny ρ. Tyto přímky představují vrstevnice dané roviny a jsou jediné, které se při zobrazování do průmětny π nezkreslují. Spádové přímky roviny ρ jsou kolmé na hlavní přímky roviny a jsou tedy i kolmé ke stopě roviny ρ. Při zobrazování do průmětny π dochází k jejich největšímu zkreslení.

Typy přímek	Zkreslení vzdáleností	Značení	Poznámka
hlavní přímky roviny ρ	Ne	$h^{\rho}(2)$	
stopa roviny ρ	Ne	p_1^{ρ}	Speciální případ hlavní přímky roviny ρ, $h(0)$
spádové přímky roviny ρ	Ano	s^{ρ}	

Hlavní přímky roviny ρ

Hlavní přímky roviny ρ jsou přímky, které leží v rovině ρ, jenž je různoběžná s průmětnou π (nebo na ni kolmá), a jsou s ní rovnoběžné. Všechny body ležící na jedné z hlavních přímek roviny ρ mají konstantní vzdálenost od průmětny π. Každá hlavní přímka roviny ρ je průnikem dané roviny ρ s rovinou, jenž je rovnoběžná s průmětnou π. Například: hlavní přímka o výšce 3 je výsledným průnikem dané roviny ρ s rovinou, která je s průmětnou π rovnoběžná a jejíž vzdálenost od průmětny π je rovna 3. Hlavní přímky roviny ρ značíme h^{ρ} a podobně jako u bodu uvádíme za označení do závorky z-ovou hodnotu hlavní přímky: $h^{\rho}(3)$. Hlavních přímek je nekonečně mnoho. Při řešení úloh se využívají především hlavní přímky o celistvých kótách (např. $h^{\rho}(2)$, $h^{\rho}(3)$...). Speciálním případem hlavní přímky je stopa roviny (viz níže). Jedná se o hlavní přímku s kótou 0 ($h^{\rho}(0)$). Při zobrazování roviny ρ, která je kolmá k průmětně π, splývají průměty hlavních přímek se stopou roviny ρ.

➢ Shrnutí:
- hlavní přímky mají konstantní vzdálenost od průmětny π
- označení hlavní přímky v prostoru: h^{ρ}
- označení průmětu hlavní přímky $h_1^{\rho}(3)$ v průmětně π kde hodnota v závorce udává vzdálenost přímky od průmětny π
- pokud leží hlavní přímka v kladném poloprostoru, je tato hodnota kladná: $h^{\rho}(5)$
- pokud leží hlavní přímka v záporném poloprostoru, je tato hodnota záporná: $h^{\rho}(-4)$
- v úlohách sestrojujeme hlavní přímky o celistvých kótách
- při zobrazování hlavních přímek do průmětny π se vzdálenost dvojice bodů ležících na hlavní přímce nezkresluje
- všechny hlavní přímky jsou vzájemně rovnoběžné
- všechny průměty hlavních přímek jsou vzájemně rovnoběžné
- všechny hlavní přímky a všechny jejich průměty jsou vzájemně rovnoběžné

OBRÁZEK (3.3.14)
Hlavní přímky roviny ρ

Stopa roviny ρ

Stopa roviny je průnikem roviny ρ, s průmětnou π a značí se p_1^{ρ}. Stopa roviny je tedy hlavní přímka s nulovou vzdáleností od průmětny π – leží přímo v průmětně π, ($h(0) = p_1^{\rho}$).

➢ Shrnutí:
- stopa roviny ρ je průnikem roviny ρ s průmětnou π
- stopa roviny ρ je hlavní přímka o kótě *0.*
- vzdálenost bodů A, B, které leží na stopě roviny ρ se v průmětně π nezkresluje
- stopa roviny je rovnoběžná s ostatními hlavními přímkami roviny
- průmět stopy roviny je rovnoběžný s průměty ostatních hlavních přímek roviny
- stopa roviny p_1^{ρ}, všechny ostatní hlavní přímky roviny ρ, $h(1)$, $h(2)$... a jejich průměty jsou vzájemně rovnoběžné

OBRÁZEK (3.3.15)
Stopa roviny ρ

Spádové přímky roviny ρ

Spádové přímky roviny ρ jsou přímky s největším spádem roviny ρ a značíme je s^{ρ}. Tyto přímky jsou průnikem roviny, která je kolmá jak k průmětně π, tak k rovině ρ, ve které leží. Spádové přímky roviny ρ jsou kolmé jak na stopu roviny ρ, tak na hlavní přímky roviny ρ. Pokud je rovina ρ kolmá na průmětnu π, tak jsou také spádové přímky roviny ρ kolmé na průmětnu π.

➢ Shrnutí:
- spádové přímky jsou kolmé ke stopě roviny
- jsou kolmé ke všem hlavním přímkám roviny
- jejich pravoúhlé průměty jsou kolmé k průmětům hlavních přímek roviny
- spádová přímka svírá se svým průmětem odchylku větší než 0° a menší než 90°
- spádové přímky jsou vzájemně rovnoběžné
- v rovině ρ existuje nekonečně mnoho spádových přímek
- při zobrazování spádové přímky do průmětny π dochází u dvojice bodů ležících na ní k maximálnímu zkreslení vzdálenosti
- příklad značení spádové přímky v průmětně π: „s_1^{ρ}“

OBRÁZEK (3.3.16)
Spádové přímky roviny ρ

Tvrzení:

„U roviny různoběžné s průmětnou π se kolmost jejich dvou přímek při zobrazování do průmětny π zachovává (nezkresluje) právě tehdy, je-li z nich právě jedna s průmětnou π rovnoběžná.“ [12]

OBRÁZEK (3.3.17)
Zobrazování kolmosti dvou přímek

[12] RESTL, Č., DOLEŽAL, J. *Kótované promítání a topografické plochy*. Ostrava: VŠB, 2004, s. 8

SEZNAM OBRÁZKŮ - ROVINA

Zadání roviny

Poloha roviny

Poloha dvojice rovin

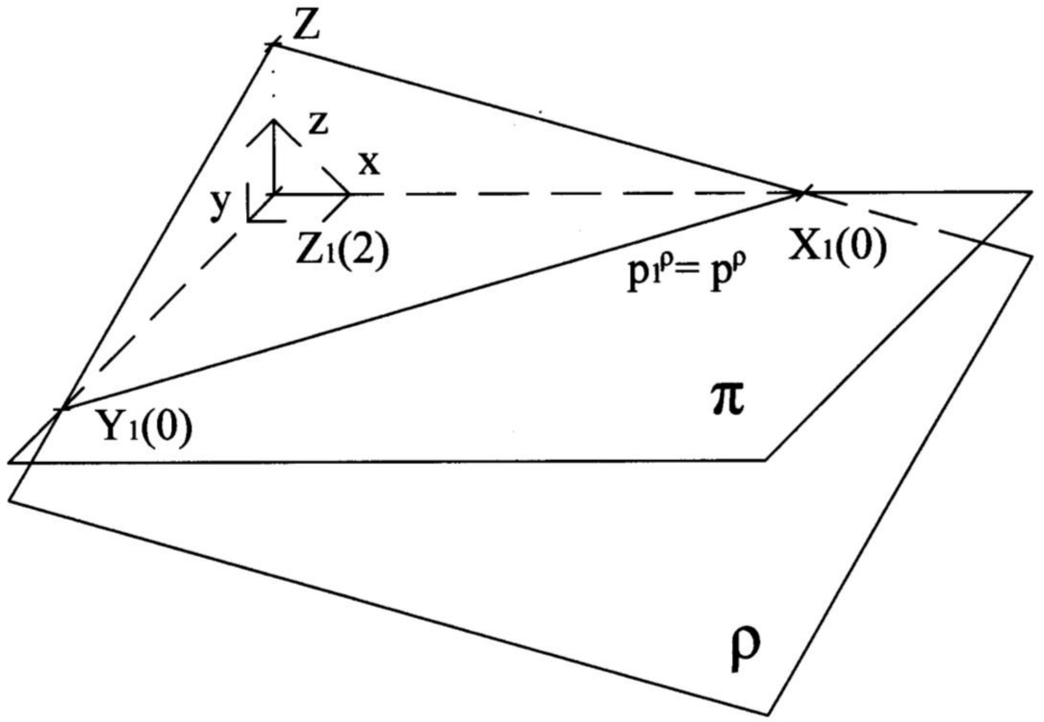
Zobrazování roviny

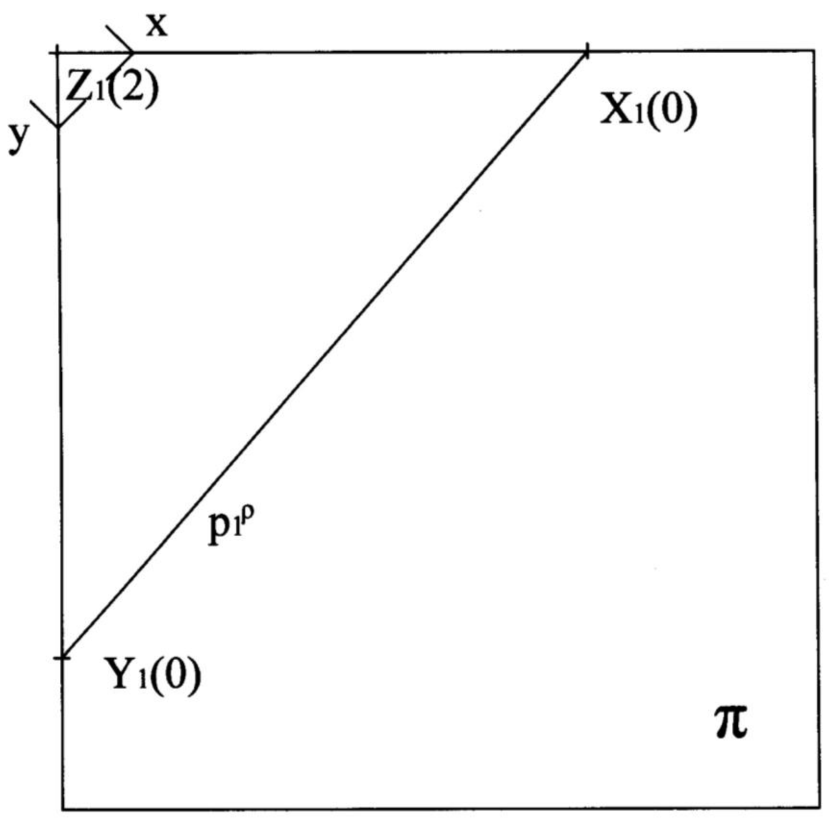
Výskyt přímek v rovině a jejich vzájemné vlastnosti

3.3.1 Zadání roviny: tři body (stručné zadání)

$\rho = (7; 8; 2) = \leftrightarrow XYZ$

$X = [7; 0; 0]$, $Y = [0; 8; 0]$, $Z = [0; 0; 2]$

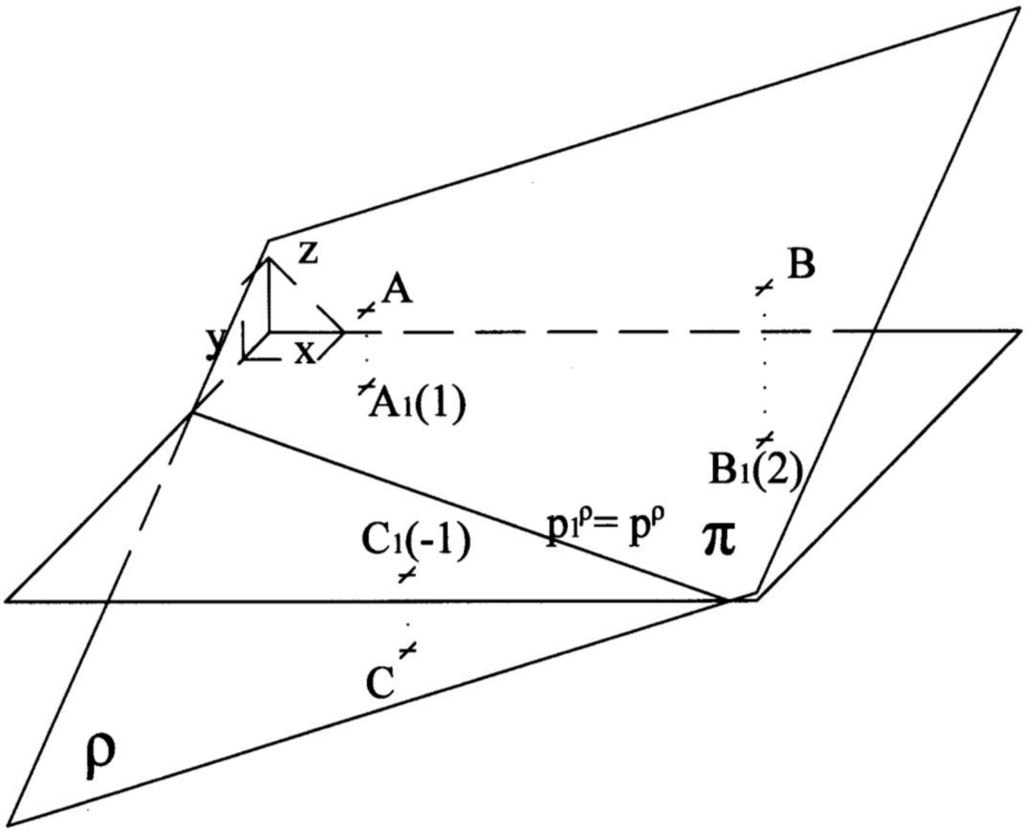


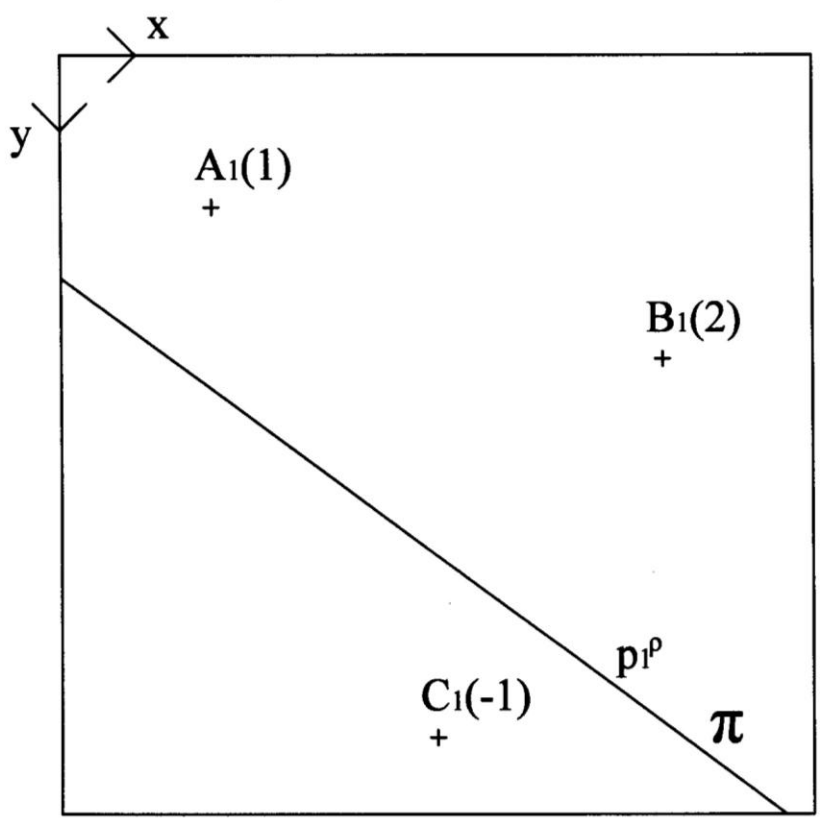


3.3.2 Zadání roviny: tři body

ρ = ↔ABC

A = [2; 2; 1], B = [8; 4; 2], C = [5; 9; -1]

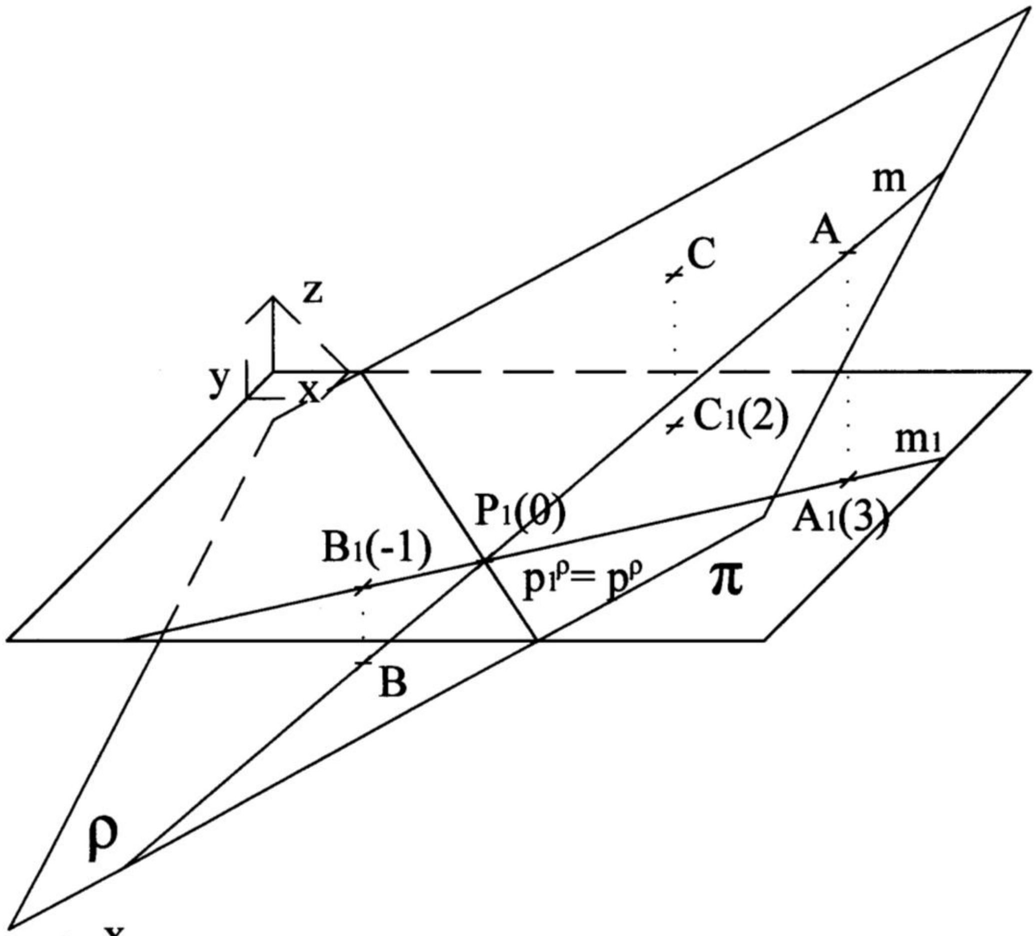


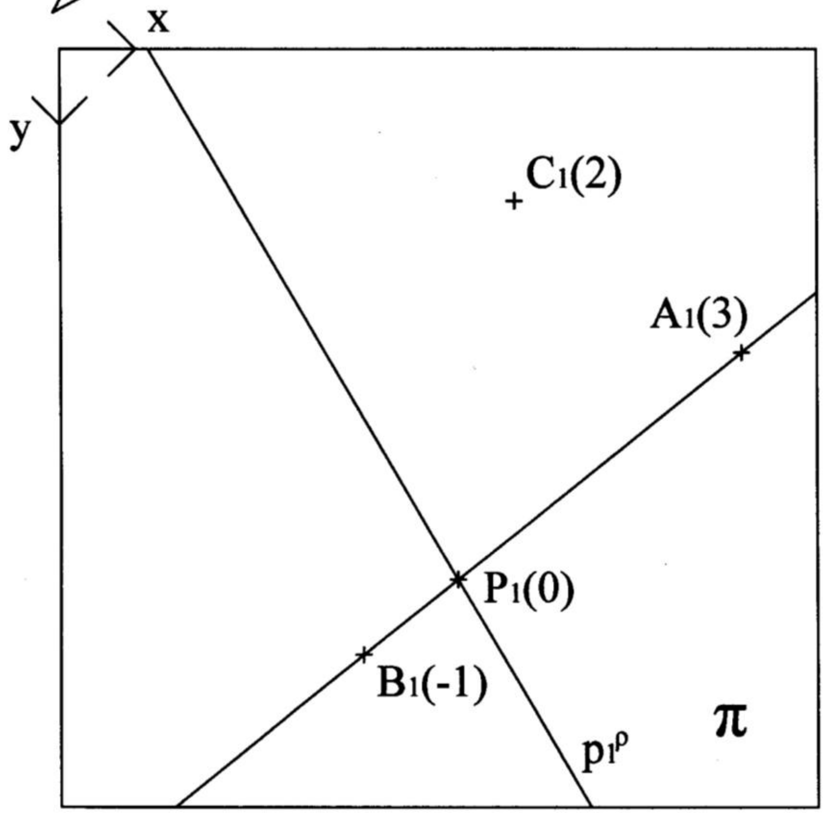


3.3.3 Zadání roviny: bod a přímka

$\rho = \leftrightarrow mC$, $m = \leftrightarrow AB$

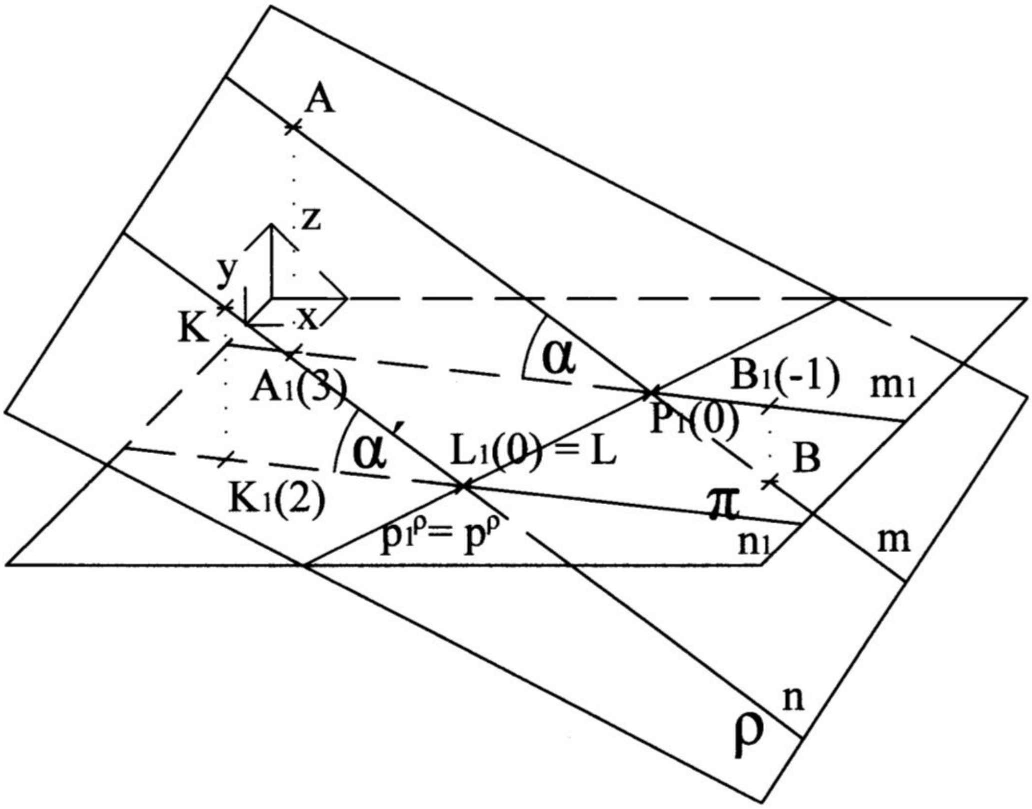
$A = [9; 4; 3]$, $B = [4; 8; -1]$, $C = [6; 2; 2]$

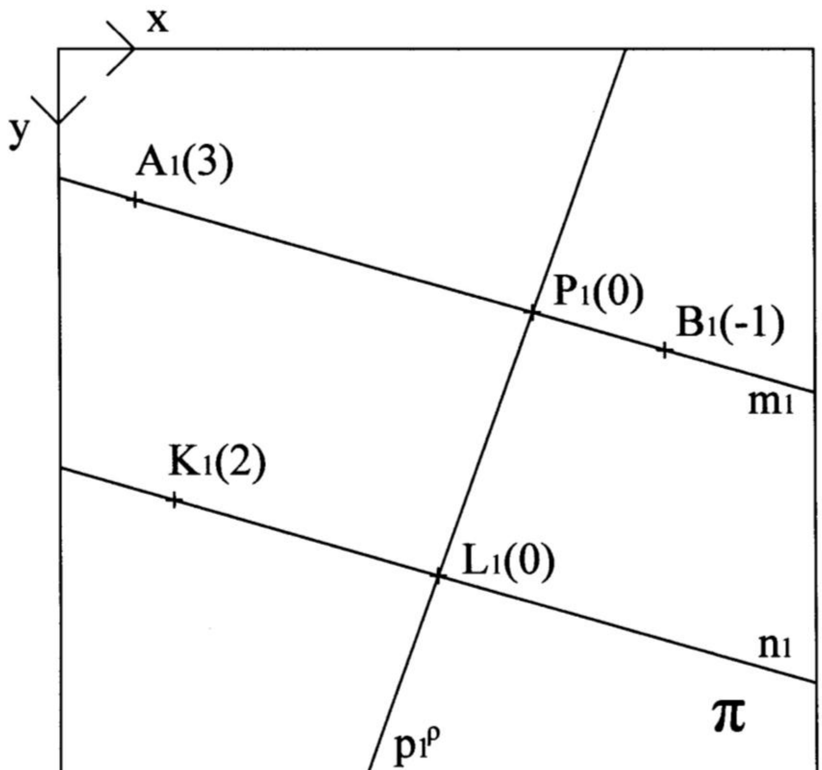




3.3.4 Zadání roviny: dvě přímky (rovnoběžky)

$\rho = \leftrightarrow mn$, $m = \leftrightarrow AB$, $n = \leftrightarrow KL$
$A = [1; 2; 3]$, $B = [8; 4; -1]$
$K = [1{,}5; 6; 2]$, $L = [5; 7; 0]$



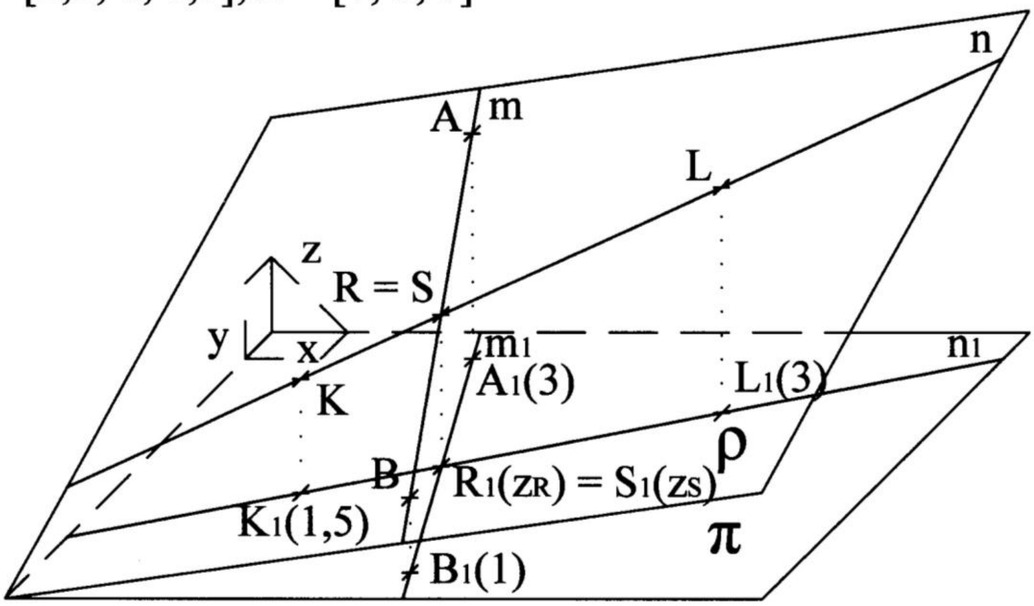


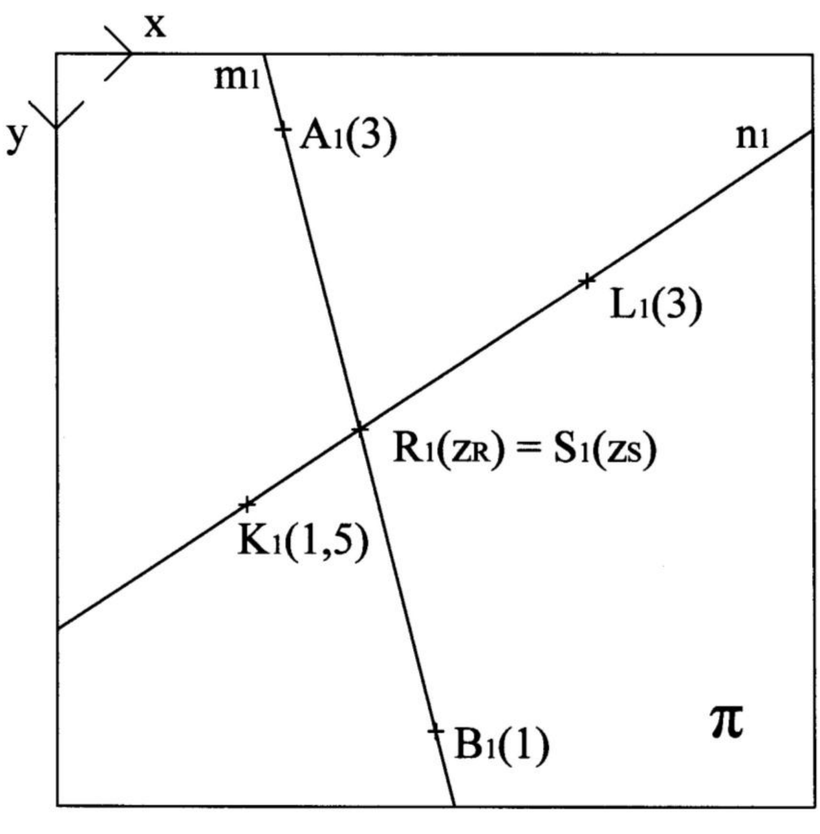
3.3.5 Zadání roviny: dvě přímky (různoběžky)

$\rho = \leftrightarrow mn$, $m = \leftrightarrow AB$, $n = \leftrightarrow KL$

$A = [3; 1; 3]$, $B = [5; 9; 1]$

$K = [2{,}5; 6; 1{,}5]$, $L = [7; 3; 3]$

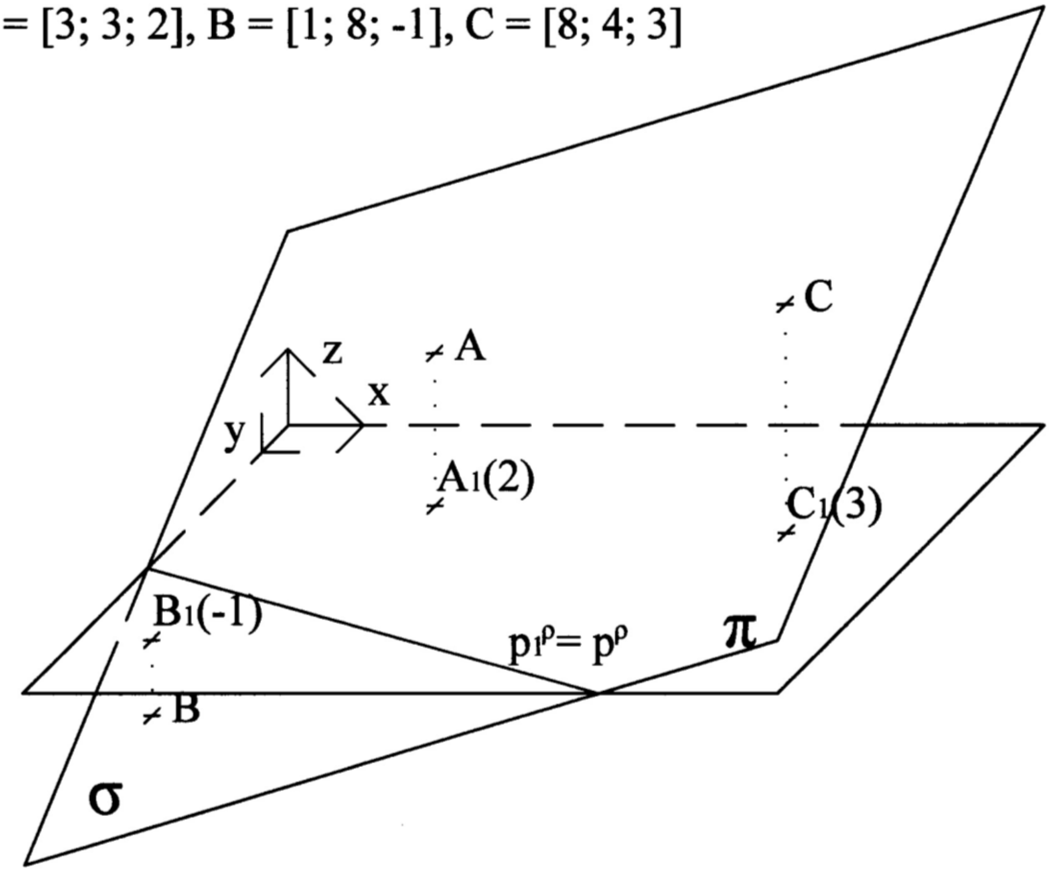


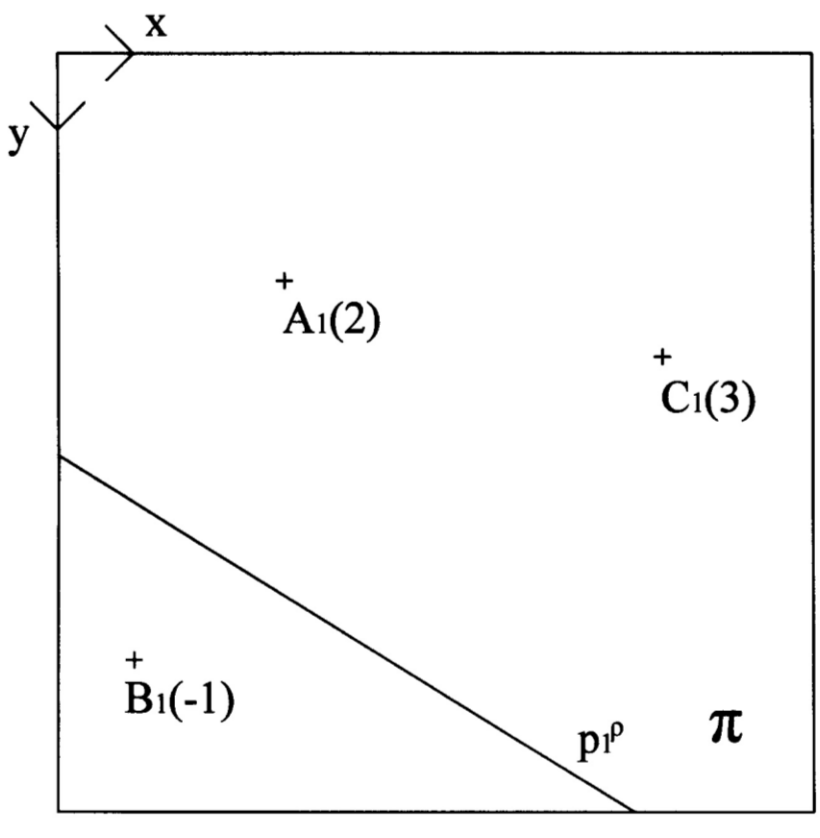


3.3.6 Rovina různoběžná s průmětnou π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [3; 3; 2]$, $B = [1; 8; -1]$, $C = [8; 4; 3]$

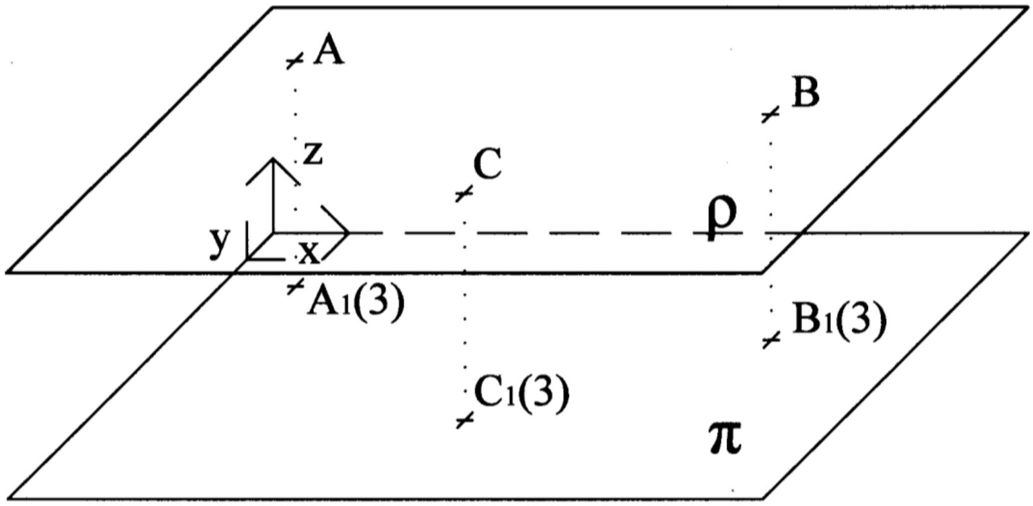


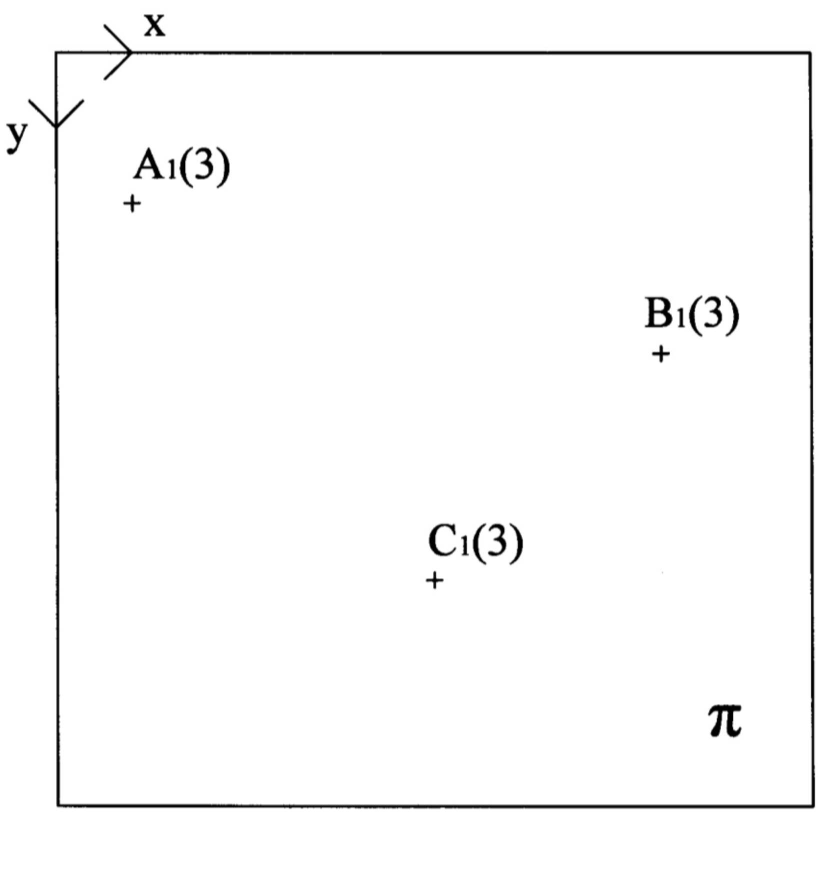


3.3.7 Rovina rovnoběžná s průmětnou π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [1; 2; 3]$, $B = [8; 4; 3]$, $C = [5; 7; 3]$

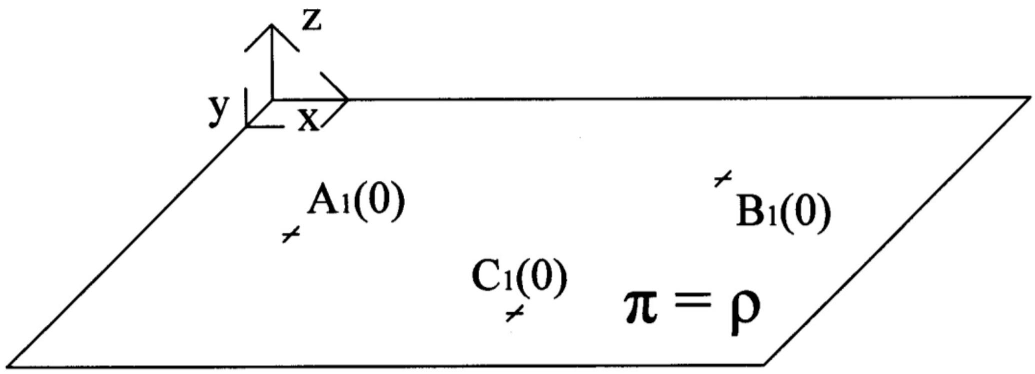


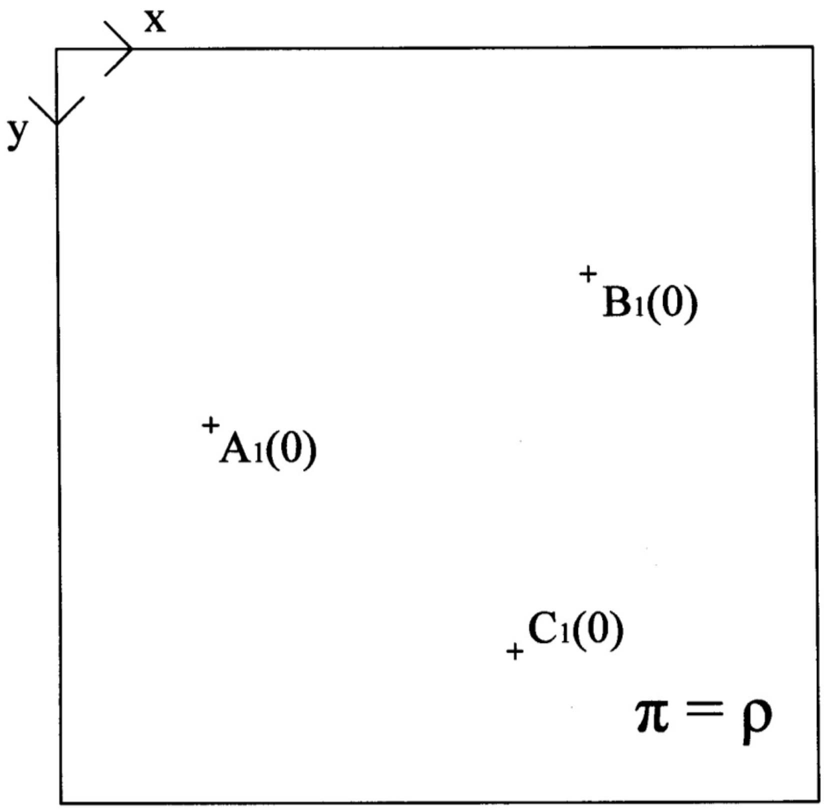


3.3.8 Rovina splývající s průmětnou π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [2; 5; 0]$, $B = [7; 3; 0]$, $C = [6; 8; 0]$

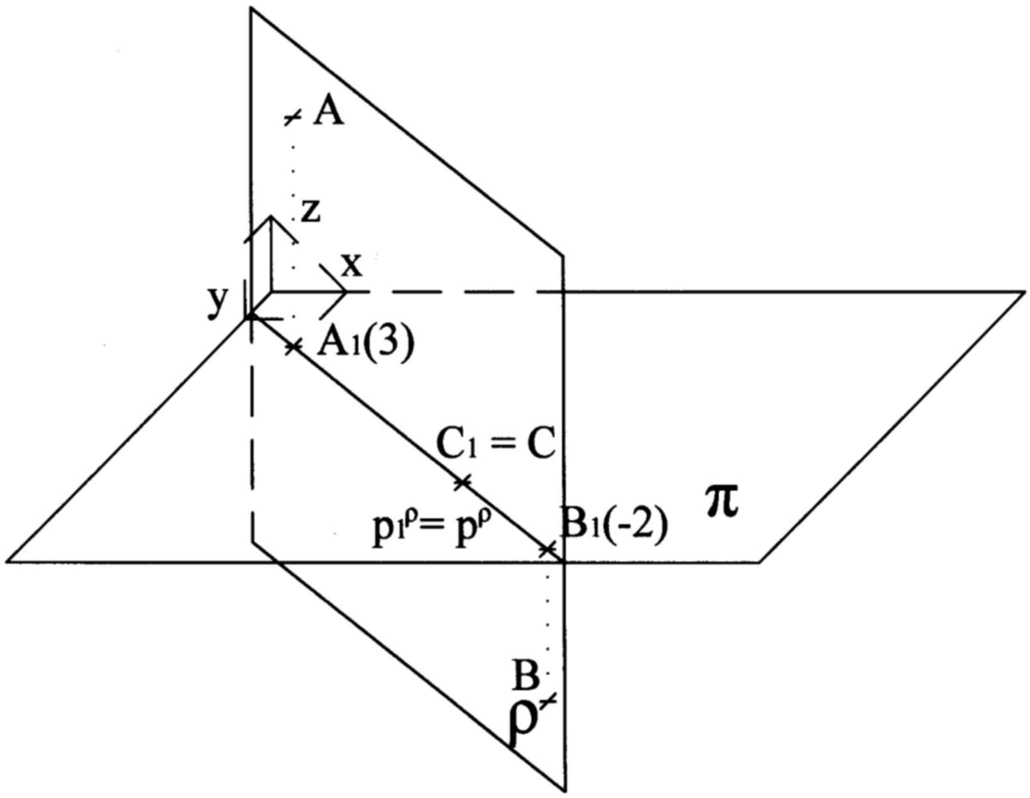


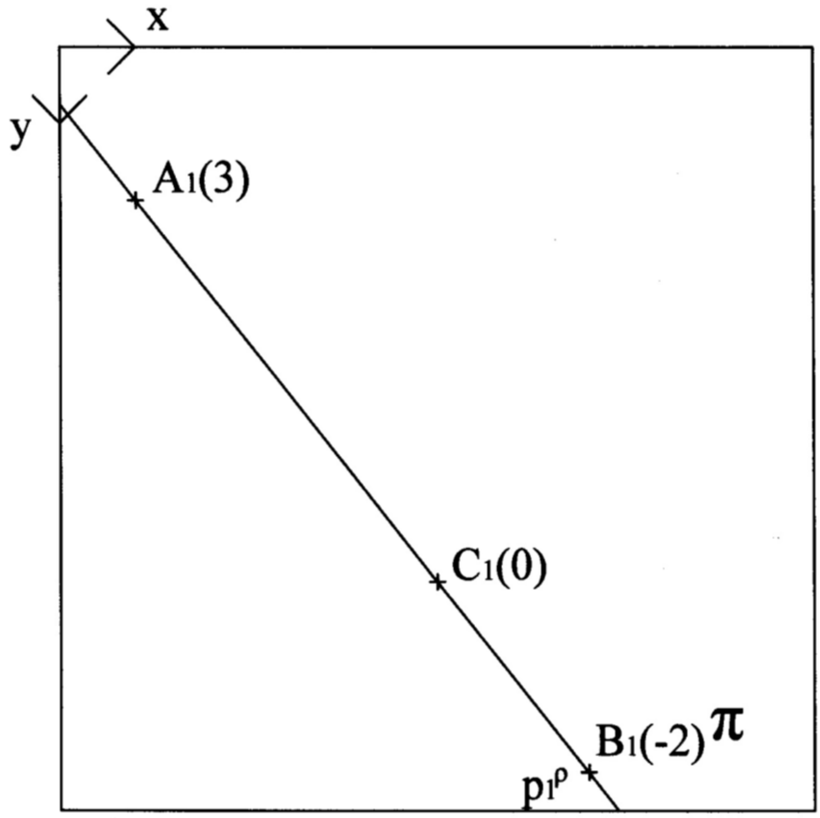


3.3.9 Rovina kolmá na průmětnu π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [1; 2; 3]$, $B = [7; 9{,}5; -2]$, $C = [5; 7; 0]$



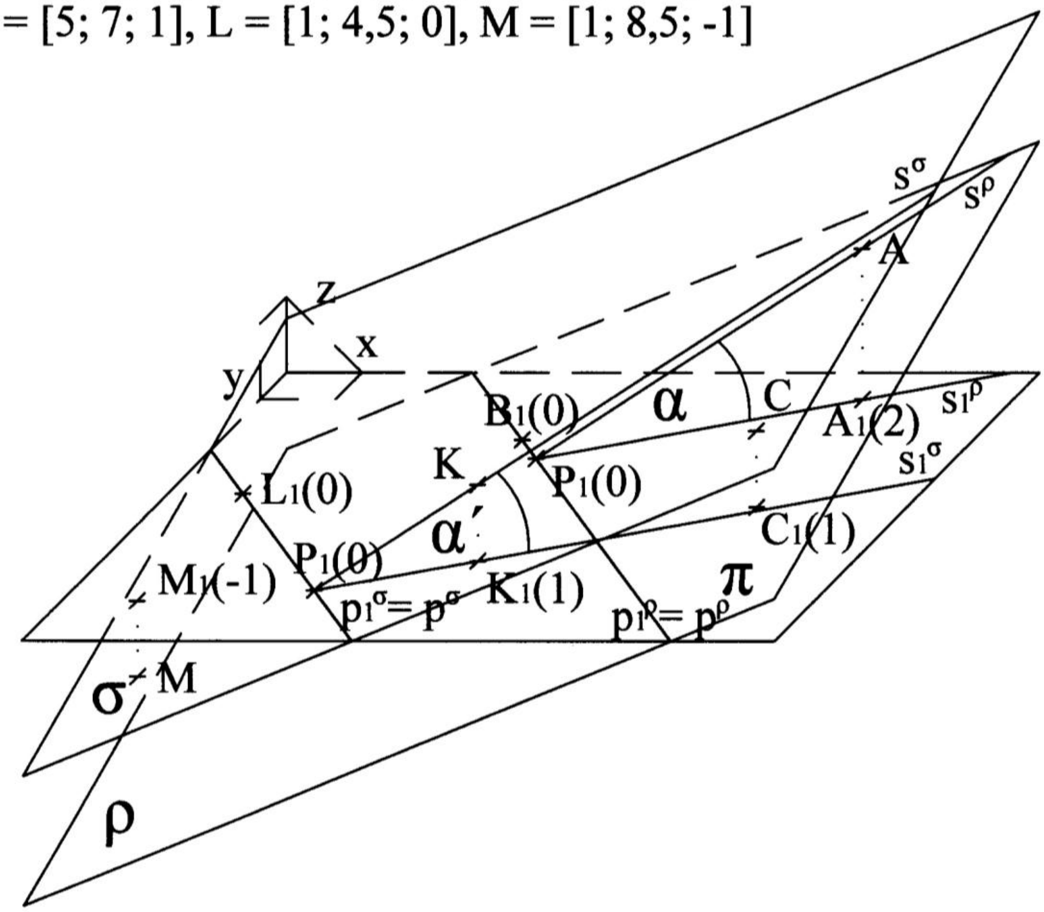


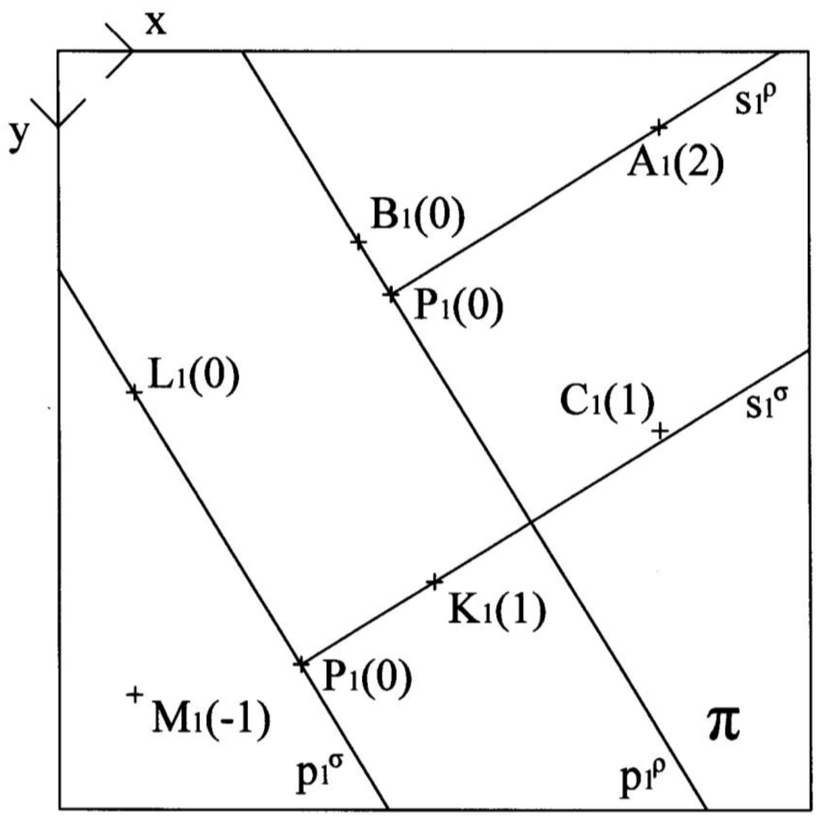
3.3.10 Roviny vzájemně rovnoběžné

$\rho = \leftrightarrow ABC$, $\sigma = \leftrightarrow KLM$

$A = [8; 1; 2]$, $B = [4; 2{,}5; 0]$, $C = [8; 5; 1]$

$K = [5; 7; 1]$, $L = [1; 4{,}5; 0]$, $M = [1; 8{,}5; -1]$



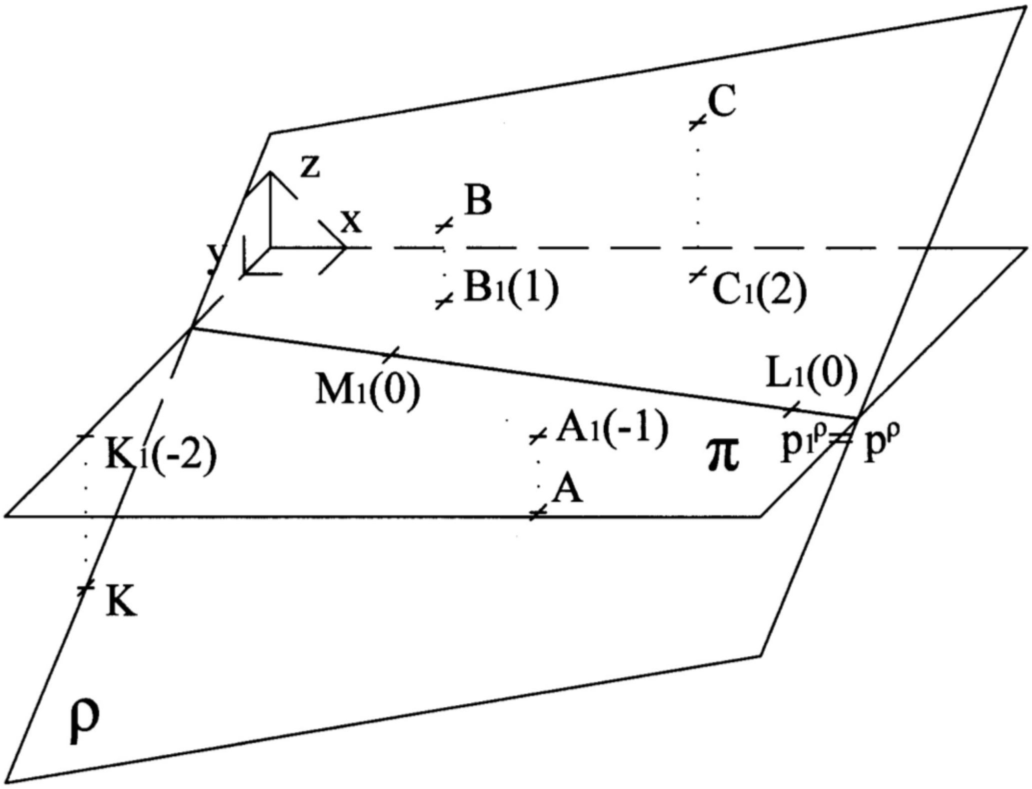


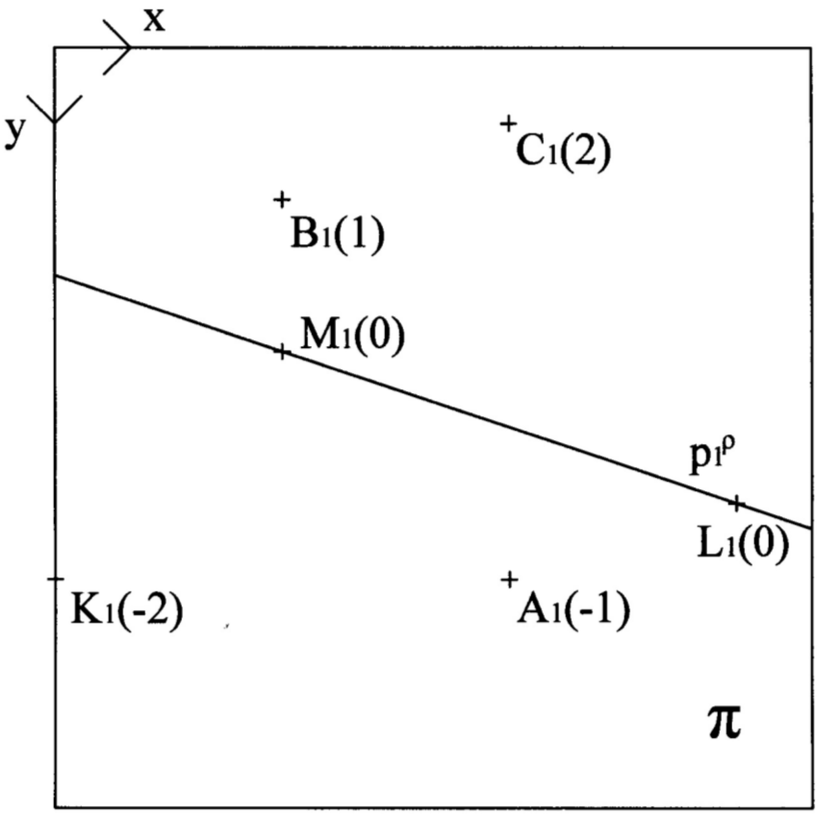
3.3.11 Roviny vzájemně splývající

$\rho = \leftrightarrow ABC$, $\sigma = \leftrightarrow KLM$

A = [6; 7; -1], B = [3; 2; 1], C = [6; 1; 2]

K = [0; 7; -2], L = [9; 6; 0], M = [3; 4; 0]



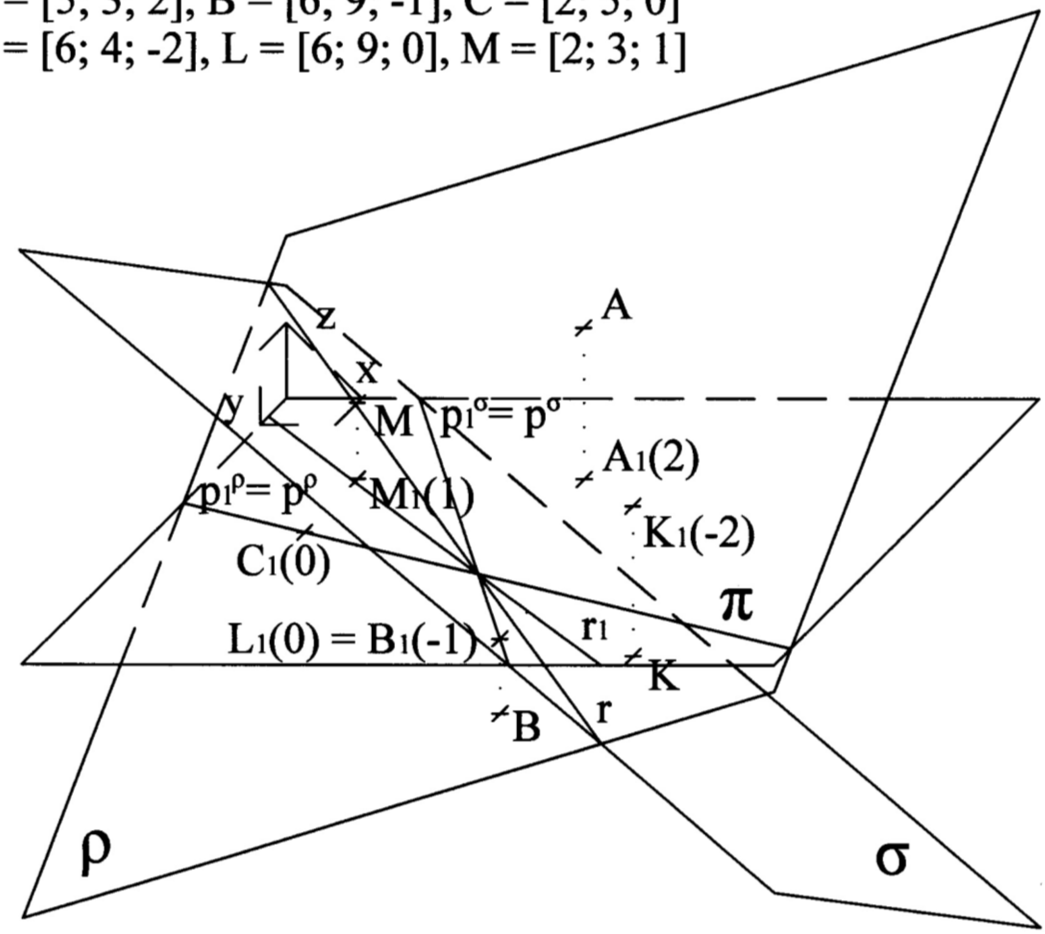


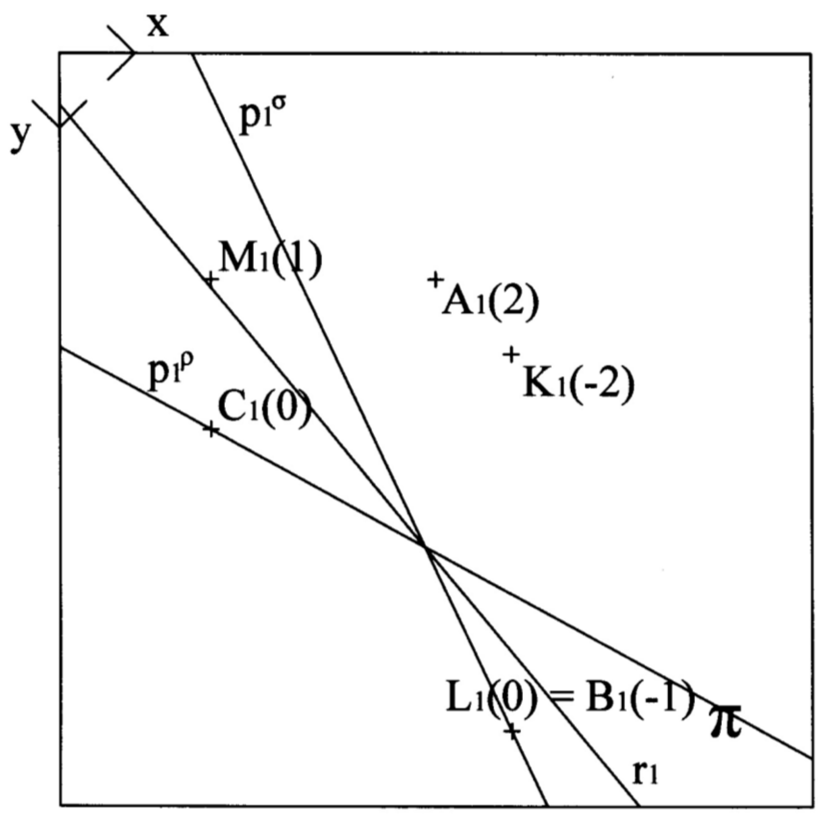
3.3.12 Roviny vzájemně různoběžné

ρ = ↔ABC, σ = ↔KLM

A = [5; 3; 2], B = [6; 9; -1], C = [2; 5; 0]

K = [6; 4; -2], L = [6; 9; 0], M = [2; 3; 1]

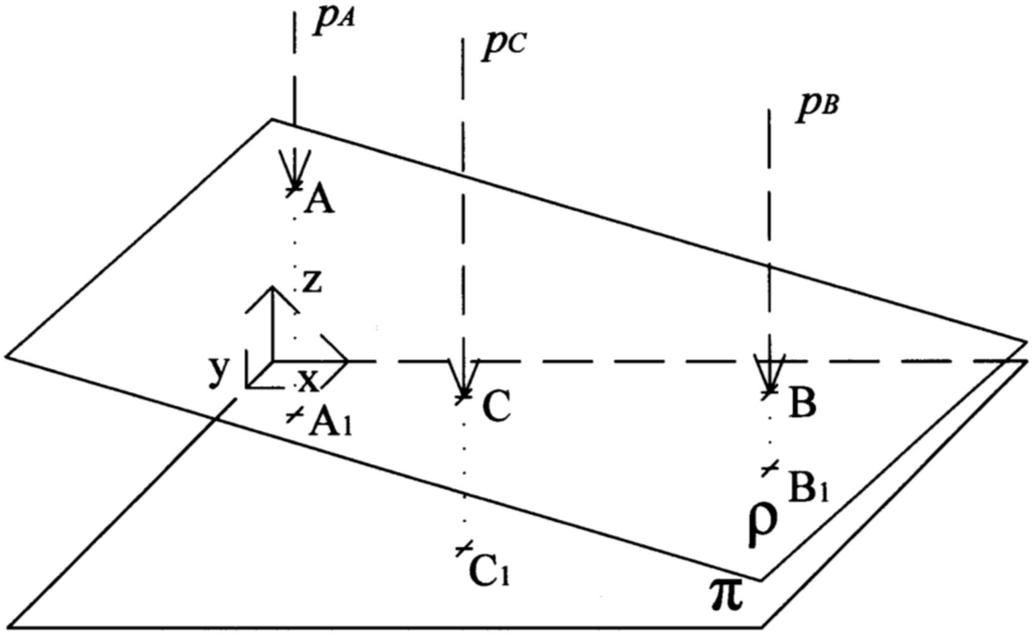


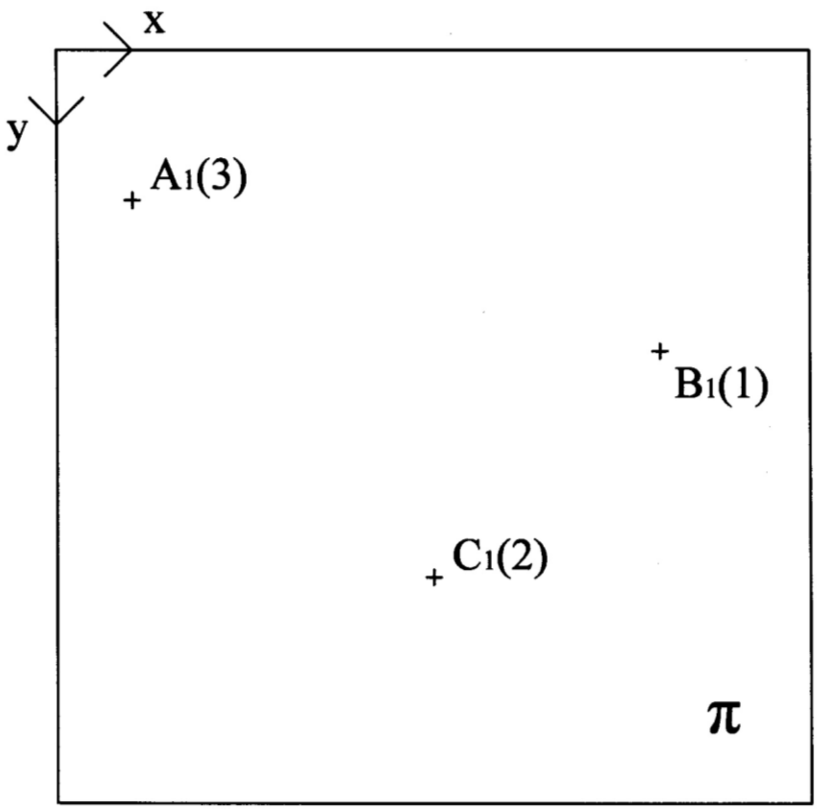


3.3.13 Zobrazení roviny v obecné poloze do průmětny π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [1; 2; 3]$, $B = [8; 4; 1]$, $C = [5; 7; 2]$

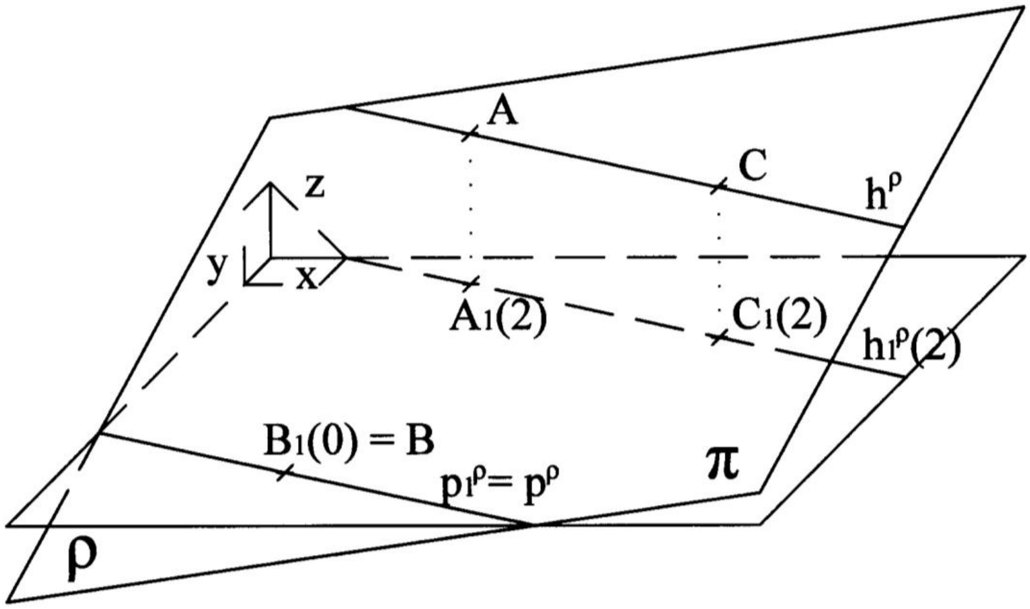


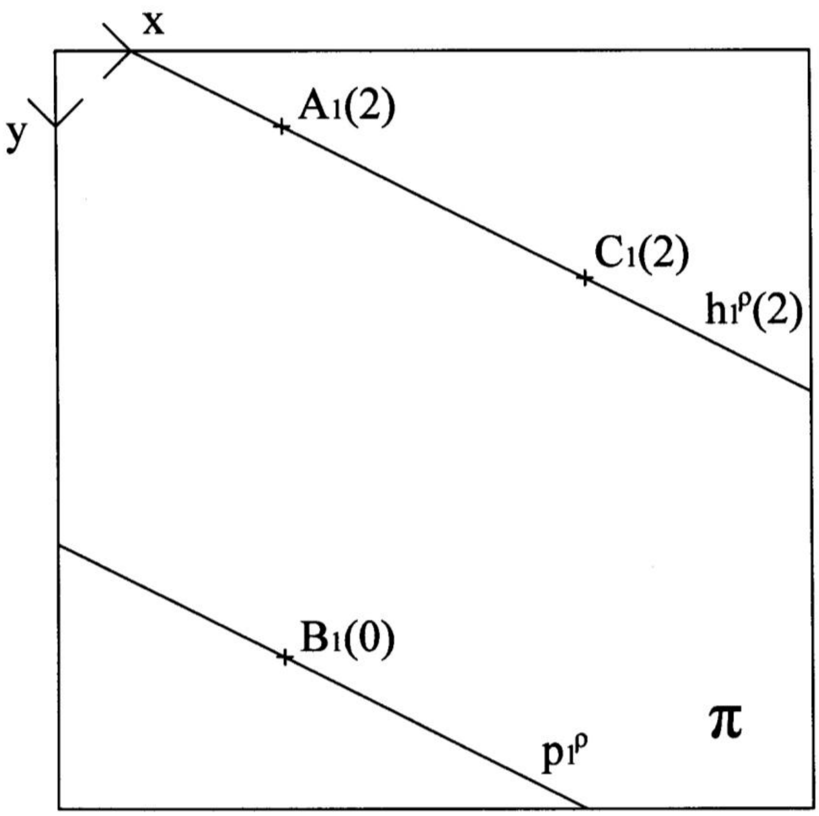


3.3.14 Hlavní přímky roviny ρ

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [3; 1; 2]$, $B = [3; 8; 0]$, $C = [7; 3; 2]$

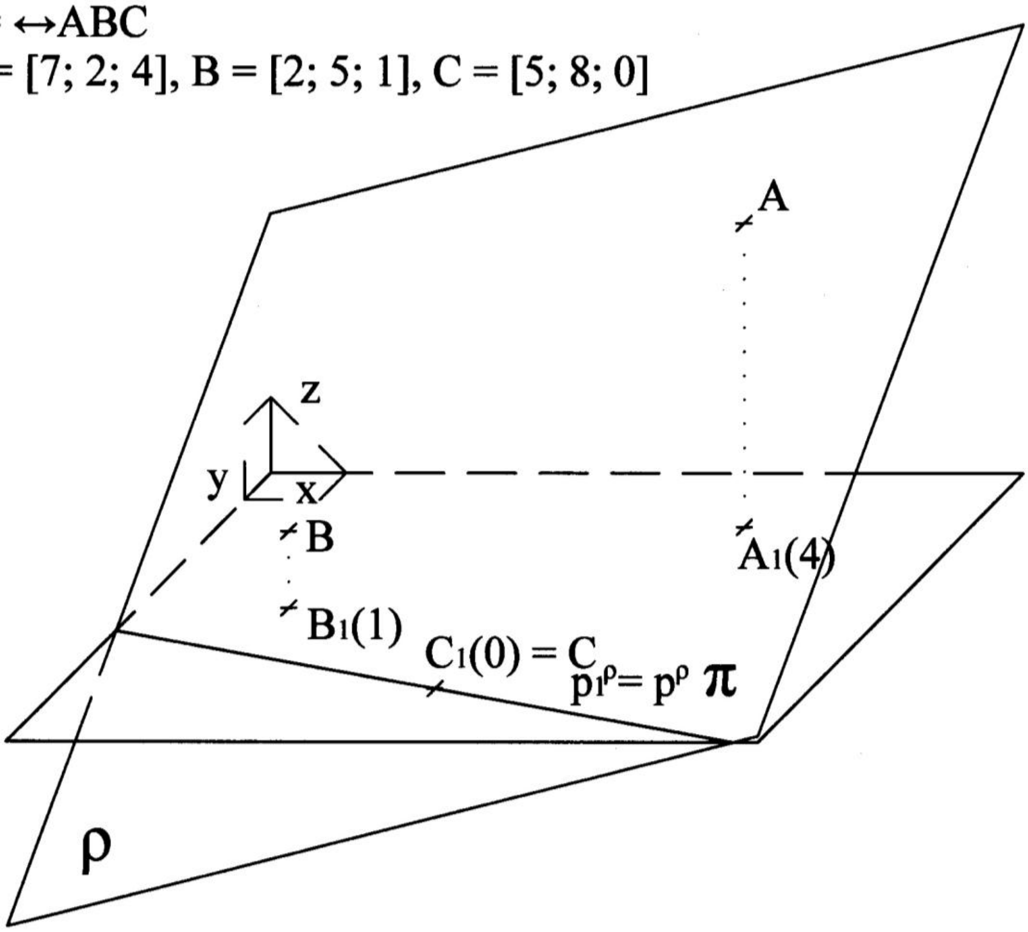


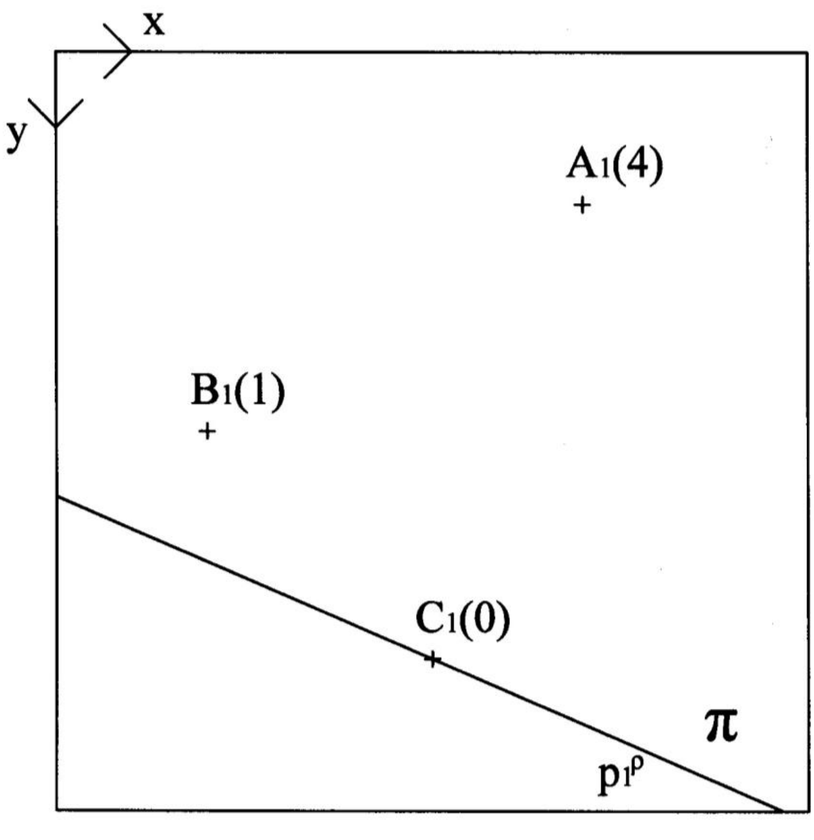


3.3.15 Stopa roviny ρ

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [7; 2; 4]$, $B = [2; 5; 1]$, $C = [5; 8; 0]$

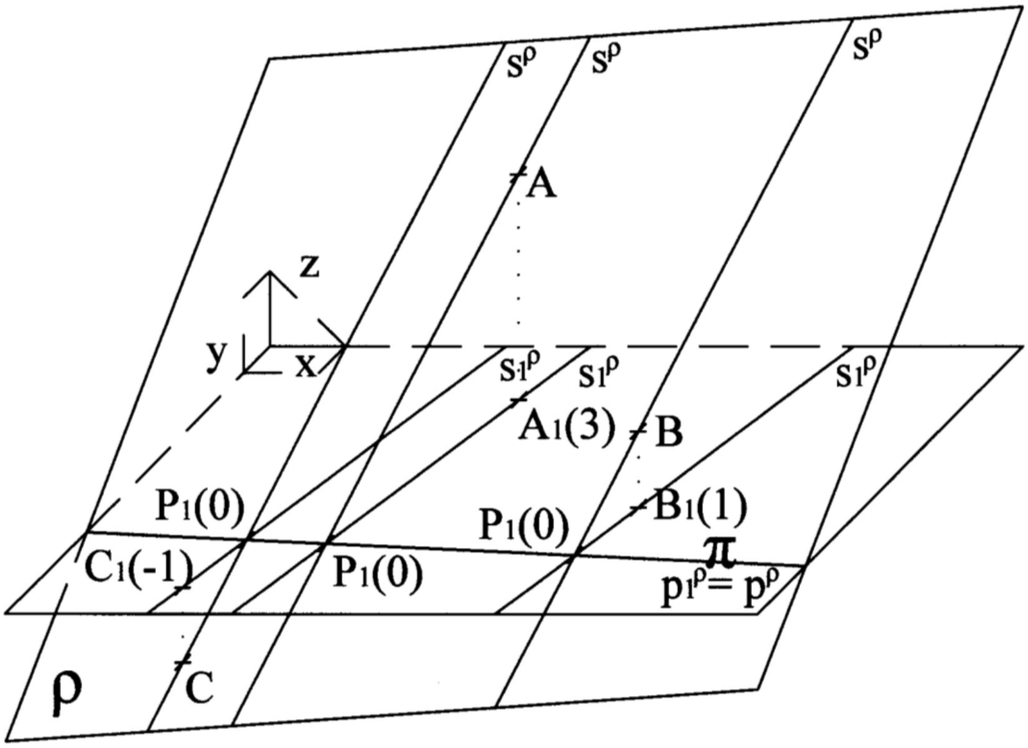


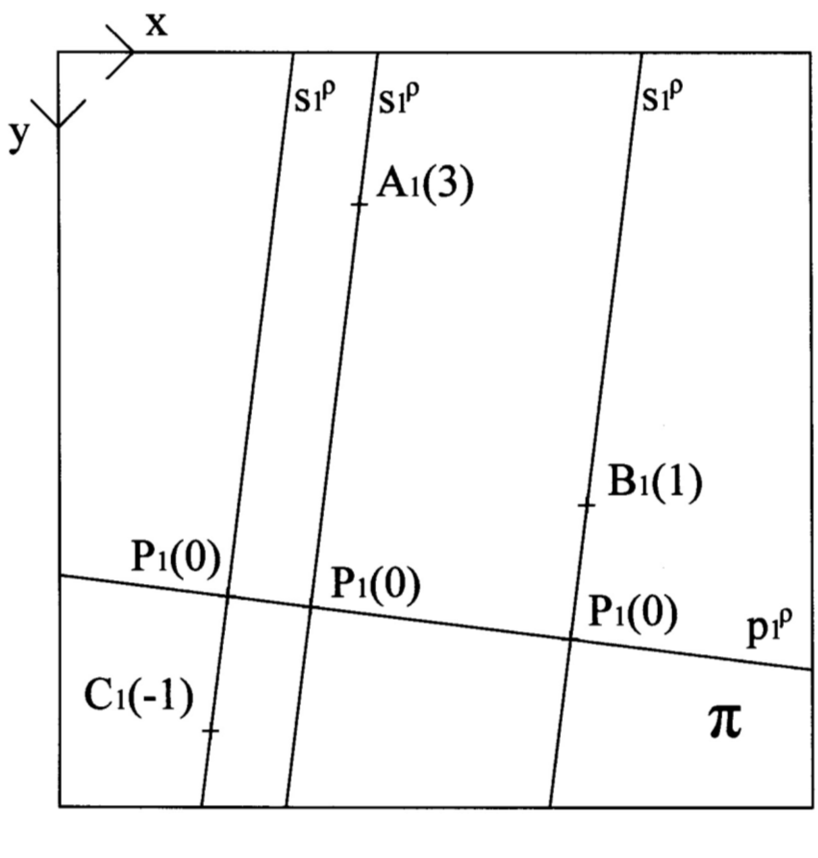


3.3.16 Spádové přímky roviny ρ

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [4; 2; 3]$, $B = [7; 6; 1]$, $C = [2; 9; -1]$

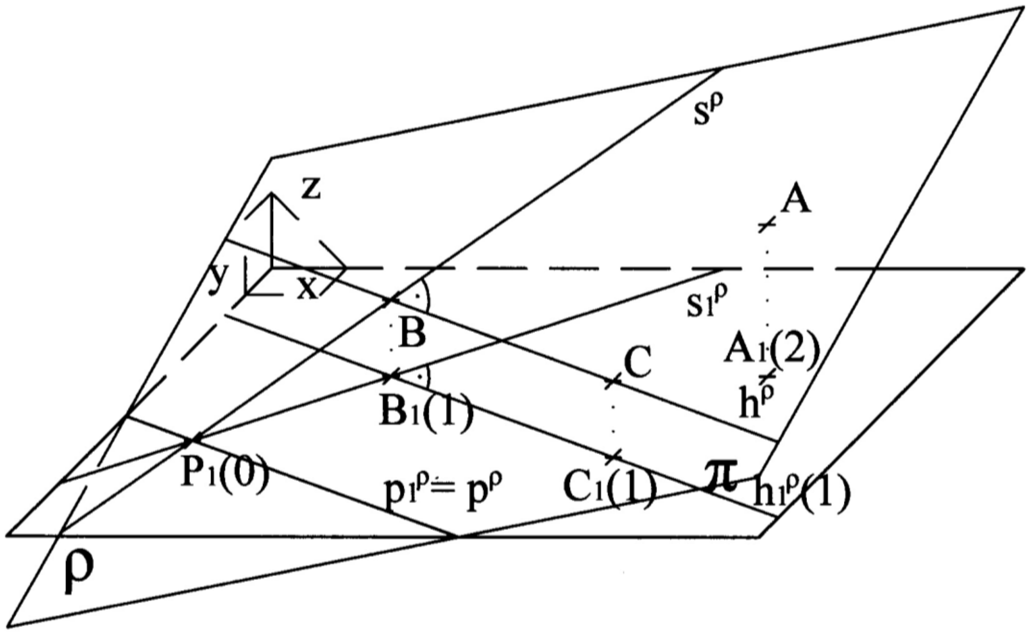


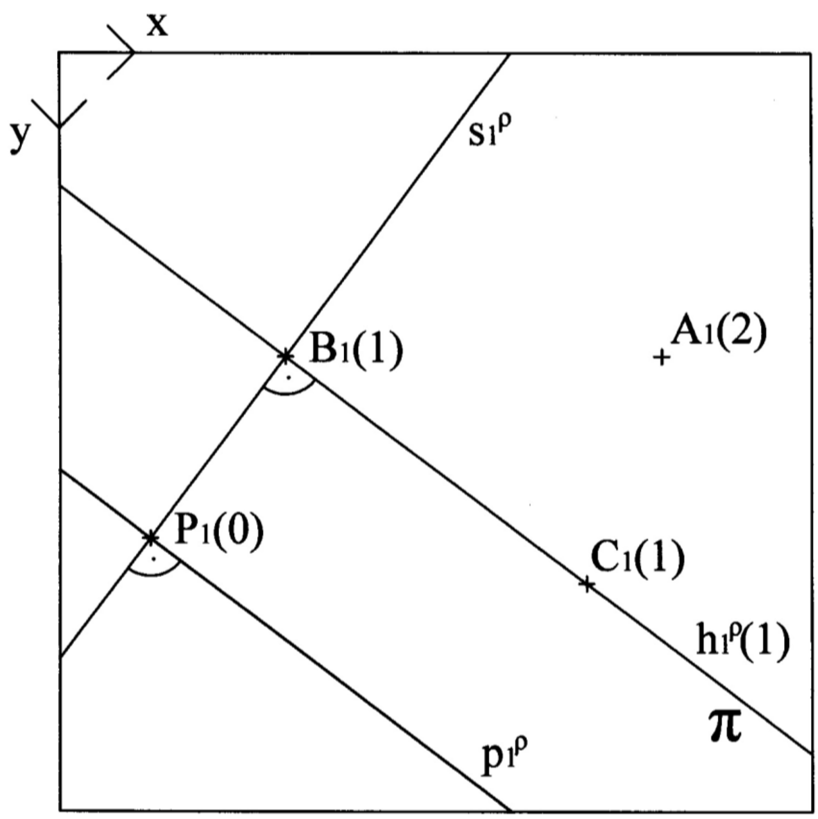


3.3.17 Zobrazování kolmosti dvou přímek do průmětny π

$\rho = \leftrightarrow ABC$

$A = [8; 4; 2]$, $B = [3; 4; 1]$, $C = [7; 7; 1]$





◆ 4 Základní úlohy

➔ 4.1 Polohové úlohy

Polohové úlohy se týkají vzájemné polohy bodů, přímek a rovin.

Mezi základní polohové úlohy patří:

- daným bodem vést k dané přímce rovnoběžnou přímku
- daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu
- sestrojit průsečnici dvou daných rovin
- sestrojit průsečík dané přímky s danou rovinou

✓ Daným bodem vést k dané přímce rovnoběžnou přímku

Při řešení úloh, kdy máme daným bodem *K* vést k dané přímce *m*, *m* = *AB*, rovnoběžnou přímku *n* využíváme vlastností rovnoběžných přímek.

„Přímka, která není promítací, se promítá do přímky.“ [13]
Jestliže přímka *m* je rovnoběžná s přímkou *n*, pak průmět m_1 přímky *m* je rovnoběžný s průmětem n_1 přímky *n* a také přímka *m* ve sklopení *(m)* je rovnoběžná s přímkou *n* ve sklopení *(n)*.

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1
2. sestrojení průmětu K_1
3. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1
4. sestrojení bodu *A* ve sklopení *(A)* – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *A*
5. sestrojení bodu *B* ve sklopení *(B)* – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *B*
6. sestrojení přímky *m* ve sklopení *(m)* – spojíme body *A, B* ve sklopení *(A), (B)*
7. sestrojení průmětu n_1 – průmětem K_1 vedeme přímku rovnoběžnou s průmětem m_1
8. sestrojení bodu *K* ve sklopení *(K)* – průmětem K_1 vedeme kolmici na průmět n_1, a na ní naneseme z-ovou souřadnici bodu *K*
9. sestrojení přímky *n* ve sklopení *(n)* – bodem *K* ve sklopení *(K)* vedeme rovnoběžku s přímkou *m* ve sklopení *(m)*

OBRÁZEK (4.1.1)
Daným bodem K vedená přímka n rovnoběžná s danou přímkou m

✓ Daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu

V případech řešení úloh, kdy máme daným bodem *K* vést k dané rovině ρ rovnoběžnou rovinu σ, převádíme rovnoběžnost dvou rovin na rovnoběžnost dvou přímek.

„Dvě roviny, z nichž žádná není promítací ani hlavní, jsou rovnoběžné právě tehdy, jestliže jejich spádové přímky jsou rovnoběžné. Tím je kritérium rovnoběžnosti dvou rovin převedeno na kritérium rovnoběžnosti dvou přímek.“ [14]

---

[13] DRS, L. *Deskriptivní geometrie*. Praha: Prometneus, 1994, s. 25
[14] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL, 1965, s. 131

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopa roviny p_1^ρ roviny ρ a průmět Z_1 bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení průmětu K_1
3. sestrojení spádové přímky s_1^ρ - průmětem Z_1 vedeme kolmici ke stopě roviny p_1^ρ
4. sestrojení bodu Z ve sklopení (Z) – průmětem Z_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^ρ a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu Z
5. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^ρ a spádové přímky s_1^ρ
6. sestrojení spádové přímky s_1^ρ ve sklopení (s_1^ρ) – bodem Z ve sklopení (Z) a stopníkem $P_1(0)$ sestrojíme spádovou přímku s_1^ρ ve sklopení (s_1^ρ)
7. sestrojení spádové přímky s_1^σ - průmětem K_1 vedeme rovnoběžku se spádovou přímkou s_1^ρ
8. sestrojení bodu K ve sklopení (K) – průmětem K_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^ρ a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu K
9. sestrojení spádové přímky s_1^σ ve sklopení (s_1^σ) – bodem K ve sklopení (K) vedeme rovnoběžku se spádovou přímkou s_1^ρ ve sklopení (s_1^ρ)
10. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík spádové přímky s_1^σ a spádové přímky s_1^σ ve sklopení (s_1^σ)
11. sestrojení stopy roviny p_1^σ – stopníkem $P_1(0)$ vedeme rovnoběžku se stopou roviny p_1^ρ

OBRÁZEK (4.1.2)
Daným bodem K vedená rovina σ rovnoběžná s danou rovinou ρ

✓ Sestrojit průsečnici daných dvou rovin

Při řešení úloh, kdy máme sestrojit průsečnici r daných dvou rovin ρ, σ, využíváme znalosti, že průsečnice r je přímka, která leží v obou daných rovinách.

„Různoběžné roviny mají společnou přímku, tzv. průsečnici dvou rovin Sestrojíme ji spojením dvou bodů, které jsou společné oběma rovinám. Tyto body získáme jako průsečíky hlavních přímek daných rovin se stejnými kótami.“ [15]

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopy roviny p_1^ρ roviny ρ a průmětu Z_1 bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení roviny σ (stopy roviny p_1^σ roviny σ a průmětu Z_1' bodu Z' ležícího v rovině σ)
3. sestrojení průmětu R_1 – průmět R_1 je průsečík stopy roviny p_1^ρ a stopy roviny p_1^σ
4. sestrojení hlavní přímky h_1^ρ – průmětem Z_1 vedeme přímku rovnoběžnou se stopou roviny p_1^ρ
5. sestrojení spádové přímky s_1^σ - průmětem Z_1' vedeme kolmici ke stopě roviny p_1^σ
6. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^σ a spádové přímky s_1^σ
7. sestrojení bodu Z' ve sklopení (Z') – průmětem Z_1' vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^σ a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu Z'
8. sestrojení spádové přímky s_1^σ ve sklopení (s_1^σ) – bodem Z' ve sklopení (Z) a stopníkem $P1(0)$ sestrojíme spádovou přímku s_1^σ ve sklopení (s_1^σ)
9. sestrojení hlavní přímky h_1^σ – průmětem Z_1' vedeme přímku rovnoběžnou se stopou roviny p_1^σ
10. sestrojení hlavní přímky h_1^σ stejné výšky jako u hlavní přímky h_1^ρ – stupňováním spádové přímky s_1^σ roviny σ najdeme bod o stejné kótě, jako má hlavní přímka h_1^ρ a tímto bodem povedeme rovnoběžku se stopou roviny p_1^σ.
11. sestrojení průmětu S_1 – průmět S_1 je průsečík hlavních přímek h_1^ρ a h_1^σ
o stejné výšce
12. sestrojení průmětu r_1 průsečnice r – průměty R_1 a S_1 vedeme přímku r_1

[15] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, 1987, s. 29

OBRÁZEK (4.1.3)
Průsečnice r daných dvou rovin ρ a σ

✓ Sestrojit průsečík dané přímky s danou rovinou

Při řešení úloh, kdy máme sestrojit průsečík R dané přímky m s danou rovinou ρ, užíváme krycí přímku q přímky m.

„Průsečík přímky s rovinou určujeme pomocí krycí přímky. Krycí přímka je průsečnice q promítací roviny λ obecné přímky m s obecnou rovinou ρ. Přímka m i průsečnice q leží v téže promítací rovině λ, proto se jejich průměty kryjí ($m_1 = q_1 = \lambda_1$). O vzájemné poloze m a q, a tím i ρ rozhodujeme ze sklopené polohy společné promítací roviny λ do průmětny π.“ [16]

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopy roviny p_1^ρ roviny ρ a průmětu Z_1 bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení průmětů K_1, L_1
3. sestrojení průmětu m_1 – průměty K_1, L_1 vedeme přímku m_1
4. sestrojení bodu K ve sklopení (K) – průmětem K_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu K
5. sestrojení bodu L ve sklopení (L) – průmětem L_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu L
6. sestrojení přímky m ve sklopení (m) – spojíme body K, L ve sklopení (K), (L)
7. sestrojení průmětu q_1 krycí přímky q – průmět q_1 je totožný s průmětem m_1
8. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^ρ a průmětu q_1
9. sestrojení hl. přímky h_1^ρ – průmětem Z_1 vedeme přímku h_1^ρ rovnoběžnou se stopou roviny p_1^ρ
10. sestrojení průmětu X_1 – průmět X_1 je průsečíkem průmětu hlavní přímky h_1^ρ a průmětu q_1
11. sestrojení bodu X ve sklopení (X) – průmětem X_1 vedeme kolmici na přímku q_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici hlavní přímky h_1^ρ
12. sestrojení přímky q ve sklopení (q) – stopníkem $P_1(0)$ bodem X ve sklopení (X) vedeme přímku q
13. sestrojení bodu R ve sklopení (R) – bod R ve sklopení (R) je průsečíkem přímky q ve sklopení (q) a přímky m ve sklopení (m)
14. sestrojení průmětu R_1 – bodem R ve sklopení (R) vedeme kolmici na průmět q_1

OBRÁZEK (4.1.4)
Průsečík R dané přímky m s danou rovinou ρ

✓ Viditelnost

„Pro dosažení větší názornosti při zobrazování geometrických útvarů užíváme pojmu viditelnosti. Vycházíme přitom ze skutečnosti, že neprůhledné blízké objekty zakrývají vzdálenější. Viditelnost tedy úzce souvisí se vzájemnou polohou dvou geometrických útvarů.“ [17]
„Leží-li na promítací přímce jediný bod A, říkáme, že je viditelný. Leží-li na téže promítací přímce dva různé body A, B, je z nich viditelný ten, který je při daném uspořádání vpředu.
Průmětna v kótovaném promítání rozděluje prostor na dva poloprostory. Jeden je označen jako kladný a druhý záporný. Je-li orientace směru promítání zvolena tak, aby kladný smysl byl dán postupem z kladného poloprostoru určeného průmětnou do záporného poloprostoru, pak ze dvou různých bodů A, B téže promítací přímky je viditelný bod s větší kótou.
Máme-li rozhodovat o viditelnosti geometrických objektů nepostupujeme bod po bodu.“ [18]

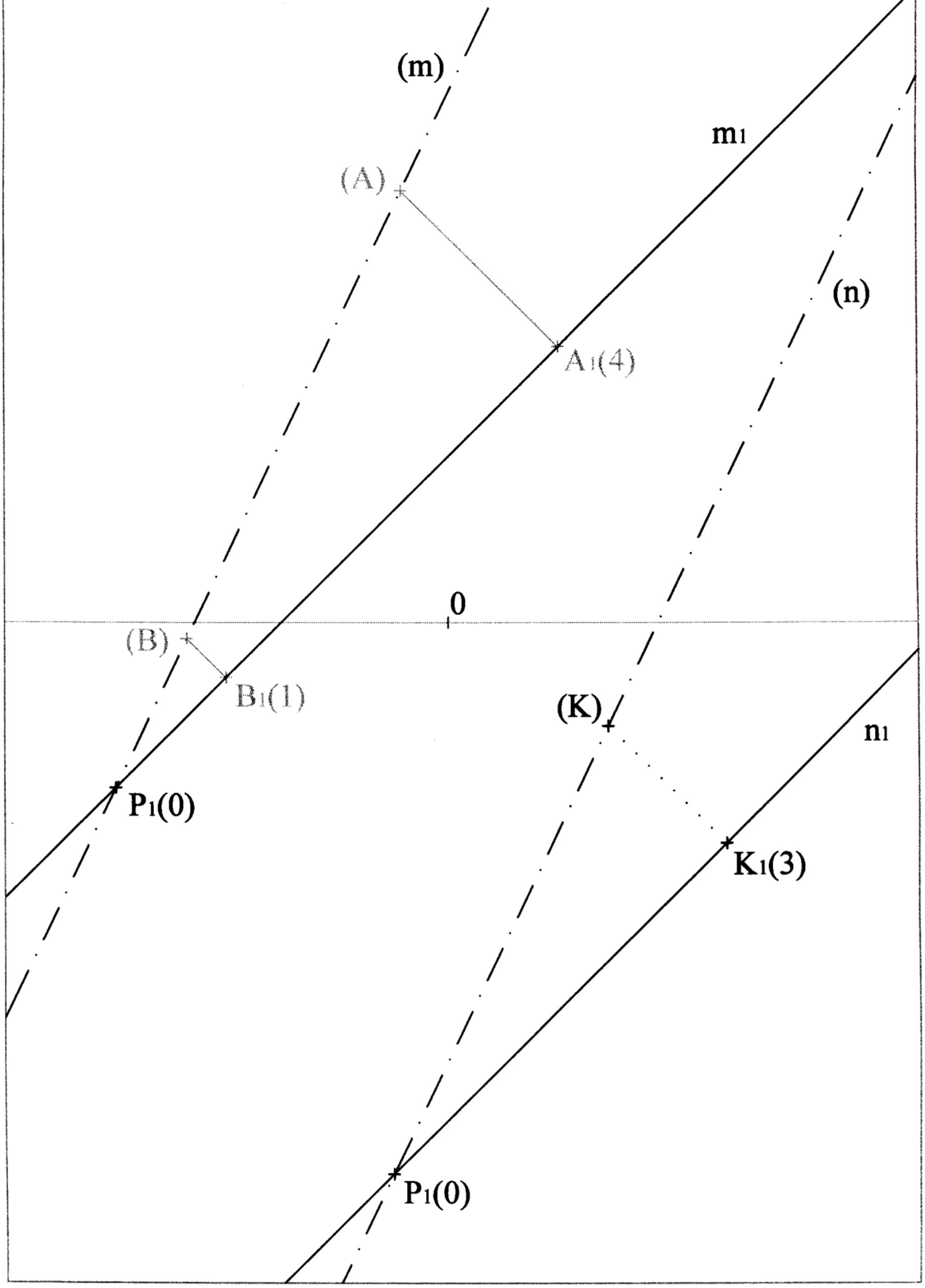
---
[16] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 34
[17] RESTL, Č., DOLEŽAL, J. *Kótované promítání a topografické plochy*. Ostrava: VŠB-TU, 2004, s. 20
[18] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 40

SEZNAM OBRÁZKŮ – POLOHOVÉ ÚLOHY

4.1.1 Přímka n vedená bodem K rovnoběžně s přímkou m

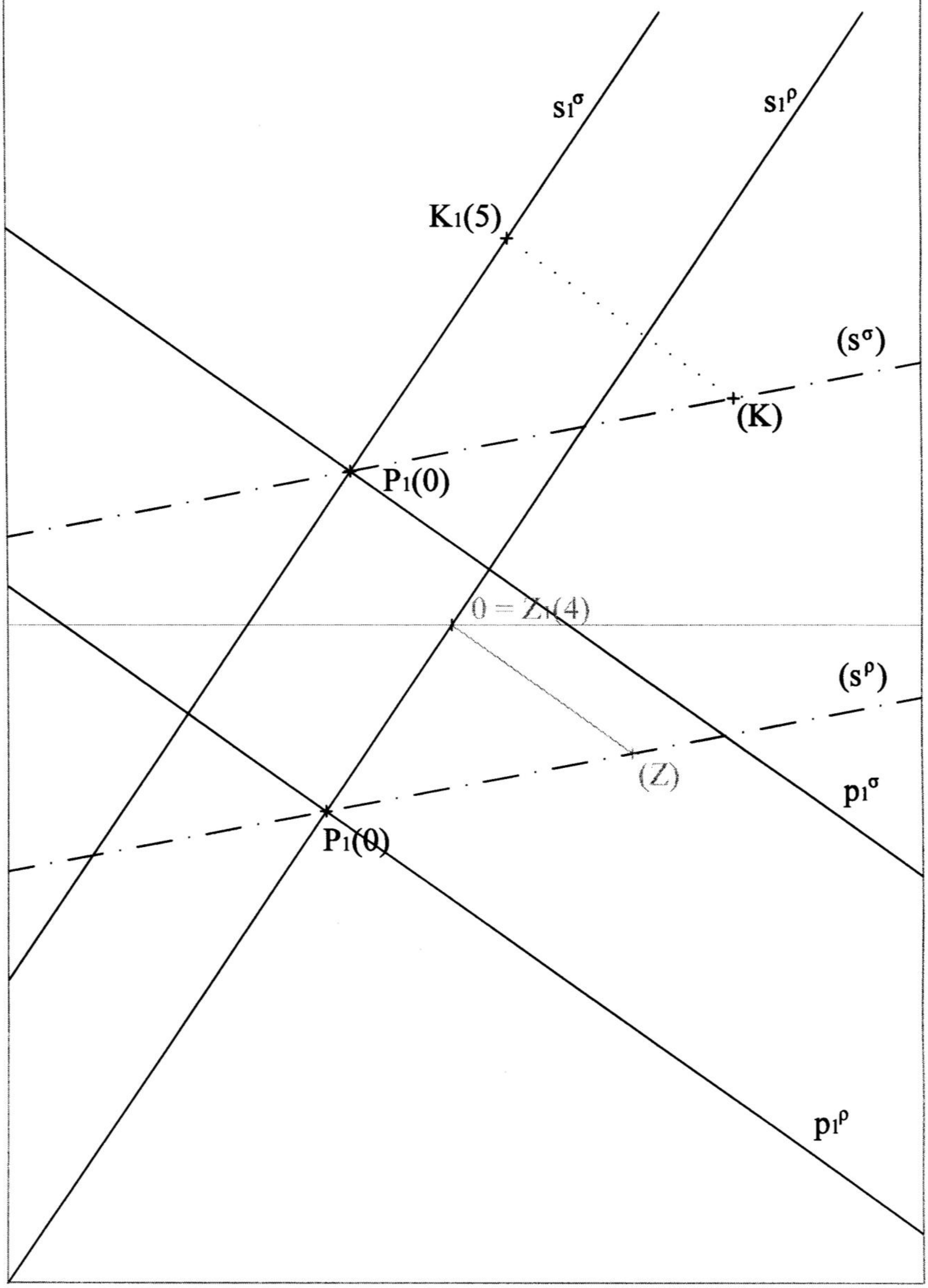
m = ↔AB; K

K = [5; 4; 3], A = [2; 5; 4], B = [-4; 1; 1]



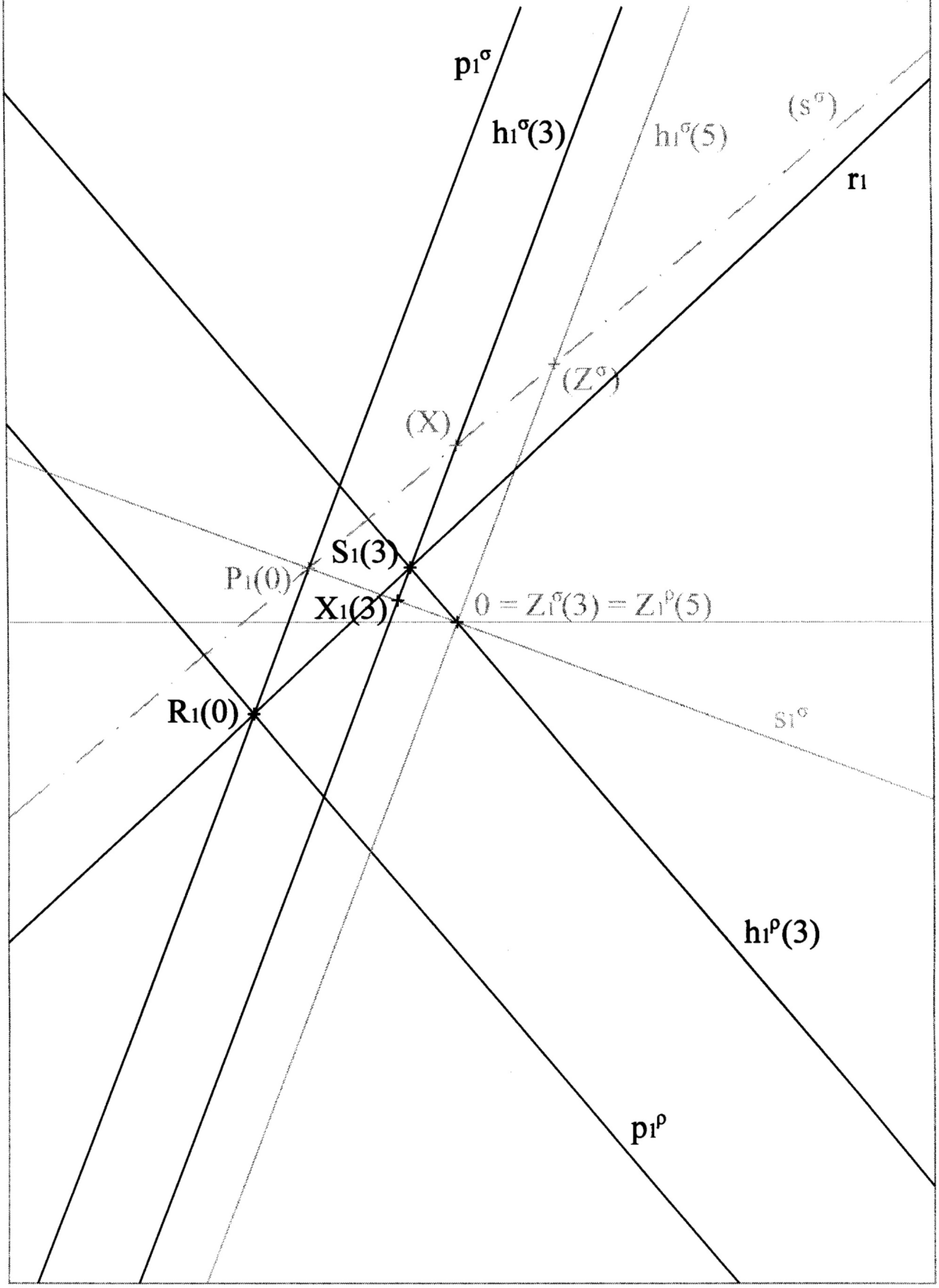
4.1.2 Rovina σ vedená bodem K rovnoběžně s rovinou ρ

$\rho = (-7; 5; 4)$; $K = [1; 7; 5]$



4.1.3 Průsečnice r rovin ρ a σ

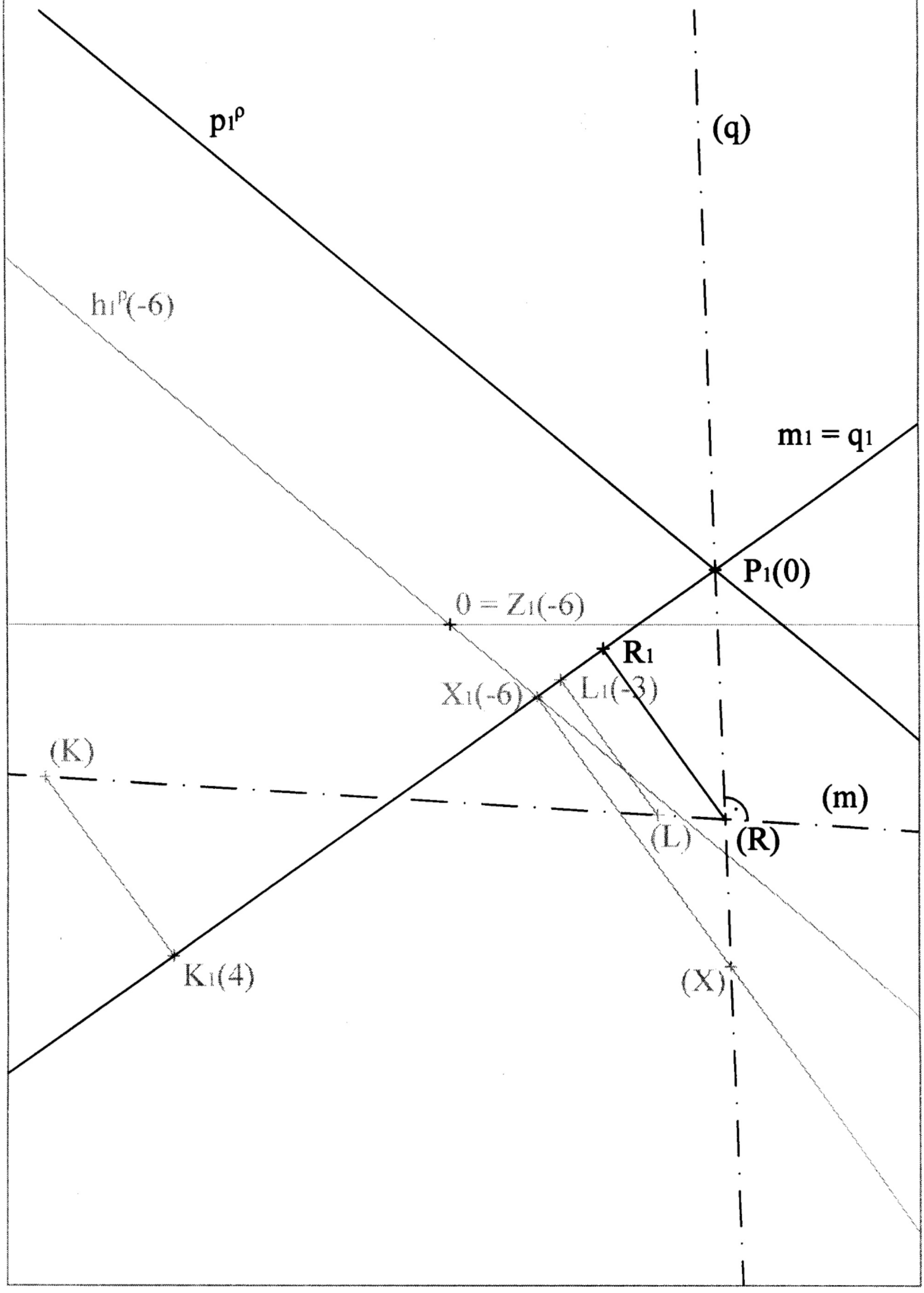
$\rho = (-5; 6; 3)$, $\sigma = (-3; -8; 5)$



4.1.4 Průsečík R přímky m s rovinou ρ

ρ; m = ↔KL

ρ = (6; -5; -6); K = [-5; 6; 4], L = [2; 1; -3]



➔ 4.2 Metrické úlohy

„Metrické úlohy se týkají vzájemné kolmosti přímek a rovin. Vyloučíme přitom promítací a hlavní přímky a roviny, neboť pro ně snadno můžeme kolmé roviny a přímky sestrojit.

Pro ostatní přímky a roviny, které jsou vzájemně kolmé, platí věta: Pravoúhlý průmět přímky kolmé k rovině je kolmý na průměty jejích hlavních přímek, a tedy je rovnoběžný s pravoúhlými průměty jejích spádových přímek.“ [19]

Mezi základní polohové úlohy patří:

- skutečná velikost úsečky
- odchylka přímky od průmětny π
- odchylka roviny od průmětny π
- stupňování přímky
- otáčení roviny
- přímka kolmá k rovině
- rovina kolmá k přímce

✓ Skutečná velikost úsečky (délka úsečky)

„Je-li úsečka rovnoběžná s průmětnou π, délka jejího průmětu je rovna délce úsečky. Je-li úsečka kolmá k průmětně π, jejím průmětem je bod a délku určíme jako absolutní hodnotu rozdílu kót krajních bodů. V ostatních případech je průmět úsečky kratší než délka úsečky.“ [20]

Promítací lichoběžník

„Úsečka m svým kótovaným průmětem m_1 a promítacími přímkami AA_1, BB_1 tvoří lichoběžník AA_1BB_1, který má při vrcholech A_1, B_1 pravé vnitřní úhly. Tento lichoběžník, který leží v promítací rovině úsečky m, se nazývá **promítací lichoběžník úsečky**. Je-li dán kótovaný průmět úsečky a máme-li sestrojit její délku, sklopíme promítací lichoběžník do průmětny π nebo do roviny rovnoběžné s průmětnou π.“ [21]

„Délku úsečky m určíme sklopením promítacího lichoběžníku AA_1BB_1 do průmětny π. Délka základny lichoběžníku $(A)A_1 = |z_A|$ a délka druhé základny $(B)B_1 = |z_B|$. Jedno rameno pravoúhlého lichoběžníku je úsečka A_1B_1 a druhé rameno je délka dané úsečky. Rýsujeme je čerchovanou čarou. Jsou-li obě kóty krajních bodů kladné nebo záporné, sklápíme promítací lichoběžník podobně.“ [22]

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1 – z-ové souřadnice obou bodů mají stejné /kladné, nebo záporné/ znaménko
2. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1

Sestrojení sklopených průmětů bodů – z-ové souřadnice bodů mají stejné /kladné, nebo záporné/ znaménko, proto tyto souřadnice nanášíme na stejnou /námi zvolenou/ stranu.

[19] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL, 1965, s. 134
[20] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: SNTL, 1987, s. 24
[21] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: SNTL, 1987, s. 24
[22] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: SNTL, 1987, s. 24

3. sestrojení bodu *A* ve sklopení *(A)* – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *A*

4. sestrojení bodu *B* ve sklopení *(B)* – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *B*
5. sestrojení přímky *m* ve sklopení *(m)* – spojíme body *A, B* ve sklopení *(A), (B)*

Skutečná velikost úsečky *AB* je vzdálenost bodů *(A), (B).*

OBRÁZEK (4.2.1)
Skutečná velikost úsečky – promítací lichoběžník

Promítací zkřížený lichoběžník

„Mají-li kóty krajních bodů opačná znaménka, bod *A* leží pod průmětnou π a bod *B* nad ní, pak *(A), (B)* leží v opačných polorovinách průmětny π, na které ji rozděluje přímka m_1." [23]
„Při sklápění dvou bodů s opačnými znaménky mluvíme o tzv. **zkříženém lichoběžníku**." [24]

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1 – z-ové souřadnice bodů mají opačná znaménka
2. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1

Sestrojení sklopených průmětů bodů – z-ové souřadnice bodů mají opačná znaménka, proto tyto souřadnice nanášíme na opačné /námi zvolené/ strany.

3. sestrojení bodu *A* ve sklopení *(A)* – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *A*
4. sestrojení bodu *B* ve sklopení *(B)* – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu *B*
5. sestrojení přímky *m* ve sklopení *(m)* – spojíme body A, B ve sklopení *(A), (B)*

Skutečná velikost úsečky *AB* je vzdálenost bodů *(A), (B).*

OBRÁZEK (4.2.2)
Skutečná velikost úsečky – zkřížený lichoběžník

Promítací rozdílový trojúhelník

„V praxi se setkáváme s kótami bodů, které jsou velké. Bodem s menší kótou proložíme rovinu rovnoběžnou s průmětnou π a danou úsečku sklopíme do této roviny. Lichoběžník se změní na pravoúhlý trojúhelník, přičemž délka jeho jedné odvěsny se rovná absolutní hodnotě rozdílu kót krajních bodů, mluvíme o tzv. **rozdílovém trojúhelníku**." [25]

---

[23] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: SNTL, 1987, s. 24
[24] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL, 1965, s. 122
[25] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 24

„Úsečku m sklopíme do roviny, která je rovnoběžná s průmětnou π a prochází bodem A. Délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníku $B_1(B)$ se rovná rozdílu kót $|z_B - z_A|$. Délka přepony je délkou úsečky AB.“ [26]

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1
2. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1

3. sestrojení bodu A ve sklopení (A) – bod A ve sklopení (A) je totožný s bodem A_1, $A_1 = (A)$
4. sestrojení bodu B ve sklopení (B) – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme absolutní hodnotu rozdílu z-ových souřadnic bodů A, B
5. sestrojení přímky m ve sklopení (m) – spojíme bod $A_1 = (A)$ a bod B ve sklopení (B)

Skutečná velikost úsečky AB je vzdálenost bodů $A_1 = (A)$, (B)

OBRÁZEK (4.2.3)
Skutečná velikost úsečky – rozdílový trojúhelník

✓ Odchylka přímky od průmětny π

„Odchylka přímky od průmětny π je velikost úhlu, který přímka svírá se svým pravoúhlým průmětem.“ [27]

„Je to ostrý nebo pravý úhel sevřený průmětem přímky a sklopenou polohou přímky. Průsečík průmětu přímky a její sklopené polohy je bod, ve kterém přímka protíná průmětnu π a nazývá se stopník přímky. Stopník přímky i odchylku přímky od průmětny π určíme sklopením promítací roviny přímky do průmětny π.“ [28]

„Odchylku α přímky m sestrojíme sklopením přímky m do průmětny π. Hledanou odchylkou je úhel α při vrcholu $P_1(0)$ mezi rameny (m), m_1.“ [29]

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1
2. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1
3. sestrojení bodu A ve sklopení (A) – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu A
4. sestrojení bodu B ve sklopení (B) – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu B
5. sestrojení přímky m ve sklopení (m) – spojíme body A, B ve sklopení (A), (B)
6. sestrojení průmětu P_1 – průmět P_1 je průsečík průmětu m_1 a přímky m ve sklopení (m)
7. sestrojení odchylky α – odchylka α je úhel při vrcholu P_1 sevřený rameny m_1, (m)

OBRÁZEK (4.2.4)
Odchylka přímky od průmětny π

[26] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 24
[27] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 25
[28] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 23
[29] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 25

✓ **Odchylka roviny od průmětny π**

„Odchylka roviny od průmětny π je rovna odchylce její spádové přímky od průmětny π. Spádová přímka má nejmenší interval ze všech přímek roviny, neboť její spád je ze všech přímek roviny největší. Spádem roviny rozumíme spád její spádové přímky.“ [30]

„Odchylka roviny od průmětny π je velikost úhlu, který svírá spádová přímka se svým průmětem. Spád roviny rovnoběžné s průmětnou π je nulový.“ [31]

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopa roviny p_1^{ρ} roviny ρ a průmět Z_1bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení spádové přímky s_1^{ρ} - průmětem Z_1 vedeme kolmici ke stopě roviny p_1^{ρ}
3. sestrojení bodu Z ve sklopení (Z) – průmětem Z_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^{ρ} a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu Z
4. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^{ρ} a spádové přímky s_1^{ρ}
5. sestrojení přímky s^{ρ} ve sklopení (s^{ρ}) – spojíme body $P_1(0)$ a Z ve sklopení (Z)
6. sestrojení odchylky α – odchylka α je úhel při vrcholu $P_1(0)$ sevřený rameny s_1^{ρ}, (s^{ρ})

OBRÁZEK (4.2.5)
Odchylka roviny od průmětny π

✓ **Stupňování přímky**

„Stupňováním přímky rozumíme určení bodů na přímce, jež mají celistvé kóty.
Máme dva body A a B, jejich průměty jsou A_1, B_1 a kóty z_A a z_B. Absolutní hodnota rozdílu kót, tj. $|z_A - z_B|$ = **ekvidistance – *e***. Vzdálenost průmětů A_1B_1 = **interval – *i***.“ [32]

„Jsou-li dány dva body s jednotkovou ekvidistancí $|z_A - z_B| = 1$, pak vzdálenost i jejich průmětů se nazývá jednotkový interval.“ [33]

„Poměr ekvidistance k intervalu shodný s poměrem jednotky k jednotkovému intervalu (1 : i) se nazývá spád přímky. Spád přímky je dán tangentou odchylky α přímky. Platí tedy: tg α = (1: i).“ [34]

„Spád přímky a její jednotkový interval jsou vzájemně reciproké veličiny – roste-li interval, klesá spád a obráceně.“ [35]

Postup:
1. sestrojení průmětů A_1, B_1
2. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1
3. sestrojení bodu A ve sklopení (A) – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu A
4. sestrojení bodu B ve sklopení (B) – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu B
5. sestrojení přímky m ve sklopení (m) – spojíme body A, B ve sklopení (A), (B)

---

[30] ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL, J. *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod*. Olomouc: UP, 1971, s. 102
[31] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 27
[32] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 24
[33] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 24
[34] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 24
[35] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody*. Praha: ROH, 1971, s. 24

6. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík m_1 a přímky m ve sklopení (m)
7. sestrojení bodu X ve sklopení (X) – přímku kolmou na průmět m_1 přímky m vedenou bodem A rozdělíme na jednotkové díly a zvolíme bod X o výšce 2
8. sestrojení bodu C ve sklopení (C) – sklopený průmět (C) je průsečík přímky vedené bodem X ve sklopení (X) rovnoběžně s průmětem m_1 a přímky m ve sklopení (m)
9. sestrojení průmětu C_1 – bodem C ve sklopení (C) vedeme kolmici k průmětu m_1, hledaný průmět C_1 je průsečík vytvořené kolmice a m_1

Další průměty bodů o celých kótách ležících na přímce m bychom našli obdobným způsobem, jako průmět bodu C. Tomuto postupu říkáme stupňování přímky

OBRÁZEK (4.2.6)
Stupňování přímky

✓ Otáčení roviny

„Často potřebuje znát skutečnou velikost a tvar rovinného útvaru, jehož pravoúhlý průmět je dán. Neleží-li útvar v hlavní rovině /nebo v průmětně π/, pak se pravoúhlým promítáním jeho velikosti i tvar mění. Jde o to, jak ze známého pravoúhlého průmětu útvaru sestrojíme jeho skutečnou velikost.
Tuto úlohu řešíme v případě, kdy rovina, v níž útvar leží, je kolmá k průmětně π. Rovinu sklopíme kolem její stopy roviny do průmětny π a ve sklopené poloze se objeví útvar ve skutečné velikosti i tvaru. Jinak řečeno všechny body roviny /s výjimkou bodů na stopě roviny/ otočíme o 90° kolem její stopy roviny do průmětny π.“ [36]

„Stejného postupu užíváme i v případě, kdy rovina není k průmětně π kolmá. Rovinu opět otočíme kolem její stopy roviny do průmětny π. V tomto případě nehovoříme o sklápění, ale o otáčení. Každý bod roviny, který neleží na její stopě roviny, se otáčí v rovině kolmé k této stopě roviny po kružnici. Tato kružnice se nazývá **kružnice otáčení**, její rovina **rovinou otáčení**. **Střed kružnice otáčení** je průsečík stopy roviny dané roviny s rovinou otáčení. Její poloměr se nazývá **poloměr otáčení**.“ [37]

„Při otáčení roviny zůstává každý bod její stopy roviny na místě. Otočíme-li bod A roviny ρ kolem její stopy roviny do průmětny π do bodu A_O, leží body A_OA_1 na téže kolmici ke stopě roviny p_1^ρ. Tato kolmice je průmětem roviny otáčení bodu A a protíná stopu roviny p_1^ρ v bodě P. Poloměr otáčení P_A bodu A je přeponou pravoúhlého trojúhelníka PA_1A.“ [38]

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopa roviny p_1^ρ roviny ρ a průmět Z_1 bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení průmětů A_1, B_1
3. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1
4. sestrojení spádové přímky s_{1A}^ρ – průmětem A_1 vedeme kolmici na stopu roviny p_1^ρ
5. sestrojení stopníku $P_{1A}(0)$ – stopník $P_{1A}(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^ρ a spádové přímky s_{1A}^ρ
6. sestrojení bodu A ve sklopení (A) – průmětem A_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_{1A}^ρ a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu A

[36] ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL. J. *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod*. Olomouc: UP, 1971, s. 104
[37] ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL. J. *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod*. Olomouc: UP, 1971, s. 104
[38] ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL. J. *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod*. Olomouc: UP, 1971, s. 104

7. sestrojení spádové přímky s_{1A}^{ρ} ve sklopení (s_A^{ρ}) - sklopená spádová přímka (s_A^{ρ}) vznikne spojením bodu A ve sklopení (A) a stopníku $P_{1A}(0)$
8. sestrojení spádové přímky s_{1B}^{ρ} – průmětem B_1 vedeme kolmici na stopu roviny p_1^{ρ}
9. sestrojení stopníku $P_{1B}(0)$ – stopník P_{1B} je průsečík stopy roviny p_1^{ρ} a spádové přímky s_{1B}^{ρ}
10. sestrojení bodu B ve sklopení (B) – průmětem B_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_{1B}^{ρ} a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu B
11. sestrojení spádové přímky s_{1B}^{ρ} ve sklopení (s_B^{ρ}) – sklopená spádová přímka (s_B^{ρ}) vznikne spojením bodu B ve sklopení (B) a průmětu $P_{1B}(0)$
12. sestrojení bodu A v otočení A_O – na spádovou přímku s_{1A}^{ρ} naneseme od stopníku $P_{1A}(0)$ vzdálenost $|P_{1A}(A)|$
13. sestrojení bodu B v otočení B_O – na spádovou přímku s_{1B}^{ρ} naneseme od stopníku $P_{1B}(0)$ vzdálenost $|P_{1B}(B)|$
14. sestrojení přímky m v otočení m_O – spojíme body A, B v otočení A_O, B_O

OBRÁZEK (4.2.7)
Otáčení roviny

✓ Přímka kolmá k rovině

„Bodem prochází jediná přímka kolmá k rovině. Aby přímka byla kolmá k rovině, musí být kolmá ke dvěma různoběžkám, které leží v této rovině. Potom je přímka kolmá ke všem přímkám roviny, tedy i k hlavním a spádovým přímkám.“ [39]

„Předpokládejme, že rovina ρ není rovnoběžná ani kolmá na průmětnu π. Pravý úhel, který svírá kolmice s hlavní přímkou roviny ρ, má jedno rameno /které leží na hlavní přímce/ rovnoběžné s průmětnou π. Druhé rameno /které leží na kolmici/ je různoběžné s průmětnou π, proto se tento pravý úhel promítá jako pravý. To znamená, že průmět kolmice je kolmý k průmětům hlavních přímek a ke stopě roviny.
Spádové přímky, které jsou kolmé k hlavní přímce, se také promítají jako kolmice ke stopě roviny, a proto průmět kolmice na rovinu je totožný s průmětem jedné její spádové přímky $k_1 = s_1$. Kolmice a spádová přímka jsou navzájem kolmé a mají společnou promítací rovinu.“ [40]

Postup:
1. sestrojení roviny ρ (stopa roviny p_1^{ρ} a průmět Z_1 bodu Z ležícího v rovině ρ)
2. sestrojení spádové přímky s_1^{ρ} - průmětem Z_1 vedeme kolmici na stopu roviny p_1^{ρ}
3. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík stopy roviny p_1^{ρ} a spádové přímky s_1^{ρ}
4. sestrojení bodu Z ve sklopení (Z) – průmětem Z_1 vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^{ρ} a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu M
5. sestrojení spádové přímky s_1^{ρ} ve sklopení (s^{ρ}) – spádová přímka s_1^{ρ} vznikne spojením bodu Z ve sklopení (Z) a stopníku $P_1(0)$
6. sestrojení přímky k ve sklopení (k) – bodem Z ve sklopení (Z) vedeme kolmici na spádovou přímku s_1^{ρ} ve sklopení
7. sestrojení průmětu k_1 – průmět k_1 je shodný se spádovou přímkou s_1^{ρ}

OBRÁZEK (4.2.8)
Přímka kolmá k rovině

---
[39] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 31
[40] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 31

✓ **Rovina kolmá k přímce**

„Je-li rovina kolmá k přímce, pak obráceně je přímka kolmá k rovině.“ [41]
„Promítací rovina přímky a obsahuje i spádovou přímku roviny ρ. Kolmice daným bodem $A(z)$ na a_1 je $h_1^\rho(z)$. Ta určí na spádové přímce bod A', který má také kótu z. Ve sklopení využijeme toho, že (s) prochází bodem (A') je kolmá k (a). Stopníkem spádové přímky prochází stopa roviny p_1^ρ, a tak rovina ρ je určena stopou a hlavní přímkou.“ [42]

Postup:
1. sestrojení průmětu M_1
2. sestrojení průmětů A_1, B_1
3. sestrojení průmětu m_1 – průmět m_1 vznikne spojením průmětů A_1, B_1
4. sestrojení bodu A ve sklopení (A) – průmětem A_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu A
5. sestrojení bodu B ve sklopení (B) – průmětem B_1 vedeme kolmici na průmět m_1 a na ni naneseme z-ovou souřadnici bodu B

6. sestrojení přímky m ve sklopení (m) – spojíme body A, B ve sklopení (A), (B)
7. sestrojení hlavní přímky h_1^ρ – průmětem M_1 vedeme kolmici na průmět m_1
8. sestrojení průmětu M_1' – průmět M_1' je průsečík průmětu m_1 a hlavní přímky h_1^ρ
9. sestrojení bodu M´ ve sklopení (M') – bod M´ ve sklopení (M') je průsečík přímky m ve sklopení (m) a hlavní přímky h_1^ρ
10. sestrojení spádové přímky s_1^ρ ve sklopení (s^ρ) – bodem M´ ve sklopení (M') vedeme kolmici na přímku m ve sklopení (m)
11. sestrojení stopníku $P_1(0)$ – stopník $P_1(0)$ je průsečík průmětu m_1 a spádové přímky s_1^ρ ve sklopení (s_1^ρ)
12. sestrojení stopy roviny p_1^ρ – stopníkem $P_1(0)$ vedeme kolmici na průmět m_1

OBRÁZEK (4.2.9)
Rovina kolmá k přímce

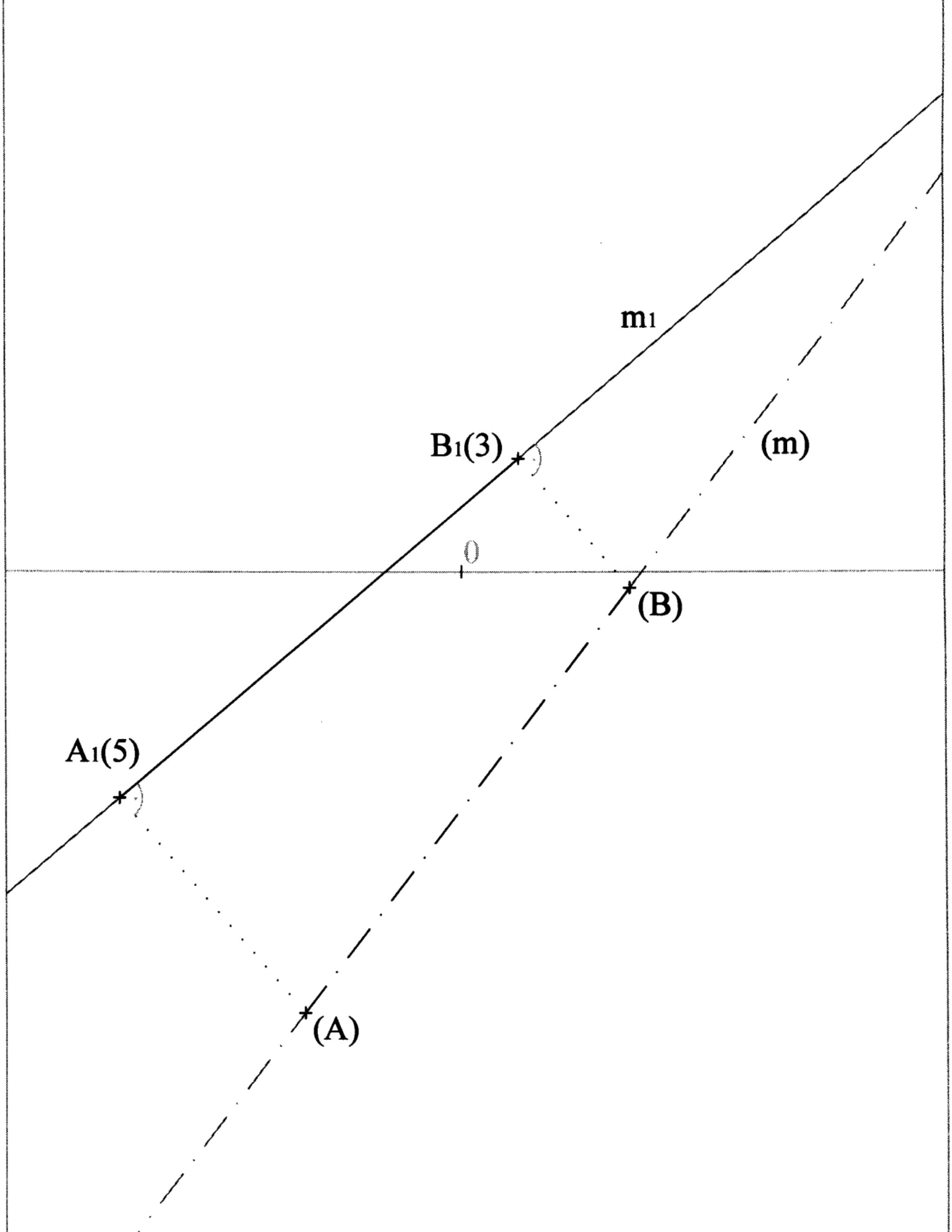
[41] RESTL, Č., DOLEŽAL, J. *Kótované promítání a topografické plochy*. Ostrava: VŠB-TU, 2004. s, 22
[42] TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních*. Praha: STNL, s. 32

SEZNAM OBRÁZKŮ – METRICKÉ ÚLOHY

4.2.1 Skutečná velikost úsečky - promítací lichoběžník

m = ↔AB

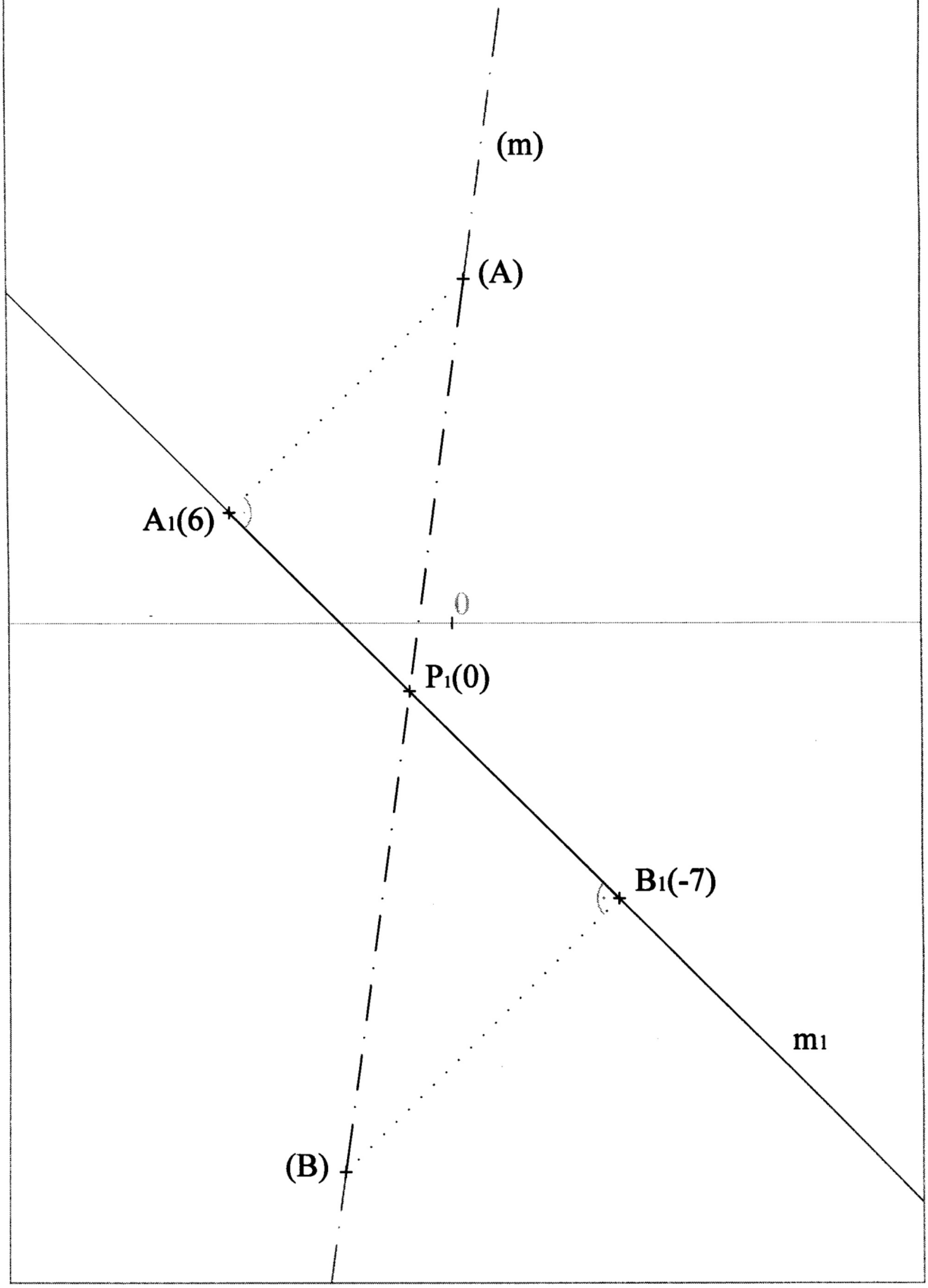
A = [-6; 4; 5], B = [1; -2; 3]



4.2.2 Skutečná velikost úsečky - zkřížený lichoběžník

m = ↔AB

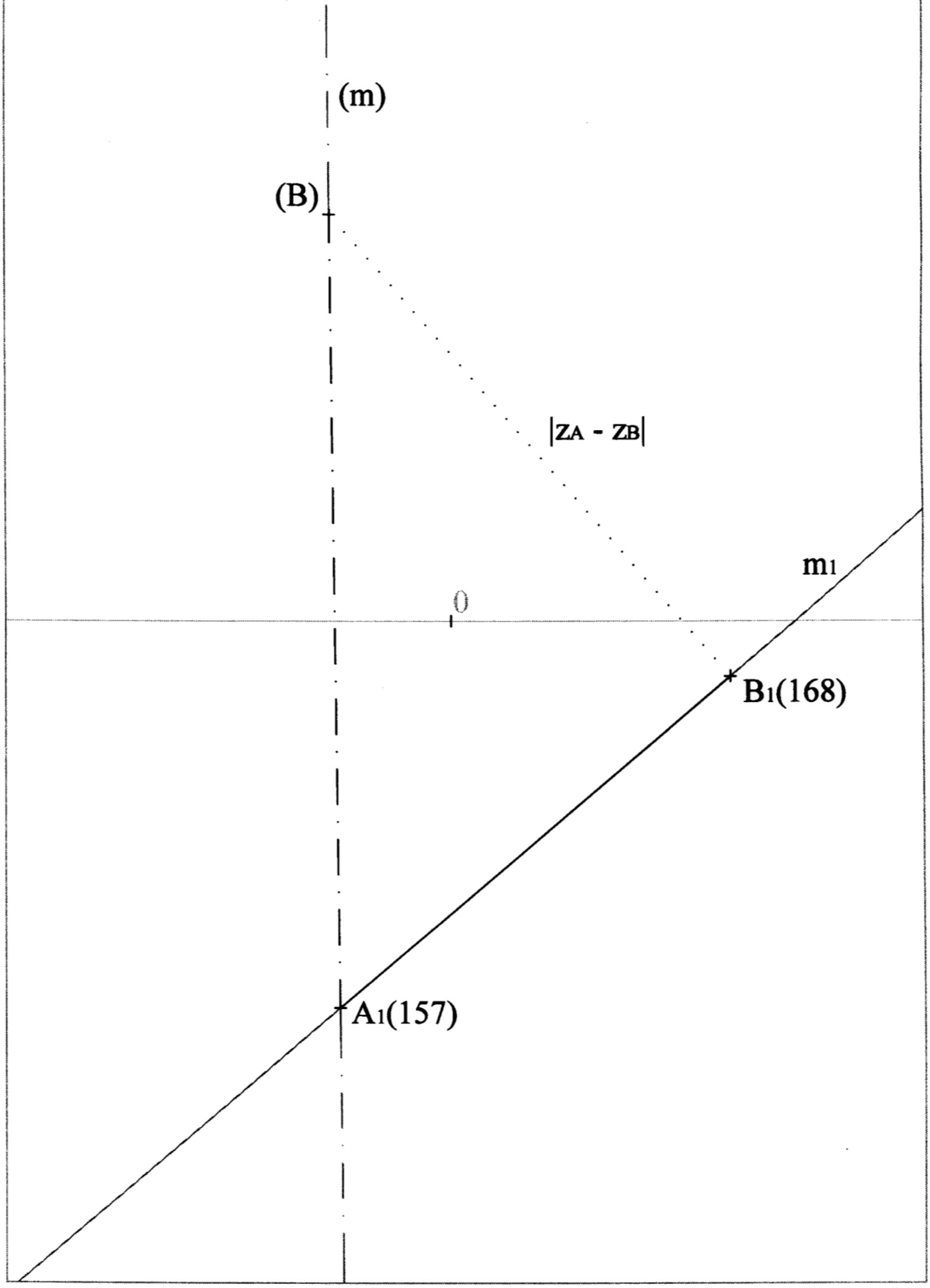
A = [-4; 2; 6], B = [3; 5; -7]



4.2.3 Skutečná velikost úsečky - rozdílový trojúhelník

m = ↔AB

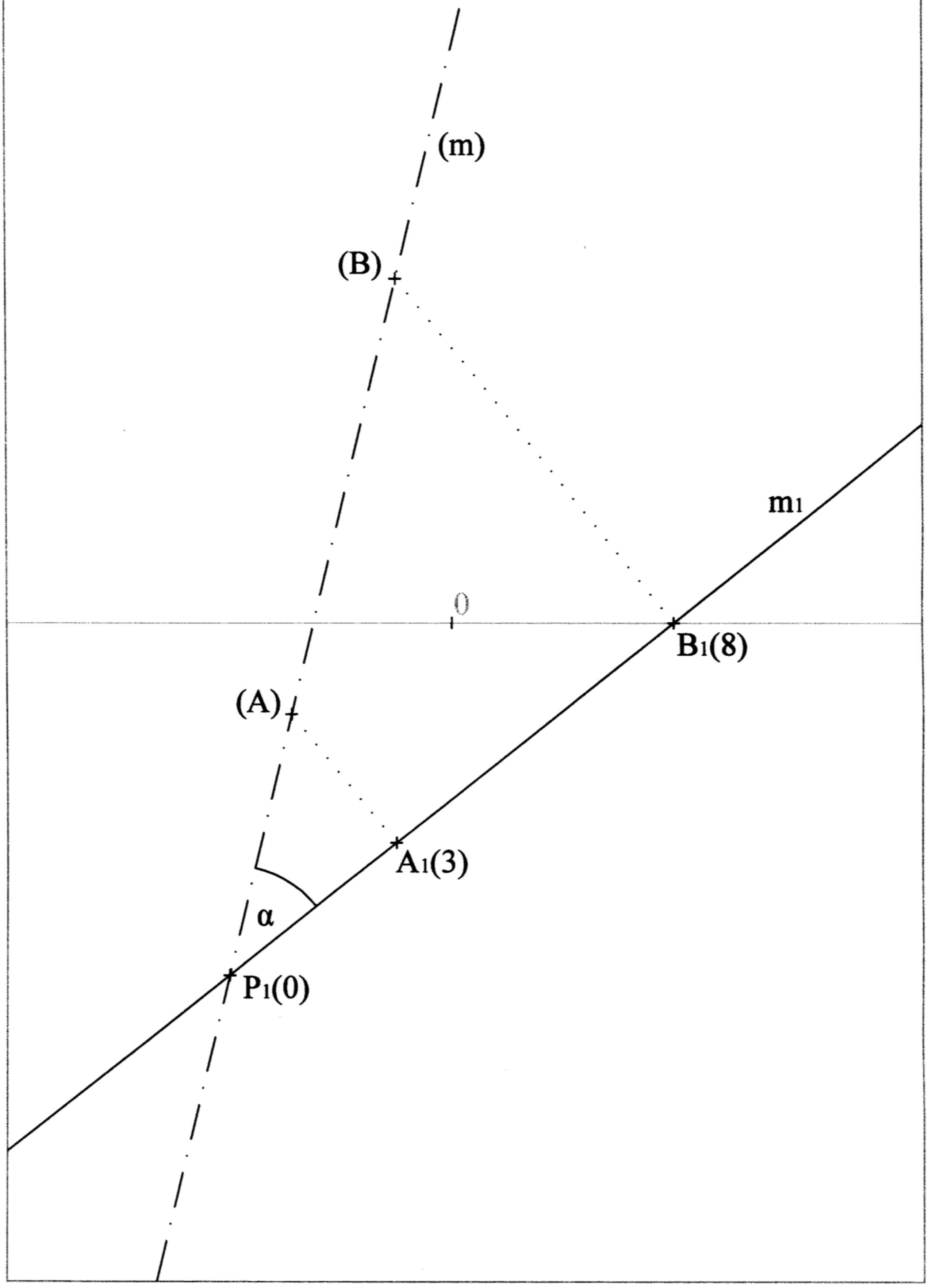
A = [-2; 7; 157], B = [5; 1; 168]



4.2.4 Odchylka přímky m od průmětny π

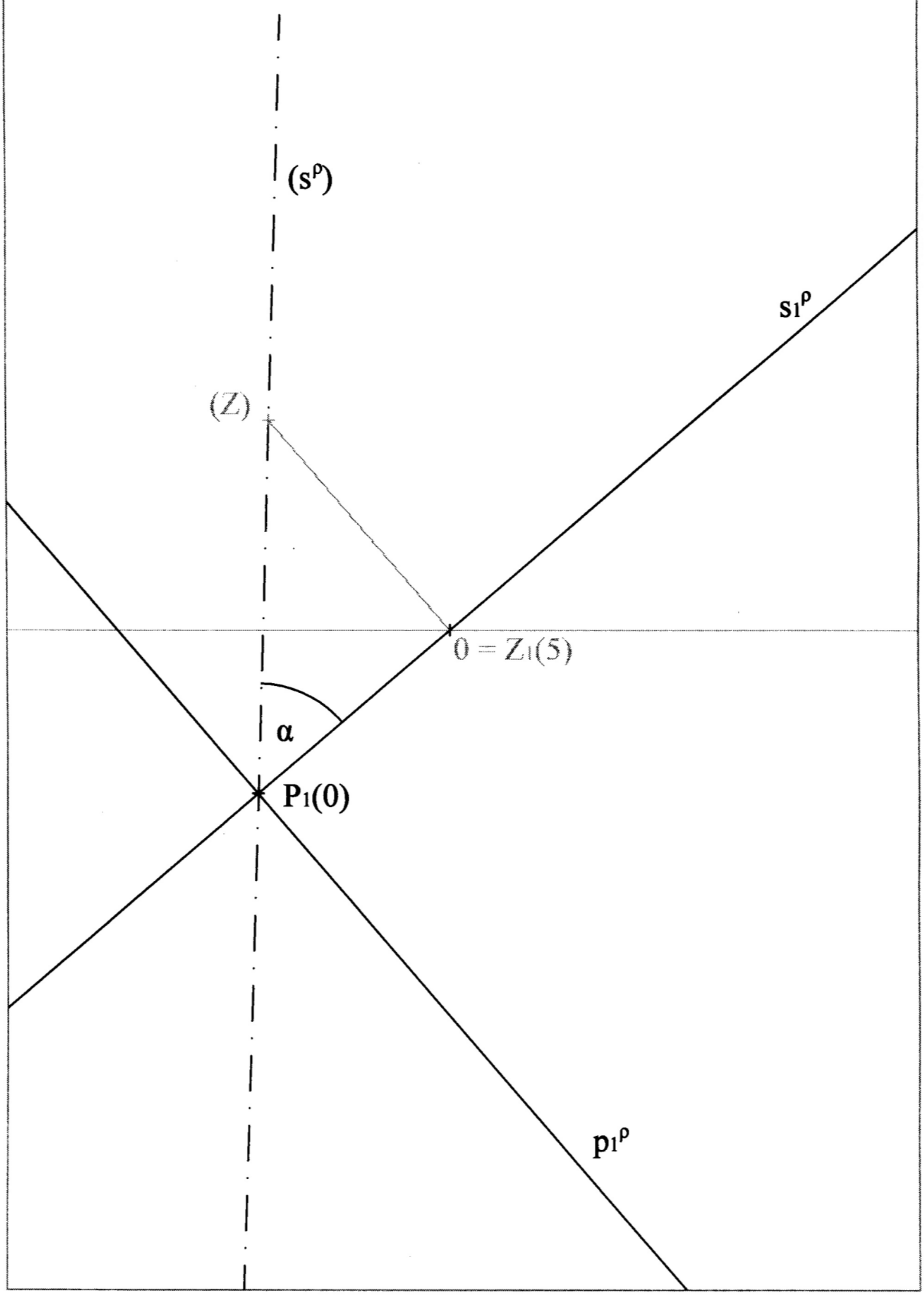
m = ↔AB

A = [-1; 4; 3], B = [4; 0; 8]



4.2.5 Odchylka roviny ρ od průmětny π

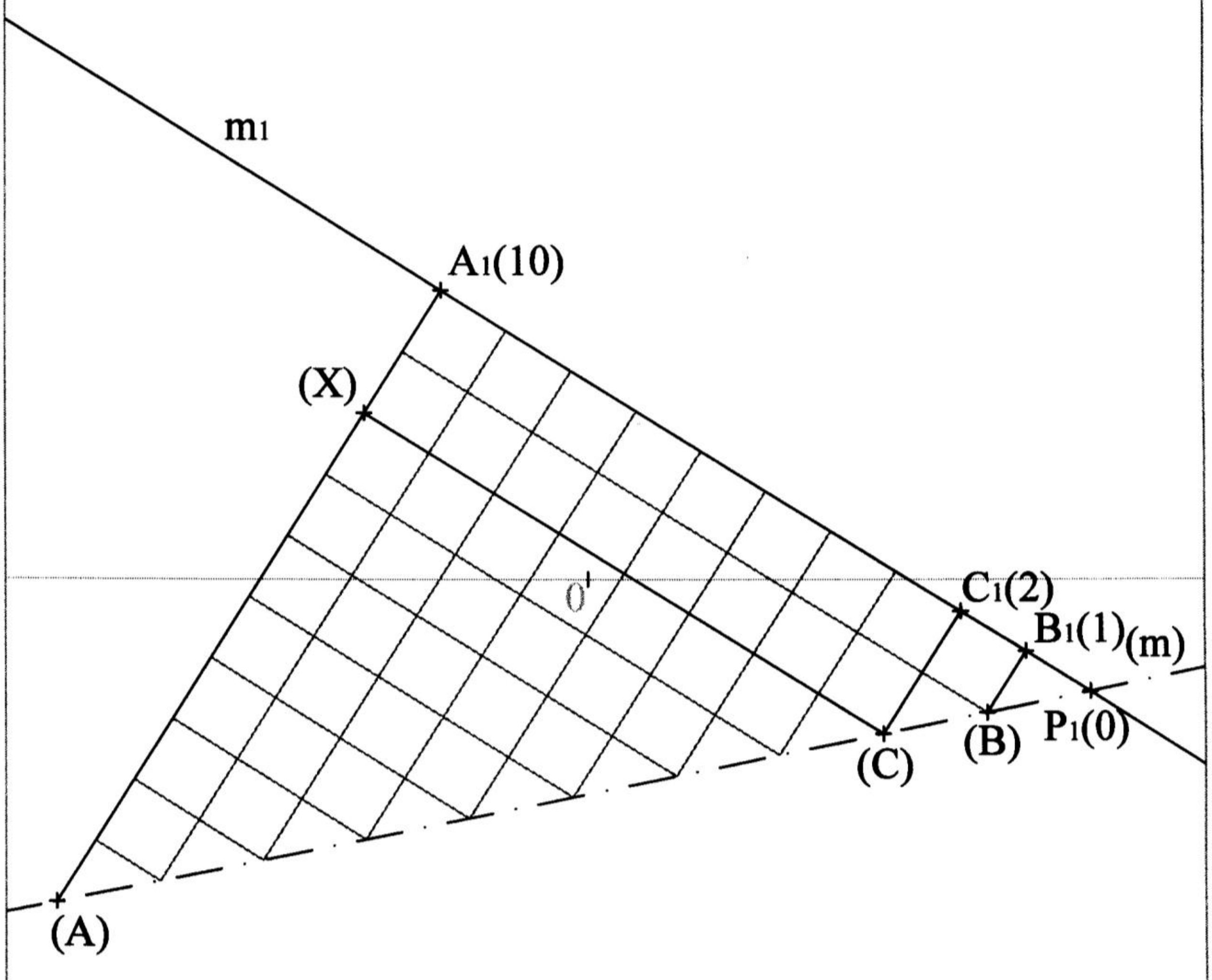
$\rho = (-6, 7, 5)$



4.2.6 Stupňování přímky m

m = ↔AB

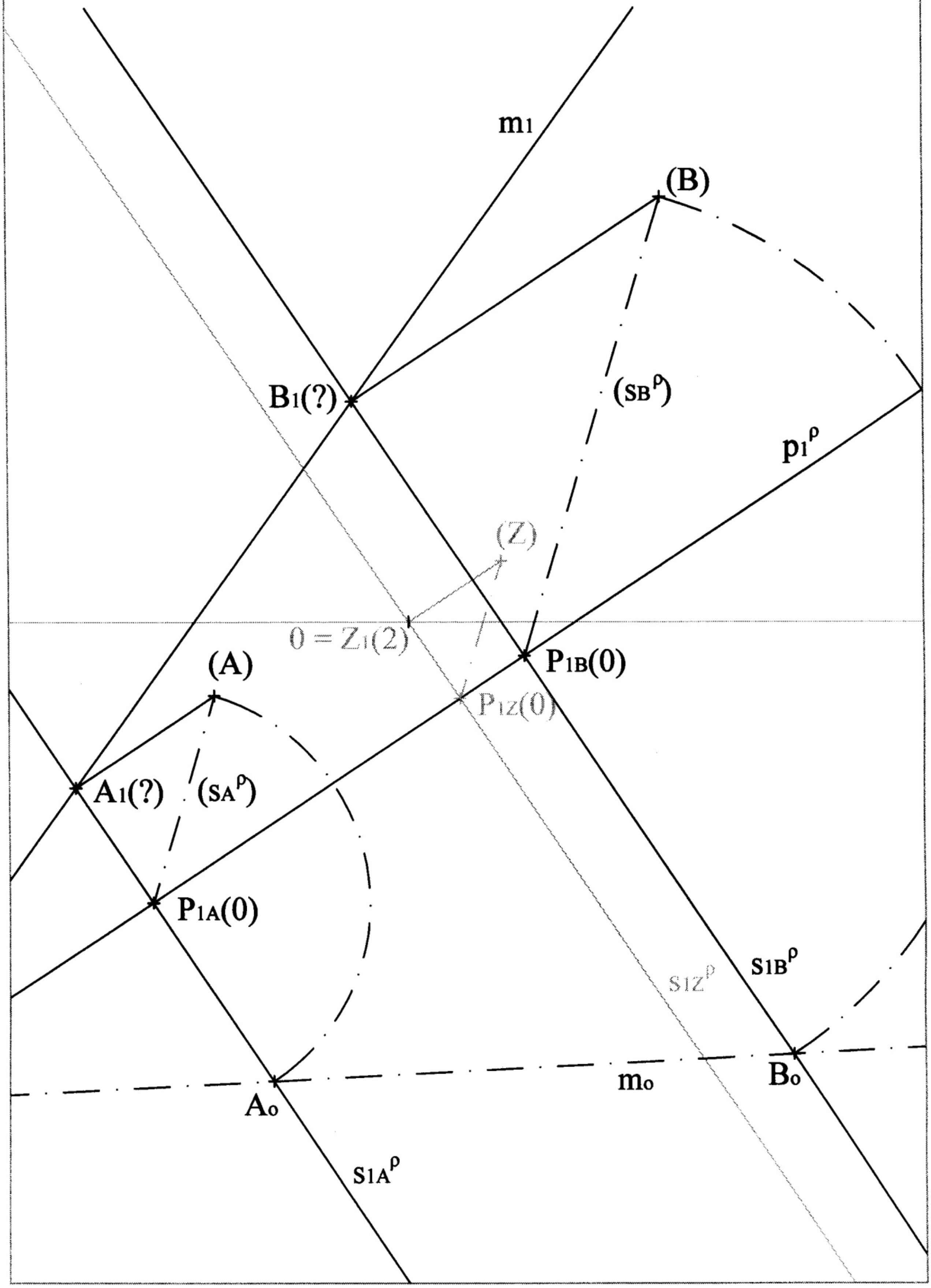
A = [-2; -4; 10], B = [6; 1; 1]



4.2.7 Otáčení roviny ρ

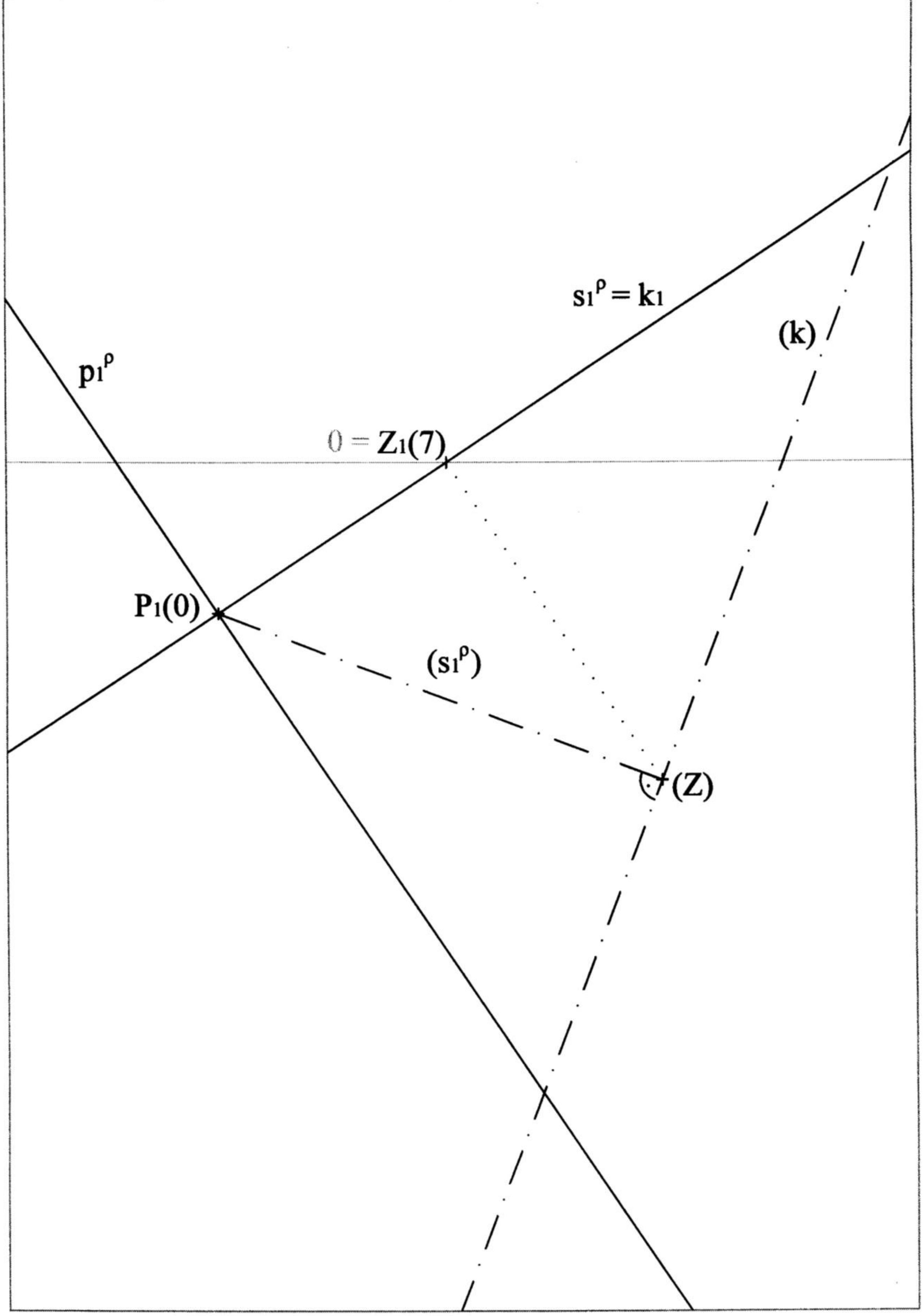
ρ; m = ↔AB

ρ = (3; 2; 2), A = [-6; 3; ?], B = [-1; 4; ?]



4.2.8 Přímka k kolmá k rovině ρ

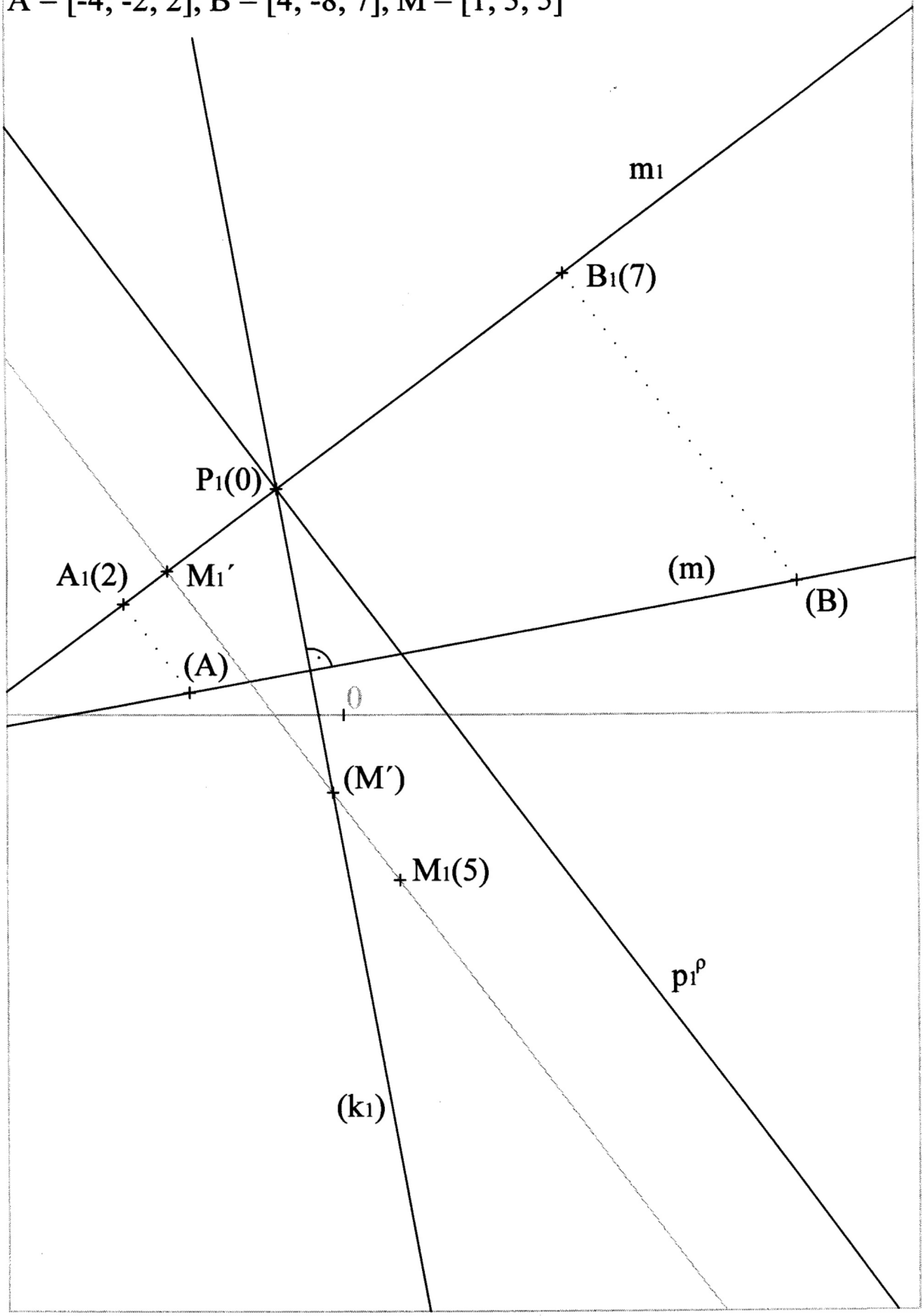
$\rho = (-6; 9; 7)$



4.2.9 Rovina ρ kolmá k přímce

$m = \leftrightarrow AB$; M

$A = [-4; -2; 2]$, $B = [4; -8; 7]$, $M = [1; 3; 5]$



◆ 5 Konstrukční úlohy

U konstrukčních úloh si ukážeme několik zajímavých ukázek toho, co všechno lze řešit s využitím popsaných základních úloh.

➔ 5.1 Polohové a metrické úlohy

✓ 5.1.1 Kolmice vedená bodem *A* k rovině *ρ*

Zadání:

„Bodem *A* veďte přímku *k*, kolmo k rovině $\rho = \leftrightarrow KLM$.
$A = [2; 4; 5]$, $K = [0; 2,5; 1,5]$, $L = [-3; 2,5; 5]$, $M = [2; 0; 2]$.“ [43][44]

Řešení:

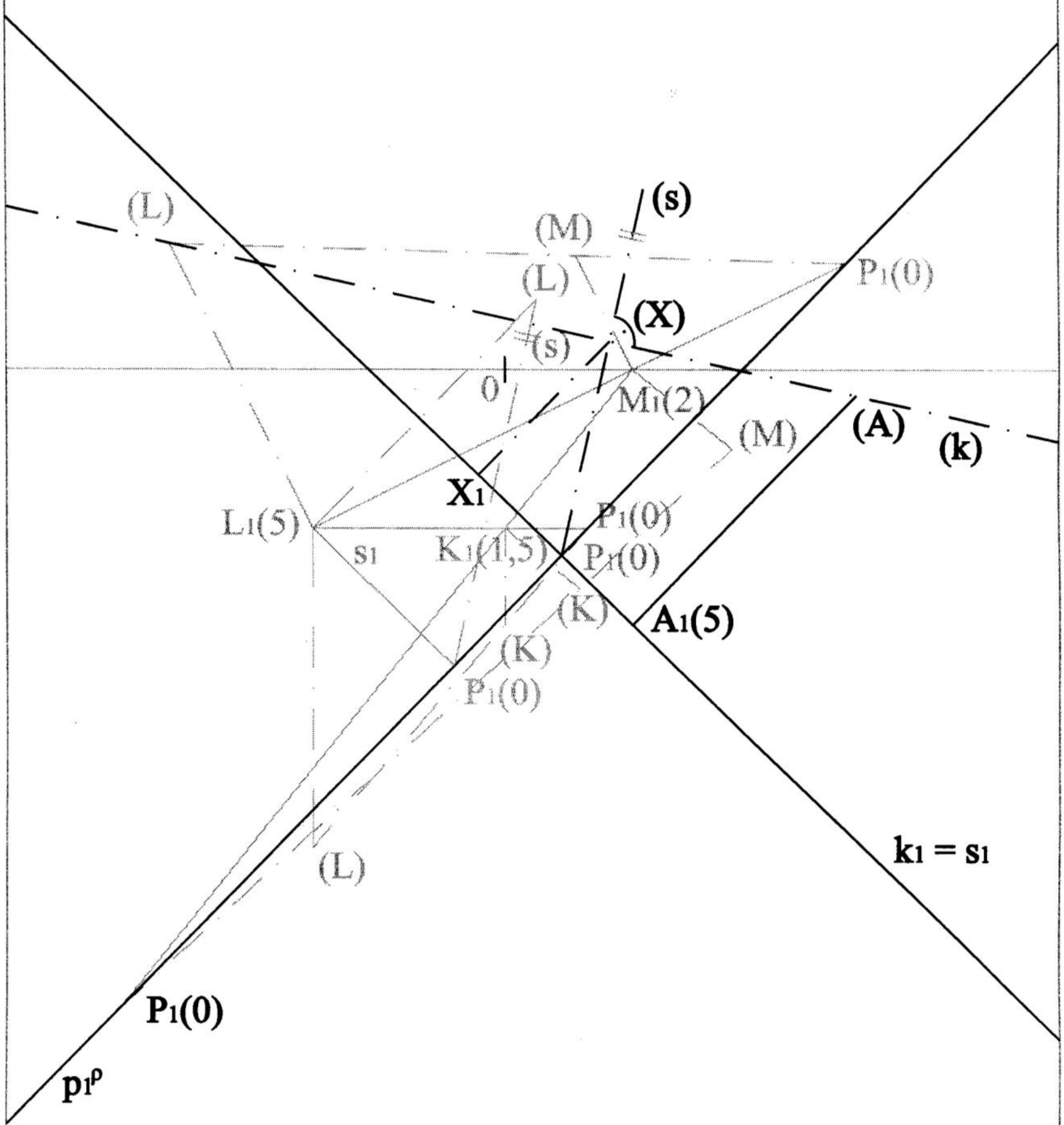
Průmětem bodu *A* sestrojíme průmět přímky *k*, kolmo ke stopě roviny *ρ*. Hledaný průnik kolmice *k* s rovinou *ρ* najdeme jako průsečík přímky *k* a s ní splývající spádové přímky ve sklopení.

OBRÁZEK (5.1.1)
Kolmice k vedená bodem A k rovině ρ

[43] BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M., a kol. *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství Cern, 2006, s. 49, úl. 18

5.1.1 Kolmice vedená bodem A k rovině ρ

$\rho = (K = [0; 2{,}5; 1{,}5],\ L = [-3; 2{,}5; 5],\ M = [2; 0; 2]);\ A = [2; 4; 5]$



✓ 5.1.2 Roviny ležící ve vzdálenosti 30 mm od roviny *ρ*

Zadání:

„Sestrojte roviny, které mají od dané roviny ρ vzdálenost 30 mm.
$\rho = (-3; 2; 2{,}5)$.“ [45]

Řešení:

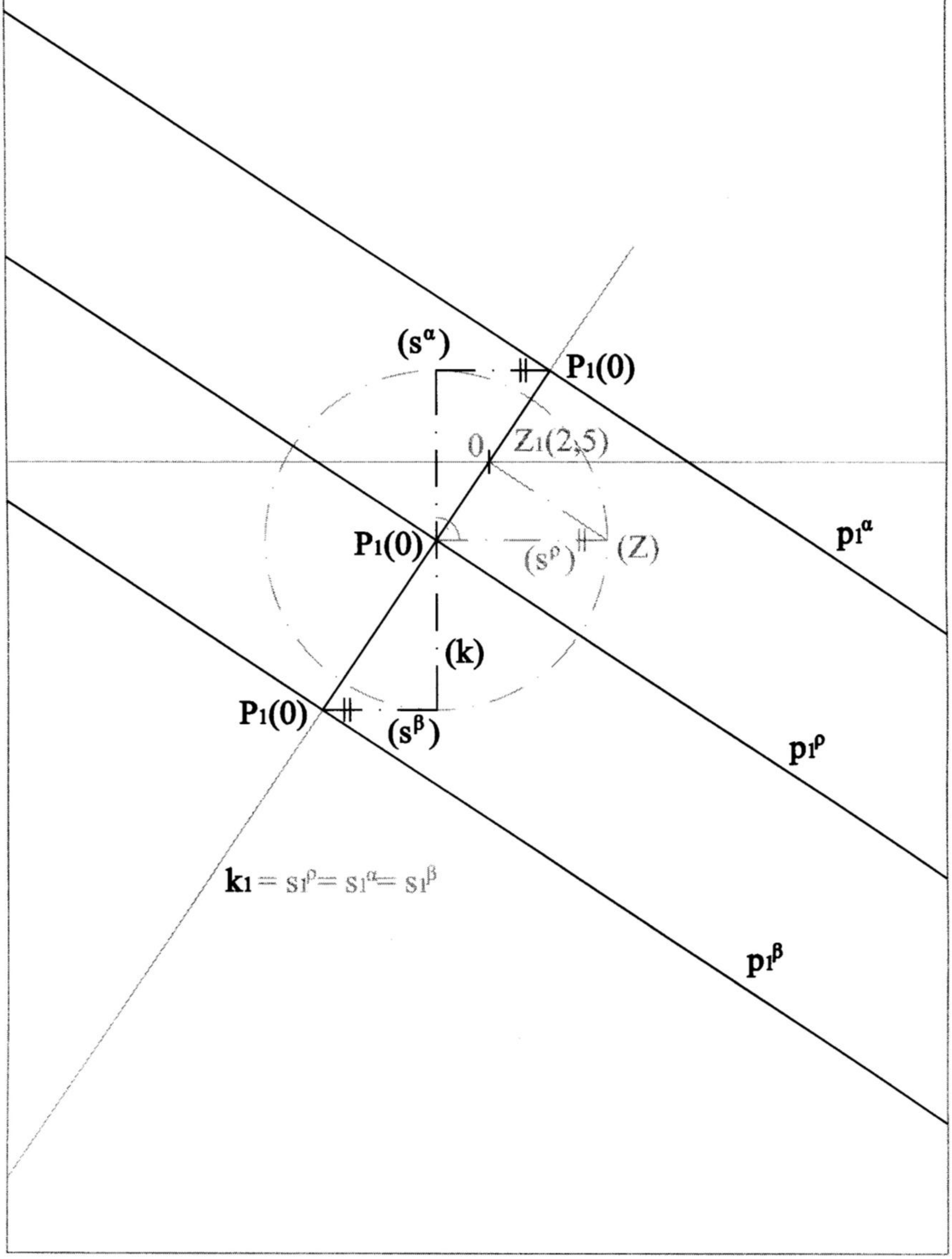
Sklopíme libovolnou spádovou přímku roviny ρ, k ní pak stopníkem vedeme kolmici, na níž od stopníku naneseme požadovanou vzdálenost (30 mm) a vzniklými dvěma body proložíme spádové přímky ve sklopení rovnoběžné se sklopenou spádovou přímkou roviny ρ a najdeme jejich stopníky. Hledané roviny pak určíme tak, že vzniklými stopníky sestrojíme rovnoběžně se stopou roviny stopy hledaných rovin.

OBRÁZEK (5.1.2)
Roviny ležící ve vzdálenosti 30 mm od roviny ρ

[45] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody.* Praha: ROH, 1971, s. 92, úl. 4.61

5.1.2 Roviny ležící ve vzdálenosti 30 mm od roviny ρ

$\rho = (-3;\ 2;\ 2{,}5)$



✓ 5.1.3 Vzdálenost bodu *A* od roviny *ρ*

Zadání:

„Určete vzdálenost bodu A od roviny ρ.
$A = [-5; 7; 7]$, $\rho = (-5; 4; 6)$.“ [46]

Řešení:

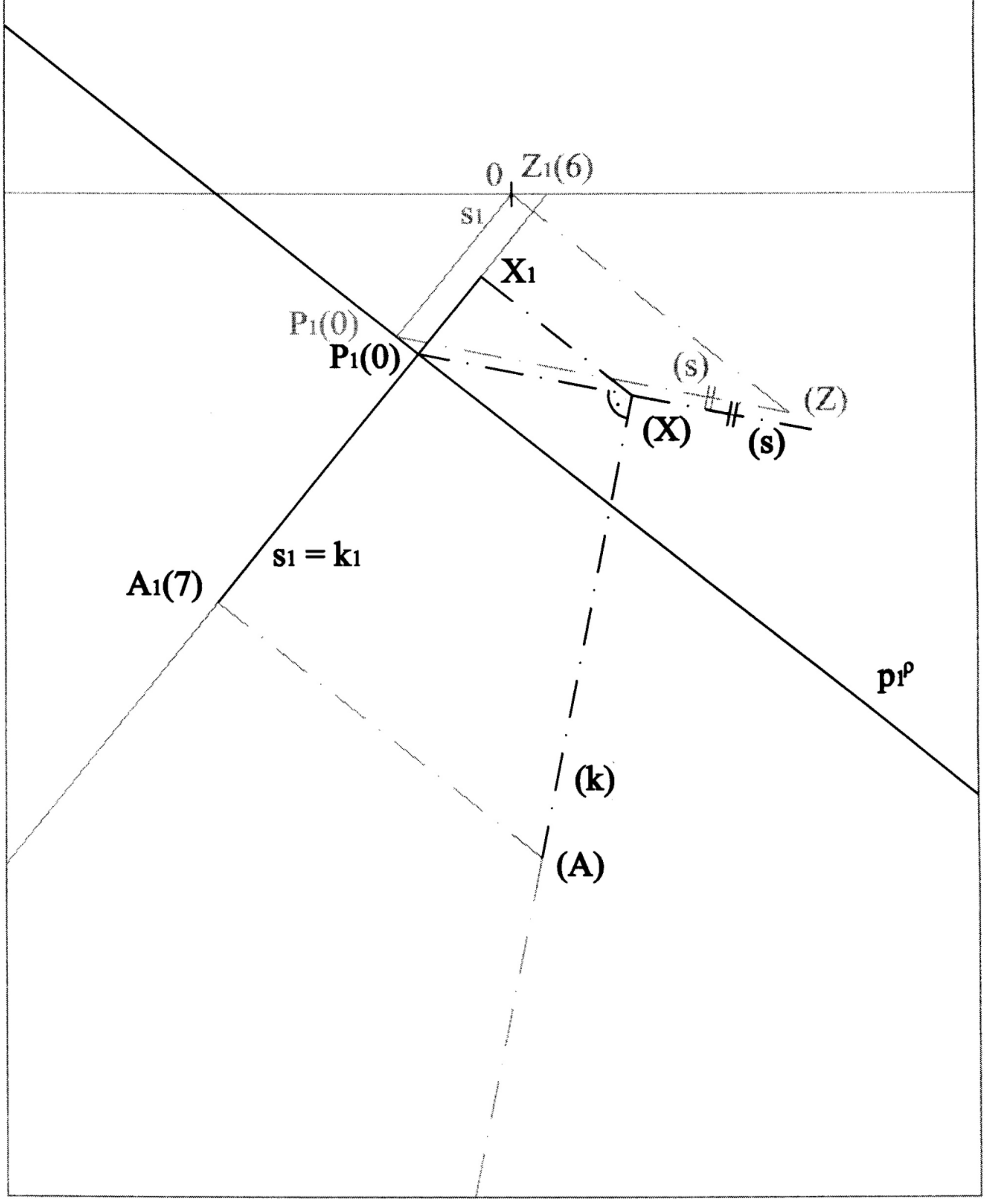
Sestrojíme průmět spádové přímky procházející průmětem bodu A kolmo ke stopě roviny α. Skutečná vzdálenost bodu A od roviny α se pak zobrazí jako kolmice na tuto spádovou přímku ve sklopení procházející sklopeným průmětem bodu A.

OBRÁZEK (5.1.3)
Vzdálenost bodu A od roviny ρ

[46] BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M., a kol. *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství Cern, 2006, s. 50, úl. 20

5.1.3 Vzdálenost bodu A od roviny ρ

$\rho = (-5; 4; 6)$; $A = [-5; 7; 7]$



✓ 5.1.4 Skutečná velikost trojúhelníku *ABC*

Zadání:

„Trojúhelník *ABC* leží v rovině ρ. Určete jeho skutečnou velikost.
$A = [-3; 4; ?]$, $B = [1; 2; ?]$, $C = [-2; 1; ?]$, $\rho = (5; 4; 3)$.“ [47]

Řešení:

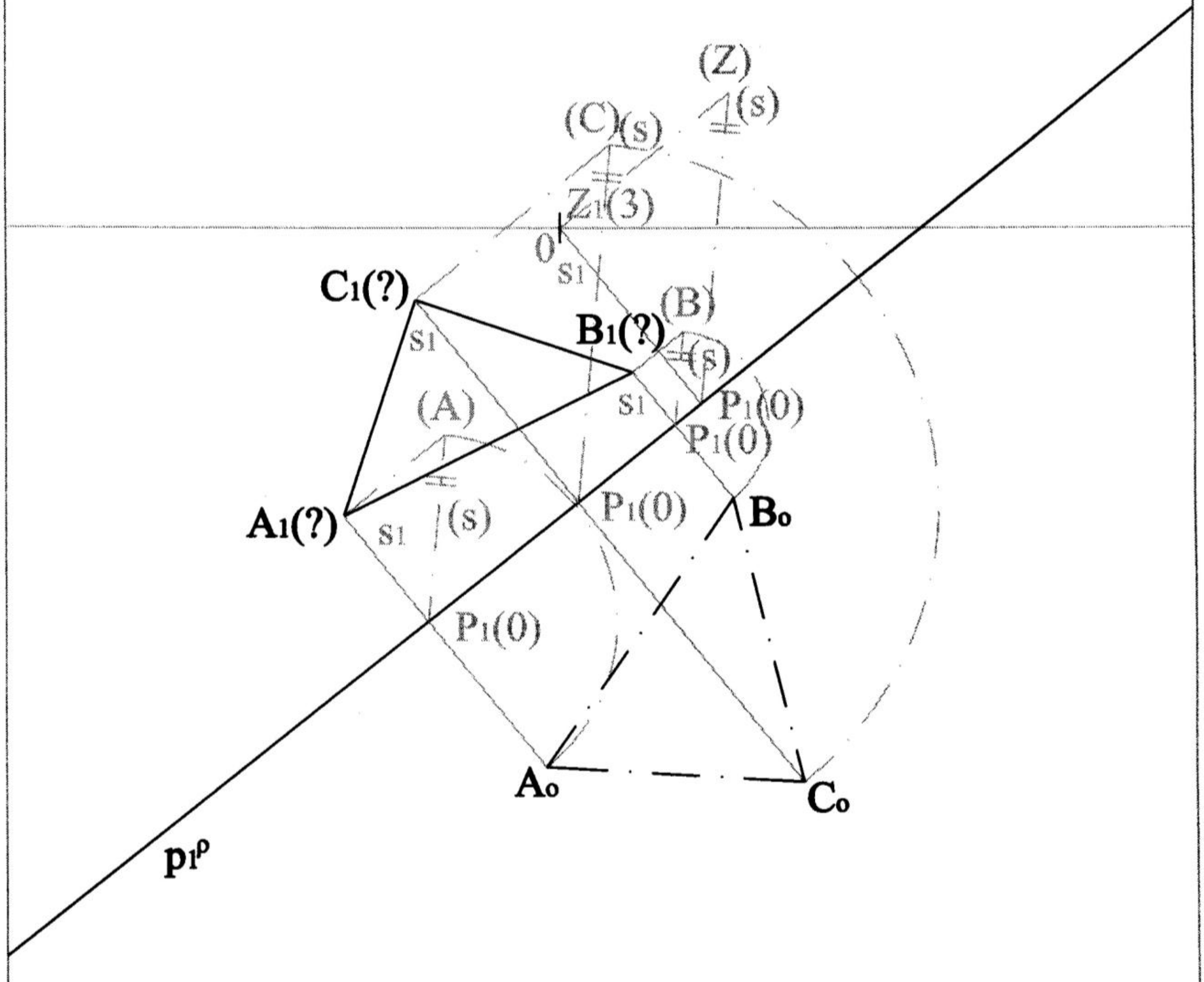
Vyneseme rovinu ρ a s pomocí jejich spádových přímek určíme z-ové souřadnice bodů *A*, *B*, *C*. Otočíme rovinu ρ do průmětny π a sestrojíme skutečnou velikost trojúhelníku *ABC*.

OBRÁZEK (5.1.4)
Skutečná velikost trojúhelníku ABC

[47] ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody.* Praha: ROH, 1971, s. 100, úl. 4.66

5.1.4 Skutečná velikost trojúhelníku ABC

$\rho = (5; 4; 3)$; $A = [-3; 4; ?]$, $B = [1; 2; ?]$, $C = [-2; 1; ?]$



✓ 5.1.5 Průmět čtverce *ABCD*

Zadání:

„V rovině ρ je dán čtverec *ABCD* úhlopříčkou *AC*. Sestrojte jeho průmět. $\rho = (-4; 4; 3)$, $A = [4; 2{,}5; ?]$, $C = [0; 2{,}5; ?]$.“ [48]

Řešení:

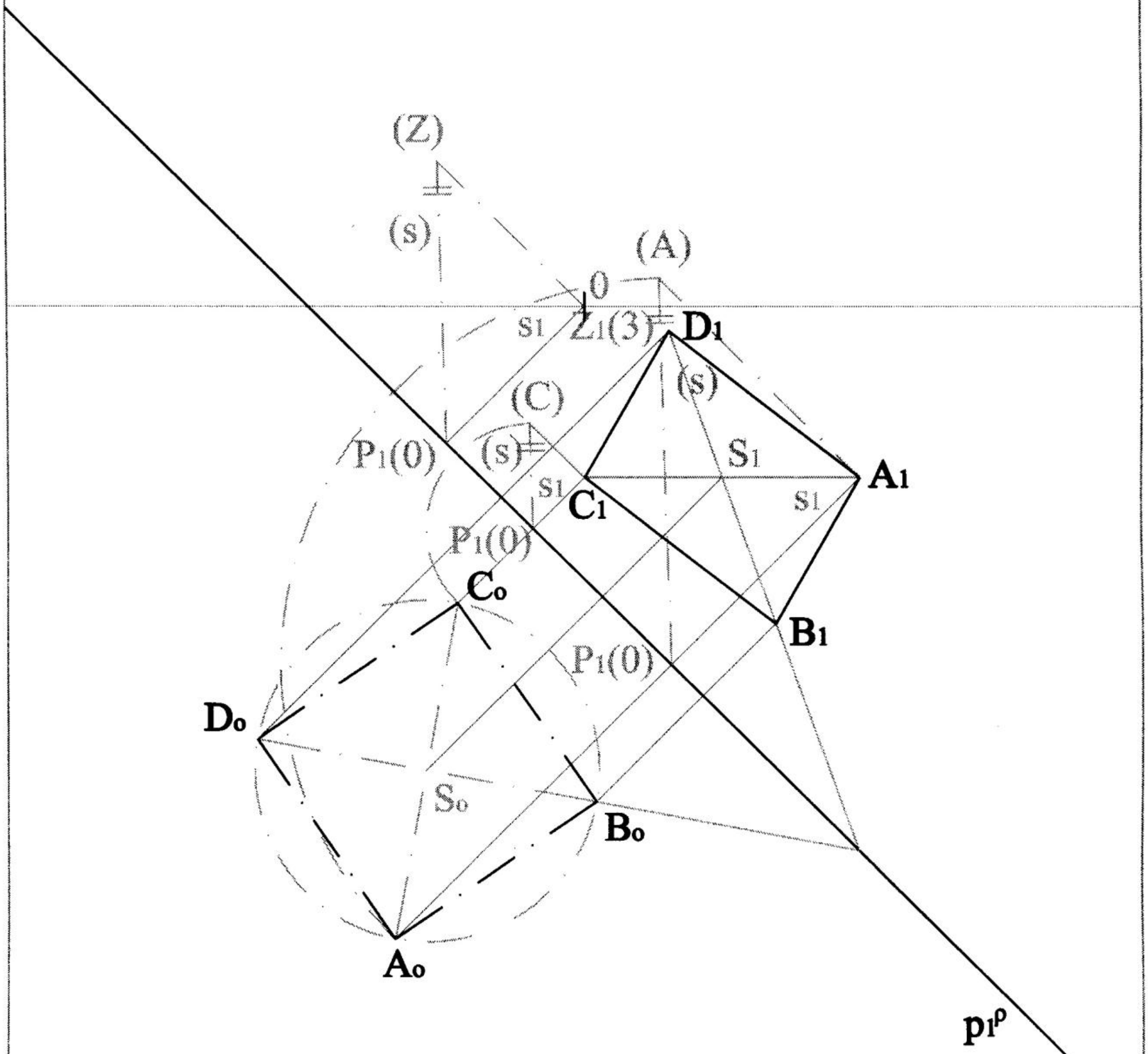
S pomocí spádových přímek roviny ρ určíme výšky bodů *A* a *C*. Rovinu α otočíme do průmětny π a s využitím skutečné úhlopříčky *AC* zkonstruujeme čtverec *ABCD* v otočení.

OBRÁZEK (5.1.5)
Průmět čtverce ABCD

[48] BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M., a kol. *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství Cern, 2006, s. 50, úl. 25

5.1.5 Průmět čtverce ABCD

ρ = (-4; 4; 3); A = [4; 2,5; ?], C = [0; 2,5; ?]



✓ 5.1.6 Průmět kružnice *k* se středem *S*

Zadání:

„Sestrojte průmět kružnice *k* se středem *S* a poloměr *r*. Kružnice leží v rovině *ρ*. *ρ* = (-6; 6; 7,5), *S* = [1,5; 3,5; ?], *r* = 40 mm.“ [49]

Řešení:

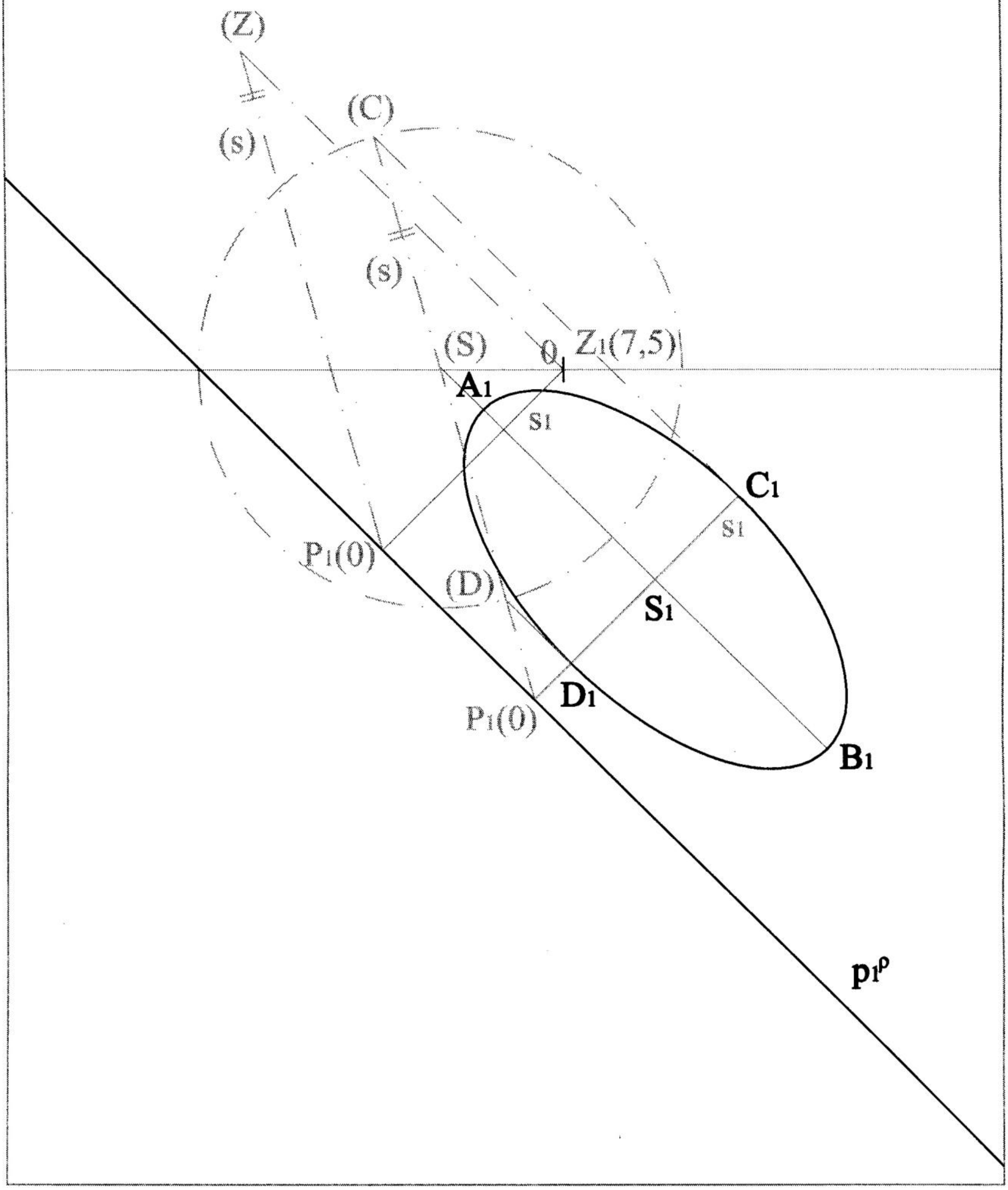
Kružnice se při zobrazování do průmětny *π* zobrazuje jako elipsa, jejíž osy procházejí středem *S*. Na hlavní osu elipsy ležící na hlavní přímce naneseme poloměr kružnice ve skutečné velikosti a vrcholy vedlejší osy elipsy získáme vynesením skutečné velikosti poloměru kružnice na spádovou přímku ve sklopení procházející středem *S*. Užitím proužkové konstrukce sestrojíme průmět kružnice.

OBRÁZEK (5.1.6)
Průmět kružnice k se středem S

[49] BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M., a kol. *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství Cern, 2006, s. 50, úl. 29/b

5.1.6 Průmět kružnice k se středem S

$\rho = (-6; 6; 7{,}5)$; $S = [1{,}5; 3{,}5; ?]$; $r = 40$ mm



➔ 5.2 Tělesa a útvary

✓ 5.2.1 Dutý šestiboký hranol

Zadání:
„Zobrazte pravidelný dutý šestiboký hranol s kruhovým otvorem, který má podstavu v rovině ρ, střed podstavy S, jeden vrchol podstavy A a výšku $v = 3$. Osa válcového otvoru je shodná s osou hranolu, poloměr tohoto válce je $r = 3$.
$\rho = (-3{,}5; 4; -2)$, $A = [-7; 3; ?]$, $S = [-4; 6; ?]$." [50]

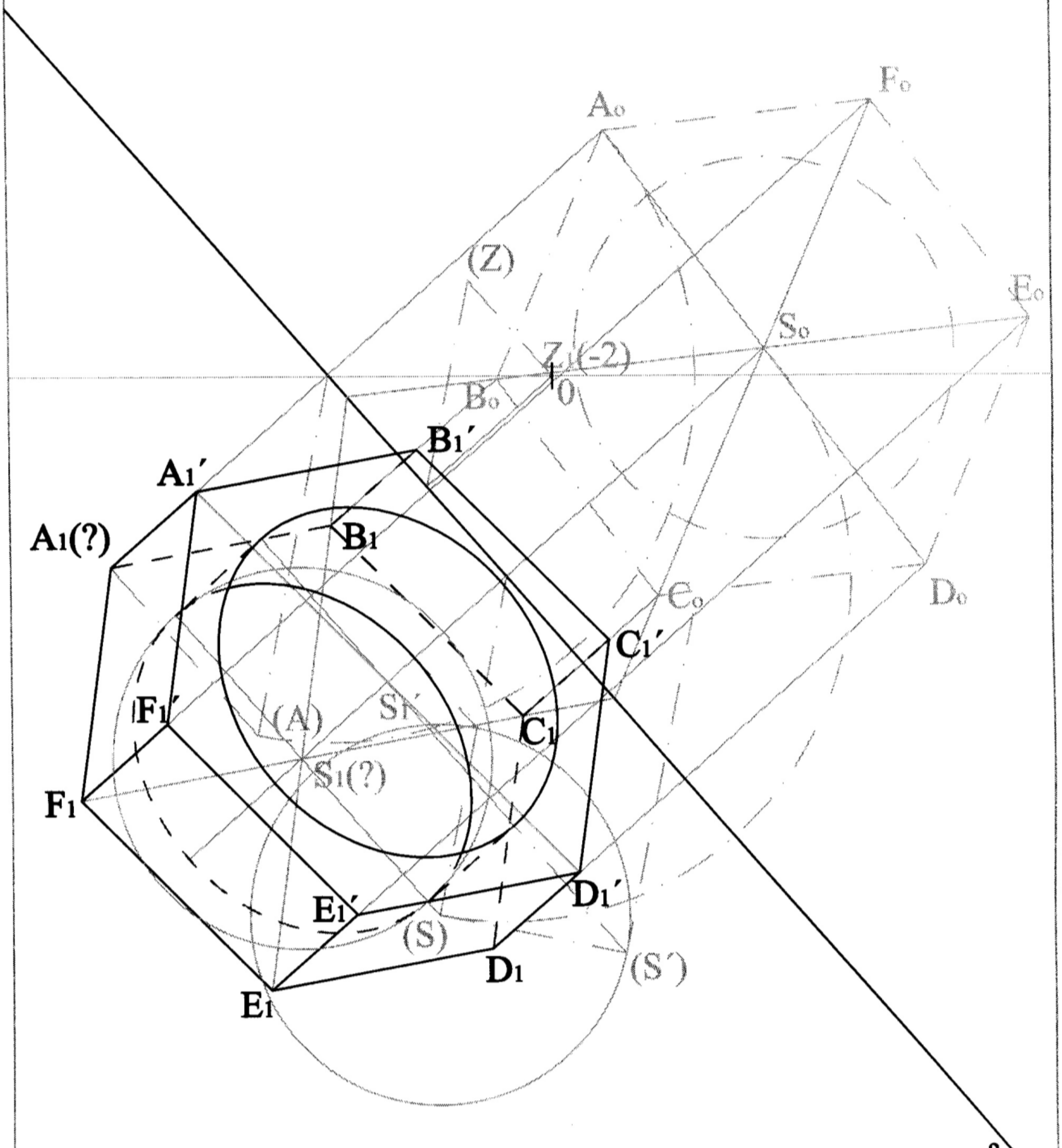
Řešení:
Zadání umožňuje, aby se obě části tělesa rýsovaly zcela samostatně.
Hranol – Vyneseme rovinu ρ a zjistíme výšku bodů A a S. Rovinu ρ otočíme do průmětny π sestrojíme vrcholy podstavy v otočení. Dolní podstavu tělesa zpětně přeneseme do roviny ρ a s využitím výšky hranolu zkonstruujeme jeho horní podstavu.
Válec – Kruhová podstava válce se do průmětny π zobrazí jako elipsa, jejíž střed je totožný se středem podstavy hranolu. Její hlavní vrcholy leží na hlavní přímce a vedlejší vrcholy na spádové přímce roviny ρ. S využitím proužkové konstrukce sestrojíme elipsu.
Vytáhneme výslednou viditelnost celkové konstrukce.

OBRÁZEK (5.2.1)
Dutý šestiboký hranol

[50] ŠTAUBEROVÁ, Z. *Konstrukční geometrie II.* Brno: MU, 2009, s. 38, úl. 5.9

5.2.1 Dutý šestiboký hranol

ρ = (-3,5; 4; -2); A = [-7; 3; ?], S = [-4; 6; ?]; v = 30 mm, r = 30 mm



✓ 5.2.2 Těleso s podstavou šesticípé hvězdy

Zadání:

„Zobrazte těleso, jehož podstava leží v rovině ρ a tvoří ji šesticípá hvězda se středem v bodě S a vrcholem v bodě A. Výška tělesa je $v = 8$.
$\rho = (10; 9; 10)$, $A = [4; 2{,}5; ?]$, $S = [1; 4{,}5; ?]$.“ [51]

Řešení:

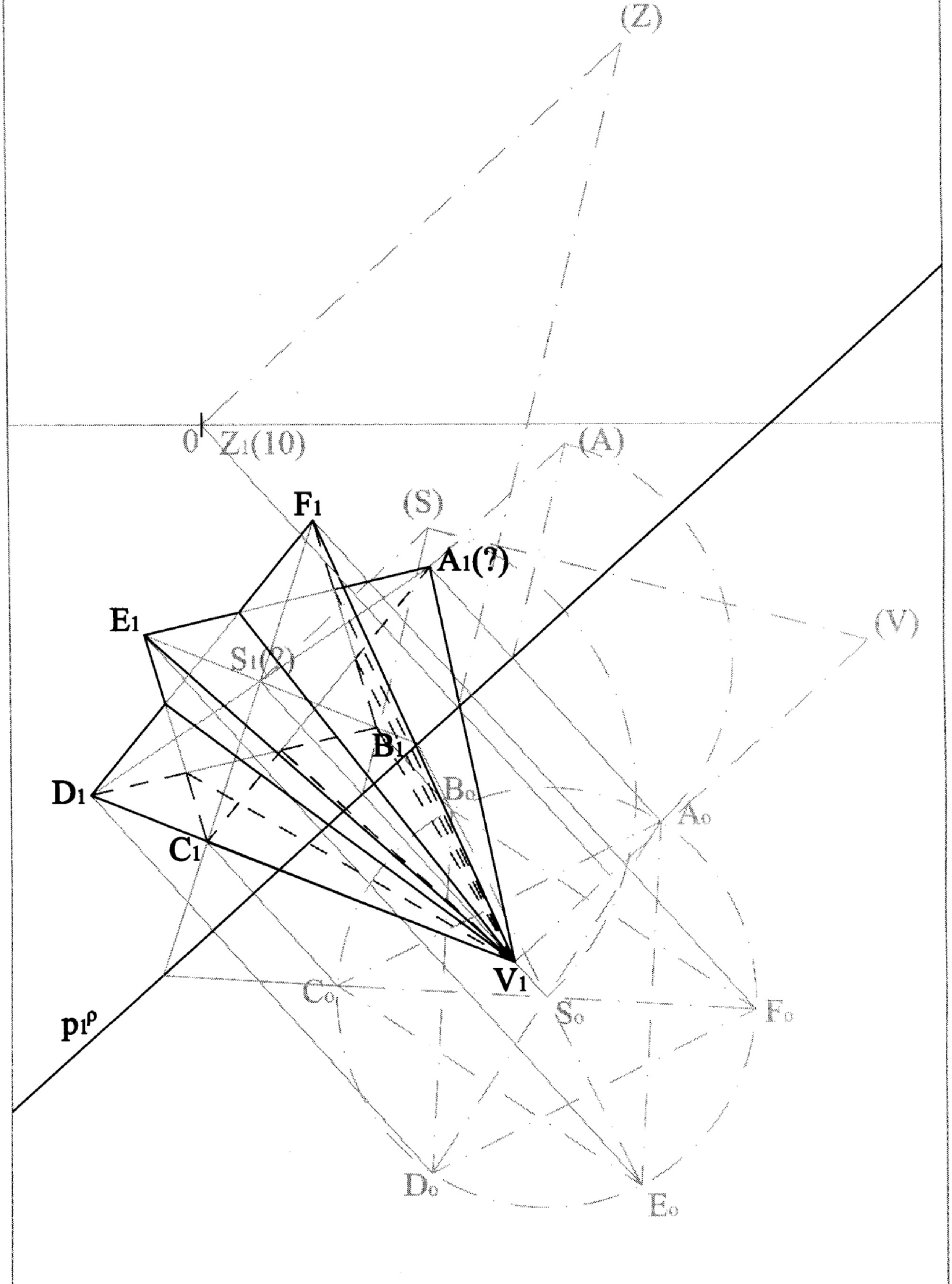
Sestrojíme rovinu ρ a zjistíme chybějící souřadnice bodů A a S. Rovinu ρ otočíme do průmětny π, kde zkonstruujeme podstavu tvaru šesticípé hvězdy ve skutečné velikosti a zpětnou konstrukcí sestrojíme dolní podstavu tělesa v rovině ρ. Nanesením výšky ze středu S získáme vrchol tělesa V a vytáhneme viditelnost.

OBRÁZEK (5.2.2)
Těleso s podstavou šesticípé hvězdy

[51] ŠTAUBEROVÁ, Z. *Konstrukční geometrie II.* Brno: MU, 2009, s. 40, úl. 5.11

5.2.2 Těleso s podstavou šesticípé hvězdy

$\rho = (10; 9; 10)$; $A = [4; 2{,}5; ?]$, $S = [1; 4{,}5; ?]$; $v = 80$ mm



✓ 5.2.3 Krychle

Zadání:

„Zobrazte krychli *ABCDEFGH*, jejíž jedna stěna ležící v rovině ρ je dána úhlopříčkou *AC*. Ve všech osmi rozích této krychle vyřízněte menší krychle. Délka hrany každé menší krychle je rovna jedné třetině délky hrany základní krychle a stěny menších krychlí jsou rovnoběžné se stěnami krychle *ABCDEFGH*.
$\rho = (9; 8{,}5; 5{,}8)$, $A = [-2{,}5; 0; ?]$, $C = [0; ?; 0]$, $z_E > z_A$." [52]

Řešení:

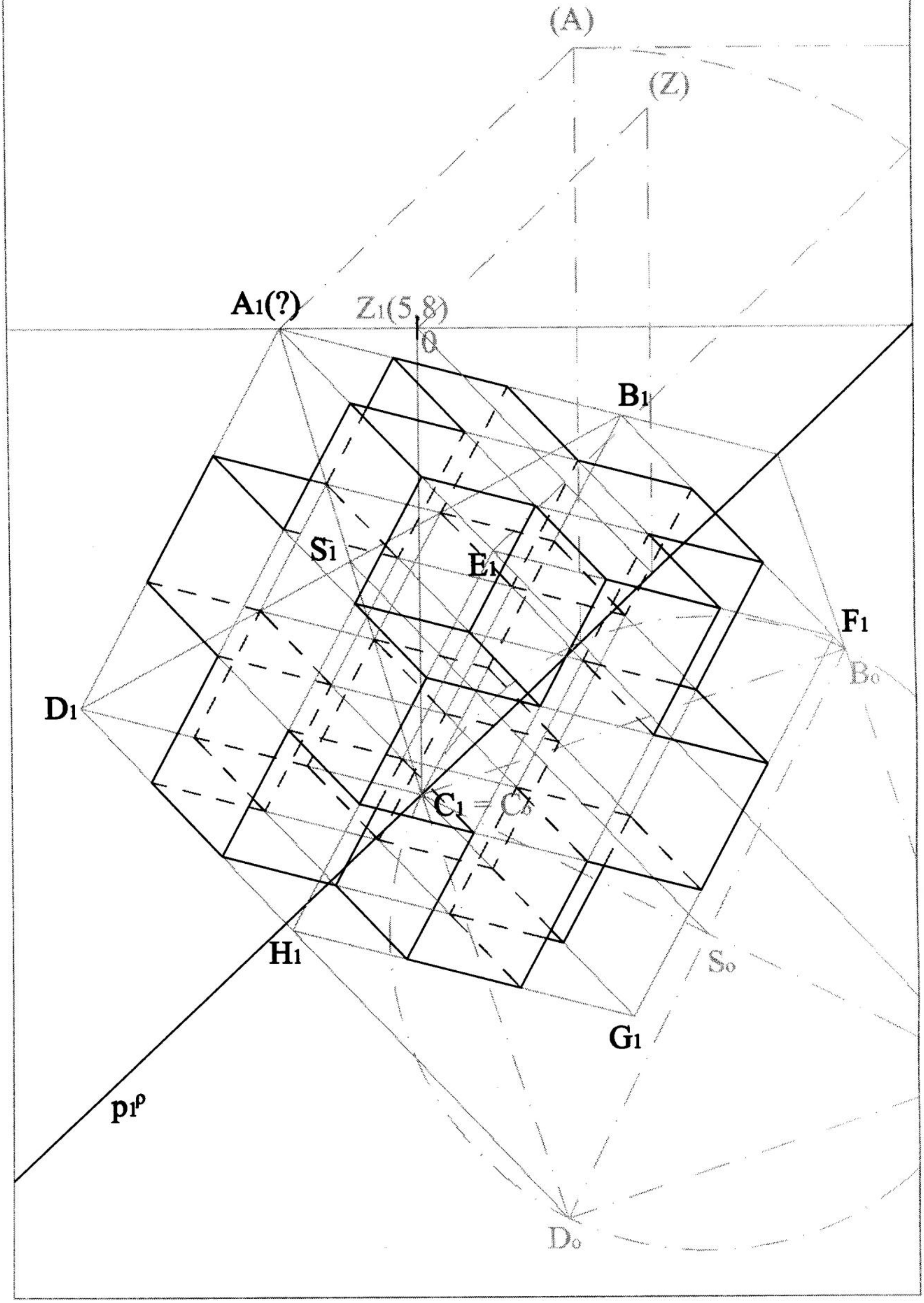
Vyneseme rovinu ρ a zjistíme chybějící souřadnice vrcholů *A* a *C*. Otočením roviny ρ do průmětny π získáme body *A* a *C* v otočení, s pomocí nichž zkonstruujeme podstavu krychle ve skutečné velikosti. Dolní podstavu tělesa zpětně přeneseme do roviny ρ a s využitím výšky, jejíž délka je totožná s hranou podstavy sestrojíme horní podstavu krychle. Všechny hrany krychle rozdělíme na třetiny a na takto vzniklé pomocné síti vytáhneme výslednou viditelnost bez osmi rohových krychliček.

OBRÁZEK (5.2.3)
Krychle

[52] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 41, úl. 181

5.2.3 Krychle

$\rho = (9;\ 8{,}5;\ 5{,}8)$; $A = [-2{,}5;\ 0;\ ?]$, $C = [0;\ ?;\ 0]$; $z_E > z_A$



✓ 5.2.4 Těleso vzniklé rotací trojúhelníka *ABC*

Zadání:

„Zobrazte těleso, které vznikne rotací trojúhelníka *ABC* kolem jeho strany *AB*. $A = [-3; 8; 11]$, $B = [6; 1; 2]$, $C = [0; 7; 4]$.“ [53]

Řešení:

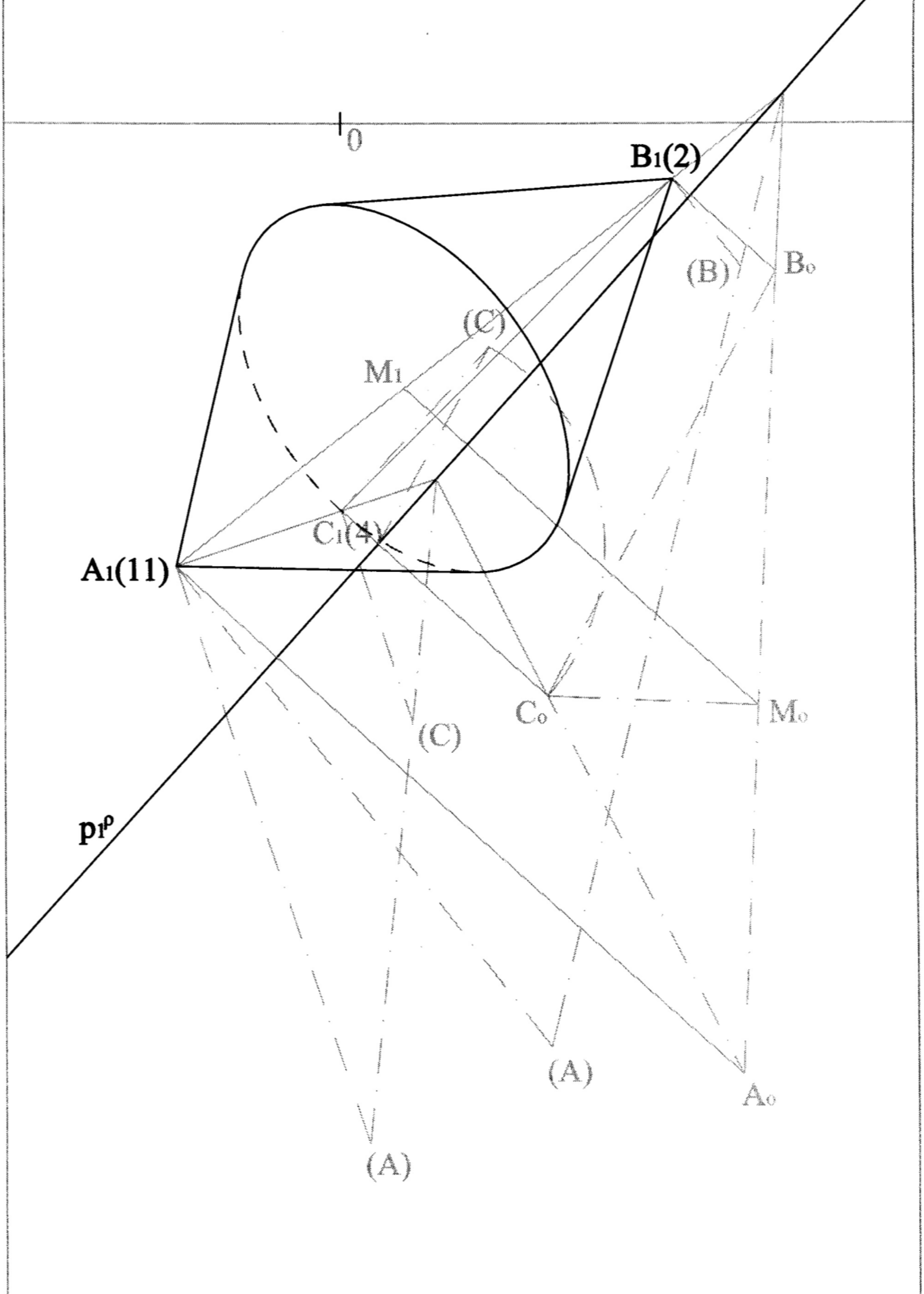
Rotací trojúhelníka *ABC* kolem jeho strany *AB* vytvoříme těleso, jako by vzniklé vzájemným spojením dvou kuželů jejich podstavou. Podstava tělesa vzniká obíháním vrcholu *C* kolem strany *AB*, jenž tvoří jeho osu. K sestrojení této podstavy v průmětně π musíme znát její střed a poloměr. Obojí zobrazíme ve skutečné velikosti otočením trojúhelníka *ABC* do průmětny π. Zjištěný poloměr podstavy přeneseme na hlavní osu elipsy, která je kolmicí na osu tělesa a prochází průmětem bodu *M*. Pomocí středové souměrnosti najdeme k bodu *C* středově souměrný čtvrtý bod podstavy a s využitím proužkové konstrukce podstavu sestrojíme. Nakonec vytáhneme viditelnost vzniklého tělesa.

OBRÁZEK (5.2.4)
Těleso vzniklé rotací trojúhelníka ABC

[53] PLOCKOVÁ, E., ŘEHÁK, M. *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie.* Ostrava: 2008, s. 39, úl. 3.28

5.2.4 Těleso vzniklé rotací trojúhelníka ABC

A = [-3; 8; 11], B = [6; 1; 2], C = [0; 7; 4]



✓ 5.2.5 Krychle s deskou

Zadání:

„Zobrazte krychli *ABCDEFGH* se stěnou *ABCD* v rovině ρ, jejíž osa *o* kolmá k rovině ρ prochází bodem *K*. Dále zobrazte desku, která má tvar pravidelného čtyřbokého hranolu o délce podstavné hrany a = 6 a výšce v = 1. Deska je umístěna na horní stěně krychle tak, že osa procházející středy jejich podstav splývá s osou *o* a její hrany jsou rovnoběžné s hranami krychle.
ρ = (8,5; 6; 5,5), A = [-3,5; 3; ?], K = [0; 5; 4], $y_E > y_A$.“ [54]

Řešení:

Danou úlohu vyřešíme jako dva samostatné celky.
Krychle - Vyneseme rovinu ρ a určíme chybějící z-ovou souřadnici bodu *A*. S využitím spádových přímek roviny ρ a sklopeného bodu *K* najdeme bod *S* ve sklopení a jeho půdorysný průmět. Rovinu ρ otočíme do průmětny π a sestrojíme dolní podstavu krychle, kterou zpětně přeneseme do roviny ρ. S využitím výšky, jejíž rozměr odpovídá délce hrany podstavy, vyneseme horní podstavu krychle.
Deska – Dolní podstavu desky vyneseme přímo do otočení, neboť známe její střed i rozměr hrany, která je rovnoběžná s dolní podstavou krychle. Podstavu desky zobrazíme do roviny ρ a využitím výšky krychle ji „osadíme“ na horní podstavě krychle. Nanesením výšky desky zkonstruujeme její horní podstavu.
S ohledem na celek vytáhneme výslednou viditelnost.

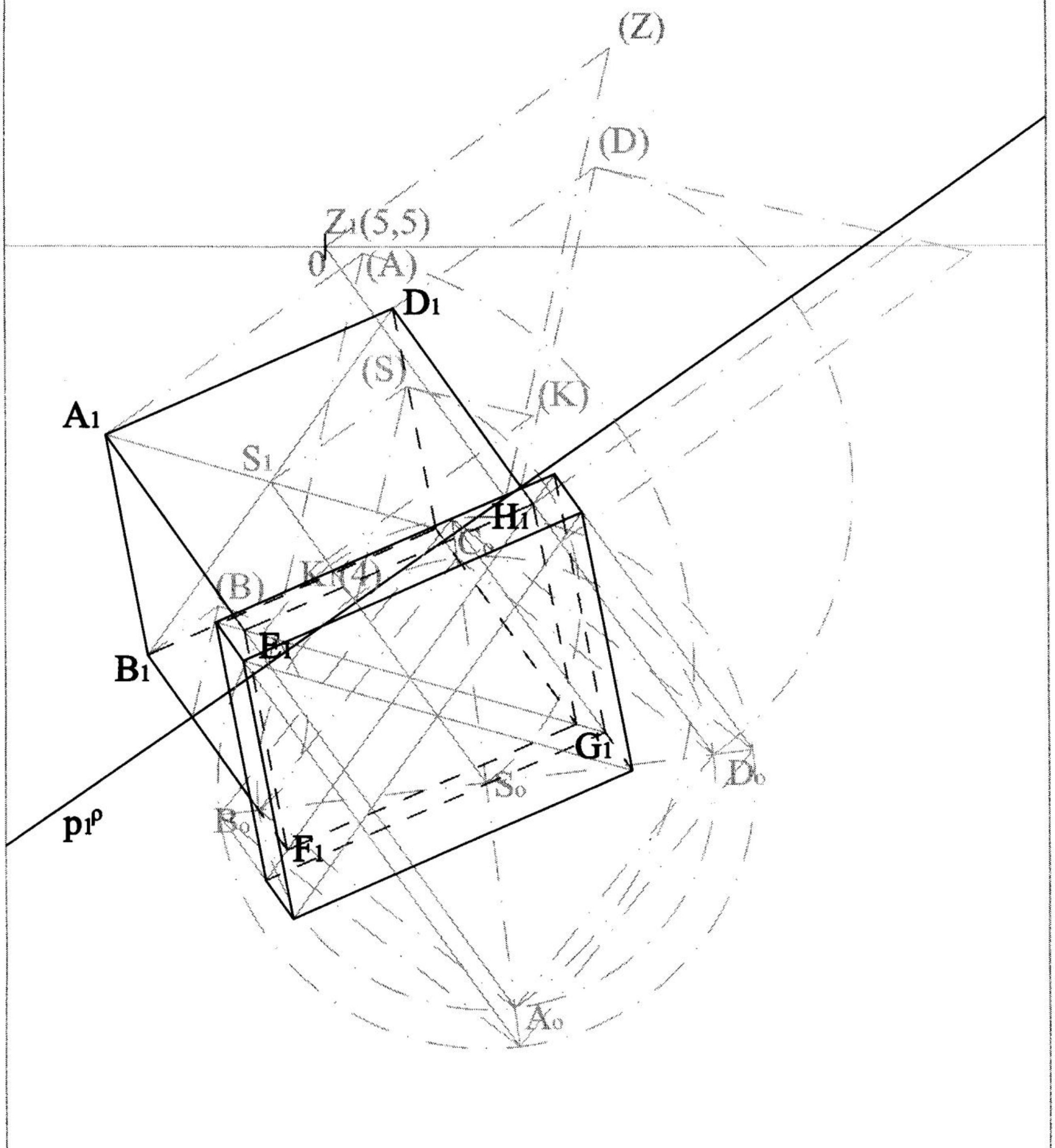
OBRÁZEK (5.2.5)
Krychle s deskou

[54] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 41, úl. 182

5.2.5 Krychle s deskou

$\rho = (8{,}5; 6; 5{,}5)$; $A = [-3{,}5; 3; ?]$, $K = [0; 5; 4]$; $y_E > y_A$

$a = 60$ mm, $v = 10$ mm



✓ 5.2.6 Kosý čtyřboký hranol

Zadání:

„Kosý čtyřboký hranol má čtvercovou podstavu *ABCD* v půdorysně určenou vrcholem *A* a jejím středem *S*, střed jeho horní podstavy je *S´*. Zobrazte normálový řez tohoto hranolu rovinou ρ, která prochází středem úsečky *SS´*.
A = [-5; 1; 0], *S* = [-4; 3,5; 0], *S´* = [4; 3,5; 7].“ [55]

Řešení:

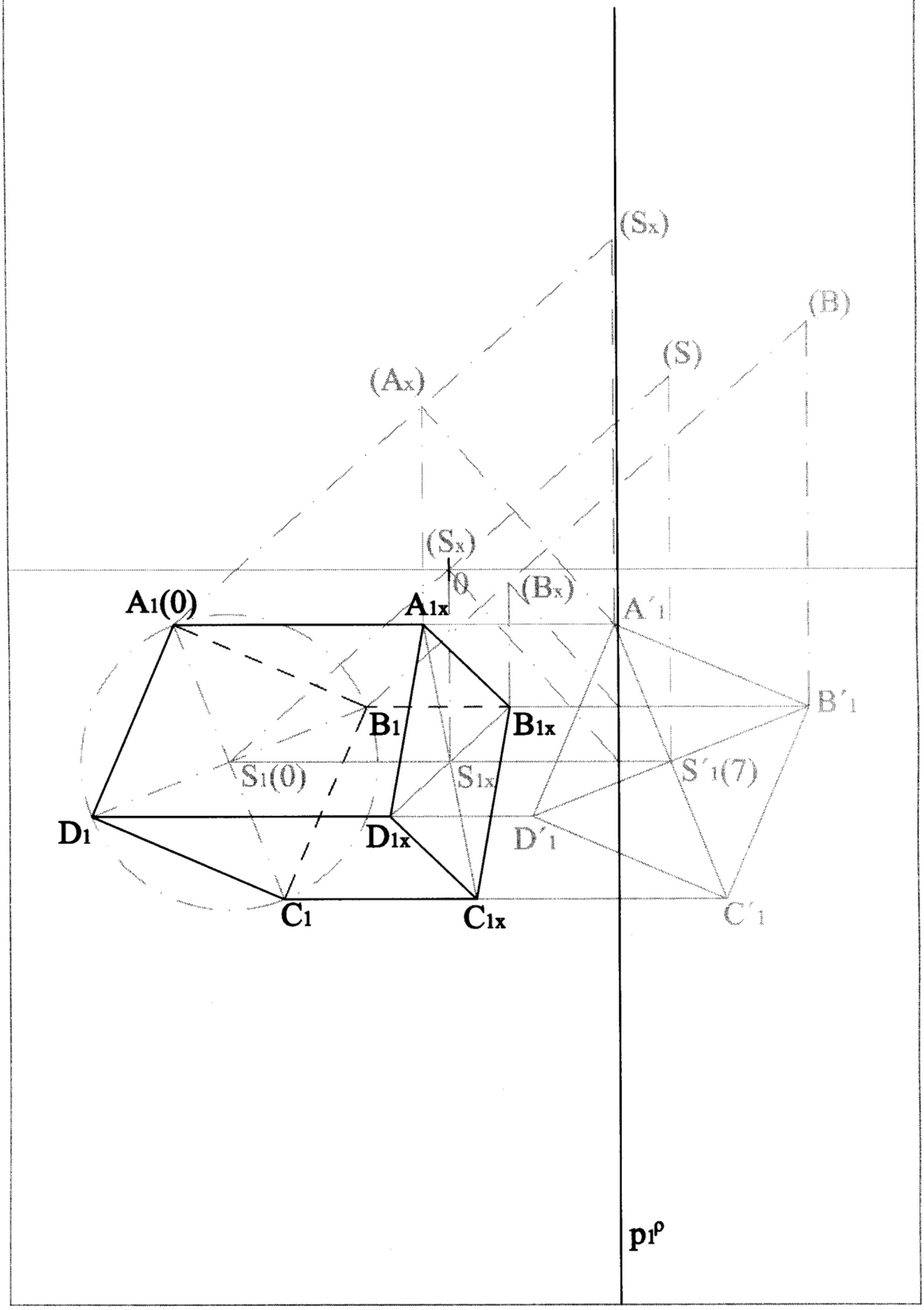
Dolní i horní podstavu tělesa sestrojíme rovnou bez otáčení, neboť dolní podstava leží v průmětně π a horní podstava se díky rovnoběžnosti s dolní podstavou při zobrazování do průmětny π zobrazuje ve skutečné velikosti. Určíme střed osy tělesa ve sklopení, kterým na ni vedeme kolmici. Vzniklým stopníkem vedeme půdorysnou stopu roviny kolmo na vynášecí osu *x*. Pomocí spádových přímek sestrojíme vrcholy řezané podstavy a vytáhneme viditelnost.

OBRÁZEK (5.2.6)
Kosý čtyřboký hranol

[55] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 41, úl. 185

5.2.6 Kosý čtyřboký hranol

$A = [-5; 1; 0]$, $S = [-4; 3{,}5; 0]$, $S' = [4; 3{,}5; 7]$



✓ 5.2.7 Šestiboký jehlan

Zadání:

„Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV* o výšce v, jehož podstava o středu S leží v rovině ρ kolmé k nárysně ν.
$S = [2; 4; 3]$, $A = [0; 2{,}5; 1]$, $v = 8$, $z_V > z_S$." [56]

Řešení:

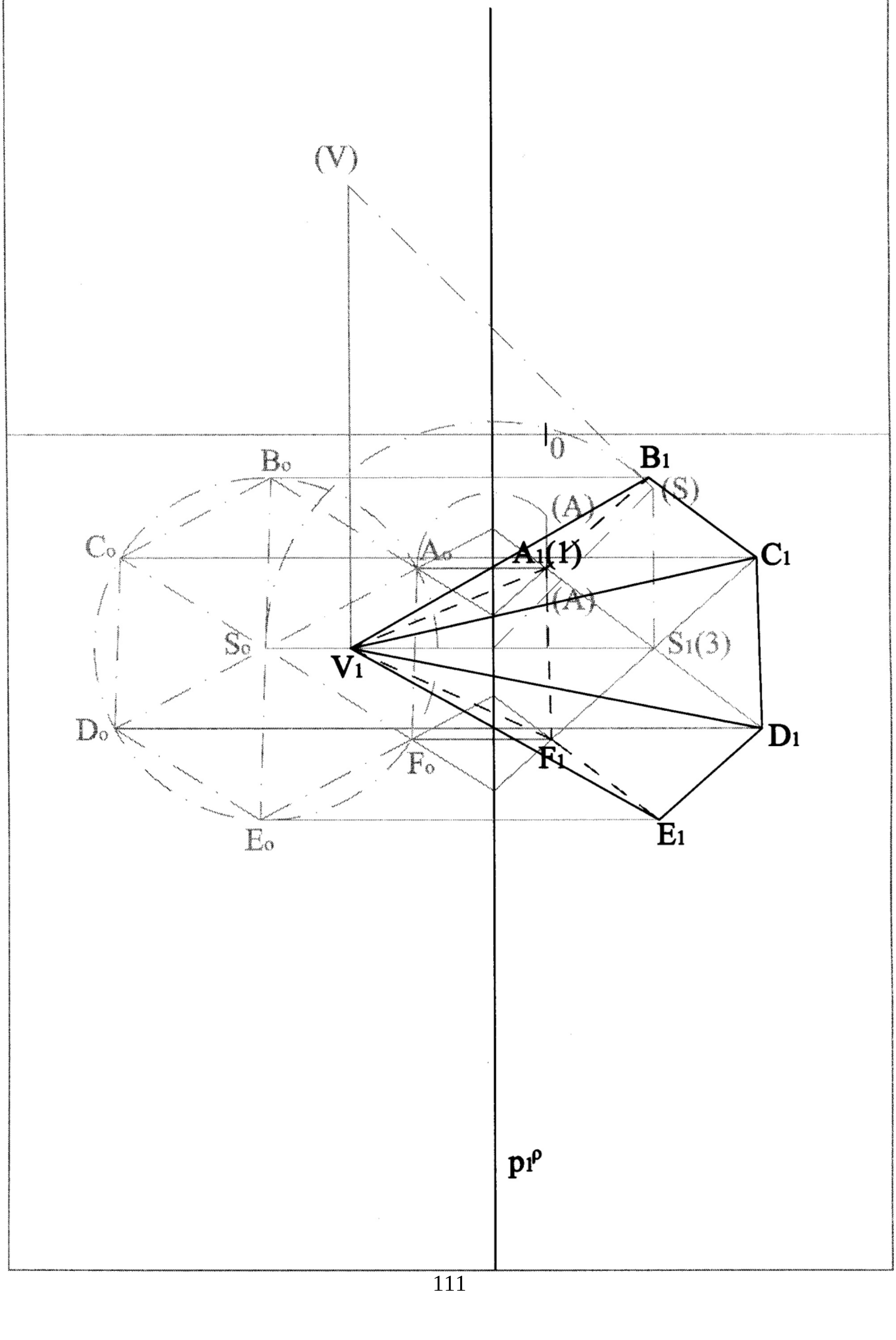
Sklopením bodů A a S určíme půdorysný stopník roviny ρ, jímž vedeme půdorysnou stopu roviny kolmou na vynášecí x-ovou osu. Rovinu ρ otočíme do průmětny π a sestrojíme podstavu tělesa, kterou zpětnou konstrukcí přeneseme do roviny ρ. Nanesením výšky od středu S najdeme vrchol jehlanu a vytáhneme jeho viditelnost.

OBRÁZEK (5.2.7)
Šestiboký jehlan

[56] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 41, úl. 189

5.2.7 Šestiboký jehlan

S = [2; 4; 3], A = [0; 2,5; 1]; v = 80 mm; zv > zs



✓ 5.2.8 Šestiboký jehlan

Zadání:

„Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan s vrcholem V a podstavou $ABCDEF$ v rovině ρ. $\rho = (4; 4; 5)$, $A = [1; 2; ?]$, $V = [4{,}5; 8{,}5; 8]$." [57]

Řešení:

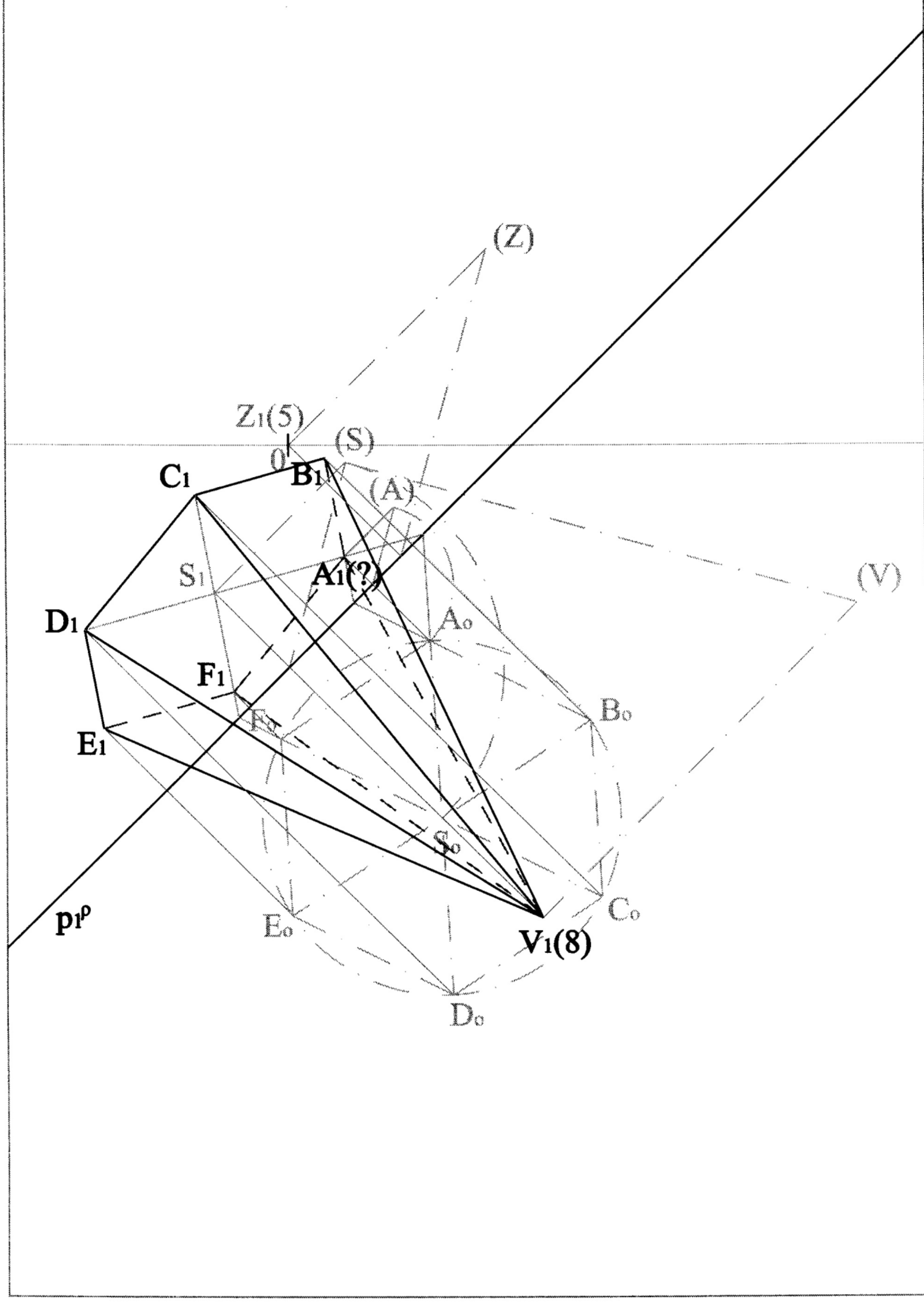
Průnikem přímky procházející vrcholem V kolmo k rovině ρ je střed podstavy S. Rovinu ρ otočíme do průmětny π a sestrojíme podstavu tělesa ve skutečné velikosti. Podstavu přeneseme zpětnou konstrukcí do roviny ρ a vytáhneme výslednou viditelnost hledaného tělesa.

OBRÁZEK (5.2.8)
Šestiboký jehlan

[57] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 41, úl. 191

5.2.8 Šestiboký jehlan

$\rho = (4; 4; 5)$; $A = [1; 2; ?]$, $V = [4{,}5; 8{,}5; 8]$



✓ 5.2.9 Čtyřstěn

Zadání:

„Zobrazte pravidelný čtyřstěn *ABCD*, jehož stěna *ABC* leží v rovině ρ.
ρ = (-3; 6; 3), *A* = [0; 3; ?], *B* = [4; 7,5; ?], $z_C > 0$, $z_D > z_A$.“ [58]

Řešení:

Vyneseme rovinu ρ a určíme chybějící z-ové souřadnice bodů *A* a *B*. Otočíme rovinu ρ do průmětny π, kde zkonstruujeme podstavu tělesa ve skutečné velikosti a zpětně ji přeneseme do roviny ρ. K určení výšky čtyřstěnu sestrojíme pomocnou trojúhelníkovou konstrukci, kde vzdálenost středu podstavy *S* a středu hrany podstavy *X* představuje jednu odvěsnu trojúhelníka, přeponu pak délka hrany čtyřstěnu a druhá odvěsna jeho hledanou výšku. Vzniklou výšku naneseme od středu *S*, čímž najdeme vrchol tělesa a vytáhneme jeho viditelnost.

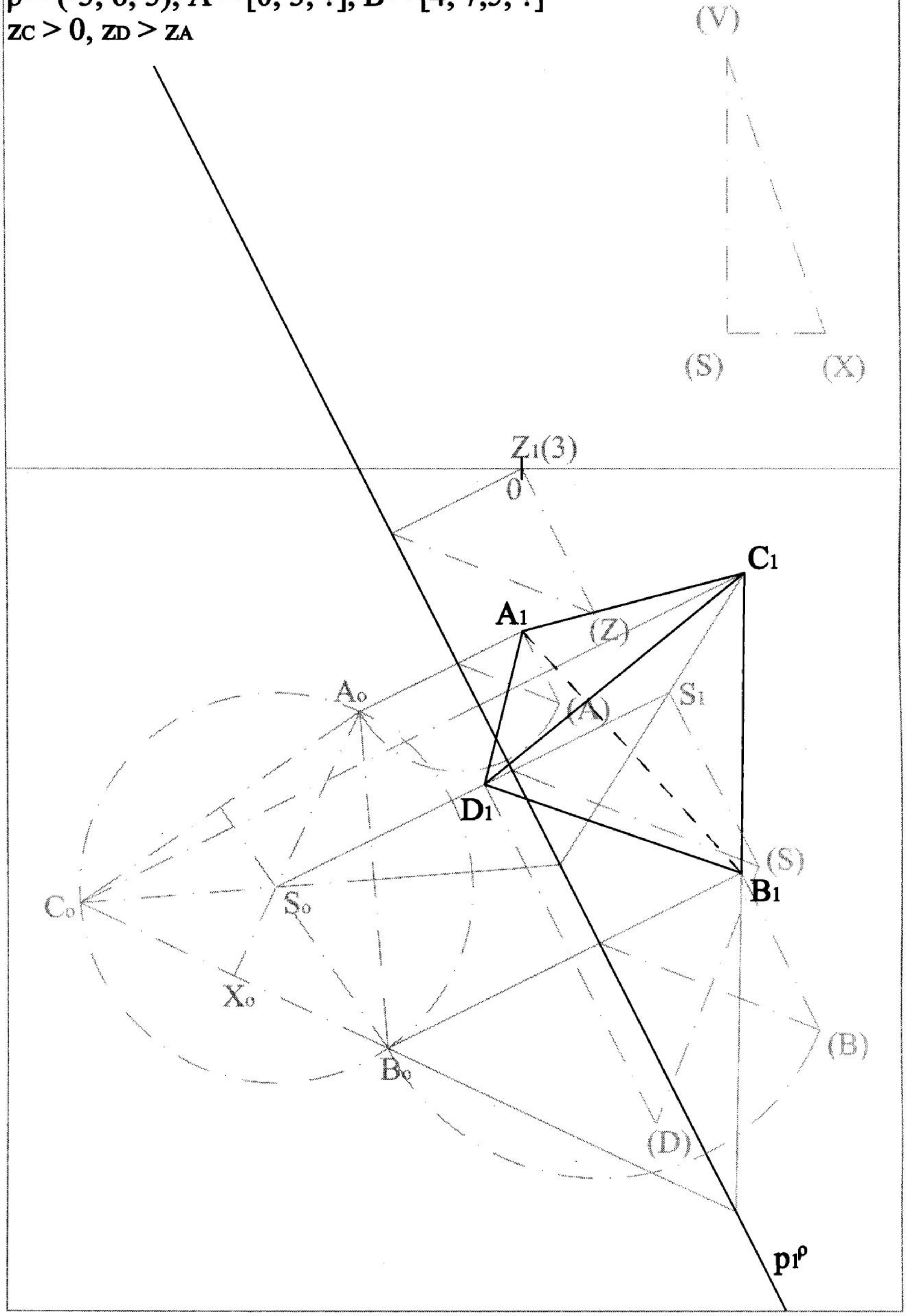
OBRÁZEK (5.2.9)
Čtyřstěn

[58] MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Praha: Prometheus, 2006, s. 42, úl. 194

5.2.9 Čtyřstěn

$\rho = (-3; 6; 3)$; $A = [0; 3; ?]$, $B = [4; 7{,}5; ?]$

$z_C > 0$, $z_D > z_A$



◆ 6 Test z prostorové geometrie

Test je složen z prostorových geometrických úloh pro základní školy.

Cílem testu je ukázat, že studenti čtvrtého ročníku Univerzity Palackého v Olomouci mají lepší průpravu k řešení prostorových úloh než jejich mladší kolegové díky zkušenostem získaných při studiu.

Test jsem provedl ve druhém ročníku Střední průmyslové škole stavební v Lipníku nad Bečvou a na Univerzitě Palackého v Olomouci v prvním ročníku bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání a čtvrtém ročníku magisterského studijního programu Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Mezi vybranými skupinami studentů byl tedy rozdíl 2 studijní ročníky.

Na následujících stránkách provádím rozbor úloh použitých v testu v pořadí: zadání, řešení a vyhodnocení. U jednotlivých úloh jsem tučně uvedl správné řešení a ve vyhodnocení jsem uvedl maximální počet bodů, jenž mohli studenti za daný úkol získat, a grafy úspěšnosti studentů jednotlivých ročníků vyjádřené v procentech.

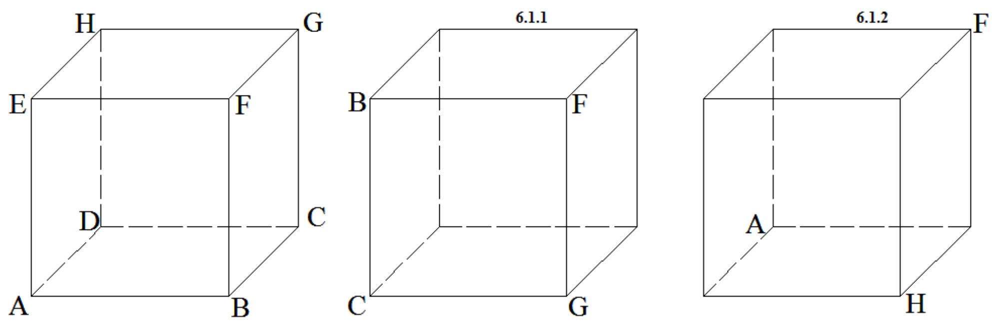
V hodnocení používám tři typy grafů, v nichž rozeznávám úspěšnost v řešení dílčích úloh, úloh jednoho číselného celku a nakonec všech úloh dohromady. Graf, v kterém udávám úspěšnost řešení dílčích úloh, jsem označil jako: Úloha a číslo složené ze tří číselné kombinace oddělených tečkou /např. Úloha 6.1.1/, Graf, v němž uvádím úspěšnost řešení jednoho číselného celku, jsem pojmenoval pouze: Úloha a číslo složené ze dvou číselné kombinace /např. Úloha 6.1/ a nakonec jsem test vyhodnotil jako celek.

Vyhodnocením a porovnáním výsledků testu jsem zjistil, že díky hlubším studijním znalostem jej nejlépe zvládli studenti čtvrtého ročníku magisterského studijního programu Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

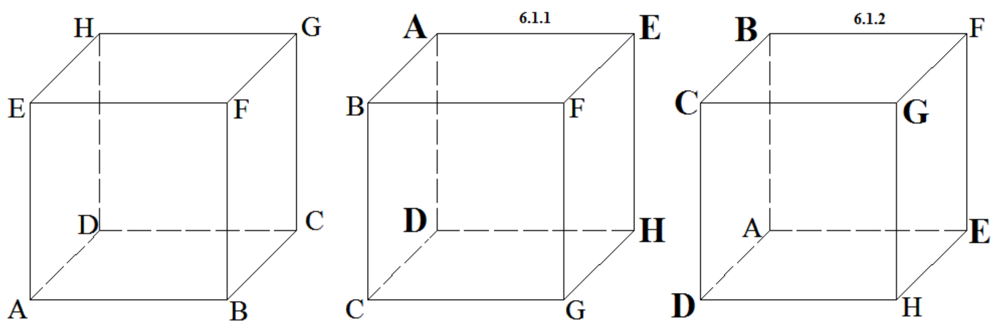
✓ Úloha 6.1

Zadání:

„Na obrázku je stejná krychle v různých polohách. Doplňte popis neoznačených vrcholů.“ [59]

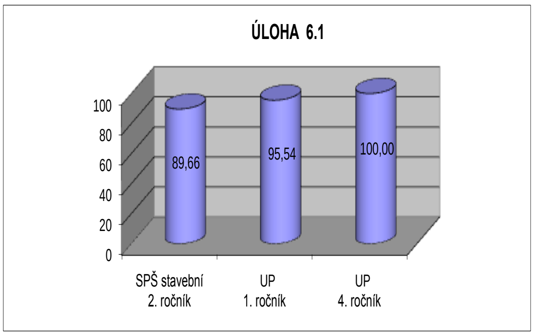


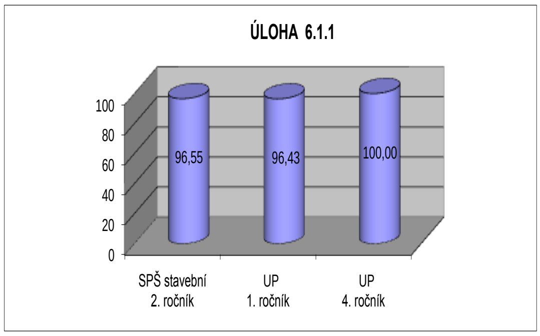
Řešení:

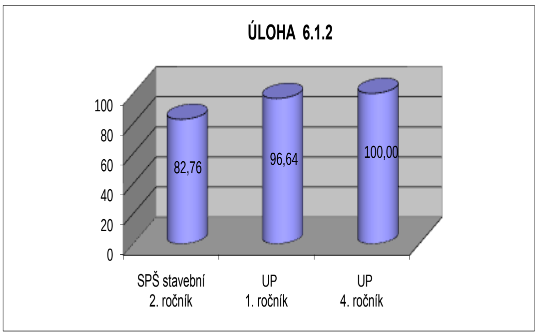


Vyhodnocení:

Max. možnost získaných bodů – 2 (1 bod – ÚLOHA 6.1.1, 1 bod – ÚLOHA 6.1.2)





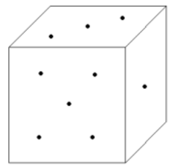


[59] *Testy z víceletých gymnázií 2003*- Matematika. Brno: DIDAKTIS, 2002, s. 106, úl. 10

✓ Úloha 6.2

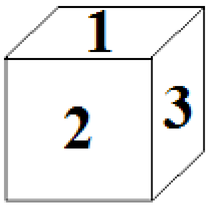
Zadání:

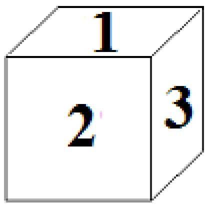
„Součet ok na každých dvou protějších stěnách hrací kostky je 7.
Nakreslete kostku, která je na obrázku, jestliže se:

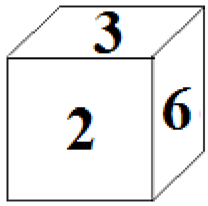


6.2.1 překlopila jednou doprava a potom dvakrát dozadu,
6.2.2 překlopila dvakrát dopředu a potom jednou doleva,
6.2.3 překlopila dvakrát doleva a dvakrát dozadu.“ [60]

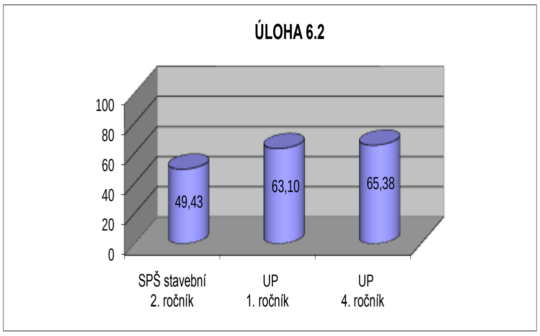
Řešení:

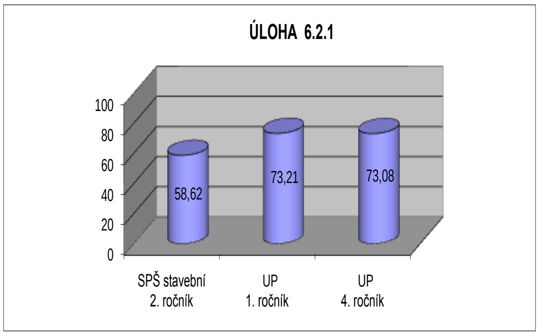
6.2.1


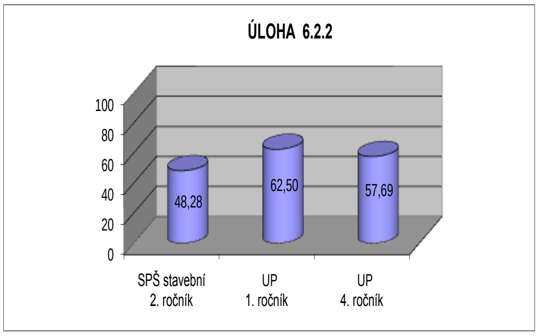
6.2.2


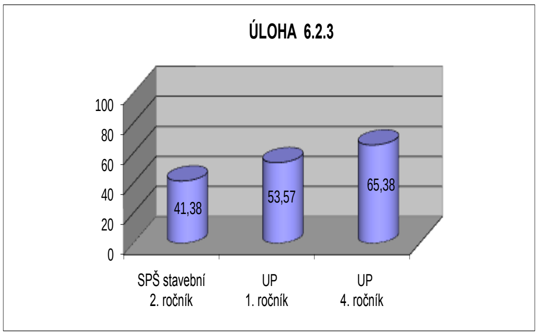
6.2.3


Vyhodnocení:
Max. možnost získaných bodů – 3 (1 bod – úkol ÚLOHA 6.2.1, 1 bod – ÚLOHA 6.2.2, 1 bod – ÚLOHA 6.2.3)







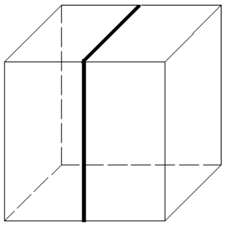
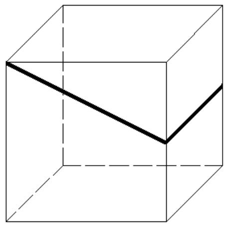
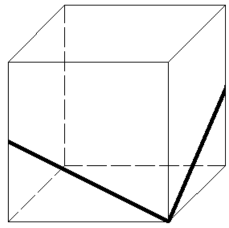


[60] CIHLÁŘ, J, LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ E., ZELENKA, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007, s. 96, úl. 1

✓ **Úloha 6.3**

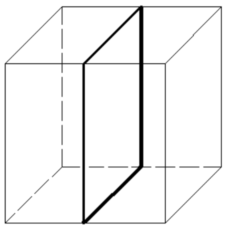
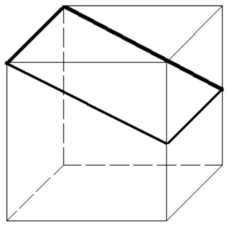
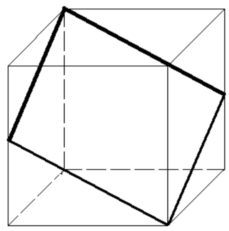
Zadání:

„Na obrázcích jsou znázorněny viditelné části řezů krychle různými rovinami. Roviny řezů jsou určeny vrcholy krychle, popřípadě středy hran krychle. Dorýsujte do každého obrázku neviditelné strany rovinného řezu a pojmenujte skutečný tvar řezu.“ [61]

6.3.1  6.3.2  6.3.3 

....

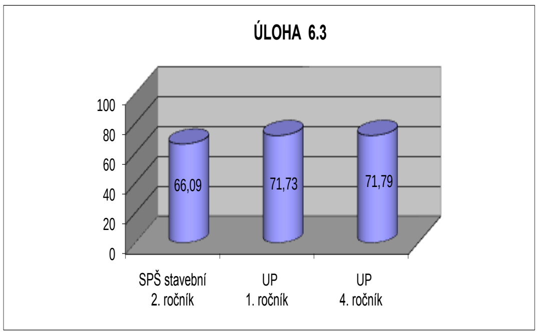
Řešení:

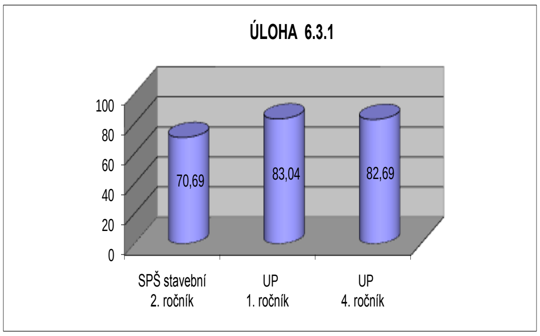
6.3.1  6.3.2  6.3.3 

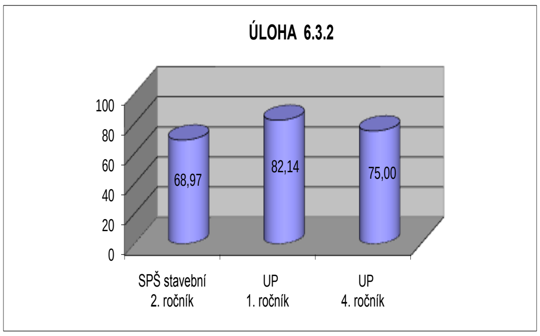
čtverec **obdélník** **kosočtverec**

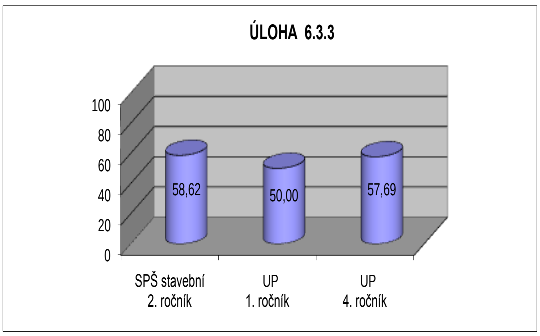
Vyhodnocení:

Max. možnost získaných bodů – 3 (1 bod – ÚLOHA 6.3.1, 1 bod – ÚLOHA 6.3.2, 1 bod – ÚLOHA 6.3.3)







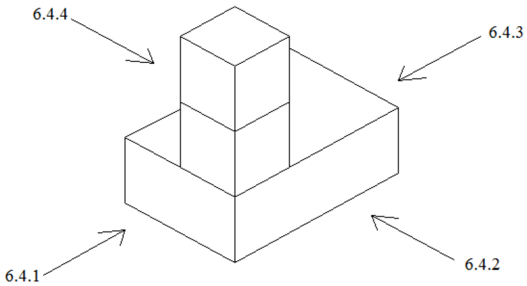


[61] CIHLÁŘ, J, LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ E., ZELENKA, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007, s. 108, úl. 11

✓ Úloha 6.4

Zadání:

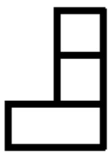
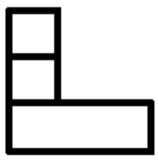
„Nakreslete, co vidíte z jednotlivých míst na obrázku.“ [62]

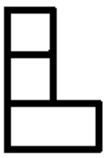
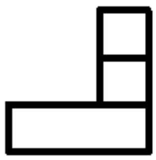


6.4.1 6.4.2

6.4.3 6.4.4

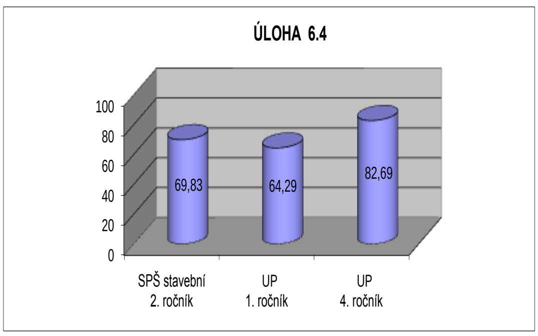
Řešení:

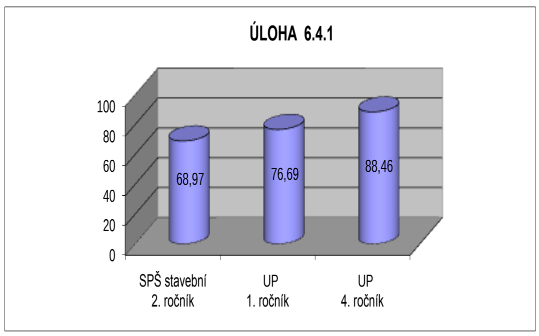
6.4.1 
6.4.2 

6.4.3 
6.4.4 

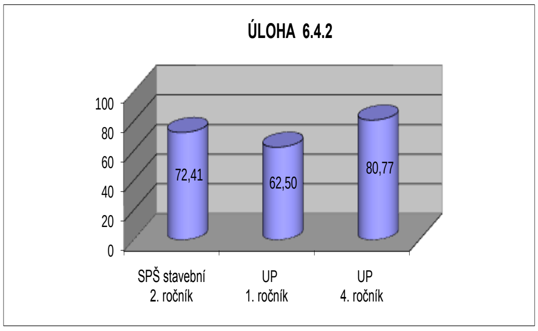
Vyhodnocení:

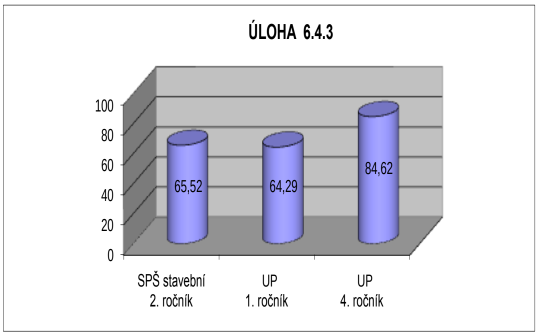
Max. možnost získaných bodů – 4 (1 bod – ÚLOHA 6.4.1, 1 bod – ÚLOHA 6.4.2, 1 bod – ÚLOHA 6.4.3, 1 bod – ÚLOHA 6.4.4)

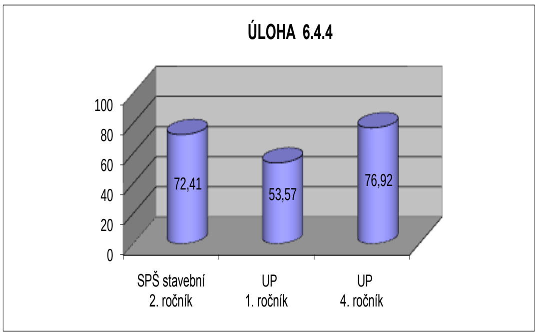




[62] SÝKORA, V., AUSBERGEROVÁ, M. a kol. *Sbírka úloh z matematiky k přijímacím zkouškám na gymnázia osmiletá, šestiletá, čtyřletá.* Praha: SPN, 1998, s. 27, úl. 2.4.8


ÚLOHA 6.4.2
100
80
60
40
20
0
72,41
62,50
80,77
SPŠ stavební
2. ročník
UP
1. ročník
UP
4. ročník

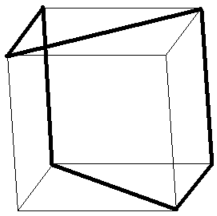

ÚLOHA 6.4.3
100
80
60
40
20
0
65,52
64,29
84,62
SPŠ stavební
2. ročník
UP
1. ročník
UP
4. ročník

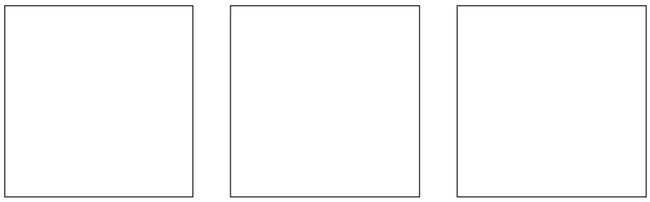

ÚLOHA 6.4.4
100
80
60
40
20
0
72,41
53,57
76,92
SPŠ stavební
2. ročník
UP
1. ročník
UP
4. ročník

✓ Úloha 6.5

Zadání:

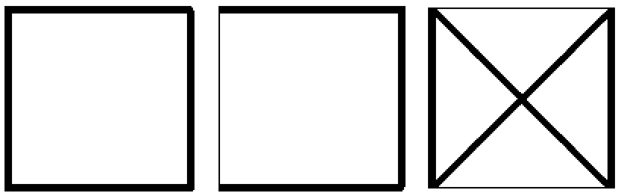
„Na obrázku je zobrazena průhledná krychle, na níž je navinut drát /tlusté čáry/. Nakreslete do čtverců 6.5.1, 6.5.2, 6.5.3 pohled na krychli zepředu (6.5.1), z boku (6.5.2) a shora (6.5.3).“ [63]





6.5.1 6.5.2 6.5.3

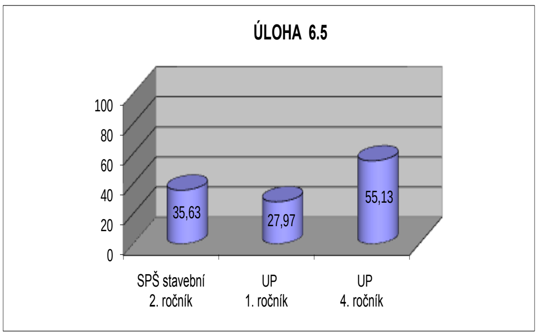
Řešení:

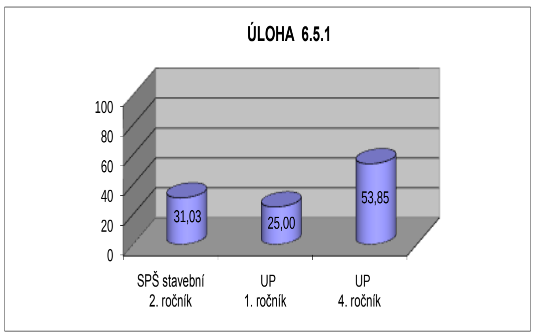


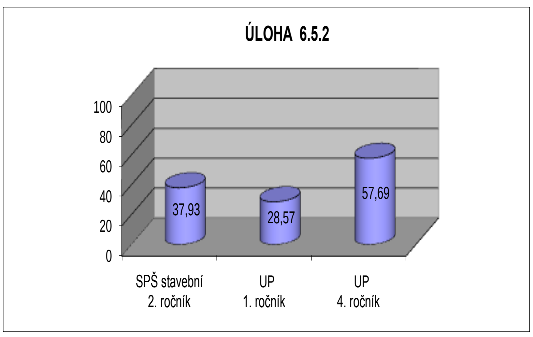
6.5.1 6.5.2 6.5.3

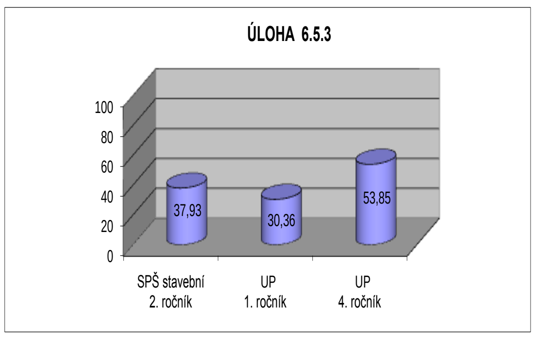
Vyhodnocení:

Max. možnost získaných bodů – 3 (1 bod – ÚLOHA 6.5.1, 1 bod – ÚLOHA 6.5.2, 1 bod – ÚLOHA 6.5.3)









[63] SÝKORA, V., AUSBERGEROVÁ, M. a kol. *Sbírka úloh z matematiky k přijímacím zkouškám na gymnázia osmiletá, šestiletá, čtyřletá.* Praha: SPN, 1998, s. 105, úl. 4.6.9

✓ Úloha 6.6

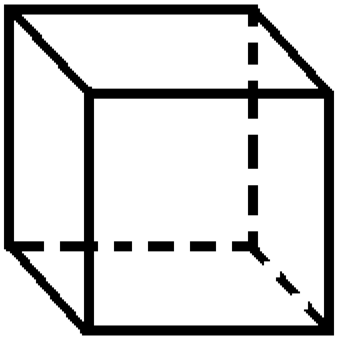
Zadání:

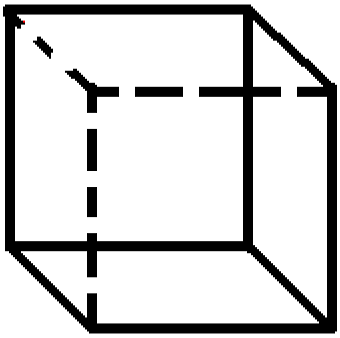
„Zobrazte krychli jako:

6.6.1 nadhled zleva, 6.6.2 podhled zprava.“ [64]

Řešení:

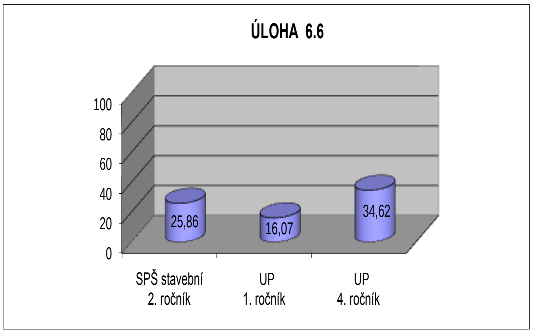
6.6.1 nadhled zleva 6.6.2 podhled zprava

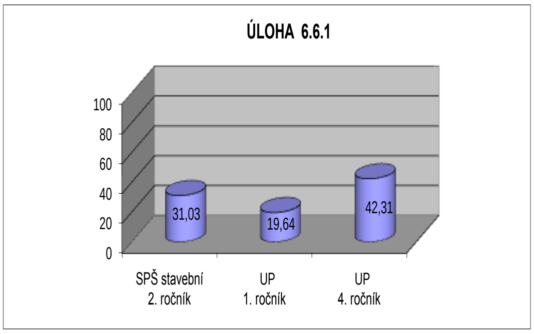


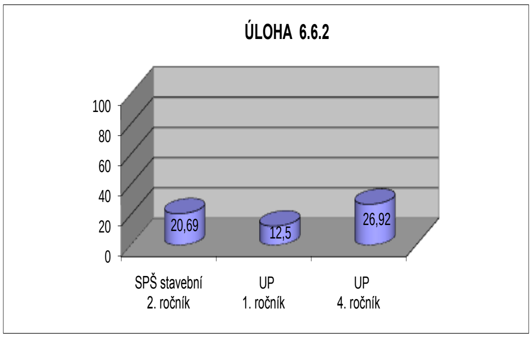


Vyhodnocení:

Max. možnost získaných bodů – 2 (1 bod – ÚLOHA 6.6.1, 1 bod – ÚLOHA 6.6.2)







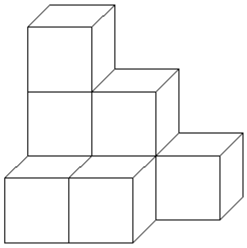
[64] MOLNÁR, J. a kol. *Matematika 6 – pracovní sešit 2. část.* Olomouc: PRODOS, 1998, s. 136, úl. 2

✓ Úloha 6.7

Zadání:

„Na obrázku vidíte stavbu složenou z krychlí.
Krychlová stavba má tuto mapu.

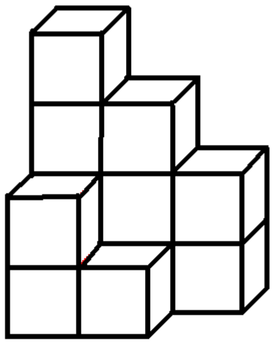
3	2	1
1	1	0



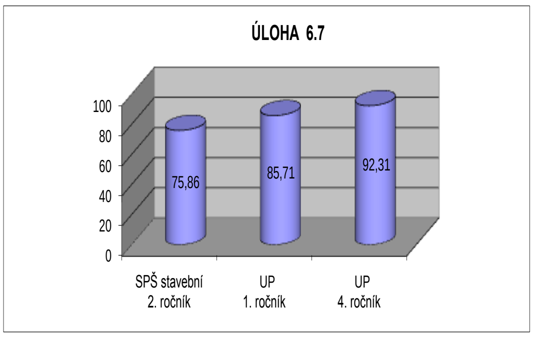
Nakreslete podle mapy v bodové síti obrázek krychlové stavby.“ [65]

4	3	2
2	1	0

Řešení:



Vyhodnocení:
Max. možnost získaných bodů – 1.

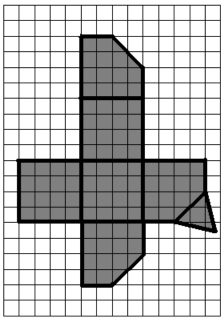


[65] CIHLÁŘ, J., LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ, E., ZELENKAM, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007, s. 96, úl. 2

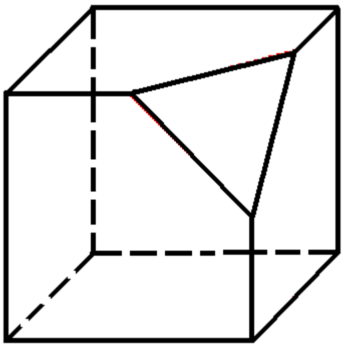
✓ **Úloha 6.8**

Zadání:

„Nakreslete názorný obrázek tělesa, které má tuto síť.“ [66]

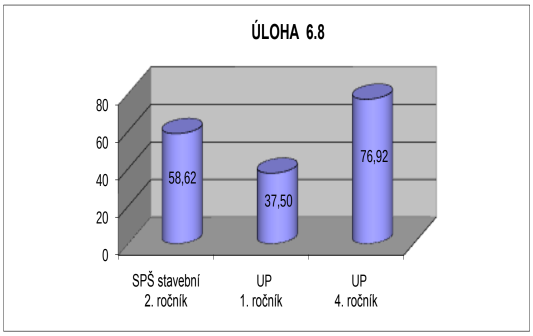


Řešení:



Vyhodnocení:

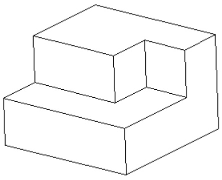
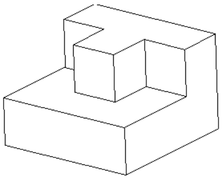
Max. možnost získaných bodů – 1.

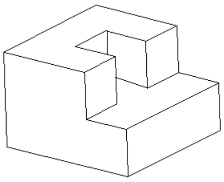
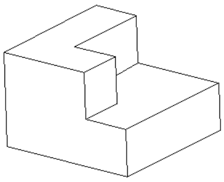


[66] CIHLÁŘ, J., LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ, E., ZELENKAM, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007, s. 97, úl. 5

✓ **Úloha 6.9**

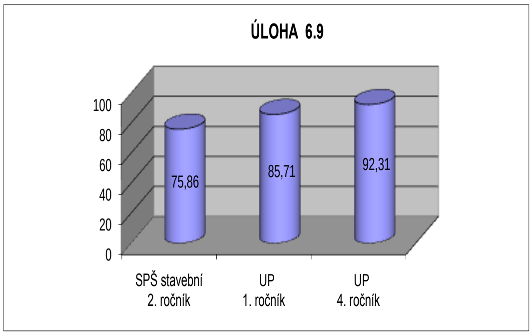
Zadání:
„Která dvě tělesa po spojení vytvoří krychli /zakroužkujte/.“ [67]

A.  B. 

C.  D. 

Řešení:
B a **C**

Vyhodnocení:
Max. možnost získaných bodů – 1.



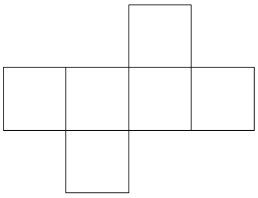
[67] *Testy z víceletých gymnázií ´98.* Brno: DIDAKTIS, 1997, s. 104, úl. 6

✓ **Úloha 6.10**

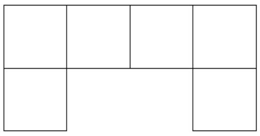
Zadání:

„Barborka chce slepit papírovou krabičku tvaru krychle bez víčka, ale s dvojitým dnem, aby byla pevnější. Krabička je shora otevřená. Který z tvarů může použít ke zhotovení krabičky /zakroužkujte/.“ [68]

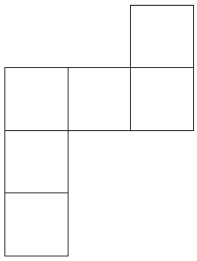
a.



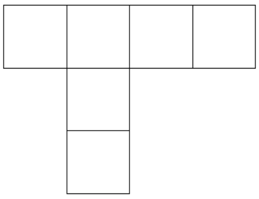
b.



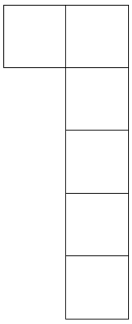
c.



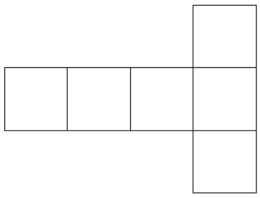
d.



e.



f.

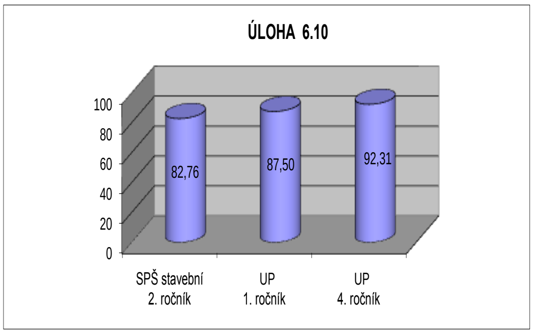


Řešení:

B, C, D.

Vyhodnocení:

Max. možnost získaných bodů – 1.

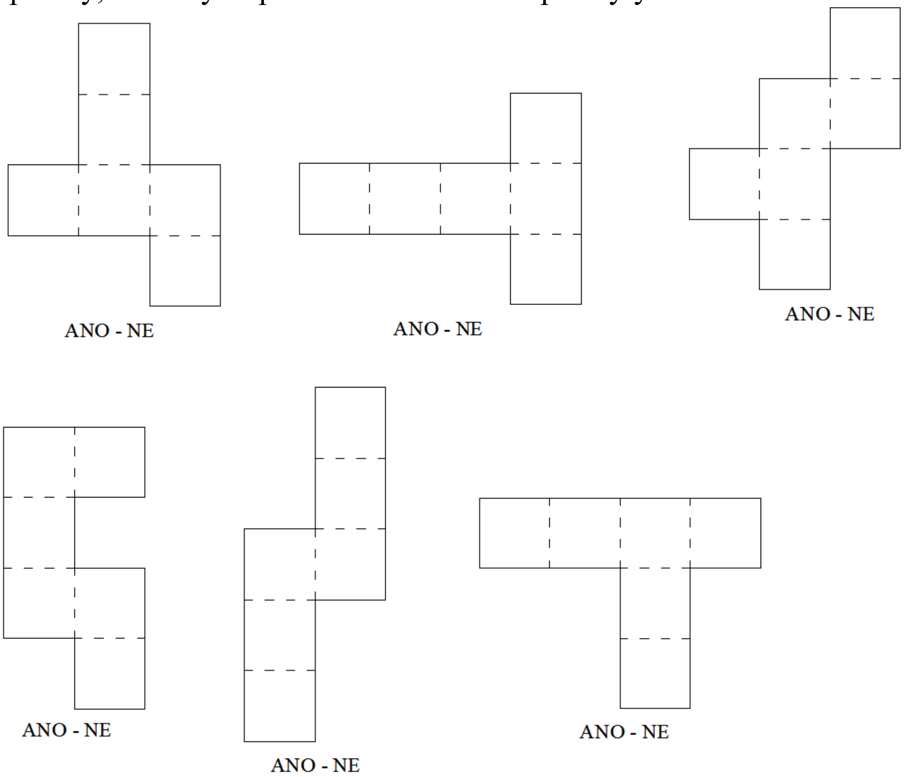


[68] *Testy z víceletých gymnázií 2003.* Brno: DIDAKTIS, 2002, s. 82, úl. 10

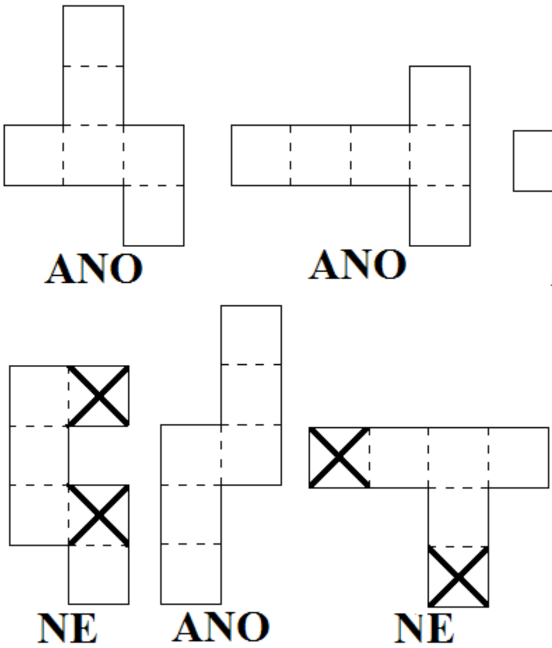
✓ **Úloha 6.11**

Zadání:

„U následujících šesti obrázků zakroužkujte ANO, pokud útvar představuje síť krychle. Pokud se z útvaru nedá složit krychle, zakroužkujte NE a do obrázku označte křížkem čtvercové plochy, které by se při sestavování tělesa překryly.“ [69]

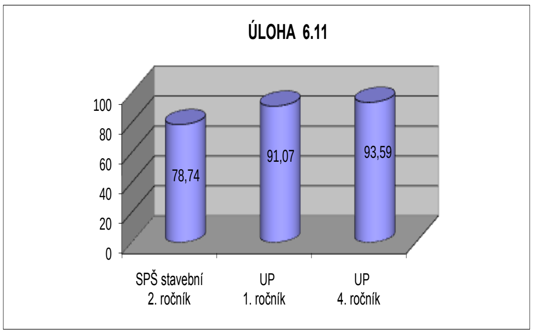


Řešení:

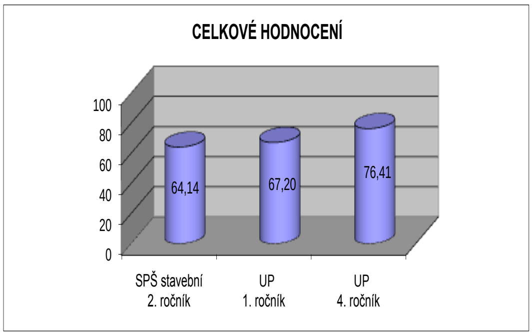


[69] CIHLÁŘ, J., LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ, E., ZELENKAM, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* Praha: ÚIV, 2007, s. 93, úl. 1

Vyhodnocení:
Max. možnost získaných bodů – 1.



Celkové hodnocení:



◆ 7 <u>Závěr</u>

Diplomovou práci jsem zaměřil na kótované promítání, promítání na jednu průmětnu, která se s výhodou využívá ve stavebnictví, jelikož stavební plány jsou pro odborníka snadno čitelné průměty projektovaných staveb.

V první části diplomové práce se zaměřuji na popis jednotlivých prvků, jejich poloh vzhledem k průmětně π a jejich zobrazování do průmětny π. Celý text doplňuji tabulkami a příslušnými obrázky, které vykreslují danou situaci nejen v rovině, ale také v prostoru.

Na závěr této části jsem zařadil polohové a metrické úlohy, které jsem doplnil stručným popisem konstrukcí v jednotlivých krocích, abych umožnil sledovat jejich postupný vývoj.

V druhé části diplomové práce uvádím 15 ukázkových úloh na téma Kótované promítání, včetně jejich zadání a řešení.

V třetí části diplomové práce se zabývám testem, zaměřeným na problematiku prostorové matematiky. V tomto prostorovém testu jsem použil příklady z učebnic pro základní školy. Test zpracovávali studenti 2. ročníku Střední průmyslové školy stavební v Lipníku nad Bečvou, 1. ročníku bakalářského studijního programu Matematika se zaměřením na vzdělávání PdF UP v Olomouci a studenti 4. ročníku magisterského studijního programu Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ na PdF UP v Olomouci.
Cílem testu bylo vyzkoušet, zda studenti 4. ročníku PdF UP v Olomouci mají lepší prostorovou představivost a dokážou tedy dané příklady vypracovat lépe, než jejich mladší kolegové.
Stanovený cíl test ukázal.

◆ Použitá literatura a prameny

BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M. a kol. *Konstruktivní geometrie.* 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství Cerm, 2006. 145 s. ISBN 80-214-3229-2.

CIHLÁŘ, J., LESÁKOVÁ, E., ŘÍDKÁ, E., ZELENKA, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh.* 1. vyd. Praha: ÚIV, 2007. 109 s. ISBN 978-80-211-0544-7.

DRS, L. *Deskriptivní geometrie.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 1994. 130 s. ISBN 80-7196-321-6.

HARANT, M., LANTA, O. *Deskriptivní geometrie část I. pro II. ročník SVVŠ.* 1. vyd. Praha: SPN, 1965. 283 s. ISBN nemá.

MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. 71 s. ISBN 80-7196-160-4.

MOLNÁR, J. a kol. *Matematika 6 – pracovní sešit 2. část.* 1. vyd. Olomouc: PRODOS, 1998. 175 s. ISBN 80-7230-001-6.

PLOCKOVÁ, E., ŘEHÁK, M. *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 3: Mongeova projekce.* 3. vyd. Ostrava: 2008. 55 s. ISBN 978-80-248-1802-3.

RESTL, Č., DOLEŽAL, J. *Kótované promítání a topografické plochy.* 1. vyd. Ostrava: VŠB-TU, 2004. 46 s. ISBN 80- 248-0651-7

Slovník školské matematiky. 1. vyd. Brno: SPN, 1981. 239 s. ISBN nemá.

SÝKORA, V., AUSBERGEROVÁ, M. a kol. *Sbírka úloh z matematiky k přijímacím zkouškám na gymnázia osmiletá šestiletá, čtyřletá.* 1. vyd. Praha: SPN, 1998. 144 s. ISBN 80-85937-98-0.

ŠIMEK, J., ZEDEK, M., SROVNAL, J. *Úvod do konstruktivních a zobrazovacích metod.* 1 vyd. Olomouc: UP, 1971. 264 s. ISBN nemá

ŠŤAUBEROVÁ, Z. *Mongeovo promítání.* 1. vyd. Plzeň: 2004. 48 s. ISBN 80-7043-323-X.

ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody.* 1. vyd. Praha: ROH, 1971. 228 s. ISBN nemá.

Testy z víceletých gymnázií ´98. 1. vyd. Brno: DIDAKTIS, 1997. 128 s. ISBN 80-902440-2-5.

Testy z víceletých gymnázií 2003 - Matematika. 1. vyd. Brno: DIDAKTIS, 2002. 144 s. ISBN 80-86285-58-8.

TONGEL, A., FRIČOVÁ, A., MELICHERČÍKOVÁ, M. *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních.* 1. vyd. Praha: STNL, 1987. 56 s. ISNB nemá.

URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1965. 368 s. ISBN nemá.

◆ Anotace Diplomové práce

Jméno a příjmení:	Lubor Mrva
Katedra:	Katedra matematiky PdF UP Olomouc
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Polohové a metrické úlohy v kótovaném promítání na středních školách
Název v angličtině:	Positional and metrical tasks in dimensioned projection at high schools
Anotace práce:	Diplomovou práci jsem zaměřil na polohové a metrické úlohy kótovaného promítání. V první části diplomové práce se zaměřuji na popis jednotlivých prvků (bodů, přímek, rovin), polohové a metrické úlohy. Celou tuto část doplňuji tabulkami a doprovázím obrázky. V druhé části diplomové práce uvádím 15 vytypovaných úloh, u kterých uvádím zadání a řešení. V třetí části diplomové práce se zabývám diplomovým testem zaměřeným na problematiku prostorové matematiky. V tomto testu jsem použil příklady z učebnic pro ZŠ.
Klíčová slova:	Průmětna π, průmět, bod, přímka, rovina.
Anotace v angličtině:	I have focused this Dissertation on the positional and metric tasks of the Quoted projection. The first part of this thesis is aimed on the description of the individual elements (points, lines, levels), of the positional and metric tasks.This whole part is supported by tables and images. In the second part of this dissertation I give 15 designated tasks with settings and solutions. The third part deals with the diploma test aimed on the issue of the spatial mathematics. In this test I have used tasks from books for the elementary shool.
Klíčová slova v angličtině:	The plane of projection π, The projection, The point, The straight line, The plane.
Rozsah práce:	132 stran
Jazyk práce:	Čeština