



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND  
BIOMECHANICS

## POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V BLÍZKOSTI KONCENTRÁTORU NAPĚTÍ NA BI-MATERIÁLOVÉM ROZHRANÍ

A STUDY OF THE STRESS FIELD NEAR THE STRESS CONCENTRATOR AT THE BI-MATERIAL  
INTERFACE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ONDŘEJ KREPL

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2010/2011

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Ondřej Krepl

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Popis rozložení napětí v blízkosti koncentrátoru napětí na bi-materiálovém rozhraní**

v anglickém jazyce:

### **A study of the stress field near the stress concentrator at the bi-material interface**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Koncentrátory napětí typu vrub nebo trhlina jsou, ať již záměrně nebo nechtěně, běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití, zejména v příp. kompozitů sestavených z více jak jednoho typu materiálu. Z hlediska rozložení napětí se např. vrub chová jako jeho koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude se seznámit s problematikou popisu rozložení napětí v blízkosti takového koncentrátoru a aplikací základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování jeho dalšího chování.

Cíle bakalářské práce:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace trhliny, vrubu a bi-materiálového rozhraní.
2. Analytický popis napětí v okolí bimateriálového vrubu.
3. Určení koeficientů intenzity napětí bimateriálového vrubu pomocí analytických metod v kombinaci s MKP.

Seznam odborné literatury:

Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.

Ševeček, O. Solution of genral stress concetrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory, disertační práce, 2009

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 29.11.2010

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.  
Děkan fakulty

## Abstrakt

Cílem předkládané práce je seznámení se s problematikou rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu, příp. trhliny kolmé na rozhraní, vyjádření exponentu singularity napětí. První část pojednává o základech lineárně elastické lomové mechaniky tedy i Irwinovy koncepcí faktoru intenzity napětí. Druhá část se věnuje popisu anisotropních materiálů, pomocí teorie komplexních potenciálů. Závěrečná, třetí část se zabývá výpočtem vlastních čísel isotropních a anisotropních materiálů a také aplikací LES formalismu na výpočet singularit napětí bimateriálového ortotropního vrubu resp. trhliny šířící se kolmo na bimateriálové rozhraní.

## Abstract

The aim of this work is the solution of problems of the stress distribution near bimaterial notch tip or eventually the crack impinging orthogonally the bimaterial interface, determination of stress singularity exponent. The first part is concerned with basics of linear elastic fracture mechanics, i.e. Irwin's concept of stress intensity factor. The second part is devoted to description of anisotropic materials by complex potential theory. The final part is focused on calculation of eigenvalues of both isotropic and anisotropic materials and application of LES formalism on the calculation of stress singularities of the bimaterial orthotropic notch or the crack impinging orthogonally the bimaterial interface.

## Klíčová slova

Lomová mechanika, módy zatěžování, anisotropní materiál, ortotropní materiál, LES formalismus, vrub, trhlina, exponent singularity napětí

## Key words

Fracture mechanics, fracture modes, anisotropic material, orthotropic material, LES formalism, notch, crack, stress intensity factor

## Bibliografická citace

KREPL, O. *Popis rozložení napětí v blízkosti koncentrátoru napětí na bi-materiálovém rozhraní*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 29 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D..

## Prohlášení

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 24. 5. 2010

---

Ondřej Krepl

## Poděkování

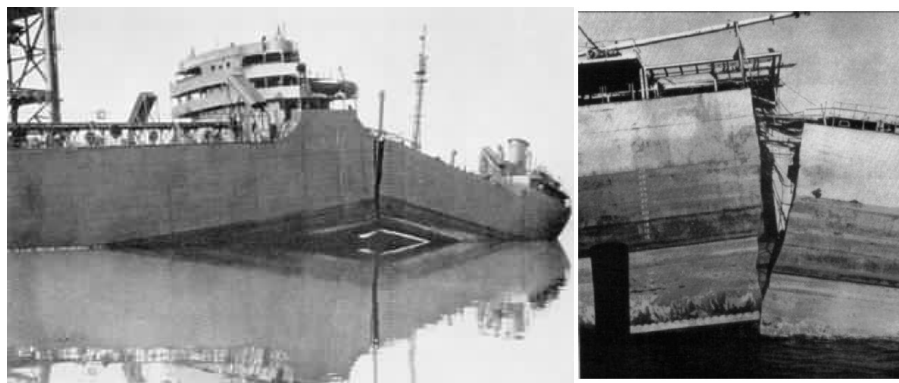
Rád bych upřímně poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za drahocenné rady a vědomosti, jež byly pro mne velkým přínosem. Vděčím taktéž za cenný čas, který mi věnoval a neméně za ochotnou pomoc po celou dobu vzniku této práce.

Dále bych chtěl poděkovat rodičům, kteří mi byli vždy v životě velkou oporou.

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2 Základní pojmy lomové mechaniky</b>	<b>8</b>
2.1 Módy zatěžování . . . . .	8
2.2 Faktor intenzity napětí . . . . .	8
2.3 Stabilita šíření trhliny . . . . .	11
<b>3 Lineární anizotropní materiál</b>	<b>12</b>
3.1 Konstitutivní vztahy . . . . .	12
3.2 Matice $C$ vybraných typů materiálů . . . . .	13
<b>4 Numerické příklady</b>	<b>15</b>
4.1 Vlastní čísla materiálu . . . . .	15
4.2 Exponent singularity napětí a rozložení napětí v okolí vrubu a trhliny na bimateriálovém rozhraní	17
<b>A Funkce komplexní proměnné</b>	<b>26</b>
<b>B Formalismus Lechnického, Eshelbyho a Stroha pro popis napětí a posuvů</b>	<b>28</b>





Obrázek 1: Poškození lomem lodě Liberty.

## 1 Úvod

Téměř všechny strojní součásti obsahují geometrické nespojitosti. Velikost a tvar těchto prvků, jež nazýváme *koncentrátory napětí* nebo též *vruby*<sup>1</sup>, podstatně ovlivňují celkové mechanické vlastnosti součástí, např. iniciací a šířením trhlin v jejich blízkosti, které mohou vést až ke rozlomení tělesa na více součástí.

Lom součásti je jev nežádoucí a nevratný. Historie bohužel dokazuje, že nehody způsobené rozpadem tělesa z důvodu vzniku a šíření trhlin mají mnohdy tragické následky. Samostatná vědní disciplína lomová mechanika, popisující nukleaci, iniciaci a šíření trhliny, vznikla s jasným cílem - zabránit opakování podobných katastrof.

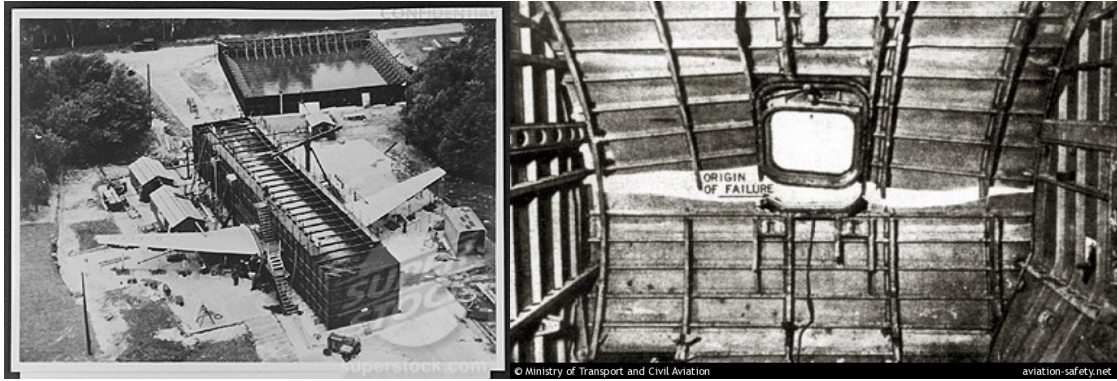
Zřejmě nejznámějším příkladem negativních důsledků přítomnosti trhlin v konstrukčních součástech jsou nákladní lodě třídy Liberty. Tato plavidla, vyráběna jako náhrada za lodě potopené německými ponorkami, měla poslání zásobovat Velkou Británii válečným materiálem a potravinami z USA během 2. světové války na základě zákona o půjčce a pronájmu. Cílem bylo dosáhnout nejrychlejšího a nejlevnějšího zpracování. Místo tradičně používaných nýtovaných spojů se přecházelo na spoje svařované, což byla do té doby poměrně neodzkoušená metoda výroby. Ovšem ani použitý materiál nebyl vhodně zvolen. Užitá ocel vykazovala takzvané tranzitní lomové chování, tj. při plavbě chladnějšími vodami došlo ke změně vlastností z houževnatých na křehké. Z 2700 lodí postavených během druhé světové války přibližně 400 utrpělo vážné poškození lomem, některé byly dokonce rozlomeny na dvě části ve střední části trupu.

Dalším příkladem fatálních důsledků vážných konstrukčních chyb ignorujících zákonitosti iniciace a šíření trhliny je havárie letounu Comet britského výrobce deHavilland, uvedeného do provozu roku 1952. Jednalo se o první letadlo poháněné proudovými motory, které sloužilo ke komerční přepravě osob. Nedlouho po uvedení do provozu, v lednu roku 1954, se toto letadlo zřítilo poblíž ostrova Elba ve Středozemním moři. Během vyšetřování nehody bylo zjištěno, že na vině byla únavová trhlinka, která způsobila odlomení značné části trupu. Příčinou vzniku této trhliny byly koncentrátory napětí, konstrukčně nevhodně řešené rohy oken a také díry pro nýty sloužící k upevnění plátování k draku.

Proces šíření trhliny byl zapříčiněn opakovaným namáháním kabiny přetlakem. Po čtyřech letech konstrukčních úprav vedoucích k robustnějšímu provedení byl letoun Comet opět připraven vyrazit vzhůru do oblak, ovšem mezitím vedoucí pozici na trhu dopravních letadel získal letoun 707 společnosti Boeing. Nicméně ani letadla této americké společnosti nebyla ušetřena problémům s trhlínami. Roku 1988 se během letu Boeingu 737 odlomila přední střešní část kabiny, díky propojení několika únavou vyvolaných trhlin v jednu rozsáhlou. Příčinou byla jak již výše zmíněná cyklická únava vyvolaná přetlakem, ale také koroze. Na základě zmíněných nehod byly rozšířeny poznatky o konstrukci letadel. Příkladem může být snaha nenavrhovat okna s příliš malým poloměrem zaoblení, či užívání lepených spojů místo nýtovaných.

Tragické nehody způsobené porušením trhlínou se bohužel nevyhnuly ani době nedávné. V roce 1998 poblíž městečka Eschede v Německu došlo k vykoľežení vysokorychlostního vlaku ICE 884. Neštěstí po sobě zanechalo 101 obětí. Na vině stála chyba v technické koncepci při dimenzování únavové životnosti kola vagonu a také souhra mnoha dalších nešťastných okolností. Klasické kolo vagonu bývá vytvořeno jako monoblok,

<sup>1</sup>Speciálním případem koncentrátoru napětí je vrub s nulovým úhlem rozevření - také nazývaný trhlina.



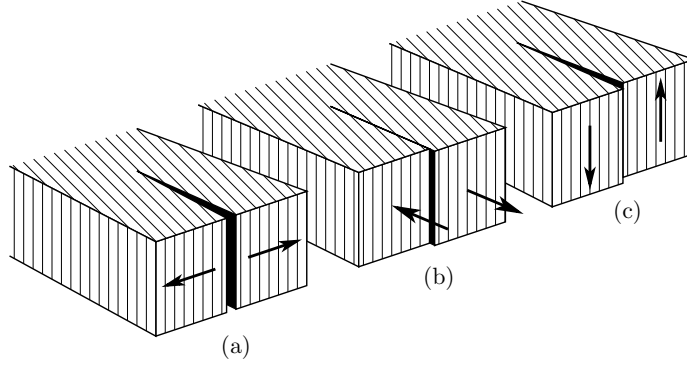
Obrázek 2: Trhlina, která vznikla při testování letadla Comet.



Obrázek 3: (a) Nehoda vlaku ICE. (b) Lomová plocha vnějšího věnce kola.

ovšem v tomto případě - ve snaze o zlepšení komfortu při cestování - bylo užito kola skládající se ze dvou částí. Vnitřní kolo a vnější věnec kola, proložené vrstvou vibrace tlumící pryže. Vnější věnec byl díky tomu daleko více namáhán a došlo k jeho porušení únavovým lomem.

Předkládaná práce si klade za cíl seznámit s popisem anizotropních materiálů a aplikací tohoto popisu na klasickou teorii lineární lomové mechaniky zavedené na izotropních materiálech.



Obrázek 4: Rozevírací („in-plane opening“). (b) Smykový („in-plane shearing“). (c) Stříhový („anti-plane shearing“).

## 2 Základní pojmy lomové mechaniky

### 2.1 Módy zatěžování

Jelikož nemůžeme nahlížet na procesní zónu jako na kontinuum, nemůžeme v této zóně aplikovat metody mechaniky kontinua. Avšak znalost napětí a deformací mimo tuto oblast je pro nás zásadní při porozumění procesu růstu trhliny případně lomu, přičemž analytické i numerické metody hrají v tomto případě významnou roli. Mezi numerickými metodami převažuje metoda konečných prvků. Analytické metody jsou obvykle založeny na řešení parciálních diferenciálních rovnic či integrálních rovnic. Obecně vyžadují značnou idealizaci geometrie tělesa, parametrů konstitutivních vztahů a plastické zóny. Analytická řešení nám nicméně umožňují pochopení základních vztahů, protože tyto vztahy není vždy možné vyjádřit z numerického řešení, a navíc jsou také velmi užitečné při posuzování přesnosti metod numerických.

Každý proces zatěžování trhlín je možno chápat jako superpozici těchto tří *módů*[4].

- *Rozevírací mód*, obrázek 4a. Tento mód označujeme jako mód I. Problémy tohoto módu lze řešit jako úlohu rovinné deformace případně napjatosti.
- *Smykový mód*, obrázek 4b. Tento mód označujeme jako mód II. Problémy tohoto módu lze opět řešit jako úlohu rovinné deformace případně napjatosti.
- *Stříhový mód*, obrázek 4c. Tento mód označujeme jako mód III. Na rozdíl od předchozích jde o anti-rovinný problém.

### 2.2 Faktor intenzity napětí

Výše zmíněné módy zatěžování jsou nesmírně důležité při analýze trhliny a lomu. Mějme souřadný systém jak naznačuje obrázek 5, a nechtě  $u$ ,  $v$ ,  $w$  jsou složky posuvů  $\mathbf{u}$ ;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\dots$ ,  $\tau_{yz}$  jsou složky tenzoru napětí, pak pro jednotlivé módy můžeme psát,

- Mód I. Složka posuvu  $u$  je symetrická, složka posuvu  $v$  je anti-symetrická,

$$u(x, -y, z) = u(x, y, z), \quad v(x, -y, z) = -v(x, y, z), \quad (1)$$

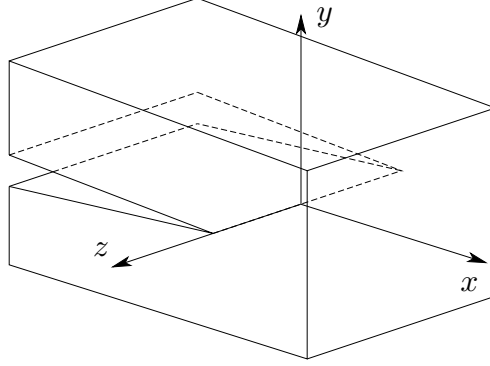
$$w = 0 \quad (\text{rovinná deformace}), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{rovinná napjatost}). \quad (2)$$

V případě izotropního materiálu určitá symetrie napětí vyplývá z předpokladu symetrie posuvů,

$$\sigma_{xx}(x, -y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z), \quad \sigma_{yy}(x, -y, z) = \sigma_{yy}(x, y, z), \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}(x, -y, z) = \sigma_{zz}(x, y, z), \quad \tau_{xy}(x, -y, z) = -\tau_{xy}(x, y, z), \quad (4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5)$$



Obrázek 5: Systém souřadnic na čele trhliny.

- Mód II. Složka posuvu  $u$  je anti-symetrická, složka posuvu  $v$  je symetrická,

$$u(x, -y, z) = -u(x, y, z), \quad v(x, -y, z) = v(x, y, z), \quad (6)$$

$$w = 0 \quad \text{pro rovinnou deformaci}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pro rovinnou napjatost}. \quad (8)$$

- Mód III. Složka posuvu  $w$  je jedinou nenulovou složkou a je anti-symetrická

$$u = v = 0, \quad w(x, -y, z) = -w(x, y, z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Obdobně jako u módu I, ze symetrie posuvů vyplývají následující symetrie napětí

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0, \quad (10)$$

$$\tau_{xz}(x, -y, z) = -\tau_{xz}(x, y, z), \quad \tau_{yz}(x, -y, z) = \tau_{yz}(x, y, z), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

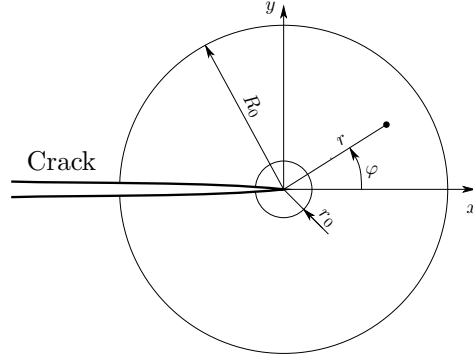
Dále budeme předpokládat, že plastická a disipační zóna jsou zanedbatelné vzhledem k velikosti součásti a trhliny, tj že platí vztahy lineární lomové mechaniky (LELM).

Jestliže  $r$  určuje vzdálenost od vrcholu trhliny, je možné dokázat, viz Broberg[2], že napětí v blízkosti hrany trhliny je úměrné  $r^{-1/2}$  v případě malých plastických deformací. Za oblast blízkou vrcholu trhliny lze považovat vnitřek mezikruží mezi poloměry  $r_0$  a  $R_0$  viz obr. 6, kde předpokládáme, že platí vztahy LELM. V průběhu monotónního zatěžování, disipační zóny nezávisí na geometrii tělesa a charakteru zatěžování. To znamená, že výše popsané rovnice platí pro různá tělesa stejného materiálu, rozložení napětí-deformace v plastické zóně je shodné, vyjma statistických odchylek. Tyto podmínky nám umožňují zavést *faktor intenzity napětí*<sup>2</sup>, Irwin [3, 4] pro módy I, II a III

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_{\varphi\varphi}(r, 0) \right], \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \tau_{r\varphi}(r, 0) \right], \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \tau_{\varphi z}(r, 0) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

kde  $\sigma_{\varphi\varphi}$  je tečné napětí a  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{\varphi z}$  jsou smyková napětí odpovídající příčinnému souřadnému systému, viz obr. 6. Faktor intenzity napětí  $K_I$  je vždy nezáporný, ale naopak faktory  $K_{II}$  a  $K_{III}$  mohou nabývat různých

<sup>2</sup>Faktor intenzity určuje stav disipačních zón v blízkosti vrcholu trhliny při jejich relativně malé velikosti, kde již nelze přesně vyjádřit napětí, ale lze vyjádřit jejich *intenzitu* singularity. Odtud plyne název *faktor intenzity napětí*.



Obrázek 6: Poloměry  $r_0$  a  $R_0$  kruhové oblasti ohraničující čelo trhliny. Kruh o poloměru  $r_0$  ohraničuje disipační zóny, kruh o poloměru  $R_0$  ohraničuje oblast, kde  $r^{-1/2}$  je ještě významné [2].

znamének. Na závěr této kapitoly uvedeme vztahy pro napětí a posuvy vycházející z předpokladu platnosti LELM:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (15)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (16)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) & \text{pro rovinnou deformaci,} \\ 0 & \text{pro rovinnou napjatost.} \end{cases} \quad (17)$$

$$u = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (2 + \kappa + \cos \varphi), \quad (18)$$

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (2 - \kappa - \cos \varphi). \quad (19)$$

kde  $\mu$  je modul pružnosti ve smyku a  $\kappa$  je *Kolosovova konstanta*, pro kterou platí

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{pro rovinnou deformaci,} \\ (3 - \nu) / (1 + \nu) & \text{pro rovinnou napjatost.} \end{cases} \quad (20)$$

Pro napětí a deformace způsobené pouze módem zatěžování II platí

$$\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (21)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (22)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \quad (23)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) & \text{pro rovinnou deformaci,} \\ 0 & \text{pro rovinnou napjatost.} \end{cases} \quad (24)$$

$$u = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (2 + \kappa + \cos \varphi), \quad (25)$$

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (2 - \kappa - \cos \varphi). \quad (26)$$

Pro mód zatěžování III platí

$$\tau_{rz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (27)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (28)$$

### 2.3 Stabilita šíření trhliny

Za jistých okolností se trhlina šíří samovolně bez změny vnějšího zatížení. Dochází tím k poklesu energie napjatosti, kterou označíme jako *hnací síla trhliny*  $G_t$ , Svoboda [8]

$$G_t = \left| \frac{dW}{b \cdot da} \right|, \quad (29)$$

kde  $W$  je energie napjatosti tělesa,  $a$  délka trhliny,  $b$  tloušťka vzorku. Tato energie souvisí s faktorem intenzity napětí a v případě izotropního materiálu mezi oběma platí vztah

$$G_t = \frac{K_I^2}{E}, \quad (30)$$

$K_I$  je faktor intenzity napětí při módu  $I$  a  $E$  je Youngův modul pružnosti. Výraz v absolutní hodnotě ve vztahu (29) udává uvolněnou energii napjatosti při zvětšení lomové plochy o jednotku. Pro určení, zda se trhlina šíří samovolně nebo naopak je potřeba dodávat energii, slouží rovnice energetické bilance ve tvaru

$$dW_z = dW_p - |dW_e|, \quad (31)$$

kde  $dW_p$  představuje energii potřebnou pro zvětšení délky trhliny o  $da$ ,  $dW_e$  je pokles energie napjatosti a  $dW_z$  je energie vnějšího zatížení (práce vnějších sil). Rovnice (31) platí za předpokladu statického a izotermického procesu. Při rozboru zjistíme že mohou nastat tyto tři případy:

1.  $dW_p > |dW_e| \Rightarrow dW_z > 0$  Nerovnost udává, že k šíření trhliny je potřeba dodávat energii vnějšího zatížení. Tento stav je výhodný a označujeme jej jako stabilní šíření trhliny. Pokud nezvýšíme vnější zatížení, trhlina se nebude dále šířit.
2.  $dW_p = |dW_e| \Rightarrow dW_z = 0$  V tomto případě k šíření trhliny stačí uvolněná energie napjatosti. Samovolné šíření nelze ovlivnit změnou vnějšího zatížení. Takový stav označujeme jako mezní.
3.  $dW_p < |dW_e| \Rightarrow dW_z < 0$  Poslední případ je případem nestabilním a nežádoucím. Šířením trhliny dochází k uvolňování energie, dokonce více než je potřeba k samotnému šíření trhliny. Přebytková energie se přeměňuje na energii kinetickou.

### 3 Lineární anizotropní materiál

V této kapitole se budeme zabývat vztahy mezi napětími a deformacemi anizotropního materiálu. Lineární anizotropní materiál může mít až 21 *elastických koeficientů*. Ke snížení počtu zmíněných koeficientů dochází, jestliže materiál vykazuje určitou symetrii. Ve většině případů k redukci elastických koeficientů také dochází, uvažujeme-li dvojrozměrnou deformaci. Protože že deformační energie musí být kladná, musí být matice  $6 \times 6$  elastických koeficientů pozitivně definitní.

#### 3.1 Konstitutivní vztahy

Mějme pravoúhlý systém souřadnic  $x_1, x_2, x_3$ , a necht'  $\sigma_{ij}$  a  $\varepsilon_{ij}$  jsou napětí a deformace v anizotropním materiálu. Vztah mezi napětími a deformacemi můžeme psát

$$\sigma_{ij} = C_{ijks} \varepsilon_{ks}, \quad (32)$$

kde  $C_{ijks}$  jsou elastické koeficienty, které jsou prvky tenzoru čtvrtého řádu. Splňuje podmínky úplné symetrie

$$C_{ijks} = C_{jiks}, \quad C_{ijks} = C_{ijsk}, \quad C_{ijks} = C_{ksij}. \quad (33)$$

Inverzní vztah můžeme zapsat jako

$$\sigma_{ij} = S_{ijks} \varepsilon_{ks}, \quad (34)$$

kde  $S_{ijks}$  jsou elastické moduly, které jsou opět prvky tenzoru čtvrtého řádu. Také tento splňuje podmínky úplné symetrie

$$S_{ijks} = S_{jiks}, \quad S_{ijks} = S_{ijsk}, \quad S_{ijks} = S_{ksij}. \quad (35)$$

V dalším zavedeme zkrácenou notaci tenzorů napětí a deformace která dovoluje zapsat konstitutivní vztahy pomocí matic, viz Ting [1],

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3, \quad (36)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_4, \quad \sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sigma_{12} = \sigma_6,$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, \quad (37)$$

$$2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, \quad 2\varepsilon_{31} = \varepsilon_5, \quad 2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6,$$

nebo-li můžeme psát

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}. \quad (38)$$

Tedy zapsáno maticově,

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \quad (39)$$

kde  $\varepsilon$  je  $6 \times 1$  sloupcová matice,  $\mathbf{C}$  je  $6 \times 6$  symetrická matice a T značí maticovou transpozici

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Dále se budeme zabývat převážně dvojrozměrnou deformací lineárně anizotropních těles, kde platí  $\varepsilon_3 = 0$ . Vztah mezi napětím a deformací přechází na

$$\sigma_\alpha = \sum_{\beta \neq 3} C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6. \quad (41)$$

Neuvažujeme-li rovnici, jež platí pro  $\sigma_3$ , můžeme konstitutivní vztahy napsat ve tvaru

$$\sigma^0 = \mathbf{C}^0 \varepsilon^0, \quad \mathbf{C}^0 = (\mathbf{C}^0)^T, \quad (42)$$

kde

$$(\sigma^0)^T = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6], \quad (43)$$

$$(\varepsilon^0)^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6], \quad (44)$$

a

$$\mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Matici  $\mathbf{C}^0$  získáme z matice  $\mathbf{C}$  odstraněním třetího řádku a třetího sloupce. Protože  $\mathbf{C}^0$  je podmaticí matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní a skládá se z 15 nezávislých elastických koeficientů.

Pro vztah mezi napětím a deformací pro  $\varepsilon_3 = 0$  platí

$$\varepsilon_3 = 0 = s_{3\beta}\sigma_\beta. \quad (46)$$

Odtud pro  $\sigma_3$  dostaneme

$$\sigma_3 = -\frac{1}{s_{33}} \sum_{\beta \neq 3} s_{\alpha 3} s_{3\beta}, \quad (47)$$

a dosazením do (34) dostáváme

$$\varepsilon_\alpha = \sum_{\beta \neq 3} s'_{\alpha\beta} \sigma_\beta, \quad (48)$$

kde

$$s'_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} - \frac{s_{\alpha 3} s_{3\beta}}{s_{33}} = s'_{\beta\alpha} \quad (49)$$

jsou redukované elastické moduly. Zbývá ještě poznamenat, že pro  $s'_{\alpha 3} = s'_{3\beta}$  platí

$$s'_{\alpha 3} = 0, s'_{3\beta} = 0, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6. \quad (50)$$

### 3.2 Matice $\mathbf{C}$ vybraných typů materiálů

Dále následuje přehledný seznam matic  $\mathbf{C}$  některých technicky významných typů materiálů. Symbol  $*$  značí možné nenulové prvky matice  $\mathbf{C}$ , symboly  $\blacklozen$ ,  $\blackstar$  a  $\blacktriangledown$  značí také nenulové prvky, avšak při jejich vícenásobném výskytu se odpovídající prvky matice navzájem rovnají. Symbol  $\otimes$  odpovídá koeficientu  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ , a podobně jako pro předchozí symboly, jeho násobný výskyt znamená vzájemnou rovnost prvků. Parametr  $m$  udává počet nezávislých koeficientů matic  $\mathbf{C}$ .

- Triklinické materiály. Rovina symetrie neexistuje.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \end{bmatrix}, \quad m = 21 \quad (51)$$

- Ortorombické (ortotropní) materiály. Existují tři na sebe kolmé roviny symetrie  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$ ,  $x_1x_3$ .

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ & * & * & 0 & 0 & 0 \\ & & * & 0 & 0 & 0 \\ & & & * & 0 & 0 \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & * \end{bmatrix}, \quad m = 9. \quad (52)$$



- Příčně isotropní materiály. Rovinami symetrie je rovina  $x_3 = 0$  a jakákoli rovina obsahující osu  $x_3$ .

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \blacklozenge & * & \blackstar & 0 & 0 & 0 \\ & \blacklozenge & \blackstar & 0 & 0 & 0 \\ & & * & 0 & 0 & 0 \\ & & & \nabla & 0 & 0 \\ & & & & \nabla & 0 \\ & & & & & \otimes \end{bmatrix}, \quad m = 5 \quad (53)$$

- Isotropní materiály. Jakákoli rovina je rovinou symetrie.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \blacklozenge & \blackstar & \blackstar & 0 & 0 & 0 \\ & \blacklozenge & \blackstar & 0 & 0 & 0 \\ & & \blacklozenge & 0 & 0 & 0 \\ & & & \otimes & 0 & 0 \\ & & & & \otimes & 0 \\ & & & & & \otimes \end{bmatrix}, \quad m = 2 \quad (54)$$

V případě isotropního materiálu symboly  $*$  a  $\otimes$  mohou nahrazeny tzv. *Lamého konstantami*  $\lambda$  a  $\mu$ <sup>3</sup>.

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad m = 2, \quad (55)$$

kde

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (56)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (57)$$

a  $\nu$  je Poissonův poměr.

---

<sup>3</sup>Druhou Lamého konstantu  $\mu$  také označujeme jako modul pružnosti ve smyku  $G$ . Viz např. [5].

## 4 Numerické příklady

Teorie rovinné anizotropní pružnosti, též známá jako *Lechicky-Eshelby-Strohův formalismus* (*LES formalismus*), je založena na vlastnostech funkcí komplexní proměnné. Důvody pro užití zmíněných funkcí jsou dva. Prvním z nich je, že diferencovatelnost funkce v komplexním oboru je ekvivalentem tzv. *harmoničnosti*. Jinak řečeno, má-li funkce v oboru komplexních čísel derivaci, automaticky splňuje tzv. *biharmonickou rovnici* - může být tedy použita jako *Airyho funkce napětí*. Důvodem druhým je možnost popsat vlastnosti materiálu pouze třemi konstantami, tzv. *vlastními čísly materiálu*.

V první části této kapitoly se budeme zabývat výpočtem zmíněných vlastních čísel materiálu. U příkladu prvního bereme v úvahu isotropní materiál, v příkladu druhém uvažujeme materiály ortotropní. K výpočtu užíváme skript vytvořený pomocí software Maple 13. Druhá část kapitoly řeší problematiku určení *exponentu singularity napětí* pro případ bimateriálového vrubu složeného z ortotropních materiálů a také pro případ trhliny kolmé na rozhraní isotropního a ortotropního materiálu. Výpočet provádíme pomocí programu vytvořeného na Ústavu mechaniky těles.

### 4.1 Vlastní čísla materiálu

Sestrojíme-li čtvercové matice  $3 \times 3$   $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{T}$  následujícím způsobem

$$Q_{ij} = C_{i1k1}, \quad R_{ik} = C_{i1k2}, \quad T_{ik} = C_{i2k2}, \quad (58)$$

pak zavedením neznámého parametru  $p$  a sestrojením determinantu

$$A = \mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T} = 0 \quad (59)$$

získáme právě 6 kořenů  $p_i$  materiálu na množině komplexních čísel  $\mathbb{C}$ . Protože matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$  jsou reálné, musí být kořeny  $p_i$  po dvojicích komplexně sdružené.

#### Příklad 1. Isotropní materiál

Uvažujme materiál mající následující charakteristiky. Modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa. Poissonova konstanta  $\nu = 0,3$ . Lamého konstanty  $\lambda$  a  $\mu$  dopočítáme dle (56) resp. (57). Cílem je určit vlastní čísla daného materiálu.

Daný isotropní materiál popisuje matice  $\mathbf{C}$  ve tvaru, viz (55). Za předpokladu, že  $k = 1 \cdot 10^4$

$$\mathbf{C} = k \cdot \begin{bmatrix} 28,3 & 12,1 & 12,1 & 0 & 0 & 0 \\ & 28,3 & 12,1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 28,3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8 & 0 & 0 \\ & & & & 8 & 0 \\ & & & & & 8 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

Podle (58) sestrojíme dílčí matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{Q} = k \cdot \begin{bmatrix} 28,3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\mathbf{R} = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 12,1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$\mathbf{T} = k \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 28,3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Odpovídající determinant (59) nabývá tvaru

$$A = k \cdot \det \begin{bmatrix} 28,3 + 8p^2 & 20,2p & 0 \\ 20,2p & 8 + 28,3p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 + 8p \end{bmatrix}, \quad (64)$$

odtud dostáváme charakteristický polynom šestého řádu<sup>4</sup>,

$$1,84p^6 + 5,53p^4 + 5,53p^2 + 1,84 = 0. \quad (65)$$

Po úpravě

$$(p + 1)^3(16 + 12,1)(64,1) = 0, \quad (66)$$

jehož řešením je trojnásobný komplexně sdružený kořen  $p = \pm i$  nezávislý na vstupních charakteristikách materiálu.

## Příklad 2. Anisotropní materiál

Uvažujeme 2 ortotropní materiály mající následující charakteristiky.

$E_{L1}$	$4 \cdot 10^5$	MPa	$E_{L2}$	$2,1 \cdot 10^5$	MPa
$E_{T1}$	$2 \cdot 10^5$	MPa	$E_{T2}$	$2 \cdot 10^5$	MPa
$\nu_{L1}$	0,3	-	$\nu_{L2}$	0,3	-
$\nu_{T1}$	0,3	-	$\nu_{T2}$	0,3	-
$G_{L1}$	$3 \cdot 10^4$	MPa	$G_{L2}$	$3 \cdot 10^4$	MPa
$G_{T1}$	$3 \cdot 10^4$	MPa	$G_{T2}$	$3 \cdot 10^4$	MPa

Pro popis ortotropního materiálu je vhodnější místo matice  $\mathbf{C}$  užít maticí k ní inverzní  $\mathbf{S}$ , tedy symetrickou matici poddajnosti, která pro dané ortotropní materiály za předpokladu  $c = 10^{-7}$  vypadá následovně.

Pro ortotropní materiál 1

$$\mathbf{S}_1 = c \cdot \begin{bmatrix} 25 & -7,5 & -7,5 & 0 & 0 & 0 \\ & 50 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ & & 50 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 333 & 0 & 0 \\ & & & & 333 & 0 \\ & & & & & 333 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

pro ortotropní materiál 2

$$\mathbf{S}_2 = c \cdot \begin{bmatrix} 47 & -14 & -14 & 0 & 0 & 0 \\ & 50 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ & & 50 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 333 & 0 & 0 \\ & & & & 333 & 0 \\ & & & & & 333 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Matice  $\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{C}_2$  sestrojíme jako matice inverzní k  $\mathbf{S}_1$  a  $\mathbf{S}_2$ . Podle (58) sestrojíme  $\mathbf{Q}_{1,2}$ ,  $\mathbf{R}_{1,2}$  a  $\mathbf{T}_{1,2}$

$$\mathbf{Q}_1 = k \cdot \begin{bmatrix} 45,9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$\mathbf{R}_1 = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 11,4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

<sup>4</sup>V obecném upraveném tvaru je tento polynom pro isotropní materiál  $(p^2 + 1)^3(2\mu + \lambda)\mu^2 = 0$ . Jelikož výraz  $(2\mu + \lambda) \neq 0$  a současně  $\mu^2 \neq 0$ , řešíme rovnici  $(p^2 + 1)^3 = 0$ . Žádné reálné číslo  $\mathbb{R}$  ovšem tuto rovnost nespĺňuje, proto je řešením  $\pm i \in \mathbb{C}$ .

$$\mathbf{T}_1 = k \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 24,1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (71)$$

$$\mathbf{Q}_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 27,8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$\mathbf{R}_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 0 & 11,4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$\mathbf{T}_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 26,6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Odpovídající determinanty nabývají tvaru

$$A_1 = k \cdot \det \begin{bmatrix} 45,9 + 3p & 12,8p & 0 \\ 12,8p & 3 + 24,1p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 + 3p^2 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

$$A_2 = k \cdot \det \begin{bmatrix} 27,8 + 3p & 14,4p & 0 \\ 14,4p & 3 + 26,6p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 + 3p^2 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Odtud viz výše (65) dostáváme charakteristické polynomy, které pro složitost zde neuvádíme, jejichž řešením jsou vlastní čísla ortotropních materiálů.

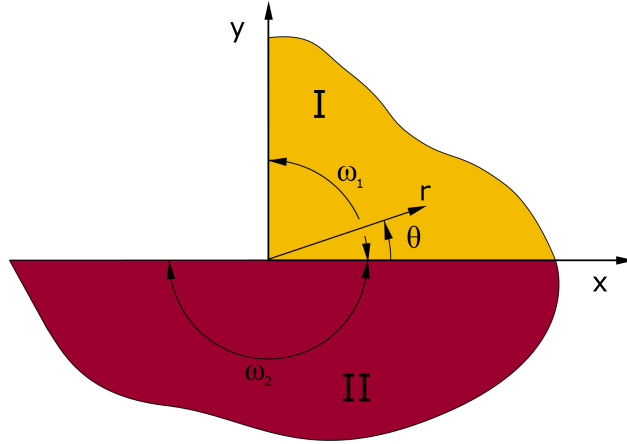
materiál 1	materiál 2
$0,3829i$	$0,3966i$
$-0,3829i$	$-0,3966i$
$3,6053i$	$2,5780i$
$-3,6053i$	$-2,5780i$
$i$	$i$
$-i$	$-i$

## 4.2 Exponent singularity napětí a rozložení napětí v okolí vrubu a trhliny na bimateriálovém rozhraní

V této kapitole budeme zjišťovat exponent singularity pro ortotropní materiály s různými napěťovými vlastnostmi. Výsledkem bude nejenom získání zmíněného exponentu, ale také zjištění průběhů posuvů a napětí v okolí vrubu. Potřebná teorie užití komplexních potenciálů je uvedena v dodatcích A a B.

Uvažujeme-li konkrétní konfiguraci vrubu neobejdeme se bez sestavení okrajových podmínek, které specifikují dané řešení. V našem případě viz obr. (7) definujeme tyto okrajové podmínky jako podmínky spojitosti pro napětí a posuvy následovně

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0 & \quad \text{pro } \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0 & \quad \text{pro } \theta = -\pi, \\ u_1^I - u_1^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \\ u_2^I - u_2^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \\ \sigma_{12}^I - \sigma_{12}^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \\ \sigma_{22}^I - \sigma_{22}^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0. \end{aligned} \quad (77)$$



Obrázek 7: Konfigurace bimateriálového vrubu,  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$  a  $\omega_2 = \pi$ .

Indexy  $I$  a  $II$  značí jednotlivé materiály. Pro posuny a napětí platí vztahy, viz např. [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{f}} \\ \sigma_1 &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{f}' + \overline{\mathbf{L}} \cdot \overline{\mathbf{f}}' \\ \sigma_2 &= p \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{f}' + \overline{p} \cdot \overline{\mathbf{L}} \cdot \overline{\mathbf{f}}' \end{aligned} \quad (78)$$

kde  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{L}$  jsou matice vyjadřující charakteristiky materiálů v rámci LES formalismu. Dále platí  $\overline{\mathbf{A}}$ ,  $\overline{\mathbf{L}}$  a  $\overline{\mathbf{f}}$  značí komplexní sdruženost matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{L}$  a vektoru  $\mathbf{f}$ <sup>5</sup>

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^\delta & 0 \\ 0 & z_2^\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

kde  $v_k$  jsou tzv. *vlastní vektory vrubu* a prvky  $z_k$  můžeme zapsat

$$z_k^\delta = r^\delta (\cos \theta + p_k \sin \theta)^\delta, \quad (80)$$

kde  $r$  a  $\theta$  jsou polární souřadnice viz obr. (7). Exponent  $\delta$  je vlastní hodnota exponentu singularity. Tento exponent můžeme určit na základě okrajových podmínek (77) do nichž dosadíme vztahy (78). Dostaneme soustavu 6-ti homogenních algebraických rovnic závislých na  $\delta$ , Hrstka [7] a Svoboda [8],

$$\mathbf{A}(\delta)\mathbf{v} = 0, \quad (81)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice dané soustavy závislých na  $\delta$  a  $\mathbf{v}$  je odpovídající vlastní vektor. Podmínka nenulového řešení je

$$\det(\mathbf{A}(\delta)) = 0. \quad (82)$$

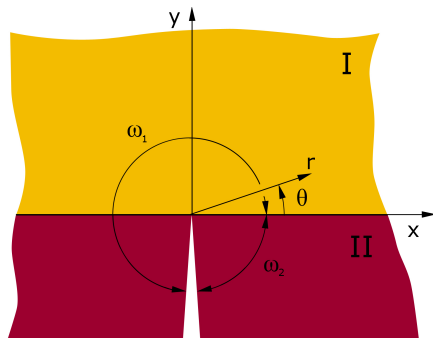
Odtud vyjádříme vlastní číslo  $\delta$  a následně ze vztahu (81) určíme vektory  $\mathbf{v}$ .

### Příklad 1

Uvažujeme konfiguraci znázorněnou na obr. (7) bimateriálového vrubu složeného ze dvou ortotropních materiálů. Geometrie vrubu je popsána pomocí úhlů  $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$  a  $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$ . Ortotropní materiály jsou zadány následovně

$E_L^I$	$1 \cdot 10^5$	MPa	$E_L^{II}$	$4 \cdot 10^5$	MPa
$E_T^I$	$2 \cdot 10^5$	MPa	$E_T^{II}$	$0,5 \cdot 10^5$	MPa
$\nu_L^I$	0,3	-	$\nu_L^{II}$	0,3	-
$\nu_T^I$	0,3	-	$\nu_T^{II}$	0,3	-
$G_L^I$	$3 \cdot 10^4$	MPa	$G_L^{II}$	$3 \cdot 10^4$	MPa
$G_T^I$	$3 \cdot 10^4$	MPa	$G_T^{II}$	$3 \cdot 10^4$	MPa

<sup>5</sup>Ve vztahu (79) by měl vystupovat zobecněný faktor intenzity napětí  $\mathbf{H}$ , avšak pro naše účely jej uvažujeme jako jednotkový.



Obrázek 8: Trhlina kolmá na bimateriálové rozhraní.

Výpočtový program počítá soustavu rovnic (81) sestavenou na základě výše zmíněných okrajových podmínek (77). Průsečík křivky řešení a osy  $x$  značí hledaný exponent  $\delta$ , který po zpětném zadání do programu zpřesníme nejméně na osm desetinných míst.

$$\delta_1 = 0,5798 \quad \delta_2 = 0,9069$$

V další fázi programu dojde ke grafickému vykreslení závislostí pro složky posuvů  $u_x$ ,  $u_y$  a napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  a  $\sigma_{xy}$ , viz obr. (9,10).

Z grafů je vidět, že jsou splněny okrajové podmínky (77), tj. platí následující

- napětí  $\sigma_{xx}$  je rovno nule při  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,
- napětí  $\sigma_{yy}$  je rovno nule při  $\theta = -\pi$ ,
- napětí  $\sigma_{xy}$  je rovno nule při  $\theta = -\pi$  a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a je spojitý,
- posuv  $u_x$  je spojitý,
- posuv  $u_y$  je spojitý.

## Příklad 2

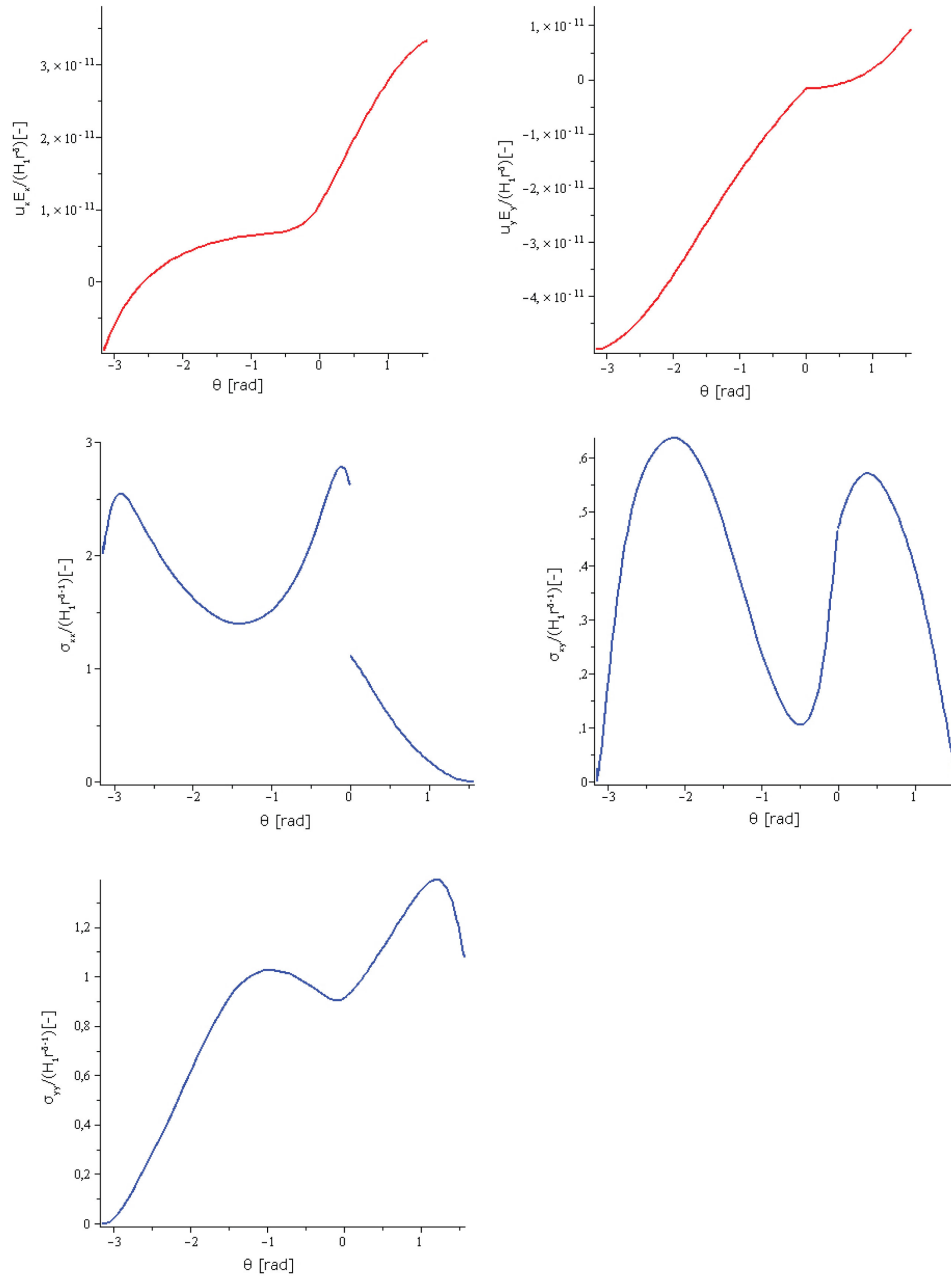
Uvažujeme konfiguraci trhliny (8) kolmé na rozhraní dvou materiálů. Materiál I je ortotropní, materiál II isotropní a jsou zadány následovně

$E_L^I$	$0,75 \cdot 10^5$	MPa
$E_T^I$	$1,75 \cdot 10^5$	MPa
$\nu_L^I$	0,3	-
$\nu_T^I$	0,3	-
$G_L^I$	$3 \cdot 10^4$	MPa
$G_T^I$	$3 \cdot 10^4$	MPa

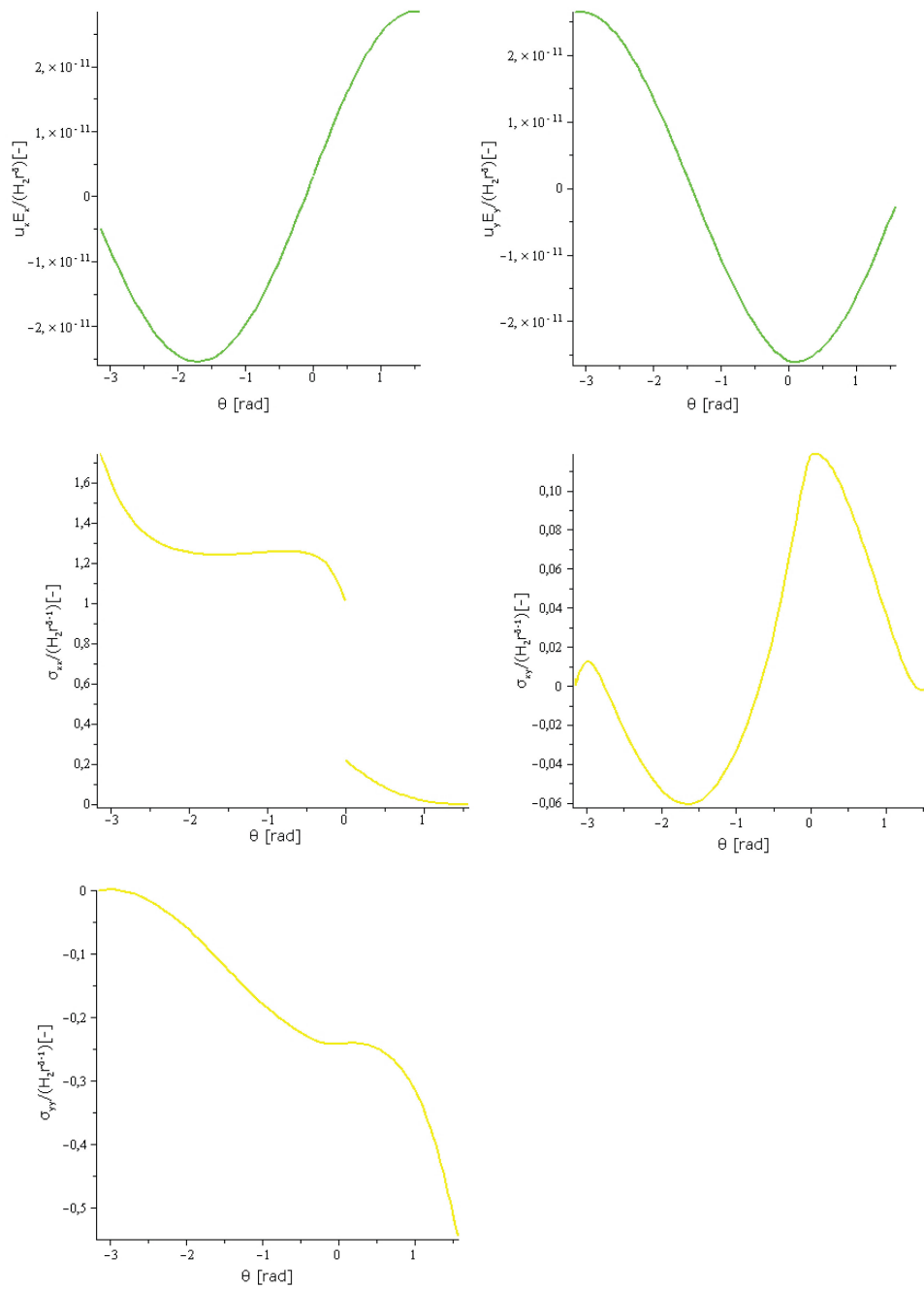
$E^{II}$	$1,2 \cdot 10^5$	MPa
$\nu^{II}$	0,35	-
$G^{II}$	$4,4 \cdot 10^4$	MPa

Procedura určení exponentů singularit napětí, příp. jejich vlastních hodnot, je podobná jako v předchozím příkladě. Problematika se liší ve formulaci okrajových podmínek, které jsou následující

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{II} = 0, \sigma_{12}^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \\
 u_1^I - u_1^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \pi \\
 u_2^I - u_2^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \pi \\
 \sigma_{12}^I - \sigma_{12}^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \pi \\
 \sigma_{22}^I - \sigma_{22}^{II} = 0 & \quad \text{pro } \theta = 0, \pi
 \end{aligned} \tag{83}$$



Obrázek 9: Průběhy posuvů a napětí v blízkosti kořene bimateriálového vrubu pro vlastní hodnotu exponentu singularity  $\delta_1$



Obrázek 10: Průběhy posuvů a napětí v blízkosti kořene bimateriálového vrubu pro vlastní hodnotu exponentu singularity  $\delta_2$



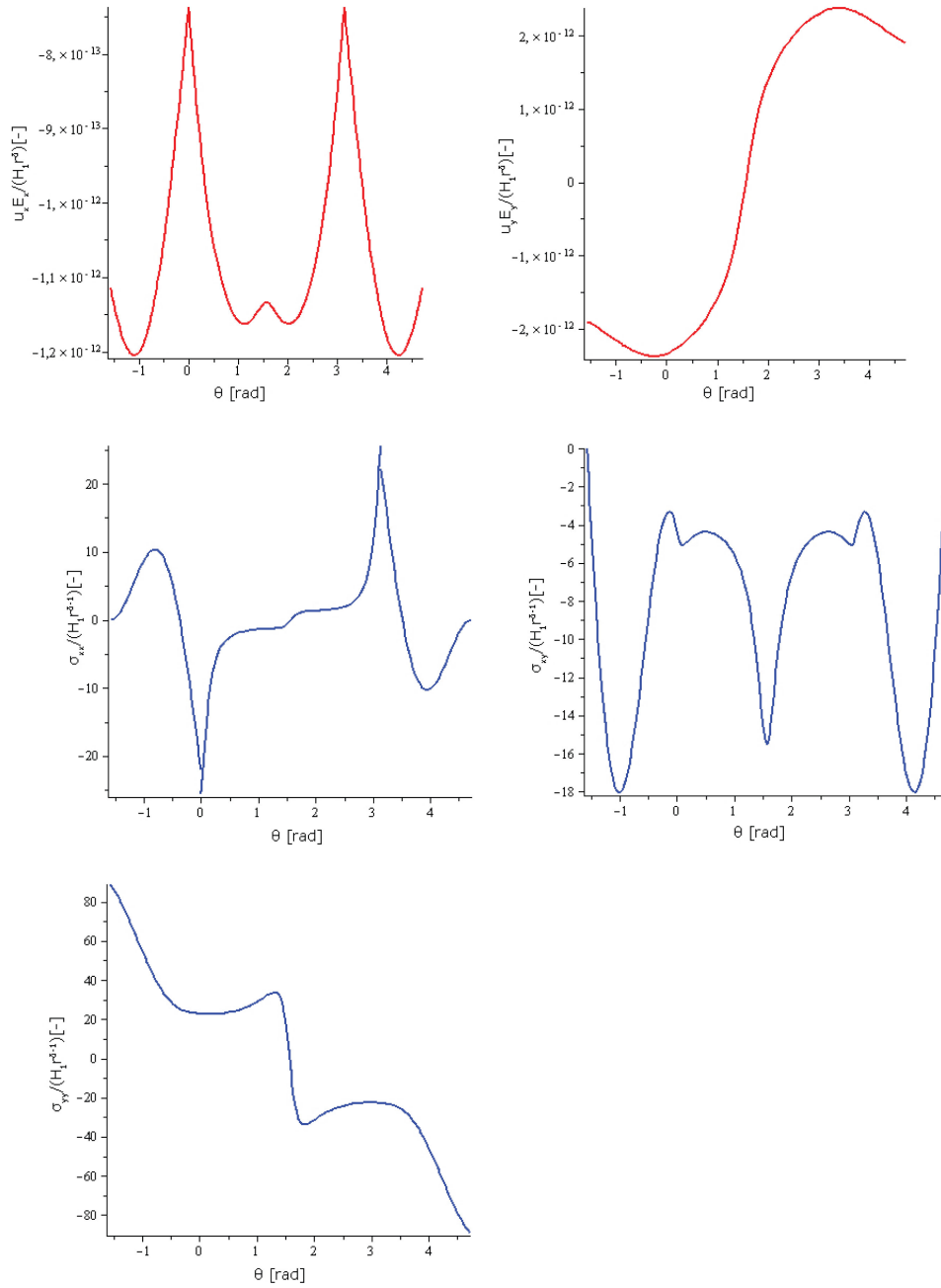
Po vyřešení soustavy rovnic (81) sestavenou na základě výše uvedených okrajových podmínek (83) a následném zpřesnění dostáváme vlastní hodnoty exponentu singularity trhliny

$$\delta_1 = 0,3417 \quad \delta_2 = 0,4016. \quad (84)$$

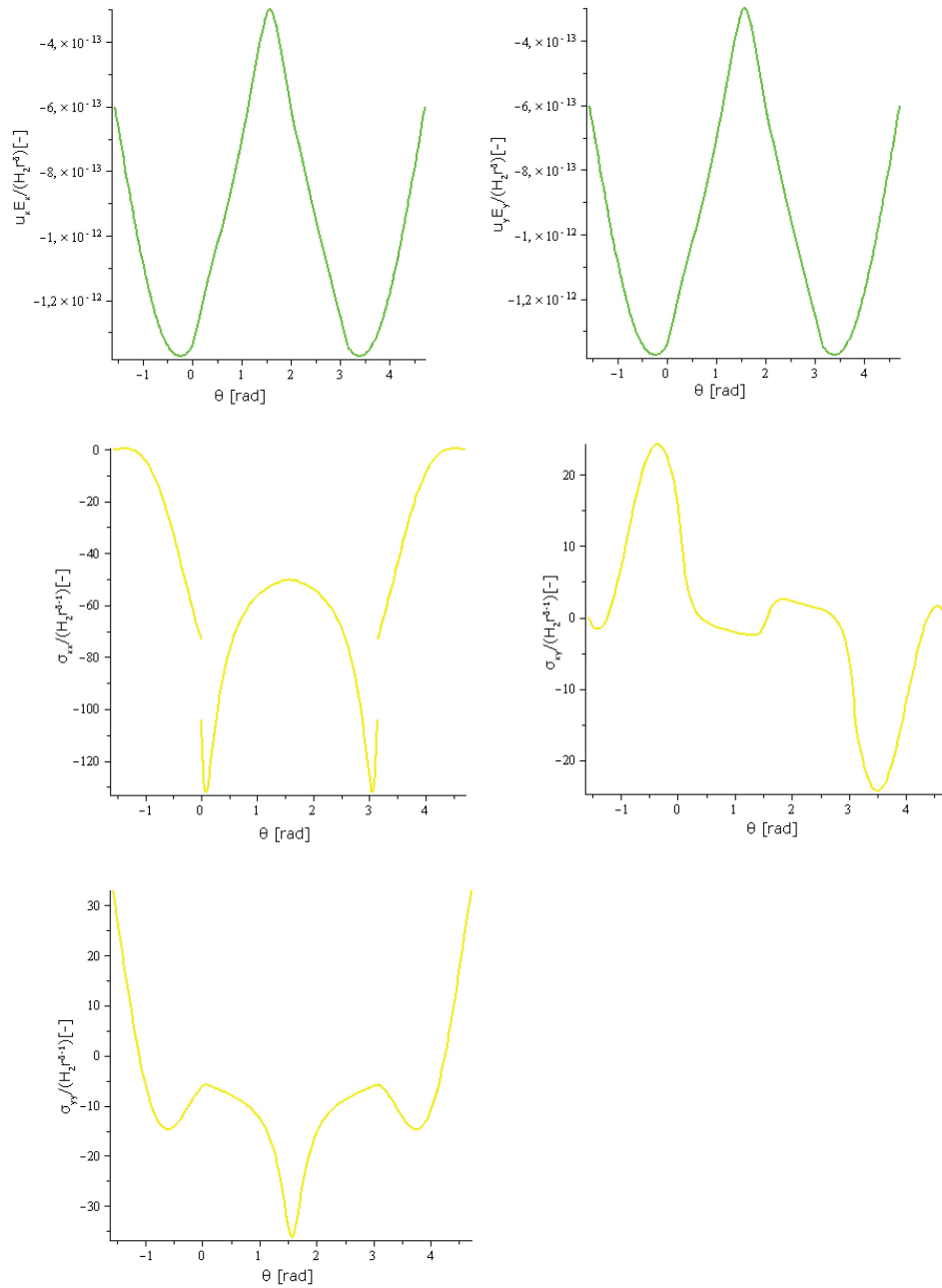
V další fázi programu dojde opět ke grafickému vykreslení závislostí pro složky posuvů  $u_x$ ,  $u_y$  a napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  a  $\sigma_{xy}$ , viz obr. (11, 12).

Z grafů je opět vidět, že jsou splněny okrajové podmínky (83), tj. platí následující

- napětí  $\sigma_{xx}$  je rovno nule při  $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ,
- napětí  $\sigma_{xy}$  je rovno nule při  $\theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ ,
- posuv  $u_x$  je spojitý,
- posuv  $u_y$  je spojitý.



Obrázek 11: Průběhy posuvů a napětí v blízkosti vrcholu trhliny kolmé k rozhraní pro vlastní hodnotu exponentu singularity  $\delta_1$



Obrázek 12: Průběhy posuvů a napětí v blízkosti vrcholu trhliny kolmé k rozhraní pro vlastní hodnotu exponentu singularity  $\delta_2$

## Závěr

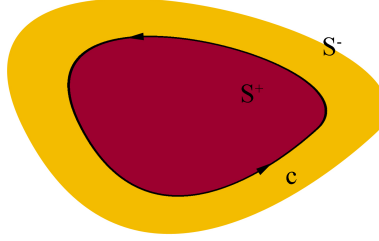
Cílem této práce bylo popsat rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu příp. trhliny kolmé na bimateriálové rozhraní. V první části práce jsme se věnovali základním pojmům lineární lomové mechaniky. Ukázali jsme si 3 základní módy zatěžování, nezbytné pro popis chování trhliny a dále jsme uvedli Irwinův faktor intenzity napětí. Nakonec byla uvedena energetická bilance popisující stabilitu šíření trhliny.

V druhé části jsme pojednávali o lineárních anizotropních materiálech, byly zavedeny konstitutivní vztahy umožňující zapsání elastických koeficientů a nechybí výčet matic umožňující zápis výše zmíněných koeficientů technicky významných materiálů.

V části poslední jsme se věnovali konkrétním numerickým příkladům a teorii umožňující popis rovinné napjatosti a deformace izotropních / anizotropních materiálů (tzv. Lechnicky-Eshelby-Strohův formalismus). Nejdříve jsme určovali vlastní čísla isotropního a ortotropního materiálu poté jsme věnovali pozornost výpočtu exponentů singularity napětí v okolí koncentrátorů typu bimateriálový vrub a trhlina. Výpočet provádíme pro bimateriálový vrub dvou ortotropních materiálu a pro trhlinu kolmou na rozhraní isotropního a ortotropního materiálu. Následně vykreslíme průběhy posuvů a napětí vrubu resp. trhliny.

První část dodatku stručně popisuje vlastnosti funkcí komplexní proměnné a druhá část uvádí vybrané vztahy Lechnicky-Eshelby-Strohova formalismu.

Trendem dnešní doby užívání kompozitních materiálů, které mají často velmi výhodné vlastnosti. Výhodné vlastnosti jsou ovšem částečně vyváženy nevýhodami mnohem složitějšího popisu z hlediska lomové mechaniky. V budoucnu budou tyto kompozitní materiály pravděpodobně víc a víc nahrazovat klasické konstrukční materiály, proto je nutné mít kvalitní teorii popisující jejich chování. Z tohoto důvodu se autor hodlá zabývat dále problematikou lomu moderních materiálů a navázat a dále rozvinout téma bakalářské práce na určování faktorů intenzity napětí vrubů, příp. trhlin v blízkosti bimateriálových rozhraní.



Obrázek 13: Konečná a nekonečná oblast v komplexní rovině.

## A Funkce komplexní proměnné

Funkce komplexní proměnné závisí na komplexní proměnné  $z = x + iy$ , kde  $i = \sqrt{-1}$  je tzv. imaginární jednotka. Funkci komplexní proměnné lze psát ve tvaru

$$f(z) = \operatorname{Re}f(x, y) + i\operatorname{Im}f(x, y), \quad (85)$$

kde  $\operatorname{Re}f(x, y)$  a  $\operatorname{Im}f(x, y)$  jsou reálné funkce reálných proměnných  $x$  a  $y$  nazývaných jako reálná část a imaginární část funkce  $f(z)$ . Důležitou operací je tzv. komplexní sdruženost, kdy se mění znaménko u imaginární jednotky, tj. komplexně sdružené číslo  $\bar{z}$  k číslu  $z$  je číslo

$$\bar{z} = x - iy. \quad (86)$$

Podobně komplexně sdružená funkce  $\overline{f(z)}$  k funkci  $f(z)$  je funkce

$$\overline{f(z)} = \operatorname{Re}f(x, y) - i\operatorname{Im}f(x, y). \quad (87)$$

Dalším důležitým pojmem je tzv. holomorfnost, nebo také regulárnost, funkce komplexní proměnné. Kromě jiného tato vlastnost znamená, že je daná funkce diferencovatelná ve smyslu derivace v komplexním oboru. Aby funkce byla holomorfní, musí splňovat tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky,

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}f(x, y)}{\partial y}, \quad (88)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}f(x, y)}{\partial x}. \quad (89)$$

Je vcelku problém nalézt funkci, která nespĺňuje C-R podmínky, ale jednou z nich je právě funkce komplexně sdružená k libovolné holomorfní funkci. Snadno se to ověří na funkci (87), kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\overline{f(z)} = \operatorname{Re}f(x, y) + i(-\operatorname{Im}f(x, y)) = f_1(x, y) + if_2(x, y). \quad (90)$$

Pak např. platí

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \quad (91)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \quad (92)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \quad (93)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}. \quad (94)$$

Odtud jde vidět, že za předpokladu platnosti (88) a (89) neplatí C-R podmínky pro (90) a funkce tedy není holomorfní. Avšak komplexně sdružená funkce je holomorfní v případě komplexní sdruženosti její nezávislé proměnné  $\bar{z}$ . Jinými slovy, jestliže je nějaká funkce  $f(z)$  holomorfní v komplexní polorovině nad osou  $x$ , pak její komplexně sdružený protějšek  $\overline{f(z)}$  je holomorfní ve spodní polorovině, tj. pod osou  $x$ . Tedy pod osou  $x$  se funkce  $\overline{f(z)}$  může psát ve tvaru

$$\overline{f(z)} = \operatorname{Re}f(x, -y) - i\operatorname{Im}f(x, -y) = f_1(x, y) + if_2(x, y). \quad (95)$$

a tato funkce již splňuje C-R podmínky,

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, -y)}{\partial x} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \quad (96)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}f(x, -y)}{\partial y} = -\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \quad (97)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}f(x, -y)}{\partial x} = -\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \quad (98)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}f(x, -y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y}. \quad (99)$$

Z předchozích vztahů jde vidět, že za předpokladu platnosti (88) a (89) platí C-R podmínky pro (95) a funkce je tedy holomorfní. Tato vlastnost je fundamentální pro pozdější výpočty. V dalším se využívá další vlastnosti holomorfních (regulárních) funkcí komplexní proměnné vyplývající z následující věty (Cauchy),

**Věta:** Nechť  $c$  je uzavřená, jednoduchá, hladká a proti směru hodinových ručiček orientovaná křivka, která rozděluje rovinu komplexních čísel na konečnou část  $S^+$  a nekonečnou část  $S^-$ , viz obrázek 13. Jestliže je nějaká funkce  $\varphi(z)$  holomorfní v  $S^-$  a v nekonečnu a spojitá v  $S^- \cup c$ , pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(t)dt}{t-z} = -\varphi(z) + \varphi(\infty) \quad \text{pro } z \in S^-, \quad (100)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(t)dt}{t-z} = \varphi(\infty) \quad \text{pro } z \in S^+. \quad (101)$$

Předchozí věta má velký význam v tom, že popisuje vztah mezi spojitou funkcí na nějaké oblasti včetně její hranice a jejími hodnotami vně nebo uvnitř dané oblasti. Uzavřenou křivkou může být i přímka, konkrétně např. osa  $x$ , která se uzavírá v nekonečnu. To tedy znamená, že vnitřní oblast  $S^+$  může být např. komplexní polorovina nad osou  $x$  a pak oblast  $S^-$  je komplexní polorovina pod osou  $x$ , nebo naopak, pod osou  $x$  může být vnitřní oblast  $S^+$  a nad osou  $x$  tedy vnější oblast  $S^-$ .

## B Formalismus Lechnického, Eshelbyho a Stroha pro popis napětí a posuvů

Podle LES formalismu pro ortotropní materiál platí následující vztahy pro posuvy a napětí

$$\begin{aligned} u_i &= 2\operatorname{Re} \{A_{ij}f_j(z_j)\}, \\ \sigma_{2i} &= 2\operatorname{Re} \{L_{ij}f'_j(z_j)\}, \quad \sigma_{1i} = -2\operatorname{Re} \{L_{ij}\mu_j f'_j(z_j)\}, \end{aligned} \quad (102)$$

kde  $\mu_j = \mu'_j + i\mu''_j$  jsou vlastní čísla materiálu,  $z_j = x + \mu_j y$  a  $A_{ij}$  a  $L_{ij}$  jsou matice, pro které platí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + s_{22}/\mu_1 & s_{12}\mu_2 + s_{22}/\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Další důležité matice jsou pozitivně definitní Hermitovské matice

$$\mathbf{B} = i\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}^I + \overline{\mathbf{B}}^{II}. \quad (104)$$

Hermitovská matice je zobecněním symetrické matice, tj. pro hermitovskou matici platí

$$\mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}}^T. \quad (105)$$

Je-li navíc pozitivně definitní, pak platí

$$\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x} > 0, \quad (106)$$

kde  $\mathbf{x}$  je obecně komplexní vektor. Se vztahy pro napětí v (102) není nutné pracovat přímo, stačí pracovat s tzv. *funkcí napětí*  $\phi = [\varphi_i]$

$$\varphi_i = 2\operatorname{Re} \{L_{ij}f_j(z_j)\}, \quad (107)$$

což je vektor jehož derivované souřadnice  $\varphi_i$  vyjadřují napětí podle vztahů

$$\sigma_{2i} = \varphi_{i,1}, \quad \sigma_{1i} = -\varphi_{i,2}, \quad (108)$$

kde číslo za čárkou v dolním indexu znamená odpovídající parciální derivaci. Dále lze pomocí funkce napětí (107) vyjádřit vektor síly  $\mathbf{t}$  působící na povrchu  $\Gamma$  (křivka  $\Gamma$  je orientována po směru hodinových ručiček) s vnější normálou

$$\mathbf{n} = \left[ -\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_1}{ds} \right], \quad (109)$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 = -\varphi_{i,2} \left( -\frac{dx_2}{ds} \right) + \varphi_{i,1} \frac{dx_1}{ds} = \frac{d}{ds} \varphi_i. \quad (110)$$

Pomocí funkce napětí (107) lze také vyjádřit výslednou sílu působící na křivce  $\Gamma$  mezi body  $s_1$  a  $s_2$

$$\mathbf{T} = \Delta\phi = \phi(s_2) - \phi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{t}(s) ds, \quad (111)$$

kde se tedy pro polopřímku vycházející z počátku, za předpokladu nulovosti v nekonečnu,  $T_i(z = \infty) = 0$ , dostane

$$T_i = -2\operatorname{Re} \{L_{ij}f_j(z_j)\}. \quad (112)$$

V případě polárních souřadnic  $(r, \theta)$  je pro vyjádření radiálních a tečných napětí výhodné použít funkci napětí (107)

$$\sigma_{rr} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_r, \quad \sigma_{r\theta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_\theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}_\theta, \quad (113)$$

kde

$$\mathbf{n}^T = [\cos \theta, \sin \theta], \quad \mathbf{m}^T = [-\sin \theta, \cos \theta] \quad (114)$$

a

$$\mathbf{t}_r = -\frac{1}{r}\phi_{,\theta}, \quad \mathbf{t}_\theta = \phi_{,r}. \quad (115)$$

Vektor  $\mathbf{t}_r$ , resp.  $\mathbf{t}_\theta$ , jsou vektory napětí působící na ploškách, jejichž normály jsou ve směru radiusvektoru, resp. ve směru na něj kolmém, tj. platí

$$(t_r)_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (t_\theta)_i = \sigma_{ij}m_j. \quad (116)$$

## Reference

- [1] Ting, T. C. T. 1996, *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*. Oxford university press, New York.
- [2] Broberg, K. B. 1999. *Cracks and fracture*, Academic Press, Cambridge.
- [3] Irwin, G.R. 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J. Appl. Mech*, 24, 361-364.
- [4] Irwin, G. R. 1960. In *Structural mechanics: Proceedings of the 1st Symposium on Naval Structural Mechanics*, edited by J. N. Goodier and N.J. Hoff, Pergamon Press, New York, 557–591.
- [5] Shear modulus. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, [cit. 2011-05-16]. Dostupné z WWW: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Shear\\_modulus](http://en.wikipedia.org/wiki/Shear_modulus)>.
- [6] Suo, Z. 1990. Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, 472, 331-358.
- [7] Hrstka, M. *Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 30 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [8] Svoboda, M. *Problém trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 25 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.