

# Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Maschinenbau

## Masterarbeit

**Thema:** Analyse der Anregungsarten zur Durchführung der Operational Modal Analysis an Werkzeugmaschinen

**vorgelegt von:** Kratochvílová, Silvie  
geb. am: 18.01.1990 in: Brno

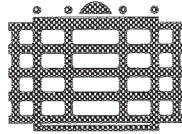
**Studiengang:** Produktionssysteme (dt.-tsch. Masterstudiengang)

**Berufsfeld:** Werkzeugmaschinen und Umformtechnik

**Studienrichtung:** Produktionstechnik/Werkzeugmaschinen

**Betreuer:** Dipl.-Ing. Jan Berthold (IWP)  
Dr.-Ing. Martin Kolouch, Ph.D. (IWU)  
Ing. Jan Vetiška, Ph.D (VUT)





TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

# Aufgabenstellung

zur

Abschlussarbeit  
im Studiengang Master Produktionssysteme

für

Frau Silvie Kratochvilova  
geb. am 18. Januar 1990 in Brno

zum Thema

Analyse der Anregungsarten zur Durchführung der Operational Modal Analysis  
an Werkzeugmaschinen

(ausführliche Aufgabenstellung siehe Rückseite)

Betreuer/ Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Andreas Hirsch  
Prüfer: Dr.-Ing. Volker Wittstock  
Ausgabedatum: 03.04.2017  
Abgabedatum: 11.09.2017  
Tag der Abgabe:

Unterschrift:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. R. Neugebauer  
Vorsitzender des Prüfungsausschusses

## **Aufgabenstellung Masterarbeit**

für Silvie Kratochvílová

**Thema:** Analyse der Anregungsarten zur Durchführung der Operational Modal Analysis an Werkzeugmaschinen

### **Aufgabenstellung**

Die Operational Modal Analysis (dt. Betriebsmodalanalyse) bietet im Vergleich zur weitaus bekannteren Experimentellen Modalanalyse den Vorteil Strukturen hinsichtlich ihres dynamischen Verhaltens unter Betriebsbedingungen untersuchen zu können. Diese Methode entstammt dem Bauingenieurwesens und soll auf Werkzeugmaschinen übertragen werden. Dabei sind die Besonderheiten im Bereich von Werkzeugmaschinen zu beachten.

In der Arbeit sollen verschiedene Anregungsmöglichkeiten einer Werkzeugmaschine simulativ untersucht werden. Im Vordergrund steht die Unterscheidung zwischen der prozesstypischen Anregung ausschließlich am TCP und der laut Theorie geforderten Anregung der Maschine in mehreren Punkten. Zusätzlich soll der Einfluss von Störsignalen auf die Ergebnisse untersucht werden. Ausgehend von einem zu erstellenden Schwingungsmodell einer Werkzeugmaschine, werden Simulationen in Matlab/Simulink durchgeführt. Die Ergebnisse werden dann in der Operational Modal Analysis Software Artemis ausgewertet und verglichen.

### **Schwerpunkte der Arbeit**

- Stand der Technik zur Operational Modal Analysis
- Aufbau eines Schwingungsmodells einer Werkzeugmaschine in Matlab/Simulink
- Simulation verschiedener Anregungskonfigurationen (Ein-, Mehrpunktanregung, zusätzliche Störquellen)
- Auswertung der Ergebnisse in der Operational Modal Analysis Software Artemis
- Analyse und Dokumentation der Ergebnisse

Die Masterarbeit ist als Einzelarbeit abzugeben. Die Schwerpunkte können in Absprache mit dem Betreuer an den Arbeitsstand bzw. an die notwendigen Schritte individuell angepasst werden.

Die Arbeit ist unter der Berücksichtigung der Arbeitshinweise zum Erstellen studentischer wissenschaftlicher Arbeiten der Professur Werkzeugmaschinen und Umformtechnik zu verfassen.

**Beginn:** 03.04.2017

**Abgabe:**

**Betreuer:** Dipl.-Ing. Jan Berthold  
Dr.-Ing. Martin Kolouch, Ph.D. (IWU)

Prof. Dr.-Ing. Andreas Hirsch

# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav výrobních strojů, systémů a robotiky
Studentka:	<b>Bc. Silvie Kratochvílová</b>
Studijní program:	Výrobní systémy
Studijní obor:	Výrobní systémy
Vedoucí práce:	<b>Ing. Jan Vetiška, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Analýza typů buzení pro provádění provozní modální analýzy obráběcích strojů**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Provozní modální analýza nabízí ve srovnání s daleko známější experimentální modální analýzou výhodu vyšetřit strukturu co se týče jejího dynamického chování během provozních podmínek. Tato metoda pochází z stavebního inženýrství a má být přenesena na obráběcí stroj. Je nutné u toho zohlednit zvláštnosti v oblasti obráběcích strojů.

V práci budou vyšetřeny různé způsoby buzení obráběcího stroje pomocí simulace. V popředí stojí rozlišení mezi procesně typickým buzením (kromě „TCP“) a teorií požadovaného buzení stroje ve více bodech. Kromě toho bude analyzován vliv rušivého signálu na výsledky. Na vibračním modelu obráběcího stroje bude provedena simulace v programu Matlab/Simulink. Výsledky budou poté vyhodnoceny a porovnány se softwarem Artemis pro provozní modální analýzu.

### **Cíle diplomové práce:**

- současný stav poznání provozní modální analýzy
- sestavení poddajného modelu obráběcího stroje v Matlab/Simulink
- simulace různých budících konfigurací (jeden bod, více bodů, dodatečné zdroje rušení)
- vyhodnocení výsledků v softwaru pro operační modální analýzu Artemis
- analýza a dokumentace dosažených výsledků

### **Seznam doporučené literatury:**

BRINCKER, Rune a Carlos. VENTURA. Introduction to operational modal analysis. 1. USA: Wiley, 2015. ISBN 9781119963158.

MAIA, Nuno Manuel Mendes a J. M. MONTALVÃO E SILVA. Theoretical and experimental modal analysis. 9. New York: Wiley, c1997. ISBN 9780863802089.

EWINS, D. J. Modal testing: theory, practice, and application. 2nd ed. Philadelphia, PA: Research Studies Press, c2000. ISBN 9780863802188.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Petr Blecha, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Bibliographische Beschreibung und Kurzreferat

Kratochvílová, Silvie:

Analyse der Anregungsarten zur Durchführung der Operational Modal Analysis an Werkzeugmaschinen

Masterarbeit an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Chemnitz, Professur Werkzeugmaschinen und Umformtechnik, Chemnitz, 2017

88 Seiten, 29 Abbildungen, 6 Tabellen, 2 Anlagen, 17 Quellen

**Schlüsselwörter:** Betriebsmodalanalyse, Werkzeugmaschine, Stabilitätsdiagramm, Rauschen, Modalanalyse

Die Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Einfluss von Rauschen, um die Eigenfrequenzen für die Werkzeugmaschine mittels der Betriebsmodalanalyse zu bestimmen. Für die eingegebene Werkzeugmaschine wird eine Betriebsmodalanalyse für die Data-Driven- und Covariance-Driven-Methode für mehrere Varianten der Erregung von Rauschen durchgeführt. Aus den Ergebnissen werden die Stabilitätsdiagramme erstellt, die zur Bestimmung der Eigenfrequenzen verwendet werden. Die Ergebnisse für die einzelnen Erregungsvarianten werden miteinander verglichen und die Wirkung des Rauschens auf die Ergebnisse bestimmt.

---

## Abstract in English

Kratochvílová, Silvie:

Analyse der Anregungsarten zur Durchführung der Operational Modal Analysis an Werkzeugmaschinen

Master thesis at the Faculty for Mechanical Engineering of the Chemnitz Technical University, Professorship for Machine Tools and Metal Forming Technology, Chemnitz, 2016

88 pages, 29 figures, 6 tables, 2 annex, 17 source

**Keywords:** Operational modal analysis, machine tool, stabilization diagram, noise, modal analysis

The aim of this work is to determine the influence of noise on determination of own frequencies for machine tool by operational modal analysis. For the assigned machine tool operational analysis is performed using Data-Driven and Covariance-Driven method for multiple excitation variants. Based on the results are created stabilization diagrams used to determine machine tool own frequencies. The results for each excitation variant are compared to each other and the effect of noise influence on the results is determined.

## Abstrakt v českém jazyce

KRATOCHVÍLOVÁ, S. *Analýza typů buzení pro provádění provozní modální analýzy obráběcích strojů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 88 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jan Vetiška, Ph.D..

**Klíčová slova:** Provozní modální analýza, obráběcí stroj, stabilizační diagram, šum, modální analýza

Diplomová práce se zabývá vlivem šumu na určování vlastních frekvencí pro obráběcí stroj pomocí provozní modální analýzy. Pro zadaný obráběcí stroj je provedena provozní modální analýza pro metodou Data-Driven a Covariance-Driven pro více variant buzení. Z výsledků jsou sestaveny stabilizační diagramy, které slouží pro určení vlastních frekvencí. Výsledky pro jednotlivé varianty buzení jsou mezi sebou porovnány a je určen vliv šumu na výsledky.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Dynamisches Verhalten von Maschinen .....</b>	<b>21</b>
2.1	Grundlegende Theorie für dynamische Systeme.....	22
2.2	Die Lösung von dynamischen Systemen mit Bewegungsgleichungen.....	23
2.3	Lösen von Bewegungsgleichungen im Zustandsraum.....	24
2.3.1	Systembeschreibung.....	24
2.3.2	Ausgangsgleichungen .....	25
2.3.3	Zustandsgleichungen .....	26
2.4	Signal und Rauschen .....	27
2.4.1	Signal.....	28
2.4.2	Rauschen.....	30
<b>3</b>	<b>Betriebsmodalanalyse (OMA).....</b>	<b>31</b>
3.1	Identifikationsmethoden im Zeitbereich mittels SSI.....	32
3.1.1	Aufteilung des experimentellen Signals in 'Past' und 'Future' .....	32
3.1.2	Methode Covariance-driven SSI.....	33
3.1.3	Methode Data-Driven SSI.....	35
3.2	Wichtungsansätze .....	38
3.3	Stabilitätsdiagramm.....	38
<b>4</b>	<b>Untersuchung eines Dreimassenschwingers mittels SSI .....</b>	<b>40</b>
4.1	Bewegungsgleichungen .....	41

---

4.2	Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen mittels der Modalanalyse	42
4.2.1	Bestimmung der Eigenfrequenzen ohne Dämpfung .....	42
4.2.2	Bestimmung der Schwingungsformen und Eigenfrequenzen des Dämpfungssystems	43
4.3	Zustandsraum .....	44
4.4	Berechnung der Schwingungsformen mit OMA .....	47
4.5	Bestimmung der Eigenfrequenzen mit OMA.....	50
4.5.1	Optimierung von Kriterien zur Bestimmung der Eigenfrequenzen.....	51
4.5.2	Bestimmung der Eigenfrequenzen aus dem Stabilitätsdiagramm .....	52
4.5.3	Bewertung des Rauscheinflusses auf das Stabilitätsdiagramm .....	57
<b>5</b>	<b>Untersuchung einer Werkzeugmaschine mittels SSI .....</b>	<b>59</b>
5.1	Beschreibung der Werkzeugmaschine .....	59
5.2	Bestimmung der Eigenfrequenzen der Werkzeugmaschine aus dem Stabilitätsdiagramm mit OMA.....	63
<b>6</b>	<b>Auswertung der Ergebnisse .....</b>	<b>66</b>
6.1	Gruppe V1 und V2.....	66
6.2	Gruppe V3 – V8 .....	68
6.3	Gruppe V9 – V12 .....	69
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Česká část .....</b>	<b>73</b>
8.1	Úvod .....	73

---

8.2	OMA pro system tří pružin.....	74
8.3	OMA pro obráběcí stroj .....	75
8.4	Závěr.....	78
	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>80</b>
	<b>Anlagenverzeichnis .....</b>	<b>82</b>

## Abkürzungsverzeichnis

Cov	Covariance
CVA	Canonical Variate Analysis
DD	Data Driven
EMA	Experimental Modal Analysis
FDD	Frequency Domain Decomposition
LTI	Linear Time Invariant
MAC	Modal Assurance Criterion
OMA	Operational Modal Analysis
PC	Principal Component
SSI	Stochastic Subspace Identification
UPC	Unweighted Principal Component

## Kurzzeichenverzeichnis

Kurzzeichen	Einheit	Benennung
A	-	Systemmatrix
A(f)	mm	Spektrum
$a_{ij}, b_{ij}, c_i, d_i$	-	Konstanten
B	-	Eingangsmatrix
$B_d$	N·s/m	Dämpfungsmatrix
$b_1, b_2, b_3$	N·s/m	Dämpfung
C	-	Ausgangsmatrix
D	-	Durchgangsmatrix
dt	s	Zeitschritt
F	N	Kraftmatrix
f	N	Kraft
F-diff	Hz	Frequenzänderung
K	N/m	Steifigkeitsmatrix

---

$k_1, k_2, k_3$	N/m	Steifigkeit
M	kg	Gewichtsmatrix
Mac-diff	-	Abweichung von Modes
$m_1, m_2, m_3$	kg	Gewicht
N-accept	-	Anzahl
t	s	Zeit
Theta-diff	-	Dämpfungsgradänderung
Theta-max, Theta-min	-	Dämpfungsgrad
u	-	Eingangsvariable
U(t)	mm	Rauschsignal
$\vec{u}$	-	Systemeingaben
x	-	Zustandsvektor
x(t)	m	Vorschubvektor
$\dot{x}$	$m \cdot s^{-1}$	Geschwindigkeit
$\ddot{x}$	$m \cdot s^{-2}$	Beschleunigung

---

---

$\vec{x}$	-	Zustandsvariablen
$\lambda_i$	rad/s	Eigenfrequenz
$y$	-	Ausgangsvariable
$\Psi$	-	Schwingungsform
$\Omega$	rad/s	Matrix der Eigenfrequenzen
$\xi_i$	-	Dämpfungsverhältnis

---

## Abbildungsverzeichnis

Bild 2.1 Beschreibung dynamischer Systeme [2] .....	23
Bild 2.2 Allgemeines Zustandsschema des Systems .....	27
Bild 2.3 Klassifizierung von Signalen nach der Zufälligkeit ihres Verlaufes [5] .....	28
Bild 2.4 Zufällige Signalprobe [6] .....	29
Bild 2.5 Der Verlauf des Rauschsignals $U(t)$ und dessen Spektrum $A(f)$ [8] .....	30
Bild 3.1 Ein Beispiel für ein Stabilitätsdiagramm [16].....	39
Bild 4.1 Dreimassenschwinger [2].....	41
Bild 4.2 Eigenschwingungsformen für die ersten drei Eigenfrequenzen .....	44
Bild 4.3 Zustandsraummodell des Dreimassenschwingers – Simulink .....	45
Bild 4.4 Weißes Rauschen.....	46
Bild 4.5 Ausgangssignal.....	47
Bild 4.6 Eigenschwingungsformen für 1. Algorithmus (Variante 1) .....	48
Bild 4.7 MAC-Diagramm .....	49
Bild 4.8 Stabilitätsdiagramm mit den Polen .....	51
Bild 4.9 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus) - 1. Kriterium .....	53
Bild 4.10 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus) - 2. Kriterium .....	54
Bild 4.11 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 2. Algorithmus) – 2. Kriterium .....	55
Bild 4.12 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (COV-SSI) – 2. Kriterium .....	56



---

Bild 5.1 Punkte einer 3-Achsen-Fräsmaschine.....	60
Bild 5.2 Teil des Zustandsraummodells aus dem Programm Simulink .....	61
Bild 5.3 Zeitsignal der Auslenkung für die 1. Variante des Rauschens im Punkt 1496 (y1: x-Achse ,y2: y-Achse, y3: z-Achse).....	63
Bild 5.4 Stabilitätsdiagramm der Maschine mit den Pole (PC-Wichtung).....	64
Bild 6.1 Stabilitätsdiagramm – 1. Variante des Rauschens (COV-SSI) - 2. Kriterium .....	67
Bild 6.2 Stabilitätsdiagramm – 1. Variante des Rauschens (DD-SSI – 1. Algorithmus) - 2. Kriterium .....	68
Bild 6.3 Stabilitätsdiagramm – 9. Variante des Rauschens (COV-SSI) - 2. Kriterium .....	69
Bild 8.1 Soustava tří pružin [2] .....	74
Bild 8.2 Stabilizační diagram – 1. varianta rušení (DD-SSI, 2. algoritmus) – 2. kritérium.....	75
Bild 8.3 Body na třiosém frézovacím stroji .....	76
Bild 8.4 Stabilizační diagram - 9. varianta rušení (COV-SSI) - 2. kritérium.....	77

---

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 4.1 Eigenfrequenzen des Dreimassenschwingers ohne Dämpfung .....	43
Tabelle 4.2 Eigenfrequenzen des Dreimassenschwingers mit Dämpfung .....	44
Tabelle 4.3 Werte des Rauschens des Dreimassenschwingers .....	46
Tabelle 4.4 Kriterien für Stabilitätsdiagramme .....	52
Tabelle 5.1 Varianten des Rauschens .....	62
Tabelle 5.2 Kriterien für Stabilitätsdiagramm (Maschine) .....	65

# 1 Einleitung

In der heutigen Zeit ist das Ziel der Hersteller: die Produktionsprozesse zu präzisieren, die Preise zu senken und die Produktionsgeschwindigkeiten zu erhöhen. Dies führt zu höheren Anforderungen an die Qualität von Werkzeugmaschinen. Aus diesem Grund werden die dynamischen Eigenschaften der Maschinen bestimmt. Eine Möglichkeit, diese Eigenschaften zu bestimmen, besteht darin, eine experimentelle Modalanalyse durchzuführen. Das Problem dieser Methode liegt in der Notwendigkeit einer externen Erregung des Systems. Ein weiterer Nachteil ist, dass die resultierenden Reaktionen immer von der Erregungskraft abhängig sind. In der Praxis gibt es keine Belastung der Maschine durch die definierte Kraft, sondern durch die sogenannten Betriebsbedingungen. Dies können beispielsweise Vibrationen vom Motor, zusätzlichen Aggregaten oder aus dem Bearbeitungsprozess sein.

Aus diesen Gründen wird die Betriebsmodalanalyse - Operational Modal Analysis (OMA) verwendet. OMA wird vorwiegend im Baugewerbe eingesetzt, zum Beispiel für Brücken. OMA wird besonders im Bauingenieurwesen verwendet, zum Beispiel für Brücken. Derzeit gibt es die Bemühung um die Applikation dieser Methode auch im Ingenieurwesen. Der Vorteil dieser Analyse ist, dass sie nicht von der Erregungskraft abhängig ist und direkt unter Betriebsbedingungen durchgeführt wird. Dynamische Eigenschaften können theoretisch für jede Maschine bestimmt werden. Früher konnte diese Methode, aufgrund des Aufwands mathematischer Berechnungen, nicht angewendet werden.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, eine Betriebsmodalanalyse für eine 3-Achsen-Fräsmaschine durchzuführen. Die Betriebsbedingungen werden durch Rauschen ersetzt. OMA wird dann für die ausgeschaltete Maschine ausgeführt, wonach der Einfluss des Rauschens auf die Eigenfrequenzbestimmung ermittelt werden kann. Nach der Vereinbarung mit dem Betreuer wurde entschieden, dass die Berechnung der Eigenfrequenzen in Programm Matlab und Simulink ausreichend ist. Aus diesem Grund wurde die Berechnung nicht im Artemis-Programm durchgeführt.

Der erste Teil dieser Arbeit wird kurz die dynamischen Eigenschaften der Maschine und die Lösung der dynamischen Systeme mit Bewegungsgleichungen im Zustandsraum beschreiben. Die Begriffe „Signal“ und „Rauschen“ werden erklärt. Der nächste Teil beschreibt das Verfahren zur Berechnung der Betriebsmodalanalyse und die Zusammenstellung der Stabilitätsdiagramme.

Zuerst wird eine Betriebsmodalanalyse für ein einfacheres System von Dreimassenschwingern durchgeführt. In diesem System wird das mathematische Modell überprüft. Danach werden die Betriebsmodalanalyse für die Maschine sowie die Simulation verschiedener Erregerkonfigurationen durchgeführt. Anschließend werden die Stabilitätsdiagramme zusammengestellt und die Auswirkung des Rauschens auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen ausgewertet.

## 2 Dynamisches Verhalten von Maschinen

In diesem Kapitel wird das dynamische Verhalten von Werkzeugmaschinen behandelt. Die dynamischen Eigenschaften der Werkzeugmaschine sind vor allem für den Qualitätsbearbeitungsprozess wichtig, was eine steigende Nachfrage nach einer Werkzeugmaschine nach sich zieht, die in kürzerer Zeit immer größere und bessere Werkstücke produzieren muss.

Dieses Kapitel beschreibt die grundlegende Theorie der Aufstellung von Bewegungsgleichungen für das dynamische System und seine Lösung unter Verwendung von Zustandsgleichungen. Im nächsten Abschnitt wird die Theorie der Rausch- und Signalverarbeitung erläutert. Ein weiterer wichtiger Teil der theoretischen Grundlage für diese Arbeit ist die Betriebsmodalanalyse oder in Englisch "Operation Modal Analysis"; es wird nur als OMA bezeichnet. OMA ist eine moderne Methode zur Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von Maschinen. Es handelt sich um eine Modalanalyse, bei der die Modalparameter wie Modalfrequenz, modale Eigenschwingungsformen und Modaldämpfung erhalten werden. Der einzige Unterschied gegenüber die Modalanalyse ist, dass die Erregerkraft nicht bekannt sein muss, um diese Eigenschaften zu bestimmen. Daher können die Modalparameter nur aus erworbenen Reaktionen ermittelt werden. Die Belastung entsteht dann unter sogenannten tatsächlichen Betriebsbedingungen. Durch diese Fähigkeiten kann diese Methode erfolgreich verwendet werden, wenn es notwendig ist, die dynamischen Eigenschaften der Maschine zu bestimmen, es aber nicht möglich oder nicht erforderlich ist dieses System zu erregen. Derzeit gibt es zum Beispiel die Modalanalysen für Brücken, Gebäude, Bergbau-Plattformen usw. . Die natürliche Erregung aus Straßenverkehr, Wind oder Seewellen ist in diesem Fall breitbandig, was eine Hauptvoraussetzung für einen erfolgreichen Modal-Test ist. Die Literatur stellt fest, dass die Anwendung von OMA seinerzeit mit diversen Ingenieursanwendungen, wie etwa Rotationsmaschinen, Fahrversuchen, Flügen, usw., begann. Ein limitierender Faktor in diesen Fällen ist die natürliche Erregung. Beispielsweise kommen bei Rotationsmaschinen die Haupterregungsfrequenzen aus den Rotortouren und die Erregung ist bei anderen Frequenzen sehr schwach. Unter diesen Umständen wird die Zuverlässigkeit des erworbenen Modalmodells gering sein.

[1]

## 2.1 Grundlegende Theorie für dynamische Systeme

Für die Arbeit mit dynamischen Systemen ist es notwendig am Anfang zu erklären, welche Beschreibungsmöglichkeiten es gibt. Es hängt vor allem ab von der Art der Dämpfung, wenn zwei Fälle unterschieden werden. [2]

Im ersten Fall ist das System schwach gedämpft. Dämpfung wird nur durch Verluste in den Bindungen und im Material selbst verursacht. Eine solche Dämpfung wird am häufigsten durch die Proportionaldämpfung erreicht. Dies ermöglicht es ein System von miteinander verbundenen Differentialgleichungen in ein System von unabhängigen Differentialgleichungen umzuwandeln. Jede solche Gleichung stellt einen unabhängigen Schwingungsmodus mit einer entsprechenden proportionalen Dämpfung dar. [2]

Im zweiten Fall wird das System stark gedämpft. Dies kann bedeuten, dass es im System Glieder gibt, die darin eine Dämpfungsfunktion haben. In diesem Fall muss das System durch miteinander verbundenen Differentialgleichungen gelöst werden, die ein solches System beschreiben. [2]

Bei der Arbeit mit dynamischen Systemen ist eine wichtige Reaktion entweder der Zeit- oder der Frequenzbereich. Das Lösen einer solchen Aufgabe bedeutet, eine harmonische oder vorübergehende Analyse durchzuführen. Beide stellen einen zeitaufwändigen Schritt in der rechnerischen Modellierung dar. Aus diesem Grund ist es gut eine andere geeignete Beschreibung zu wählen, die einfachere und weniger zeitaufwändige Simulationen ermöglichen würde. Die Systembeschreibung kann sein: [2]

- Nullen, Pole, Verstärkung (Zero-Pole-Gain)
- Übertragungsfunktionen (Transfer Function)
- Zustandsmodell (State-Space System)

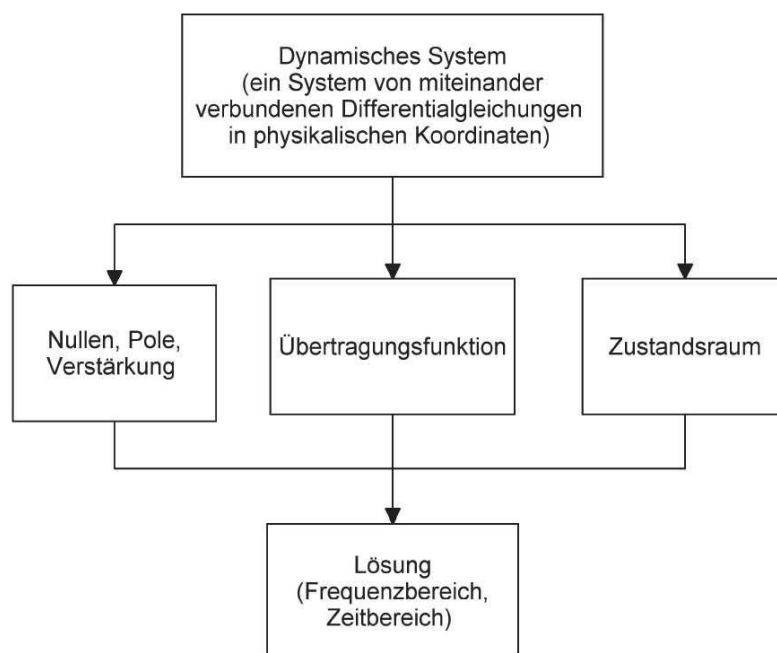


Bild 2.1 Beschreibung dynamischer Systeme [2]

## 2.2 Die Lösung von dynamischen Systemen mit Bewegungsgleichungen

Um jedes dynamische System, auch das einer Werkzeugmaschine zu lösen, ist es möglich Bewegungsgleichungen zu schreiben. Durch die Lösung dieser Gleichungen ist es wiederum möglich, das notwendige Wissen über das Verhalten des dynamischen Systems zu gewinnen.

Für Systeme mit einem Freiheitsgrad ist die mathematische Beschreibung der dynamischen Eigenschaften von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängig. Gewicht, Steifigkeit, Dämpfung, Ausschlag und Erregung sind skalar. In den meisten Fällen hat das System mehrere Freiheitsgrade (2 bis n). Für diese Systeme ist die mathematische Beschreibung der dynamischen Eigenschaften nicht von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängig und bei der Berechnung wird kein Skalar, sondern eine Matrix verwendet. [2]

Für ein System mit n Freiheitsgraden hat die Bewegungsgleichung eine Form: [2]

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

Wobei  $M$  ist eine Gewichtsmatrix mit Dimensionen  $n \times n$ ,  $B$  eine Dämpfungsmatrix mit Dimensionen  $n \times n$ ,  $K$  eine Steifigkeitsmatrix mit Dimensionen  $n \times n$ ,  $x(t)$  ist ein zeitabhängiger Vorschubvektor mit Dimensionen  $n \times 1$  und  $f(t)$  ein zeitabhängiger Vektor der externen Belastung mit Dimensionen  $n \times 1$  ist. [2]

## 2.3 Lösen von Bewegungsgleichungen im Zustandsraum

Eine Möglichkeit, um Bewegungsgleichungen zu lösen, ist die durch den Zustandsraum. Die Basis dieser Lösung ist es, sogenannte Zustände im Zustandsraum zu bestimmen. Dann werden System-, Eingangs- und Ausgangsmatrizen ermittelt. Unter Verwendung des Zustandsraumes und dieser Matrizen werden dann die Bewegungsgleichungen gelöst. Für dynamische Systeme ist der erste Zustand die Verschiebung und der zweite die Geschwindigkeit bestimmt. Die Systemmatrix bildet sich aufgrund der Kenntnisse der Steifigkeit, der Dämpfung und des Gewichts des Gesamtsystems.

### 2.3.1 Systembeschreibung

In einer Standardform wird die mathematische Beschreibung des Systems als eine Menge von Differentialgleichungen ausgedrückt, die als Zustandsgleichungen bekannt sind. In diesen Gleichungen wird die zeitliche Derivation jeder Variablen des Zustands in der Zustandsvariable  $x_1, \dots, x_n$  und den Systemeingänge (Input)  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  ausgedrückt. Im Allgemeinen ist die Form von Zustandsgleichungen: [3]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(\vec{x}, \vec{u}, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(\vec{x}, \vec{u}, t) \\ &\vdots = \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\vec{x}, \vec{u}, t)\end{aligned}\tag{2}$$

Wobei  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  jede der Funktionen eine allgemeine nichtlineare, zeitvariable Funktion  $f_i(\vec{x}, \vec{u}, t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) von Zustandsvariablen, Systemeingaben und Zeit sein kann. [3]

Für diese Arbeit ist die Aufmerksamkeit vor allem auf der Beschreibung der Systeme beschränkt, die lineare und zeitinvariante sind (LTI – Linear Time Invariant). Diese Systeme werden durch lineare Differentialgleichungen beschrieben, die konstante Koeffizienten aufweisen.



Dann kann die allgemeine Form der Zustandsgleichung in einem System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten überschrieben werden: [3]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r$$

Wo es Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  Konstanten sind, die das System beschreiben. Diese Gleichungen definieren Derivaten von Zustandsvariablen als gewichtete Summe von Zustandsvariablen und Systemeingänge. Gleichungen können in Matrixform zusammengestellt werden: [3]

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \tag{4}$$

Diese Matrizen können wie folgt überschrieben werden:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

- $x$  – Zustandsvektor der Länge  $n$
- $u$  – Eingangsvariable der Länge  $r$
- $A$  – Systemmatrix  $n \times n$
- $B$  – Eingangsmatrix  $n \times r$

### 2.3.2 Ausgangsgleichungen

Nach der Beschreibung des Systems ist es notwendig, den Systemausgang zu definieren. Die Systemausgang ist als eine beliebige Systemvariable definiert. Jede Ausgangsvariable im System kann beschrieben werden: [3]

$$y(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_1u_1 + \dots + d_ru_r \tag{6}$$

Wo  $c_i$  und  $d_i$  sind die Konstanten. Für das System der Ausgangsvariable können die Gleichungen wie folgt definiert werden: [3]

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \dots + d_{1r}u_r \\
 y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \dots + d_{2r}u_r \\
 &\vdots \\
 y_n &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \dots + d_{mr}u_r
 \end{aligned} \tag{7}$$

Oder in einem Matrixeintrag:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & & d_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dieser Matrixeintrag kann überschrieben werden:

$$y = Cx + Du \tag{9}$$

- $y$  - Ausgangsvariable
- $C$  - Ausgangsmatrix  $m \times n$
- $D$  - Durchgangsmatrix  $m \times r$

Für viele physikalische Systeme ist die D-Matrix Null und der Eintrag der Ausgangsgleichung kann dann vereinfacht werden: [3]

$$y = Cx \tag{10}$$

### 2.3.3 Zustandsgleichungen

Das komplette Systemmodell für ein lineares zeitinvariantes System besteht aus Zustandsgleichungen. Es wird durch die Matrizen  $A$  und  $B$  und die Ausgangsgleichungen definiert, die alle Ausgangsvariablen verbinden und in den  $C$ - und  $D$ -Matrizen ausgedrückt werden. Die Aufgabe der Systemmodellierung besteht darin, Matrixelemente abzuleiten und das Systemmodell in diese Form zu schreiben: [3]

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11)$$

$$y = Cx + Du \quad (12)$$

Die Matrizen A und B stellen die Systemeigenschaften dar, und die Matrizen C und D stellen eine konkrete Auswahl von Ausgangsvariablen vor. [3]

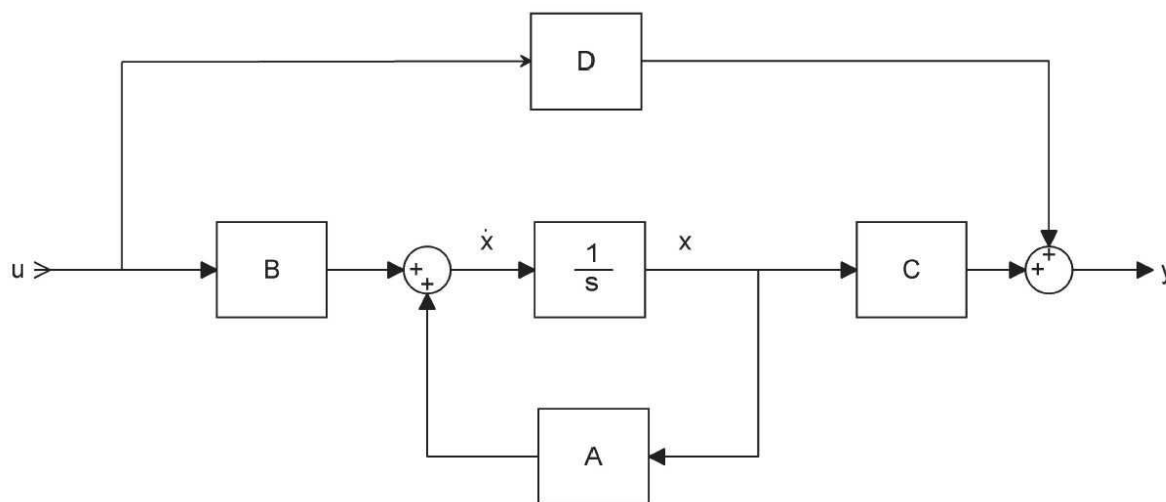


Bild 2.2 Allgemeines Zustandsschema des Systems

## 2.4 Signal und Rauschen

In dynamischen Systemen wird bei der Messung der dynamischen Eigenschaften die Problematik der Signalverarbeitung gelöst. Dies ist vor allem auf die Messung der Größe eines gegebenen dynamischen Systems zurückzuführen, zum Beispiel in der experimentellen Modalanalyse. In diesem Fall handelt es sich um die Verarbeitung von Analogsignalen von Sensoren zu digitalen, mittels verschiedener Filter und anderer Verfahren.

Dann wird noch ein Problem der Entstehung des Rauschens gelöst. Dies ist auf den Einfluss der Umgebung auf das System zurückzuführen. Ein weiteres Rauschen entsteht beim Messen des Signals durch Sensoren. In einigen mathematischen Modellen werden also mit der Entstehung und dem Einfluss des Rauschens berechnet.

Dieses Kapitel beschreibt die grundlegende Theorie der Signale und des Rauschens, da bei der OMA diese Kenntnisse genutzt werden, um mathematische Modelle zu modellieren und die Auswirkungen von Rauschen auf OMA-Ergebnisse zu lösen.

## 2.4.1 Signal

Der abstrakte Begriff "Signal" bezieht sich in der Regel nur auf Zeitfunktionen, die den zeitlichen Verlauf der physikalischen Größen darstellen. Das Signal stellt somit eine Funktion dar, die Informationen über das Verhalten des Systems überträgt. Die Signale können nach der Form in kontinuierliche (analoge) Signale in der Zeit und nicht kontinuierliche (diskrete) über die Zeit aufgeteilt werden. Kontinuierliche Signale sind eine natürliche Form der Signaldarstellung. Aus mathematischer Gesichtspunkt ist es eine kontinuierliche oder stückweise kontinuierliche Funktion, deren Funktionswert zu jedem Zeitpunkt bekannt ist. Diskrete Signale bestehen aus einer Folge von Werten, unter denen der Funktionswert des Signals undefiniert ist. [4], [5]

Die Signalklassifizierung ist in Bild 2.3 dargestellt. Die grundlegende Signalverteilung ist deterministisch und zufällig. Der zeitliche Verlauf eines deterministischen Signals wird determiniert (z. B. durch eine funktionale Vorschrift), und es ist daher möglich, seinen Verlauf vorherzusagen. Eine zufällige Signalentwicklung ist nicht vorhersehbar. Das deterministische Signal hat drei Untergruppen. Übergangssignale sind zeitlich begrenzt. Periodische und quasi-periodische Signale dauern eine unendlich lange Zeit. Das periodische Signal hat eine wichtige Untergruppe, ein harmonisches Signal, dessen Wellenform sinusförmig ist. [5]

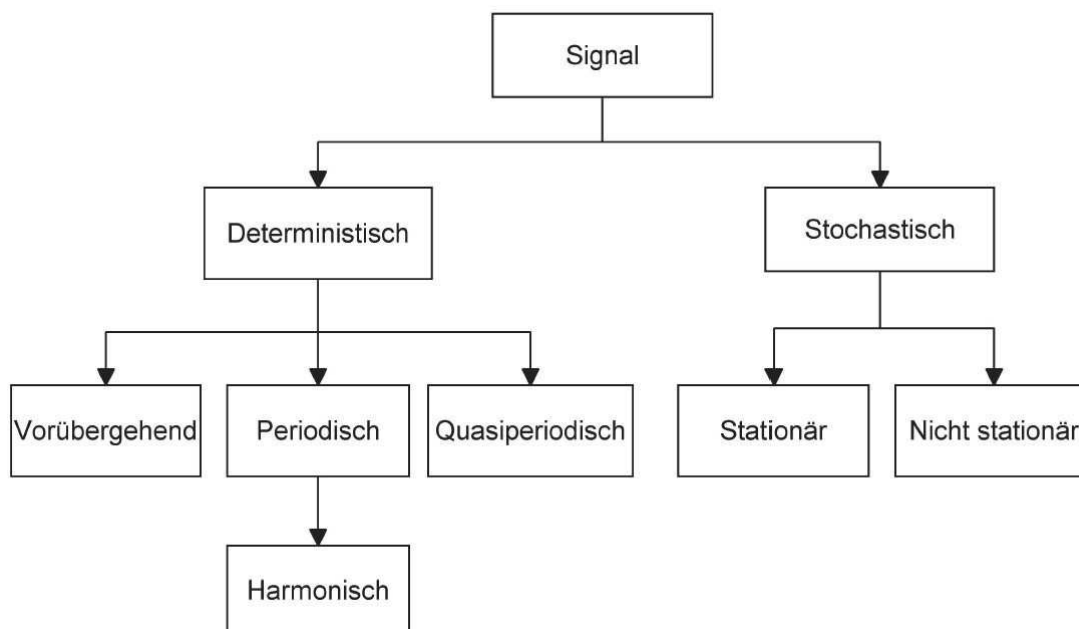


Bild 2.3 Klassifizierung von Signalen nach der Zufälligkeit ihres Verlaufes [5]

Das stochastische Signal hat zwei Untergruppen: stationär und nicht stationär. Das stationäre Signal hat im Gegensatz zum nicht-stationären Signal in der Zeit unveränderliche statistische Eigenschaften (Mittelwert, Distributionsfunktion, Streuung, ...). Wenn eine ausreichend lange Intervallzeit der Messung des Signals gewählt wird, werden die gleichen Eigenschaften festgestellt. [5], [6]

In dieser Arbeit wird ein stochastisches Signal verwendet. Dieses Signal hat eine unregelmäßige Wellenform und kann nicht durch eine Gleichung beschrieben werden, sondern muss durch einen Satz von Parametern beschrieben werden. Dieser unregelmäßige Verlauf ist beispielsweise bei einer zufälligen Schwingung von Turbinenschaufeln aufgrund aerodynamischer Turbulenzen oder mechanischer Stößen im Getriebemechanismus zu sehen. Dies sind Prozesse, deren Zeitverlauf nicht im Voraus bestimmt werden kann. Beim Wiederholen des gleichen Versuches wird sich die neue Wellenform von der vorherigen unterschieden. Ein typisches Beispiel für ein stochastisches Signal ist Rauschen. In Wirklichkeit ist fast jedes verarbeitete Signal mit Rauschen belastet. [6], [7]

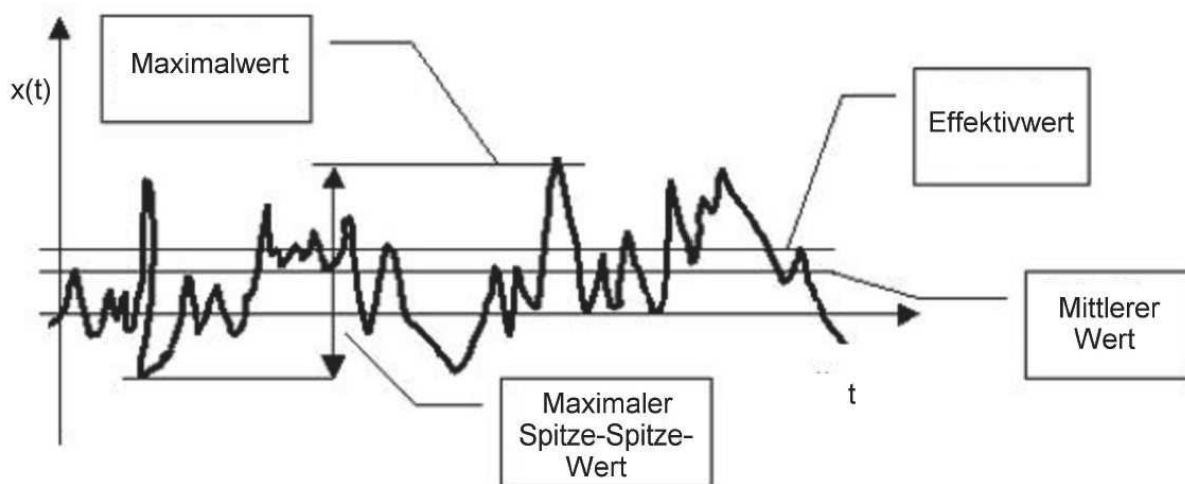


Bild 2.4 Zufällige Signalprobe [6]

## 2.4.2 Rauschen

Dieses Signal ist nicht periodisch; es enthält keine harmonischen Komponenten. Der Verlauf des Rauschsignals  $U(t)$  und dessen Spektrums  $A(f)$  ist in Bild 2.5 dargestellt. Abhängig von der Form des Spektrums wird die Art des Rauschens unterschieden: [8]

- Weißes Rauschen (White Noise) - enthält alle Frequenzen
- Zufälliges Rauschen - unabhängiges Rauschen
- Gaußsche Rauschen – abhängiges Rauschen, Verteilung nach Gaußsche Funktion

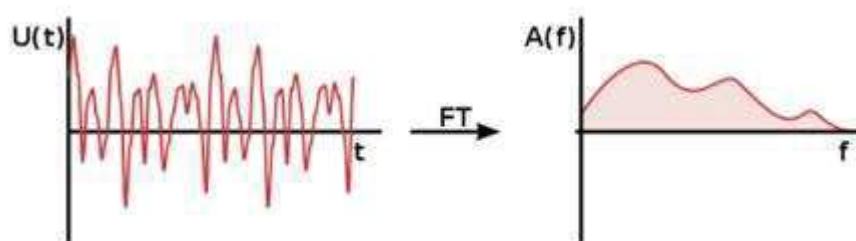


Bild 2.5 Der Verlauf des Rauschsignals  $U(t)$  und dessen Spektrum  $A(f)$  [8]

Diese Arbeit verwendet weißes Rauschen (White Noise), das ein zufälliges Signal mit besonderen Eigenschaften ist. Obwohl dieses Signal nur eine mathematische Abstraktion ist, ist es möglich, mit ihm zufällige Fehler zu modellieren, deren Grundcharakteristik die totale Zufälligkeit und keine Korrelation zwischen den Versatzwerten ist. Eine weitere Anwendung besteht darin, die Übertragungseigenschaften von linearen dynamischen Systemen zu beschreiben. Das gemusterte Signal mit den weißen Rauscheigenschaften hat einen Nullmittelwert. [5]

### 3 Betriebsmodalanalyse (OMA)

Die Betriebsmodalanalyse (Operational Modal Analysis oder auch Ambient Modal oder Output only Modal) ist eine Technik, die sich auf die Identifikation von modalen Parametern konzentriert, ohne die Erkenntnis der Erregungskräfte. Zu den modalen Eigenschaften der Struktur gehören vor allem Eigenfrequenzen, Dämpfungsverhältnisse und Modenformen. Der grundsätzliche Unterschied im Vergleich zur herkömmlichen Modalanalyse besteht darin, dass es keine Notwendigkeit gibt, die Eingangskräfte zu messen, was ein großer Vorteil ist. Dies ermöglicht das Testen von Strukturen unter Betriebsbedingungen oder in anderen Situationen, in denen keine Eingangskräfte gemessen werden können. Die Durchführung eines modalen Tests unter Betriebsbedingungen bedeutet, dass die Struktur einem realistischen Schwingungsverhalten ausgesetzt ist, das durch künstliche Erregung schwer zu erreichen ist. Das abgeleitete Modell enthält dann Informationen über die Systemcharakteristik und die Erregungskräfte. [9], [10]

Die meisten OMA-Techniken (Betriebsmodalanalyse) basieren auf traditionellen EMA-Verfahren (experimentelle Modalanalyse). Allerdings gibt es Unterschiede und der Hauptunterschied betrifft die grundlegende Formulierung von Inputs. Verfahren für EMA werden im deterministischen Rahmen entwickelt, während OMA-Methoden auf zufälligen Reaktionen basieren (stochastische Einstellung). Viele OMA-Techniken können daher als stochastisches Gegenstück zu deterministischen Methoden betrachtet werden, die in der klassischen EMA verwendet werden. Allerdings erscheinen auch hybride deterministische stochastische Techniken. [11]

OMA hat Vorteile gegenüber EMA: [11]

- Die Prüfung ist schnell und kostengünstig
- Keine Erregungseinrichtung erforderlich
- Es stört nicht den normalen Gebrauch der Konstruktion
- Es erlaubt die Identifizierung von modalen Parametern, die für das gesamte System in seinen tatsächlichen Betriebsbedingungen repräsentativ sind

Ein typischer Nachteil für OMA ist mit der Verfügbarkeit von Ausgangsdaten verbunden. Es können nur unskalierte Modusformen erhalten werden, und das Signal / Rausch-Verhältnis in

den Messdaten ist geringer als bei kontrollierten Tests im Laborumfeld. Dies erfordert sehr sensible Geräte und sorgfältige Datenanalyse. [11]

Das Standardverfahren für die Betriebsmodalanalyse besteht aus drei Grundschritten: [12]

1. Durchführung eines Umgebungsvibrationstests unter Betriebsbedingungen und Sammeln von Ausgangsreaktionen
2. Beurteilung der Modelle
3. Anwendung der Methodik (OMA)

Beurteilende OMA-Modelle können auf der Domäne klassifiziert werden, in der die Daten verarbeitet werden, etwa Frequenzbereichsmodelle (Frequency Domain Decomposition - FDD) und Zeitbereichsmodelle (Stochastic Subspace Identification (SSI) – Time Domain). Es ist wichtig, die Hauptunterschiede zwischen diesen beiden Einstellungen (time domain a frequency domain) zu ermitteln, um die Wirksamkeit jeder Methodik zu bestimmen und die Bedingungen zu finden, für die die Methoden verwendet werden sollen. Im Zeitbereich können die Ausgabedaten direkt zum Konstruieren des Modells verwendet werden, während für das Frequenzbereichsmodell eine Spektralanalyse unter Verwendung der Fourier-Transformation durchgeführt werden muss. [12], [13] Für die Zwecke dieser Arbeit wird das OMA im Zeitbereich näher beschrieben.

### 3.1 Identifikationsmethoden im Zeitbereich mittels SSI

In diesem Abschnitt werden modale Identifikationsmethoden für mathematische Modelle des Zeitbereichs von Vibrationssystemen erläutert. Diese Methoden umfassen Stochastic Subspace Identification – SSI. Dazu gehören Algorithmen: Covariance-Driven SSI-Methode sowie Data-Driven SSI-Methode. Beide Algorithmen identifizieren Modelle direkt aus Zeitsignalen. [12]

#### 3.1.1 Aufteilung des experimentellen Signals in 'Past' und 'Future'

Vor der Erläuterung des Identifikationsalgorithmus wird eine Prozedur zum Reduzieren und Glätten der Daten zur Aufteilung des experimentellen Signals in 'Past' und 'Future' Teile eingeführt. Im tatsächlichen Experiment stehen nur diskrete Abtastwerte des Zeitsignals  $y_k (k = 0, 1, \dots, N, N \rightarrow \infty)$  zur Verfügung, die werden beschrieben als: [12]



$$y_k = [y_m^n] = \begin{bmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \vdots \\ y_l^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 & y_1^1 & \cdots & y_1^N \\ y_2^0 & y_2^1 & \cdots & y_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_l^0 & y_l^1 & \cdots & y_l^N \end{bmatrix} \quad (13)$$

Wobei  $y_m^n$  den n-ten ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) Abtastpunkt vom m-ten ( $m = 1, 2, \dots, l$ ) des Sensors in einer bestimmten Einstellung bezeichnet. Die Hankel-Matrix  $H \in \mathbb{R}^{2li \times j}$  kann in 'Past'-  $Y_p$  und 'Future'-Teil  $Y_f$  in der Gleichung unterteilt werden: [12]

$$H_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_{2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1 \rightarrow l}^0 & y_{1 \rightarrow l}^1 & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{j-1} \\ y_{1 \rightarrow l}^1 & y_{1 \rightarrow l}^2 & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1 \rightarrow l}^{i-1} & y_{1 \rightarrow l}^i & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j-2} \\ y_{1 \rightarrow l}^i & y_{1 \rightarrow l}^{i+1} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j-1} \\ y_{1 \rightarrow l}^{i+1} & y_{1 \rightarrow l}^{i+2} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1 \rightarrow l}^{2i-1} & y_{1 \rightarrow l}^{2i} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{"past"} \\ \text{"future"} \end{matrix} \quad (14)$$

Die Indizes  $Y_{i|2i-1}$  und  $Y_{0|i-1}$  sind die Indizes des ersten und letzten Elements in der ersten Spalte des Hankel-Matrixblocks. Die Indizes p und f sind die Bezeichnungen für 'Past' und 'Future'. Die Matrizen 'Past'  $Y_{0|i-1}$  und 'Future'  $Y_{i|2i-1}$  werden durch Division der Hankel-Matrix H in zwei Blöcke definiert, wobei jeder Teil i Zeilen aufweist. Eine weitere Division wird definiert, indem die erste Zeile des Blocks  $Y_{i|2i-1}$  weggelassen wird und diese Zeile zur letzten Zeile des Blocks  $Y_{0|i-1}$  hinzugefügt wird, was erklärt werden kann als: [12]

$$H_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ \vdots \\ y_{2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1 \rightarrow l}^0 & y_{1 \rightarrow l}^1 & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{j-1} \\ y_{1 \rightarrow l}^1 & y_{1 \rightarrow l}^2 & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1 \rightarrow l}^i & y_{1 \rightarrow l}^{i+1} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j-1} \\ y_{1 \rightarrow l}^{i+1} & y_{1 \rightarrow l}^{i+2} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j} \\ y_{1 \rightarrow l}^{i+2} & y_{1 \rightarrow l}^{i+3} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{i+j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1 \rightarrow l}^{2i-1} & y_{1 \rightarrow l}^{2i} & \cdots & y_{1 \rightarrow l}^{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{"past"} \\ \text{"future"} \end{matrix} \quad (15)$$

### 3.1.2 Methode Covariance-driven SSI

Diese Methode (Cov-SSI) beschäftigt sich mit dem sogenannten Problem der stochastischen Realisierung, d.h. dem Problem, das stochastische Zustandsraummodell nur aus den Ausgabedaten zu identifizieren. Da es sich um eine 'Covariance-driven '-Methode handelt, muss die Ausgangskorrelation  $R$  berechnet werden. Tatsächlich wird die Ausgangskorrelation  $R$  als  $\hat{R}$  angesichts zur Größe N geschätzt. [11], [12]

$$R_i = E|y_{k+i}y_k^T|; \quad \hat{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i}y_k^T \quad (16)$$

Die Korrelationsmatrix wird dann zu einem Toeplitz-Matrixblock zusammengesetzt:

$$T_{1|i} = Y_f(Y_p)^T = \begin{pmatrix} R_i & R_{i-1} & \cdots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \cdots & R_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \cdots & R_i \end{pmatrix} \quad (17)$$

Die Anwendung der Faktorisierungseigenschaft auf die Toeplitz-Matrix ergibt sich:

$$T_{1|i} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} (A^{i-1}G \quad A^{i-2}G \quad \cdots \quad G) = O_i \Gamma_i \quad (18)$$

Wo  $O_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$  und  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{n \times li}$  die erweiterte Matrix der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit sind. Die Verwendung der singulären Wertzerlegung (singular value decomposition - SVD) auf der Matrix  $T_{1|i}$  zur Reduzierung des Rauscheffektes führt zu: [11], [12]

$$T_{1|i} = USV^T = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (19)$$

Wobei  $U \in \mathbb{R}^{li \times li}$  und  $V \in \mathbb{R}^{li \times li}$  die orthonormale Matrizen sind und  $S \in \mathbb{R}^{li \times li}$  eine Diagonalmatrix ist, die singuläre Werte in absteigender Reihenfolge enthält. SVD ist ein mathematisches Werkzeug zur Schätzung der Größe der Matrix, die durch die Anzahl der Nicht-Null-Singularwerte bestimmt wird. Durch Auslassen von Nicht-Null-Singularwerten und entsprechenden singulären Vektoren werden die folgenden Matrizen erhalten:  $U_1 \in \mathbb{R}^{li \times n_r}$ ,  $V_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times li}$  und  $S_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ . Durch Vergleich der Gleichungen (18) und (19) können  $O_i$  und  $\Gamma_i$  ausgedrückt werden als: [11], [12]

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} \quad (20)$$

$$\Gamma_i = S_1^{1/2} V_1^T \quad (21)$$

Aus Gleichung (18) kann die Ausgangsmatrix  $C$  aus der ersten Zeile der Matrix  $O_i$  erhalten werden. Die Matrix  $G$  kann leicht aus der letzten Spalte der Matrix  $\Gamma_i$  bestimmt werden. [11], [12]

$$C = O_i(1:l, :) \quad (22)$$

$$G = \Gamma_i(:, l(i-1) + 1:li) \quad (23)$$

Zwei mögliche Methoden sind dazu bestimmt, die Zustandsübergangsmatrix A zu bestimmen. Eine Methode besteht darin, die Matrix A aus dem verschobenen Block der Toeplitz-Matrix  $T_{2|i+1}$  zu berechnen. [11], [12]

$$A = O_i^\dagger T_{2|i+1} \Gamma_i^\dagger = S_1^{-1/2} U_1^T T_{2|i+1} (S_1^{1/2} V_1^T)^\dagger \quad (24)$$

Wobei  $\dagger$  die Moore-Penrose pseudo-inverse Matrix bezeichnet. Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Matrix A mittels einer erweiterten Beobachtermatrix  $O_i$  zu erhalten. [12]

$$A = O_i(1:l(i-1), :)^{\dagger} O_i(l+1:li, :) \quad (25)$$

Das Identifikationsproblem ist theoretisch gelöst. Dann ist es möglich, modale Parameter aus den Matrizen A und C zu erhalten. Somit ist die eigene Zerlegung der Matrix A, der eigene Wert der Matrix  $A_c$  (Index c bezeichnet die Matrix  $A_c$  in kontinuierlicher Zeit, d in diskreter Zeit), Eigenfrequenzen, Dämpfungsverhältnisse und Modenformen. [11], [12]

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$$

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t}, \omega_i = |\lambda_i| \frac{|\lambda_i|}{2\pi}, \xi_i = \frac{-\text{Re}(\lambda_i)}{\omega_i} \quad (26)$$

$$V = C\Psi$$

Es ist notwendig anzumerken, dass die Matrizen A und C und die modalen Parameter als die geschätzten Ergebnisse betrachtet werden, da bei realen Experimenten die Messungen nicht unendlich sind und die Ausgangskovariationen eigentlich nur Schätzungen von  $\hat{R}_i$  sind. [12]

### 3.1.3 Methode Data-Driven SSI

Das Prinzip des DD-SSI-Algorithmus sind die Kalman-Zustandsfilter und die Faktorisierungseigenschaft von Projektionsmatrix. Der Kalman-Filter dient zur Abschätzung des Kalman-Filters der Zustände  $\hat{x}_k$  und die Sequenz des Kalman-Filters der Zustände  $\hat{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times j}$  ist definiert als: [12]

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \quad (27)$$

Die Projektionsmatrix ist definiert als:

$$P = Y_f/Y_p = Y_f(Y_p)^T(Y_p(Y_p)^T)^\dagger Y_p \quad (28)$$

Wo  $Y_f \in \mathbb{R}^{li \times j}$ ,  $Y_p \in \mathbb{R}^{li \times j}$  sind die Blocks der Hankel-Matrix mit zukünftigen (Future) und vergangenen (Past) Ausgänge. Die Projektionsmatrix kann auch aus der erweiterten Beobachtungsmatrix  $O_i$  und die Sequenz des Kalman-Filters der Zustände  $\hat{X}_i$  berechnet werden: [12]

$$P = O_i \hat{X}_i \quad (29)$$

Die Gleichung (28) ist nur eine Definition und in der Praxis basiert die Berechnung auf der Hankel-Matrix, die definiert ist

$$Y_{0|2i-1} = P = Y_f/Y_p = Y_f^+/Y_p^- = RQ^T \quad (30)$$

Wobei  $Q \in \mathbb{R}^{j \times j}$  eine orthogonale Matrix ist und  $R \in \mathbb{R}^{2li \times j}$  eine untere Dreiecksmatrix ist. Zur Berechnung der Projektion  $P_i$  wird QR-Faktorisierung des Blocks der Hankel-Matrix der Ausgänge verwendet: [12]

$$P_i = Y_f/Y_p = \begin{matrix} li & l & l(i-1) & j \rightarrow \infty \\ \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} & \begin{matrix} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} li \\ l \\ l(i-1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} li \\ l \\ l(i-1) \end{matrix} \quad (31)$$

Durch Ersetzung der Gleichung (31) in Gleichung (28) kann die Projektionsmatrix  $P_i$  mit  $R$  und Submatrizen  $Q$  ausgedrückt werden. Ähnlich kann die Matrix  $P_{i-1}$  unter Verwendung des alternativen Ausdrucks der zukünftigen Ausgänge  $Y_f^-$  und der vergangenen Ausgänge  $Y_p^+$  berechnet werden: [12]

$$P_i = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} Q_1^T, \quad P_{i-1} = \begin{pmatrix} R_{31} & R_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \quad (32)$$

Nach dem Erhalten der Matrizen  $P_i$  und  $P_{i-1}$  ist es möglich, die strukturellen modalen Parameter unter Verwendung der folgenden Matrizen abzuschätzen. Auch hier gilt die SVD (singular value decomposition), um den Rang der Projektionsmatrix zu schätzen. Nach der Auslassung

von singulären Nullwerten und entsprechenden singulären Vektoren wird die Projektionsmatrix in der Form gegeben: [12]

$$P_i = U_1 S_1 V_1^T \quad (33)$$

Wobei  $U \in R^{li \times li}$ ,  $S \in R^{li \times li}$  und  $V \in R^{li \times li}$ . Um die Systemmatrizen  $A$  und  $C$  zu bestimmen, wird eine weitere Projektionsmatrix  $P_{i-1}$  eingeführt. Dann wird die erweiterte Beobachtungsmatrix  $O_{i-1}$  durch Entfernen der letzten Zeilen  $l$  aus der Matrix  $O_i$  erhalten. [12]

$$P_{i-1} = Y_f^- / Y_p^+ = O_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (34)$$

$$O_i = U_1 S_1^{1/2}, \quad O_{i-1} = O_i(1:l(i-1), :) \quad (35)$$

Die Zustandssequenz  $\hat{X}_{i+1}$  kann aus  $\hat{X}_i$  abgeleitet werden:

$$\hat{X}_i = O_i^\dagger P_i, \quad \hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\dagger P_{i-1} \quad (36)$$

Durch Ersetzen der Zustandssequenz  $\hat{X}_{i+1}$  und  $\hat{X}_i$  in den stochastischen Zustandsraum wird der Algorithmus des DD-SSI-Methods gelöst, um zu erhalten: [12]

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \hat{X}_i + \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix} \quad (37)$$

Wo  $W_i$  und  $V_i$  der Rest sind und  $Y_{i|i} \in \mathbb{R}^{l \times j}$  der  $i$ -te Block der Hankel-Matrix ist. Mittels der Submatrix RQ kann es leicht umschreiben: [12]

$$Y_{i|i} = \begin{pmatrix} R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (38)$$

Die Zustandssequenzen  $\hat{X}_{i+1}$  und der Block der Zeilen  $Y_{i|i}$  werden aus den Ausgangsmessungen berechnet und die Systemmatrizen  $A$  und  $C$  können nach dem Verfahren der kleinsten Quadrate berechnet werden: [12]

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \hat{X}_i^\dagger \quad (39)$$

Der zweite Algorithmus basiert auf der Beobachtungsmatrix:

$$(O_i^\dagger)(A) = (O_i^\downarrow) \quad (40)$$

Dann ist Matrix A gegeben durch:

$$(A) = (V_{22})(V_{12})^{-1} \quad (41)$$

Systempolen und Modenformen sind: [12]

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$$

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t}, \omega_i = |\lambda_i| \frac{|\lambda_i|}{2\pi}, \xi_i = \frac{-\text{Re}(\lambda_i)}{\omega_i} \quad (42)$$

$$V = C\Psi$$

## 3.2 Wichtungsansätze

Es gibt mehrere Modalanalysetechniken des Zeitbereichs. Das Ergebnis dieser Techniken sind extrem helle Stabilitätsdiagramme mit fast keinem Rauschen. Zu diesen Techniken gehören: [10], [14]

Der UPC-Algorithmus (**Unweighted Principal Component**) ist der einfachste Algorithmus

Der PC-Algorithmus (**Principal Component**) bestimmt Systemmatrizen aus singulären Werten und linken singulären Vektoren der Beobachtungsmatrix

Der CVA-Algorithmus (**Canonical Variate Analysis**) berechnet die Grundwinkel und die Richtungen mittels der Matrizen der vergangenen (Past) und zukünftigen (Future) Ausgängen

## 3.3 Stabilitätsdiagramm

Der Zweck des Stabilitätsdiagramms besteht darin, die Pole des Systems zu finden. Ein Beispiel für ein Stabilitätsdiagramm aus Daten, die nach der SSI-COV-Methode verarbeitet werden, ist auf dem Bild 3.1. Auf der x-Achse ist die Eigenfrequenz des Poles, und auf der y-Achse ist die Modellordnung. Zur Konstruktion des Stabilitätsdiagramms ist es notwendig zuerst die Modellordnung zu bestimmen. Es hängt mit der Anzahl der Eigenfrequenzen zusammen. Da diese Zahl nicht immer leicht zu bestimmen ist, ist dieser Ansatz nicht geeignet. Auch aufgrund der Anwesenheit von Rauschen im System ist seine Bestimmung schwierig. Dieses Problem kann durch seine Übertreibung gelöst werden, und dann ist es möglich, alle realen

(physischen) Pole des Systems zu identifizieren. Diese Lösung bringt ein anderes Problem in Form von redundanten Polen (die sogenannten mathematischen Pole), die überhaupt nicht mit dem realen System zusammenhängen. Das Stabilitätsdiagramm wird verwendet, um mathematische und reale Pole zu unterscheiden. [15]

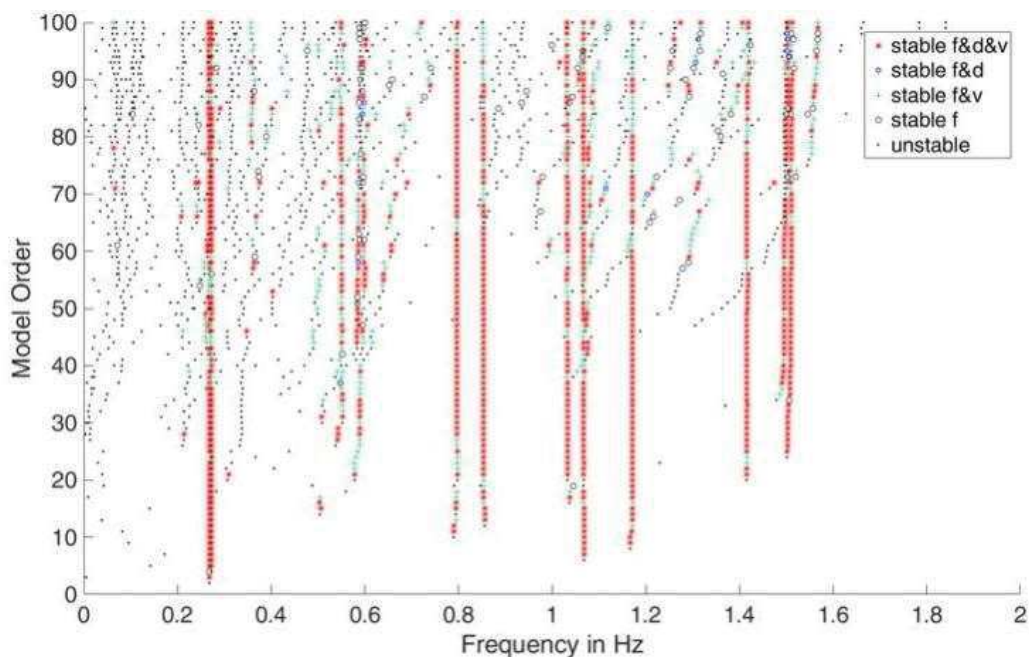


Bild 3.1 Ein Beispiel für ein Stabilitätsdiagramm [16]

Einige Eigenschaften von physikalischen Polen können verwendet werden, um das Stabilitätsdiagramm zu konstruieren. Diese Pole haben einen negativen Wert für ihren Realteil. Physikalische Pole neigen auch dazu, sich mit steigender Ordnung zu stabilisieren. Dies bedeutet, dass sich die Eigenfrequenz des identifizierten physischen Pols nicht mit der steigenden Ordnung des mathematischen Modells ändert. Die mathematischen Pole werden in einer "zufälligen" Weise erschaffen. [15]

Es kann gesagt werden, dass das Stabilitätsdiagramm die berechneten Pole in der Grafik zeigt. Es gibt eine allmähliche Erhöhung der Modellordnung in einem mathematischen Modell. Für jedes neu entstandene Modell werden dann Pole identifiziert, die dann ins Diagramm eingetragen werden. Der nächste Schritt definiert die Kriterien, die der Bestimmung stabiler Pole ermöglichen. Es ist dann möglich, die einzelnen Eigenfrequenzen aus dem Stabilitätsdiagramm zu bestimmen. [11], [15]

## 4 Untersuchung eines Dreimassenschwingers mittels SSI

Der Gegenstand dieser Arbeit ist es, modale Parameter der Werkzeugmaschine mit OMA zu erhalten. Da die Maschine als ein relativ kompliziertes System betrachtet werden kann, das viele Eingabeparameter hat, wurde der gesamte Prozess zuerst für ein einfacheres Gerät durchgeführt. Aus diesem Grund wurden zunächst die Berechnungen auf ein einfacheres System (Dreimassenschwinger - Bild 4.1) angewendet. Dieses System besteht aus drei Gewichten, die durch zwei identische Federn verbunden und mittels einer Feder mit einem festen Träger verbunden sind. Auf dem letzten Gewicht liegt die Erregungskraft, die die Schwingung des ganzen Systems verursacht. Dies ist ein relativ einfaches System und kann mit bekannten Gleichungen gelöst werden. Wichtig ist auch, dass es möglich ist, das Systemverhalten im Voraus vorherzusagen.

Am Anfang wurden Bewegungsgleichungen zusammengebaut und die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen bestimmt. Der nächste Schritt war eine Modalanalyse, bei der das System ohne Belastung gelöst wurde. Dies ist eine Lösung des Eigenproblems der Bewegungsgleichungen. Aus diesem Verfahren werden modale Eigenfrequenzen und modale Schwingungsformen erhalten. Diese Frequenzen bilden dann die Referenzfrequenz für OMA.

Der nächste Schritt ist, Zeitsignale von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Bewegung unter Betriebsbedingungen zu erhalten. Dies sind die ersten notwendigen Werte für OMA, um die eigenen Frequenzen zu bestimmen. Dieser Schritt wird mit dem Zustandsraum gelöst, in dem ein mathematisches Modell erstellt und die Belastung durch weißes Rauschen definiert wird.

Im letzten Teil dieses Kapitels wird die Betriebsmodalanalyse durchgeführt. Danach werden Stabilitätsdiagramme zusammengestellt, in denen die Eigenfrequenzen aus der Modalanalyse angezeigt werden. Basierend auf diesem Wissen werden die optimalen Varianten der Belastung von Rauschen und die eingestellten Kriterienparameter mittels der Kriterien, um die Eigenfrequenzen zu finden, ermittelt. Anschließend werden die Ergebnisse ausgewertet und die Schicklichkeit der Nutzung der einzelnen Teile des OMA beurteilt.



## 4.1 Bewegungsgleichungen

Im ersten Schritt ist es notwendig, Bewegungsgleichungen aufzustellen, die den Zustandsraum beschreiben können. Diese Gleichungen dienen dann, um modale Parameter zu erhalten und sind auch Teil des Zustandsraums.

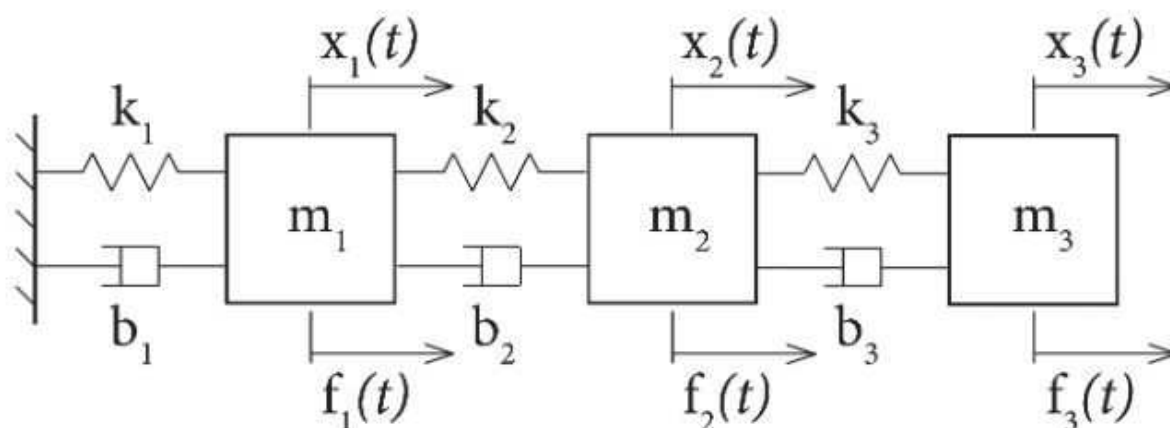


Bild 4.1 Dreimassenschwinger [2]

Für Dreimassenschwinger, der auf dem Bild 4.1 dargestellt ist, wurden grundlegende differentiale Bewegungsgleichungen aufstellt.

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) = 0 \quad (43)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + b_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 (x_3 - x_2) = F$$

Wo  $m$  ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$ ) die Masse der einzelnen Gewichte ist,  $b$  ( $b_1 = 0,85 \frac{Ns}{m}$ ,  $b_2 = 4,5 * b_1 \frac{Ns}{m}$ ,  $b_3 = 4,5 * b_2 \frac{Ns}{m}$ ) ist die Dämpfung,  $k$  ( $k_1 = 0,85 \frac{Ns}{m}$ ,  $k_2 = 4,5 * b_1 \frac{Ns}{m}$ ,  $k_3 = 4,5 * b_2 \frac{Ns}{m}$ ) ist die Steifigkeit und die Erregung des Systems ist  $F$ . Darüber hinaus ist  $\ddot{x}$  die Beschleunigung der einzelnen Gewichte,  $\dot{x}$  ist ihre Geschwindigkeit und  $x$  Verschiebung. Diese Gleichungen können dann in der Matrixaufzeichnung wie folgt überschrieben werden:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [B']\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (44)$$

Wo:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad [B'] = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (46)$$

## 4.2 Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen mittels der Modalanalyse

Das Ergebnis dieser Arbeit ist es, die Eigenfrequenzen eines gegebenen Systems mit OMA zu bestimmen. Um zu beurteilen, ob das Verfahren korrekt ist, sind zunächst die Eigenfrequenzen ohne Dämpfung und Beladung mittels Modalanalyse zu bestimmen. Anschließend wird eine Modalanalyse für das gedämpfte System durchgeführt, um die Ergebnisse zu vergleichen. Die berechneten Eigenfrequenzen werden dann mit den OMA-Ergebnissen im Stabilitätsdiagramm verglichen. Im nächsten Teil werden die Schwingungsformen durch Modalanalyse bestimmt.

### 4.2.1 Bestimmung der Eigenfrequenzen ohne Dämpfung

Um die Eigenfrequenzen des Systems zu bestimmen, ist es notwendig, die Matrix-Bewegungsgleichung des ungedämpften Systems in der Form zu lösen: [17]

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (47)$$

Wobei  $M$  die symmetrische Gewichtsmatrix und  $K$  die symmetrische Matrix der Steifigkeit des Systems ist. Für diese Gleichung gelten die Anfangsbedingungen: [17]

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (48)$$

Und dann wird die Gleichung entsteht:

$$(-M\Omega^2 + K)v = 0 \quad (49)$$

Wo der Vektor  $v$  ein unbekannter Vektor der Schwingungsformen ist und die Matrix  $\Omega^2$  eine unbekannte Matrix der Eigenfrequenzen des Systems ist. Diese Gleichung wird als sogenanntes allgemeines Eigenwertproblem bezeichnet. Seine Lösung besteht darin, den Vektor  $v$  und die Matrix  $\Omega^2$  zu erhalten. Es ist möglich, dies in Matlab mit der eig-Funktion zu lösen. Auf diese Weise werden die Eigenfrequenzen des Systems ohne Dämpfung erhalten. [17] Die berechneten Eigenfrequenzen sind in Tabelle 4.1 geschrieben.

Tabelle 4.1 Eigenfrequenzen des Dreimassenschwingers ohne Dämpfung

Reihenfolge [-]	Eigenfrequenz [Hz]
1.	17,2408
2.	60,6224
3.	104,1437

#### 4.2.2 Bestimmung der Schwingungsformen und Eigenfrequenzen des Dämpfungssystems

Das gleiche Verfahren wie im vorigen Kapitel wird auch für das Dämpfungssystem durchgeführt. Das System wird wieder ohne der Belastung und wird mittels der Methode des Eigenwertproblems gelöst. Dann ist die Ausgangsgleichung in Form:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = 0 \tag{50}$$

Und die daraus resultierenden Matrizen für die Berechnung sind:

$$K_{Dämpfung} = \begin{bmatrix} K & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & -M \end{bmatrix} \quad M_{Dämpfung} = - \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0_{3,3} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Das Ergebnis sind Matrizen mit komplexen modalen Schwingungsformen und modalen Eigenfrequenzen. Die Schwingungsformen des Systems können mit den realen und imaginären Teilen im Diagramm dargestellt werden. Das Bild 4.2 zeigt das resultierende Diagramm mit die Eigenschwingungsformen für die ersten drei Eigenfrequenzen. Auf der x-Achse ist das reale Teil und das imaginäre Teil ist auf y-Achse. Die dunkelgrüne Linie repräsentiert die Eigenschwingungsform für das erste Gewicht und das leichteste für das dritte Gewicht.

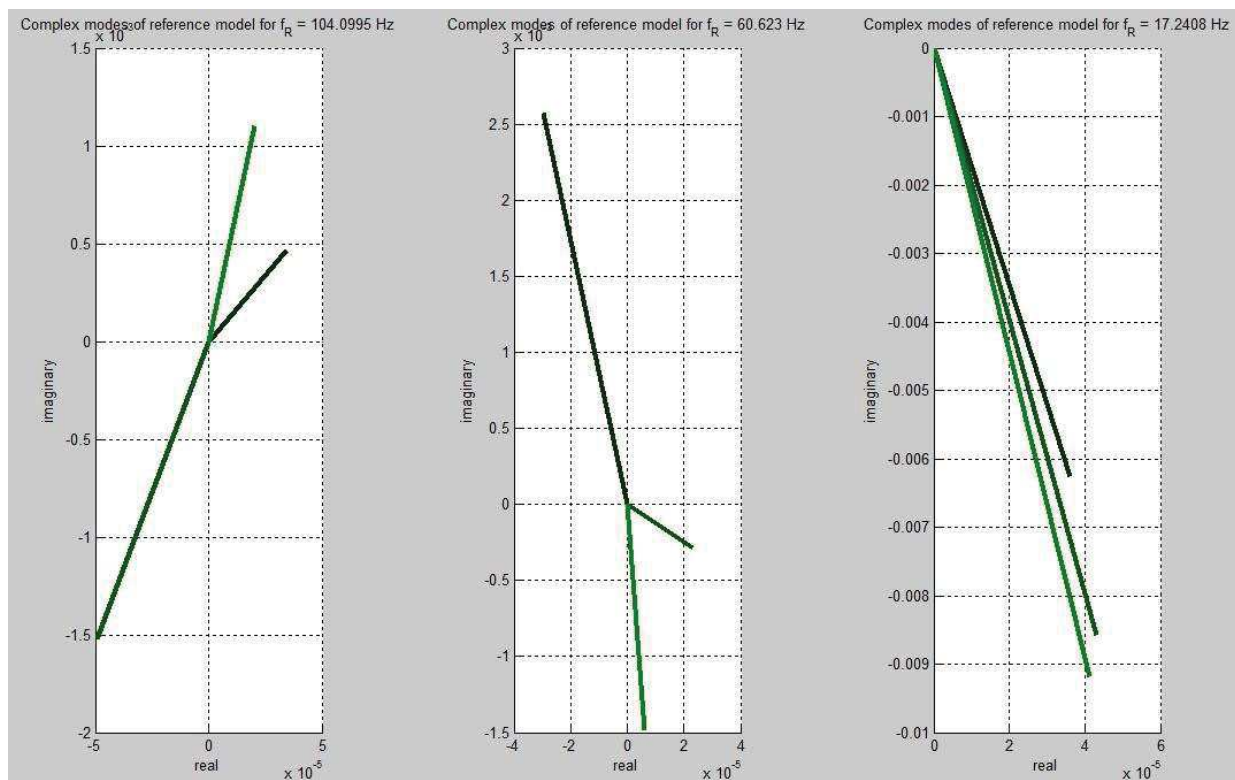


Bild 4.2 Eigenschwingungsformen für die ersten drei Eigenfrequenzen

Die resultierenden Modalfrequenzen sind in Tabelle 4.2 dargestellt. Die Frequenzen sind etwa gleich wie bei dem ungedämpften System. Allerdings gibt es geringe Unterschiede. Als Referenzfrequenz für das Stabilitätsdiagramm werden die Eigenfrequenzen für das gedämpfte System verwendet.

Tabelle 4.2 Eigenfrequenzen des Dreimassenschwingers mit Dämpfung

Reihenfolge [-]	Eigenfrequenz [Hz]
1.	17,2408
2.	60,6230
3.	104,0995

### 4.3 Zustandsraum

Um die Eigenfrequenzen des Systems mit OMA zu bestimmen, ist es notwendig, den Zustandsraum des Systems mit den folgenden Matrizen zu beschreiben:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 1_{3 \times 3} \\ -M'K & -M'B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ M' \end{bmatrix} \quad C = [0_{3 \times 3} \quad 1_{3 \times 3}] \quad D = [0_{3 \times 3}] \quad (52)$$

Die Matrizen A, B, C, D, die den Zustandsraum des Dreimassenschwingers beschreiben, können dann im Zustandsraummodell (Bild 4.3) zu belegen sein, das im Simulink-Programm geschaffen war. Das System wird an allen drei Punkten mit unkorreliertem weißem Rauschen erregt. Das Ausgangsrauschen, das das Sensorrauschen simuliert, wird dann durch den Ausgangswert „v“ definiert.

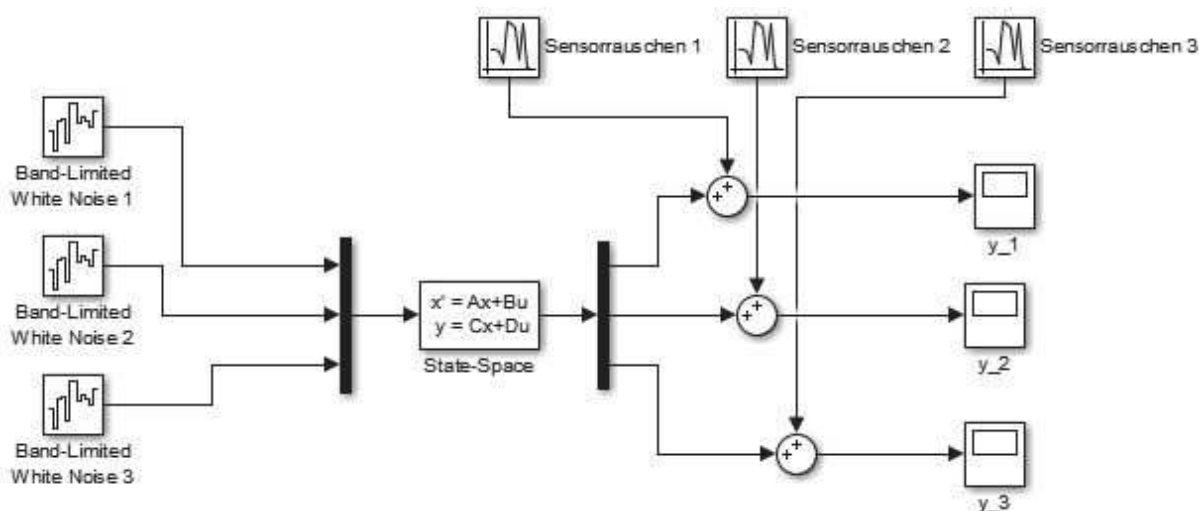


Bild 4.3 Zustandsraummodell des Dreimassenschwingers – Simulink

Um das Verhalten dieses Systems zu überprüfen, wurden mehrere Varianten von Eingangsparametern, die in der Tabelle (Tabelle 4.3) beschrieben sind, ausgewählt. Weißes Rauschen betritt das System mit Eingangsparametern: Zeitschritt 0,001, Noise power - 0 a 0,02. Das Bild 4.4 zeigt seinen Verlauf bei der Noise power 0,02. Wenn Noise Power 0 ist, ist das Eingangssignal Null. Für jeden Eingang war es notwendig, einen anderen Seed auszuwählen, der die Quelle für den Zufallszahlengenerator definiert. Dadurch wird sichergestellt, dass an jedem Eingang andere zufällige Werte erzeugt werden. Wenn Daten durch Messung erfasst werden, werden diese Daten aufgrund der Ungenauigkeit der Messtechnik verzerrt. Innerhalb dieses Modells wird diese Ungenauigkeit simuliert, indem eine andere Variable eingegeben wird, die Sensorrauschen darstellt. Die Wirkung dieses Rauschens wird dann ausgewertet.

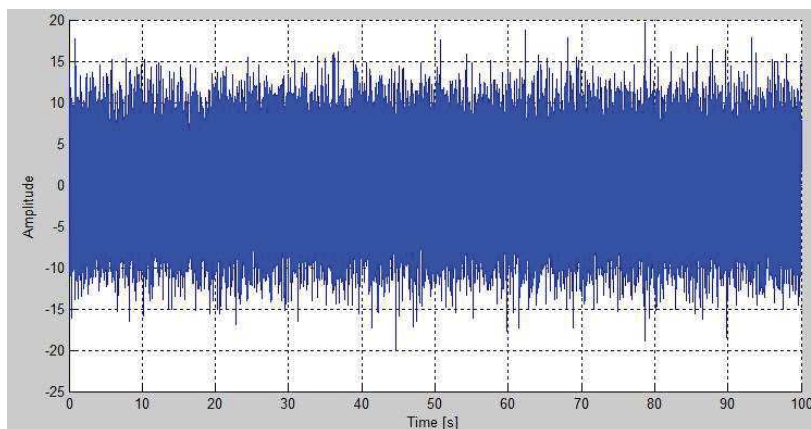


Bild 4.4 Weißes Rauschen

In der ersten Variante ist das weiße Rauschen auf Eingang und auf Ausgang ist Nullsensorrauschen. Bei den beiden anderen Varianten wird dann das Sensorrauschen erhöht, um deren Auswirkung auf die Ergebnisse zu beurteilen. In den letzten drei Varianten ist das Sensorrauschen null und es wird ein weißes Rauschen am Eingang angelegt, das an eine oder zwei Federn angelegt wird.

Tabelle 4.3 Werte des Rauschens des Dreimassenschwingers

Variante		Feder 1	Feder 2	Feder 3
1	weißes Rauschen [-]	0.02	0.02	0.02
	Sensorrauschen „v“ [-]	0	0	0
2	weißes Rauschen [-]	0.02	0.02	0.02
	Sensorrauschen „v“ [-]	1	1	1
3	weißes Rauschen [-]	0.02	0.02	0.02
	Sensorrauschen „v“ [-]	10	10	10
4	weißes Rauschen [-]	0.02	0	0
	Sensorrauschen „v“ [-]	0	0	0
5	weißes Rauschen [-]	0.02	0	0.02
	Sensorrauschen „v“ [-]	0	0	0
6	weißes Rauschen [-]	0.02	0.02	0
	Sensorrauschen „v“ [-]	0	0	0

Auf dem Bild 4.5 gibt es einen Vergleich des Ausgangssignals des ersten Gewichts für die ersten drei Varianten. Auf dem oberen Diagramm wurde das System auf alle drei Eingänge mit weißem Rauschen erregen, und die Sensorrauschen waren Null. Das erste Diagramm zeigt das Ausgangssignal des Systems, das nur durch weißes Rauschen beeinflusst wurde. Bei den beiden anderen Diagrammen war das System von dem Rauschen der Sensoren beeinflusst. Für das zweite Diagramm ist der Wert des Rauschens 1 und für das dritte Diagramm ist es 10.

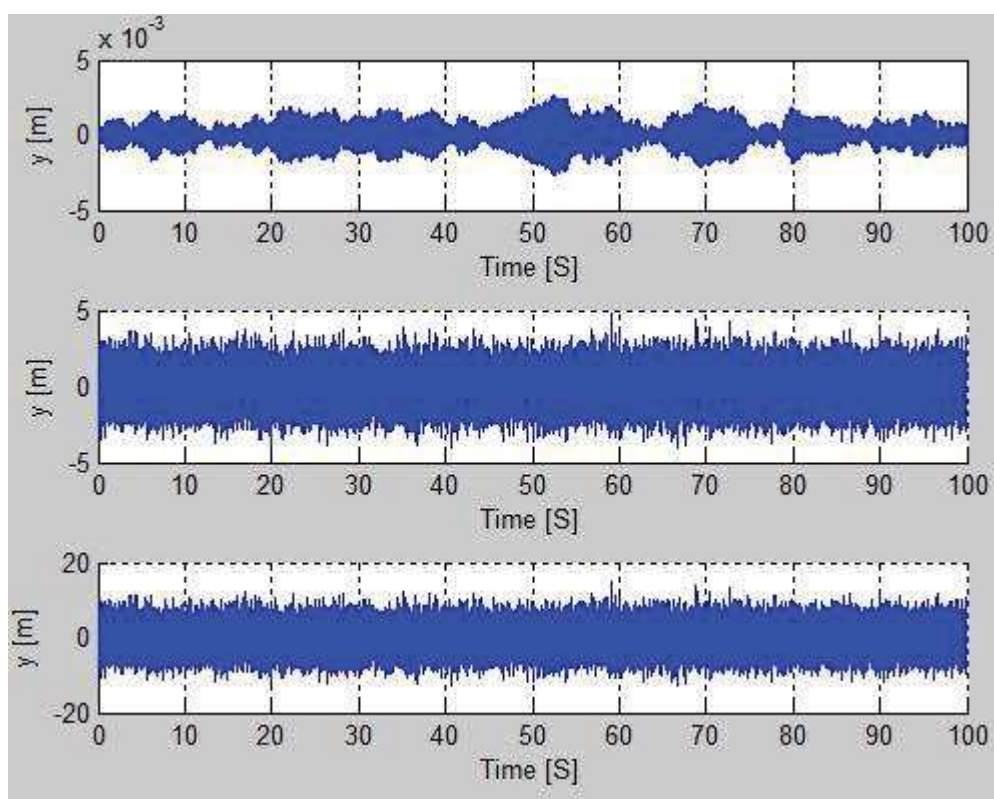


Bild 4.5 Ausgangssignal

#### 4.4 Berechnung der Schwingungsformen mit OMA

Die Hankel-Matrix und die Projektionsmatrix werden dann durch die Data-driven-Methode aus den aus dem Simulink-Modell gewonnenen Werten, d.h. Auslenkungen und Zeit, aufstellt. Im nächsten Schritt wird die Wichtung mit UPC, PC und CVA für diese Methode durchgeführt. Nach dem Verfahren in Kapitel 3.3 werden die zeitdiskrete Messmatrix und Eigenvektoren der zeitdiskreten Systemmatrix für den 1. und 2. Algorithmus und dann die Eigenschwingungsformen berechnet.



Die Werte aus dem Modell werden dann nach der Covariance-driven -Methode verarbeitet. Die Toeplitz-Matrix wird zusammengebaut und wie bei der bisherigen Methode, nach dem Verfahren in Kapitel 3.3, werden die zeitdiskrete Messmatrix und Eigenvektoren der zeitdiskreten Systemmatrix und dann Eigenschwingformen erhalten.

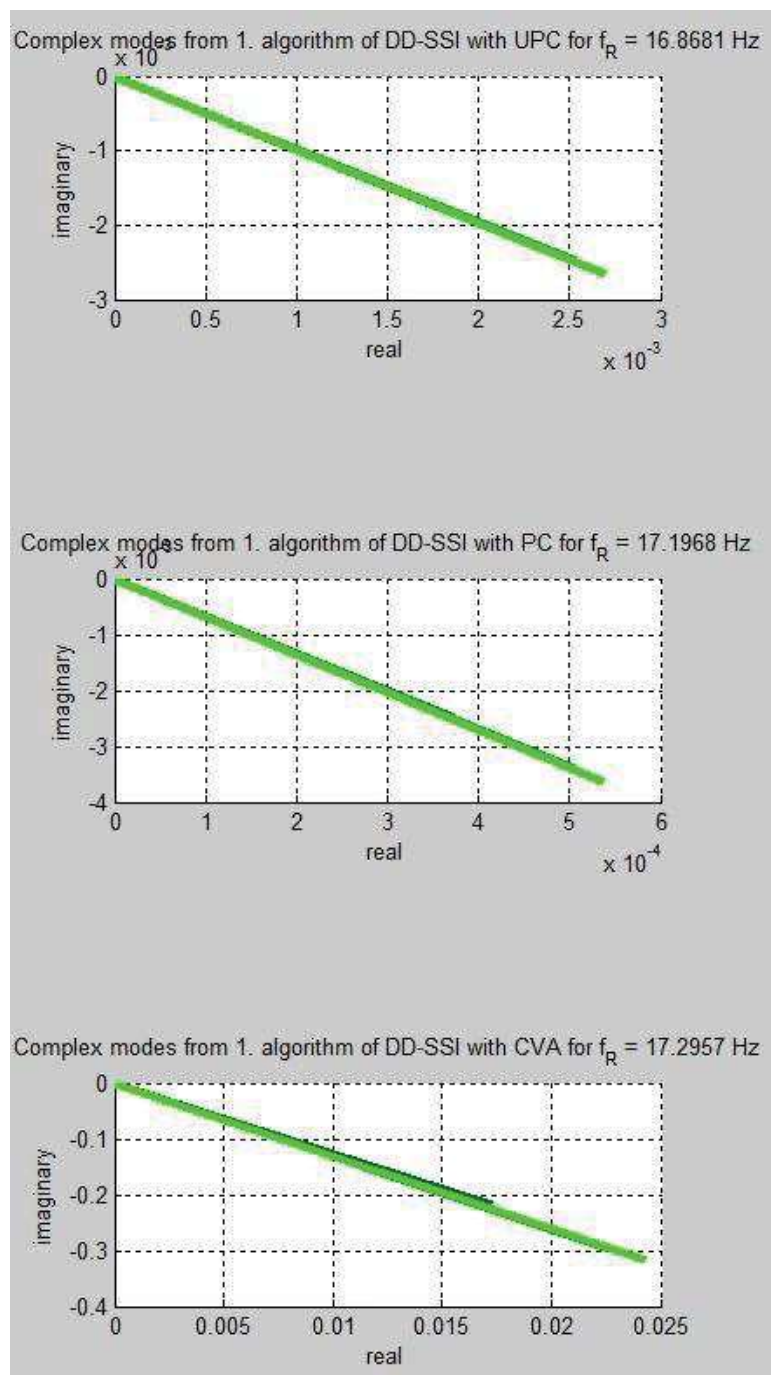


Bild 4.6 Eigenschwingungsformen für 1. Algorithmus (Variante 1)



Das Bild 4.6 zeigt die Eigenschwingungsformen für die Data-Driven-Methode mit dem Rauschen für die Variante 1. Auf der x-Achse ist der reale Teil der Eigenschwingungsformen und der imaginäre ist auf der y-Achse. Das Bild zeigt drei Diagramme für jede Wichtung (UPC, PC, CVA). Die Frequenzen, für die die Schwingungsformen angezeigt werden, werden aus den Eigenwerten der zeitdiskreten Systemmatrix ermittelt, die nach der Data-Driven-Methode berechnet wurden.

Die berechneten Schwingungsformen können dann mit Schwingungsformen, die durch die Modalanalyse berechnet werden, verglichen werden. Dazu wird die graphische Darstellung von MAC (Modal Assurance Criterion) benutzt, die aus der Kriterium MAC aufgeht. Wenn sich die Eigenschwingungsformen beider Berechnungen im gleichen Mode befinden, liegt der MAC-Wert bei 1. Wenn sie zu zwei Moden gehören, nähert sich der MAC-Wert 0

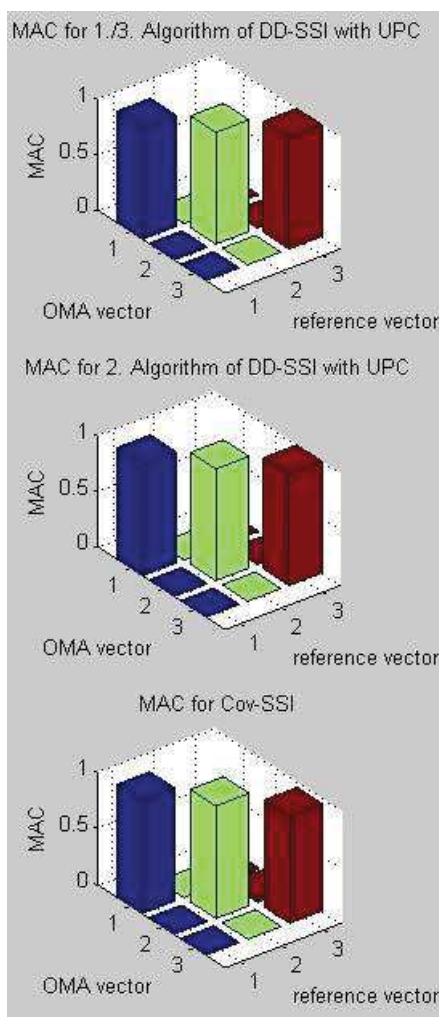


Bild 4.7 MAC-Diagramm

Da es möglich war, die Schwingungsformen nur für die erste Variante des Rauschens zu zeichnen, wurde das MAC-Diagramm (Bild 4.7) genau für diese Variante gezeichnet. Der Graph vergleicht die drei berechneten Schwingungen des gedämpften Systems mit Hilfe der Betriebsmodalanalyse mit den oben beschriebenen drei Eigenschwingungsformen.

Die Hauptdiagonale ist 1 und die anderen sind nahe Null. Dies bedeutet, dass es hier keine falschen Moden geben sollte. Nur im MAC-Diagramm für den DD-SSI-Algorithmus mit CVA-Wichtung zeigt sich, dass eine Schwingungsform nahe Null ist. Dies bedeutet, dass die Eigenform zu den zwei Moden gehören kann.

## 4.5 Bestimmung der Eigenfrequenzen mit OMA

Die Eigenfrequenz kann aus dem Stabilitätsdiagramm ermittelt werden. Um es zu bauen, ist es notwendig, Eigenwerte (kontinuierlich) zu erhalten. Das Verfahren ist, wie bei Schwingungsformen, in Kapitel 3.3 beschreiben. Die Berechnung erfolgt wiederum für die Data-Driven-Methode (Wichtung mit UPC, PC und CVA; 1. a 3. algorithmus a 2. algorithmus) und für die Covariance-Driven-Methode.

Aus dem imaginären Teil der Eigenwerte ist es dann möglich, die Stabilitätsdiagramme für den 1. und 2. Algorithmus des DD-SSI und des Cov-SSI zu erstellen. Das Bild 4.8 zeigt ein Stabilitätsdiagramm, in dem einzelne Pole angezeigt werden. Das Diagramm zeigt die Ergebnisse für die 1. Variation des Rauschens, wo das Rauschen nur am Eingang ist. Die Werte wurden für den 1. Data-Driven Algorithmus berechnet. Die Dreieckmarke repräsentiert: die Pole mit UPC-Wichtung, das Rad mit PC-Wichtung und das Kreuz mit CVA-Wichtung.

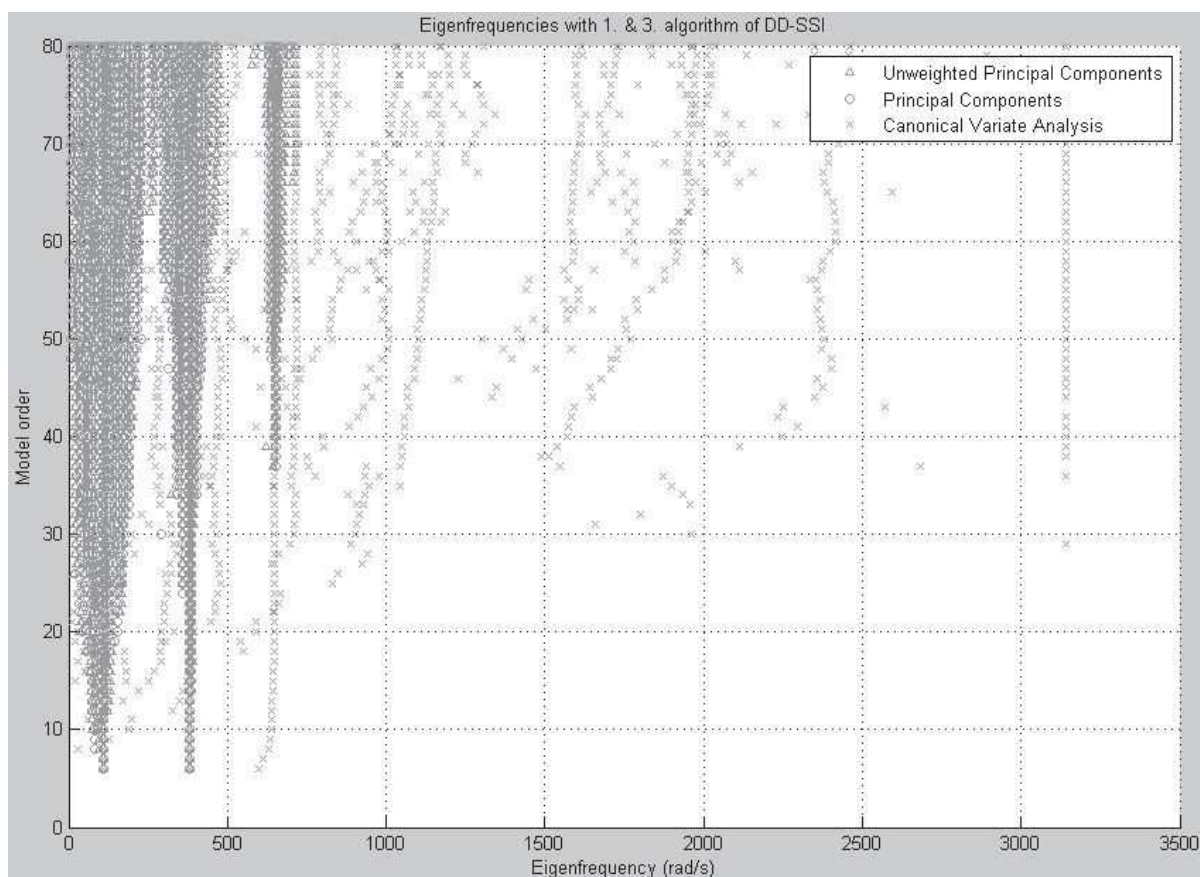


Bild 4.8 Stabilitätsdiagramm mit den Polen

Auf diesem Diagramm gibt es drei Bereiche, in denen es möglich ist, stabile Pole und damit die Eigenfrequenzen des Systems zu erwarten. Um diese stabilen Pole zu bestimmen, ist es notwendig, im nächsten Schritt die Kriterien zu definieren.

#### 4.5.1 Optimierung von Kriterien zur Bestimmung der Eigenfrequenzen

Wie oben erwähnt, neigen physikalische Pole dazu, sich mit der erhöhenden Modellordnung zu stabilisieren. Daraus folgt, dass sich mit der erhöhenden Modellordnung der physikalischen Pole der Wert von Frequenz und der Verhältnisdämpfung nicht sehr stark ändert. So ist es möglich, die Bedingung vorzuschreiben, dass, wenn sich die Frequenz mit der erhöhenden Modellordnung nicht stark ändert es eine stabile Frequenz ist. Ebenso kann die Bedingung auch für eine relative Dämpfung zusammengebaut werden. Wenn also der Pol beide Bedingungen erfüllt, kann er als stabil markiert werden. Dann ist es notwendig die Abweichung von

Modes (Modal Assurance Criterion – MAC), was das Maß der Korrelation zwischen zwei modalen Vektoren darstellt und die Anzahl wiederholter Werte, zu bestimmen. Die ausgewählten Kriterien sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

Tabelle 4.4 Kriterien für Stabilitätsdiagramme

Parameter	1. Kriterium	2. Kriterium
Theta-max	0,1	0,1
Theta-min	0,0001	0,0001
Theta-diff	0,02	0,002
F-diff	10	9
Mac-diff	0,05	0,04
N-accept	10	11

Am Anfang wurden die Kriterien ausgewählt, die dann optimiert wurden. Ziel war es, die Eigenfrequenz so genau wie möglich zu bestimmen. Es wurden mehrere Varianten der Kriterien verwendet, aber die optimalen Kriterien wurden in Bezug auf die daraus resultierenden Graphen gewählt, die in Tabelle 4.4 in der zweiten Spalte aufgeführt sind. Der Einfluss der Wahl der Kriterien ist ersichtlich in Bild 4.9 und Bild 4.10.

#### 4.5.2 Bestimmung der Eigenfrequenzen aus dem Stabilitätsdiagramm

Basierend auf den ausgewählten Kriterien, Eigenvektoren und Eigenwerten der zeitdiskreten Systemmatrix und Ausgangsmatrix, ist es möglich, stabile Pole in der Grafik zu zeichnen. Auf

Bild 4.9 ist das resultierende Stabilitätsdiagramm für die 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus) dargestellt. Das

Bild 4.9 zeigt das Diagramm, in dem das 1. Kriterium angewendet wurde. Das Bild 4.10 zeigt die Ergebnisse nach optimierten Kriterien. Die roten Kreuze zeigen die gefundenen stabilen Pole mit CVA-Wichtung, die blauen Dreiecke mit UPC-Wichtung und die grünen Räder mit PC-Wichtung.

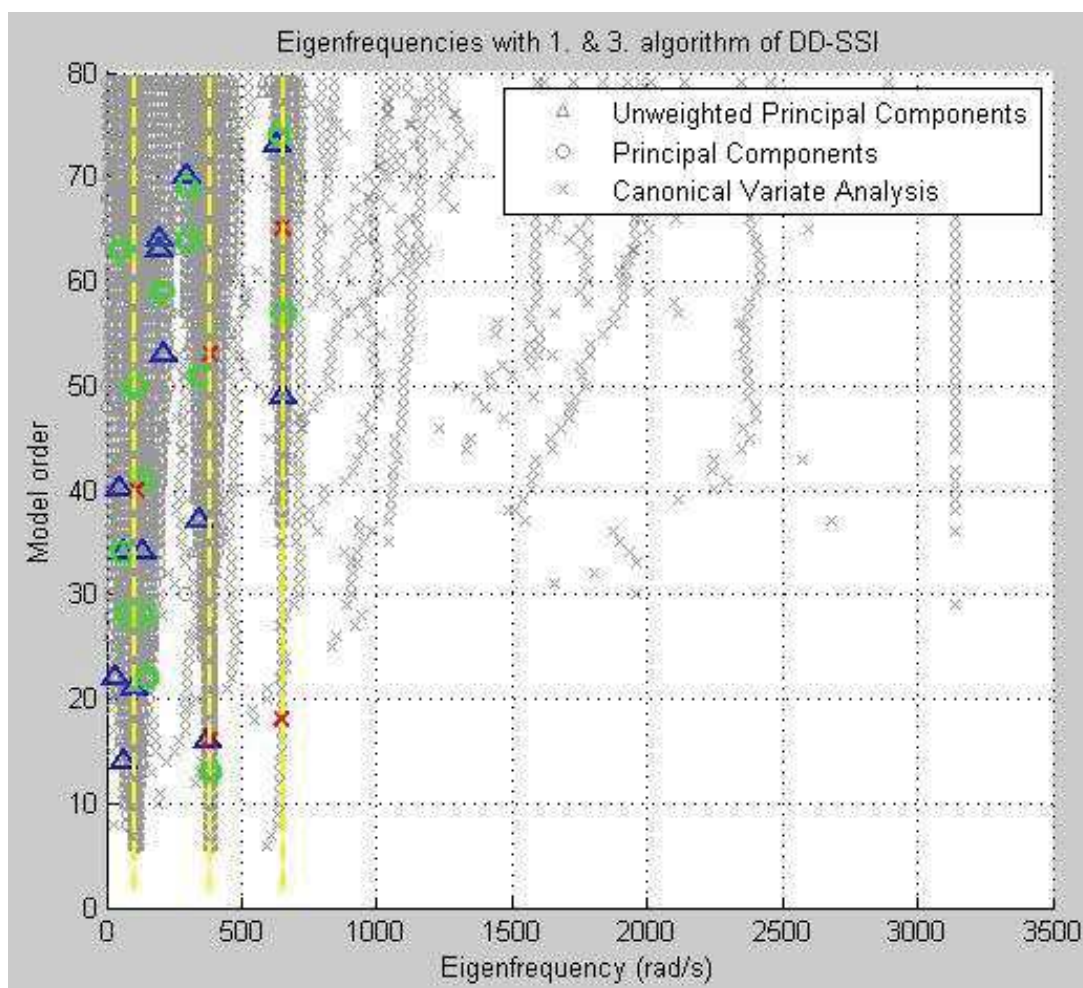


Bild 4.9 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus) - 1. Kriterium

Die x-Achse ist Eigenfrequenz (rad/s) und die y-Achse ist der Wert der aktuellen Modellordnung. Die gelben Linien sind die Eigenfrequenzen, die für das gedämpfte System durch Modalanalyse berechnet wurden. Auf diesen Linien sollten die daraus resultierenden Punkte liegen. Wenn die resultierenden Punkte tatsächlich auf den Linien sind, kann man sagen, dass es nach dieser Vorgehensweise möglich ist, die eigenen Frequenzen zu bestimmen. Wenn die Punkte im Diagramm verstreut sind, können die Eigenfrequenzen nicht bestimmt werden.

Aus dem Stabilitätsdiagramm (Bild 4.9

Bild 4.9) ist es ersichtlich, dass die berechneten Punkte mit CVA-Wichtung in unmittelbarer Nähe zu den berechneten Frequenzen liegen. Aus diesen Punkten ist es möglich, die Eigenfrequenzen ungefähr zu bestimmen. Die berechneten Punkte mit PC-Wichtung und UPC-



Wichtung liegen nicht mehr in der Nähe der gezeichneten Linien. Nach diesen beiden Verfahren wäre es möglich, etwa die dritten Frequenzen zu bestimmen, aber nicht die ersten beiden.

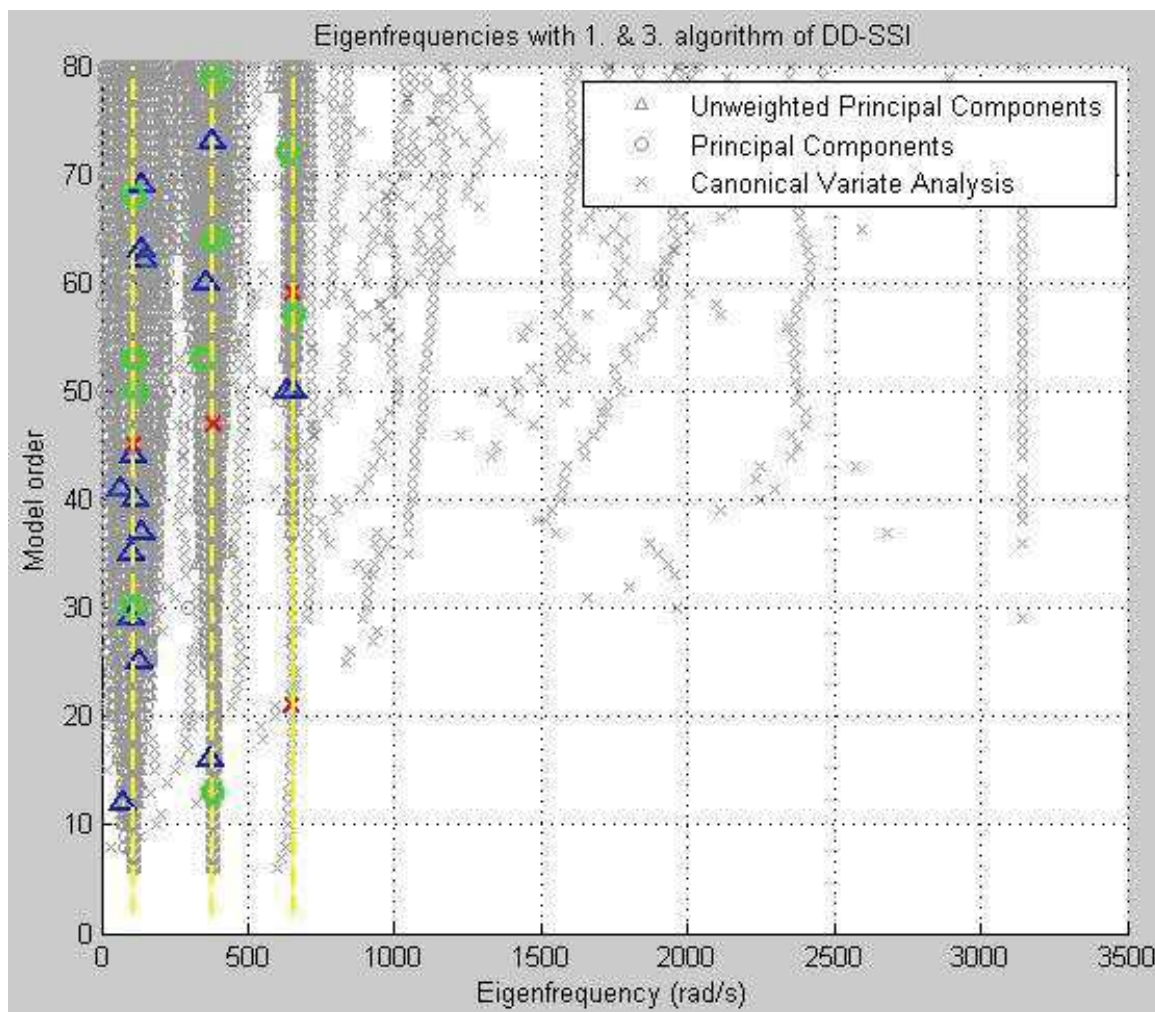


Bild 4.10 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus) - 2. Kriterium

Bei der Anwendung optimierter Kriterien ist es ersichtlich, dass es nach den stabilen Polen mit CVA-Wichtung möglich ist, die Eigenfrequenzen ermitteln. Die stabilen Pole mit PC-Wichtung und UPC-Wichtung sind nach diesen Kriterien im Diagramm um die berechneten Eigenfrequenzen zu platzieren. Basierend auf einem solchen Diagramm wäre es nur möglich, den Bereich zu bestimmen, in dem sich die Eigenfrequenz befindet. Aus diesem Grund wurden die folgenden Stabilitätsdiagramme nach optimierten Kriterien erstellt.

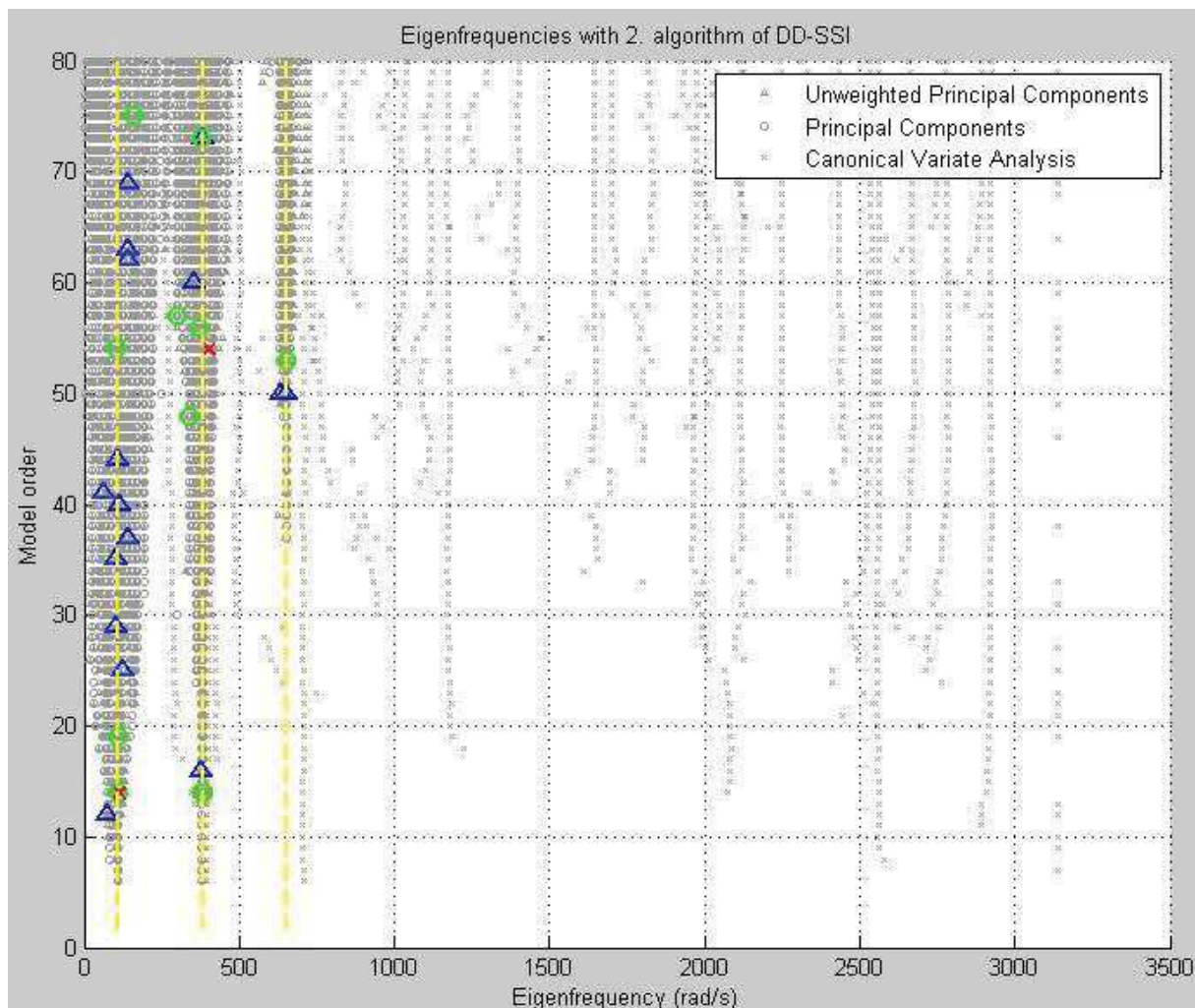


Bild 4.11 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 2. Algorithmus) – 2. Kriterium

Auf dem Bild 4.11

Bild 4.11 werden die Ergebnisse für die 1. Variante des Rauschens (DD-SSI, 2. Algorithmus) angezeigt. Aus dem Diagramm ist es ersichtlich, dass es möglich ist, die ersten beiden Eigenfrequenzen nach CVA-Wichtung zu bestimmen, aber die dritte konnte nicht bestimmt werden. Nach PC-Wichtung und UPC-Wichtung wäre es möglich, eine dritte Eigenfrequenz zu bestimmen. Abhängig von der Lage der stabilen Pole wäre es möglich, die ersten beiden Frequenzen ungefähr zu bestimmen.

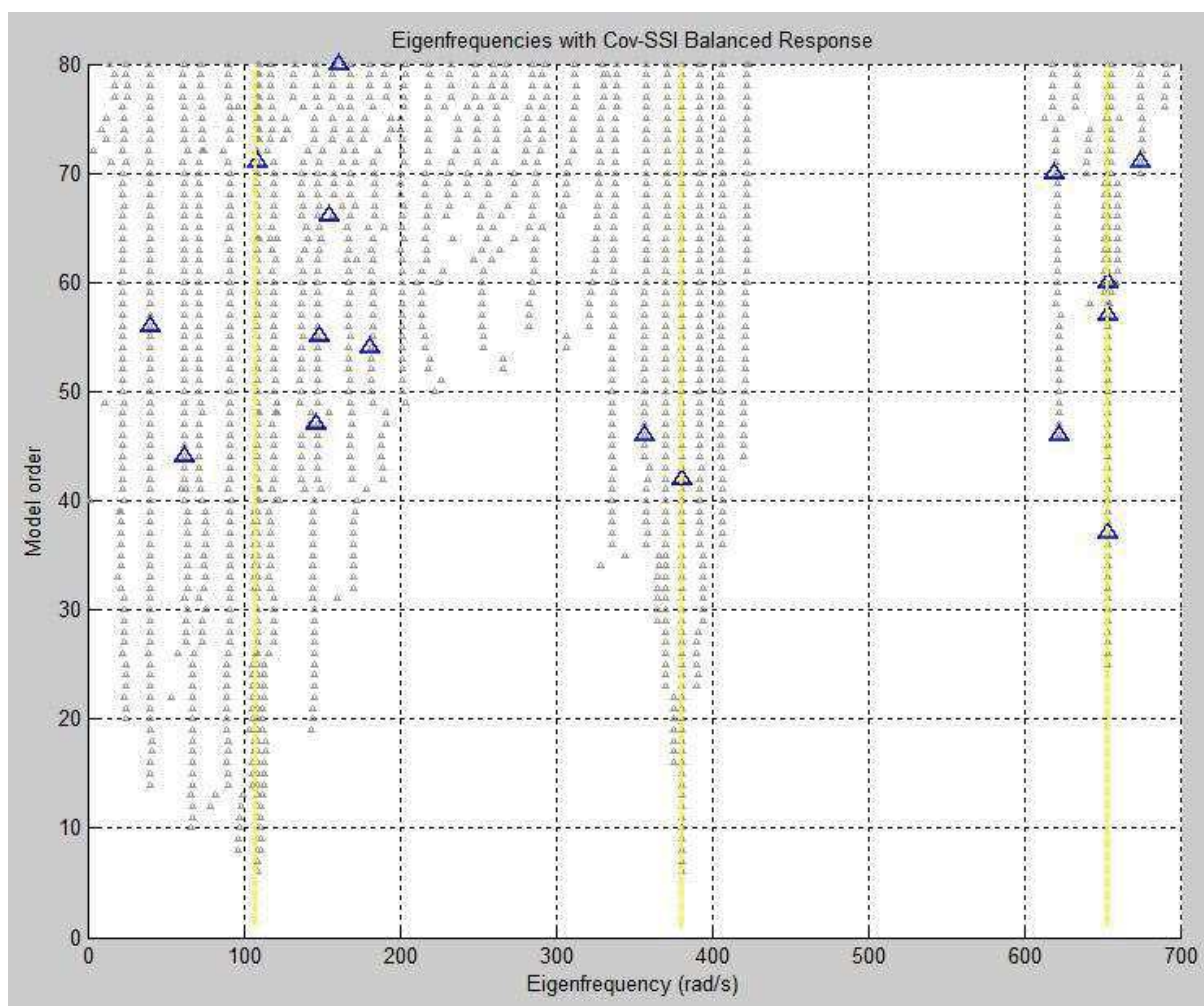


Bild 4.12 Stabilitätsdiagramm - 1. Variante des Rauschens (COV-SSI) – 2. Kriterium

Das Bild 4.12 zeigt Ergebnisse an, die nach der Covariance-Driven-Methode berechnet wurden. Basierend auf Kriterien wurden die stabilen Pole identifiziert, die im gesamten Diagramm verstreut sind. Obwohl die Pole auf Linien liegen, die die berechneten Eigenfrequenzen darstellen, ist es nicht möglich, die Eigenfrequenzen nach den Ergebnissen der COV-SSI-Methode genau zu bestimmen.

Das Stabilitätsdiagramm für die zweite Lösungsvariante, deren Werte nach der DD-SSI-Methode des 1. Algorithmus berechnet wurden, ist in der Anlage angegeben. Es ist nicht möglich, die Eigenfrequenzen aus den berechneten statischen Pole für diese Variante zu bestimmen. Nach den ausgewählten Kriterien wurden keine stabilen Pole für CVA-Wichtung bestimmt. Für die nächsten zwei Wichtungen werden im Diagramm stabile Pole ausgebreitet. Keine stabilen Pole wurden auf den ersten beiden Linien oder in der Nähe gefunden. Das gleiche gilt für die



Berechnung des 2. Algorithmus. Basierend, auf den nach beiden Algorithmen aufgetragenen Diagrammen, könnte man die Eigenfrequenz um 240 rad/s nach PC-Wichtung, 654 rad/s nach UPC-Wichtung (berechnete Eigenfrequenz) erwarten und dann im Bereich von etwa 1000 rad/s nach UPC-Wichtung.

Es ist auch nicht möglich, die Eigenfrequenzen aus einem nach der COV-SSI-Methode berechneten Diagramm genau zu bestimmen. Wenn die Eigenfrequenzen auf der Grundlage des Stabilitätsdiagramms ermittelt wurden, würden die ersten beiden Eigenfrequenzen falsch bestimmt. Sie sollten einen Wert von etwa 194,6 rad / s und 547,8 rad / s haben, aber das Ergebnis sollte 108,3 rad / s und 380,9 rad / s sein. Aus dem Diagramm kann man die Werte der Eigenfrequenzen bestimmen als: 194,6 rad/s und 547,8 rad/s, aber der richtige Wert sollte 108,3 rad/s und 380,9 rad/s sein. Eine dritte Eigenfrequenz würde auf dem Diagramm basieren. Die dritte Eigenfrequenz würde auf dem Diagramm basieren, welche bestimmt werden kann. Ähnliche Ergebnisse wurden auch mit der dritten Variante des Rauschens erzielt.

Bei der Darstellung des Stabilitätsdiagramms für die 4., 5. und 6. Variante des Rauschens (nach dem DD-SSI-Methode, 1. und 2. Algorithmus) wurden die stabilen Pole nur für UPC-Wichtung angezeigt. Die berechneten stabilen Pole liegen in dem Bereich, in dem die Eigenfrequenzen vorhanden, so dass die ungefähren Eigenfrequenzen aus einem solchen Diagramm ermittelt werden können. Die Ausnahmen sind die dritten Eigenfrequenzen in der 4. Variation des Rauschens (DD-SSI-Methode, 1. und 2. Algorithmus) und 5. Variante des Rauschens (DD-SSI-Methode, 1. Algorithmus), die aus den Ergebnissen nicht ermittelt werden kann. Aus den Diagrammen nach der COV-SSI-Methode für die 4., 5. und 6. Variante des Rauschens wäre es möglich, ungefähr die dritte Eigenfrequenz zu ermitteln, aber die ersten beiden Eigenfrequenzen wäre es nicht möglich zu bestimmen.

### 4.5.3 Bewertung des Rauscheinflusses auf das Stabilitätsdiagramm

Die Eigenfrequenzen der 1. Variante des Rauschens, wenn das Rauschen nur auf dem Eingang wurde, konnten sowohl für den 1. als auch den 2. Algorithmus der DD-SSI-Methode für PC-Wichtung und UPC-Wichtung ungefähr bestimmt werden. Bei der Verwendung von CVA-Wichtung konnten diese Frequenzen fast genau bestimmt werden. Die einzige Ausnahme war die dritte Eigenfrequenz für den 2. Algorithmus. Gleichzeitig war es zumindest ungefähr möglich, die Eigenfrequenzen nach der COV-SSI-Methode zu bestimmen.

Sobald das Rauschen den Eingang des Systems beeinflusst, war die Bestimmung zumindest annähernder Eigenfrequenzen fast unmöglich. Bei der Applikation der CVA-Wichtung wurden keine stabilen Pole oder nur eine kleine Zahl in der 2. und 3. Varianten des Rauschens gefunden. Aus berechneten, stabilen Polen nach UPC- und PC-Wichtung wurden die Eigenfrequenzen falsch ermittelt. Eine falsche Eigenfrequenzbestimmung gab es auch bei der COV-SSI-Methode.

Wenn das Rauschen nur auf einigen Eingängen und kein Rauschen am Ausgang gegeben war (4., 5. und 6. Variante des Rauschens), so war es nur möglich, einige Eigenfrequenzen für die DD-SSI-Methode ungefähr zu bestimmen: nämlich für UPC-Wichtung. Für die anderen Wichtungen wurden keine stabilen Pole gefunden. Nach der COV-SSI-Methode wurden nur ungefähr drei Eigenfrequenzen ermittelt.

Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, dass es für Dreimassenschwinger möglich war, die Eigenfrequenzen aufs Genaueste zu bestimmen, wenn das Rauschen nur am Eingang gegeben war. Sobald das Sensorrauschen dem Ausgang hinzugefügt wurde, waren die Ergebnisse verzerrt und es war nicht möglich, die Eigenfrequenzen richtig zu bestimmen. Wenn es an allen Eingängen kein Rauschen gibt, hat es auch einen negativen Einfluss auf die Ergebnisse. In diesem Fall war es nicht möglich, alle Wichtungen zu verwenden und die Ergebnisse waren zudem sehr ungenau.

## 5 Untersuchung einer Werkzeugmaschine mittels SSI

In diesem Kapitel werden die Methoden zur Bestimmung von Eigenfrequenzen mit OMA für eine Werkzeugmaschine angewendet. Am Anfang wird die Werkzeugmaschine bestimmt, auf die die gesamte Methode angewendet wird. Dann, mittels der modalen Parameter, die aus dem Ansys-Programm erhalten werden, wird das mathematische Modell dieses Gerätes bestimmt. Eine Betriebsbelastung, in Form von Rauschen, wird in das mathematische Modell hinzugefügt, um OMA-Bedingungen zu simulieren. Aus dem erhaltenen Modell werden unter Verwendung des Zustandsraums die notwendigen Zeitsignale erhalten, auf die die jeweilige Bestimmung der modalen Parameter durch OMA angewendet wird. Der letzte Teil dieses Kapitels fasst die Ergebnisse der Stabilitätsdiagramme zusammen und beschreibt die Auswirkungen von Rauschen und der Kriterien auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen mit OMA.

### 5.1 Beschreibung der Werkzeugmaschine

Das gesamte Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen wird für ein Bearbeitungszentrum mit einem beweglichen Stand erfolgen. Dies ist eine allgemeine 3-Achsen-ACW-Maschine. Der Arbeitsbereich der Maschine beträgt ca. 1000x700x600 mm. Quelldaten wurden aus dem Modell erhalten, das in ANSYS erstellt wurde. An diesem Modell wurde eine Modalanalyse durchgeführt. Aus dieser Modalanalyse wurden die Matrizen von modalen Eigenfrequenzen und modalen Eigenschwingungsformen erhalten. Diese Maschine ist in Bild 5.1 abgebildet. Die Maschine ist nur schematisch dargestellt. Die Richtungen und Verschiebungen der Achsen sind rot dargestellt. Die Orte, für die die modalen Parameter definiert sind, werden orange angezeigt.

Das mathematische Modell wurde unter Verwendung des Zustandsraums und der Kenntnis der modalen Eigenfrequenzen und der entsprechenden modalen Schwingungsformen erzeugt. Die Eigenfrequenzmatrix ist  $45 \times 1$  und zeigt 45 erste Frequenzen an. Die Schwingungformmatrix ist dann  $24 \times 45$ . Das gesamte System ist so gebaut, dass jeder Punkt 3 Freiheitsgrade hat. Die Schwingungformmatrix wird dann nach den Punktmarkierungen (von der niedrigsten) sortiert, wobei die erste Zeile die x-Achse, die zweite y-Achse und die dritte z-Achse ist.

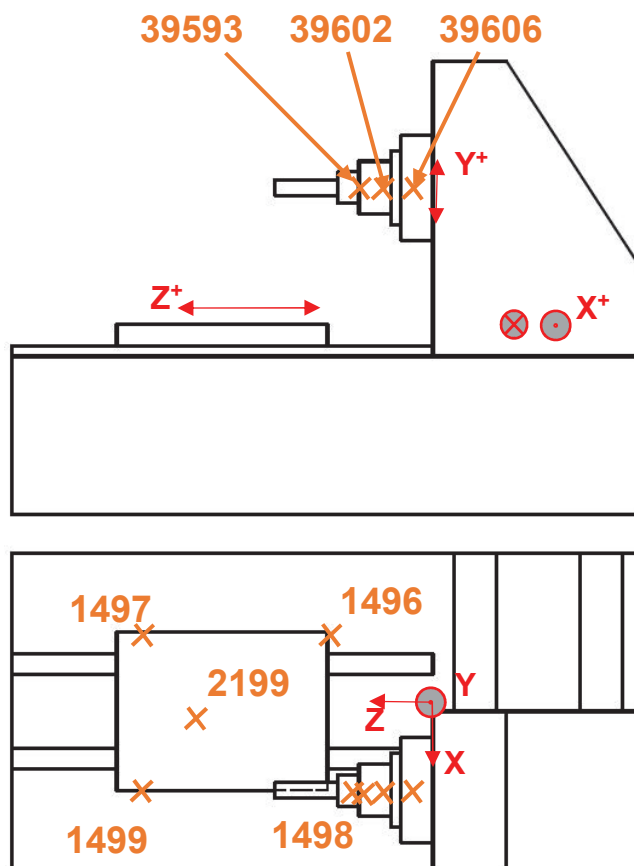


Bild 5.1 Punkte einer 3-Achsen-Fräsmaschine

Diese Matrizen wurden dann in die Form modifiziert, in der nur die ersten 24 Frequenzen verwendet wurden, um die Matrizen A, B, C, D für das resultierende Modell im Zustandsraum zu erzeugen. Die resultierende Matrix hat die Form von:

$$\lambda = \begin{bmatrix} Eigfreq_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Eigfreq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Eigfreq_n \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad (53)$$

Die Eigenformmatrizen hat die Form von:

$$P = \begin{bmatrix} Eigvekt_{x1\_f1} & Eigvekt_{x1\_f2} & \dots & Eigvekt_{x1\_f24} \\ Eigvekt_{y1\_f1} & Eigvekt_{y1\_f2} & \dots & Eigvekt_{y1\_f24} \\ Eigvekt_{z1\_f1} & Eigvekt_{z1\_f2} & \dots & Eigvekt_{z1\_f24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Eigvekt_{z8\_f1} & Eigvekt_{z8\_f2} & \dots & Eigvekt_{z8\_f24} \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad (54)$$

Es ist auch notwendig, die Dämpfung des Systems zu kennen. Da diese Werte nicht verfügbar sind, erfolgt die Umrechnung in Form von:

$$\delta_{n \times m} = 2\vartheta\lambda_{n \times m}^{0,5} \quad (55)$$

Wobei  $\vartheta = 0,02$  ein Dämpfungsgrad ist und  $\lambda$  die Matrix der Eigenfrequenzen ist. So entsteht eine Dämpfungsmatrix  $\delta$  von  $24 \times 24$ . Dann sind die Matrizen für den Zustandsraum in der Form:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & -\delta \end{bmatrix}_{48 \times 48} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}_{48} \quad C = [P \quad 0]_{24 \times 48} \quad D = [0]_{24 \times 48} \quad (56)$$

Wobei 0 eine Nullmatrix und 1 eine Einheitsmatrix bezeichnet.

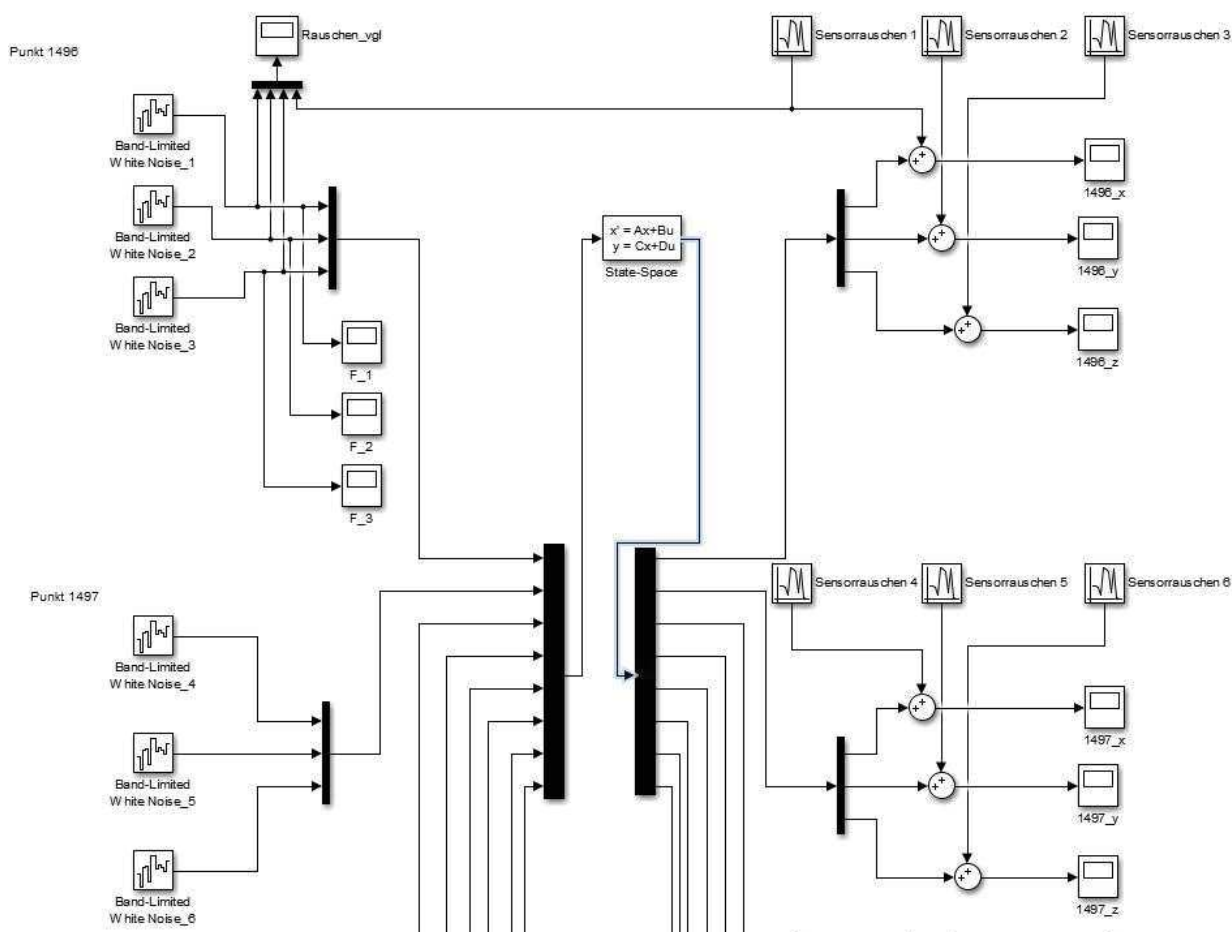


Bild 5.2 Teil des Zustandsraummodells aus dem Programm Simulink

Diese Matrizen werden dann verwendet, um Zeitsignale mittels des Zustandsraums in dem Matlab- und Simulink Programm zu berechnen. Das Schema ist in Bild 5.2 dargestellt. Es ist nur ein Teil des ganzen Schemas, wo die Eingänge für die ersten beiden Punkte auf der Maschine angezeigt werden. Andere Eingänge werden auf die gleiche Weise durchgeführt

Die Belastung des ganzen Modells ist mittels des Rauschens. Die Größe dieses Rauschens an den Eingängen ist  $r = 0,02$  und besteht aus weißem Rauschen in Simulink. Ausgangsrauschen wird durch Zufallszahlen mit Null Mittelwert und Variation  $v = 1 * 10^{-16}$  erzeugt. Die Belastung wird auf alle Punkte in jeder Achse angewendet. Anschließend werden verschiedene Rauschvarianten ausgewertet, um die Wirkung dieser Eingaben in OMA-Berechnungen zu bestimmen. Die verschiedenen Varianten des Rauschens sind in Tabelle 5.1 dargestellt. In der ersten Spalte gibt es einzelne Varianten. Im Text wird weiter mit dieser Markierung der Varianten arbeiten. In der zweiten Spalte gibt es die einzelnen Punkte, die in der gegebenen Variante von dem Rauschen im Zustandsraum an Eingang werden belasten. Die Punkte werden in alle Achsen (x, y, z) belasten. Die Kennzeichnung der Punkte erfolgt durch das Schema auf dem Bild 5.1. In der letzten Spalte sind die Punkte, die am Rauschen gestört werden. In der letzten Spalte gibt es rauschende Punkte am Ausgang.

Tabelle 5.1 Varianten des Rauschens

Variante	Erregung	Ausgangsrauschen
1	Alle Punkte	Alle Punkte
2	Alle Punkte	kein
3	1496	1496
4	1496	kein
5	2199	2199
6	2199	kein
7	39593	39593
8	39593	kein
9	1496, 1497, 1498, 1499, 2199	1496, 1497, 1498, 1499, 2199
10	1496, 1497, 1498, 1499, 2199	kein
11	39593, 39602, 39606	39593, 39602, 39606
12	39593, 39602, 39606	kein

Für jede Variante der Belastung wurden Zeitsignale dargestellt. Alle Berechnungen wurden für 100s mit einem Zeitschritt  $dt = 0,001$  s durchgeführt. Das resultierende Signal für die erste Variation im Punkt 1496 ist in Bild 5.3 dargestellt. Dies ist der Eckpunkt des Arbeitstisches. Die x-Achse beschreibt die Zeitachse in Sekunden. Die y-Achse ist dann eine Verschiebung in Metern. Das Zeitsignal wird zur Verdeutlichung nur in einem Zeitbereich von 50 s bis 50,07 s angezeigt. Die Auslenkung wird in der x-Achse blau, y-Achse schwarz und z-Achse grün dargestellt. Das Bild zeigt eine relativ hohe Auslenkung in der z-Achse im Vergleich den anderen Achsen. Basierend auf diesen Zeitsignalen wird eine Betriebsmodalanalyse durchgeführt und die beste Rauschvariante zur Bestimmung der Eigenfrequenzen ausgewertet.

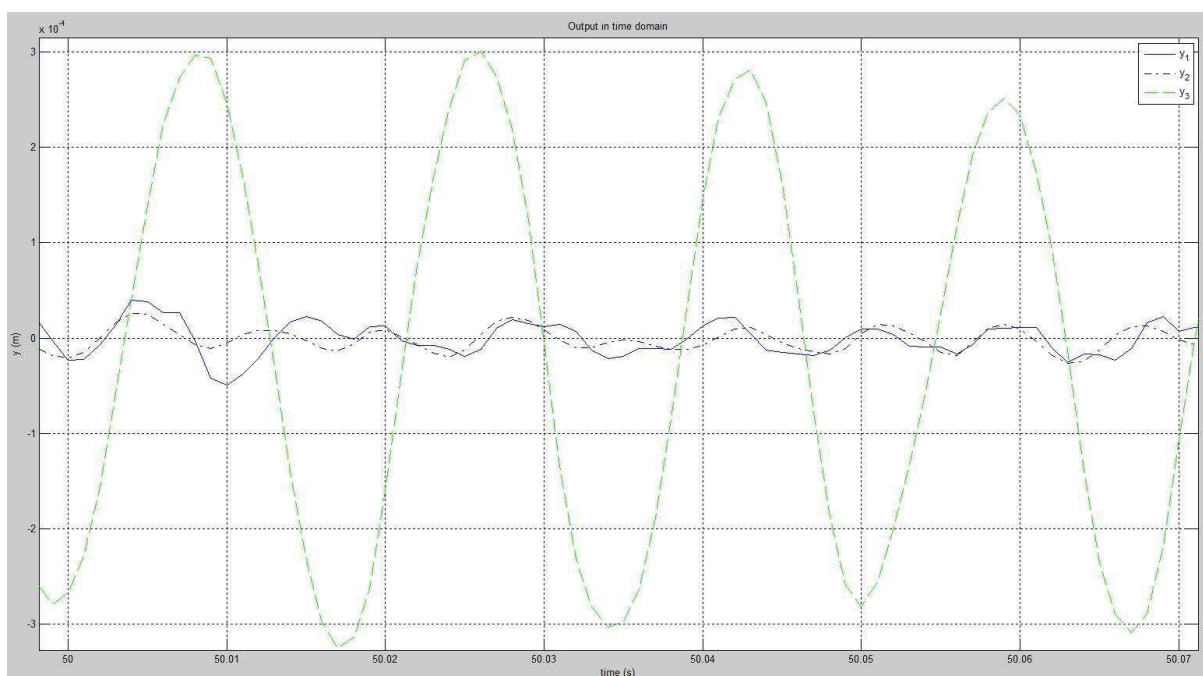


Bild 5.3 Zeitsignal der Auslenkung für die 1. Variante des Rauschens im Punkt 1496 ( $y_1$ : x-Achse,  $y_2$ : y-Achse,  $y_3$ : z-Achse)

## 5.2 Bestimmung der Eigenfrequenzen der Werkzeugmaschine aus dem Stabilitätsdiagramm mit OMA

Für Zusammenstellung der Stabilitätsdiagramm ist es notwendig die Zeitsignale verarbeiten. Das Verfahren für ihre Verarbeitung ist das gleiche wie für den Dreimassenschwinger. Eigenwerte (kontinuierlich) werden berechnet. Die Berechnung wurde wieder für beide Methoden (Data-Driven, Covariance-Driven) durchgeführt. Für die Data-Driven-Methode wurde die



Wichtung mit UPC, PC und CVA wieder verwendet. Die Stabilitätsdiagramme für diese Methode wurden wieder für zwei Algorithmen zusammensetzt. Für ihre Zusammensetzung wurde das imaginäre Teil der Eigenwerte berechnet. Die stabilen Pole werden für eine erhöhte Modellordnung berechnet, dessen Wert auf 80 gesetzt ist.

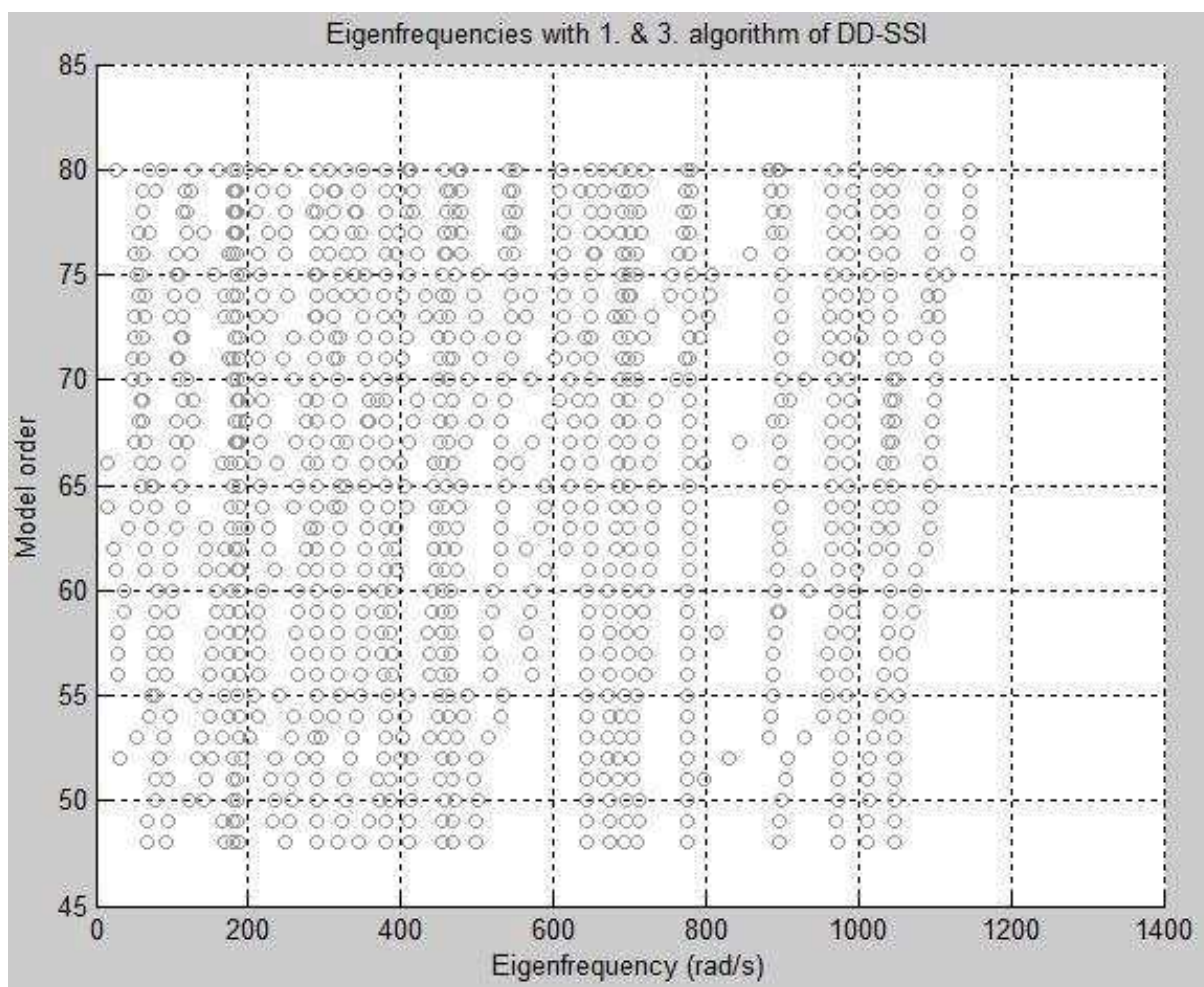


Bild 5.4 Stabilitätsdiagramm der Maschine mit den Pole (PC-Wichtung)

Das Bild 5.4 zeigt ein Stabilitätsdiagramm mit Polen für die 1. Variation des Rauschens (DD-SSI, 1. Algorithmus, PC-Wichtung). Das Diagramm ist für Frequenzen von 0-1400 rad/s aufgezeigt. Aus einem solchen zusammengesetzten Diagramm ist es nicht möglich vorherzusagen, wo die Eigenfrequenzen gefunden werden können. Um sie zu bestimmen, ist es zunächst notwendig, die Kriterien festzulegen, nach denen stabile Pole bestimmt werden. Nach diesen Polen sollte es möglich sein, den Wert der Eigenfrequenz zu bestimmen. Die Kriterien für ihre Bestimmung sind in Tabelle 5.2 dargelegt.



Tabelle 5.2 Kriterien für Stabilitätsdiagramm (Maschine)

Parameter	1. Kriterium	2. Kriterium	4. Kriterium	5. Kriterium	6. Kriterium
Theta-max	0,1	0,1	0,1	0,2	0,6
Theta-min	0,0001	0,0001	0,0001	0,00001	0,00001
Theta-diff	0,02	0,002	0,05	0,08	0,1
F-diff	10	9	15	20	25
Mac-diff	0,05	0,04	0,1	0,2	1
N-accept	10	11	8	6	5

Die zweiten und dritten Spalten zeigen die Kriterien, die bei der Arbeit mit Stabilitätsdiagrammen für einen Dreimassenschwinger verwendet wurden. Aufgrund der Komplexität der Maschine war es nicht möglich, auf Grund dieser Kriterien die Eigenfrequenzen der Maschine zu bestimmen. Nach der Erstellung der Stabilitätsdiagramme für diese Kriterien wurde festgestellt, dass die gefundenen stabilen Pole nicht im erwarteten Bereich liegen. Aus diesem Grund war es notwendig, mehr Kriterien zu wählen, für die die Diagramme erstellen wurden. Aus den daraus resultierenden Diagrammen wird der Einfluss von Kriterien auf die Zeichnung stabiler Pole ausgewertet. Dann werden die Auswirkungen von Rauschen ausgewertet, um die Eigenfrequenzen zu bestimmen.

## 6 Auswertung der Ergebnisse

Aufgrund der großen Anzahl von Varianten und Kriterien ist es schwierig, das entsprechende Kriterium zu bewerten. Aus diesem Grund wurden die Gruppen von Varianten geschaffen, für die ähnliche Ergebnisse beobachtet wurden. In der ersten Gruppe werden die Ergebnisse für die 1. und 2. Varianten des Rauschens verglichen. Im nächsten Schritt werden die Stabilitätsdiagramme für die Varianten ausgewertet, bei denen nur ein Punkt gerauscht wird. Im letzten Teil werden die Ergebnisse für die Varianten mit dem Rauschen an mehrere Punkte ausgewertet.

### 6.1 Gruppe V1 und V2

In der ersten Variante war das Rauschen an allen Punkten am Eingang und Ausgang. In der zweiten Variante ist das Rauschen nur am Eingang. Die Zeichnung von stabilen Pole wurde für alle angegebenen Kriterien durchgeführt. Aus den Stabilitätsdiagrammen ist ersichtlich, dass wenn das Rauschen nur am Eingang ist, es möglich ist stabile Pole nur für die UPC-Wichtung finden. Obwohl weniger "strenge" Kriterien (Kriterium 3, 4, 5, 6) gewählt wurden, wurden keine stabilen Pole für die anderen Wichtungen gefunden. Nur bei der 1. Variante kann man beurteilen, ob es möglich ist, die Eigenfrequenzen nach diesen Wichtungen zu bestimmen.

Aus den Stabilitätsdiagrammen für die 1. Variation des Rauschens folgt, dass es nicht möglich ist, die Eigenfrequenzen zu bestimmen, wenn weniger "strenge" Kriterien angewendet werden. Es gibt eine große Anzahl von stabilen Polen, die aber meist außerhalb der Eigenfrequenzen liegen. Diese sind mit einer gelben Linie im Diagramm markiert und wurden aus dem ANSYS-Programm erhalten. Dies gilt sowohl für die DD-SSI-Methode (1. und 2. Algorithmen) als auch für die COV-SSI-Methode.

Für die ersten beiden Kriterien sind die resultierenden Stabilitätsdiagramme etwas besser. Stabile Pole sind nah an die Eigenfrequenzen, aber wieder sind die Ergebnisse ungenau. Die besten Ergebnisse sind für COV-SSI (Bild 6.1). Mit Ausnahmen sind stabile Pole bei oder nahe Eigenfrequenzen, aber es ist nicht möglich, alle Eigenfrequenzen zu bestimmen.

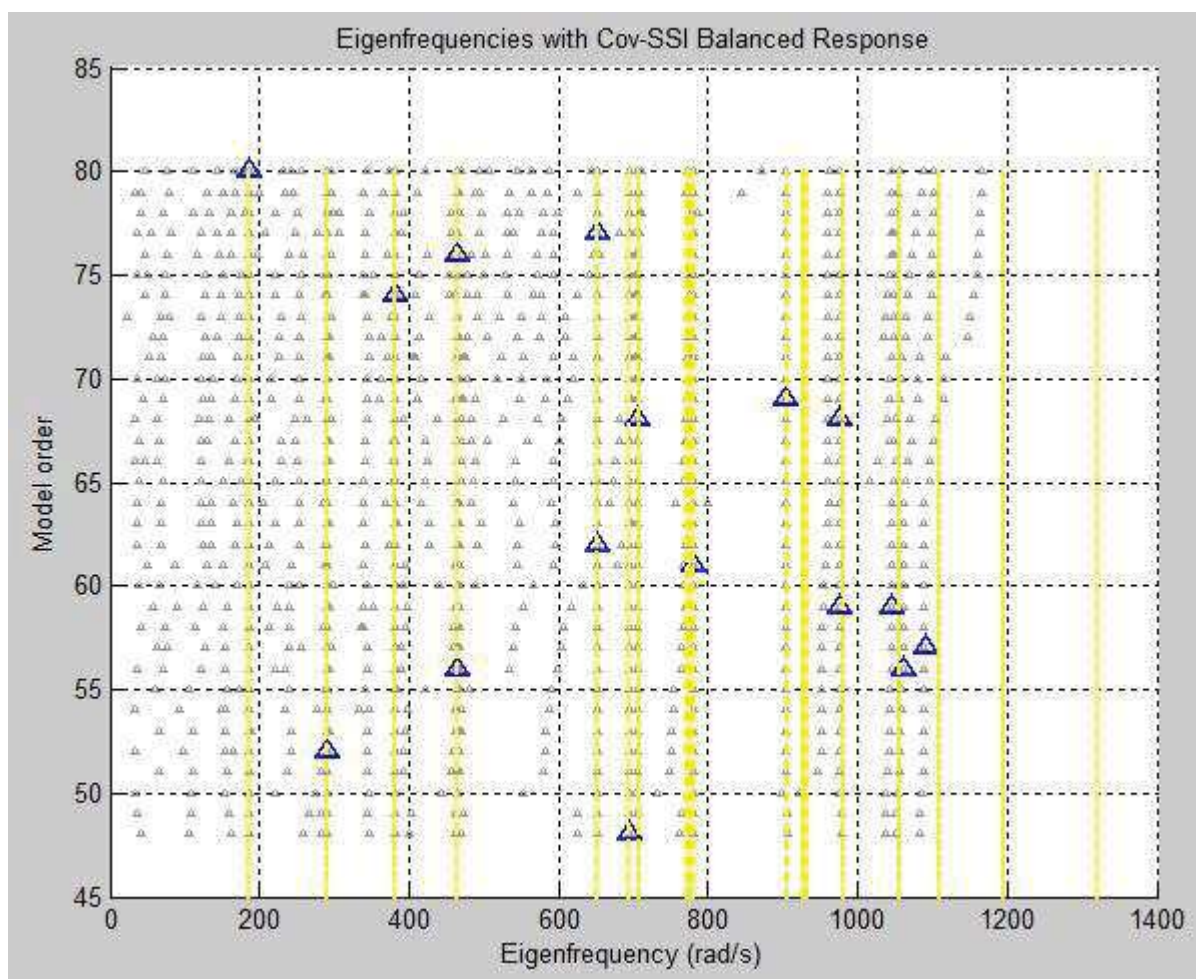


Bild 6.1 Stabilitätsdiagramm – 1. Variante des Rauschens (COV-SSI) - 2. Kriterium

Im Stabilitätsdiagramm für die DD-SSI-Methode (1. Algorithmus) ist klar, dass stabile Pole sich in der Nähe von einigen der Eigenfrequenzen befinden, aber es wäre noch nicht möglich, nach der Lage dieser Pole die Werte der Eigenfrequenzen zu bestimmen. Das gilt für beide Kriterien. Auf dem Stabilitätsdiagramm für die DD-SSI-Methode (2. Algorithmus) ist zu sehen, dass sich die Anzahl der stabilen Pole für CVA-Wichtung vermindert hat (für die 2. Kriterium wurde kein stabiler Pol gefunden). Die anderen Pole sind in der Nähe der Eigenfrequenzen, aber es wäre wieder nicht möglich, die Eigenfrequenzen basierend auf diesen Diagrammen zu bestimmen.

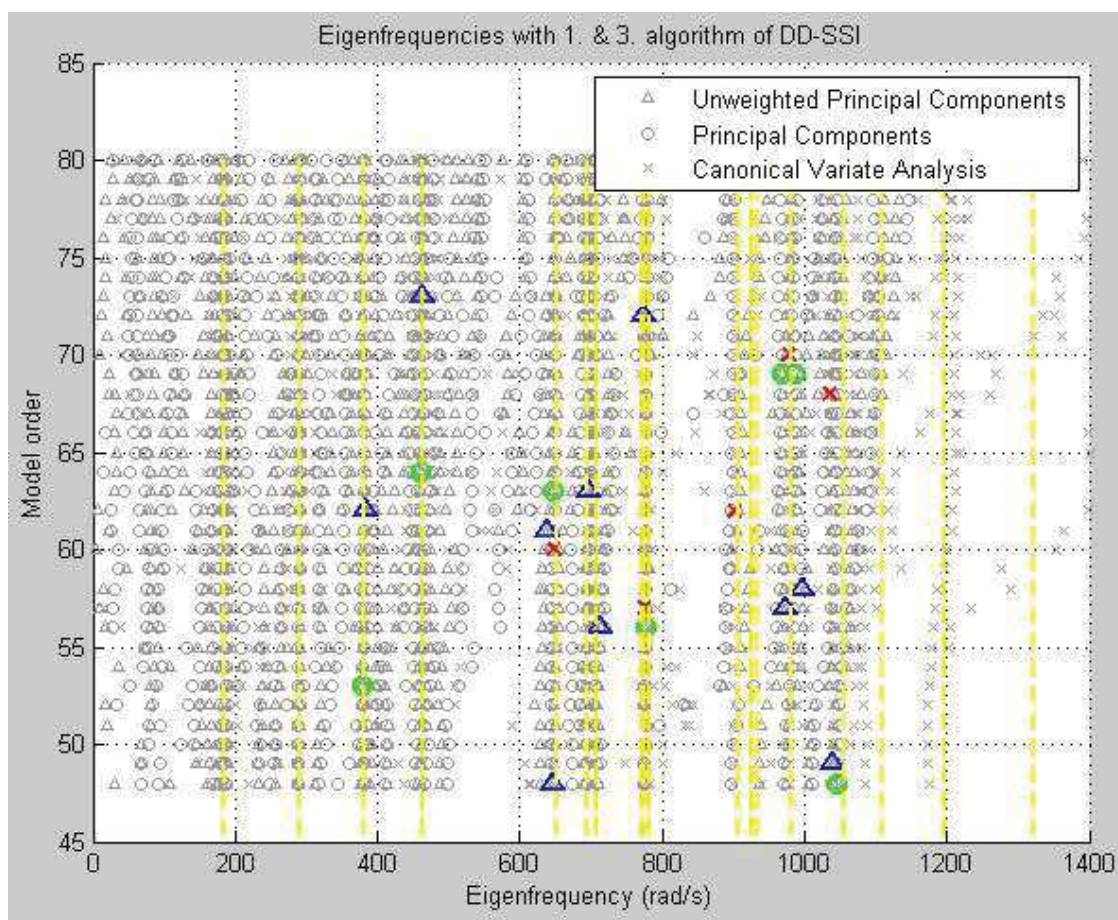


Bild 6.2 Stabilitätsdiagramm – 1. Variante des Rauschens (DD-SSI – 1. Algorithmus) - 2. Kriterium

Wie oben erwähnt war: in den Stabilitätsdiagrammen sind für die 2. Variation des Rauschens nur stabile Pole für UPC-Wichtung (1. und 2. Algorithmen). Bei der Anwendung weniger "strenger" Kriterien (1 und 2) bleiben stabile Pole in der Nähe der Eigenfrequenzen, aber es ist auch nicht möglich, diese Eigenfrequenzen zu bestimmen. Für die COV-SSI-Methode sind die Ergebnisse die gleichen wie für die 1. Variante des Rauschens.

## 6.2 Gruppe V3 – V8

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Stabilitätsdiagramme ausgewertet, die für Varianten wichtig sind, bei denen das Rauschen nur auf einen Punkt angewendet wurde. Bei den Varianten 3, 5 und 7 ist der Punkt nur am Eingang erregt. Bei den Varianten 4, 6 und 8 werden diese Punkte auch am Ausgang erregt. Für diese Varianten war es möglich, stabile Pole nur für UPC-Wichtung zu zeichnen. Aus den Stabilitätsdiagrammen für die DD-SSI-Methode (beide Algorithmen) ist es ersichtlich, dass die Pole für die "strengen" Kriterien (1 und 2) in der



Nähe der Eigenfrequenzen liegen. Auch hier ist es nicht möglich, den genauen Wert der Eigenfrequenzen zu bestimmen. Wenn die statischen Pole für die anderen Kriterien aufgezeichnet werden, wird die Anzahl von den gefundenen Polen erhöht, aber ihre Genauigkeit wird reduziert. Für die COV-SSI-Methode finden sich die stabilen Pole in der Nähe der Eigenfrequenzen. Für weniger "strenge" Kriterien werden mehr Punkte gefunden, aber die Genauigkeit ist wieder niedriger.

### 6.3 Gruppe V9 – V12

In der letzten Gruppe werden die Diagramme für Varianten ausgewertet, bei denen eine Kombination mehrerer Punkte rauschen würde. Für die DD-SSI-Methode wurden stabile Pole nur für die UPC-Wichtung aufgetragen. Wie bei früheren Stabilitätsdiagrammen ist es nicht möglich, die Eigenfrequenzen aus dem Diagramm zu bestimmen.

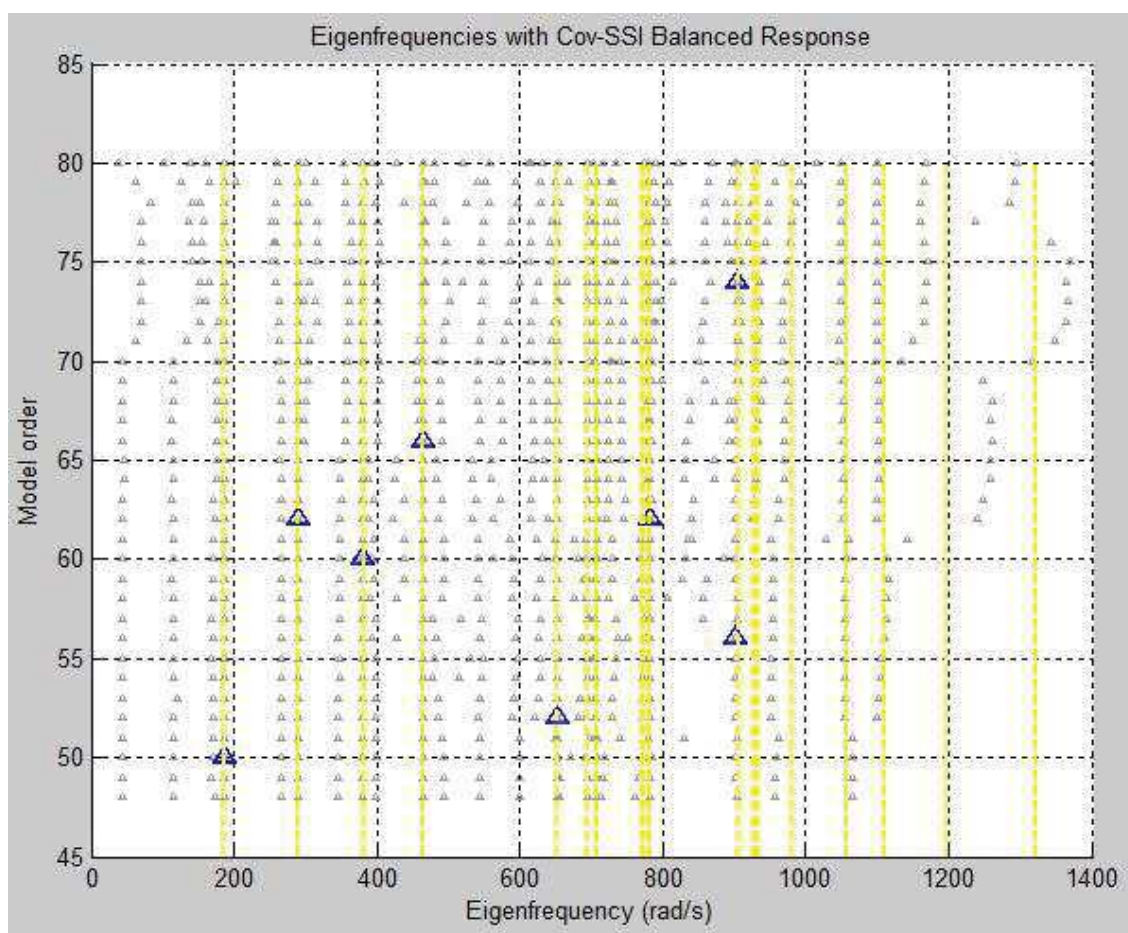


Bild 6.3 Stabilitätsdiagramm – 9. Variante des Rauschens (COV-SSI) - 2. Kriterium

Die besten Ergebnisse wurden für die COV-SSI-Methode (9. Variante, 2. Kriterium des Rauschens) gefunden. Das resultierende Diagramm ist in Bild 6.3 dargestellt. Aus dem Diagramm ist es möglich, mehrere Eigenfrequenzen zu bestimmen. Es ist jedoch nicht möglich, den Wert aller Eigenfrequenzen in einem gegebenen Bereich zu bestimmen. Im Stabilitätsdiagramm für die weniger „strengen“ Kriterien wurde, eine größere Anzahl stabiler Pole, gefunden. Aber ein Teil der Pole war außerhalb der Eigenfrequenzen. Für andere Varianten von Rauschen war es nicht möglich, genau die Eigenfrequenzen zu bestimmen, da ein Teil der Pole außerhalb der gefundenen Frequenzen war.

## 7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine Betriebsmodalanalyse für eine 3-Achs- Fräsmaschine durchgeführt. Die für OMA benötigten Betriebsbedingungen wurden durch Rauschen ersetzt und die Auswirkung auf die daraus resultierenden modalen Parameter wurde untersucht.

Kapitel 2 fasst, die theoretischen Grundlagen der dynamischen Systembeschreibung mit Bewegungsgleichungen und deren Lösung im Zustandsraum, der Definition und den Eigenschaften des Signals mit der Orientierung auf das weiße Rauschen, zusammen. Hier werden die Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenzen des Systems mittels der Betriebsmodalanalyse beschrieben.

Im nächsten Teil wurde ein Modell von Dreimassenschwinger konstruiert, für das zunächst eine Modalanalyse und dann eine Betriebsmodalanalyse durchgeführt wurde. Dies war ein Prüfmodell, das zur Überprüfung von Verfahren diente. Die Belastung wurde durch Varianten der Erregung durch das Rauschen bestimmt. Anschließend wurden die Stabilitätsdiagramme erstellt, in denen die Eigenfrequenzen aus der Modalanalyse aufgezeichnet wurden und die geeignetste Erregungsvariante nach den Kriterien bestimmt und der Einfluss des Rauschens am OMA bestimmt wurde.

Kapitel 5 befasst sich mit der Betriebsmodalanalyse für eine 3-Achsen-Fräsmaschine. Eingabedaten (modale Eigenfrequenz und modale Schwingungsformen) wurden aus dem ANSYS-Modell erhalten. Basierend auf diesen Daten wurde ein mathematisches Modell zur Beschreibung einer Werkzeugmaschine mit Zustandsraum ermittelt. Dann wurden für die verschiedenen Varianten der Belastung mittels weißen Rauschen die Zeitsignale erhalten, auf denen das OMA durchgeführt wurde. Die Berechnungen wurden mittels der Data-Driven-Methode (1. und 2. Algorithmus) und Covariance-Driven-Methode durchgeführt. Aus diesen Ergebnissen wurden, für die verschiedenen Erregungskonfigurationen, die Stabilitätsdiagramme erstellt, in denen die Pole gezeichnet werden. Nach den ausgewählten Kriterien wurden stabile Pole bestimmt, um die Eigenfrequenzen des Systems zu bestimmen. Diese Eigenfrequenzen wurden mit dem Ergebnis der Modalanalyse verglichen und die am besten geeigneten Varianten, von Belastung und Kriterien, bestimmt.

Insgesamt wurden 12 Varianten des Rauschens des Systems ausgewählt, für die dann die Stabilitätsdiagramme aufgezeichnet wurden. Für jede Variante wurden drei Diagramme (DD-

SSI - 1. Algorithmus, DD-SSI - 2. Algorithmus, COV-SSI) aufgezeichnet. Für die DD-SSI-Methode wurden drei Wichtungen (UPC, PC und CVA) durchgeführt. Sechs verschiedene Kriterien wurden ausgewählt.

Aus den Diagrammen ist es ersichtlich, dass das Rauschen und die Auswahl der Kriterien auf die daraus resultierenden Diagramme wirken. Wenn Stabilitätsdiagramme für "strenge" Kriterien aufgezeichnet wurden, fanden sich stabile Pole ganz in der Nähe von einigen Eigenfrequenzen, aber auf ihrer Basis war es nicht möglich, die Eigenfrequenz zu bestimmen. Wenn weniger " strenge " Kriterien gewählt wurden, wurden mehr Punkte gefunden, welche aber weit von den Eigenfrequenzen hinaus verstreut wurden

Die Wirkung von Rauschen ist am deutlichsten beim Aufzeichnung von stabilen Polen mit CVA und PC-Wichtung. Wenn an allen Ein- und Ausgängen kein Rauschen definiert wurde, konnte kein stabiler Pol ermittelt werden. Dies gilt nicht für UPC-Wichtung. Wenn das Rauschen für nur einen Punkt auf der Maschine definiert wurde, wurde der minimale stabile Pol gefunden.

Die kleinste Wirkung des Rauschens war bei der Covariance-Driven-Methode. Die Stabilitätsdiagramme sind die gleichen wie bei der Variante, bei der die ausgewählten Punkte sowohl am Eingang als auch am Ausgang erregen werden, und für die Variante, bei der die gleichen Punkte nur am Eingang erregt werden. Die Anzahl der erregten Punkte hatte wenig Einfluss auf die Anzahl der festgesetzten Pole. Für "strenge" Kriterien können diese Frequenzen aus diesen Diagrammen relativ genau bestimmt werden. Auf der Grundlage dieser Diagramme können jedoch nur wenige Eigenfrequenzen ermittelt werden. Die anderen wurden nicht gefunden.

Insgesamt konnten keine Kriterien und keine Varianten mit ausreichender Genauigkeit und Sicherheit für alle Eigenfrequenzen bestimmt werden. Die Ursache kann sein, dass es eine grundlegende Belastung durch das Rauschen gibt; es sind daher keine realen Betriebsbedingungen. Die Belastung mit Rauschen ist jedoch ganz klein, was bedeutet, dass einige Matrizen schlecht bedingt sind und das ganze System anfälliger ist, Fehler zu machen.

In der Praxis werden zu Betriebsbedingungen die Vibrationsbelastungen, von Motoren, Bearbeitungsprozessen, Zusatzaggregaten und nicht zuletzt die Vibrationen der Umgebung, hinzugefügt. Aus diesem Grunde schlage ich vor, OMA für die tatsächlichen Betriebsbedingungen auf der tatsächlichen Maschine durchzuführen und basierend auf diesen Daten, die Eignung der Nutzung der OMA-Methode, zu bewerten.



## 8 Česká část

### 8.1 Úvod

V dnešní době je snaha výrobců o zpřesnění výrobních procesů, snížení ceny a zvýšení rychlosti výroby. To vede k vyšším požadavkům na kvalitu obráběcích strojů. Z tohoto důvodu se zjišťují dynamické vlastnosti strojů. Jedna z možností, jak tyto vlastnosti určit, je provedení experimentální modální analýzy. Problém této metody spočívá v nutnosti externího buzení dané soustavy. Další nevýhodou je, že výsledné reakce jsou vždy v závislosti na budící síle. V praxi nedochází k zatěžování stroje definovanou silou, ale takzvanými provozními podmínkami. To mohou být například vibrace od motoru, přídavných agregátů nebo od obráběcího procesu.

Z těchto důvodů se používá provozní modální analýza – Operational Modal Analysis (OMA). OMA se používá především ve stavebnictví, například pro mosty. V současné době je snaha o aplikaci této analýzy i ve strojírenství. Výhodou této analýzy je, že není závislá na budící síle a provádí se přímo za provozních podmínek. Dynamické vlastnosti je možné zjišťovat teoreticky pro každý stroj. Dříve nebylo možné tuto metodu aplikovat z důvodu náročnosti matematických výpočtů.

Cílem této diplomové práce je provedení provozní modální analýzy pro model tříosého frézovacího stroje. Provozní podmínky jsou nahrazeny šumem. OMA bude tedy provedena pro vypnutý stroj a bude se zjišťovat vliv šumu na výsledné určení vlastních frekvencí. Po domluvě s vedoucím práce bylo rozhodnuto, že výpočet vlastních frekvencí v programu Matlab a Simulink je dostačující. Z tohoto důvodu nebyl výpočet proveden v programu Artemis.

V první části této práce budou krátce popsány dynamické vlastnosti stroje a řešení dynamických systémů pomocí pohybových rovnic ve stavovém prostoru. Budou vysvětleny pojmy signál a šum. V další části pak bude popsán postup výpočtu provozní modální analýzy a sestavení stabilizačních diagramů.

Nejdříve se provede provozní modální analýza pro jednodušší systém tří pružin. Na tomto systému se ověří správnost matematického modelu. Poté bude provedena provozní modální analýza pro samotný stroj. Provede se simulace různých budících konfigurací. Následně se sestaví stabilizační diagramy a zhodnotí se vliv šumu na určování vlastních frekvencí.

## 8.2 OMA pro systém tří pružin

Předmětem této práce je získání modálních parametrů obráběcího stroje. Jelikož obráběcí stroj lze považovat za relativně složitou soustavu, která má mnoho vstupních parametrů, tak byl celý postup nejdříve proveden pro jednodušší zařízení. Z tohoto důvodu byly výpočty nejdříve aplikovány na jednodušší systém tří pružin (Bild 8.1).

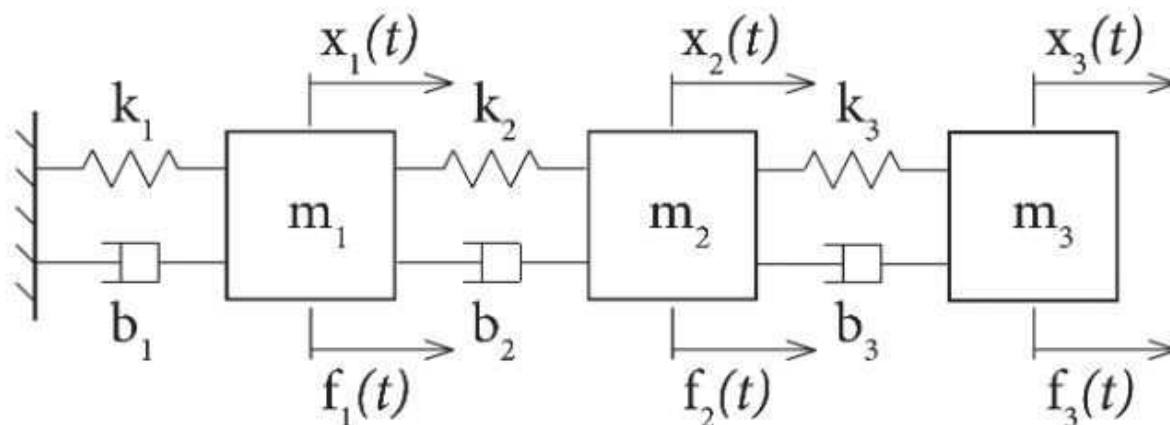


Bild 8.1 Soustava tří pružin [2]

Aby bylo možné provést pro tento systém operační modální analýzu, je potřeba pomocí pohybových rovnic popsat stavový prostor pomocí stavových matic A, B, C a D. Stavový prostor byl v rámci této práce řešen v programu Simulink. Systém je na vstupu buzen bílým šumem a na výstupu je pomocí náhodných čísel simulován šum senzorů. Bylo zvoleno několik různých kombinací šumu pro ověření, jaký to bude mít vliv na výsledky OMA. Výstupem je časový signál, který bude dále zpracován pomocí provozní modální analýzy.

Výsledkem provozní modální analýzy jsou stabilizační diagramy podle metod DD-SSI (1. a 2. algoritmus; póly s PC, UPC, CVA vážením) a COV-SSI. Podle zvolených kritérií byly vyhledány stabilní póly a na jejich základě se určovaly vlastní frekvence soustavy. Výsledky byly porovnány s vypočítanou vlastní frekvencí z modální analýzy.

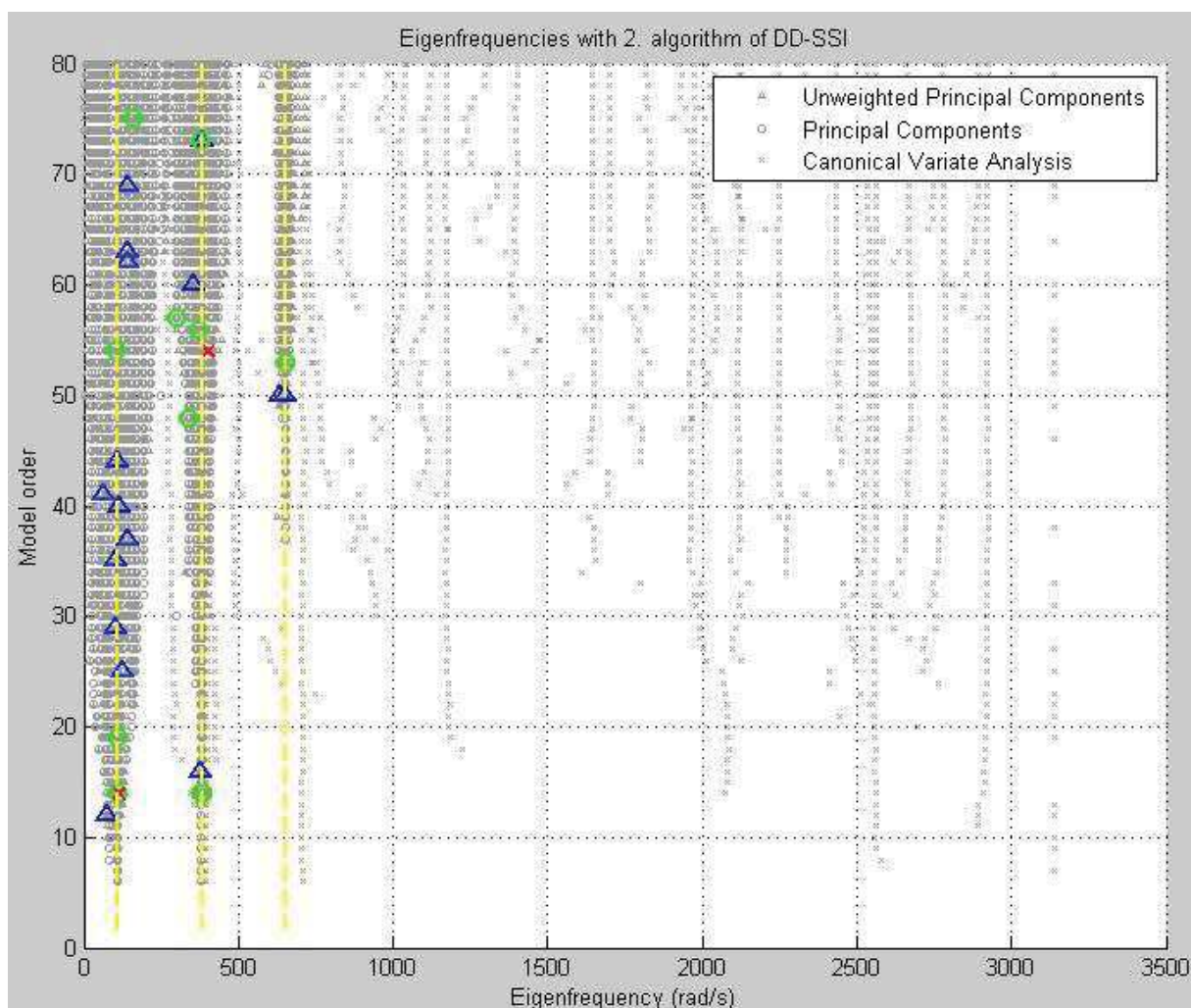


Bild 8.2 Stabilizační diagram – 1. varianta rušení (DD-SSI, 2. algoritmus) – 2. kritérium

Na obrázku (Bild 8.2) je zobrazen jeden z výsledných stabilizačních diagramů pro soustavu tří pružin. Z obrázku je patrné, že nalezené stabilní póly se nacházejí poblíž vypočítaných vlastních frekvencí nebo leží přímo na ní. Z těchto výsledů je vidět, že v diagramu jsou tři oblasti, kde by mohla být vlastní frekvence, ale její přesnou hodnotu není možné přesně určit.

### 8.3 OMA pro obráběcí stroj

V dalším kroku je možné provést provozní modální analýzu na stroji. Jedná se o obecný tříosý obráběcí stroj typu ACW. Pracovní prostor stroje je přibližně 1000x700x600. Tento stroj je potom vymodelován v programu ANSYS a byla na něm provedena modální analýza. Z této modální analýzy byly získány matice modálních vlastních frekvencí a modálních vlastních kmitů. Z nich se po úpravách získaly matice A, B, C a D. S jejich pomocí bude tento systém

vyřešen ve stavovém prostoru. Výsledný signál pak bude zpracován pomocí OMA. Stroj je schematicky zobrazen na Bild 8.3.

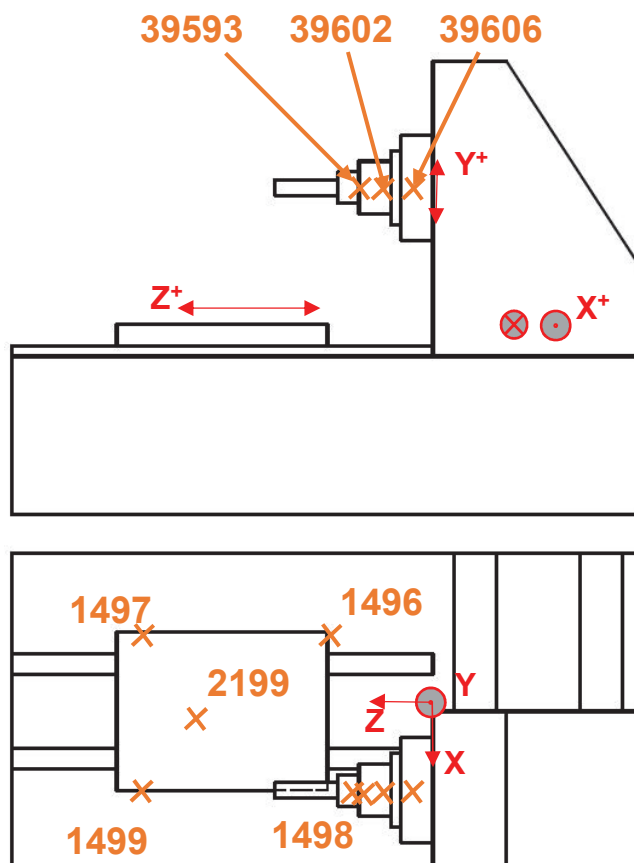


Bild 8.3 Body na tříosém frézovacím stroji

Na obrázku jsou vyznačeny body, které budou buzeny šumem. Stejně jak u systému tří pružin bylo zvoleno několik variant šumu (všechny body, pouze jeden bod, kombinace více bodů). Pro každou variantu byl sestaven stabilizační diagram. Aby bylo možné vykreslit stabilní póly, je nutné stanovit kritéria. Ze získaných stabilizačních diagramů je pak možné určit, zda pomocí OMA lze stanovit vlastní frekvence a jaký vliv má šum na jejich určení.

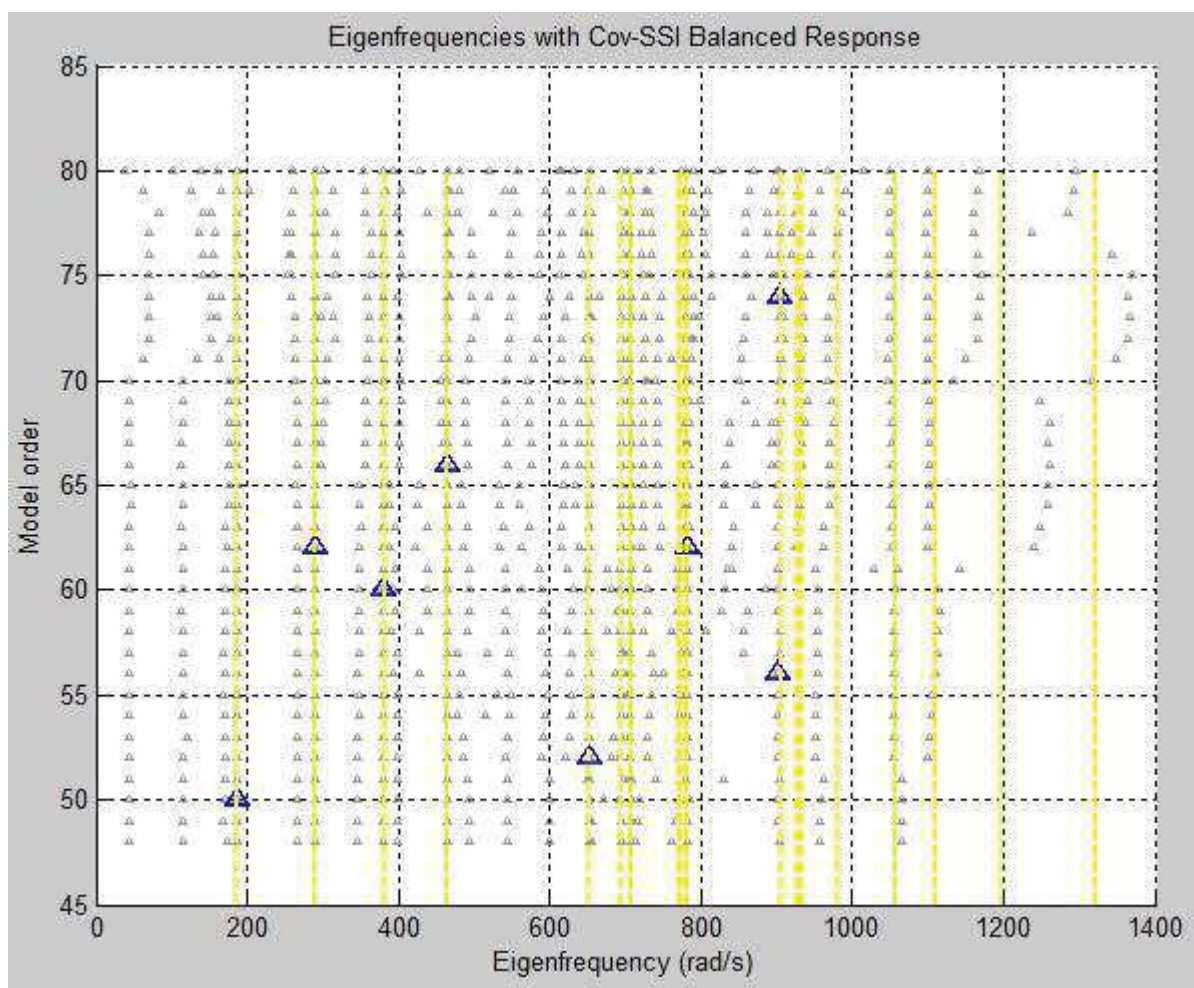


Bild 8.4 Stabilizační diagram - 9. varianta rušení (COV-SSI) - 2. kritérium

Nejlepší výsledky byly u metody COV-SSI. Na obrázku (Bild 8.4) je zobrazen výsledný diagram pro tuto metodu. Vykreslené stabilní póly leží na vlastních frekvencích, ale na základě těchto pólu by bylo možné určit jen několik vlastních frekvencí. Pro méně „přísná“ kritéria bylo nalezeno více stabilních pólu, ale ty už ležely i mimo vlastní frekvence. Podle diagramů pro metodu DD-SSI také není možné určit vlastní frekvence.



## 8.4 Závěr

V této práci byla provedena provozní modální analýza pro tříosý obráběcí stroj. Provozní podmínky nutné pro OMA byly nahrazeny bílým šumem, kde se zkoumal vliv na výsledné modální parametry.

V kapitole 2 byly shrnuty teoretické základy popisu dynamické soustavy pomocí pohybových rovnic a jejich řešení ve stavovém prostoru, definice a vlastnosti signálu, se zaměřením na bílý šum. Jsou zde popsány postupy pro určení vlastních frekvencí soustavy pomocí provozní modální analýzy.

V další části byl sestaven model soustavy tří pružin, pro který byla nejprve provedena modální analýza a následně operační modální analýza. Jednalo se o zkušební model, který sloužil pro ověření postupů. Zatížení bylo stanoveno variantami buzení pomocí šumu. Následně se sestavily stabilizační diagramy, do kterých se zapsaly vlastní frekvence z modální analýzy a pomocí kritérií se určovala nejvhodnější varianta kritérií a zjišťoval se vliv šumu na OMA.

Kapitola 5 se zabývá provozní modální analýzou pro 3-osý frézovací stroj. Vstupní data (Modální vlastní frekvence a modální tvary kmitu) byla získána z modelu v programu ANSYS. Na základě těchto dat se určoval matematický model pro popis obráběcího stroje pomocí stavového prostoru. Poté se pro různé varianty zatížení pomocí bílého šumu získaly časové signály, na kterých byla provedena OMA. Výpočty byly provedeny pro metodu Data-Driven (pro 1. a 2. algoritmus) a Covariance-Driven. Z výsledků byly sestaveny pro různé budící konfigurace stabilizační diagramy, ve kterých se vykreslily póly. Podle zvolených kritérií pak byly určeny stabilní póly, na jejichž základě se určují vlastní frekvence soustavy. Tyto vlastní frekvence byly porovnány z výsledkem z modální analýzy a určeny nejvhodnější varianty zatížení a kritérií.

Celkově bylo zvoleno 12 variant rušení daného systému, pro které se následně vykreslily stabilizační diagramy. Pro každou variantu byly vykresleny 3 diagramy (DD-SSI – 1. algoritmus, DD-SSI – 2. algoritmus, COV-SSI). Pro metodu DD-SSI byla provedena ještě tři vážení (UPC, PC a CVA). Dále byla zvoleno 6 různých kritérií.

Z diagramů je patrné, že šum i volba kritérií má na výsledné diagramy vliv. Pokud byly vykresleny stabilizační diagramy pro „přísná“ kritéria, nalezené stabilní póly ležely celkem blízko ně-

kterých vlastních frekvencí, ale na jejich základě nebylo možné vlastní frekvenci stanovit. Pokud byla volena méně „přísná“ kritéria, bodů bylo nalezeno více, ale byly rozptýleny ve větší vzdálenosti od vlastních frekvencí.

Vliv šumu je nejvíce patrný při vykreslení stabilních pólů pro vážení CVA a PC. Pokud nebyl definován šum na všech vstupech i výstupech, tak nebylo možné určit žádný stabilní pól. To neplatí pro UPC. Pokud byl šum definován pouze pro jeden bod na stroji, bylo nalezeno minimum stabilních pólů.

Nejmenší vliv šumu byl u metody Covariance-driven. Stabilizační diagramy jsou stejné jak pro variantu, kdy jsou vybrané body buzeny na vstupu i výstupu, tak pro variantu, kdy jsou stejné body buzeny pouze na vstupu. Počet buzených bodů měl malý vliv na počet stanovených stabilních pólů. Pro „přísná“ kritéria je možné z těchto diagramů poměrně přesně určit vlastní frekvence. Na základě těchto diagramů je ale možné určit pouze pár vlastních frekvencí. Ostatní nebyly nalezeny.

Celkově se pomocí žádného kritéria ani žádné varianty nepodařilo určit s dostatečnou přesností a jistotou veškeré vlastní frekvence. Důvodem může být zatěžování pouze pomocí šumu, nejedná se totiž o skutečné provozní podmínky. Zatěžováním pomocí šumu jsou celkově hodně malá, to má za následek, že některé matice jsou špatně podmíněny a celý systém je tedy náchylnější na tvorbu chyb.

V reálné praxi se do provozních podmínek přidává vibrační zatížení od motorů, obráběcích procesů, přídatných agregátů a v neposlední řadě i provozní podmínky okolí. Z tohoto důvodu navrhuji provést OMA ve skutečných provozních podmínkách na skutečném zařízení. A na základě těchto dat vyhodnotit vhodnost použití OMA.

## Literaturverzeichnis

- [1] A. Bilošová, „Aplikovaný mechanik jako součást týmů konstruktérů a vývojářů: část modální zkoušky,“ Vysoká škola báňská, Ostrava, 2012.
- [2] F. Kšica, „VUT Brno,“ 2016. [Online]. Available: [https://dspace.vutbr.cz/bitstream/handle/11012/59721/DP\\_KSICA\\_2016.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://dspace.vutbr.cz/bitstream/handle/11012/59721/DP_KSICA_2016.pdf?sequence=3&isAllowed=y). [Zugriff am 13 06 2017].
- [3] D. Rowell, „Massachusetts Institute of Technology,“ 10 2002. [Online]. Available: <http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/StateSpace.pdf>. [Zugriff am 13 06 2017].
- [4] V. Gofroň, „VUT Brno,“ 2015. [Online]. Available: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=103520](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=103520). [Zugriff am 13 06 2017].
- [5] J. Tůma, Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT, Štramberk: Sdělovací technika, 1997.
- [6] J. Štětina, M. Jaroš und P. Ramík, „VUT Brno,“ 2003. [Online]. Available: <http://ottp.fme.vutbr.cz/skripta/vlab/daq/Ka04-02.htm>. [Zugriff am 14 06 2017].
- [7] M. Dobrovolný, „Studijní materiály Univerzity Pardubice,“ 2010. [Online]. Available: [http://studentkrt.aspone.cz/FTP/ZS\\_1/INMSE/INMSE\\_Prednaska1.pdf](http://studentkrt.aspone.cz/FTP/ZS_1/INMSE/INMSE_Prednaska1.pdf). [Zugriff am 14 06 2017].
- [8] K. Horák, „VUT Brno,“ 29 01 2014. [Online]. Available: [http://midas.uamt.feec.vutbr.cz/ZVS/Lectures/01\\_Uvod\\_do\\_zpracovani\\_signalu.pdf](http://midas.uamt.feec.vutbr.cz/ZVS/Lectures/01_Uvod_do_zpracovani_signalu.pdf). [Zugriff am 15 06 2017].
- [9] H. Herlufsen, P. Andersen, S. Gade und N. Møller, „Identification Techniques for Operational Modal Analysis – an Overview and Practical Experiences,“ in *International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, 2005.



- [10] N. Møller, S. Gade und H. Herlufsen, „Stochastic Subspace Identification Technique in Operational Modal Analysis,“ in *International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, 2005.
- [11] C. Rainieri, *Operational Modal Analysis for Seismic Protection of Structures*, Naples: University of Naples “Federico II”, 2008.
- [12] W.-H. Hu, „Universidade do Porto,“ 2009. [Online]. Available: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/62039/1/000149225.pdf>. [Zugriff am 22 06 2017].
- [13] G. G. Tekesté, „TÉCNICO LISBOA,“ 07 2015. [Online]. Available: [https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/281870113702773/Thesis\\_Gideon.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/281870113702773/Thesis_Gideon.pdf). [Zugriff am 26 06 2017].
- [14] „ARTEMIS - Software for Operational Modal Analysis,“ A/S, Structural Vibration Solutions, [Online]. Available: <http://www.svibs.com>. [Zugriff am 19 07 2017].
- [15] P. Sobotka, „České vysoké učení technické v Praze,“ [Online]. Available: <http://stc.fs.cvut.cz/pdf13/2608.pdf>. [Zugriff am 09 08 2017].
- [16] M. Botz, Y. Zhang, M. Raith und K. Pnkert, „Operational Modal Analysis of a Wind Turbine during Installation of Rotor and Generator,“ in *International Operational Modal Analysis Conference*, Ingolstadt, 2017.
- [17] Z. Hlaváč, „Modální analýza a volné kmitání slabě tlumených lineárních kmitavých soustav,“ [Online]. Available: <https://www.kme.zcu.cz/download/predmety/273-fst5.pdf>. [Zugriff am 29 08 2017].

## Anlagenverzeichnis

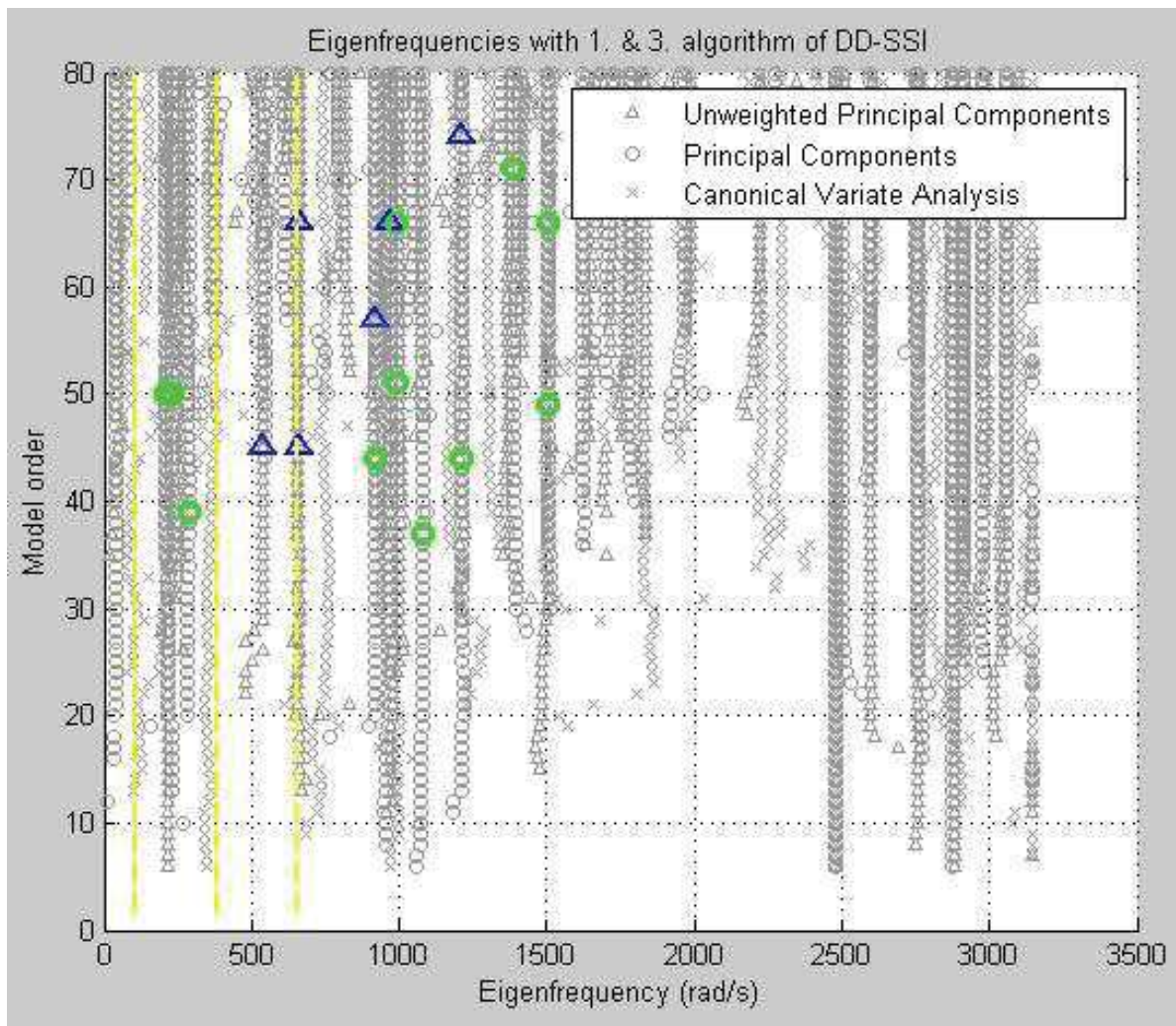
Anlage 1: Stabilitätsdiagramme für den Dreimassenschwinger (2. Variante des Rauschens, 2. Kriterium)

Anlage 2: Stabilitätsdiagramme für die Fräsmaschine (1. Variante des Rauschens, 2. Kriterium) - Polen

# Anlage 1

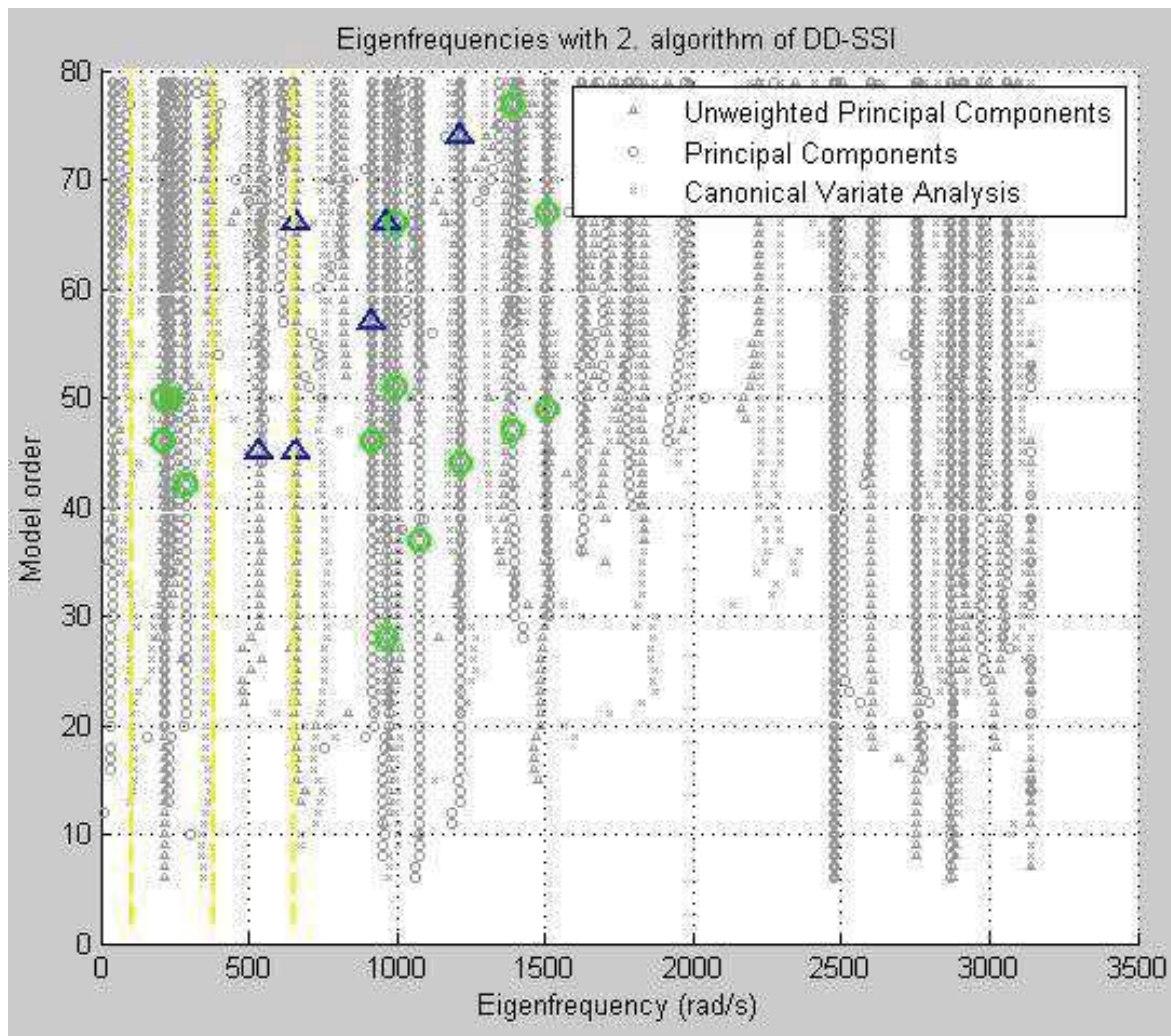
Stabilitätsdiagramme für den Dreimassenschwinger (2. Variante des Rauschens, 2. Kriterium)

-DD-SSI (1.Algorithmus)



Stabilitätsdiagramme für den Dreimassenschwinger (2. Variante des Rauschens, 2. Kriterium)

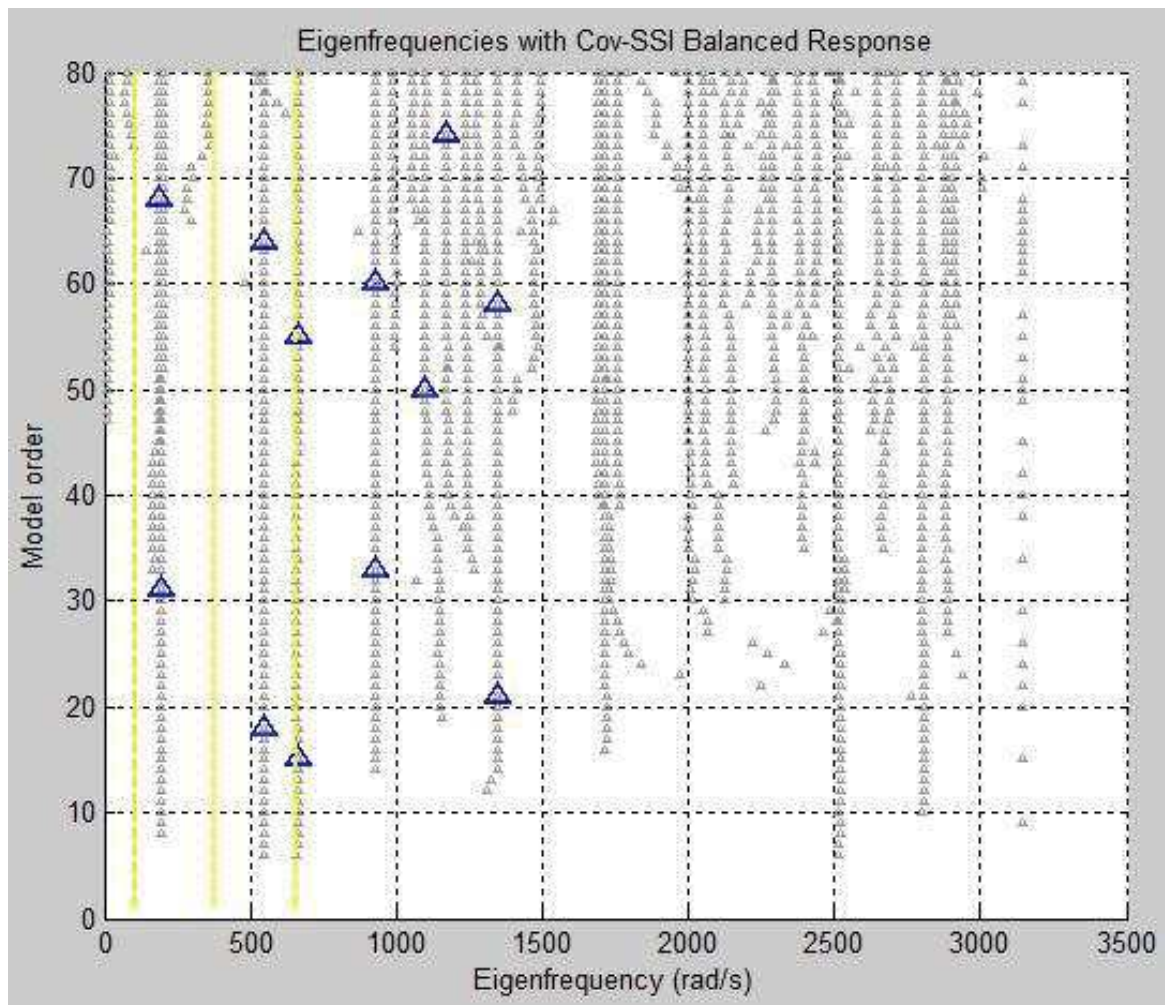
-DD-SSI (2.Algorithmus)





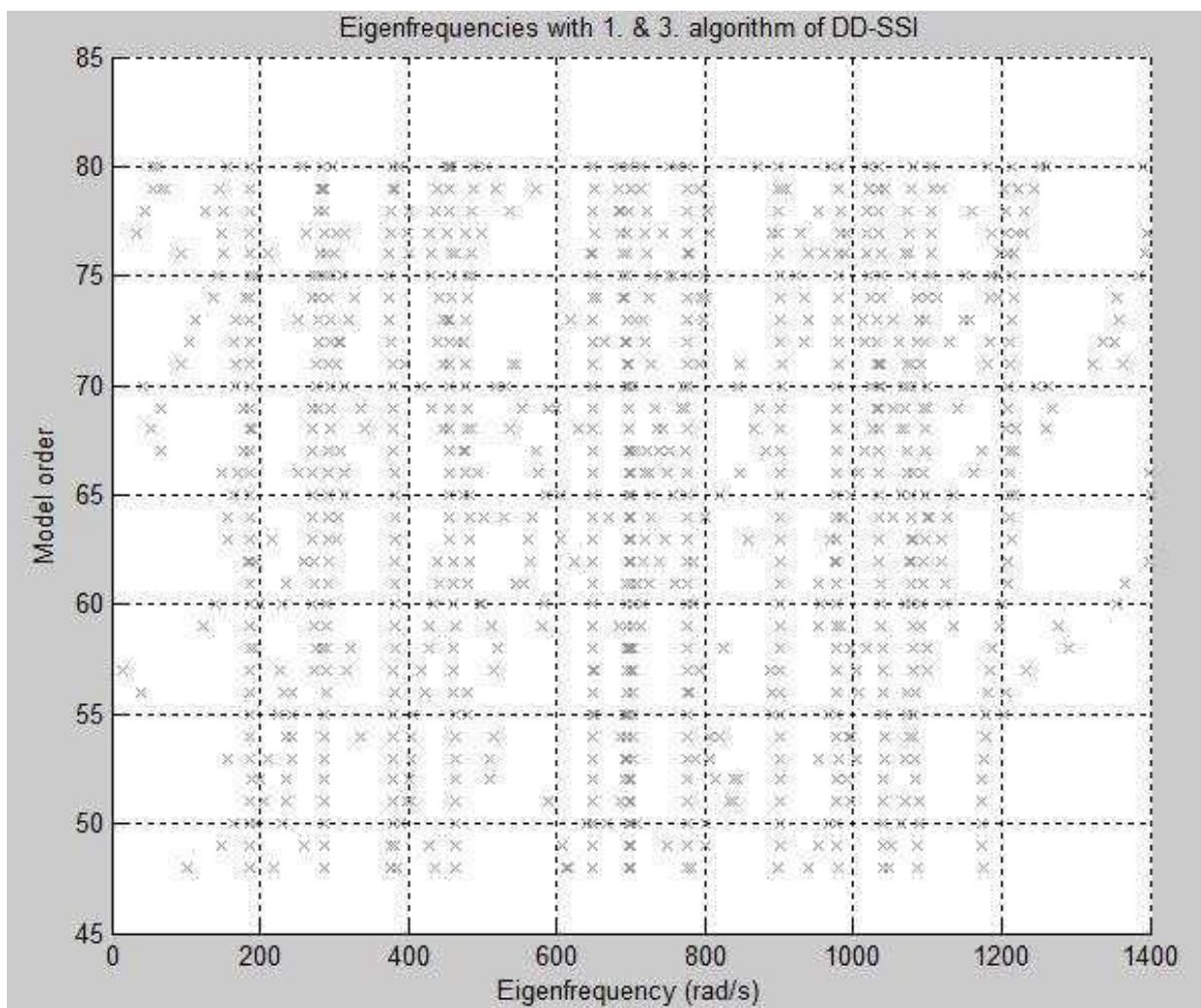
Stabilitätsdiagramme für den Dreimassenschwinger (2. Variante des Rauschens, 2. Kriterium)

-COV-SSI



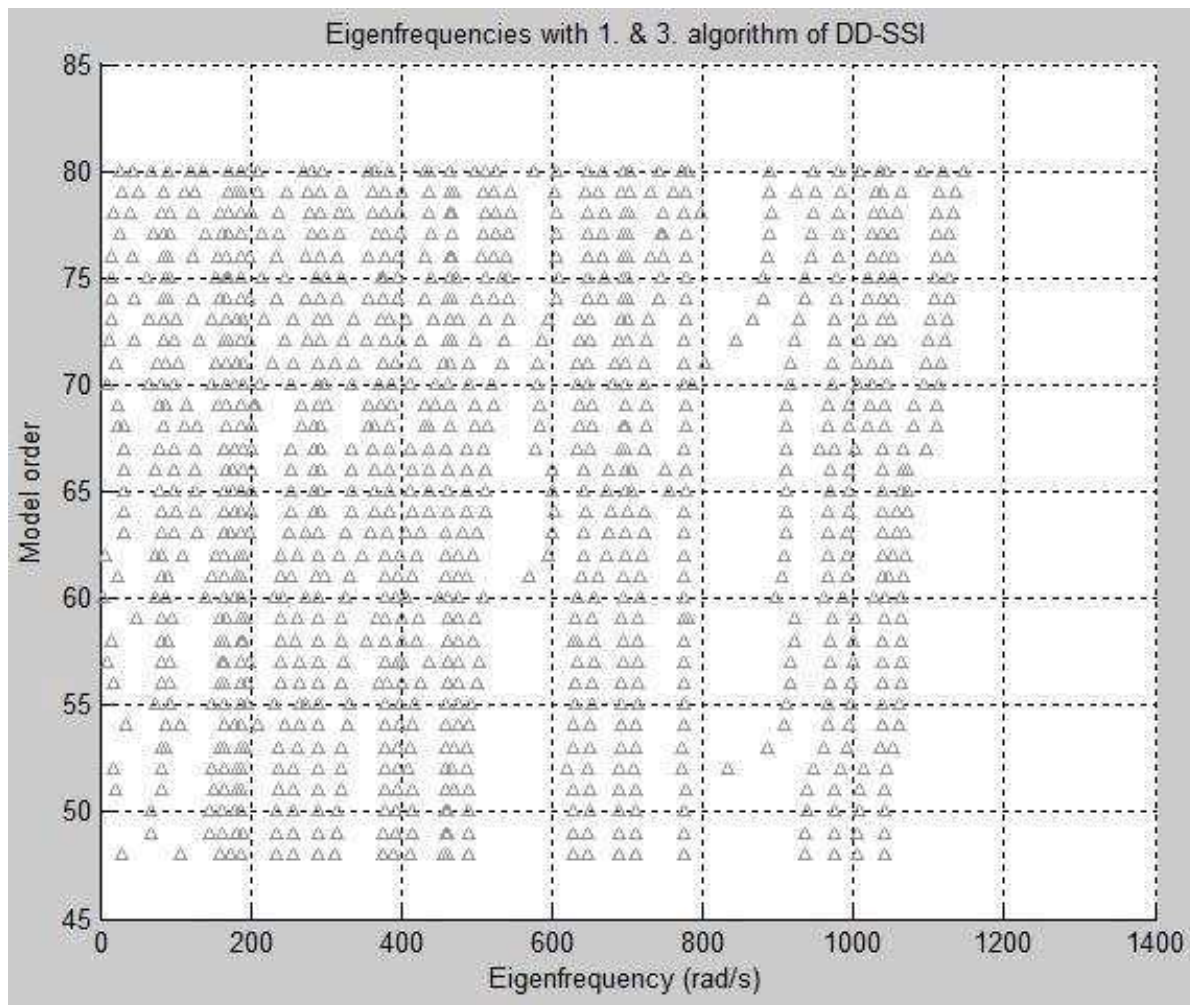
## Anlage 2

Stabilitätsdiagramme für die Fräsmaschine (1. Variante des Rauschens, 2. Kriterium) - Polen  
-CVA-Wichtung (1. Algorithmus)



Stabilitätsdiagramme für die Fräsmaschine (1. Variante des Rauschens, 2. Kriterium) - Polen

UPC-Wichtung (1. Algorithmus)



Name: <b>Kratochvílová</b>	<u>Bitte beachten:</u>
Vorname: <b>Silvie</b>	1. Bitte binden Sie dieses Blatt am Ende Ihrer Arbeit ein.
geb. am: <b>18.01.1990</b>	
Matr.-Nr.: <b>398295</b>	


Selbstständigkeitserklärung\*

Ich erkläre gegenüber der Technischen Universität Chemnitz, dass ich die vorliegende **Masterarbeit** selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Datum: **31.08.2017**

Unterschrift:  .....

\* Statement of Authorship

I hereby certify to the Technische Universität Chemnitz that this thesis is all my own work and uses no external material other than that acknowledged in the text.

This work contains no plagiarism and all sentences or passages directly quoted from other people's work or including content derived from such work have been specifically credited to the authors and sources.

This paper has neither been submitted in the same or a similar form to any other examiner nor for the award of any other degree, nor has it previously been published.