PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DISERTAČNÍ PRÁCE

Deduktivní metody řešení důkazových planimetrických úloh

2021

Vojtěch Zlámal

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne ....

Zde bych rád poděkoval RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., vedoucímu mé práce, za podněty, cenné rady a čas, který mi věnoval, a své rodině za podporu, díky níž jsem mohl tuto práci dokončit.

Anotace

Disertační práce se zabývá deduktivními metodami řešení důkazových úloh středoškolské syntetické planimetrie. Jsou zde sumarizovány, kategorizovány a zpracovány poznatky z metodologie řešení úloh uvedeného typu s důrazem na využitelnost v přípravě žáků středních škol na matematické soutěže (Matematická olympiáda, Česko-polsko-slovenské střetnutí aj.). Vlastní text práce je rozdělen do čtyř kapitol.

První část práce se věnuje výzkumu současného stavu možností přípravy žáků na řešení důkazových úloh středoškolské planimetrie. Tento výzkum analyzuje nejen způsoby a formy přípravy žáků na úlohy dané problematiky v matematických soutěžích, ale také učební texty dostupné žákům. Tato analýza učebních textů je zaměřena na výskyt metod a technik využití základních polohových a metrických poznatků v důkazových planimetrických úlohách a na jejím základě jsou zhodnoceny možnosti přípravy žáků k řešení úloh daného typu. Hlavním cílem uvedené analýzy je zjistit existenci vhodného učebního textu, který by žákům středních škol nabídl možnost komplexní přípravy v problematice důkazových planimetrických úloh.

Druhá část obsahuje rozbor didaktických aspektů využívání systému metod řešení důkazových úloh syntetické planimetrie. Uvedený rozbor se zabývá zejména možnostmi kategorizace úloh a následným převodem této kategorizace do systematické metodologie.

V třetí části jsou uvedena vybraná planimetrická tvrzení využitelná při řešení úloh dané problematiky. Tvrzení jsou doplněna důkazy využívajícími prostředky syntetické planimetrie s tím, že tyto důkazy je možno pojmout jako ukázkové úlohy dále uvedených metod.

Čtvrtá část obsahuje základní metody řešení důkazových úloh dané problematiky, přičemž je využita kategorizace úloh popsaná v druhé části této práce. Pro jednotlivé kategorie úloh jsou uvedeny základní metody řešení. Každá prezentovaná metoda je vysvětlena v obecné rovině a aplikována na typových úlohách. Uvedené kategorie jsou následně doplněny sadami řešených a neřešených úloh. Celou čtvrtou část je možno využít jako samostatný učební text pro příravu na řešení úloh matematických soutěží.

Klíčová slova

planimetrie, syntetická planimetrie, deduktivní metody, metody řešení, důkazové úlohy, matematická soutěž, střední škola

Summary

The thesis deals with the deductive methods of proof problems solving in the field of synthetic plane geometry at secondary schools. The dissertation is to summarise, categorize and process the methodology findings of solving the above-mentioned plane geometry problems aiming at practical application by secondary school pupils in preparation for mathematical competitions (i.e. Mathematical Olympiad, Czech-Polish-Slovak Mathematical Competition). The content of the thesis is divided into four main chapters.

The first chapter explores the current state of possibilities of pupils' preparation for solving the above-mentioned problems. This research analyzes not only forms and strategies but also available study materials. The focus of this analysis is the presence of methods concerning usage of basic geometrical findings in plane geometry proof problems on which is made regarding evaluation. The main objective is to find the most accurate secondary school study material in terms of pupils' preparation for solving the above-mentioned problems.

The second part analyses different categorizations of problem-solving strategies from the didactical point of view, establishes the most accurate categorization and converts it into a systematic methodology.

The third chapter offers a set of plane geometry theorems that can be used for solving the above-mentioned problems. In addition, the theorems are followed by relevant proofs that can be considered as examples of the application of further mentioned problem-solving methods.

The fourth part uses the established categorization to expose the basic methods of solving plane geometry proof problems. Each category presents its elementary methods. These methods are described and demonstrated in particular examples. There is a set of solved and unsolved problems for each category, therefore the whole part of the thesis can be used as an independent study material.

Keywords

plane geometry, synthetic plane geometry, deductive methods, methods of problem-solving, proof problems, mathematical competition, secondary school

Obsah

Seznam použitého značení

A	bod A
p	přímka p
AB	přímka určená body A, B
φ	úhel φ
$\sphericalangle AVB$	úhel AVB
$\lvert\sphericalangle AVB\rvert$	velikost úhlu AVB
$\lvert AB\rvert$	velikost úsečky AB
ΔABC	trojúhelník ABC
$S_{\Delta ABC}$	obsah trojúhelníku ABC
$k(S;r)$	kružnice k o poloměru r a středu v bodě S
$p \perp q$	přímky p a q jsou navzájem kolmé
$p \parallel q$	přímky p a q jsou navzájem rovnoběžné
$\rho : X \to X'$	zobrazení ρ zobrazující bod X do bodu X'
$\rho_2 \circ \rho_1$	zobrazení složené ze zobrazení ρ_1 a ρ_2 (v tomto pořadí)
$A \neq B$	body A a B jsou různé
	označení konce důkazu, úlohy

Úvod

V oboru planimetrie se lze setkat se dvěma typy úloh. Jsou to úlohy určovací (a to včetně úloh kontrukčních) a důkazové. Řešení důkazových úloh je náročnou tvůrčí činností, neboť kromě respektování logické správnosti jednotlivých kroků musí řešitel důkaz *vymyslet*. Jinými slovy řešitel prozkoumává a objevuje vztahy a souvislosti mezi jednotlivými objekty a jejich vlastnostmi. Řešení důkazových úloh je tak činností, která stimuluje logické uvažování, prohlubuje poznatky řešitele v daném tématu a také rozvíjí schopnosti řešení problému (analýzu celku a syntézu dílčích kroků). Z tohoto hlediska lze považovat důkazové úlohy za velmi důležitou součást vzdělávání žáků našich škol.

V rámci výuky planimetrie na středních školách se žáci seznamují s planimetrií syntetickou a analytickou. Obor analytické geometrie (a tedy i planimetrie) je založen na práci René Descartesa (1596 až 1650), tj. na využití analyticko-algebraických metod v geometrii. Původ syntetické planimetrie, jinak též axiomatické planimetrie, lze pak nalézt v *Základech* sepsaných starověkým matematikem Eukleidem z Alexandrie (přibližně 325 př. n. l. až 260 př. n. l.). Přestože syntetická planimetrie je tak mnohonásobně starším oborem, její názornost, srozumitelnost a praktická aplikovatelnost ji stále drží v hlavním proudu matematického vzdělávání.

Pro důkazové planimetrické úlohy je charakteristické, že je lze řešit metodami výpočetními nebo deduktivními. Výpočetní metody důkazů jsou založeny na výpočtu konkrétní číselné hodnoty, zatímco deduktivní metody se opírají o základní vlastnosti a polohu zadaných geometrických útvarů. Není však možné říci, že úlohy jsou vždy řešitelné oběma způsoby, proto se tato práce bude zabývat pouze planimetrickými důkazovými úlohami řešitelnými deduktivními metodami.

Obecná teorie matematických důkazů rozlišuje důkazy přímé, nepřímé, sporem, využitím principu matematické indukce a důkazy úplnou indukcí. Na deduktivních postupech jsou pak založeny matematické důkazy přímé, nepřímé, sporem a využitím principu matematické indukce. Jednotlivé případy zkoumané v rámci provádění úplné matematické indukce jsou dokazovány některou z výše uvedených metod, proto se i zde deduktivní postupy objevují. Planimetrické důkazové úlohy ve svých řešení povětšinou využívají důkazy přímé či sporem, v obecně zadaných úlohách se pak řešení opírá o úplnou indukci, tj. vyšetření všech možností vyplývajících ze zadání.

Vzhledem k tomu, že důkazové úlohy jsou zpravidla pro žáky obtížnou součástí matematiky, stanovila si tato disertační práce za cíl prozkoumat oblast přípravy žáků na řešení těch důkazových úloh syntetické planimetrie, které jsou řešitelné deduktivními metodami. Je zřejmé, že uvedená obtížnost důkazových úloh směřuje tuto práci do oblasti nadstandardní matematiky, tj. oblasti matematických soutěží, popřípadě rekreační matematiky.

První fází je průzkum a analýza současného stavu, tedy rozbor využívaných výukových materiálů na středních školách s tím, že se tato analýza zaměřuje na metodologii řešení důkazových planimetrických úloh a její didaktické aspekty. Přestože dokazování je *tvořením*, pro efektivní řešení důkazových úloh se využívá známých metod a postupů, které lze pro konkrétní úlohu modifikovat či kombinovat. Systematická metodologie řešení důkazových úloh by tak měla obsahovat „paletu“ základních metod, na nichž řešitel důkazové úlohy může vystavět postup řešení dané úlohy.

V návaznosti na provedenou analýzu je dalším krokem návrh metodologie, která by eliminovala nedostatky současného stavu a která by umožnila efektivnější přípravu žáků na řešení důkazových úloh uvedeného typu. Tato metodologie by také měla respektovat oblast, v níž se tyto úlohy vyskytují nejčastěji, tj. oblast nadstandardní matematiky.

Text této disertační práce je v návaznosti na výše uvedenou úvahu rozdělen do čtyř částí. V první části je provedena úvodní analýza současného stavu využívaných materiálů ve výuce syntetické planimetrie a v přípravě žáků na důkazové úlohy v této oblasti. Druhá část se zabývá didaktickými aspekty volby vhodné metodologie řešení úloh této problematiky. Ve třetí části jsou uvedena vybraná tvrzení z planimetrie, která nepatří mezi nejznámější, avšak mají potenciál stát se základem pro efektivní metody řešení důkazových úloh syntetické planimetrie. Čtvrtá, nejobsáhlejší část uvádí návrh systematického uspořádání metod řešení úloh této problematiky včetně řešených i neřešených úloh. Přílohou této práce je pak sumarizovaná tabulka výskytu důkazových úloh syntetické planimetrie v jednotlivých ročnících Matematické olympiády v České republice upravená s přihlédnutím k obsahu druhé části této práce.

1 Možnosti přípravy žáků na důkazové úlohy syntetické planimetrie řešitelné deduktivními metodami

S planimetrickými úlohami, jejichž řešením nebo součástí jejich řešení je důkaz vedený deduktivními metodami, se často setkávají žáci v různých matematických soutěžích. Tyto úlohy zde mají své místo, protože jde o úlohy náročné na kognitivní schopnosti řešitelů (úlohy směřují k nejvyššímu stupni Bloomovy taxonomie – tvoření), přičemž právě náročné úlohy umožňují identifikovat ty nejnadanější žáky. V ČR je možné brát jako etalon soutěž Matematická olympiáda, která se každoročně koná nepřetržitě od školního roku 1951/1952. Do této soutěže se zapojují žáci základních a středních škol rozdělení do kategorií podle ročníku, který ve škole navštěvují. Matematická olympiáda je soutěží postupovou, jsou organizována školní, okresní a krajská kola. Pouze v nejvyšší kategorii A je organizováno ústřední kolo. Kategorie A je určena pro žáky 3. a 4. ročníku středních škol. Vzhledem k náročnosti a komplexnosti úloh kategorie A jsou soutěžícími v této kategorii zpravidla žáci, kteří se matematické olympiády účastnili v předchozích ročnících (a tedy nižších kategoriích). Je zřejmé, že pro přípravu na účast ve vyšších kategoriích a kolech matematické olympiády je nutná dlouhodobá a systematická příprava. Ačkoliv se žáci mohou připravovat zcela samostatně, velmi často odpovědnost za přípravu žáků přebírá škola a vyučující matematiky. Tato část disertační práce se tak zaměřuje na výzkum efektivních možností, způsobů a forem přípravy žáků školami na uvedený typ úloh.

1.1 Výzkumný problém

Na problematiku přípravy žáků na důkazové syntetickoplanimetrické úlohy, které se objevují v Matematické olympiádě, je možné pohlížet z různých stran. Prvním hlediskem jsou organizační možnosti a formy přípravy. Jde zejména o přípravu v rámci standardních hodin, nadstandardní přípravu ve formě zájmových kroužků atp. nebo samostudium. V rámci přípravy v běžných vyučovacích hodinách mohou učitelé vybrané žáky stimulovat dobrovolnými úlohami či doplněním probíraných úloh o nestandardní prvky. V zájmových kroužcích/seminářích se jedná zpravidla o přímou přípravu na konkrétní matematickou soutěž. Samostudium pak umožňuje žákům se zabývat vybranými tématy dle svých zájmů.

Dalším hlediskem je dostupnost a kvalita literatury, kterou mohou žáci využívat v rámci své přípravy. Má-li být důkazová úloha uváděná v literatuře ukázkou metody řešení a také inspirací pro řešení obdobných úloh, je velmi vhodné opatřit tuto úlohu didakticko-metodickým komentářem (poznámkou), který pomůže žákovi zařadit si jednotlivé kroky důkazu do interního myšlenkového systému. Pokud žák využívá danou publikaci v rámci dlouhodobé přípravy, je nutné, aby tyto didakticko-metodické komentáře byly pak vhodně systematizovány.

Jelikož cílem studie je průzkum možností přípravy žáků na důkazové úlohy středoškolské syntetické planimetrie, a to zejména efektivních možnosti, zaměřuje se tento výzkum na školy, jejichž příprava je úspěšná. Vzhledem k organizačnímu charakteru Matematické olympiády lze považovat za úspěšné školy[1] ty, jejichž žáci se dlouhodobě umisťují na čelních příčkách výsledkových listin.

Základní vhled do problematiky tak může poskytnout zodpovězení následujících otázek:

1) Jaké jsou využívané možnosti přípravy žáků úspěšných škol na matematické soutěže?
2) Jaké jsou využívané materiály pro výuku syntetické planimetrie ve standardních hodinách na uvedených školách?
3) Jaké jsou využívané materiály v dalších aktivitách uvedených škol určených pro přípravu žáků na soutěžní úlohy syntetické planimetrie?
4) V jaké míře a formě jsou zastoupeny důkazové úlohy v materiálech užívaných uvedenými školami pro přípravu žáků na úlohy syntetické planimetrie v matematických soutěžích?

Poznámka 1. V rámci otázky 4 se bude výzkum zabývat také zmiňovaným didakticko-metodickým aspektem uváděných úloh.

1.2 Metodika

Na základě výše uvedených výzkumných otázek je další postup rozdělen do dvou fází. V první fázi se zjišťují odpovědi na otázky 1 až 3. Předpoklady pro úspěch první fáze jsou výběr úspěšných škol (výzkumný vzorek) a sestavení výzkumného nástroje pro zjišťování odpovědí na dané otázky. Následující druhá fáze se pak zaměřuje na rozbor výukových materiálů, které vyplynou z výsledků první fáze.

1.2.1 Výzkumný vzorek

Základem pro stanovení výzkumného vzorku úspěšných škol jsou výsledkové listiny ústředního kola Matematické olympiády v ČR kategorie A z let 2011 až 2020. Zvolená kategorie a kolo jsou vybrány na základě výše uvedeného charakteru soutěže a také na základě dostupnosti dat. Uvedený časový úsek byl zvolen tak, aby reflektoval období nástupu nových kurikulárních dokumentů v ČR v ročnících, které spadají do soutěžní kategorie A, tedy aby byly srovnatelné výchozí podmínky škol v možnostech přípravy žáků[2].

Za úspěšné školy je možno považovat ty, jejichž žáci se zúčastnili nadpoloviční většiny posuzovaných ústředních kol. Toto kritérium bylo zvoleno na úkor prvně uvažovaného průměrného počtu žáků školy v jednotlivých ústředních kolech, jelikož

[1] Termín *úspěšná škola* se v této práci vztahuje pouze k úspěšnosti školy v soutěži Matematická olympiáda v České republice.

[2] V období od roku 2009 nastupují nové kurikulární dokumenty, tzv. RVP. Tyto nové dokumenty vstupují v platnost vždy pro první ročník dané školy. V období 2009 až 2012 tak koexistovala výuka dle starých a nových kurikulárních dokumentů. Od roku 2012 je výuka na školách organizována výhradně dle RVP.

více vyjadřuje stabilitu přípravy žáků. Kritérium průměrného počtu žáků je také více náchylné na extrémní hodnoty, tedy jednorázové úspěchy velkého množství žáků školy, což je z hlediska dlouhodobé přípravy nepodstatné. Je nutné dále zdůraznit, že kritérium průměrného počtu žáků může silně znevýhodňovat malé školy. V jejich případě může např. i stabilní účast jednoho žáka v každém ústředním kole značit velmi kvalitní přípravu. Zvolené kritérium celkového počtu účastí žáků školy tyto nedostatky eliminuje.

1.2.2 Výzkumné nástroje a postupy

Při volbě výzkumného nástroje pro zjišťování odpovědí na výzkumné otázky 1 až 3 bylo nutné brát v potaz také současný stav školské byrokracie. Školy jsou v současnosti zavaleny všemožnými dotazníky a formuláři, a proto nebylo výhodné v této fázi volit formu dotazníku, jelikož by to snižovalo pravděpodobnost návratnosti. Po konzultaci se zástupci různých typů škol byla zvolena forma personalizovaného e-mailu zaslaného na adresu učitele, který má na dané škole v kompetenci přípravu žáků na matematické soutěže nebo zaštiťuje na škole matematické vzdělávání celkově. Obsahem e-mailu byly právě výzkumné otázky 1 až 3 konkretizované na danou školu. Z odpovědí na otázky 2 a 3 byl sestaven seznam publikací s četností jejich využití, přičemž tyto publikace byly dále analyzovány.

1.2.3 Analýza získaných dat

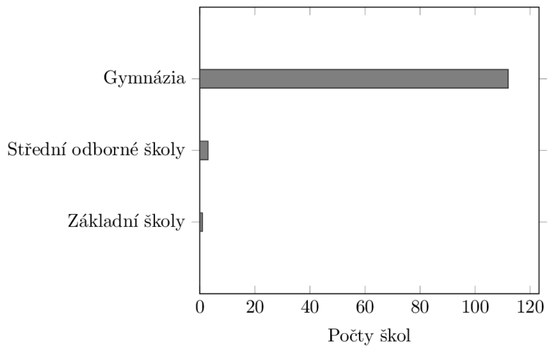
Získaná data byla zaznamenána ve formě tabulek a zpracována nástroji tabulkového procesoru. Pro záznam odpovědí na první otázku byla použita tabulka, v níž řádky představovaly odpovědi z jednotlivých škol a sloupce pak využívané možnosti přípravy žáků na dané škole. Kódování odpovědí bylo T (škola možnost přípravy využívá), F (škola možnost nevyužívá). Pro záznam odpovědí na otázky 2 až 3 byly využity tabulky, jejichž řádky opět odpovídaly odpovědím z jednotlivých škol a sloupce vyznačovaly jednotlivé publikace, které se objevovaly v odpovědích. Záznam jednotlivých odpovědí pro danou publikaci byl kódován T (škola publikaci využívá) a F (škola publikaci nepoužívá). Jelikož je možné se na data dívat také ze souhrnného hlediska, byla data za účelem vizualizace a interpretace shrnuta do jedné komplexní tabulky. Vzhledem k tomu, že získaná data jsou jednoduchá, byly pro následnou interpretaci zvoleny sloupcové a výsečové grafy a kontingenční tabulky.

Následné zpracování využívaných publikací zahrnovalo analýzu matematických vět a příkladů důkazových úloh, které obsahovaly deduktivní metody řešení. Pokud publikace obsahovala také části, které se netýkaly předmětu této studie (např. konstrukční a určovací úlohy), nebyly tyto části do analýzy zahrnuty. U vět se posuzovala přítomnost důkazu a také, zda důkaz obsahoval didakticko-metodický komentář. Příklady důkazových úloh byly rozlišeny na řešené a neřešené. U řešených se posuzovalo, zdali obsahují didakticko-metodický komentář, u neřešených pak, zdali obsahují didakticko-metodickou nápovědu.

Poznámka 2. Přestože to nebylo cílem této studie, je možné také na základě získaných dat statistiky analyzovat geografické rozmístění úspěšných škol v rámci ČR.

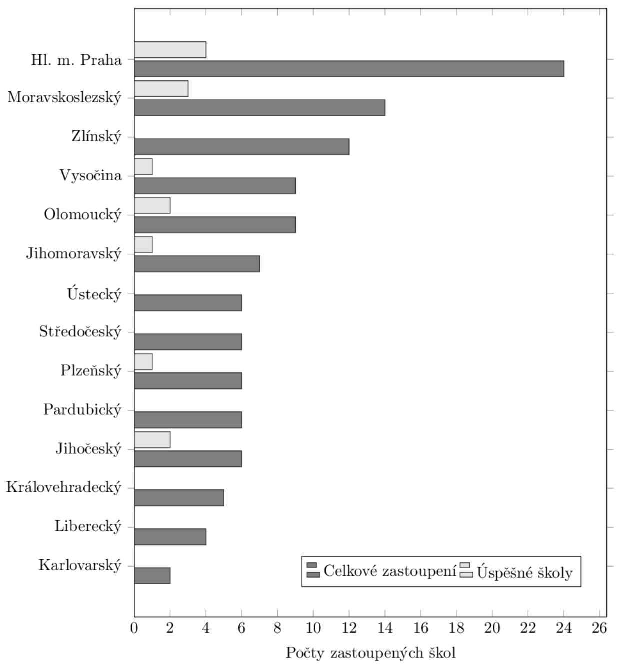
1.3 Výsledky výzkumu

Z celkového počtu 116 škol, jejichž žáci se alespoň jednou zúčastnili ústředního kola kategorie A v letech 2011 až 2020, bylo identifikováno 14 úspěšných škol. Z hlediska typu školy se v rámci úspěšných škol vyskytovala pouze gymnázia, zatímco v přehledu všech škol byla z 96,55 % zastoupena gymnázia, z 2,59 % střední odborné školy a z 0,86 % školy základní (viz obr. I).



obr. I: Zastoupení jednotlivých typů škol v ústředním kole MO v letech 2011 až 2020

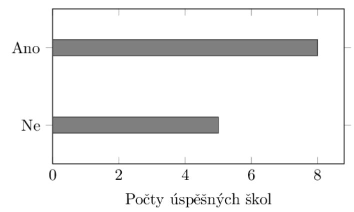
V rámci geografického rozmístění škol v rámci ČR bylo nejvíce zastoupeno Hlavní město Praha (24 škol) a nejméně byl zastoupen Karlovarský kraj (2 školy). Mezi úspěšnými školami bylo opět nejvíce zastoupeno Hlavní město Praha (4 školy). Celkový stav shrnuje obr. II.



obr. II: Zastoupení škol jednotlivých krajů ČR v ústředním kole MO v letech 2011 až 2020

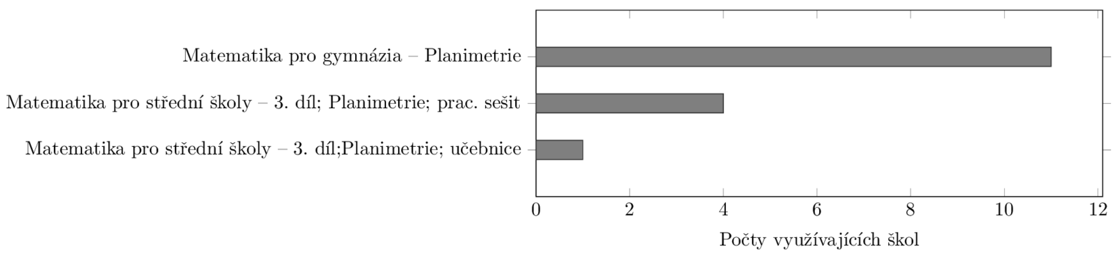
1.3.1 Získaná data z první fáze

Z odpovědí na zaslané otázky (návratnost činila 92,86 %) byly sestaveny tabulky a z nich vycházející grafy. Obr. III zobrazuje využití přípravy žáků v rámci nadstandardního kroužku/semináře (61,54 % škol tuto možnost využívá). Všechny škol dále potvrdily, že žáky stimulují také v rámci běžné výuky. Podporují a motivují je také k samostudiu.



obr. III: Kroužek/seminář MO na identifikovaných úspěšných školách

Odpovědi na druhou otázku jsou shrnuty v grafu (obr. IV), který zobrazuje četnosti využití jednotlivých publikací v rámci běžných hodin na daných školách. Zde je patrné, že většina škol (84,62 %) v běžných hodinách využívá učebnici „Matematika pro gymnázia – Planimetrie“ nakladatelství Prometheus. Její alternativu, pracovní



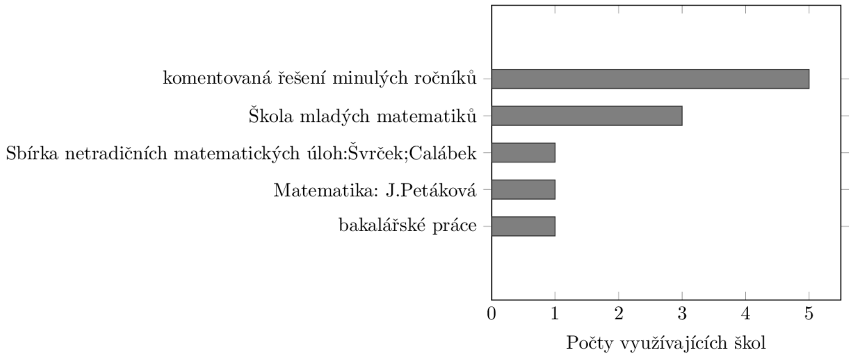
obr. IV: Zastoupení jednotlivých typů učebnice na identifikovaných úspěšných školách

sešit „Matematika pro střední školy – 3. díl, Planimetrie“, využívají školy často jako doplňující text. To je patrné z tabulky 1, ve které jsou uvedeny počty škol využívajících kombinace různých publikací. Učebnici náležící k uvedenému pracovnímu sešitu

Tabulka 1: Kombinace využití učebnic na identifikovaných úspěšných školách

	Celkem	*(MpG)*	*(MpSŠ–U)*	*(MpSŠ–PS)*
Matematika pro gymnázia – Planimetrie *(MpG)*	11			3
Matematika pro střední školy – 3. díl,Planimetrie; učebnice *(MpSŠ–U)*	1			1
Matematika pro střední školy – 3. díl, Planimetrie, prac. sešit *(MpSŠ–PS)*	4	3	1	

využívá pouze jediná škola. Další publikace školy v této otázce neuvedly. Obdobně jako v případě druhé otázky jsou shrnuty odpovědi na třetí otázku v grafu (obr. V). V něm jsou zobrazeny počty škol využívajících různé materiály v další přípravě žáků na úlohy syntetické planimetrie. Nejčastěji (38,46 % škol) se využívají komentovaná řešení minulých ročníků Matematické olympiády. Druhou používanou možností je seriálová publikace edice Škola mladých matematiků (vydávaná 1961 až 1988). Ostatní materiály, převážně ve formě sbírek úloh, byly využity minoritně.



obr. V: Zastoupení dalších materiálů na identifikovaných úspěšných školách

1.3.2 Získaná data z druhé fáze

Publikace využívané v rámci běžných hodin byly podrobeny analýze, jak bylo uvedeno výše. Přestože jsou důkazy v daných publikacích zastoupeny (jak ukazují tabulky 2, 3, 4), zkoumané materiály neobsahují systematické didakticko-metodické komentáře či poznámky k uváděným důkazům.

Tabulka 2: Počty řešených důkazových úloh a didakticko-metodických komentářů k nim

	(MpG)	*(MpSŠ–U)*	*(MpSŠ–PS)*
Důkazové úlohy řešené	4	3	0
Z toho opatřené didakticko-metodickým komentářem	0	0	0

Tabulka 3: Počty neřešených důkazových úloh a didakticko-metodických komentářů k nim

	(MpG)	*(MpSŠ–U)*	*(MpSŠ–PS)*
Důkazové úlohy neřešené	35	0	12
Z toho opatřené didakticko-metodickým komentářem	0	0	0

Tabulka 4: Počty matematických vět, jejich důkazů a didakticko-metodických komentářů k nim

	(MpG)	*(MpSŠ–U)*	*(MpSŠ–PS)*
Věty	23	22	0
Z toho doplněné důkazem	20	4	0
Z toho opatřené didakticko-metodickým komentářem	0	0	0

Pro publikace edice „Škola mladých matematiků“ a komentovaná řešení jednotlivých úloh Matematické olympiády, které školy využívají v nadstandardní přípravě žáků, nebylo možné vzhledem k jejich charakteru vytvořit obdobné tabulky statistických dat. Z rozboru těchto materiálů vyplývá, že částečně obsahují didakticko-metodický komentář, který však není systematicky veden v celém rozsahu.

Uvedené sbírky úloh obsahovaly pouze příklady, nikoliv věty a jejich důkazy. Jejich rozbor byl proto shrnut do jediné tabulky 5. Z ní je patrné, že sbírky „Sbírka netradičních matematických úloh: J. Švrček, P. Calábek“, „Matematika: J. Petáková“ neobsahovaly žádné didakticko-metodické komentáře a že sbírky úloh ve formě bakalářských prací [28], [13], [19], [15] tyto komentáře obsahují (byť pouze ve formě klasifikace použitých prostředků). Další sbírky úloh byly v odpovědích ze škol označené jako „různé“, nebylo je tedy možné analyzovat.

Tabulka 5: Počty řešených důkazových úloh a didakticko-metodických komentářů k nim

	Důkazové úlohy řešené	Důkazové úlohy neřešené	Z toho opatřené didakticko-metodickým komentářem
Matematika: J.Petáková	0	22	0
Sbírka netradičních matematických úloh: J. Švrček, P. Calábek	0	29	0
Bc. práce (Pospíšilová) [28]	27	0	4
Bc. práce (Kodetová) [13]	12	0	5
Bc. práce (Múčková) [19]	6	4	3
Bc. práce (Mačková) [15]	4	0	3

1.4 Shrnutí

Ze základního přehledu je patrné, že školy, jejichž žáci se účastní Matematické olympiády, nejsou koncentrovány pouze v hlavním městě nebo určitém regionu ČR. Matematická olympiády tedy nemá diskriminační charakter z hlediska umístění školy. Dále se potvrzuje všeobecně známý fakt, že úspěšné školy se žákům nadstandardně věnují (forma podpory je obdobná na všech vybraných školách).

Přestože je v současné době na trhu množství učebnic matematiky pro střední školy a dalších publikací, úspěšné školy jsou v tomto ohledu poněkud konzervativní. V případě hlavní učebnice pro běžnou výuku preferují učebnici „Matematika pro gymnázia – Planimetrie“, která byla poprvé vydána již v roce 1993, a mezi materiály pro další přípravu žáků se objevuje seriálová publikace edice „Škola mladých matematiků“ z druhé poloviny 20. století.

Z rozborů jednotlivých učebnic vyplynulo, že ačkoliv se věnují důkazovým úlohám syntetické planimetrie řešitelným deduktivními metodami v nezanedbatelné míře, zásadně v nich chybí didakticko-metodické vedení. Uvedené důkazy a důkazové úlohy tak slouží především k zařazení a propojení učiva do celku. Jejich podpůrná role v přípravě žáků na soutěžní důkazové úlohy Matematické olympiády tedy nemůže být plně rozvinuta. Analýza dalších podpůrných textů prokázala, že ani v nich není didakticko-metodický přístup uspokojivý.

Tento výzkum odhalil slabé místo v možnostech přípravy žáků na důkazové úlohy syntetické planimetrie, konkrétně v přípravě na Matematickou olympiádu. Materiály, které jsou zde využívány, nemohou žáky vést k systematické a metodické přípravě na uvedený druh úloh, jak tomu je v jiných oblastech (např. [9, 10] v oborech algebraických rovnic, nerovností, teorie čísel a kombinatoriky).

2 Didaktické aspekty volby vhodné metodologie

V literatuře věnované metodologii řešení planimetrických důkazových úloh se lze setkat s členěním metod podle použitých prostředků [6, 38, 39, 40], například metody opírající se o využití stejnolehlosti, metody využívající rovnoběžných přímek, metody vyhledávání shodných úhlů atp. Z didaktického hlediska se však toto rozdělení může jevit jako nevhodné. Je to dáno tím že k tomu, aby takto uspořádané rozdělení bylo žáku nápomocné při řešení neznámé úlohy, by žák musel v prvním kroku volit prostředek, jímž by chtěl úlohu řešit. Poté by mu toto rozdělení poskytlo přehled možných postupů využívajících zvolený prostředek. Je ale zřejmé, že v běžné praxi žák-řešitel takto nepostupuje. Úvahy žáků vycházejí většinou z analogie dané povahou řešené úlohy [25]. Pokud by žák měl k dispozici metody rozdělené podle úkolu obsaženém v úloze, tedy cíle, kterého má žák v úloze dosáhnout, dostalo by se mu přehledu více či méně podobných úloh a metod, jimiž tyto úlohy byly řešeny. To by mu nejen mohlo usnadnit orientaci v dané problematice, ale také na základě právě analogie by mohl volit vhodný postup a prostředek či vytvořit zcela novou metodu.

Tato úvaha vede k nutnosti provést nejprve základní rozčlenění úloh podle jejich povahy neboli cíle či úkolu. Na toto rozdělení pak navazuje systematická tvorba didakticky vhodné metodologie řešení důkazových úloh syntetické planimetrie.

2.1 Kategorizace důkazových úloh syntetické planimetrie

Základní rozdělení důkazových úloh syntetické planimetrie se opírá o kategorizaci provedenou J. Švrčkem v [33]. Uvedená kategorizace rozděluje úlohy do sedmi oblastí (typů) podle stanoveného úkolu na úlohy, v nichž je cílem dokázat

a) shodnost úseček,

b) shodnost úhlů,

c) rovnoběžnost přímek,

d) kolmost přímek,

e) kolinearitu bodů[3],

f) konkurentnost přímek[4],

g) koncykličnost bodů[5].

[3]Body se nazývají kolineární, leží-li na téže přímce.

[4]Přímky se nazývají konkurentení, procházejí-li týmž bodem.

[5]Body se nazývají koncyklické, leží-li na téže kružnici.

Toto rozdělení ale nepokrývá všechny možnosti cílů důkazových úloh. Nejen že výše uvedené kategorie lze kombinovat, ale také je možné uvést další typy úloh, v jejichž řešení je nutno dokázat například

h) podobnost trojúhelníků,

i) konkurentnost kružnic[6],

j) rovnost součtů délek úseček.

Avšak úlohy kategorií h) a i) lze často s úspěchem převést na úlohy spadající do některé ze základních kategorií a využívat tak metody pro tuto kategorii určené. Například úlohy o konkurentnosti kružnic lze převést na úlohy o koncykličnost vhodných čtveřic bodů (např. 50. MO, A–P–3) a úlohy o podobnosti trojúhelníků jsou často řešeny využitím důkazu shodnosti úhlů (viz příklad 2.14). Dále řešení úloh typu j) se v literatuře opírá o výpočetní metody (viz např. 54. MO, A–P–5).

Vzhledem k uvedené specifičnosti úloh typu h) až j) a zaměření této práce bude dále uvedená metodologie vycházet pouze ze sedmi základních kategorií úloh.

2.2 Zásady tvorby didakticky vhodné metodologie

Vzhledem k tomu, že práce je cílena na české žáky a jejich učitele, je potřeba brát v potaz specifika českého prostředí. Jak již bylo uvedeno dříve, etalonem matematických soutěží v České republice je Matematická olympiáda (MO), proto by metodologie měla z úloh MO vycházet. Ve výkladu metod a v příkladech by tak měly být využity formulace a symbolika úloh MO. Vzhledem k průběžnému zastoupení úloh[7] všech uvedených základních kategorií (zastoupení úloh v jednotlivých kategoriích posledních deseti ročníků MO ukazuje tabulka 6) je vhodné zařazovat řešené úlohy MO jako ukázkové úlohy využívající popisované metody.

Dále by členění metod mělo akceptovat výše uvedené rozdělení úloh na základě stanoveného úkolu v dané úloze. Tím bude zajištěna možnost využití metodologie v analogických úvahách žáků a také tím bude umožněno zvýšení orientace žáků v dané problematice, což pro žáky-soutěžící znamená zvýšení šancí na úspěch.

Popis každé metody by se měl také zabývat možnostmi formulace zadání úlohy spadající do dané kategorie. Jak již bylo uvedeno výše, podstatou volby vhodné metody je zařazení úlohy do správné kategorie. Klíčovou roli v tomto zařazení hraje pochopení zadání úlohy, což se zakládá na pochopení použitých formulací, popřípadě se lze v některých případech dívat na formulaci jako na jistou formu nápovědy. Například formulace „…dokažte, že bod C leží na přímce AB.“ předjímá, že čtenář bude řešit úlohu na základě známých vlastností přímky AB, z nichž vyplyne, že bod C na dané přímce leží. Naopak formulace „…dokažte, že body A, B, C leží na téže přímce“ žádnou takovou přidanou informaci neposkytuje.

[6]Kružnice se nazývají konkurentní, procházejí-li týmž bodem.

[7]Jelikož Matematická olympiáda je žákovskou soutěží, je pochopitelné, že příklady, které se v ní vyskytují, respektují obsahovou náplň výuky na školách. Vzhledem ke změnám v českém školství v průběhu let konání Matematické olympiády se také měnilo zastoupení důkazových úloh syntetické planimetrie. Celkový přehled zastoupení úloh této problematiky v jednotlivých ročnících MO je k dispozici jako Příloha A této práce.

Tabulka 6: Četnost důkazových úloh syntetické planimetrie v posledních 10 ročnících MO

	Ročník									
	60.	61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.
Shodnost úseček	3	0	0	2	0	3	2	2	2	1
Shodnost úhlů	1	1	4	2	0	1	1	1	3	1
Rovnoběžnost přímek	1	3	3	0	0	1	0	1	0	0
Kolmost přímek	4	1	0	2	0	2	0	2	3	4
Kolinearita bodů	0	0	0	0	2	0	1	1	0	1
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Koncykličnost bodů	2	1	2	1	2	0	2	0	1	2
Celkem	11	6	9	7	4	8	7	8	10	9

V neposlední řadě je nutné zdůraznit postup využívaný ve výkladu obecně. Jedná se nejprve o obecné shrnutí základních principů, na kterých je založena popisovaná metoda, což umožní zorientovat se lépe v dané problematice. Následně by popisované postupy měly být aplikovány na typové úlohy, v nichž jsou uváděné postupy konkretizovány. Pro upevnění poznatků a pro případné zájemce o problematiku je pak vhodné na závěr popisu každé metody přiložit několik neřešených úloh.

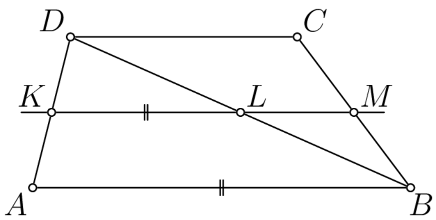
3 Vybraná planimetrická tvrzení

Níže uvedená planimetrická tvrzení byla vybrána z oblasti základních tvrzení středoškolské planimetrie a také z oblasti nadstandardních planimetrických poznatků s ohledem jejich efektivní využitelnost v důkazových úlohách syntetické planimetrie. Vzhledem k zaměření této práce však vybraná nadstandardní tvrzení byla zvolena tak, že jsou uchopitelná i na úrovni standardní středoškolské matematiky. Ke všem větám jsou uvedeny důkazy využívající metody syntetické planimetrie s tím, že důkazy některých tvrzení je možno případně pojmout také jako ukázkové úlohy dále uvedených metod.

3.1 Vybrané věty z geometrie trojúhelníků a čtyřúhelníků

Věta 1 (střední příčka lichoběžníku)

Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB, CD. Označme K střed jeho ramene AD. Prochází-li přímka rovnoběžná se základnami bodem K, prochází také středem druhého ramene BC. Spojnice středů ramen lichoběžníku se pak nazývá střední příčka lichoběžníku.



obr. VI

Důkaz. Označme L, M průsečíky přímky rovnoběžné s AB (a také CD) procházející bodem K po řadě s úsečkami BD, BC. Jelikož KL je rovnoběžná s AB a prochází středem úsečky AD, jedná se o střední příčku trojúhelníku ABD. Bod L je tedy středem úsečky BD. Analogicky LM je rovnoběžná s CD a prochází středem úsečky BD, je to tedy střední příčka trojúhelníku CDB a M je středem strany BC. Tím je důkaz uzavřen.

Poznámka 3. Důkaz věty 1 je také možné provést doplněním lichoběžníku $ABCD$ na rovnoběžník.

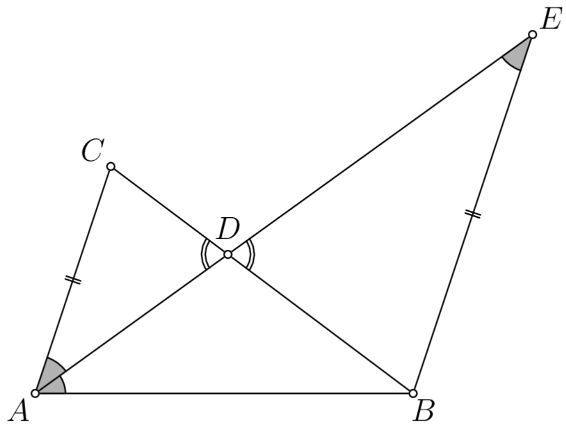
Poznámka 4. Z věty 1 plyne, že pro střední příčku KM lichoběžníku $ABCD$ platí

$$|KM| = |KL| + |LM| = \frac{|AB|}{2} + \frac{|CD|}{2} = \frac{|AB| + |CD|}{2}.$$

Věta 2 (věta o ose úhlu)

Nechť D je vnitřním bodem strany BC trojúhelníku ABC. Přímka AD je osou vnitřního úhlu při vrcholu A daného trojúhelníku, právě když platí

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



obr. VII

Důkaz.

(i) Předpokládejme, že AD je osou vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC. Na polopřímce AD uvažujme bod E takový, že $BE \parallel AC$ (viz obr. VII). Z vlastností úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek plyne

$$|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DEB|.$$

Jelikož AD je osou úhlu BAC, platí $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAC|$, tedy

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DEB|.$$

Trojúhelník ABE je tak rovnoramenný se rameny AB, BE. Proto z podobnosti trojúhelníků ADC a EDB (jsou podobné podle věty *uu*) plyne

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

(ii) Nyní naopak uvažujme vnitřní bod D úsečky BC takový, že

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \tag{1}$$

Obdobně jako v případě (i) vezměme na polopřímce AD bod E takový, že $BE \parallel AC$. Úhly DAC a DEB jsou opět střídavé a tedy shodné, trojúhelníky

ADC, EBD jsou tak podobné (uu) a platí

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|AC|}. \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) získáme $|BE| = |AB|$, z čehož plyne, že trojúhelník ABE je rovnoramenný a platí

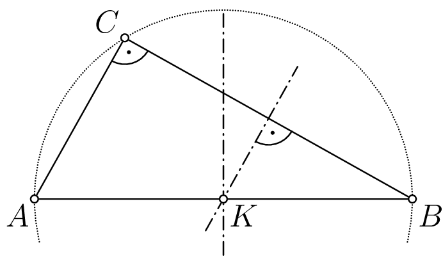
$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle DAC|.$$

Přímka AD je tak osou úhlu BAC, čímž je důkaz uzavřen.

3.2 Vybrané věty z geometrie kružnic

Věta 3a

Střed přepony pravoúhlého trojúhelníku je středem kružnice jemu opsané.



obr. VIII

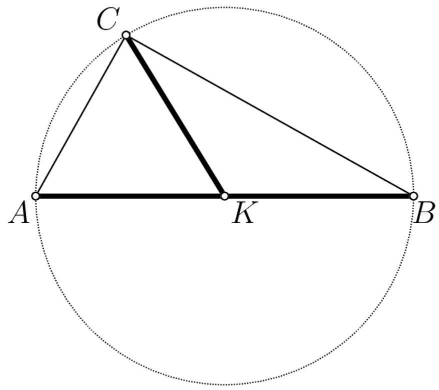
Důkaz. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a střed K jeho přepony AB. Sestrojme osu odvěsny BC daného trojúhelníku. Jelikož tato osa prochází středem strany BC a je rovnoběžná se stranou CA, leží na ní střední příčka trojúhelníku ABC, neboli prochází středem K strany AB. Bod K je však také bodem osy přepony AB a tedy průsečíkem dvou os stran trojúhelníku ABC. Odtud plyne, že bod K je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Poznámka 5. Z uvedené věty také plyne, že pro střed K přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC platí $|AK| = |BK| = |CK|$.

Věta 3b

Nechť K je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Je-li $|AK| = |BK| = |CK|$, je trojúhelník ABC pravoúhlý.

Důkaz. Je-li $|AK| = |BK| = |CK|$, bod K je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Z uvedené rovnosti ovšem také plyne, že bod K je středem úsečky AB. Úsečka AB je tak průměrem této kružnice, což značí, že se jedná o Thaletovu kružnici nad

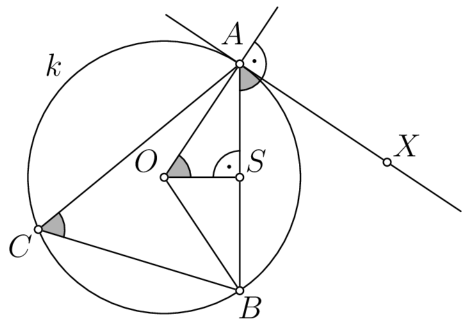


obr. IX

průměrem AB. Vzhledem k tomu, že bod C je bodem Thaletovy kružnice, je úhel ACB pravý. Tím je důkaz uzavřen.

Věta 4

Obvodový úhel a úsekový úhel příslušné k témuž oblouku kružnice jsou shodné.



obr. X

Důkaz. Uvažujme obvodový úhel BCA a středový úhel BOA příslušné k témuž oblouku kružnice k. Označme S střed tětivy AB a X bod tečny ke kružnici k vedené bodem A (viz obr. X). Jelikož trojúhelník ABO je rovnoramenný, velikost úhlu SOA je polovinou velikosti úhlu BOA. Ze známé věty o obvodových a středových úhlech příslušejících témuž oblouku kružnice plyne, že

$$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle SOA|.$$

Vzhledem k tomu, že úhly ASO a OAX jsou pravé, platí

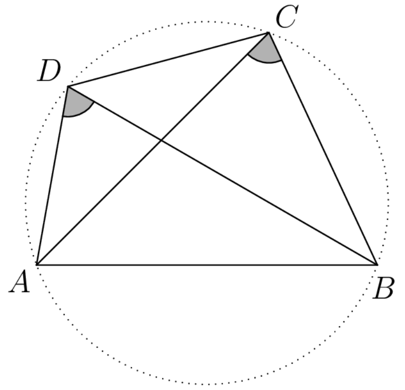
$$|\sphericalangle SAX| = 90° - |\sphericalangle OAS| = 90° - (90° - |\sphericalangle SOA|) = |\sphericalangle SOA| = |\sphericalangle BCA|,$$

čímž je důkaz dokončen.

Věta 5

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|.$$

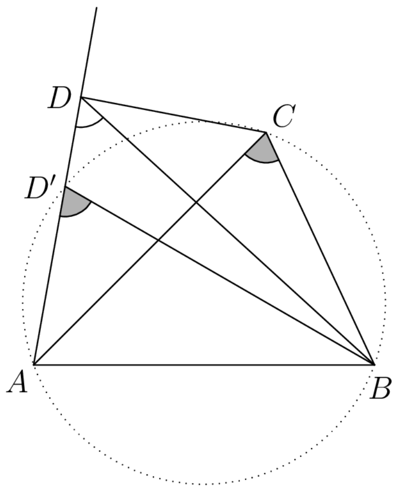


obr. XI

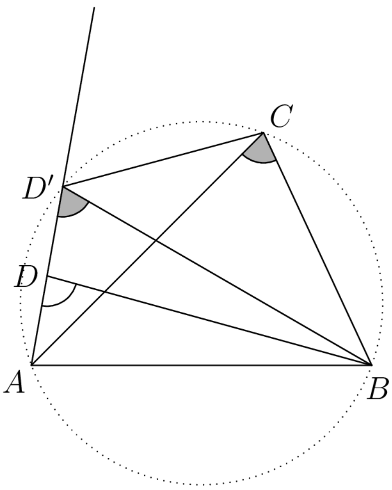
Důkaz.

(i) Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a O je střed kružnice k jemu opsané. Z vlastností obvodových úhlů příslušných oblouku AB kružnice k, který neobsahuje body C, D (obr. XI), bezprostředně plyne, že

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|.$$



obr. XIIa



obr. XIIb

(ii) Naopak uvažujme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž platí

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|. \tag{3}$$

Označme D' průsečík polopřímky AD s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC (obr. XIIa, XIIb). Předpokládejme, že body D a D' jsou různé (A, B, C, D neleží na téže kružnici). V situaci, kdy bod D' leží na úsečce AD (obr. XIIa), platí nerovnost

$$|\sphericalangle AD'B| < |\sphericalangle ADB|. \tag{4}$$

V situaci, kdy se bod D' nachází za bodem D na polopřímce AD (obr. XIIb), platí nerovnost

$$|\sphericalangle AD'B| > |\sphericalangle ADB|. \tag{5}$$

Vzhledem k tomu, že body A, B, C, D' jsou koncyklické, vyplývá z části (i) důkazu této věty

$$|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle ACB|. \tag{6}$$

Ze vztahů (3) a (6) plyne

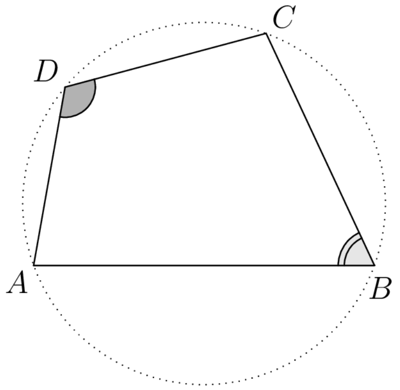
$$|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle ADB|,$$

což je ovšem ve sporu s nerovnostmi (4) a (5). Uvedený předpoklad tedy neplatí a bod D musí být totožný s bodem D'. Tím je dokázáno, že body A, B, C, D leží na téže kružnici.

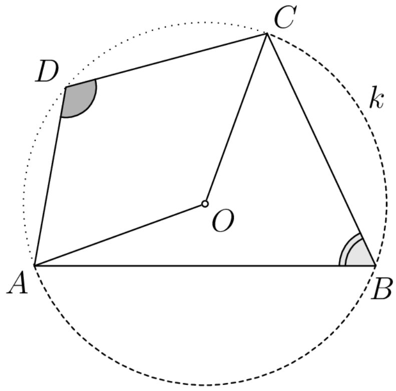
Věta 6a (kriterium tětivového čtyřúhelníku)

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = 180°.$$



obr. XIIIa



obr. XIIIb

Důkaz.

(i) Předpokládejme, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a O je střed kružnice k jemu opsané. Vzhledem k tomu, že součet velikostí středových úhlů příslušných oběma obloukům AC kružnice k je roven 360° (jeden oblouk obsahuje bod

B, druhý obsahuje bod D, viz obr. XIIIb), platí podle známého vztahu mezi obvodovými a středovými úhly

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Analogicky lze dokázat vztah pro úhly BAD a DCB.

(ii) Naopak nechť v libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = 180^\circ. \tag{7}$$

Z vlastností součtu vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku bezprostředně plyne

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ.$$

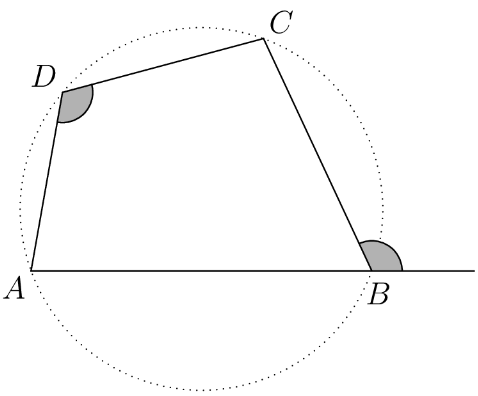
Obdobně, jako v důkazu věty 5, označme D' průsečík polopřímky AD s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Další kroky důkazu není nutné uvádět, jelikož se postupuje analogicky jako v části (ii) věty 5, tj. rozborem dvojí možné polohy bodu D vzhledem ke straně AD'.

Věta 6b

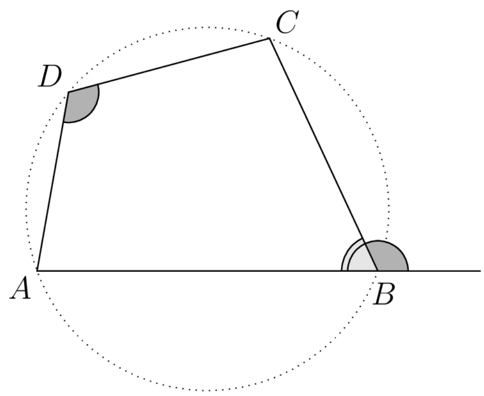
Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když vnitřní úhel při kterémkoliv jeho vrcholu je shodný s vedlejším úhlem u vrcholu protějšího (obr. XIVa).

Důkaz.

Vzhledem ke vzájemnému vztahu velikostí úhlu vnitřního a úhlu vedlejšího při libovolném vrcholu konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (viz obr. XIVb) lze tuto větu považovat za jistou variantu věty 6a.



obr. XIVa

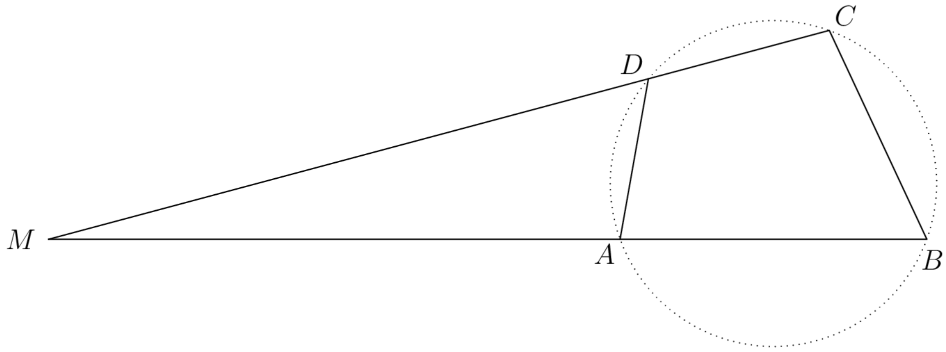


obr. XIVb

Věta 7a

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž se přímky AB a CD protínají v bodě M. Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|.$$



obr. XV

Důkaz.

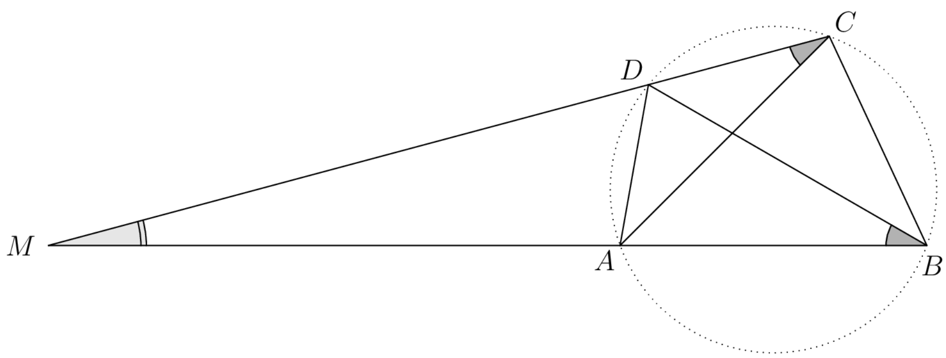
Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a M je průsečík přímek AB a CD. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod M je společným bodem polopřímek BA a CD (obr. XV). Situaci, kdy bod M leží na polopřímkách AB a DC, lze řešit analogicky. Nechť dále platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|,$$

neboli

$$\frac{|MA|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MB|}. \tag{8}$$

Vzhledem ke shodnosti úhlů DMB a CMA (obr. XVI) je rovnost (8) ekvivalentní



obr. XVI

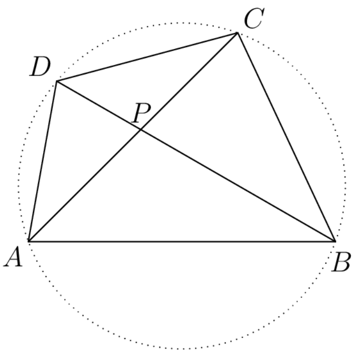
s tvrzením, že trojúhelníky MAC a MDB jsou podobné. Ze shodnosti úhlů DMB a CMA plyne, že podle věty *uu* jsou trojúhelníky MAC a MDB podobné, právě

když platí
$$|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle DBA|. \tag{9}$$
Rovnost (9) je však podle věty 5 ekvivalentní s tvrzením, že body A, B, C, D leží na téže kružnici.

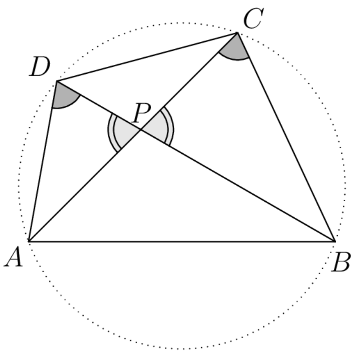
Všechny popisované kroky jsou logickými ekvivalencemi, uvedený postup tak dokazuje obě logické implikace věty 7a.

Věta 7b

Nechť P je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí
$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$



obr. XVIIa



obr. XVIIb

Důkaz.

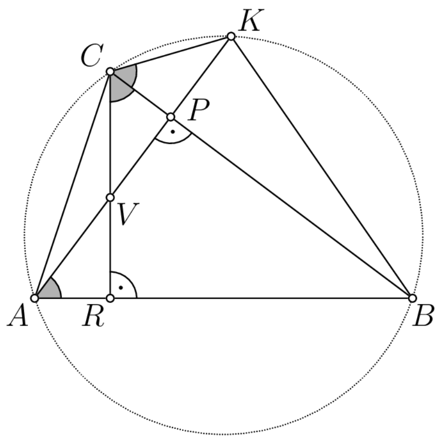
Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník a P je průsečík jeho úhlopříček (obr. XVIIa) a dále nechť platí
$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$
neboli
$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}. \tag{10}$$
Vzhledem ke shodnosti úhlů DPA a BPC (vrcholové úhly), viz obr. XVIIb, je rovnost (10) ekvivalentní s tvrzením, že trojúhelníky APD a BPC jsou podobné. Ze shodnosti úhlů DPA a BPC plyne, že podle věty *uu* jsou trojúhelníky APD, BPC podobné, právě když
$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|. \tag{11}$$
Rovnost (11) je však podle věty 5 ekvivalentní s tvrzením, že body A, B, C, D leží na téže kružnici.

Všechny popisované kroky jsou logickými ekvivalencemi, uvedený postup tak dokazuje obě logické implikace věty 7b.

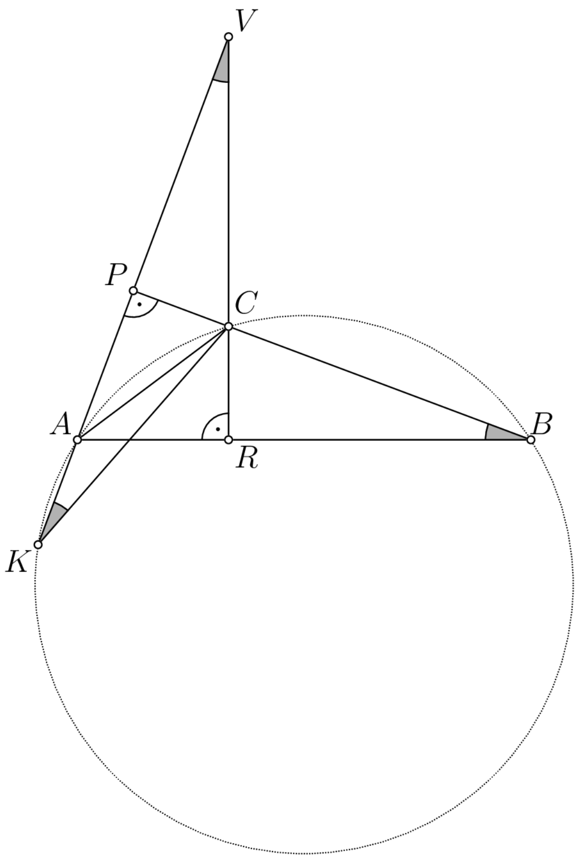
3.3 Vybrané věty z oblasti geometrických zobrazení

Věta 8

Body K, L, M souměrně sdružené s ortocentrem V trojúhelníku ABC v osové souměrnosti po řadě podle stran BC, CA, AB leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.



obr. XVIIIa



obr. XVIIIb

Důkaz. Při provádění důkazu je nutné rozlišit, zda se jedná o trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý. Pro pravoúhlý trojúhelník je tvrzení triviální (ortocentrum splývá s vrcholem trojúhelníku), proto se následující důkaz zaměří na případ ostroúhlého a tupoúhlého trojúhelníku.

(i) Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, V průsečík jeho výšek (ortocentrum) a K bod souměrně sdružený s bodem V v osové souměrnosti podle osy BC. Označme P, R po řadě paty výšek z vrcholů A, C (viz obr. XVIIIa). Ze sdruženosti bodů K, V plyne

$$|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle PCK| = |\sphericalangle VCP| = |\sphericalangle RCB|.$$

Jelikož trojúhelníky RCB a PAB jsou podobné podle věty *uu*, platí

$$|\sphericalangle RCB| = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BAK|,$$

tedy

$$|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BAK|.$$

Podle věty 5 tak body A, B, C, K leží na téže kružnici. Analogicky se postupuje pro body L a M.

(ii) Nyní bez újmy na obecnosti uvažujme tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C. Označme V průsečík ortocentrum trojúhelníku ABC, K bod souměrně sdružený s bodem V v osové souměrnosti podle osy BC a body$P$, R po řadě paty výšek z vrcholů A, C (viz obr. XVIIIb). Ze sdruženosti bodů K, V plyne

$$|\sphericalangle CKA| = |\sphericalangle CKV| = |\sphericalangle KVC| = |\sphericalangle AVR|.$$

Jelikož trojúhelníky ARV a APB jsou podobné podle věty *uu*, platí

$$|\sphericalangle AVR| = |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle CBA|,$$

tedy

$$|\sphericalangle CKA| = |\sphericalangle CBA|.$$

Podle věty 5 tak body A, B, C, K leží na téže kružnici. Analogicky se postupuje pro body L a M. Tím je celý důkaz uzavřen.

Věta 9

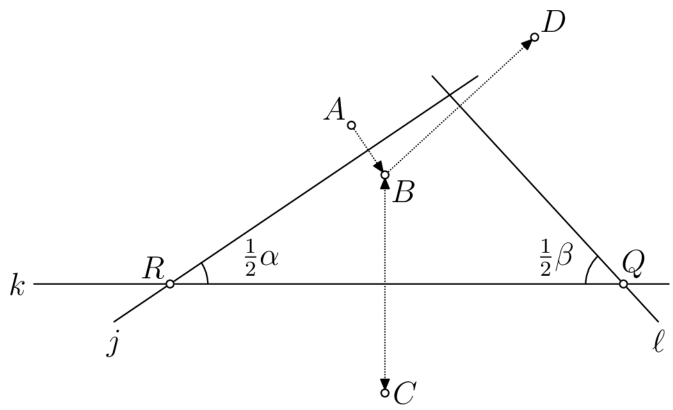
Složení dvou netriviálních otočení[8] podle různých středů je otočení nebo posunutí.

Důkaz. Nechť je ρ_1 otočení o středu R o úhel α a ρ_2 otočení o středu Q o úhel β. Přímku RQ označme k. Každé lze otočení rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy se protínají ve středu otáčení. Jednu osu souměrnosti je možno volit a druhá s ní svírá úhel rovný polovině úhlu otočení. Rozložme proto otočení ρ_1 na osové souměrnosti o_1, o_2 po řadě s osami j, k a otočení ρ_2 na osové souměrnosti o_3, o_4 po řadě s osami k, ℓ (viz obr. XIX). Je zřejmé, že osové souměrnosti o_2 a o_3 jsou vzájemně inverzí a jejich složením vzniká identita.

Pro libovolný bod A pak platí

$$\begin{aligned} \rho_1 = o_2 \circ o_1 &: A \to B \to C, \\ \rho_2 = o_4 \circ o_3 &: C \to B \to D, \\ \rho_2 \circ \rho_1 = o_4 \circ (o_3 \circ o_2) \circ o_1 &: A \to (B \to C \to B) \to D, \\ \rho_2 \circ \rho_1 = o_4 \circ i \circ o_1 &: A \to B \to D, \\ \rho_2 \circ \rho_1 = o_4 \circ o_1 &: A \to B \to D. \end{aligned}$$

[8]Netriviální otočení je otočení o úhel $\alpha \neq 0$. Je-li $\alpha = 0$, jedná se o identitu (triviální otočení).



obr. XIX

Složené zobrazení $\rho_2 \circ \rho_1$ je tvořeno dvěma osovými souměrnostmi, může tedy být posunutím nebo otočením. Výsledné zobrazení by bylo posunutím v tom případě, pokud by přímky j a ℓ byly rovnoběžné, tj. $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 180°$ neboli $\alpha + \beta = 360°$.

V ostatních případech se jedná o otočení, jeho střed je průsečík přímek j, ℓ a pro jehož úhel otočení γ platí

$$\frac{1}{2}\gamma = 180° - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,$$

neboli

$$\gamma = 360° - \alpha - \beta.$$

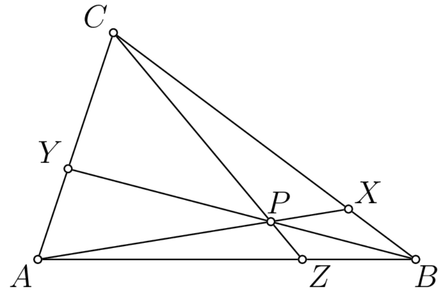
3.4 Cèvova a Menelaova věta

Následující věty jsou významné (a pozoruhodné) tím, že poukazují na ekvivalenci jisté polohové vlastnosti a metrické identity v trojúhelníku.

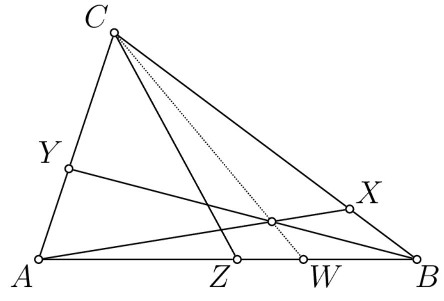
Věta 10 (Cèvova)

Nechť X, Y, Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Úsečky AX, BY, CZ procházejí jedním bodem, právě když platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$



obr. XXa



obr. XXb

Důkaz.

(i) Předpokládejme, že úsečky AX, BY, CZ protínají ve společném bodě P (obr. XXa). Jelikož trojúhelníky AZP a ZBP mají shodnou výšku z vrcholu P, platí pro jejich obsahy
$$\frac{S_{\Delta AZP}}{S_{\Delta ZBP}} = \frac{|AZ|}{|BZ|}.$$
Analogicky pro obsahy trojúhelníků AZC a ZBC
$$\frac{S_{\Delta AZC}}{S_{\Delta ZBC}} = \frac{|AZ|}{|BZ|}.$$
Platí tak
$$\frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{S_{\Delta AZC}}{S_{\Delta ZBC}} = \frac{S_{\Delta AZC} - S_{\Delta AZP}}{S_{\Delta ZBC} - S_{\Delta ZBP}} = \frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta PBC}}. \tag{12}$$
Obdobně lze ukázat, že
$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta APC}}, \tag{13}$$
$$\frac{|CY|}{|AY|} = \frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABP}}. \tag{14}$$
Vynásobením rovností (12), (13), (14) dostáváme
$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = \frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta PBC}} \cdot \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta APC}} \cdot \frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABP}} = 1,$$
což jsme chtěli dokázat.

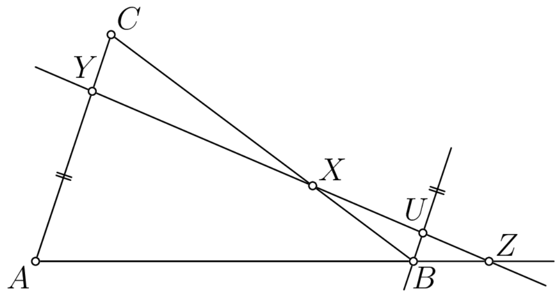
(ii) Naopak nechť X, Y, Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB a platí
$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1. \tag{15}$$
Předpokládejme nyní, že úsečky AX, BY, CZ nemají společný průsečík, a uvažujme vnitřní bod W strany BC různý od X takový, že úsečky AW, BY, CZ se protínají v jednom bodě (obr. XXb). Vzhledem k části (i) tohoto důkazu platí
$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BW|}{|CW|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$
Porovnáme-li tuto rovnost s (15), získáme
$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BW|}{|CW|},$$
Body X a W jsou tak totožné, což je spor s uvedeným předpokladem. Tím jsme dokázali, že úsečky AX, BY, CZ se protínají v jednom bodě.

Věta 11 (Menelaova)

Nechť X, Y, Z jsou po řadě body (prodloužení) stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Body X, Y, Z leží v přímce, právě když platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Důkaz. Je zřejmé, že buď právě dva z bodů X, Y, Z jsou vnitřními body stran daného trojúhelníku, nebo všechny tři body leží vně trojúhelníku. Následující důkaz je prováděn pouze pro první uvedenou situaci, pro druhou situaci jsou úvahy obdobné.



obr. XXI

(i) Bez újmy na obecnosti nechť X, Y jsou po řadě vnitřními body stran BC, CA a bod Z leží na polopřímce opačné k polopřímce BA, přičemž body X, Y, Z leží v přímce. Uvažujme bod U na této přímce takový, že $BU \parallel AC$ (obr. XXI). Trojúhelníky AZY a BZU jsou tak podobné (uu) a platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{|AY|}{|BU|}. \tag{16}$$

Z podobnosti trojúhelníků XCY a XBU (uu) plyne

$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|BU|}{|CY|}. \tag{17}$$

Vynásobením rovností (16), (17) získáme

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} = \frac{|AY|}{|BU|} \cdot \frac{|BU|}{|CY|},$$

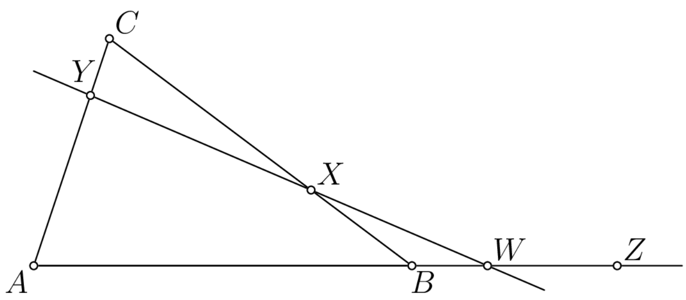
neboli

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1,$$

což jsme měli dokázat.

(ii) Nyní nechť X, Y jsou po řadě vnitřními body stran BC, CA, bod Z leží na polopřímce opačné k polopřímce BA a platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1. \tag{18}$$



obr. XXII

Předpokládejme, že body X, Y, Z neleží na téže přímce. Uvažujme tak průsečík W přímek AB a XY různý od bodu Z (viz obr. XXII). Na základě části (i) víme, že pro body X, Y, W platí

$$\frac{|AW|}{|BW|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1,$$

z čehož ovšem při srovnání s (18) plyne

$$\frac{|AW|}{|BZ|} = \frac{|AZ|}{|BZ|}.$$

Jelikož není možné, aby bod W byl vnitřním bodem úsečky AB, je nutně totožný s bodem Z. To je spor s uvedeným předpokladem, tedy body X, Y, Z jsou kolineární. Tím je důkaz dokončen.

Přestože Cèvova ani Menelaova věta *nejsou* běžnou součástí středoškolských učebnic planimetrie, jsou silnými a efektivními prostředky k řešení důkazových úloh.

4 Metody řešení

Vzhledem k zaměření této práce využívají dále popisované metody řešení převážně běžných středoškolských poznatků, se kterými se žáci setkávají ve výuce. Nadto jsou zde zařazeny také metody, které využívají nadstandardních planimetrických tvrzení (tj. vět, které nejsou zařazeny v běžné výuce matematiky na středních školách, přestože jejich myšlenky nepřesahují úroveň poznatků středoškolské matematiky). Popisované metody však nejsou založeny pouze na tvrzeních výše uvedených standardních či nadstandardních vět, ale mnohdy také jejich důkazy jsou významnými zdroji různých postupů a inspirací pro hlavní myšlenku důkazu.

Rozdělení důkazových úloh syntetické planimetrie do sedmi elementárních kategorií umožňuje systematicky rozdělit také metody řešení na základě zmíněného třídění. Aby bylo možné metody prezentovat ve snadno uchopitelném a přehledném systému, je nutné v jednotlivých kategoriích identifikovat tzv. *základní úlohy* a tzv. *násobné úlohy*. Násobnou úlohou je myšlena úloha rozdělitelná na několik podúloh stejné kategorie, jako je původní úloha. Základní úlohou je pak úloha v tomto smyslu nedělitelná. Vzhledem k možnosti rozdělení násobných úloh na podúlohy se bude kategorizace metod opírat právě o základní úlohy, řešením násobných úloh pak bude kompozice řešení jejich podúloh. Metody řešení základních úloh tak tvoří kostru celé metodologie řešení syntetickoplanimetrických důkazových úloh, na které lze budovat další (a mnohdy velmi specifické) postupy.

Metody řešení úloh o shodnosti úseček či o shodnosti úhlů se s ohledem na násobné úlohy mohou zaměřit pouze na důkaz shodnosti dvojice uvedených prvků. Shodnost více prvků (úseček nebo úhlů) lze následně dokázat rozložením úlohy na důkazy shodnosti vhodně zvolených dvojic (tzn. základní úlohy). Obdobně lze postupovat v případě dokazování rovnoběžnosti nebo kolmosti přímek.

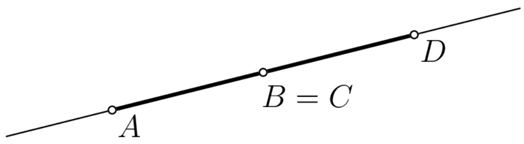
V případě řešení úloh, v nichž je úkolem dokázat kolinearitu bodů, je základní úlohou důkaz kolinearity tří bodů, neboli že jeden z bodů leží na přímce určené zbývajícími dvěma. Metody řešení se tak budou zabývat pouze problematikou kolinearity tří bodů, neboť násobné úlohy lze rozložit na úlohy o důkazu kolinearity vhodných trojic. Metody dokazování konkurentnosti přímek lze zcela analogicky redukovat na metody důkazu konkurentnosti trojice přímek.

Vzhledem k tomu, že libovolná kružnice je jednoznačně dána třemi body, lze za základní úlohu o koncykličnosti bodů považovat důkaz koncykličnosti čtyř bodů. Násobné úlohy je možné (stejně jako v předchozích případech) dělit na vhodné podúlohy.

Dále uváděné metody poskytují možný návod k řešení typových základních úloh v každé kategorii. Ukázkové úlohy názorně ilustrující konkrétní popisované metody byly vybrány tak, aby svou různorodostí pokud možno pokrývaly celou šíři dané kategorie.

4.1 Důkaz shodnosti dvojice úseček

Přestože úlohy o shodnosti dvojice úseček mohou být formulovány jak použitím pojmu shodnost (např. „*... dokažte, že úsečky ... jsou shodné.*“), tak použitím metrických vztahů (např. „*... dokažte, že ...* $|AB| = |CD|$“), k řešení obou případů je možné využít tytéž metody. Je vhodné také zmínit, že specifickým případem je úloha, ve které mají uvažované úsečky společný jeden krajní bod a všechny krajní body uvažované dvojice úseček leží na téže přímce. Na obrázku 1.0.1 je tato situace vyobrazena pro úsečky AB, CD, přičemž $B = C$. Je zřejmé, že zobrazená situace je úlohou o středu úsečky AD, avšak k jejímu řešení je také možné využít metody uvedené v této kapitole.



obr. 1.0.1

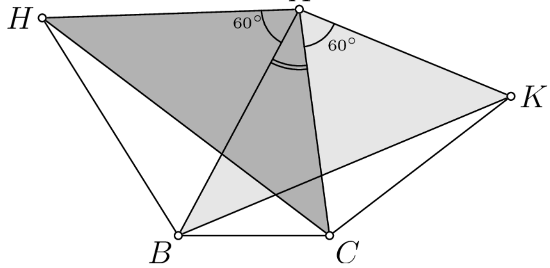
Základní metody řešení úloh, v nichž je třeba dokázat shodnost dvojice úseček, jsou založeny na shodnosti trojúhelníků, na rovnoramenných trojúhelnících, na význačných vlastnostech některých vybraných rovinných útvarů a na shodných zobrazeních. Mezi další metody, které je možné využít pro řešení úloh uvedeného typu, patří využití podobných zobrazení, metody výpočtu (např. metoda obsahu), případně kombinace syntetických a výpočetních metod. Vzhledem k zaměření této práce však budou dále uvedeny pouze základní metody a postupy.

4.1.1 Využití shodnosti trojúhelníků

Častou využívanou metodou důkazu shodnosti dvojice úseček je nalezení dvojice shodných trojúhelníků, v nichž posuzovaná dvojice úseček tvoří dvojici odpovídajících si stran. Tento postup lze ilustrovat následující poměrně známou úlohou.

Příklad 1.1

Nad stranami zvoleného trojúhelníka ABC jsou vně trojúhelníku ABC sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokažte, že $|CH| = |BK|$.



obr. 1.1.1

Řešení. Jelikož trojúhelníky ABH a ACK jsou rovnostranné, platí

$$|\sphericalangle HAB| = |\sphericalangle CAK| = 60^\circ$$

a také

$$\begin{aligned}|AB| &= |AH|,\\ |CA| &= |AK|.\end{aligned}$$

Odtud

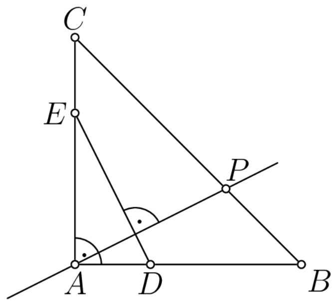
$$|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle BAC| + 60^\circ = |\sphericalangle HAC|.$$

Trojúhelníky BKA a HCA jsou tak shodné dle věty *sus*. Proto platí $|CH| = |BK|$, čímž je důkaz ukončen.

Další ilustrační úloha ukazuje obtížnější situaci, tj. případ, v němž je nutno shodné trojúhelníky vytvořit doplněním vhodných prvků.

Příklad 1.2

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Nechť D, E jsou po řadě vnitřními body stran AB, AC, přičemž $|AD| = |CE|$. Kolmice k přímce DE procházející bodem A protíná stranu BC v bodě P. Dokažte, že $|ED| = |AP|$.



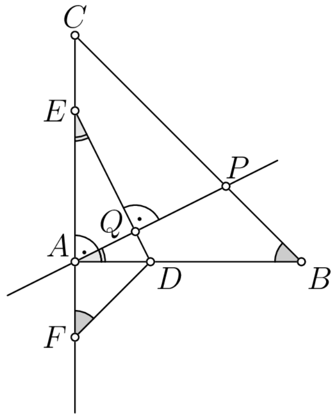
obr. 1.2.1

Řešení. Označme Q průsečík přímek AP a ED. Nechť F je bod ležící na polopřímce opačné k polopřímce AC takový, že $|AF| = |AD|$. Trojúhelník AFD je rovnoramenný, pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A a je tak podobný trojúhelníku ABC. Z této podobnosti trojúhelníků plyne

$$|\sphericalangle FDA| = |\sphericalangle CBA| = 45^\circ.$$

Dále vidíme, že trojúhelník ADE je podobný trojúhelníku AQD (*uu*). Odtud

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DAQ| = |\sphericalangle BAP|.$$



obr. 1.2.2

Jelikož $|AF| = |AD| = |CE|$, platí $|EF| = |AC| = |AB|$. Trojúhelníky ABP a EFD jsou tak shodné podle věty *usu*, z čehož okamžitě plyne $|ED| = |AP|$, což jsme chtěli dokázat.

Dále uvedené úlohy je možné řešit právě metodou shodných trojúhelníků.

Příklad 1.3

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBA|$. Osy jeho stran AD a BC se protínají v bodě M, který leží na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AC| = |BD|$. (*viz např.* [26])

Příklad 1.4

Je dán trojúhelník ABC. Označme S_c střed jeho strany AB. Dokažte, že vzdálenost vrcholu A od přímky CS_c je rovna vzdálenosti vrcholu B od téže přímky. (*viz např.* [3])

Příklad 1.5 (50. MO, B–I–2)

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že přímky BC a AD se protínají v bodě E. Leží-li průsečík úhlopříček AC a BD na ose úhlu AEB, je trojúhelník ABE rovnoramenný. Dokažte.

Příklad 1.6 (58. MO, A–I–2)

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost $45°$. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte, že jsou-li AP a BC navzájem kolmé, jsou úsečky AP a BC shodné.

Příklad 1.7 (65. MO, A–P–3)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB a delší odvěsnou BC. Nechť D je pata výšky z vrcholu C. Kružnice k se středem D a poloměrem CD protíná odvěsnu BC v bodě Q a dále přímku AB v bodech E a F ($E \neq F$), kde F je bodem přepony AB. Úsečka QE protíná odvěsnu AC v bodě P . Dokažte, že $|PE| = |QF|$.

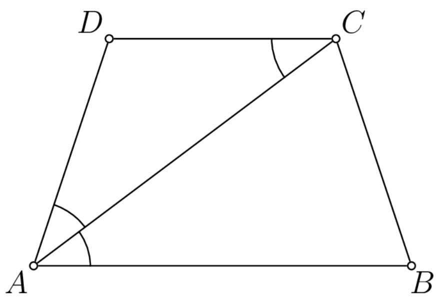
4.1.2 Využití vlastností rovnoramenných trojúhelníků

Běžně využívaná technika důkazu shodnosti dvojice úseček se opírá o základní vlastnost rovnoramenného trojúhelníku, tj. že ramena rovnoramenného trojúhelníku jsou shodná. Úlohu o důkazu shodnosti dvojice úseček, které mají právě jeden krajní bod společný, je tak možno převést na úlohu, v níž je třeba dokázat, že krajní body uvedených úseček tvoří rovnoramenný trojúhelník a že uvedené úsečky jsou rameny tohoto rovnoramenného trojúhelníku.[9]

Řešení první ilustrační úlohy využívá k důkazu existence rovnoramenného trojúhelníku prokázání shodnosti vnitřních úhlů při základně uvažovaného trojúhelníku.

Příklad 1.8 (15. MO, C–I–4)

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Úhlopříčky AC a BD jsou osami vnitřních úhlů lichoběžníku při základně AB. Dokažte, že $|AD| = |CD|$.



obr. 1.8.1

Řešení. Ze zadání úlohy $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAC|$. Protože $AB \parallel CD$, platí dále

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA| \text{ (střídavé úhly).}$$

Proto

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DCA|$$

a trojúhelník ACD je rovnoramenný se základnou AC, z čehož plyne platnost dokazovaného tvrzení.

Další možností důkazu existence rovnoramenného trojúhelníku je prokázání souměrnosti uvažovaného trojúhelníku podle osy úhlu při hlavním vrcholu, tj. podle osy základny tohoto trojúhelníku, jak ukazuje následující úloha.

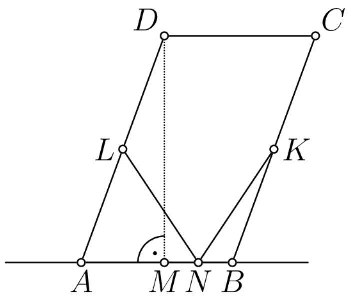
[9]Obdobnou úvahu lze samozřejmě využít také v případě trojúhelníků rovnostranných.

Příklad 1.9 (70. MO, C–S–2, Vojtěch Zlámal)

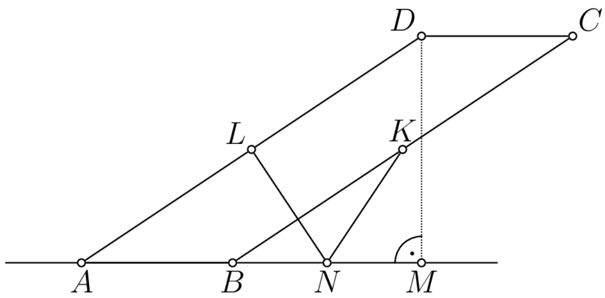
Je dán rovnoběžník $ABCD$, kde K, L jsou po řadě středy jeho stran BC, AD. Označme M (kolmý) průmět bodu D na přímku AB a N střed úsečky MB. Dokažte, že $|NK| = |NL|$.

Řešení. Jelikož je nutné brát v úvahu různou polohu bodu M vzhledem k úsečce AB, využijeme dále úplné indukce a rozlišíme následující tři případy:

a) Bod M je vnitřním bodem úsečky AB (obr. 1.9.1a).
b) Bod M je vnějším bodem úsečky AB, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod M leží na polopřímce AB za bodem B (obr. 1.9.1b).
c) Bod M je totožný s jedním krajním bodem úsečky AB.



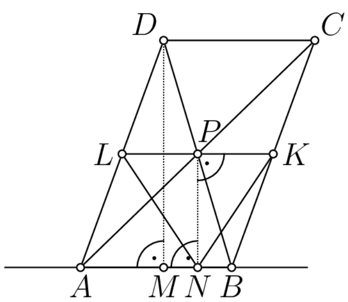
obr. 1.9.1a



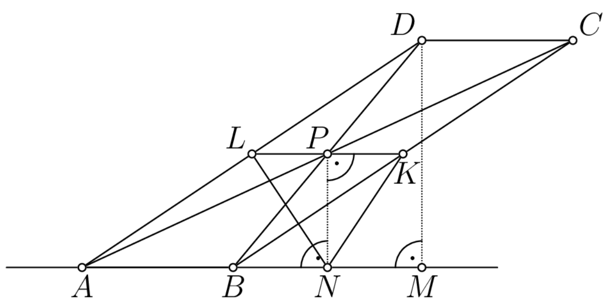
obr. 1.9.1b

Řešení úlohy v případech a) a b) lze provést stejnou úvahou:

Označme P průsečík úhlopříček daného rovnoběžníku (obr. 1.9.2a, 1.9.2b). Jelikož P je středem úsečky BD, úsečka PN je střední příčkou v trojúhelníku BMD. Odtud plyne $DM \parallel PN$, $PN \perp AB$.



obr. 1.9.2a



obr. 1.9.2b

Úsečka KL je však rovnoběžná se stranou AB, platí tedy $PN \perp KL$. Dále je zřejmé, že bod P je středem úsečky KL. Odtud vyplývá, že přímka PN je osou souměrnosti trojúhelníku KLN. Trojúhelník KLN je tak rovnoramenný se základnou KL a platí $|NK| = |NL|$.

Jelikož řešení úlohy v případě c) je triviální, je tímto důkaz uzavřen.

Uvedenými postupy jsou řešitelné také následující úlohy.

Příklad 1.10

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme P patu výšky na stranu AC. Na úsečce AP zvolme bod Q takový, že přímka BQ je osou úhlu PBA. Dokažte, že úsečky BC a CQ jsou shodné. (*viz např.* [12])

Příklad 1.11

Ve čtverci $ABCD$ je bod M středem strany AB, bod N středem strany BC a bod P společný bod úseček MC a ND. Dokažte, že platí $|AP| = |AB|$. (*viz např.* [5])

Příklad 1.12

Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodech A, B. V bodě A sestrojte tečny ke kružnicím a jejich další průsečíky s kružnicemi označte C, D. Přímka CD protíná kružnice ještě v bodech E, F. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. (*viz např.* [3])

Poznámka 6. V úloze 1.12 se využívá také vlastností úsekových úhlů.

Příklad 1.13

Kružnice se středem v bodě S se dotýká ramen daného úhlu v bodech A a B. Libovolným vnitřním bodem M úsečky AB prochází kolmice k SM. Její průsečíky s rameny uvažovaného úhlu označme C a D. Dokažte, že platí $|MC| = |MD|$. (*viz např.* [34])

Příklad 1.14 (4. MO, C–II–4)

Je dán trojúhelník ABC a kružnice k tomuto trojúhelníku opsaná. Osa úhlu ACB protne kružnici ještě v druhém průsečíku $D \neq C$. Dokažte, že úsečky AD a BD jsou shodné.

Příklad 1.15 (36. MO, A–S–1, upraveno)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na kolmici k přeponě AB procházející bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině ABC bod D tak, aby platilo $|BD| = |AB|$. Na kolmici k BC bodem B sestrojíme v polorovině opačné k polorovině BCA bod E tak, aby $|BE| = |BC|$. Označme O střed úsečky AD a F průsečík přímek AE, CD. Dokažte, že $|OF| = |OB|$.

Příklad 1.16 (58. MO, C–I–2)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB. Průsečík úsečky AB s přímkou, která prochází vrcholem C a středem kružnice vepsané trojúhelníku PBC, označíme D. Dokažte, že úsečky AD a AC jsou shodné.

Příklad 1.17 (Vojtěch Zlámal)

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme Q průsečík přímek AB a CD a P průsečík kolmice z vrcholu A k přímce CD s přímkou BD. Dokažte, že $|AP| = |AB|$.

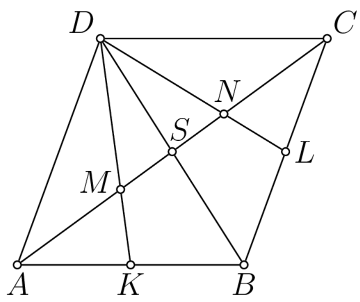
4.1.3 Kombinace metrických a polohových vlastností některých základních rovinných útvarů

K důkazu shodnosti úseček se rovněž využívá známých metrických a polohových vlastností některých rovinných útvarů. Silným prostředkem pro řešení úloh uvedeného typu je pak zejména využití vlastností těžnic a těžiště trojúhelníku. Dále je možné řešení úloh založit na vlastnostech středních příček, a to nejen trojúhelníku, ale také rovnoběžníku nebo lichoběžníku, nebo na vlastnostech průsečíku úhlopříček rovnoběžníku.

Řešení následující ukázkové úlohy využívá základní vlastnosti těžiště trojúhelníku, tj. že těžiště dělí každou těžnici trojúhelníku v poměru 2:1.

Příklad 1.18

Nechť S je průsečík úhlopříček rovnoběžníku $ABCD$ a K, L po řadě středy jeho stran AB, BC. Označme M průsečík úhlopříčky AC s úsečkou DK a N průsečík úhlopříčky AC s úsečkou DL. Dokažte, že úsečky AM, MN, NC jsou shodné.



obr. 1.18.1

Řešení. Jelikož M, N jsou po řadě těžišti shodných trojúhelníků ABD, CDB, platí

$$|AM| = |NC|$$

a také

$$|MN| = |MS| + |SN| = \tfrac{1}{2}|AM| + \tfrac{1}{2}|NC| = |AM|.$$

Odtud plyne

$$|AM| = |MN| = |NC|,$$

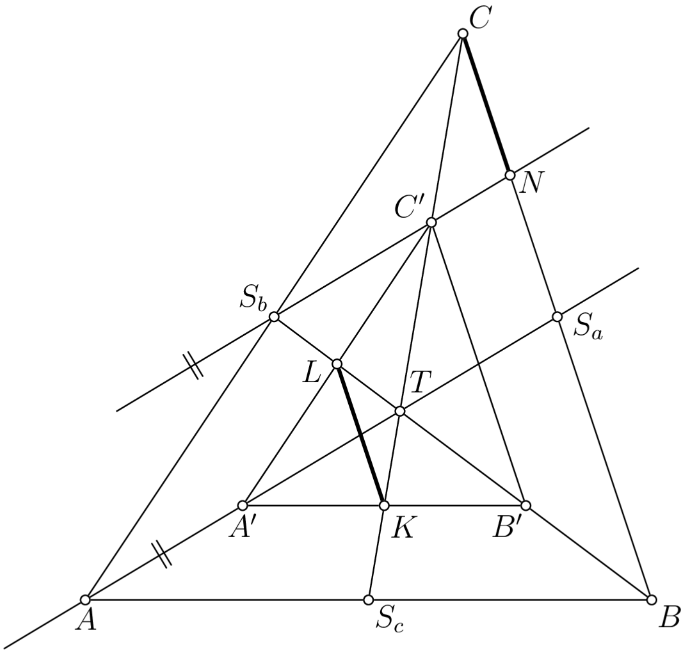
čímž je důkaz uzavřen.

Další úloha ilustruje využití vlastností (polohových i metrických) středních příček trojúhelníku.

Příklad 1.19 (Vojtěch Zlámal)

Nechť T je těžiště trojúhelníku ABC a S_b, S_c jsou po řadě středy jeho stran AC a AB. Označme A', B', C' po řadě středy úseček AT, BT, CT. Dále nechť K je průsečík úseček TS_c a $A'B'$, L průsečík úseček TS_b, $A'C'$ a N průsečík přímky S_bC' se stranou BC. Dokažte, že $|KL| = |NC|$.

Řešení. Je zřejmé, že K je středem úsečky $A'B'$ a obdobně L je středem úsečky $A'C'$. Úsečka KL je tak střední příčkou trojúhelníku $A'B'C'$, přičemž platí $|KL| = \frac{1}{2}|B'C'|$. Úsečka $B'C'$ je však střední příčkou trojúhelníku BCT, z čehož plyne $|B'C'| = \frac{1}{2}|BC|$.



obr. 1.19.1

Odtud

$$|KL| = \tfrac{1}{2}|B'C'| = \tfrac{1}{4}|BC|.$$

Nyní označme S_a střed strany BC trojúhelníku ABC. Vzhledem k tomu, že přímka S_bC' je rovnoběžná s přímkou AS_a a prochází středem strany AC, je S_bN střední příčkou trojúhelníku AS_aC. Bod N je tedy středem úsečky S_aC a platí

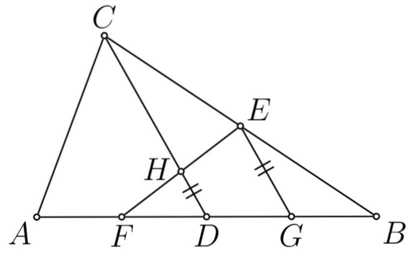
$$|NC| = \tfrac{1}{2}|S_aC| = \tfrac{1}{4}|BC|,$$

z čehož plyne dokazované tvrzení $|KL| = |NC|$.

K následující úloze jsou dále uvedena dvě možná řešení. První využívá výhradně vlastností středních příček trojúhelníku, zatímco druhé řešení se opírá nejen o vlastnosti středních příček trojúhelníku, ale také o vlastnosti průsečíku úhlopříček rovnoběžníku.

Příklad 1.20 (68. MO, C–I–3)

Nechť D, E značí po řadě středy stran AB, BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD. Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF.



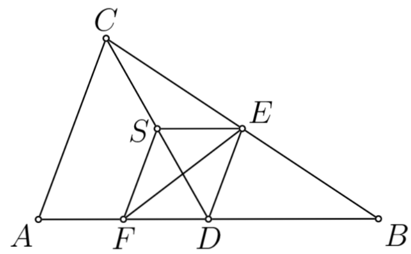
obr. 1.20.1

Řešení. Označme G střed úsečky DB a H průsečík úseček CD a FE (viz obr. 1.20.1). Úsečka EG je střední příčkou trojúhelníku DBC, je tedy rovnoběžná s úsečkou CD.

Jelikož D je středem úsečky FG, je úsečka DH je střední příčkou v trojúhelníku FGE. Bod H je tak středem úsečky EF, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Označme S střed úsečky CD (viz obr. 1.20.2). Úsečka DE je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí tedy

$$|DE| = \tfrac{1}{2}|AC|, \quad DE \parallel AC.$$



obr. 1.20.2

Současně úsečka SF je střední příčkou trojúhelníku ADC, platí tak

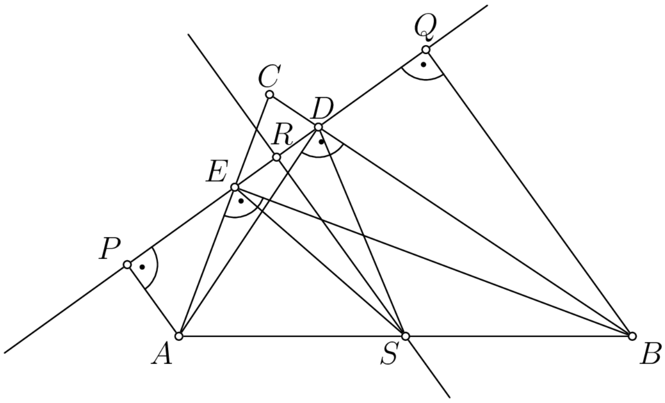
$$|SF| = \tfrac{1}{2}|AC|, \quad SF \parallel AC.$$

Úsečky DE a SF jsou tedy shodné a rovnoběžné, z čehož plyne, že čtyřúhelník $FDES$ je rovnoběžník. Jelikož úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí, je důkaz tímto dokončen.

Jak ukazuje další ilustrační úloha, v řešení je také možno využít vlastností střední příčky lichoběžníku.

Příklad 1.21

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Body D a E jsou po řadě patami výšek spuštěných z vrcholů A, B trojúhelníku ABC. Body P a Q jsou po řadě (kolmými) průměty bodů A, B na přímku DE. Dokažte, že $|PE| = |DQ|$.



obr. 1.21.1

Řešení. Označme S střed úsečky AB a R střed úsečky DE. Ze zadání plyne, že body D, E leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AB, platí tak

$$|ES| = |DS|.$$

Přímka SR je tedy osou úsečky DE a je rovnoběžná s přímkami AP a BQ. Vzhledem k tomu, že S je střed strany AB, je SR střední příčkou lichoběžníku $ABQP$. Bod R je tak středem úsečky QP. Odtud

$$|PR| = |QR|,$$
$$|PE| + |ER| = |RD| + |DQ|,$$
$$|PE| = |DQ|,$$

čímž je důkaz ukončen.

Následující úlohy lze také řešit využitím uvedených vlastností rovinných útvarů.

Příklad 1.22

Dokažte, že v pravidelném šestiúhelníku je kratší úhlopříčka rozdělena dvěma dalšími úhlopříčkami stejné délky na tři stejné díly. (*viz např.* [3])

Příklad 1.23 (4. MO, A–II–4)

Buď dán rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB. Uvnitř strany AC buď dán bod X a na prodloužení strany BC za bod B buď dán bod Y. Označte P společný bod úseček AB a XY. Dokažte:

a) Jestliže platí $|PX| = |PY|$, potom platí $|AX| = |BY|$.
b) Jestliže platí $|AX| = |BY|$, potom platí $|PX| = |PY|$.

Příklad 1.24 (18. MO, D–S–3)

Jsou dány body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží na přímce. Sestrojte bod E tak, aby $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$ a bod F tak, aby $AF \parallel CD$, $DF \parallel AC$. Dokažte, že $|EF| = |BC|$.

Příklad 1.25 (34. MO, C–I–3)

Na úhlopříčce AC daného čtverce $ABCD$ zvolme bod E tak, že platí $|AE| = \frac{1}{3}|AC|$. Dokažte, že přímka DE protíná stranu AB v jejím středu.

Poznámka 7. Úloha 1.25 je obměnou výše uvedené úlohy 1.18.

Příklad 1.26 (36. MO, C–I–3)

V rovině je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, středy jeho stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě K, L, M, N. Dokažte, že přímky AC, BD jsou navzájem kolmé právě tehdy, když $|KM| = |NL|$. Dokažte, že přímky KM, NL jsou navzájem kolmé právě tehdy, když$|AC| = |BD|$.

Příklad 1.27 (67. MO, C–II–3)

Je dán trojúhelník ABC. Nechť P, Q jsou po řadě středy stran AB, AC a nechť R, S jsou vnitřní body úsečky BC, pro něž $|BR| = |RS| = |SC|$. Označme T průsečík přímek PR a QS. Dokažte, že $ABTC$ je rovnoběžník.

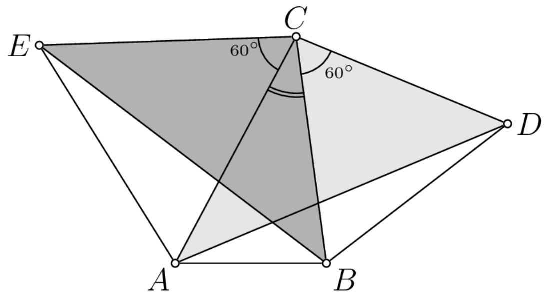
4.1.4 Využití shodných zobrazení

Shodná zobrazení a jejich vlastnosti lze také efektivně využít k důkazu shodnosti úseček. Ze známých zobrazení se využívají zejména osová souměrnost a otočení. Důkazy opírající se o vlastnosti osové souměrnosti zpravidla využívají rovnoramenných trojúhelníků (jak bylo ukázáno v úloze 1.9). Následující úlohy tak ukazují řešení založená na vlastnostech otočení.

Přestože v úvodní velmi jednoduché úloze 1.1 je využito shodných trojúhelníků, může tato shodnost vyplynout právě z vlastností otočení. Například v [34] lze tak najít uvedenou úlohu (v jiném označení) s řešením využívajícím otočení.

Příklad 1.28

Stranám BC, CA trojúhelníku ABC jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky CBD, ACE. Dokažte, že $|AD| = |BE|$.



obr. 1.28.1

Řešení. Jelikož trojúhelníky BDC a CAE jsou rovnostranné, platí

$$|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle BCD| = 60^\circ$$

a také

$$|CA| = |AE|,$$
$$|BC| = |BD|.$$

Otočení se středem v bodě C o orientovaný úhel $+60^\circ$ tak zobrazuje trojúhelník EBC na trojúhelník ADC. Tyto trojúhelníky jsou tedy shodné a platí $|AD| = |BE|$. Tím je důkaz ukončen.

Další ilustrační úloha využívá dvě různá otočení a zobrazení z nich složené. Toto zobrazení složené ze dvou otočení o různých středech může být buď posunutí, nebo opět otočení. V následujícím případě se však podle věty 9 jedná o otočení.

Příklad 1.29

Ke stranám BC a CA trojúhelníku ABC jsou vně připsány čtverce po řadě se středy P, Q. Označme S_c střed strany AB. Dokažte, že $|QS_c| = |PS_c|$.

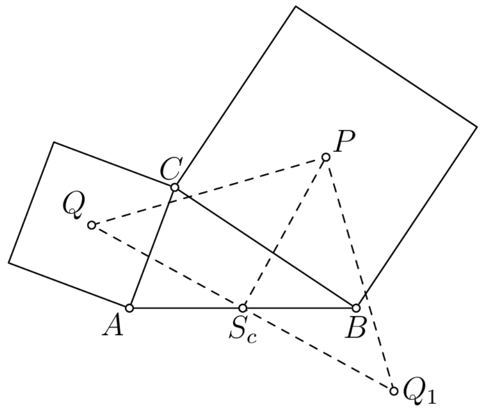
Řešení. Bez újmy na obecnosti uvažujme obvyklé uspořádání označení vrcholů trojúhelníku ABC. Označme ρ_1, ρ_2 po řadě otočení se středy v bodech Q, P o úhel $90°$. Platí tak

$$\begin{aligned} \rho_1\colon &\quad A \to C, \\ \rho_2\colon &\quad C \to B. \end{aligned}$$

Složeném zobrazení $\rho_2 \circ \rho_1$ je opět otočení (viz věta 9), a to o úhel $180°$ $(= 360° - 90° - 90°)$, přičemž

$$\rho_2 \circ \rho_1 : \quad A \to B.$$

Jedná se tedy o středovou souměrnost se středem v bodě S_c, která zobrazuje A na B.



obr. 1.29.1

Označme Q_1 obraz bodu Q v zobrazení $\rho_2 \circ \rho_1$, přičemž platí, že body Q, S_c a Q_1 leží na téže přímce a

$$|QS_c| = |S_cQ_1|.$$

Vzhledem k tomu, že bod Q je samodružným bodem otočení ρ_1, platí

$$\rho_2 : \quad Q \to Q_1.$$

Odtud vyplývá, že trojúhelník PQQ_1 je rovnoramenný a pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P. Pro střed S_c jeho přepony pak platí $|QS_c| = |PS_c|$, čímž je důkaz uzavřen.

Při řešení dále uvedených úloh je také možno využít otočení.

Příklad 1.30

Stranám BC, CA trojúhelníku ABC jsou vně připsány čtverce $CBEF$, $ACGH$. Dokažte, že $|AF| = |BG|$. (*viz např.* [34])

Poznámka 8. Úloha 1.30 je obměnou úlohy 1.28. Je zřejmé, že úlohy 1.28 a 1.30 je možné zobecnit pro připsání libovolného pravidelného n-úhelníku.

Příklad 1.31

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ se shodnými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Nechť osy jeho stran BC a DA se protínají v bodě M, který leží na straně AB. Dokažte, že $|AC| = |BD|$. (*viz např.* [34])

Příklad 1.32

Nad stranami rovnoběžníku jsou sestrojeny čtverce tak, že průnik každého z nich s rovnoběžníkem je úsečka. Dokažte, že středy těchto čtverců jsou vrcholy určitého čtverce. (*viz např.* [30])

Příklad 1.33 (Korespondenční seminář ÚV MO 1992/93, příklad 1.2)

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky AC, BD jsou na sebe kolmé, $AC \perp BD$. Vně daného čtyřúhelníku sestrojme nad jeho stranami čtverce $AEFB$, $BGHC$, $CIJD$, $DKLA$ (jejich vrcholy jsou značeny proti směru hodinových ručiček). Dokažte, že čtyřúhelníky Q_1, Q_2 ohraničené přímkami AG, BI, CK, DE, resp. AJ, BL, CF, DH jsou shodné.

4.2 Důkaz shodnosti dvojice úhlů

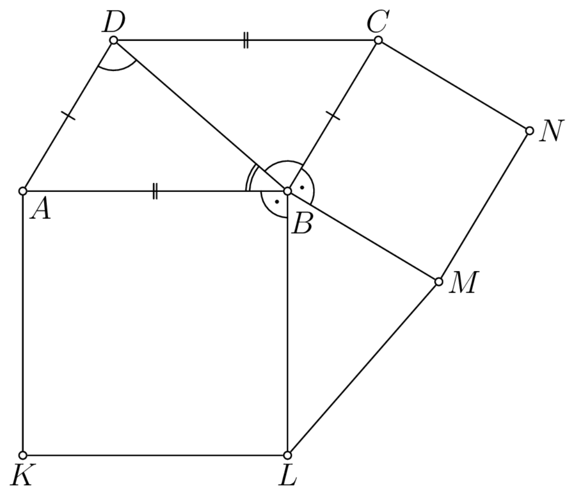
Metody, jimiž je možné dokázat shodnost dvojice úhlů, se neuplatňují pouze v důkazových úlohách formulovaných „...dokažte, že úhly ...jsou shodné...“ (případně obdobným metrickým zápisem), ale je možné je využít také v dalších typech úloh. Jedná se například o úlohy, v nichž je třeba prokázat, že přímka je osou úhlu. Jinou možností využití dále uvedených metod je důkaz podobnosti trojúhelníků. Zde se pak využívá důkazu na základě věty *uu*.

Základní metody důkazu shodnosti dvojice úhlů se opírají o dopočet na základě elementárních vztahů, tzv. *angle chasing* [6]. Tyto postupy využívají zejména součty velikostí úhlů do přímého nebo plného úhlu, součty velikostí vnitřních úhlů nebo vlastnosti vnějších úhlů troj- a čtyřúhelníků či jiných mnohoúhelníků. Mezi další elementární postupy patří využití dvojice vrcholových úhlů nebo využití vlastnosti dvojic úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek, tj. úhlů souhlasných a střídavých.

Následující dva úvodní příklady ukazují právě využití zmíněných elementárních postupů na jednoduchých úlohách.

Příklad 2.1

Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a $KLBA$, $BMNC$ k němu vně připsané čtverce. Dokažte, že $|\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle BAD|$.



obr. 2.1.1

Řešení. Jak je patrné z obrázku 2.1.1, platí pro velikost úhlu LBM vztah

$$\begin{aligned} |\sphericalangle LBM| &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - |\sphericalangle CBA| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle CBD| - |\sphericalangle DBA|. \end{aligned} \tag{19}$$

Vzhledem k tomu, že úhly CBD a ADB jsou v rovnoběžníku $ABCD$ střídavé (a tedy shodné), je možné vztah (19) přepsat na

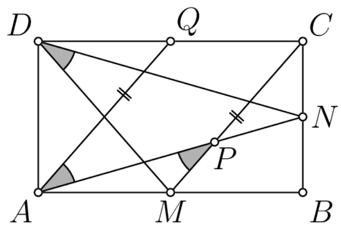
$$180^\circ - |\sphericalangle CBD| - |\sphericalangle DBA| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle DBA|, \tag{20}$$

což je však vyjádření velikosti úhlu BAD dané součtem vnitřních úhlů v trojúhelníku ABD. Ze vztahů (19) a (20) tak plyne dokazovaná rovnost $|\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle BAD|$, čímž je důkaz uzavřen.

V druhém úvodním příkladu není využití příčky dvojice rovnoběžných přímek na první pohled patrné. Avšak doplněním vhodného bodu lze získat dále využitelný rovnoběžník.

Příklad 2.2

V obdélníku $ABCD$ buďte M a N po řadě středy stran AB a BC. Označme P průsečík úseček CM a AN. Dokažte, že $|\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle APM|$.



obr. 2.2.1

Řešení. Označme Q střed strany CD. Ze souměrnosti obdélníku podle osy stran BC a AD plyne $|\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle NAQ|$. Jelikož úsečky AM a CQ jsou shodné a rovnoběžné, je $AMCQ$ rovnoběžník. Platí tak $|\sphericalangle NAQ| = |\sphericalangle APM|$ (úhly střídavé v rovnoběžníku). Odtud již plyne dokazované tvrzení $|\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle NAQ|$, čímž je důkaz hotov.

Pokročilejší metody řešení úloh o shodnosti dvojice úhlů se často zakládají na využití vhodných trojúhelníků, tětivových čtyřúhelníků nebo vlastností obvodových a úsekových úhlů. S ohledem na to jsou v následujícím textu metody řešení úloh o důkazu shodnosti dvojice úhlů rozděleny do dvou základních skupin, tj. metody využívající vhodné trojúhelníky a metody založené na využití úhlů příslušejících k oblouku kružnice. Metody druhé uvedené skupiny se typicky opírají o využití středových, obvodových, úsekových úhlů, ale také o vlastnosti vnitřních úhlů tětivových čtyřúhelníků. Uvedené metody jsou však v náročnějších úlohách (téměř vždy) zkombinovány, vytvářejí tak úzce propojený systém postupů a myšlenek. Není proto možné tyto metody prezentovat izolovaně a i v uváděných úlohách je často využita více než jedna základní metoda. O zařazení úlohy ke skupině metod tak rozhoduje zejména to, která využitá metoda tvoří nosnou myšlenku řešení.

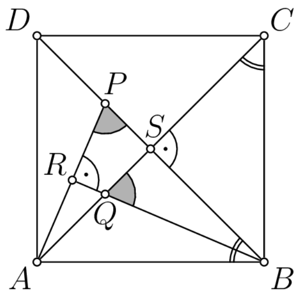
4.2.1 Využití vhodných trojúhelníků

Řešení úloh této oblasti lze často s úspěchem vystavět na nalezení vhodného trojúhelníku (vhodných trojúhelníků) a využití vlastností příslušných vnitřních úhlů. Jedná se například o využití shodnosti odpovídajících si vnitřních úhlů vhodně zvolených shodných nebo podobných trojúhelníků. Další možností je nalezení vhodného rovnoramenného trojúhelníku a využití shodnosti vnitřních úhlů při jeho základně.

Následující úlohy 2.3 a 2.4 ilustrují uvedenou metodu řešení využívající vhodně zvolených shodných nebo podobných trojúhelníků.

Příklad 2.3

Označme S průsečík úhlopříček daného čtverce $ABCD$. Uvnitř úsečky DS zvolme libovolný bod P a ke spojnici AP veďme kolmici bodem B. Průsečík této kolmice s úhlopříčkou AC označme Q. Dokažte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CBQ|$.



obr. 2.3.1

Řešení. Označme R průsečík přímek BQ a AP. Ve čtyřúhelníku $SPRQ$ jsou vnitřní úhly při vrcholech S a R ze zadání pravé, platí tak pro vnější úhel při vrcholů Q rovnost $|\sphericalangle RPS| = |\sphericalangle BQS|$ (viz obr. 2.3.1). Jelikož AC a BD jsou úhlopříčky čtverce,

$$|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle DBA| = 45^\circ = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle QCB|.$$

Vzhledem k tomu, že v trojúhelnících ABP a BCQ jsou shodné vnitřní úhly

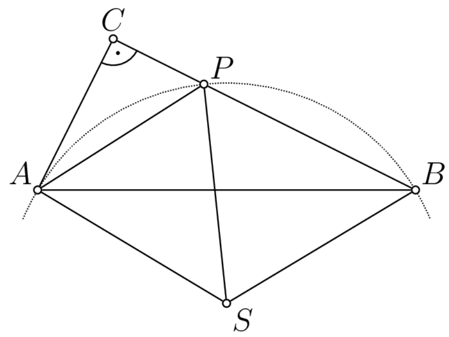
$$|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle QCB|, \qquad |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BQC|,$$

platí také $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle CBQ|$, čímž je důkaz dokončen.

Poznámka 9. Jelikož úsečky AB a BC jsou shodné, jsou shodné také trojúhelníky ABP a BCQ. Tuto úlohu je tak možné rozšířit například o důkaz shodnosti úseček AP a BQ, přičemž použité metody odpovídají kapitole 4.1.

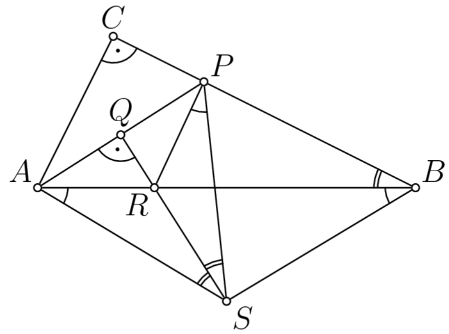
Příklad 2.4 (Vojtěch Zlámal)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť P je libovolný vnitřní bod strany BC. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku ABP. Dokažte, že $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle PAC|$.



obr. 2.4.1

Řešení. Označme Q střed úsečky AP a R průsečík QS se stranou AB (Je zřejmé, že trojúhelník ABP je tupoúhlý pro libovolné umístění bodu P na úsečky BC, bod S tedy leží vně trojúhelníku ABC). Platí tak $AP \perp QS$. Jelikož trojúhelník ASB je



obr. 2.4.2

rovnoramenný s rameny SA a SB, platí

$$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle ABS|. \tag{21}$$

Vzhledem k souměrnosti trojúhelníku ASP podle osy QS je

$$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SAR| = |\sphericalangle RPS| \tag{22}$$

a také

$$|\sphericalangle QSA| = |\sphericalangle PSQ|. \tag{23}$$

Ze vztahů (21) a (22) vyplývá, že čtyřúhelník $RSBP$ je tětivový. Odtud

$$|\sphericalangle PSR| = |\sphericalangle PBR|. \tag{24}$$

Z (23) a (24) vyplývá

$$|\sphericalangle QSA| = |\sphericalangle PSQ| = |\sphericalangle PSR| = |\sphericalangle PBR| = |\sphericalangle CBA|$$

Z podobnosti trojúhelníků ABC a ASQ podle věty *uu* plyne, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle SAQ|$. Odtud

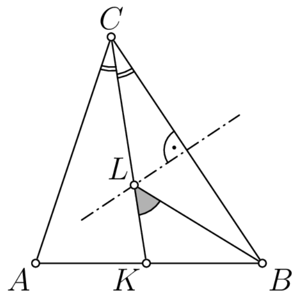
$$\begin{aligned} |\sphericalangle PAC| &= |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle BAP| = \\ &= |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle RAQ| = \\ &= |\sphericalangle SAQ| - |\sphericalangle RAQ| = |\sphericalangle SAR| = |\sphericalangle SAB|. \end{aligned}$$

Tím je důkaz uzavřen.

Jak bylo uvedeno výše, dalším možným postupem je nalezení rovnoramenného trojúhelníku a využití shodnosti vnitřních úhlů při jeho základně. Tuto metodu ilustruje následující úloha.

Příklad 2.5 (58. MO, B–I–5, upraveno)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a bod K jeho strany AB takový, že CK je osou vnitřního úhlů trojúhelníku ABC při vrcholu C. Označme L průsečík přímky CK s osou strany BC. Dokažte, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KLB|$.



obr. 2.5.1

Řešení. Je-li CK osou vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C, platí

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle KCB| = \frac{|\sphericalangle ACB|}{2}.$$

Jestliže L leží na ose strany BC, je trojúhelník BCL rovnoramenný s rameny BL, CL. Odtud

$$|\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle LCB| = |\sphericalangle KCB| = \frac{|\sphericalangle ACB|}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že úhel KLB je vnějším úhlem trojúhelníku BCL při vrcholu L, je

$$|\sphericalangle KLB| = |\sphericalangle CBL| + |\sphericalangle LCB| = \frac{|\sphericalangle ACB|}{2} + \frac{|\sphericalangle ACB|}{2} = |\sphericalangle ACB|.$$

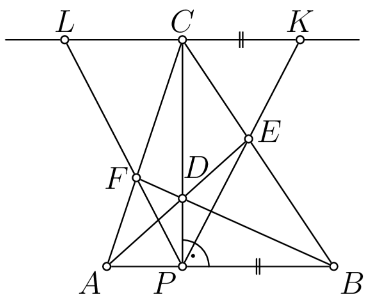
Tím je důkaz uzavřen.

Poslední ukázkou v části věnované využití vhodných trojúhelníků je úloha využívající oba výše uvedené postupy, tedy využití podobných trojúhelníků a využití rovnoramenného trojúhelníku. Zajímavostí této úlohy je taktéž využití tzv. *Cèvovy věty*, která však často není v běžné středoškolské planimetrii probírána.

Příklad 2.6

Nechť P je patou výšky z vrcholu C ostroúhlého trojúhelníku ABC a D libovolným bodem úsečky AP. Označme E průsečík přímky AD se stranou BC a F průsečík přímky BD se stranou AC. Dokažte, že $|\sphericalangle DPF| = |\sphericalangle EPD|$.

Řešení. Bodem C veďme rovnoběžku s úsečkou AB. Označme K, L po řadě průsečíky této rovnoběžky s přímkami PE, PF.



obr. 2.6.1

Z podobnosti trojúhelníků APF, LCF (uu) plyne

$$\frac{|CL|}{|AP|} = \frac{|CF|}{|AF|} \tag{25}$$

a z podobnosti trojúhelníků APF, LCF (uu) následně

$$\frac{|BP|}{|CK|} = \frac{|BE|}{|CE|}. \tag{26}$$

Jelikož přímky AE, BF, CP se protínají v bodě D, je možné využít tzv. *Cèvovu větu*. Platí tak

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1. \tag{27}$$

Dosazením (25) a (26) do (27) získáváme

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BP|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AP|} = 1,$$

neboli

$$\frac{|CL|}{|CK|} = 1,$$

$$|CL| = |CK|.$$

Protože CP je kolmá na AB, je kolmá také na KL. Trojúhelník KLP je tak rovnoramenný s rameny PK, PL, z čehož plyne

$$|\sphericalangle DPF| = |\sphericalangle CPL| = |\sphericalangle KPC| = |\sphericalangle EPD|.$$

Tím je důkaz uzavřen.

Uvedenými metodami jsou dále řešitelné také následující úlohy.

Příklad 2.7

Buď O střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Označme D patu výšky spuštěné z vrcholu A. Dokažte, že osa úhlu CAB je také osou úhlu DAO. (*viz např.* [8])

Příklad 2.8 (54. MO B–II–3)

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L po řadě paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC.

Příklad 2.9

Bod M je středem přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC a P je patou jeho výšky z vrcholu C ke straně AB. Dokažte, že se osa úhlu ACB a osa kratší odvěsny trojúhelníku ABC protínají v bodě, který je středem kružnice vepsané trojúhelníku CMP. (*viz např.* [35])

4.2.2 Využití úhlů příslušných k oblouku kružnice

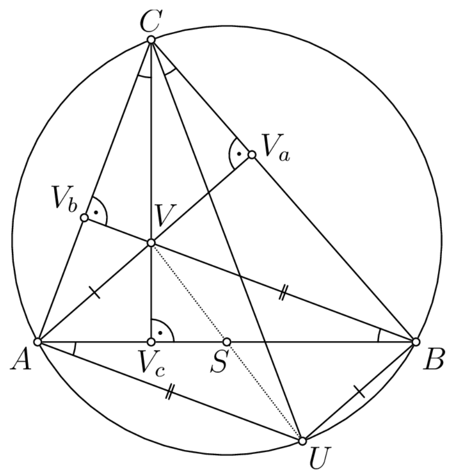
Neopomenutelnou metodou řešení úloh o shodnosti dvojice úhlů je využití úhlů příslušných k danému oblouku kružnice. Je možné využít nejen shodnosti obvodových úhlů příslušných k danému oblouku kružnice, ale také shodnosti obvodových úhlů nad shodnými oblouky téže kružnice, či shodnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného k dané tětivě. Uvedené vlastnosti pak přímo vedou k možnosti využití vlastností součtu protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku.

Úvodní úloha této části ukazuje efektivní využití shodnosti obvodových úhlů příslušných k danému oblouku kružnice.

Příklad 2.10

Označme S střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Obraz bodu V ve středové souměrnosti se středem S označme U. Dokažte, že úhly ACV a UCB jsou shodné.

Řešení. Označme V_a, V_b, V_c po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C. Ve středové



obr. 2.10.1

souměrnosti se středem S odpovídá úsečce AV úsečka BU, jsou tak shodné a rovnoběžné. Proto jsou přímky BC a BU navzájem kolmé. Analogicky lze ukázat, že přímky AC a AU jsou navzájem kolmé. Body U, B, C, A tak leží na Thaletově kružnici nad průměrem CU (jelikož trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží body C, U v opačných polovinách s hraniční přímkou AB).

Vzhledem k podobnosti trojúhelníků AV_cC a AV_bB (uu), platí

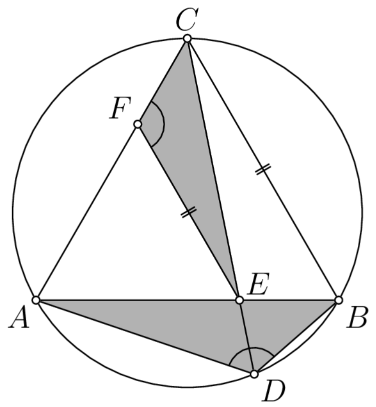
$$|\sphericalangle ACV| = |\sphericalangle ACV_c| = |\sphericalangle V_bBA| = |\sphericalangle VBA|.$$

Jelikož $AUBV$ je rovnoběžník, je $|\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle VBA|$ (střídavé úhly v rovnoběžníku). Dále ze shodnosti obvodových úhlů nad tětivou BU plyne $|\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle UCB|$. Platí tak $|\sphericalangle ACV| = |\sphericalangle UCB|$, což jsme chtěli dokázat.

Vztah velikostí obvodových úhlů doplňujících se oblouků téže kružnice vyťatých danou tětivou je možné využít v podobě vlastností vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku, tj. že součet velikostí protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je roven 180°. Použití této skutečnosti ukazuje následující úloha.

Příklad 2.11 (59. MO B–I–5, upraveno)

Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E. Označme F vnitřní bod strany AC takový, že $EF \parallel BC$. Dokažte, že trojúhelníky ABD a ECF jsou podobné.



obr. 2.11.1

Řešení. Jelikož čtyřúhelník $ADBC$ je tětivový, platí, že $|\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACB| = 180°$. Dále úhel ACB je vnitřním úhlem rovnostranného trojúhelníku, z čeho plyne $|\sphericalangle BDA| = 120°$.

Je zřejmé, že trojúhelník AEF je rovnostranný. Tedy pro jeho vnější úhel EFC platí

$$|\sphericalangle EFC| = 120° = |\sphericalangle BDA|.$$

Úhly ABD a ACD jsou obvodovými úhly nad touž tětivou AD, jsou tedy shodné.

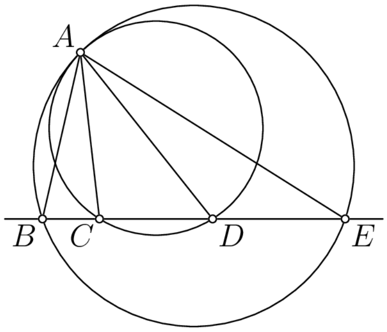
$$|\sphericalangle FCE| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ABD|$$

Trojúhelníky ABD a ECF jsou tak podobné podle věty *uu*, čímž je důkaz uzavřen.

Řešení další ilustrační úlohy využívá shodnosti obvodových úhlů nad shodnými oblouky téže kružnice.

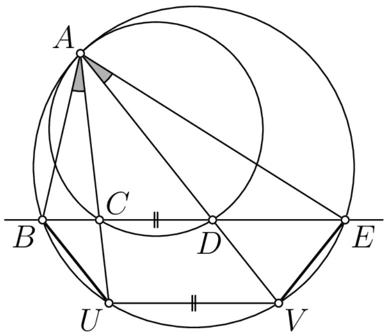
Příklad 2.12

Jsou dány dvě kružnice s vnitřním dotykem v bodě A. Zvolená přímka tyto kružnice protíná postupně v bodech B, C, D, E (stejně jako na obr. 2.12.1). Dokažte, že $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAE|$.



obr. 2.12.1

Řešení. Uvažujme stejnolehlost se středem v bodě A, která zobrazuje menší zadanou kružnici na větší z nich. V této stejnolehlosti odpovídají bodům C, D po řadě body U, V (viz obr. 2.12.2). Jelikož úsečky CD a UV jsou stejnolehlé, jsou tětivy BE a



obr. 2.12.2

UV rovnoběžné. Proto je $UVEB$ rovnoramenným lichoběžníkem se shodnými rameny BU, EV. Tato ramena vytínají na větší ze zadaných kružnic shodné oblouky, tedy i obvodové úhly příslušné k těmto obloukům jsou shodné. Odtud pak

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAU| = |\sphericalangle VAE| = |\sphericalangle DAE|,$$

z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAE|.$$

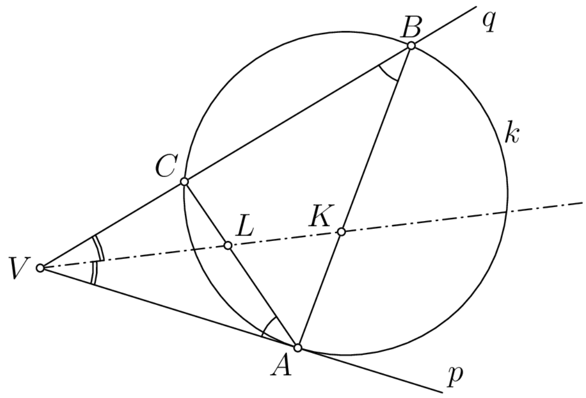
Tím je důkaz ukončen.

Využití shodnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného k danému oblouku kružnice uvádí řešení následující úlohy.

Příklad 2.13

Je dána kružnice k a na ní body A, B, C takové, že tečna p ke kružnici k v bodě A a přímka q procházející body B, C se protínají v bodě V. Osa úhlu BVA protíná úsečky AB, AC po řadě v bodech K, L. Dokažte, že trojúhelník KLA je rovnoramenný.

Řešení. Vzhledem k tomu, že přímka p je tečnou kružnice k, plyne z vlastností obvodového a úsekového úhlu $|\sphericalangle CAV| = |\sphericalangle CBA|$. Jelikož KL je osou úhlu AVB, platí také $|\sphericalangle AVL| = |\sphericalangle LVC|$.



obr. 2.13.1

Úhel ALK je vnějším úhlem trojúhelníku VAL při vrcholu L. Odtud

$$\begin{aligned}|\sphericalangle ALK| &= |\sphericalangle AVL| + |\sphericalangle LAV| = |\sphericalangle LVC| + |\sphericalangle CAV| = \\ &= |\sphericalangle KVB| + |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle KVB| + |\sphericalangle VBK|,\end{aligned}$$

což je vztah pro vnější úhel trojúhelníku VKB při vrcholu K. Tedy

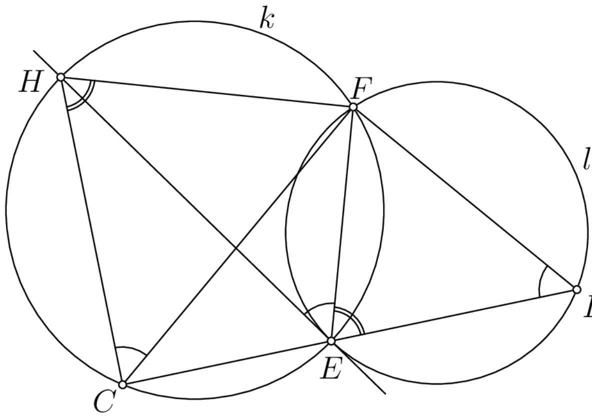
$$|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle VKA| = |\sphericalangle KVB| + |\sphericalangle VBK| = |\sphericalangle ALK|,$$

z čehož plyne, že trojúhelník KLA je rovnoramenný, což jsme měli dokázat.

Poslední ukázková úloha této části ilustruje vícenásobné využití úhlů příslušných k oblouku kružnice.

Příklad 2.14 (66. MO B–II–3)

V rovině jsou dány kružnice k a l, které se protínají v bodech E a F. Tečna ke kružnici l sestrojená v bodě E protíná kružnici k v bodě H ($H \neq E$). Na oblouku EH kružnice k, který neobsahuje bod F, zvolme bod C ($E \neq C \neq H$) a průsečík přímky CE s kružnicí l označme D ($D \neq E$). Dokažte, že trojúhelníky DEF a CHF jsou podobné.



obr. 2.14.1

Řešení. Obvodové úhly FCH a FEH nad tětivou FH kružnice k jsou shodné, přičemž úhel FEH je také úsekovým úhlem příslušným k tětivě EF kružnice l. Z rovnosti úsekového a obvodového úhlu pak pro obvodový úhel FDE příslušný k tětivě EF platí

$$|\sphericalangle FDE| = |\sphericalangle FEH| = |\sphericalangle FCH|. \tag{28}$$

Jelikož $CEFH$ je tětivovým čtyřúhelníkem, vyplývá ze vztahu vnitřního a vnějšího úhlu při protilehlých vrcholech

$$|\sphericalangle CHF| = |\sphericalangle DEF|. \tag{29}$$

Na základě věty *uu* pak ze vztahů (28) a (29) plyne dokazovaná podobnost trojúhelníků DEF a CHF.

Také následující úlohy mohou být řešeny výše uvedenými postupy.

Příklad 2.15

Označme P_a, P_c po řadě paty výšek z vrcholů A, C trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelník P_aBP_c je podobný trojúhelníku ABC. (*viz např.* [3])

Příklad 2.16

Jsou dány dvě kružnice s vnitřním dotykem v bodě A. Sečna MN větší z kružnic se dotýká menší kružnice v bodě P. Dokažte, že přímka AP půlí úhel MAN. (*viz např.* [39])

Příklad 2.17

Nechť CD je sečnou kolmou k libovolnému průměru AB zadané kružnice a P libovolným vnitřním bodem kratšího oblouku AC této kružnice. Označme Q průsečík AB a DP. Dokažte, že přímka AC půlí úhel QCP. (*viz např.* [7])

Příklad 2.18 (52. MO B–I–5)

V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2 , která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné.

Příklad 2.19 (62. MO B–I–3)

Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ.

Příklad 2.20 (65. MO B–II–2)

Je dána úsečka AB, její střed C a uvnitř úsečky AB bod D. Kružnice $k(C, |BC|)$ a $m(B, |BD|)$ se protínají v bodech E a F . Zdůvodněte, proč je polopřímka FD osou úhlu AFE.

4.3 Důkaz rovnoběžnosti dvojice přímek

Mimo úlohy, v nichž je explicitně uvedeno, že úkolem je důkaz rovnoběžnosti přímek (úseček), lze využívat metody uvedené v této části také v úlohách o důkazu některých vlastností čtyřúhelníku. Jedná se zejména o důkazové úlohy, jejichž řešením je důkaz, že čtyřúhelník je rovnoběžníkem, lichoběžníkem nebo čtvercem či obdélníkem.

Dále uvedené metody lze rozdělit do dvou základních kategorií. Postupy využívané v první z nich vycházejí z vlastností úhlů vyťatých příčkou uvažovaných přímek, přičemž tyto metody se v praxi využívají nejčastěji. Do druhé kategorie pak patří metody, které se opírají o specifické vlastnosti některých dalších rovinných útvarů.

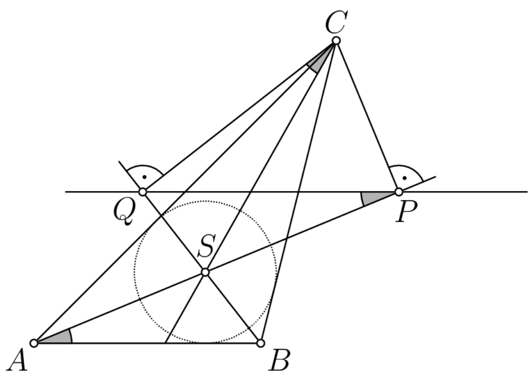
4.3.1 Využití úhlů vyťatých příčkou

Vlastností dvojic úhlů vyťatých příčkou uvažovaných přímek lze využívat právě při dokazování, že uvažované přímky jsou rovnoběžkami. Metody uvedené v této části se zakládají nejen na vlastnostech souhlasných a střídavých úhlů, ale také na součtech jejich velikostí. V tomto ohledu pak dále uváděné metody navazují na kapitolu věnovanou důkazu shodnosti dvojic úhlů.

První ilustrační úloha ukazuje využití střídavých úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek.

Příklad 3.1 (51. MO, A–S–2)

Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P , Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné.



obr. 3.1.1

Řešení. Na úvod je potřeba ukázat, že body P, Q nejsou vnitřními ani krajními body úseček AS, BS. Uváděná situace by mohla nastat, pokud některý z úhlů CSA nebo BSC byl ostrý (popřípadě pravý). Bez újmy na obecnosti uvažujme tedy případ, kdy by úhel BSC byl ostrý. Odtud by plynulo

$$|\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle SCB| \geq 90°.$$

Jelikož vnitřní úhly trojúhelníku BCS při straně BC jsou polovinami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při straně BC, platilo by pak

$$|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ACB| \geq 180^\circ,$$

což je spor se vztahem pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC. Úhly CSA a BSC tak jsou nutně tupé a celou situaci je možno znázornit jako na obrázku 3.1.1.

Jelikož úhly SPC a CQS jsou pravé, leží body S, P, C, Q na Thaletově kružnici nad průměrem SC. Platí tak

$$|\sphericalangle QCS| = |\sphericalangle QPS|.$$

Velikost úhlu QCS lze vyjádřit jako $|\sphericalangle QCS| = |\sphericalangle QCB| - |\sphericalangle SCB|$. Vzhledem k tomu, že trojúhelník QCB je pravoúhlý a úhel SCB je polovinou vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C, platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle QPS| = |\sphericalangle QCB| - |\sphericalangle SCB| = (90^\circ - |\sphericalangle QBC|) - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle ACB| = \\ = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle ABC| - \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle ACB| = \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC|.\end{aligned}$$

Tedy

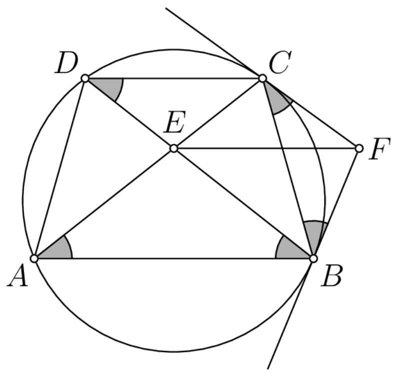
$$|\sphericalangle QPA| = \tfrac{1}{2}\,|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAP|,$$

z čehož plyne, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. Tím je důkaz ukončen.

Následující úloha ilustruje řešení metodou využívající souhlasné úhly vyťaté příčkou rovnoběžek.

Příklad 3.2 (38. MO, A–II–1)

Je dán tětivový lichoběžník $ABCD$ s základnami AB, CD. Označme E průsečík jeho úhlopříček a F průsečík tečen sestrojených k opsané kružnice v bodech B a C. Dokažte, že přímky EF a AB jsou rovnoběžné.



obr. 3.2.1

Řešení. Úhly BAC a BDC jsou obvodovými úhly příslušnými k tětivě BC, jsou tedy shodné. Úhly FBC a BCF jsou však úsekovými úhly příslušnými k téže tětivě, platí

tedy

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle BCF|.$$

Z rovnoběžnosti základen zadaného lichoběžníku ovšem plyne $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC|$. Pro úhel BEC tak platí

$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle EBA| = 2\,|\sphericalangle BAC|.$$

Pro vnitřní úhly trojúhelníku BFC platí

$$|\sphericalangle CFB| = 180^\circ - |\sphericalangle FBC| - |\sphericalangle BCF| = 180^\circ - 2\,|\sphericalangle BAC|.$$

Čtyřúhelník $BFCE$ je tedy tětivový, z čehož plyne

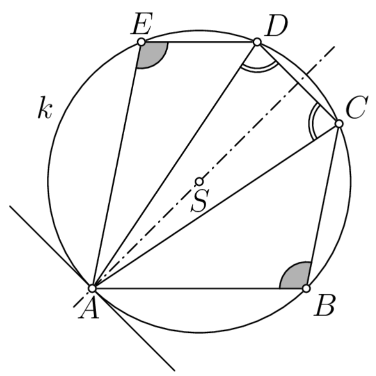
$$|\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle FBC| = |\sphericalangle BAC|.$$

Přímky AB a EF jsou tak rovnoběžkami, což jsme chtěli dokázat.

Variantou metod využívajících souhlasných/střídavých úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek je důkaz kolmosti příčky k oběma uvažovaným přímkám.

Příklad 3.3 (37. MO, C–II–4)

Do kružnice k je vepsán pětiúhelník $ABCDE$ tak, že $AB \parallel DE$ a $AE \parallel BC$. Dokažte, že tečna kružnice k v bodě A je rovnoběžná s přímkou CD.



obr. 3.3.1

Řešení. Ze zadané rovnoběžnosti stran pětiúhelníku $ABCDE$ ihned plyne

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle AED|.$$

Všimněme si, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $ACDE$ jsou tětivovými čtyřúhelníky. Ze vztahu pro součet protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku a výše uvedené shodnosti vnitřních úhlů při vrcholech B a E zadaného pětiúhelníku vyplývá

$$|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle ADC|.$$

Trojúhelník CDA je tedy rovnoramenný se základnou CD.

Uvažujme nyní střed S kružnice k. Tato kružnice je opsána rovnoramennému trojúhelníku CDA, přímka AS je tedy osou úsečky CD a platí

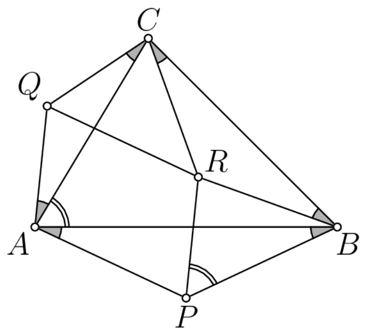
$$CD \perp AS.$$

Tečna ke kružnici k v bodě A je však také kolmá k AS, z čehož vyplývá, že uvažovaná tečna a přímka CD jsou rovnoběžné. Tím je důkaz uzavřen.

Řešení další úlohy využívá faktu, že součet přilehlých úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek je 180°.

Příklad 3.4

Nad stranami AB, AC, BC trojúhelníku ABC jako nad základnami jsou sestrojeny tři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky ABP, ACQ, BCR, z nichž první dva leží vně daného trojúhelníku ABC, třetí leží v polorovině BCA s hraniční přímkou BC. Dokažte, že $AQ \parallel PR$.



obr. 3.4.1

Řešení. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABP, ACQ, BCR jsou podobné, jejich vnitřní úhly při základně jsou shodné (viz obr. 3.4.1). Odtud plyne, že

$$|\sphericalangle RBP| = |\sphericalangle CBR|.$$

Dále ze vzájemné podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ABP a BCR vyplývá

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|BC|}{|BR|},$$

neboli

$$\frac{|BR|}{|BP|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Trojúhelníky ABC a PBR jsou tak podobné (*sus*). Platí tak $|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle BAC|$.

Uvažujme nyní přímky PR, AQ a jejich příčku AP. Pro součet přilehlých úhlů tedy platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle RPA| + |\sphericalangle PAQ| &= |\sphericalangle RPA| + |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAQ| = \\ &= |\sphericalangle RPA| + |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle BPR| + |\sphericalangle CAQ| = \\ &= |\sphericalangle RPA| + |\sphericalangle BPR| + 2 \cdot |\sphericalangle PAB|,\end{aligned}$$

což je vyjádřením součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku ABP. Odtud

$$|\sphericalangle RPA| + |\sphericalangle PAQ| = 180^\circ.$$

Přímky AQ a PR jsou tedy rovnoběžkami, což jsme měli dokázat.

Dále uvedené úlohy je možné také řešit zmíněnými postupy.

Příklad 3.5

Nechť jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 s vnějším dotykem v bodě A. Sečna PK kružnice k_1 se dotýká kružnice k_2 v bodě R. Přímka PA dále protíná kružnici k_2 a přímka RA dále protíná kružnici k_1 v bodě Q. Dokažte, že přímky PQ a RT jsou rovnoběžné. (*viz např.* [7])

Příklad 3.6

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, O střed kuržnice k jemu opsané a V průsečík jeho výšek. Označme Q druhý průsečík přímky BO s kružnicí k. Dokažte, že $AV \parallel QC$. (*viz např.* [7])

Příklad 3.7 (4. MO, C–I–8, upraveno)

Buď dán deltoid $ABCD$ s osou souměrnosti AC. Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dále označme M, N, P, Q po řadě paty kolmic vedených bodem S ke stranám AB, BC, CD, DA. Dokažte, že $MQ \parallel NP$.

Příklad 3.8 (54. MO, C–II-4, upraveno)

Libovolným vnitřním bodem P úhlopříčky AC daného obdélníku $ABCD$ jsou vedeny rovnoběžky s jeho stranami, které protínají úsečky AB, BC, CD a DA po řadě v bodech K, L, M a N. Dokažte, že přímky LM a KN jsou rovnoběžky,

Příklad 3.9 (56. MO, A–I–2)

Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech K, L, M. Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK. Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné.

Příklad 3.10 (58. MO, A–I–2)

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD.

Příklad 3.11 (60. MO, A–III–5, upraveno)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB, E střed úsečky CD a V' bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB. Dokažte, že PE a $V'O$ jsou rovnoběžné.

Příklad 3.12 (62. MO, B–II–4)

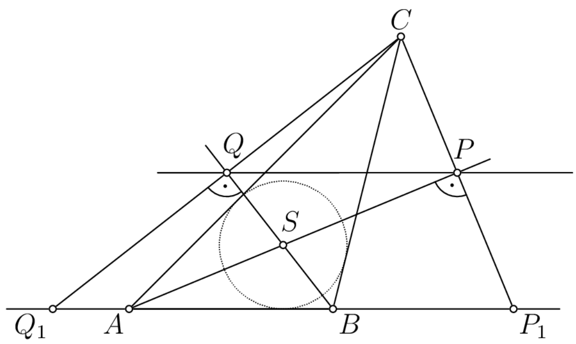
V rovině jsou dány kružnice m, n, které se protínají v bodech K, L. Tečna v bodě K ke kružnici m protíná kružnici n v bodě $A \neq K$, tečna v bodě L ke kružnici n protíná kružnici m v bodě $C \neq K$. Bod $B \neq L$ je průsečík přímky AL s kružnicí m a bod $D \neq K$ je průsečík přímky CK s kružnicí n. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

4.3.2 Využití některých vlastností dalších rovinných útvarů

K důkazu rovnoběžnosti dvojice přímek mohou také sloužit vlastnosti dalších rovinných útvarů. Následující úlohy tak nabízejí několik možných postupů využívajících užitečné vlastnosti trojúhelníků nebo čtyřúhelníků. První ukázkou je jiné řešení výše uvedené úlohy 3.1, přičemž toto řešení je založeno na vlastnostech střední příčky v trojúhelníku, respektive na faktu, že střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s příslušnou stranou trojúhelníku.

Příklad 3.13 (51. MO, A–S–2)

Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P , Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné.



obr. 3.13.1

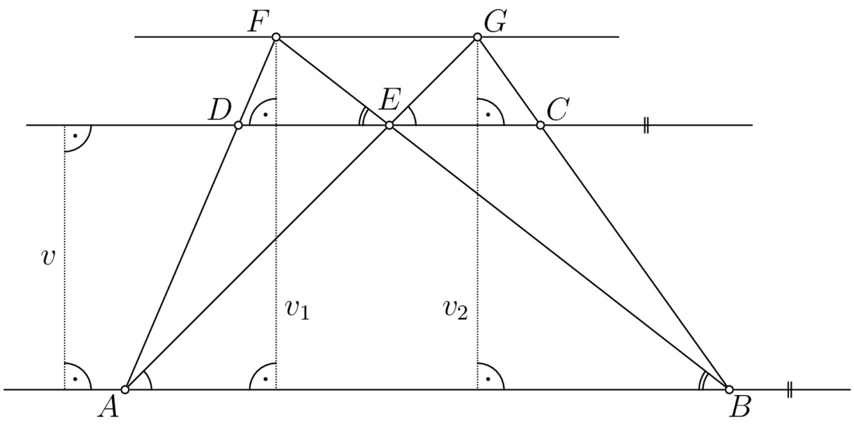
Řešení. Vzhledem k poloze bodů P, Q vůči úsečkám AS, BS (viz příklad 3.1) je možné uvažovat průsečíky P_1, Q_1 po řadě přímek CP, CQ s přímkou SB, jak ukazuje obrázek 3.13.1.

Výška AP trojúhelníku AP_1P je však zároveň osou jeho vnitřního úhlu při vrcholu A. Troúhelník AP_1P je tak rovnoramenný se základnou P_1C a bod P je středem této základny. Analogicky lze ukázat, že bod Q je středem úsečky Q_1C. Úsečka PQ je tedy střední příčkou trojúhelníku Q_1P_1C, z čehož vyplývá, že je rovnoběžná s přímkou AB. Tím je důkaz dokončen.

Důkaz rovnoběžnosti je v další ilustrační úlohy je založen na vzdálenostech bodů od přímky.

Příklad 3.14

Nechť AB a CD jsou rovnoběžné přímky. Označme M střed úsečky CD a F, G po řadě průsečíky přímek AC,BE a AE,BD. Dokažte, že přímky AB a FG jsou rovnoběžné.



obr. 3.14.1

Řešení. Označme v vzdálenost přímek AB a CD, v_1 velikost výšky spuštěné z vrcholu F na stranu AB trojúhelníku ABF a v_2 velikost výšky spuštěné z vrcholu G na stranu AB trojúhelníku ABG. Vzhledem k tomu, že $AB \parallel CD$ jsou trojúhelníky ABF a DEF podobné (uu), platí

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{v_1 - v}{v}.$$

Obdobně z podobnosti trojúhelníků ABG a ECG (uu) plyne

$$\frac{|CE|}{|AB|} = \frac{v_2 - v}{v}.$$

Jelikož E je středem úsečky CD, platí $|CE| = |DE|$. Odtud

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AB|},$$

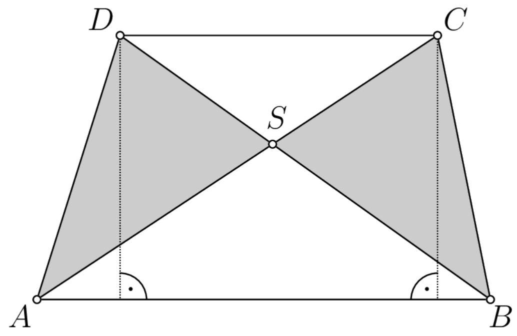
$$\frac{v_1 - v}{v} = \frac{v_2 - v}{v}, \quad \frac{v_1}{v} = \frac{v_2}{v}, \quad v_1 = v_2.$$

Body F, G jsou tak stejně vzdáleny od přímky AB, z čehož vyplývá, že přímky AB a FG jsou rovnoběžné. Tím je důkaz dokončen.

Uvedenou metodu je možné dále rozvinout ve spojitosti s metodou obsahu, jak ukazuje následující úloha.

Příklad 3.15

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Označme S průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že rovnají-li se obsahy troúhelníků ASD a BCS, jsou přímky AB a CD rovnoběžné.



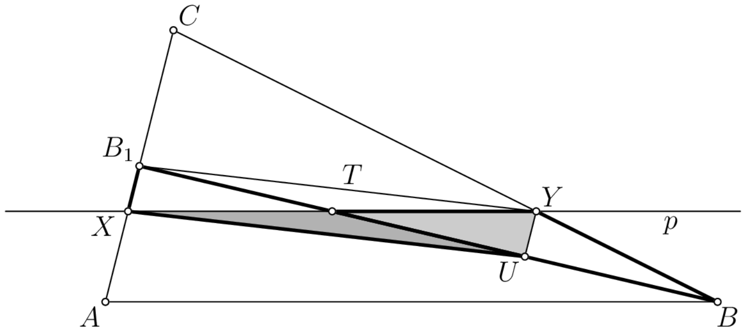
obr. 3.15.1

Řešení. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ASD a BCS plyne rovnost obsahů trojúhelníků ABD a ABC. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu AB, mají také shodnou velikost výšky na tuto stranu. Body C, D jsou tak stejně vzdáleny od přímky AB, z čehož vyplývá $AB \parallel CD$, což jsme měli dokázat.

Řešení poslední ukázková úloha této části využívá vlastnosti úhlopříček rovnoběžníku, tj. že se úhlopříčky rovnoběžníku navzájem půlí.

Příklad 3.16 (Vojtěch Zlámal)

V trojúhelníku ABC označme B_1 střed jeho strany AC, T těžiště trojúhelníku ABC a U střed úsečky BT. Bodem T veďme přímku p tak, že X, Y jsou průsečíky přímky p po řadě s úsečkami AC, BC. Mají-li trojúhelníky XUB_1 a TBY shodné obsahy, je $XUYB_1$ rovnoběžník. Dokažte.



obr. 3.16.1

Řešení. Je zřejmé, že body T, U dělí úsečku BB_1 na tři shodné části. Bod T je tedy střede úsečky UB_1, proto

$$S_{\Delta XUT} = S_{\Delta XTB_1} = \tfrac{1}{2} S_{\Delta XUB_1}.$$

Obdobně
$$S_{\Delta TUY} = S_{\Delta UBY} = \tfrac{1}{2} S_{\Delta TBY}.$$
Z předpokladu dokazovaného tvrzení plyne
$$S_{\Delta XUT} = S_{\Delta XTB_1} = S_{\Delta UBY} = S_{\Delta TUY}.$$
Jsou-li obsahy trojúhelníků XUT a TUY shodné a body X, T, Y leží na téže přímce, je bod T středem úsečky XY. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky XY, UB čtyřúhelníku $XUYB_1$ se tím navzájem půlí, je tento čtyřúhelník rovnoběžníkem. Tím je důkaz uzavřen.

Obdobnými postupy jsou řešitelné také následující úlohy.

Příklad 3.17 (12. MO, C–I–5)

V rovině je dán trojúhelník ABC; vně tohoto trojúhelníku jsou sestrojeny čtverce $ABMN$, $BCPQ$ po řadě se středy O_1, O_2. Dokažte, že středy úseček AC, MQ a body O_1, O_2 jsou vrcholy jistého čtverce.

Příklad 3.18 (28. MO, Z–P–4)

V rovnostranném trojúhelníku ABC označíme S průsečík přímek AK a CM, kde M je střed strany AB a K střed strany BC. Dále označíme P střed úsečky AS a Q střed úsečky BS. Dokažte, že čtyřúhelník $PKQM$ je rovnoramenný lichoběžník.

Příklad 3.19 (54. MO, C–I–3)

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné.

Příklad 3.20 (56. MO, A–S–3, upraveno)

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. Označme U průsečík os jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, D a V průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech B, C. Ukažte, že přímky UV a AB jsou rovnoběžné.

Příklad 3.21 (61. MO, A–S–2)

V rovině uvažujme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a označme M střed jeho úhlopříčky AC. Dokažte, že platí: Mají-li trojúhelníky ABM a ACD stejné obsahy, jsou přímky DM a BC rovnoběžné.

Příklad 3.22 (příklad navazující na úlohu 3.16)

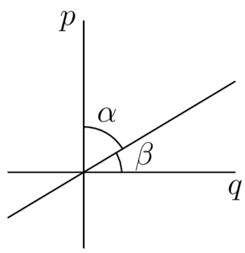
V trojúhelníku ABC označme B_1 střed jeho strany AC, T těžiště trojúhelníku ABC a U střed úsečky BT. Bodem T veďme přímku p tak, že X, Y jsou průsečíky přímky p po řadě s úsečkami AC, BC. Dokažte, že mají-li trojúhelníky XUB_1 a TBY shodné obsahy, je $AB \parallel XY$.

4.4 Důkaz kolmosti dvojice přímek

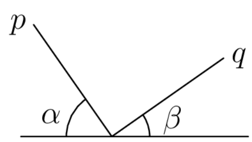
Úlohy, v nichž je úkolem dokázat kolmost dvojice přímek (nebo úseček[10]), je možné řešit širokou paletou metod a postupů. Bez ohledu na to, zda je úloha formulována „. . . dokažte, že. . . je kolmá na. . . “ nebo „. . . dokažte, že úhel. . . je pravý. . . “, bývají využitelné metody často založeny na vyjádření uvažovaného úhlu pomocí vhodných dílčích úhlů a základních geometrických vztahů mezi nimi, na využití vlastností příčky rovnoběžek či na aplikaci vybraných rovinných útvarů, ve kterých jsou některé jejich prvky na sebe kolmé. Mimo to je také možné využít vlastností geometrických zobrazení, a to shodných i podobných. Dále uváděné metody jsou tak rozděleny do čtyř kategorií, které vycházejí z předchozí úvahy.

4.4.1 Vyjádření uvažovaného úhlu pomocí vhodných dílčích úhlů

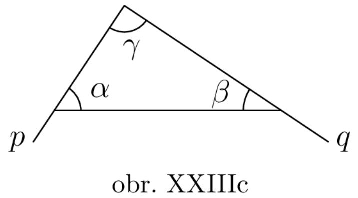
Častým způsobem, jak řešit úlohy této části, je vyjádření velikosti uvažovaného úhlu pomocí již známých úhlů v dané úloze. Jednou z možností je nalezení vhodného součtu známých úhlů. Jak je vidět na obrázku XXIIIa, je možné dokázat kolmost přímek p a q z uvedeného obrázku dokázáním, že $\alpha + \beta = 90°$. Další možnosti se mohou zakládat například na vyjádření uvažovaného úhlu z některého z význačných úhlů. Na obrázku XXIIIb je uvedena situace, v níž je využit přímý úhel a v níž se kolmost přímek p a q dokáže právě prokázáním platnosti vztahu $180° - \alpha - \beta = 90°$. V neposlední řadě je možné také vyjít z vlastnosti součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. To je ukázáno například na obrázku XXIIIc, v němž je možné dokázat kolmost přímek p, q důkazem platnosti vztahu $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$ pro úhly na uvedeném obrázku.



obr. XXIIIa



obr. XXIIIb



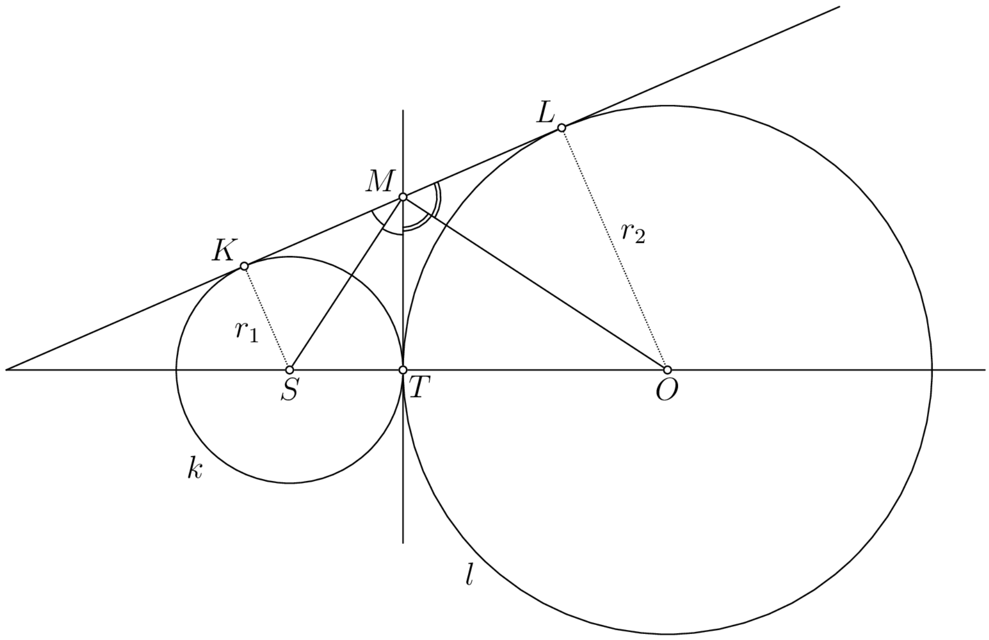
obr. XXIIIc

[10]Bez újmy naa obecnosti bude za účelem zjednodušení textu a zvýšení jeho srozumitelnosti dále používána pouze formulace „kolmost dvojice přímek“.

První ukázková úloha této části ilustruje řešení založené na nalezení vhodného součtu dvojice úhlů, jak bylo uvedeno výše.

Příklad 4.1 (50. MO, C–II–2, upraveno)

Kružnice $k(S, r_1)$ a $l(O, r_2)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý.



obr. 4.1.1

Řešení. Označme K, L body dotyku uvedené společné tečny, která neprochází bodem T, po řadě s kružnicemi k, l. Ze souměrnosti bodů K, T podle přímky MS plyne shodnost úhlů KMS a SMT. Obdobně ze souměrnosti bodů L, T podle přímky MO plyne shodnost úhlů TMO a OML. Platí však

$$|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle MKS| + |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| + |\sphericalangle OML| = 180°,$$

Tedy

$$2|\sphericalangle SMT| + 2|\sphericalangle TMO| = 180°,$$

proto

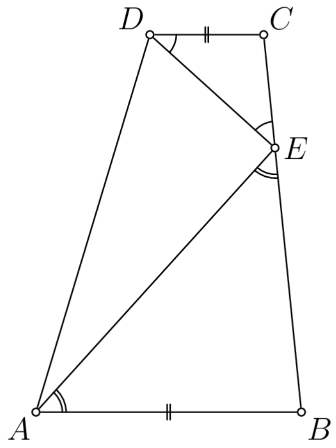
$$|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°.$$

Tím je úloha vyřešena.

Další řešená úloha ukazuje využití přímého úhlu. Důkaz kolmosti je pak založen na vyjádření uvažovaného úhlu odečtením velikostí vhodných úhlů od úhlu přímého.

Příklad 4.2 (65. MO, A–S–3, upraveno)

Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ve kterém platí $|BC| = |AB| + |CD|$. Dokažte, že na rameni BC leží bod kružnice nad průměrem AD.



obr. 4.2.1

Řešení. Označme E vnitřní bod strany BC takový, že $|BE| = |AB|$ a $|EC| = |CD|$. Existence bodu E je zaručena podmínkou v zadání úlohy. Ukážeme nyní, že bod E je hledaným bodem, tj. že úhel DEA je pravý.

Vzhledem k tomu, že trojúhelník DEC je rovnoramenný, platí

$$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle EDC|.$$

Obdobně

$$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BAE|,$$

proto

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DEA| &= 180^\circ - |\sphericalangle CED| - |\sphericalangle AEB| = \\ &= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle DCE|) - \tfrac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle EBA|) = \\ &= \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle EBA|).\end{aligned}$$

Jelikož $AB \parallel CD$, součet vnitřních úhlů lichoběžníku $ABCD$ při vrcholech B a C je roven 180°. Platí tak

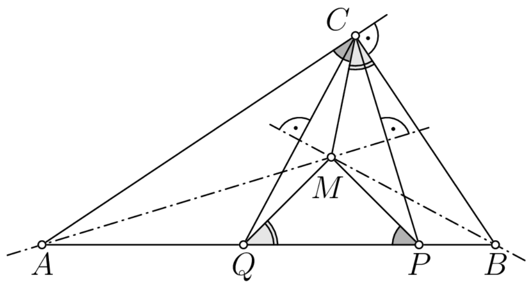
$$|\sphericalangle DEA| = \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle EBA|) = \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle CBA|) = 90^\circ.$$

Tím je důkaz uzavřen.

Řešení následující úlohy je založeno na vlastnosti součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, přičemž hledaný úhel je vyjádřen pomocí zbývajících dvou vnitřních úhlů ve vhodném trojúhelníku.

Příklad 4.3 (55. MO, B–S–2)

Na přeponě B pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.



obr. 4.3.1

Řešení. Ze zadání vyplývá, že trojúhelník PCA je rovnoramenný se základnou CP. Platí tak, že kolmice vedená bodem A na stranu CP je nejen osou úhlu PAC, ale také osou strany CP. Odtud plyne $|CM| = |PM|$ a $|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle MAC|$, proto jsou trojúhelníky MAC a MAP shodné (*sus*). Platí tak

$$|\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle MPA|.$$

Obdobně lze ukázat, že

$$|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle MCB|.$$

V trojúhelníku PQM tak pro součet vnitřních úhlů při vrcholech P, Q platí

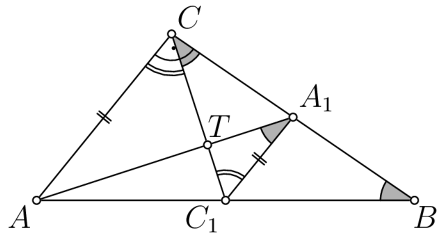
$$\begin{aligned} |\sphericalangle MPQ| + |\sphericalangle PQM| &= |\sphericalangle MPA| + |\sphericalangle BQM| = \\ &= |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že vnitřní úhel při vrcholu M trojúhelníku PQM je pravý. Tím je úloha uzavřena.

Obdobný způsob řešení ukazuje další úloha. V této úloze je však navíc využito rovnoběžnosti střední příčky trojúhelníku s příslušnou jeho stranou.

Příklad 4.4 (Vojtěch Zlámal)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem pří vrcholu C. Označme A_1, C_1 po řadě středy jeho stran BC, AB. Dokažte, že je-li $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle AA_1C_1|$, jsou přímky CC_1 a AA_1 navzájem kolmé.



obr. 4.4.1

Řešení. Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a bod C_1 je středem jeho strany AB, leží vrchol C na Thaletově kružnici nad průměrem AB, platí tak $|AC_1| = |BC_1| = |CC_1|$. Trojúhelník BCC_1 je tedy rovnoramenný se základnou BC. Odtud

$$|\sphericalangle C_1CB| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle AA_1C_1|.$$

Jelikož A_1C_1 je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí $AC \parallel A_1C_1$, z čehož plyne

$$|\sphericalangle ACC_1| = |\sphericalangle A_1C_1C|.$$

V trojúhelníku TC_1A_1 tak platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle C_1TA_1| &= 180° - (|\sphericalangle TA_1C_1| + |\sphericalangle A_1C_1T|) = 180° - (|\sphericalangle AA_1C_1| + |\sphericalangle A_1C_1C|) = \\ &= 180° - (|\sphericalangle C_1CB| + |\sphericalangle ACC_1|) = 180° - 90° = 90°.\end{aligned}$$

Tím je důkaz uzavřen.

Další uvedené úlohy jsou také řešitelné výše uvedenými postupy.

Příklad 4.5

Kružnice je libovolně rozdělena na čtyři oblouky (bez společných vnitřních bodů). Spojíme-li přímkami body, které půlí každý z těchto oblouků, pak některé dvě z těchto spojnic jsou navzájem kolmé. Dokažte. (*viz např.* [14])

Příklad 4.6

Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dále nechť P, Q, R jsou průsečíky kružnice opsané trojúhelníku ABC po řadě s přímkami AI, BI, CI ($P \neq A$, $Q \neq B$, $R \neq C$). Dokažte, že I je ortocentrem trojúhelníku PQR. (*viz např.* [7])

Příklad 4.7 (15. MO, C–I–6)

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Ze středu D úsečky AB je spuštěna kolmice na přímku BC. Její pata označme E a střed úsečky DE označme F. Dokažte, že přímky AE, DF jsou navzájem kolmé.

Příklad 4.8 (30. MO, B–I–4, upraveno)

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník takový, že kolmé průměty průsečíku jeho úhlopříček na jednotlivé strany jsou vnitřními body těchto stran. Leží-li tyto průměty na téže kružnice, jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ na sebe kolmé. Dokažte.

Příklad 4.9 (39. MO, B–II–4, upraveno)

V konvexním čtyřúhelníku označme E průsečík úhlopříček a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABE. Je-li čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, jsou přímky CD a SE na sebe kolmé. Dokažte.

Příklad 4.10 (48. MO, C–I–2)

Je dán obdélník $ABCD$ s delší stranou AB. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky MAM a BD jsou navzájem kolmé.

Příklad 4.11 (61. MO, A–II–3)

Do kružnice je vepsán šestiúhelník $ABCDEF$ a platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Předpokládejme, že přímky BC, EF protnou polopřímku AD postupně v bodech P, Q. Označme S střed úhlopříčky AD a K, L středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BPS, EQS. Dokažte, že trojúhelník KLD je pravoúhlý.

Příklad 4.12 (68. MO, A–S–2)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC|$. Na polopřímkách AB, AC leží po řadě body D, E takové, že $|AD| = |AC|$ a $|AE| = |AB|$. Sestrojme v bodě D kolmici k AD, v bodě E kolmici k AE a jejich průsečík označme F. Dokažte, že $AF \perp BC$.

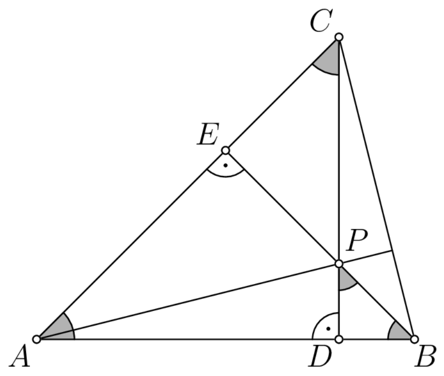
4.4.2 Využití vybraných rovinných útvarů

Mezi efektivní metody řešení úloh o kolmosti dvojice přímek patří také nalezení a využití v úloze existujícího útvaru, v němž jsou některé jeho prvky na sebe kolmé. Princip důkazu je následně založen na prokázání, že uvažované přímky jsou totožné s vybranými kolmými prvky nalezeného útvaru. Typicky je možné tímto způsobem využít například výšky (popřípadě ortocentrum) trojúhelníku, tečnu ke kružnici s bodem dotyku, vzájemnou kolmost úhlopříček ve vhodném čtyřúhelníku nebo body Thaletovy kružnice nad vhodným průměrem. Následující úlohy tak ilustrují využití uvedených příkladů rovinných útvarů.

První ukázková úloha využívá ve svém řešení prokázání toho, že uvažované přímky tvoří dvojici strany trojúhelníku a příslušné výšky na tuto stranu, přičemž je využito také vlastností ortocentra trojúhelníku.

Příklad 4.13 (58. MO, A–S–2, upraveno)

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 45°. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte tvrzení, že jsou-li úsečky AP a BC shodné, jsou přímky AP a BC navzájem kolmé.



obr. 4.13.1

Řešení. V pravoúhlém trojúhelníku ADC má vnitřní úhel při vrcholu A velikost 45°, tudíž také $|\sphericalangle ACD| = 45°$. Trojúhelník ADC je tedy rovnoramenný, $|AD| = |CD|$. Vzhledem k předpokladu $|AP| = |BC|$ jsou pravoúhlé trojúhelníky ADP a CBD shodné podle věty *Ssu*. Odtud

$$|BD| = |DP|.$$

Trojúhelník BPD je tedy také pravoúhlý a rovnoramenný, platí tak

$$|\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle BDP| = 45°.$$

Označme nyní E průsečík přímky BP se stranou AC. Jelikož

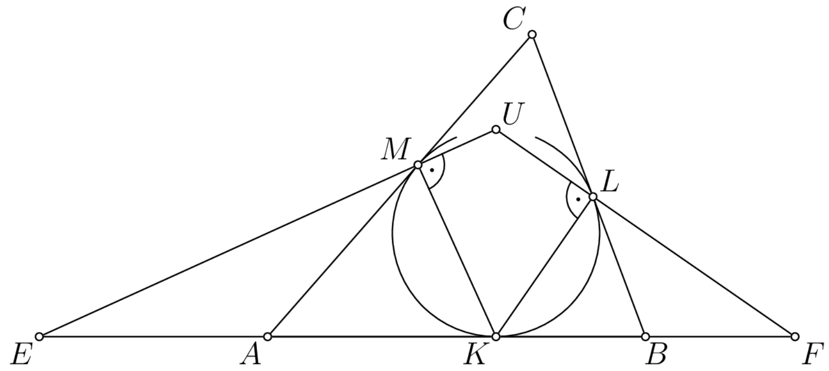
$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAC| = 45° = |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle EBA|,$$

platí $|\sphericalangle AEB| = 90°$, tedy EB je výškou trojúhelníku ABC. Bod P je tak průsečíkem výšek EB a CD, tj. ortocentrem trojúhelníku ABC, z čehož plyne, že přímka AP je kolmá na BC. Tím je úloha vyřešena.

Řešení následující úlohy je založeno na důkazu, že jedna z uvažovaných přímek je tečnou k dané kružnici, přičemž na druhé z přímek leží průměr této kružnice v bodě dotyku uvedené tečny.

Příklad 4.14 (67. MO, B–S–2)

Je dán trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k. Její dotykové body na stranách AB, BC, CA označme postupně K, L, M. Nechť E, F značí po řadě body souměrně sdružené s bodem K vzhledem k bodům A a B. Průsečík přímek EM a FL označme U. Dokažte, že bod U leží na kružnici k a že přímky UK a AB jsou navzájem kolmé.



obr. 4.14.1

Řešení. Úsečky AK, AM jsou úseky tečen vedených bodem A k téže kružnici k (přičemž K, M jsou body dotyku), platí tak $|AK| = |AM|$. Ze zadané souměrnosti ovšem plyne $|AK| = |EA|$. Bod A je tedy středem kružnice opsané trojúhelníku EKM, tj. Thaletovy kružnice nad průměrem EK. Odtud plyne, že $EM \perp MK$.

Analogicky lze dokázat, že $FL \perp KL$. Ve čtyřúhelníku $KLUM$ proto platí

$$|\sphericalangle KMU| + |\sphericalangle ULK| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

z čehož plyne, že čtyřúhelník $KLUM$ je tětivový. Bod U tedy leží na kružnici opsané trojúhelníku KLM, což je právě kružnice k.

Vzhledem k tomu, že oba úhly KMU, ULK jsou pravé, úsečka UK je průměrem kružnice k. Ten je však kolmý na tečnu AB této kružnice s bodem dotyku K. Tím je důkaz uzavřen.

Jak bylo uvedeno výše, je možné využít také vzájemnou kolmost úhlopříček vhodného čtyřúhelníku. Takto lze využít například úhlopříčky čtverce, kosočtverce či deltoidu. Další úloha tak ilustruje využití právě kolmosti úhlopříček kosočtverce.

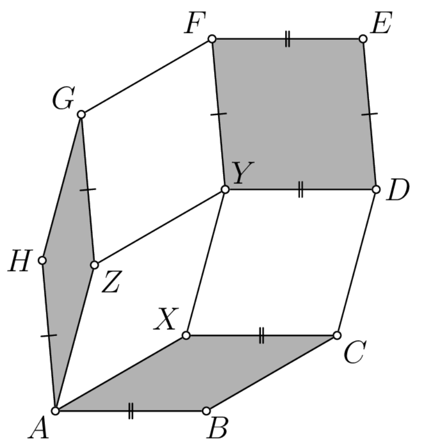
Příklad 4.15 (69. MO, C–II–2)

Konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Uvažme body X, Y, Z takové, že čtyřúhelníky $ABCX$, $DEFY$, $GHAZ$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $XZ \perp AY$.

Řešení. Vzhledem ke shodnosti všech stran uvažovaného osmiúhelníku jsou rovnoběžníky $ABCX$, $DEFY$, $GHAZ$ kosočtverce. Jelikož ze zadání $AB \parallel EF$, jsou úsečky AB, CX, DY, EF shodné a vzájemně rovnoběžné. Analogicky z $AH \parallel DE$ plyne, že také AH, GZ, FY, DE jsou shodné a rovnoběžné. Z uvedených rovnoběžností vyplývá, že čtyřúhelníky $XCDY$, $ZYFG$ jsou rovnoběžníky, a vzhledem ke shodnosti všech stran osmiúhelníku pak dokonce kosočtverce.

S ohledem na shodnost všech stran osmiúhelníku tak platí

$$|AX| = |XY| = |YZ| = |AZ|,$$



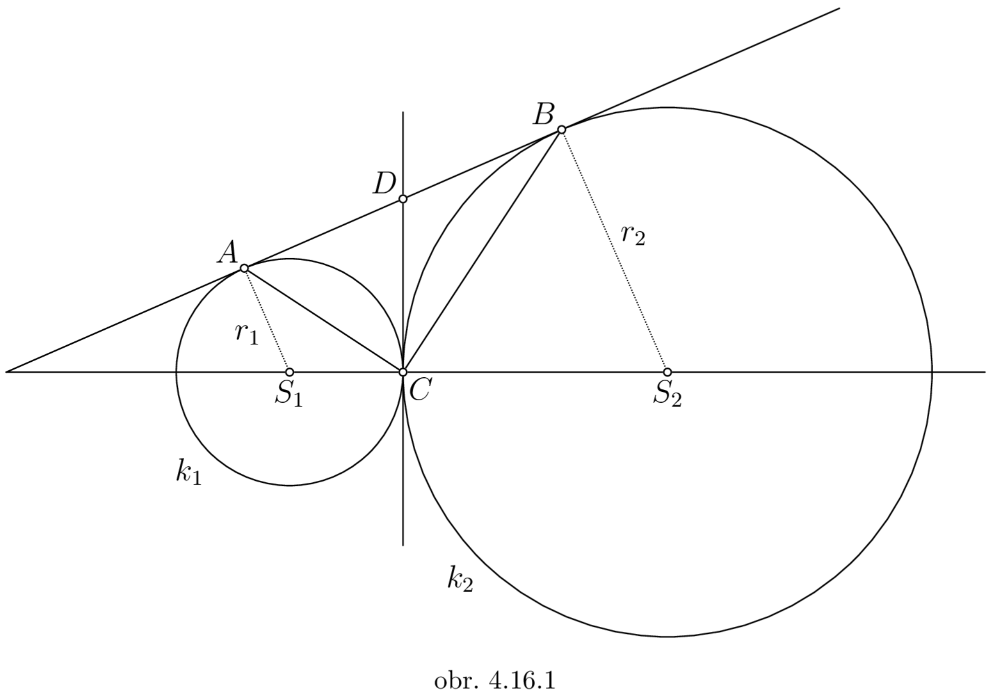
obr. 4.15.1

což znamená, že čtyřúhelník $AXYZ$ je opět kosočtverec. Jelikož úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé, jsou kolmé úsečky AY a XZ a tím je důkaz hotov.

Následující úloha ukazuje využití Thaletovy kružnice nad vhodným průměrem. Řešení se pak opírá o důkaz, že průsečík uvažovaných přímek je bodem Thaletovy kružnice, v níž krajní body průměru leží právě na uvedených přímkách.

Příklad 4.16 (29. MO, C–I–3, upraveno)

Kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ se dotýkají vně v bodě C. Kromě společné tečny v bodě C mají ještě dvě společné tečny. Uvažujme jednu z nich a body dotyku těchto kružnic na ní označme A a B. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.



obr. 4.16.1

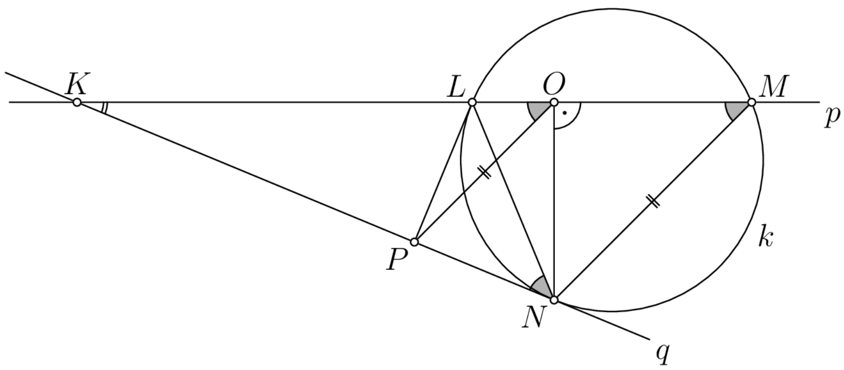
Řešení. Označme D průsečík přímky AB a společné tečny kružnice k_1, k_2 procházející bodem C. Úsečky DC, DA jsou úseky tečen vedených bodem D k téže kružnici k_1 (přičemž A, C jsou body dotyku), platí tak $|DC| = |DA|$. Analogicky pro tečny kružnice k_2 lze dokázat $|DC| = |DB|$.

Bod D je tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ACB, tj. Thaletovy kružnice nad průměrem AB. Odtud plyne, že $AB \perp BC$. Tím je důkaz uzavřen.

Jinou možnost využití Thaletovy kružnice nabízí spojení s tětivovým čtyřúhelníkem. Jak je patrné z řešení další úlohy, důkaz se může zakládat na prokázání, že kružnice opsaná jistému čtyřúhelníku je Thaletovou kružnicí nad jednou jeho úhlopříčkou.

Příklad 4.17 (Vojtěch Zlámal)

Je dána kružnice k a bod K vně této kružnice. Bodem K veďme přímku p, která protíná kružnici k v bodech L, M, a dále veďme bodem K tečnu q ke kružnici k s bodem dotyku N. Na úsečce LM označme O patu kolmice k přímce p vedené bodem N. Nechť P je bod přímky q takový, že $PO \parallel MN$. Dokažte, že $KN \perp PL$.



obr. 4.17.1

Řešení. Bez újmy na obecnosti nechť K leží na polopřímce opačné k polopřímce LM (viz obr. 4.17.1). Pro mocnost bodu K ke kružnici k platí

$$|KN|^2 = |KL| \cdot |KM|,$$

neboli

$$\frac{|KN|}{|KM|} = \frac{|KL|}{|KN|}.$$

Trojúhelníky KMN KNL jsou tak podobné podle věty *sus*. Odtud

$$|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle LNK|.$$

Jelikož $PO \parallel MN$, platí

$$|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle KOP|.$$

Z rovnosti $|\sphericalangle KOP| = |\sphericalangle LNK|$ plyne, že čtyřúhelník $PNOL$ je tětivový. Vzhledem k tomu, že úhel LON je pravý, je pravý i úhel NPL ($|\sphericalangle LON| + |\sphericalangle NPL| = 180°$). Tím je důkaz uzavřen.

Následující úlohy je možné také řešit využitím vhodných rovinných útvarů, v nichž jsou některé dva prvky na sebe kolmé.

Příklad 4.18

Je dán trojúhelník ABC, v němž je $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Bod M je středem úsečky AB. Na úsečkách AC, BC zvolme po řadě body P, Q takové, že $|AP| = |PQ| = |QB|$. Dokažte, že $|\sphericalangle PMQ| = 90°$. (*viz např.* [26])

Příklad 4.19

Označme X, Y, Z po řadě středy stran AB, BC, CA trojúhelníku ABC. Nechť P je bod strany BC takový, že $|\sphericalangle CPZ| = |\sphericalangle YXZ|$. Dokažte, že AP je kolmé na BC. (*viz např.* [7])

Příklad 4.20 (48. MO, C–I–2)

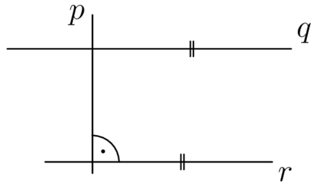
V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky MAM a BD jsou navzájem kolmé.

Příklad 4.21 (60. MO, B–II–3)

Nechť M, N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.

4.4.3 Využití vlastností příčky rovnoběžek

Další velmi častou metodou důkazu kolmosti dvojice přímek je využití vlastností příčky rovnoběžek. Princip důkazu (viz obr. XXIV) je postaven na faktu, že je-li přímka kolmá k jedné z dvojice rovnoběžných přímek, je kolmá i k druhé z nich. Na uvedeném obrázku tak kolmost přímek p a q vyplývá z toho, že p je kolmá na r, která je rovnoběžná s q. V některých případech pak úloha o důkazu kolmosti přechází na úlohu o důkazu rovnoběžnosti.

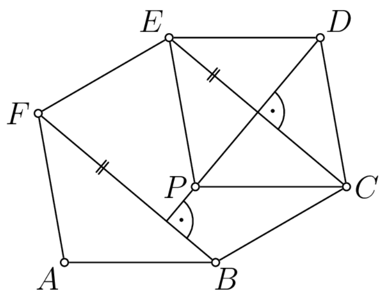


obr. XXIV

Následující ukázková úloha využívá v řešení příčky protilehlých stran rovnoběžníku. Dále tato úloha odkazuje na úlohu 4.15 a využívá také vlastnosti úhlopříček v kosočtverci.

Příklad 4.22 (69. MO, C–I–2, upraveno)

Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož všechny strany jsou shodné a protější strany rovnoběžné. Bod P je takový, že čtyřúhelník $CDEP$ je rovnoběžník. Dokažte, že bod DP je kolmá na BF.



obr. 4.22.1

Řešení. Ze zadané shodnosti všech stran šestiúhelníku $ABCDEF$ plyne, že rovnoběžník $CDEP$ je kosočtverec. Jelikož úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé, platí

$$DP \perp CE.$$

Ze shodnosti a rovnoběžnosti BC, EF ovšem také plyne, že $BCEF$ je rovnoběžník. Je-li přímka DP kolmá k přímce CE, je také kolmá k libovolné rovnoběžce s CE, proto

$$DP \perp BF.$$

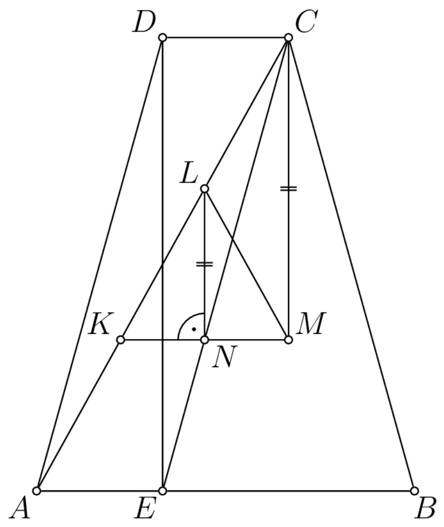
Tím je úloha vyřešena.

Řešení další úlohy je založeno na vlastnostech střední příčky trojúhelníku, tj. že střední příčka je rovnoběžná s příslušnou stranou trojúhelníku. Dále se zde využívá faktu, že v rovnostranných trojúhelnících výšky a těžnice splývají.

Příklad 4.23 (60. MO, C–II–3, upraveno)

Pro poměr délek základen lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE, CDE, BCE, jež označíme po řadě K, L, M, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.

Řešení. Ze zadaných poměrů plyne, že úsečky AE a CD jsou shodné. A jelikož leží na základnách lichoběžníku, pak také rovnoběžné, proto $AECD$ je rovnoběžník. Na jeho úhlopříčce AC tak leží těžnice trojúhelníku ADE na stranu DE a těžnice trojúhelníku CDE na tutéž stranu. Tedy také body K, L leží na této úhlopříčce. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí a že těžiště dělí těžnici v poměru 2:1, rozdělují body K, L úsečku AC na tři stejné díly.



obr. 4.23.1

V trojúhelníku KMC je tak L středem strany CK. Označme nyní N střed úsečky KM. V rovnostranném trojúhelníku KML je těžnice na stranu KM totožná s výšku na tuto stranu, proto $KM \perp LN$.

Jelikož L,N jsou po řadě středy stran CK, KM trojúhelníku KMC, úsečka LN je tak střední příčkou v tomto trojúhelníku, tj. $LN \parallel MC$. Je-li příčka KM kolmá k jedné z dvojice rovnoběžek, je kolmé i k druhé z nich, proto $KM \perp MC$, čímž je důkaz uzavřen.

Poslední ilustrační úloha využívající příčku rovnoběžek je ukázkou převodu úlohy o kolmosti na úlohu o rovnoběžnosti. Principem řešení je důkaz, že uvažovaná přímka je rovnoběžná s již známou kolmicí na druhou uvažovanou přímku, a to využitím vzdáleností bodů od přímky.

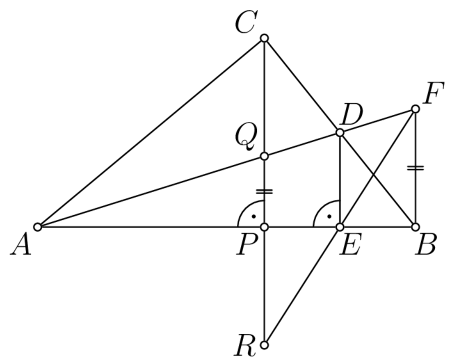
Příklad 4.24 (52. MO, C–I–2)

Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k polopřímce PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B.

Řešení. Ze shodnosti úseček PR, CQ plyne shodnost úseček QR, CP. Vzhledem k tomu, že úsečka DE je střední příčkou trojúhelníku PBC, platí

$$|DE| = \tfrac{1}{2}|CP| = \tfrac{1}{2}|QR|. \tag{30}$$

Přímky RE a QD jsou tedy různoběžné a jejich průsečík označme F (viz obr. 4.24.1). Vzhledem k (30) je úsečka DE střední příčkou nejen v trojúhelníku PBC, ale také v trojúhelníku RFQ. Vzdálenost bodů B, F od přímky CR je tak stejná a přímky BF a CR jsou rovnoběžné.



obr. 4.24.1

Jelikož přímka CR je kolmá k AB, je také FB kolmá k AB a tím je úloha vyřešena.

Řešení následujících úloh je možné také založit na vlastnostech příčky rovnoběžek.

Příklad 4.25 (54. MO, A–I–2)

Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC. Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé.

Příklad 4.26 (68. MO, C–I–5)

Nechť α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω značí po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H konvexního osmiúhelníku $ABCDEFGH$, v němž platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme dále K, L, M, N po řadě středy úhlopříček AD, CF, EH, GB. Dokažte, že přímky KM a LN jsou navzájem kolmé.

Příklad 4.27 (69. MO, A–II–2)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané. Obraz bodu O v osové souměrnosti podle přímky AC označme P. Dokažte, že středy úseček AO a BP leží na téže kolmici k přímce BC.

Příklad 4.28 (69. MO, B–I–3)

Nechť AC je průměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že na polopřímkách opačných k polopřímkám AD a DC existují po řadě body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ takové, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokažte tvrzení:

a) Body A', B, C' a D leží na téže kružnici k.
b) Je-li O střed kružnice k a O_A, O_C jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $AA'B$, $CC'B$, pak platí $OO_A \perp OO_C$.

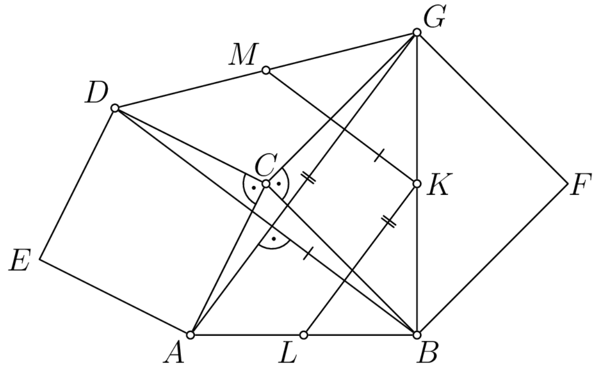
4.4.4 Využití vlastností geometrických zobrazení

Nelze opomenout také možnost využití geometrických zobrazení v důkazech kolmosti dvojice přímek. U vhodně zvolených shodných a podobných zobrazeních lze využívat především rovnoběžnost přímek, a to nejen rovnoběžnost vzoru a obrazu, ale také zachování rovnoběžnosti zobrazovaných rovnoběžek. Dále je možné u shodných zobrazení užít shodnost úsečky a jejího obrazu. U rotace pak lze využít například specifické velikosti úhlu otočení.

Řešení následující úlohy se opírá o rotaci. Hlavní myšlenkou důkazu je prokázání, že jedna z uvažovaných přímek je obrazem druhé z nich v otočení o úhel 90° a jsou tedy navzájem kolmé.

Příklad 4.29 (60. MO, B–S–3, upraveno)

Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$, $BCGF$. Označme K střed čtverce $BCGF$ a L, M po řadě středy úseček AB, DG. Dokažte, že úhel MKL je pravý.



obr. 4.29.1

Řešení. Jelikož K je středem úsečky BG, jsou úsečky KL, KM po řadě středními příčkami trojúhelníků ABG, DBG. Platí tak

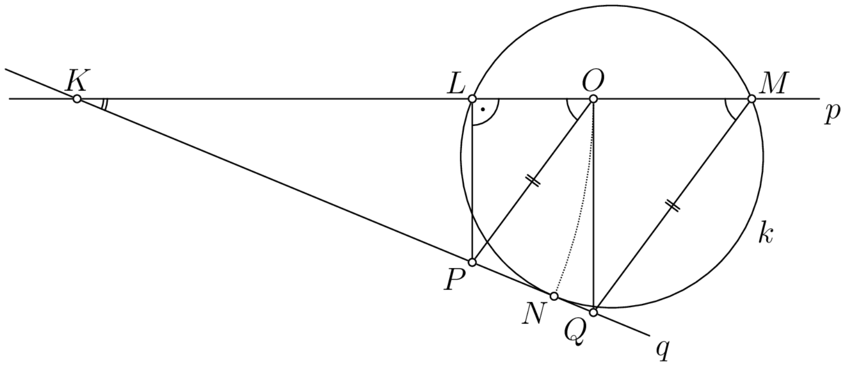
$$KL \parallel AG, \quad KM \parallel BD. \tag{31}$$

Uvažujme nyní otočení se středem v bodě C o úhel 90°. V tomto otočení odpovídá bodu D bod A a bodu B bod G. Tedy obrazem přímky BD je přímka AG, přičemž úhel jimi sevřený je shodný s úhlem otočení, tj. úhel 90°. Ze vztahu (31) tak plyne, že i KL je kolmá na KM, čímž je důkaz uzavřen.

Další ukázková úloha ilustruje využití vlastností stejnolehlosti, tj. že stejnolehlé přímky jsou navzájem rovnoběžné. Tato úloha využívá také mocnost bodu ke kružnici a navazuje tak na předcházející úlohu 4.17.

Příklad 4.30 (Vojtěch Zlámal)

Je dána kružnice k a bod K vně této kružnice. Bodem K veďme přímku p, která protíná kružnici k v bodech L, M, a dále veďme bodem K tečnu q ke kružnici k s bodem dotyku N. Na úsečce LM označme O, pro nějž platí $|KO| = KN$. Označme P průsečík kolmice k přímce p vedené bodem L s přímkou q. Nechť Q je takový bod přímky q, pro který platí $QM \parallel PO$. Dokažte, že $QO \perp KM$.



obr. 4.30.1

Řešení. Bez újmy na obecnosti nechť K leží na polopřímce opačné k polopřímce LM (viz obr. 4.30.1). Pro mocnost bodu K ke kružnici k platí

$$|KN|^2 = |KL| \cdot |KM|.$$

Jelikož $|KN| = |KO|$, pak

$$|KO|^2 = |KL| \cdot |KM|,$$

neboli

$$\frac{|KO|}{|KL|} = \frac{|KM|}{|KO|}. \tag{32}$$

Z rovnoběžnosti PO a QM vyplývá podobnost trojúhelníků KOP a KMQ (uu). Pro poměry odpovídajících si stran tak platí

$$\frac{|KM|}{|KO|} = \frac{|KQ|}{|KP|}. \tag{33}$$

Uvažujme nyní stejnolehlost se středem v bodě K zobrazující bod O na bod M. Vezmeme-li vztahy (32) a (33) jako koeficienty stejnolehlosti, vyplyne nám, že uvažovaná stejnolehlost zobrazuje P na Q a L na O. Přímky LP a QO jsou tak rovnoběžné a tedy kolmé ke KN. Tím je důkaz uzavřen.

Následující úlohy lze také řešit využitím geometrických zobrazení.

Příklad 4.31

Danému rovnoběžníku jsou vně připsány čtverce. Dokažte, že jejich středy jsou rovněž vrcholy čtverce. (*viz např.* [38])

Příklad 4.32

Jsou dány dvě kružnice s vnějším dotykem v bodě A. Uvažujme přímku procházející průsečíkem vnějších společných tečen zadaných kružnic a protínající zadané kružnice po řadě v bodech B, C, D, E. Dokažte, že $|\sphericalangle BAD| = 90°$. (*viz např.* [39])

4.5 Důkaz kolinearity trojice bodů

Řešení úloh, jejichž řešením je důkaz, že tři body leží na téže přímce (jsou kolineární), je možné vystavět na dvou základních principech. První (obecný) je založen na důkazu, že uvažované body „tvoří“ přímku, tj. že body leží na předem nespecifikované přímce. V závislosti na povaze úlohy lze však řešení některých úloh založit také na následující úvaze. Dvěma ze zadaných bodů je vedena přímka a principem řešení je důkaz, že třetí ze zadaných bodů leží právě na dotyčné přímce.

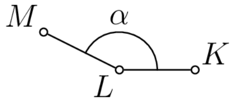
Výše uvedené rozdělení úloh však není jediné možné. Z hlediska využitých konkrétních planimetrických poznatků je možné identifikovat několik základních metod či postupů a úlohy na tomto základě rozčlenit. Elementární metodou řešení úloh této části je důkaz, že uvažované tři body tvoří přímý popřípadě nulový úhel. Jiná možnost postupu řešení je založena na volbě vhodného bodu na přímce dané dvěma z uvažovaných bodů a následně důkazu, že tento zvolený bod je totožný s třetím ze zadaných bodů. Dále je také možné využít vlastností shodných a podobných zobrazení či aplikovat tzv. *Menelaovu větu*, jejíž důsledky jsou součástí základů projektivní geometrie například v podobě tzv. *Desarguesovy věty*.

Struktura následujícího textu využívá druhé z uvedených dělení metod, přičemž mezi příklady jsou zastoupeny úlohy z obou větví prvního popsaného rozdělení.

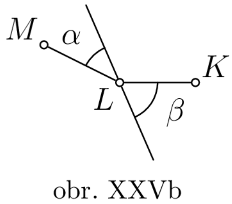
4.5.1 Důkaz existence přímého či nulového úhlu

Základním poznatkem využitelným k důkazu, že tři body leží na téže přímce, je fakt, že libovolné tři body přímky určují přímý nebo nulový úhel. Například na obrázku XXVa je znázorněna situace, v níž kolinearita bodů K, L, M vyplyne z důkazu, že zobrazený úhel KLM je přímý. Existenci přímého úhlu lze však dokázat také využitím vhodné přímky procházející jedním z uvažovaných bodů. Na obrázku XXVb jsou zobrazeny úhly α, β, které svírají po řadě úsečky KL, LM s přímkou procházející bodem L. Shodnost úhlů α a β pak implikuje kolinearitu bodů K, L, M.

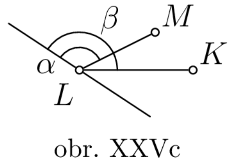
Obdobně důkaz existence nulového úhlu se opírá o využití vhodné přímky. Body K, L, M na obrázku XXVc budou ležet na téže přímce, budou-li zobrazené úhly α, β shodné, tj. úhel KLM bude nulový. Obměnou tohoto postupu je možné řešit situace na obrázku XXVd, v němž kolinearita bodů K, L, M nastane, bude-li $\alpha + \beta = 180°$.



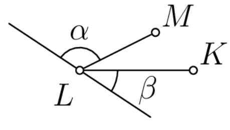
obr. XXVa



obr. XXVb



obr. XXVc

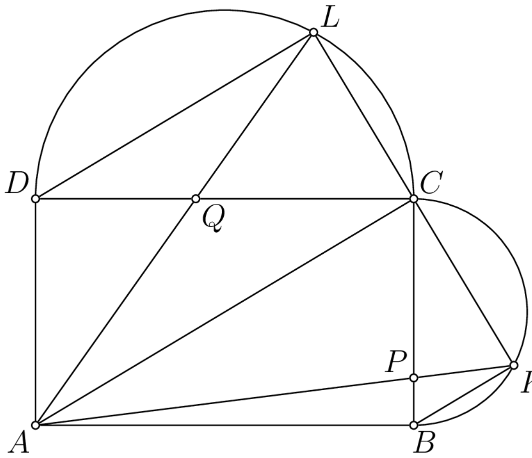


obr. XXVd

První uvedená úloha je ukázkou elementárního postupu při důkazu existence přímého úhlu.

Příklad 5.1 (53. MO, C–I–2)

Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce.



obr. 5.1.1

Řešení. Mají-li trojúhelníky ABP a KCP stejné obsahy, mají také trojúhelníky ABC a AKC stejné obsahy. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABC, AKC mají společnou stranu AC, musejí být výšky na tuto stranu v obou trojúhelnících shodné. Platí tak $BK \parallel AC$. Jelikož polokružnice připsaná straně BC je částí Thaletovy kružnice nad průměremBC, je úhel CKB pravý. Z uvedené rovnoběžnosti však plyne, že i úhel ACK je pravý. Obdobně lze ukázat, že úhel LCA je také pravý. Odtud

$$|\sphericalangle LCK| = |\sphericalangle LCA| + |\sphericalangle ACK| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

Body K, L, C tak leží na téže přímce, čímž je důkaz uzavřen.

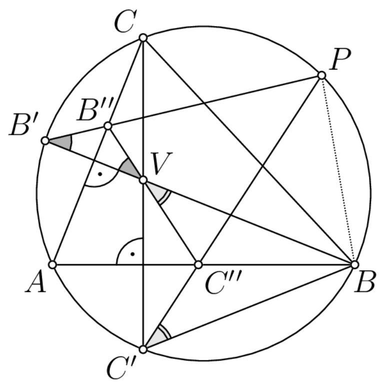
Řešení druhé ukázkové úlohy využívá k důkazu existence přímého úhlu přímku procházející jedním ze zadaných bodů.

Příklad 5.2

Nechť V je průsečíkem výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme B', C' body souměrně sdružené s V po řadě v osových souměrnostech podle stran AC, AB. Buď P libovolný vnitřní bod oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A. Označme pak B'', C'' po řadě průsečíky přímek PB', AC a PC', AB. Dokažte, že body B'', V, C'' leží na téže přímce.

Řešení. Jelikož body V a C' jsou souměrně sdružené podle úsečky AB a bod C'' leží na úsečce AB, platí

$$|\sphericalangle C''VB| = |\sphericalangle BC'C''| = |\sphericalangle BC'P|.$$



obr. 5.2.1

Obdobně body V a B' jsou souměrně sdružené podle úsečky AC a bod B'' leží na úsečce AC, platí tak

$$|\sphericalangle B''VB'| = |\sphericalangle VB'B''| = |\sphericalangle BB'P|.$$

Vzhledem k tomu, že obrazy B', C' ortocentra V v souměrnosti podle stran AC, AB daného trojúhelníku leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku, lze využít vlastností obvodových úhlů. Úhly $BC'P$ a $BB'P$ jsou obvodovými úhly příslušející k tětivě BP, jsou tedy shodné, z čehož plyne

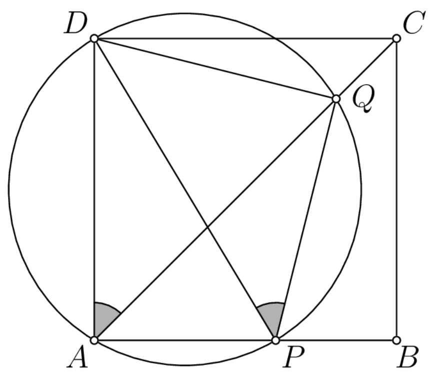
$$|\sphericalangle C''VB| = |\sphericalangle BC'P| = |\sphericalangle BB'P| = |\sphericalangle B''VB'|.$$

Body B'', V, C'' tak leží na téže přímce, což jsme měli dokázat.

Následující úloha ilustruje důkaz existence nulového úhlu.

Příklad 5.3

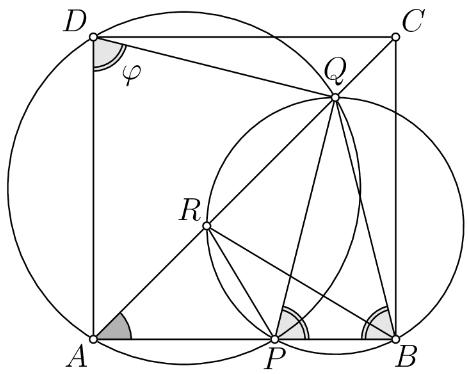
Buď $ABCD$ čtverec a P vnitřní bod jeho strany AB. Kružnice procházející body A, D, P protíná úhlopříčku AC ještě v bodě Q. Kružnice procházející body B, P, Q protíná AC v dalším bodě R. Dokažte, že body D, P, R jsou kolineární.



obr. 5.3.1

Řešení. Dle zadání je čtyřúhelník $APQD$ tětivový, přičemž bod Q leží na úhlopříčce zadaného čtverce, proto z vlastností obvodových úhlů plyne

$$|\sphericalangle QPD| = |\sphericalangle QAD| = |\sphericalangle PAQ| = 45^\circ,$$



obr. 5.3.2

Označme nyní φ velikost úhlu ADQ. Jelikož $APQD$ je tětivový, platí $|\sphericalangle BPQ| = \varphi$. Ovšem vzhledem k tomu, že trojúhelníky AQD a AQB jsou souměrně sdruženy podle osy AC, je také $|\sphericalangle QBP| = \varphi$. Ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku ABQ plyne

$$|\sphericalangle AQB| = 180^\circ - 45^\circ - \varphi = 135^\circ - \varphi.$$

Jelikož čtyřúhelník $PBQR$ je také tětivový, platí

$$|\sphericalangle BPR| = 180^\circ - |\sphericalangle RQP| = 180^\circ - |\sphericalangle AQP| = 45^\circ + \varphi$$

neboli

$$|\sphericalangle BPQ| + |\sphericalangle QPR| = 45^\circ + \varphi.$$

Odtud plyne $|\sphericalangle QPR| = 45^\circ$. Úhly QPD a QPR jsou tedy shodné, úhel RPQ je tak nulový a body D, P, R jsou kolineární. Tím je důkaz ukončen.

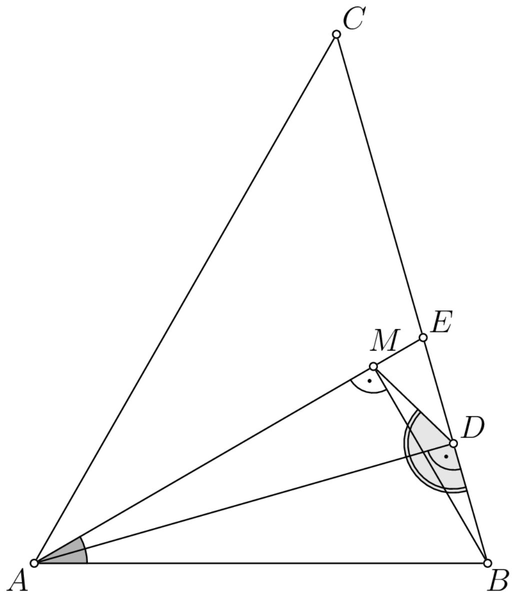
Další úloha ukazuje druhý možný způsob důkazu existence nulového úhlu.

Příklad 5.4

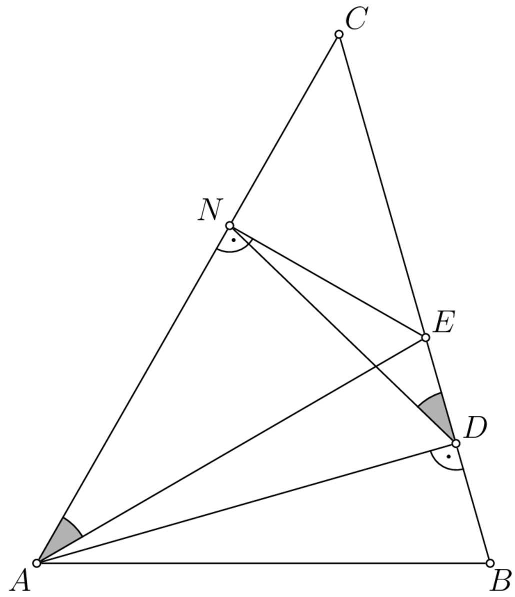
V trojúhelníku ABC nechť jsou D, E vnitřní body úsečky BC takové, že D je patou výšky z vrcholu A a AE je osou vnitřního úhlu BAC. Označme M patu kolmice z B na AE a N patu kolmice z E na AC. Dokažte, že body D, M, N jsou kolineární.

Řešení. Vzhledem k tomu, že oba úhly ADB a AMB jsou pravé, čtyřúhelník $BDMA$ je tětivový. Odtud plyne

$$|\sphericalangle MDB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAM| = 180^\circ - |\sphericalangle BAE|.$$



obr. 5.4.1a



obr. 5.4.1b

Ovšem také $|\sphericalangle EDA| + |\sphericalangle ANE| = 90° + 90° = 180°$, tedy čtyřúhelník $DENA$ je také tětivový. Platí tak
$$|\sphericalangle EAN| = |\sphericalangle EDN| = |\sphericalangle CDN|.$$
Jelikož AE je osou vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A, je
$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle EAN|.$$
Proto platí
$$|\sphericalangle MDB| + |\sphericalangle CDN| = 180° - |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle CDN| = 180° - |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle EAN| = \\ = 180° - |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle BAE| = 180°.$$
Úhel NDM je tak nulový a body D, M, N leží v přímce, čímž je důkaz uzavřen.

Následující úlohy je možno také řešit využitím přímého či nulového úhlu.

Příklad 5.5 (29. MO, C–P–2, upraveno)

Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a$, $BC = a$. Nad stranami AB, AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný bod K. Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD.

Příklad 5.6

Nechť odvěsnám AC, BC pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou vně připsány rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ACQ, BCP tak, že AC, BC jsou přeponami připsaných trojúhelníků. Dokažte, že body C, P, Q leží na téže přímce. (*viz např.* [8])

Příklad 5.7

Buď P bod kružnice opsané trojúhelníku ABC. Označme K, L, M kolmé průměty bodu P po řadě na přímky AB, BC, AC. Dokažte, že body K, L, M jsou kolineární. (*viz např.* [7])

Poznámka 10. Přímka daná body K, L, M v příkladu 5.7 se nazývá *Simsonova přímka.*

Příklad 5.8

Dokažte, že spojnice středů obou základen lichoběžníku prochází průsečíkem jeho úhlopříček. (*viz např.* [14])

Příklad 5.9

Nechť úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku se protínají v bodě E. Stranám AB, CD jsou vně připsány trojúhelníky ABP, CDQ, přičemž

$$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle DAE|, \qquad |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle CBE|,$$
$$|\sphericalangle QDC| = |\sphericalangle ADE|, \qquad |\sphericalangle QCD| = |\sphericalangle BCE|.$$

Dokažte, že body P, E, Q leží na téže přímce. (*viz např.* [26])

Příklad 5.10

Jsou dány navzájem podobné trojúhelníky ABC ADE takové, že D je vnitřním bodem trojúhelníku ABC a E leží vně tohoto trojúhelníku. Označme P druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE. Dokažte, že body B, D, P jsou kolineární. (*viz např.* [6])

Příklad 5.11 (Vojtěch Zlámal)

Buď dána kružnice k o středu S a bod A vně této kružnice. Bodem A veďme tečny ke kružnici k s body dotyku označme B, C. Dále nechť D je bod přímky AC takový, že $|AC| = |AD|$. Označme E bod souměrně sdružený s bodem D v osové souměrnosti s osou BS. Dokažte, body C, B, E leží na téže přímce.

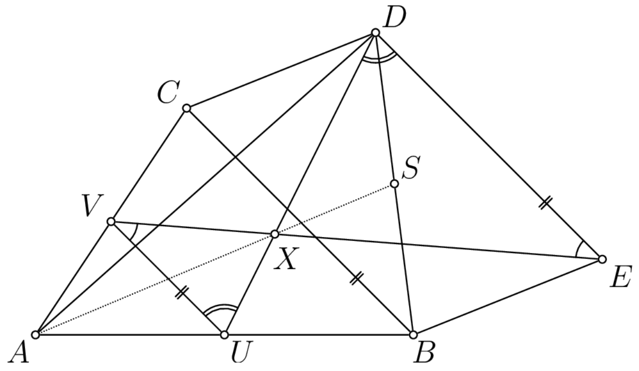
4.5.2 Využití vhodného bodu na přímce

Jak bylo uvedeno výše, řešení úlohy o kolinearitě tří bodů lze založit na volbě vhodného bodu na přímce určené dvěma z uvažovaných bodů. Důkaz, že třetí ze zadaných bodů je totožný se zvoleným bodem, se pak často opírá o specifické polohové nebo metrické vlastnosti zvoleného bodu. Lze se setkat s úlohami, ve kterých volba vhodného bodu probíhá implicitně, ale také explicitně. Ve druhém případě je možné využít princip důkazu sporem, tj. předpokládá se, že zvolený bod je různý od bodu, pro který vedeme důkaz, a následně je ukázán spor s tímto předpokladem a tyto dva body tak musejí být totožné.

Využití vlastností středu rovnoběžníku ukazuje následující úloha.

Příklad 5.12 (64. MO, B–I–3)

V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC. V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE. Dokažte, že přímka AX prochází středem rovnoběžníku $BCDE$.



obr. 5.12.1

Řešení. Jelikož UV je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí

$$|UV| = \tfrac{1}{2}|BC|,\ UV \parallel BC.$$

Avšak strany DE a BC rovnoběžníku $BCDE$ jsou shodné a rovnoběžné, tedy

$$|UV| = \tfrac{1}{2}|DE|,\ UV \parallel DE.$$

Odtud plynou shodnosti $|\sphericalangle UVE| = |\sphericalangle DEV|$ a $|\sphericalangle UDE| = |\sphericalangle DUV|$ (střídavé úhly), trojúhelníky EDX a VUX jsou tak podobné a platí

$$\frac{|UX|}{|DX|} = \frac{1}{2}.$$

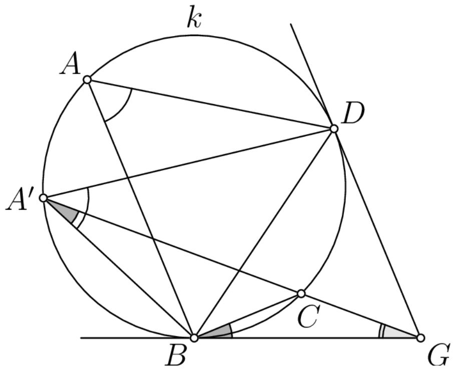
Uvažujme nyní trojúhelník ABD. Úsečka UD je jeho těžnicí, a proto bod X je vzhledem k uvedenému poměru jeho těžištěm. Přímka AX tedy prochází středem S strany BD trojúhelníku ABD. Jelikož úsečka BD je zároveň úhlopříčkou rovnoběžníku $BCDE$, je S středem také středem rovnoběžníku $BCDE$. Tím je důkaz dokončen.

Výše uvedené explicitní stanovení vhodného bodu a princip důkazu sporem ilustruje další úloha.

Příklad 5.13 (51. MO, A–II–3, upraveno)

Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, pokud platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tečny ke kružnici k v bodech B, D se protínají v bodě G (různoběžnost uvedených tečen je zajištěna podmínkou, že BD není průměrem kružnice k), který leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD jako bod C (viz obr. 5.13.1). Předpokládejme dále, že přímka CG protne kružnici k ve dvou bodech, v bodě C a v bodě A' různém od A.



obr. 5.13.1

Z shodnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného k tětivě BC plyne podobnost trojúhelníků BGA' a CGB, přičemž platí

$$\frac{|A'B|}{|BC|} = \frac{|BG|}{|CG|}.$$

Obdobně z podobnosti trojúhelníků DGA a CGD plyne

$$\frac{|A'D|}{|CD|} = \frac{|DG|}{|CG|}.$$

Jelikož úseky tečen BG a DG jsou shodné, platí

$$\frac{|A'B|}{|BC|} = \frac{|A'D|}{|CD|},$$

neboli

$$|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|.$$

Porovnáme-li však tuto rovnost se zadanou rovností, dostáváme

$$\frac{|A'B|}{|AB|} = \frac{|A'D|}{|AD|}. \tag{34}$$

Vzhledem k tomu, že úhly $BA'D$ a BAD jsou shodné (obvodové úhly nad touž tětivou), vyplývá z poměru (34) podobnost trojúhelníků BDA' a BDA (*sus*). Jelikož tyto trojúhelníky mají shodné (a v podobnosti si odpovídající) strany BD, jsou tyto trojúhelníky shodné. Bod A je tak totožný s bodem A', což je spor s předpokladem $A \neq A'$. Přímka body A, C, G tedy leží na téže přímce, což jsme měli dokázat.

Také následující úlohy jsou řešitelné volbou vhodného bodu na přímce.

Příklad 5.14

Nechť odvěsnám AC, BC pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou vně připsány rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky ACQ, BCP tak, že AC, BC jsou přeponami připsaných trojúhelníků. Buď D bod poloroviny ABC takový, že ABD je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB. Dokažte, že bod D leží na přímce PQ. (*viz např.* [8])

Příklad 5.15 (18. MO, C–II–4)

Je dána úsečky AB a její vnitřní bod C. Nad průměrem AC je sestrojena kružnice k_0, bodem B je vedena přímka p kolmá k AB. Budiž k kružnice, která protíná kružnici k_0 v bodech X, Y a přímku p v bodech X', Y'. Leží-li body A, X, X' v přímce, leží také body A, Y, Y' v přímce; dokažte.

Příklad 5.16 (55. MO, A–II–3, upraveno)

Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že je-li čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, pak druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP.

Příklad 5.17 (64. MO, A–I–3)

Je dán trojúhelník ABC, v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M. Na stranách AB, AC určíme po řadě body X, Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímek CX a BY označme Z. Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku.

4.5.3 Využití geometrických zobrazení

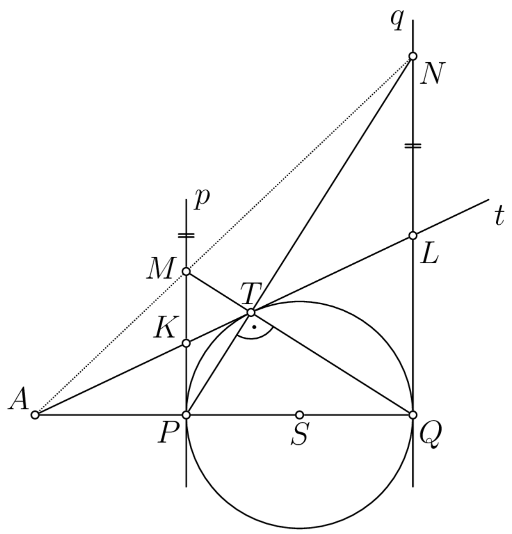
Mezi efektivní metody řešení úloh o kolinearitě trojice bodů patří využití geometrických zobrazení, převážně pak stejnolehlosti. Zde se využívá zejména základního faktu, že stejnolehlé body leží na téže přímce se středem stejnolehlosti. K často využívaným postupům patří využívání stejnolehlých (a tedy podobných) trojúhelníků nebo stejnolehlých kružnic.

Následující úloha ilustruje právě využití stejnolehlosti trojúhelníků.

Příklad 5.18 (32. MO, B–S–2)

V rovině je dána kružnice k o středu S a v její vnější oblasti bod A. Přímka t prochází bodem A a dotýká se kružnice k v bodě T. Označme P, Q průsečíky přímky AS s kružnicí k, tečny kružnice k v bodech P, Q označme p, q. Průsečík přímek p a QT označíme M, průsečík přímek q a PT označíme N. Dokažte, že body M, N, A, leží na přímce.

Řešení. Uvažujme nyní stejnolehlost se středem v bodě A zobrazující bod P na bod Q. Postačující podmínkou k tvrzení, že body A, M, N leží na téže přímce, je důkaz, že v uvedené stejnolehlosti se bod M zobrazí na bod N.



obr. 5.18.1

Označme K, L průsečíky tečny t po řadě s přímkami p, q. Vzhledem k tomu, že přímky p, q jsou rovnoběžné a přímka t prochází bodem A, jsou úsečky KP a LQ stejnolehlé v uvedené stejnolehlosti. Pro koeficient stejnolehlosti tak platí:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|KP|}{|LQ|}.$$

Jelikož T je bodem kružnice na průměrem PQ, tj. Thaletovy kružnice, jsou úhly PTQ, MTP, QTN pravé. Jelikož $|KT| = |KP|$ a $|LT| = |LQ|$ (shodné úseky tečen vedených ke kružnici daným bodem), jsou body K, L po řadě středy přepon pravoúhlých trojúhelníků MPT, NQT. Platí tak

$$|MP| = 2|KP|,\ |NQ| = 2|LQ|.$$

Odtud

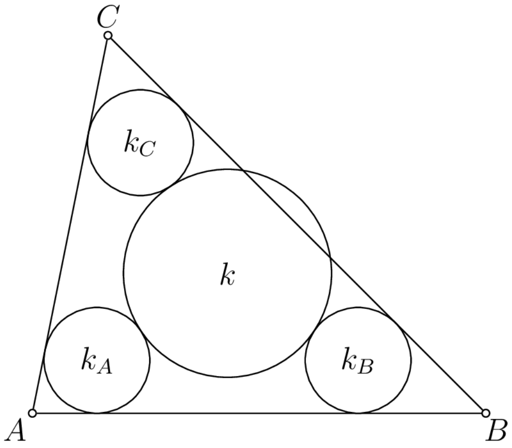
$$\frac{|MP|}{|NQ|} = \frac{2|KP|}{2|LQ|} = \frac{|KP|}{|LQ|} = \frac{|AP|}{|AQ|},$$

tedy úsečky MP a NQ jsou stejnolehlé, body A, M, N tak leží v přímce. Tím je důkaz uzavřen.

Řešení další úlohy využívá stejnolehlosti kružnic a vlastností středu kružnice vepsané trojúhelníku.

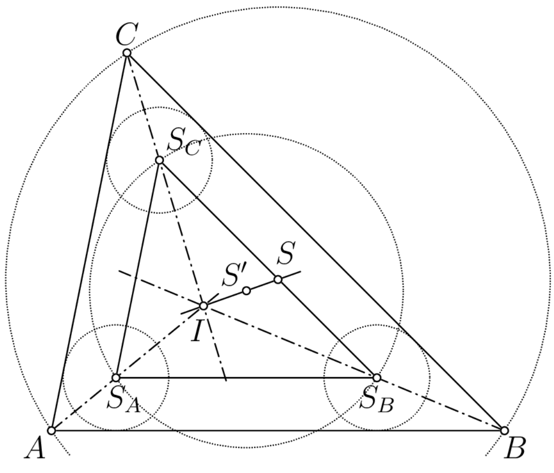
Příklad 5.19

Nechť k_A, k_B, k_C jsou kružnice o stejném poloměru vepsané po řadě vnitřním úhlům při vrcholech A, B, C trojúhelníku ABC. Buď k kružnice, která má vnější dotyk s kružnicemi k_A, k_B, k_C. Dokažte, že střed kružnice k leží na přímce dané středy kružnice vepsané a opsané trojúhelníku ABC.

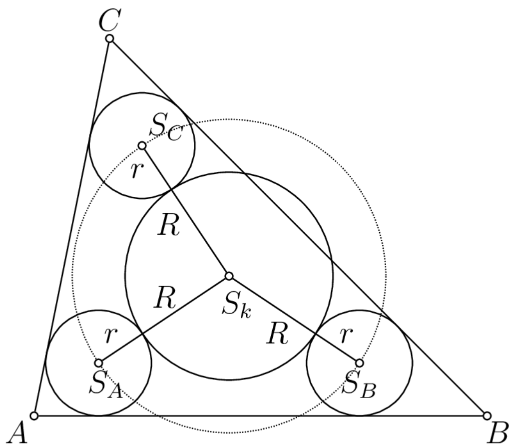


obr. 5.19.1

Řešení. Označme S_A, S_B, S_C po řadě středy kružnic k_A, k_B, k_C. Strany trojúhelníku $S_AS_BS_C$ jsou rovnoběžné s odpovídajícími stranami trojúhelníku ABC (vzdálenost bodů S_A, S_B, S_C od příslušných stran je rovna poloměru kružnic k_A, k_B, k_C). Vzhledem k tomu, že body S_A, S_B, S_C leží na osách příslušných vnitřních úhlů, jsou trojúhelníky ABC a $S_AS_BS_C$ stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem I (průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC). Uvažujme nyní střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC. V popsané stejnolehlosti se bod S zobrazí na střed S' kružnice opsané trojúhelníku $S_AS_BS_C$. Bod S' tak leží na přímce SI.



obr. 5.19.2a



obr. 5.19.2b

Dále označme S_k střed kružnice k, r poloměr kružnic k_A, k_B, k_C a R poloměr kružnice k. Vzhledem k tomu, že kružnice k má s kružnicemi k_A, k_B, k_C vnější dotyk, platí pro vzdálenosti středů těchto kružnic

$$|S_kS_A| = |S_kS_B| = |S_kS_C| = R + r.$$

Bod S_k je tak středem kružnice opsané trojúhelníku $S_AS_BS_C$ (S_k a S' jsou totožné) a podle úvahy v první části důkazu leží na přímce SI. Tím je důkaz uzavřen.

Dále uvedené úlohy lze také řešit využitím vlastností stejnolehlosti.

Příklad 5.20

Buď $ABCD$ lichoběžník a M,N po řadě středy jeho stran AB, CD. Dokažte, že přímka MN prochází průsečíkem přímek BC a AD. (*viz např.* [39])

Příklad 5.21

Nechť k_1, k_2, k_3 jsou dané kružnice, z nichž žádná neleží uvnitř jiné. Označme P_1, P_2, P_3 průsečíky vnějších společných tečen jednotlivých dvojic zadaných kružnic. Dokažte, že body P_1, P_2, P_3 leží na téže přímce. (*viz např.* [6])

Příklad 5.22 (4. MO, A–III–1, upraveno)

Buď dán lichoběžník $ABCD$, o jehož základnách platí: $AB > CD$. Označme E průsečík přímek AC, BD a F průsečík přímek AD, BC. Dále označme GH přímku jdoucí bodem E a rovnoběžnou se základnami, přičemž G leží na přímce AD a H na přímce BC. Označme po řadě K, L středy základen AB, CD. Následně nechť M je průsečík přímek AC, KH a N je průsečík přímek BD, KG. Dokažte, že F, M, N leží v jedné přímce.

Příklad 5.23 (Vojtěch Zlámal)

Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB, CD a K, L jeho vnitřní body, pro které platí, že trojúhelníky ABK a CDL jsou podobné. Dokažte, že na přímce KL, leží také průsečík M úhlopříček lichoběžníku. Platí toto tvrzení také, pokud $ABCD$ je obdélník?

4.5.4 Menelaova věta

Silným prostředkem pro řešení úloh o kolinearitě tří bodů je tzv. *Menelaova věta*, která je úzce spjata s větou *Cèvovou.* Pomocí těchto vět lze následně dokázat důležité poznatky formulované například do *Pascalovy věty* nebo *Desarguesovy věty.*

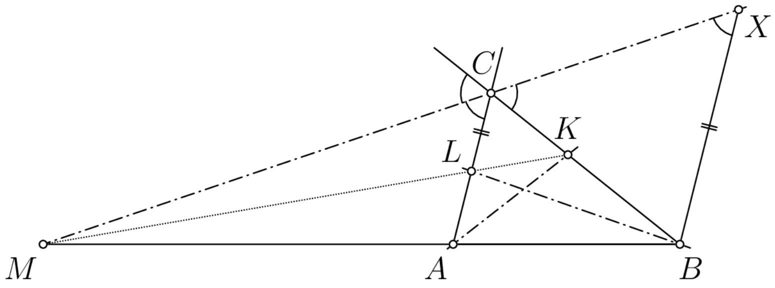
První ukázková úloha využívající *Menelaovu větu* ukazuje také efektivní využití věty o ose úhlu.

Příklad 5.24

Dokažte, že body, v nichž se protnou strany trojúhelníka ABC, který není rovnoramenný, s osami dvou vnitřních a zbývajícího vnějšího úhlu, leží v přímce.

Řešení. Zadaná podmínka, že trojúhelník ABC není rovnoramenný zajišťuje, že osa libovolného vnějšího úhlu se protne s prodloužením příslušné protější strany. V případě rovnoramenného trojúhelníku je totiž osa vnějšího úhlu při hlavním vrcholu rovnoběžná se základnou.

Bez újmy na obecnosti uvažujme osy vnitřních úhlů při vrcholech A, B trojúhelníku ABC a osu vnějšího úhlu při vrcholu C tak, že se tato osa protne s prodloužením strany AB na polopřímce opačné k polopřímce AB. Označme pak průsečíky K, L



obr. 5.24.1

os vnitřních úhlů při vrcholech A, B po řadě se stranami BC, AC trojúhelníku ABC a M průsečík osy vnějšího úhlu při vrcholu C s prodloužením strany AB (viz obr. 5.24.1).

Na základě věty o ose vnitřního úhlu je patrné, že

$$\frac{|BK|}{|CK|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \tag{35}$$

$$\frac{|CL|}{|AL|} = \frac{|BC|}{|AB|}. \tag{36}$$

Sestrojme nyní přímku BX rovnoběžnou s AC takovou, že M, C, X leží v přímce. Jelikož MC je osou vnějšího úhlu pro vrcholu C, plyne z rovnoběžnosti AC a BX

$$|\sphericalangle MCA| = |\sphericalangle BCX| = |\sphericalangle CXB|.$$

Trojúhelník BXC je tak rovnoramenný ($|BX| = |BC|$). Vzhledem k uvažované rovnoběžnosti AC a BX jsou trojúhelníky MAC a MBX podobné (uu) a platí

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|BX|} = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{37}$$

Vynásobíme-li vztahy (35), (36), (37) dostáváme

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = 1.$$

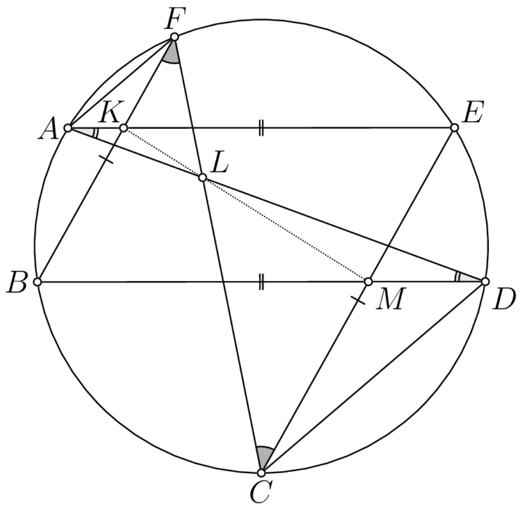
Podle *Menelaovy věty* jsou tak body K, L, M kolineární, což jsme měli dokázat.

Řešení další úlohy je důkazem zmíněné *Pascalovy věty* pro kružnici.

Příklad 5.25 (Pascalova věta)

Na kružnice k jsou dány body A, B, C, D, E, F (v tomto pořadí). Označíme-li K, L, M po řadě průsečíky dvojic přímek AE, BF; AD, CF a BD,CE, pak body K, L, M leží v přímce. Dokažte.

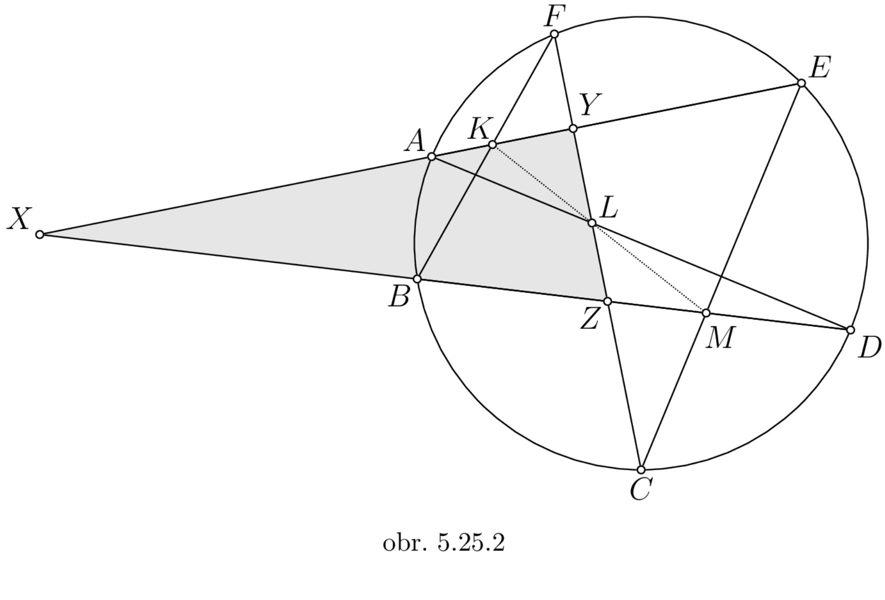
Řešení. Pokud v daném šestiúhelníku $ABCDEF$ platí $AE \parallel BD$ a současně $BF \parallel CE$ (viz obr. 5.25.1), pak $|AB| = |DE|$ a $|BC| = |EF|$. Z rovnosti obvodových úhlů pro



obr. 5.25.1

shodné oblouky kružnice plyne, že trojúhelníky ABC a DEF jsou shodné a tedy $|AC| = |DF|$. Čtyřúhelník $ACDF$ je tak obdélník nebo rovnoramenný lichoběžník se základnami AF, CD. Vzhledem k uvažované rovnoběžnosti AE, BD a BF,CE, jsou přímky AF, CD rovnoběžné a trojúhelníky AFK a DCM podobné (uu). Proto lze využít důkazu tvrzení úlohy 5.23, z čehož plyne, že body K, L, M leží v přímce.

Bez újmy na obecnosti tedy uvažujme, že přímky AE a BD jsou různoběžné a jejich průsečík označme X. Nyní zvolme dva vhodné průsečíky Y, Z úhlopříček šestiúhelníku $ABCDEF$ tak, že body K, L, M leží na jednotlivých stranách (popřípadě jejich prodloužení) trojúhelníku XYZ. Označme tedy Y průsečík AE, CF a Z průsečík BF, CF (viz obr. 5.25.2).



obr. 5.25.2

Body B, K, F jsou kolineární a leží na stranách trojúhelníku XYZ, proto podle *Menelaovy věty*

$$\frac{|XK|}{|YK|} \cdot \frac{|YF|}{|ZF|} \cdot \frac{|ZB|}{|XB|} = 1. \tag{38}$$

Obdobně body A, L, D jsou kolineární a leží na stranách trojúhelníku XYZ, proto

$$\frac{|XA|}{|YA|} \cdot \frac{|YL|}{|ZL|} \cdot \frac{|ZD|}{|XD|} = 1. \tag{39}$$

A také body C, M, E jsou kolineární a leží na stranách trojúhelníku XYZ, tedy

$$\frac{|XE|}{|YE|} \cdot \frac{|YC|}{|ZC|} \cdot \frac{|ZM|}{|XM|} = 1. \tag{40}$$

Vynásobením vztahů (38), (39), (40) získáme

$$\frac{|XK|}{|YK|} \cdot \frac{|YF|}{|ZF|} \cdot \frac{|ZB|}{|XB|} \cdot \frac{|XA|}{|YA|} \cdot \frac{|YL|}{|ZL|} \cdot \frac{|ZD|}{|XD|} \cdot \frac{|XE|}{|YE|} \cdot \frac{|YC|}{|ZC|} \cdot \frac{|ZM|}{|XM|} = 1,$$

neboli

$$\frac{|XK|}{|YK|} \cdot \frac{|YL|}{|ZL|} \cdot \frac{|ZM|}{|XM|} \left(\frac{|YF| \cdot |YC|}{|YE| \cdot |YA|} \cdot \frac{|XA| \cdot |XE|}{|XB| \cdot |XD|} \cdot \frac{|ZB| \cdot |ZD|}{|ZC| \cdot |ZF|} \right) = 1. \tag{41}$$

Ovšem vzhledem k mocnosti bodů X, Y, Z k zadané kružnici platí

$$\begin{aligned} |YF| \cdot |YC| &= |YE| \cdot |YA|, \\ |XA| \cdot |XE| &= |XB| \cdot |XD|, \\ |ZB| \cdot |ZD| &= |ZC| \cdot |ZF|. \end{aligned}$$

Ze vztahu (41) tak plyne

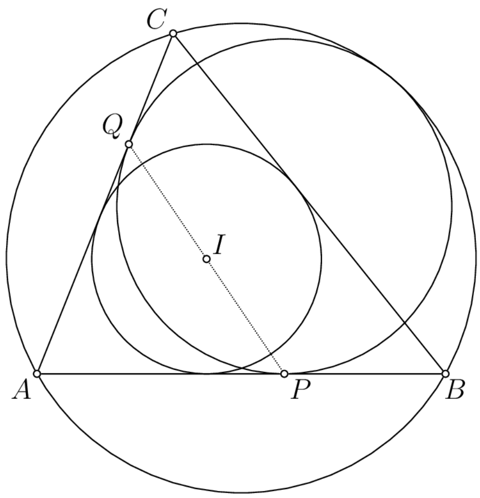
$$\frac{|XK|}{|YK|} \cdot \frac{|YL|}{|ZL|} \cdot \frac{|ZM|}{|XM|} = 1,$$

Tedy podle *Menelaovy věty* leží body K, L, M na též přímce. Tím je důkaz uzavřen.

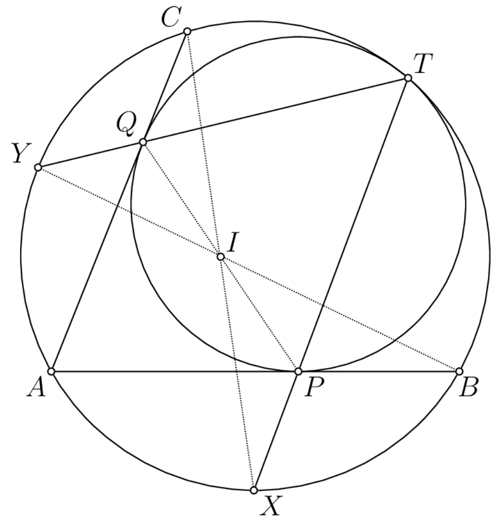
Poslední ukázková úloha ilustruje využití *Pascalovy věty* pro kružnici jakožto důsledku *Menelaovy věty.*

Příklad 5.26

Uvažujme kružnici l, která má vnitřní dotyk s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC a současně se dotýká jeho stran AB, AC po řadě v bodech P, Q. Dokažte, že střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na přímce PQ.



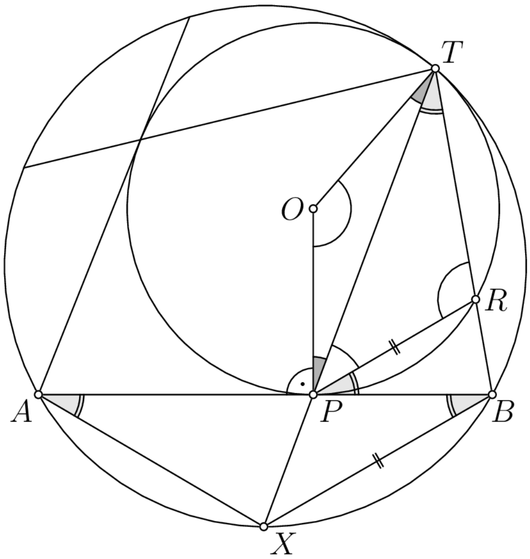
obr. 5.26.1a



obr. 5.26.1b

Řešení. Označme X, Y po řadě průsečíky přímek TP, TQ s kružnicí k ($X \neq T \neq Y$). Ze zdárnému vyřešení úlohy za pomoci *Pascalovy věty* je třeba dokázat, že bod I leží na CX i na BY.

Nechť R je druhý průsečík přímky BT k kružnicí l a O je střed kružnice l (viz obr. 5.26.2. Označme α velikost úhlu OTP a β velikost úhlu PTB. Trojúhelník PTO je rovnoramenný, proto $|\sphericalangle TPO| = \alpha$ a následně $|\sphericalangle POT| = 180° - 2\alpha$. Dále úhel TRP je obvodovým úhlem k tětivě TP a bod R leží v opačné polorovině s hraniční přímkou TP než bod O. Ze vztahu středového a obvodového úhlu tak plyne $|\sphericalangle TRP| = 90° - \alpha$. Ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku PRT následně plyne $|\sphericalangle RPT| = 90° - \alpha - \beta$. Vzhledem k tomu, že AB je tečnou ke kružnici l s bodem dotyku P, platí $|\sphericalangle BPO| = 90°$, odkud $|\sphericalangle BPR| = \beta$.



obr. 5.26.2

Jelikož kružnice k, l jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem T a v této stejnolehlosti odpovídá bod B bodu R a bod X bodu P, jsou přímky XB, RP rovnoběžné.

Proto

$$|\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle PBX| = |\sphericalangle BPR| = \beta.$$

Z rovnosti obvodových úhlů na touž tětivou však plyne

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XTB| = \beta.$$

Trojúhelník ABX je tak rovnoramenný se základnou AB. Z rovnosti obvodových úhlů na shodnými tětivami téže kružnice plyne, že přímka CX je osou úhlu ACB ($|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle XCB|$). Přímka CX tedy prochází středem I kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Obdobně lze dokázat, že přímka BY prochází bodem I. Konfigurace bodů A, X, B, T, C, Y a průsečíků P, I, L odpovídá předpokladům *Pascalovy věty*. Proto body P, I, L leží na téže přímce, čímž je důkaz uzavřen.

Následující úlohy jsou taktéž řešitelné využitím *Menelaovy věty.*

Příklad 5.27

Osy vnějších úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C protínají prodloužení protilehlých stran k příslušnému vrcholu po řadě v bodech X, Y, Z. Dokažte, že body A, B, C leží na téže přímce. (*viz např.* [46])

Příklad 5.28

Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v jeho vrcholech protínají prodloužení příslušných protilehlých stran ve třech kolineárních bodech. (*viz např.* [43])

Příklad 5.29 (Desarguesova věta)

Pro dva trojúhelníky ABC, KLM se přímky AK, BL, CM protínají v jednom bodě, právě když průsečík přímek AB, KL, průsečík AC, KM a průsečík BC, LM leží na jedné přímce. (*viz např.* [11])

Příklad 5.30

Buď dán čtyřúhelník $ABCD$ takový, že pro průsečík jeho úhlopříček M platí $|AM| = |MC|$ a $|DM| = 2\,|MB|$. Označme X, Y po řadě vnitřní body úseček MC, BC takové, že

$$\frac{|AC|}{|MX|} = \frac{|BY|}{|YC|} = 3.$$

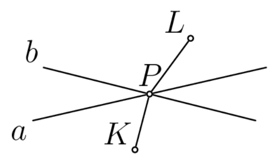
Dokažte, že body A, B, C jsou kolineární. (*viz např.* [11])

4.6 Důkaz konkurentnosti trojice přímek

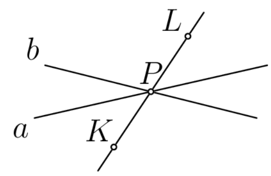
Metody řešení úloh, v nichž je třeba dokázat, že dané tři přímky procházejí týmž bodem, lze rozdělit na základní metody využívající vlastností polohy průsečíku dvojice přímek vzhledem k přímce třetí či vlastností průsečíků jednotlivých dvojic přímek a dále na metody využívající specifické vlastnosti konkurentních přímek v geometrii trojúhelníku. Samostatně lze vyčlenit ještě metodu založenou na tzv. *Cèvově větě*, která je velmi silným prostředkem v řešení úloh této problematiky.

4.6.1 Důkaz existence přímého úhlu

Elementární metodou řešení úloh této problematiky je prokázání, že průsečík zvolené dvojice zadaných přímek leží na přímce třetí. Tento postup ilustruje situace na obrázku XXVIa, v níž je P průsečík přímek a, b a K, L jsou body, které na daných přímkách a, b neleží. Dokážeme-li, že lomená čára KPL je úsečkou s vnitřním bodem P, tedy ověříme-li skutečnost, že úhel KPL je přímý ($|\sphericalangle KPL| = 180°$), pak bod P leží na přímce KL. Tím je dokážeme, že přímky a, b a KL jsou konkurentní (obr. XXVIb).



obr. XXVIa



obr. XXVIb

Ukázková úloha ilustruje využití této metody na jednoduchém příkladu.

Příklad 6.1

Stranám BC a CA daného trojúhelníku ABC jsou vně připsány čtverce $CBEF$ a $ACGH$. Dokažte, že přímky AF, BG a HE se protínají v jednom společném bodě.

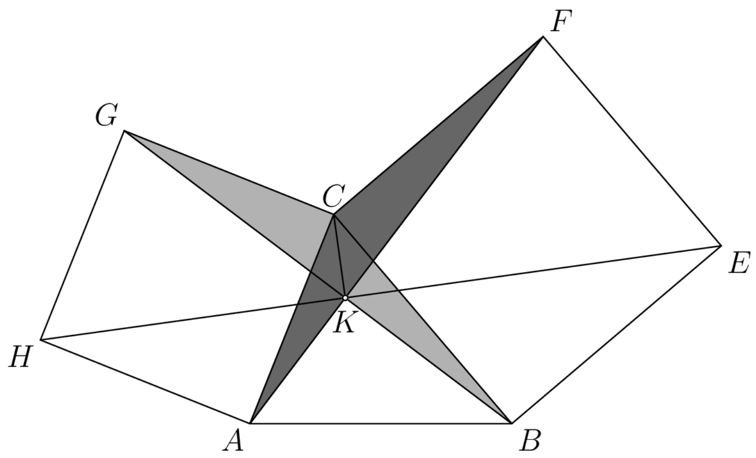
Řešení. Nechť K je průsečíkem přímek AF a BG (obr. 6.1.1). Uvažujme úsečky EK a HK. Dokážeme-li, že úhel EKH je přímý, leží bod K na přímce HE a přímky AF, BG a HE jsou konkurentní.

Jelikož trojúhelníky AFC a GBC jsou shodné (dle věty *sus*), jsou úhly KAC a KGC shodné. Body A, K, C, G tedy leží na jedné kružnici. Tato kružnice je jednoznačně určena body A, C, G, jde tedy o kružnici opsanou čtverci $ACGH$ neboli o Thaletovu kružnici nad průměrem HC. Odtud vyplývá, že

$$|\sphericalangle CKH| = 90°.$$

Analogicky dokážeme, že

$$|\sphericalangle EKC| = 90°.$$



obr. 6.1.1

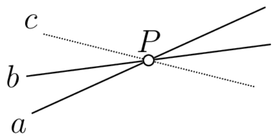
Z rovnosti

$$|\sphericalangle EKH| = |\sphericalangle EKC| + |\sphericalangle CKH| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

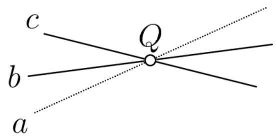
pak plyne, že bod K leží na přímce HE, tedy přímky AF, BG a HE jsou konkurentní, což jsme chtěli dokázat.

4.6.2 Využití průsečíků dvojic přímek

Druhým způsobem důkazu konkurentnosti tří přímek je využití průsečíků vhodných dvojic přímek. Ukázková situace je zobrazena na obrázcích XXVIIa, XXVIIb. Zde uvažujme přímky a, b, c, které jsou po dvou různoběžné, a označme P průsečík přímek a, b a Q průsečík přímek b, c. Dokážeme-li, že body P a Q jsou totožné, pak přímky a, b, c jsou konkurentní. Řešení úloh využívající tuto metodu pak zpravidla



obr. XXVIIa



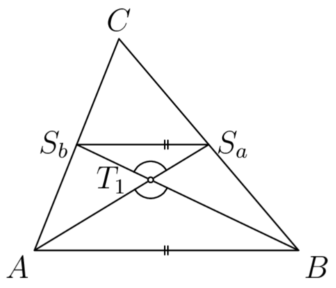
obr. XXVIIb

vede na rozdělení postupu řešení do dvou fází. V první fázi jsou prokazovány specifické vlastnosti průsečíků vybraných dvojic přímek a v druhé fázi na základně dokázaných vlastností jsou pak tyto průsečíky ztotožněny. Vhodnou ukázkou uvedeného postupu je důkaz konkurentnosti těžnic v libovolném trojúhelníku.

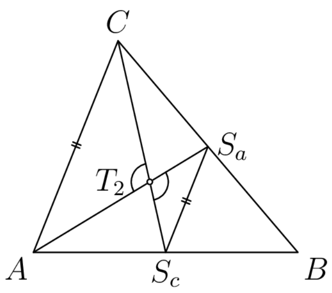
Příklad 6.2

Dokažte, že těžnice v libovolném trojúhelníku se protínají v jednom bodě (těžišti).

Řešení. Uvažujme střední příčky S_aS_b, S_aS_c trojúhelníku ABC (obr. 6.2.1a, 6.2.1b) a těžnice AS_a, BS_b a CS_c. Označme T_1 průsečík těžnic AS_a a BS_b, T_2 průsečík těžnic AS_a a CS_c.



obr. 6.2.1a



obr. 6.2.1b

Z vlastností střední příčky S_aS_b trojúhelníku ABC plyne

$$\frac{|S_aS_b|}{|AB|} = \frac{|AT_1|}{|T_1S_a|} = \frac{1}{2} \text{ (obr. 6.2.1a)}$$

a podobně i

$$\frac{|S_aS_c|}{|AB|} = \frac{|AT_2|}{|T_2S_a|} = \frac{1}{2} \text{ (obr. 6.2.1b).}$$

Vzhledem k tomu, že oba průsečíky T_1 i T_2 jsou vnitřní body úsečky AS_a a platí dále

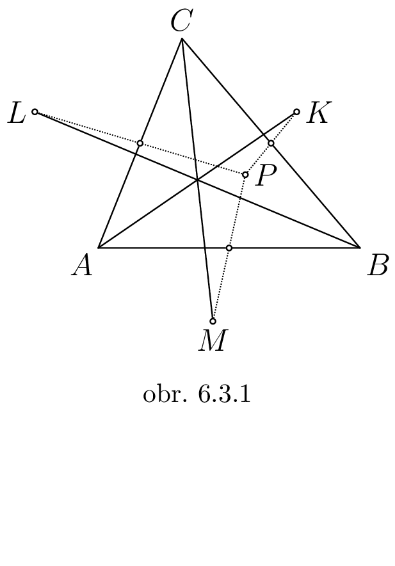
$$\frac{|AT_1|}{|T_1S_a|} = \frac{|AT_2|}{|T_2S_a|},$$

jsou body T_1, T_2 totožné. Všechny tři těžnice tak procházejí týmž bodem.

Následující úloha využívá k důkazu totožnosti dvou bodů vlastnosti průsečíku úhlopříček rovnoběžníku.

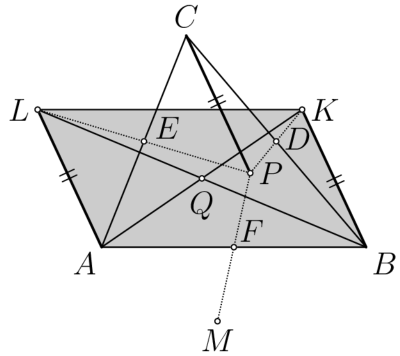
Příklad 6.3 (1. česko-polsko-slovenská JMO, 2012)

Nechť P je bod ležící uvnitř trojúhelníku ABC a nechť K, L, M jsou body souměrně sdružené s bodem P po řadě podle středů stran BC, CA, AB. Dokažte, že přímky AK, BL, CM se protínají v jediném bodě.

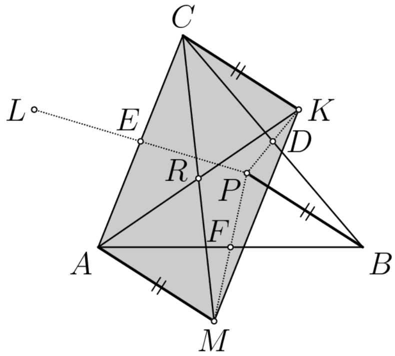


obr. 6.3.1

Řešení. Označme D, E, F po řadě středy stran BC, CA, AB. Vzhledem k tomu, že



obr. 6.3.2a



obr. 6.3.2b

body P a K jsou souměrně sdružené podle středu D, jsou trojúhelníky BKD a CPD shodné. Odtud plyne

$$|BK| = |PC| \quad \text{a} \quad BK \parallel PC.$$

Obdobně pro body P a L platí

$$|AL| = |PC| \quad \text{a} \quad AL \parallel PC.$$

Body A, B, K, L tak tvoří rovnoběžník (viz obr. 6.3.2a). Označíme-li průsečík jeho úhlopříček Q, z vlastností rovnoběžníku vyplývá, že

$$|AQ| = |QK|.$$

Analogicky $AMKC$ je rovnoběžník (obr. 6.3.2b) a pro průsečík R jeho úhlopříček platí

$$|AR| = |RK|.$$

Jelikož oba body Q, R leží na úsečce AK, plyne z výše uvedených rovností, že jsou totožné. Přímky AK, BL, CM se tak protínají v jednom společném bodě. Tím je důkaz uzavřen.

Dále následují úlohy, k jejichž řešení je možné také využít metodu průsečíků dvojic přímek.

Příklad 6.4

V rovině je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, EA a osa úhlu CDE se protínají v jednom společném bodě. (*viz např.* [33])

Příklad 6.5 (68. MO, C–I–2)

Nechť je dán trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG.

Příklad 6.6

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme E patu jeho výšky na stranu BC a F patu jeho výšky na stranu AC. Dále označme M, N po řadě středy úseček BE, AF. Dokažte, že kolmice vedená bodem M k úsečce AC a kolmice vedená bodem N k úsečce BC se protínají ve středu úsečky EF. (*viz např.* [8])

Příklad 6.7

Je dán trojúhelník ABC a k jeho stranám BC, AC nechť jsou vně připsány rovnostranné trojúhelníky BDC, ACE. Označme P druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BDC, ACE. Dokažte, že přímky CP, BE a AD procházejí jedním bodem.

Příklad 6.8

Buď $ABCD$ lichoběžník, v němž platí $BC \parallel AD$ a $|\sphericalangle CBA| = 90°$. Označme M vnitřní bod úsečky AB takový, že $|\sphericalangle CMD| = 90°$. Buď AK výškou v trojúhelníku DAM a BL výškou v trojúhelníku MBC. Dokažte, že přímky AK, BL, CD jsou konkurentní. (*viz např.* [2])

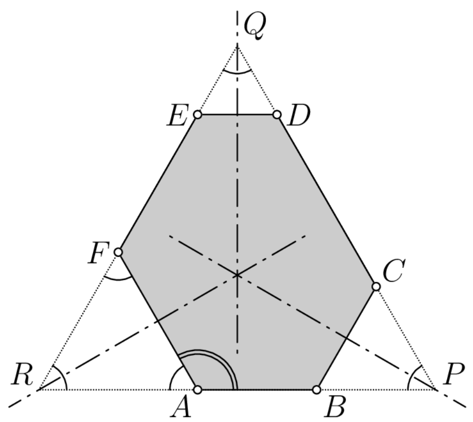
4.6.3 Využití polohových vlastností v geometrii trojúhelníku

K důkazu konkurentnosti přímek je také možné použít známých polohových vlastností v geometrii trojúhelníků. Řešení úlohy pak spočívá v transformaci zadaných prvků na vhodné prvky trojúhelníku tak, že z jejich polohových vlastností vyplyne konkurentnost daných přímek. Metody založené na uvedené transformaci pak mohou využívat například vlastností středu kružnice opsané, vepsané či připsané trojúhelníku, těžnic a těžiště trojúhelníku, výšek a ortocentra trojúhelníku.

V následující ukázce je využito vlastností os vnitřních úhlů trojúhelníku a středu kružnice vepsané.

Příklad 6.9

V rovině je dán šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, DE a FA se protínají v jednom společném bodě.



obr. 6.9.1

Řešení.

Označme P průsečík přímek AB a CD, Q přímek CD a EF, R přímek EF a AB (viz obr. 6.9.1). Vzhledem k tomu, že všechny vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou shodné (jejich velikost je 120°), jsou trojúhelníky BPC, DQE, FRA a PQR rovnostranné.

Osa strany FA šestiúhelníku je tak osou úhlu ARF trojúhelníku FRA, neboli osou úhlu PRQ. Obdobně osy stran BC a DE jsou po řadě osami úhlů QPR a RQP. Ze známého faktu, že osy úhlů v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (středu kružnice vepsané), vyplývá, že také osy stran AB, CD a DE daného šestiúhelníku se protínají v jednom společném bodě, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 11. Analogicky lze dokázat, že také osy stran AB, CD, EF se protínají v jednom společném bodě.

Řešení další ukázkové úlohy využívá nejen vlastností kružnice opsané trojúhelníku a jejího středu, ale také (obdobně jako předchozí úloha) vlastnosti středu kružnice vepsané trojúhelníku.

Příklad 6.10

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a střed O kružnice jemu opsané. Sestrojme trojúhelník $A_0B_0C_0$ takový, že jeho strany B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 jsou rovnoběžné po řadě s přímkami OA, OB, OC. Dokažte, že přímka rovnoběžná s BC procházející bodem A_0, přímka rovnoběžná s CA procházející bodem B_0 a přímka rovnoběžná s AB procházející bodem C_0 jsou konkurentní.

Řešení. Bez újmy na obecnosti umístěme kvůli názornosti trojúhelník $A_0B_0C_0$ dovnitř trojúhelníku ABC. Jelikož O je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC plyne ze vztahu pro středový a obvodový úhel

$$|\sphericalangle BOC| = 2\,|\sphericalangle BAC|,$$

proto v rovnoramenném trojúhelníku BCO se základnou BC platí

$$|\sphericalangle OCB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC|.$$

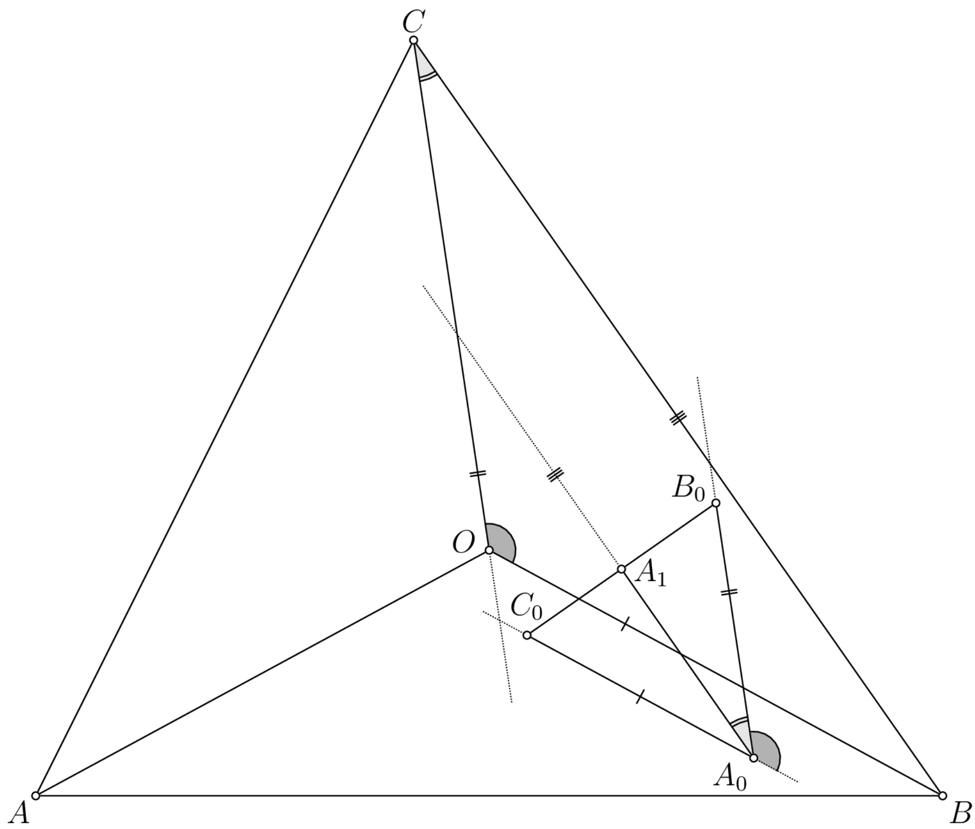
Vzhledem k platnosti $OC \parallel A_0B_0$ a $C_0A_0 \parallel OB$ je velikost vnějšího úhlu při vrcholu A_0 trojúhelníku $A_0B_0C_0$ rovna velikosti úhlu BOC, tj. $2\,|\sphericalangle BAC|$.

Označme nyní A_1 bod úsečky B_0C_0 takový, že A_0A_1 je rovnoběžná s BC. Z vlastností úhlů vyťatých příčkou rovnoběžek plyne, že

$$|\sphericalangle B_0A_0A_1| = |\sphericalangle OCB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC|.$$

Odtud

$$|\sphericalangle A_1A_0C_0| = 180^\circ - (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) - (2\,|\sphericalangle BAC|) = 90^\circ - |\sphericalangle BAC|.$$



obr. 6.10.1

Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle A_1A_0C_0| = |\sphericalangle B_0A_0A_1|$, je A_0A_1 osou vnitřního úhlu při vrcholu A_0 trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

Obdobně lze dokázat, že přímka rovnoběžná s CA procházející bodem B_0 a přímka rovnoběžná s AB procházející bodem C_0 jsou osami příslušných vnitřních úhlů trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Tyto přímky se tak protínají ve středu kružnice vepsané trojúhelníku $A_0B_0C_0$, čímž je důkaz uzavřen.

Dále uvedené úlohy jsou také řešitelné metodami založenými na využití vhodných polohových vlastnostech prvků v trojúhelníku.

Příklad 6.11 (66. MO, A–II–4)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD. Osy úhlů BAD, CAD protínají stranu BC po řadě v bodech E, F. Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H. Dokažte, že přímky EH, FG, AD se protínají v jednom bodě.

Příklad 6.12

Nechť jsou A_1, B_1 a C_1 po řadě středy kružnicových oblouků BC, CA, AB kružnice opsané trojúhelníku ABC (neobsahujících po řadě body A, B, C) a nechť jsou A_2, B_2 a C_2 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 se protínají v jednom bodě.(*viz např.* [2])

Příklad 6.13

Nechť $ABCD$ je daný čtyřúhelník, v němž $|BC| = |AD|$, přičemž jeho strany AB, CD nejsou rovnoběžné. Označme M, N po řadě středy stran BC a AD. Dokažte, že osy úseček AB, MN a CD se protínají v jednom společném bodě. (*viz např.* [1])

Příklad 6.14

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž platí $|AD| + |BC| = |CD|$. Dokažte, že osy vnitřních úhlů při jeho vrcholech C, D se protínají v jednom bodě s osou úsečky AB. (*viz např.* [26])

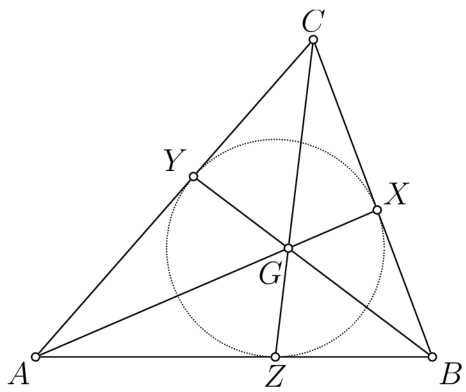
4.6.4 Využití Cèvovy věty

Mezi efektivní metody jak dokázat, že se tři přímky protínají v jednom bodě, patří tzv. *Cèvova věta*. Řešení úloh využívající tuto větu se pak opírá (obdobně jako při využití *Menelaovy věty*) o nalezení vhodných poměrů délek úseček.

Jednoduchou aplikaci Cèvovy věty ukazuje následující úloha.

Příklad 6.15

Je dán trojúhelník ABC. Označme X, Y, Z po řadě body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami a, b, c (při obvyklém značení). Dokažte, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom společném bodě.



obr. 6.15.1

Řešení. Jelikož přímky AC, AB jsou tečnami vedenými (vnějším) bodem A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC s dotykovými body Y, Z (viz obr. 6.15.1), platí

$$|AY| = |AZ|,$$

a analogicky

$$|BZ| = |BX|, \quad |CX| = |CY|.$$

Z uvedených tří rovností plyne

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1,$$

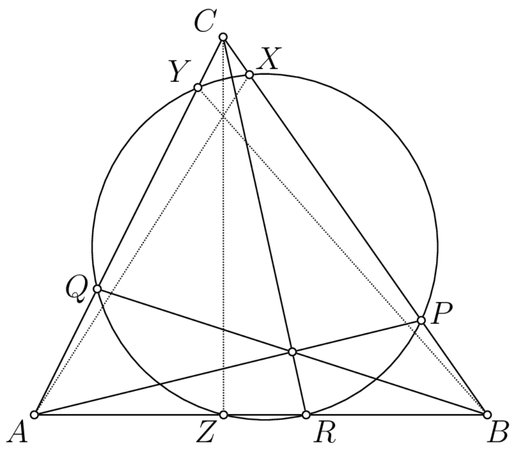
což na základě Cèvovy věty dokazuje, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom společném bodě.

Poznámka 12. Průsečík přímek AX, BY, CZ z předchozí ukázky se nazývá *Gergonnův bod* a značíme jej G. Obdobně lze formulovat úlohu o konkurentnosti tří přímek procházejících vždy vrcholem trojúhelníku a bodem dotyku příslušné kružnice vně připsané s protější stranou k uvažovanému vrcholu. Průsečík uvedených přímek se pak nazývá *Nagelův bod* a značíme jej N.

Řešení další úlohy se opírá o dvojí využití *Cèvovy věty* a také mocnosti bodu ke kružnici.

Příklad 6.16

Nechť P, Q, R jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC, přičemž platí, že AP, BQ, CR jsou konkurentní. Kružnice opsaná trojúhelníku PQR protíná po řadě strany BC, CA, AB ještě v bodech X, Y, Z. Dokažte, že AX, BY, CZ jsou konkurentní.



obr. 6.16.1

Řešení. Ze známého vztahu pro mocnost bodu ke kružnici plyne pro body A, B, C

$$\begin{aligned}|AR| \cdot |AZ| &= |AQ| \cdot |AY|,\\ |BP| \cdot |BX| &= |BR| \cdot |BZ|,\\ |CQ| \cdot |CY| &= |CP| \cdot |CX|,\end{aligned}$$

neboli

$$\frac{|AR|}{|AQ|} = \frac{|AY|}{|AZ|}, \quad \frac{|BP|}{|BR|} = \frac{|BZ|}{|BX|}, \quad \frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{|CX|}{|CY|}. \tag{42}$$

Jelikož AP, BQ, CR procházejí jedním bodem, plyne z Cèvovy věty

$$\frac{|AR|}{|BR|} \cdot \frac{|BP|}{|CP|} \cdot \frac{|CQ|}{|AQ|} = 1,$$

tedy

$$\frac{|AR|}{|AQ|} \cdot \frac{|BP|}{|BR|} \cdot \frac{|CQ|}{|CP|} = 1.$$

Využitím substituce (42) dostáváme

$$\frac{|AR|}{|AQ|} \cdot \frac{|BP|}{|BR|} \cdot \frac{|CQ|}{|CP|} = \frac{|AY|}{|AZ|} \cdot \frac{|BZ|}{|BX|} \cdot \frac{|CX|}{|CY|} = \frac{|AY|}{|CY|} \cdot \frac{|CX|}{|BX|} \cdot \frac{|BZ|}{|AZ|} = 1.$$

Podle Cèvovy věty jsou tak přímky AX, BY a CZ konkurentní. Tím je důkaz dokončen.

Užitím Cèvovy věty lze řešit rovněž následující úlohy.

Příklad 6.17

Dokažte, že výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Příklad 6.18

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC se stranami a, b, c dle obvyklého značení. Označme X patu výšky na stranu a. Nechť K, L jsou po řadě body stran b, c takové, že výška AX půlí úhel KXL. Dokažte, že přímky AX, BK a CL se protínají v jednom bodě.

Příklad 6.19

Buď A_1 vnitřní bod strany BC trojúhelníku ABC. Označme B_1, C_1 po řadě vnitřní body stran CA, AB takové, že A_1B_1 a A_1C_1 jsou po řadě osy úhlů AA_1C a BA_1A. Dokažte, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě.

(*viz např.* [40])

Příklad 6.20

Kružnice vně připsaná trojúhelníku ABC se dotýká přímek BC, CA, AB po řadě v bodech A_1, B_1, C_1. Dokažte, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 se protínají v jednom bodě. (*viz např.* [40])

Příklad 6.21

Uvažujme trojúhelník ABC a bod C_1 souměrně sdružený s bodem A ve středové souměrnosti se středem B. Obdobně A_1 buď bod souměrně sdružený s bodem B ve středové souměrnosti se středem C. Označme B_1 bod úsečky AC, pro nějž platí $|AB_1| = 4|CB_1|$. Dokažte, že AA_1, BB_1 a CC_1 jsou konkurentní. (*viz např.* [40])

Příklad 6.22

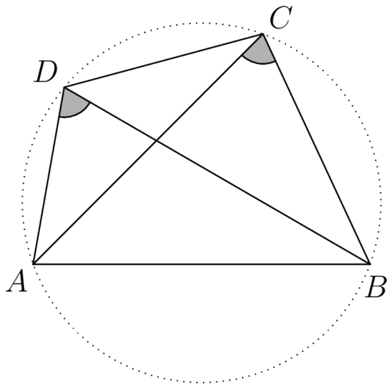
Označme K, K, M středy, D, E, F po řadě libovolné vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC a dále K', L', M' středy úseček AD, BE a CF. Přímky AD, BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK', LL' a MM'. Dokažte. (*viz např.* [35])

4.7 Důkaz koncykličnosti čtyř bodů

V důkazech, že dané čtyři body leží na téže kružnici (jsou koncyklické, jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníku) lze postupovat dvěma základními (syntetickými) cestami. První z nich je založena na vlastnostech obvodových úhlů příslušejících k tětivě kružnice, druhá pak na využití mocnosti bodu ke kružnici. Obě metody včetně příkladů jsou prezentovány dále.

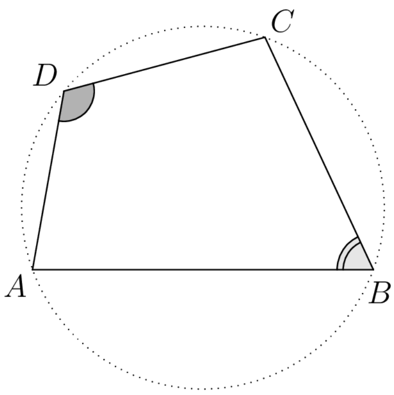
4.7.1 Využití vlastností obvodových úhlů

První způsob řešení důkazových úloh daného typu se opírá (ve trojí modifikaci) o základní vlastnosti obvodových úhlů, popř. známé kriterium pro tětivový čtyřúhelník. Například konvexní čtyřúhelník $ABCD$ zobrazený na obrázku XXVIII bude tětivový, právě když pro vyznačené úhly platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. Obdobně v situaci

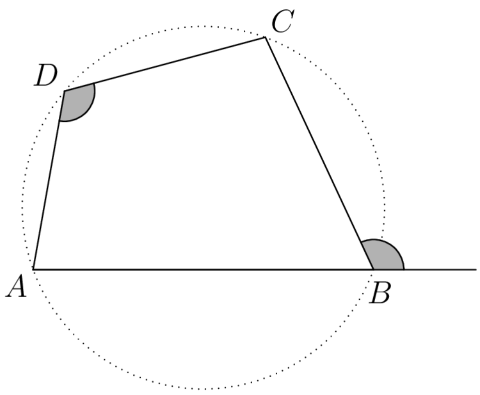


obr. XXVIII

znázorněné na obrázku XXIXa budou body A, B, C, D koncyklické (dle kriteria tětivového čtyřúhelníku), právě když $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = 180°$. Tuto skutečnost lze však vyjádřit také tak, že konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když velikost vnitřního úhlu při kterémkoliv jeho vrcholu je shodná s velikostí vedlejšího úhlu u vrcholu protějšího (obr. XXIXb).



obr. XXIXa



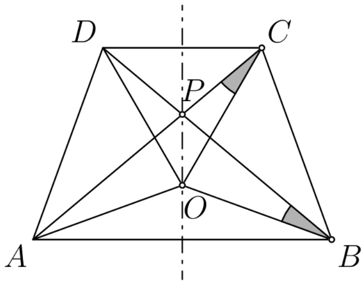
obr. XXIXb

První ukázková úloha této části využívá uvedenou vlastnost obvodových úhlů v kružnici.

Příklad 7.1

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD, P průsečík jeho úhlopříček a O střed kružnice jemu opsané. Dokažte, že body B, C, P, O leží na téže kružnici.

Řešení. Předpokládejme, že $P \neq O$. V opačném případě je řešení triviální. Dále předpokládejme, že body B, C, P, O tvoří v uvedeném pořadí vrcholy čtyřúhelníku stejně jako na obr. 7.1.1.



obr. 7.1.1

Předně si uvědomme, že body P a O leží na společné ose základen AB, CD rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a že úhlopříčky AC a BD lichoběžníku $ABCD$ jsou shodné. V případě čtyřúhelníku $BCOP$ (vrcholy čtyřúhelníku jsou po řadě body B, C, O, P) je možno situaci řešit analogicky. Jelikož bod O je středem kružnice opsané uvažovanému lichoběžníku a $|AC| = |BD|$, jsou trojúhelníky AOC a DOB shodné (podle věty *sss*). Platí tedy

$$|\sphericalangle PCO| = |\sphericalangle PBO|.$$

Čtyřúhelník $BCPO$ je tak tětivový (B, C, P, O leží na téže kružnici), čímž je důkaz uzavřen.

Princip řešení další úlohy se zakládá na kriteriu tětivového čtyřúhelníku, a to v obou uvedených podobách.

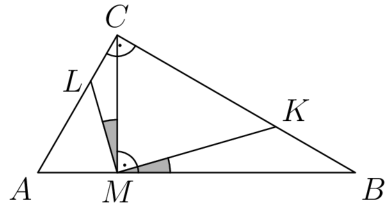
Příklad 7.2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, bod M jako pata kolmice z vrcholu C na stranu c a body K, L ležící po řadě na stranách BC, CA, přičemž platí $2\,|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$. Dokažte, že body K, C, L a M leží na téže kružnici.

Řešení. Vzhledem k tomu, že úsečka CM je kolmá ke straně AB, platí

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACM|, \qquad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MCB|,$$

z čehož vyplývá, že trojúhelníky CAM a BCM jsou podobné (podle věty *uu*).



obr. 7.2.1

Jelikož body K a L dělí po řadě strany BC a CA ve stejném poměru, jsou také trojúhelníky MBK a MCL podobné. Platí tedy

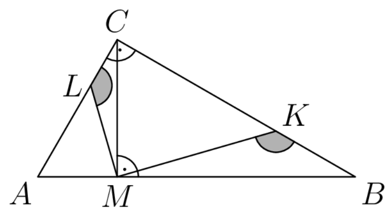
$$|\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle CML|.$$

Odtud plyne

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMK| + |\sphericalangle KMC| = |\sphericalangle KMC| + |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle KML| = 90°.$$

Jelikož $|\sphericalangle LCK| + |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle KML| = 180°$, body K, C, L, M leží na téže kružnici.

Jiné řešení.



obr. 7.2.2

Opět využijeme skutečnosti, že trojúhelník MBK je podobný trojúhelníku MCL (viz první řešení). Platí tudíž

$$|\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle MKB|.$$

Tím je dokázáno, že body K, C, L, M leží na téže kružnici a důkaz je dokončen.

Následující úlohy jsou také řešitelné na základě uvedených úvah.

Příklad 7.3

Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Nechť jsou I_1, I_2 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC a ABD. Dokažte, že také čtyřúhelník ABI_1I_2 je tětivový.
(*viz např.* [2])

Příklad 7.4

V rovině jsou dány dvě různé polopřímky VX a VY. Na polopřímce VX jsou dány body A, C, E a G (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu V – od nejbližšího po nejvzdálenejší) a na polopřímce VY body B, D, F a H (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu V – od nejbližšího po nejvzdálenejší), přičemž body A, B, C, D leží na téže kružnici, body C, D, E, F leží na téže kružnici a body E, F, G, H leží na téže kružnici. Dokažte, že také body A, B, G, H leží na téže kružnici.

Příklad 7.5

Je dán trojúhelník ABC, průsečík jeho výšek V a bod V' souměrně sdružený s bodem V podle osy AB. Dokažte, že body A, V', B a C leží na téže kružnici. (*viz např.* [2])

Příklad 7.6

Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě P. Dokažte, že kolmé průměty A', B', C', D' bodu P po řadě na úsečky AB, BC, CD a DA leží na téže kružnici. (*viz např.* [2])

Příklad 7.7

Ve čtyřúhelníku jsou sestrojeny osy všech čtyř vnitřních úhlů. Dokažte, že čtyři průsečíky vždy dvou sousedních os leží na kružnici. (*viz např.* [14])

Příklad 7.8

Ve čtverci $ABCD$ jsou na stranách BC a CD zvoleny body L a M tak, že úhel LAM má velikost 45°; úhlopříčka BD protíná přímku AL v bodě K a přímku AM v bodě N. Dokažte, že body K, L, C, M a N leží na téže kružnici. (*viz např.* [5])

Příklad 7.9 (56. MO, A–II–3, upraveno)

Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC. Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

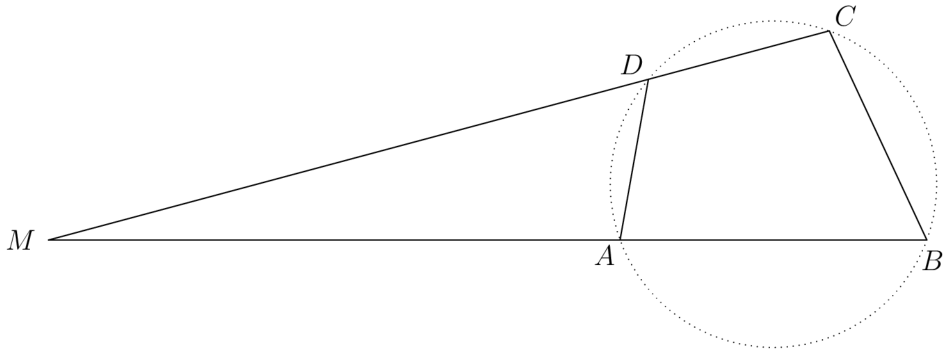
Příklad 7.10 (62. MO, B–S–3)

Uvažujme dvě kružnice se středy S_1 a S_2 takové, že jejich společné vnitřní tečny protínají jejich společné vnější tečny ve čtyřech bodech. Dokažte, že tyto čtyři průsečíky leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2.

4.7.2 Využití mocnosti bodu ke kružnici

Další způsob provádění důkazů, že dané čtyři body leží na téže kružnici, využívá mocnosti bodu ke kružnici. V závislosti na povaze úlohy lze využívat nejen mocnost bodu vně uvažované kružnice, ale také mocnost bodu uvnitř této kružnice. V případě konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a průsečíku M přímek AB, CD (viz obr. XXX) tak platí, že čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když

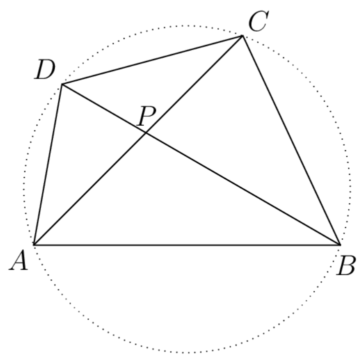
$$|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|.$$



obr. XXX

Nebo naopak v případě, že uvažujeme průsečík P úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (viz obr. XXXI), lze využít mocnost tohoto průsečíku k uvažované kružnici. Platí tak, že čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$



obr. XXXI

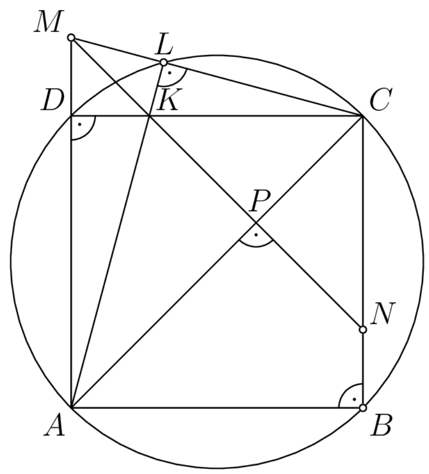
Následující úloha ukazuje využití mocnosti bodu vně kružnice k této kružnici.

Příklad 7.11 (53. MO, A—III—5)

Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M a N leží na téže kružnici.

Řešení. Jelikož úhlopříčka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, je úhel ALC pravý (podle Thaletovy věty). V trojúhelníku ACM tak tvoří úsečky AL a CD výšky a bod K je jejich průsečíkem, tj. *ortocentrem* trojúhelníku ACM. Označme P průsečík přímek AC a MK. Protože úsečka MP prochází bodem K, je výškou v trojúhelníku ACM k jeho straně AC. Odtud vyplývá, že úhel MPA je pravý.

Přímka MK protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě N, neboť přímka MK je rovnoběžná s úhlopříčkou BD (obě jsou kolmé na AC). Vzhledem k tomu, že úhly NBA, APN, ADC a ALC jsou pravé, jsou podle Thaletovy věty čtyřúhelníky $DKLM$,



obr. 7.11.1

$APKD$, $ABNP$ tětivové. Bod C leží vně kružnic opsaných uvedeným čtyřúhelníkům, platí tedy

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK|,$$
$$|CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP|,$$
$$|CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|.$$

Odtud

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|,$$
$$|CM| \cdot |CL| = |CB| \cdot |CN|.$$

Tím je dokázáno, že body B, L, M a N jsou koncyklické.

Řešení další úlohy využívá mocnost vnějšího bodu kružnice v situaci, kdy tímto bodem je k uvažované kružnici vedena tečna.

Příklad 7.12 (60. MO, A–I–3, upraveno)

Jsou dány kružnice k, ℓ, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a ℓ zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN a $MN \nparallel KL$. Dokažte, že pokud přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL, je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.

Řešení. Označme P průsečík přímek KL a MN. Jelikož je bod P vně kružnic k, ℓ, platí

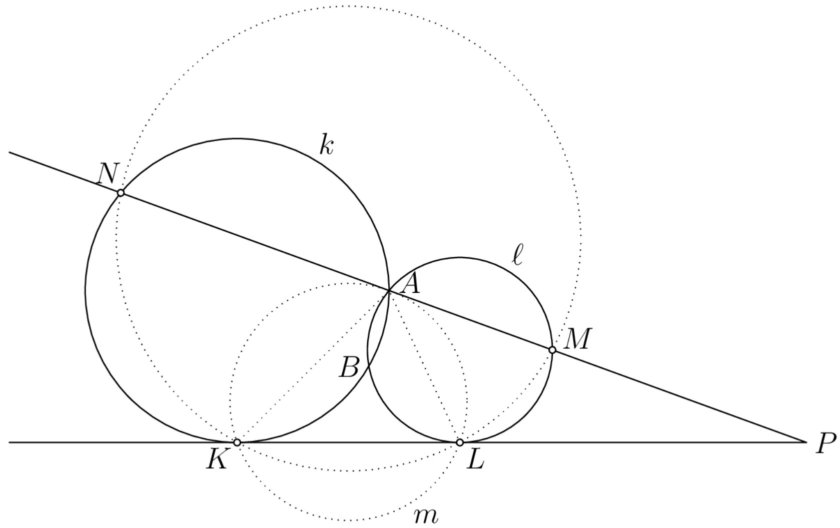
$$|PK|^2 = |PA| \cdot |PN|, \qquad |PL|^2 = |PA| \cdot |PM|.$$

Vynásobením obou vztahů dostáváme

$$|PK|^2 \cdot |PL|^2 = |PA|^2 \cdot |PM| \cdot |PN|. \tag{43}$$

Označme m kružnici opsanou trojúhelníku AKL. Je zřejmé, že bod P leží vně této kružnice. Z předpokladu, že přímka MN je tečnou kružnice m (s bodem doteku A), vyplývá

$$|PA|^2 = |PK| \cdot |PL|. \tag{44}$$



obr. 7.12.1

Z rovnic (43) a (44) plyne

$$|PK| \cdot |PL| = |PN| \cdot |PM|.$$

Odtud vyplývá, že body K, L, M, N leží na téže kružnici, čímž je důkaz ukončen.

Dále uvedené neřešené úlohy je možné taktéž řešit využitím mocnosti bodu ke kružnici.

Příklad 7.13

Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech A, B. Nechť P je libovolným vnitřním bodem úsečky AB. Přímka procházející bodem P protíná kružnici k_1 v bodech U, V. Jiná přímka procházející bodem P protíná kružnici k_2 v bodech X, Y. Dokažte, že body U, V, X , Y leží na téže kružnici. (*viz např.* [6])

Příklad 7.14 (53. MO, A–III–5)

Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M , N leží na téže kružnici.

Příklad 7.15 (55. MO, A–II–3)

Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP .

Příklad 7.16 (62. MO, B–I–3)

Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a ℓ, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.

Příklad 7.17

Je dán trojúhelník ABC, kružnice k opsaná trojúhelníku ABC a průsečík N tečen vedených ke kružnici k body A, C. Přímka rovnoběžná s BC a procházející bodem N protíná úsečku AB v bodě D. Dokažte, že body A, D, C a N leží na téže kružnici.

(*viz např.* [18])

Závěr

Cílem disertační práce bylo analyzovat podobu v současnosti využívaných materiálů ve výuce syntetické planimetrie se zaměřením na důkazové úlohy řešitelné deduktivními metodami. Ze závěrů této analýzy vyplynula potřeba zpracovat didakticky vhodnější metodologii řešení úloh uvedeného typu. Systematické uspořádání metod navržené v této práci poskytuje nejen ucelený přehled základních postupů a metod, ale také ukazuje uvedené metody na praktických ukázkách a dává k dispozici rovněž neřešené úlohy k dalšímu procvičení. Takto uspořádané metody a postupy mohou efektivně využívat jak žáci řešící úlohy matematických soutěží, zejména Matematické olympiády, tak učitelé a na jejich základě mohou vytvářet další a sofistikovanější metody.

Kapitola věnovaná vlastní metodologii byla zpracována tak, aby mohla posloužit jako samostatný materiál určený v přípravě žáků na matematické soutěže. Struktura této kapitoly, založená na kategorizaci metod odvozené z kategorizace důkazových úloh, umožňuje využití této části jako „kuchařky pro začátečníky“. Jinak řečeno tuto část mohou s úspěchem využívat žáci, kteří s důkazovými úlohami syntetické planimetrie nemají mnoho zkušeností a v této problematice se příliš neorientují. Zkušenějším řešitelům nabízí tato část možnost upevnit si své poznatky, popřípadě se dále zdokonalovat na předkládaných neřešených úlohách. Není ambicí předložené práce vytvořit vyčerpávající systém metod. Uváděné metody jsou základní a jejich zařazení do práce odpovídá také četnosti jejich využívání v literatuře.

Výsledky této práce mohou dále využívat učitelé středních škol jako metodický materiál a případně také studenti vysokých škol ve své přípravě v oblasti elementární matematiky.

Dílčí myšlenky a závěry této práce byly průběžně prezentovány na XXIII. Česko-Polsko-Slovenské matematické konferenci v Novém Jičíně (10. června 2016), Seminářích z didaktiky matematiky a elementární matematiky na Katedře algebry a geometrie University Palackého v Olomouci (10. listopadu 2015, 18. dubna 2017). Dále byly vybrané části publikovány v časopise Matematika-Fyzika-Informatika [37, 47] a dále v časopise Journal of Advances in Mathematics [48]. Rovněž autorská úloha 1.9 byla zařazena jako soutěžní úloha školního kola kategorie C 70. ročníku Matematické olympiády.

Přestože tato práce nabízí ucelený přehled základních deduktivních metod řešení důkazových úloh syntetické planimetrie, je možné výsledky této práce dále rozšiřovat. Nejedná se pouze o doplnění dalších témat a metod, ale celou uvedenou metodologii lze významně obohatit výzkumem v oblasti rozborů v důkazových úlohách. Problematika rozborů, jakožto součásti řešení důkazových úloh, může být významným didaktickým prvkem ve výuce matematiky na středních školách (čemuž odpovídá autorova vlastní zkušenost) a vhodné uchopení této problematiky může výrazně pomoci ve výkladu této (mnohdy obtížné) oblasti.

Použitá literatura a zdroje

[1] ANDREESCU, T., ROLÍNEK, M., TKADLEC, J.: *106 Geometry Problems from the AwesomeMath Summer Program.* XYZ Press, 2013.

[2] ANDREESCU, T., ROLÍNEK, M., TKADLEC, J.: *107 Geometry Problems from the AwesomeMath Year-round Program.* XYZ Press, 2013.

[3] BENDA, P., SKÁLA, J., DAŇKOVÁ, B.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971.

[4] BOČEK, L., KOČANDRLE, M., SEKANINA, M., ŠEDIVÝ, J.: *Geometrie II.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[5] CALDA, E.: *Sbírka řešených úloh: středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[6] DI PASQUALE, A., DO, N., MATHEWS, D.: *Problem Solving Tactics: Lessons from the Australian Mathematical Olympiad Committee Training Program.* AMT Publishing, 2014.

[7] GARDINER, A. D., BRADLEY, C. J.: *Plane Euclidean Geometry: Theory and Problems.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2012.

[8] GERETSCHLÄGER, R., KALINOWSKI, J., ŠVRČEK, J.: *A Central European Olympiad: The Mathematical Duel.* World Scientific Publishing Company, 2017.

[9] HERMAN, J., KUČERA, R., ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[10] HERMAN, J., KUČERA, R., ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 2011.

[11] HOO, H. K., MENG, K. K.: On Menelaus' Theorem. *Mathematical Medley.* 1996, roč. 23, č. 2, s. 71–76.

[12] JOBBINGS, A.: *A Problem Solver's Handbook: A Guide to Intermediate Mathematical Olympiads.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2013.

[13] KODETOVÁ, M.: *Sbírka úloh z planimetrie.* 2010. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce M. BULANT.

[14] LIDSKIJ, V. B.: *Úlohy z elementární matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965.

[15] MAČKOVÁ, P.: *Planimetrické výpočty v příkladech.* 2018. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce J. ŠIMŠA.

[16] *Matematická olympiáda.* Brno: Masarykova univerzita, 2020. Dostupné také z: `http://www.matematickaolympiada.cz`.

[17] MAXWELL, E. A.: *Deductive Geometry.* Macmillan, 1962.

[18] MONK, D.: *New Problems in Euclidean Geometry.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2009.

[19] MÚČKOVÁ, M.: *Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí shodností.* 2016. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce J. JANYŠKA.

[20] *Názvy a značky školské matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[21] OLŠÁK, M., TKADLEC, J.: Geometrická zobrazení. *Matematický korespondenční seminář.* 2011/2012, roč. 31.

[22] PARKER, T.: *Elementary geometry for teachers.* Sefton-Ash Publishing, Okemos, 2008.

[23] PAVLÍK, T.: Cèvova a Menelaova věta. In: *Sborník soustředění Domaslav 2010.* Matematický korespondenční seminář, Domaslav, 2010, s. 34–37.

[24] PETÁKOVÁ, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha, 1998.

[25] PÓLYA, G.: *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod.* MatfyzPress, Praha, 2016.

[26] POMPE, W.: *Wokół obrotów: przewodnik po geometrii elementarnej.* Wydawnictwo Szkolne Omega, 2016.

[27] POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* Prometheus, Praha, 2000.

[28] POSPÍŠILOVÁ, H.: *Sbírka úloh z planimetrie.* 2010. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce M. BULANT.

[29] *Ročenka matematické olympiády na středních školách.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1952-.

[30] SMIDA, J., ŠEDIVÝ, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro 1. ročník gymnázií.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1985.

[31] STEFANOWICZ, A.: *Proofs and Mathematical Reasoning.* University of Birmingham, 2014.

[32] *Škola mladých matematiků.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1961-1988.

[33] ŠVRČEK, J.: Jak provádět důkazy v planimetrii. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2012: sborník příspěvků, Praha, Univerzita Karlova v Praze 16. - 17. 2. 2012.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 2012, s. 58–62.

[34] ŠVRČEK, J.: *Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2014.

[35] ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, Praha, 2007.

[36] ŠVRČEK, J., VANŽURA, J.: *Geometrie trojúhelníka.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988.

[37] ŠVRČEK, J., ZLÁMAL, V.: Čtyři body na kružnici. *MFI.* 2015, roč. 24, č. 5.

[38] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J.: *Methods of Problem Solving Book 1*. Australian Mathematics Trust, 1996.

[39] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J.: *Methods of Problem Solving Book 2*. Australian Mathematics Trust, 1996.

[40] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J., KOLEV, E. M.: *Methods of Problem Solving Book 3*. Australian Mathematics Trust, 2019.

[41] THIELE, R.: *Matematické důkazy*. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1985.

[42] TRIGG, C. W.: *Mathematical Quickies: 270 Stimulating Problems with Solutions*. Dover Publications, 1985.

[43] VENEMA, G. A.: Applications of the Theorem of Menelaus. In: *Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra*. American Mathematical Society, 2013, s. 85–98.

[44] VONDRA, J., GAZÁRKOVÁ, D., MELICHAROVÁ, S., VOKŘÍNEK, R., KVĚTOŇOVÁ, M.: *Matematika pro střední školy*. Didaktis, Brno, 2013.

[45] VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[46] YIU, P.: *Advanced Euclidean Geometry*. Department of Mathematics Florida Atlantic University, 2016.

[47] ZLÁMAL, V.: O důkazech konkurentnosti přímek v rovině. *MFI*. 2018, roč. 27, č. 3.

[48] ZLÁMAL, V.: Possibilities of Preparing Pupils for Proof Problems of Synthetic Plane Geometry Solvable by Deductive Methods. *JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS*. 2021, roč. 20, s. 440–448.

Přílohy

Příloha A Četnost důkazových úloh syntetické planimetrie v ročnících MO

	Ročník									
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Shodnost úseček	0	0	1	3	1	0	0	0	0	0
Shodnost úhlů	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Rovnoběžnost přímek	0	0	2	1	1	1	0	0	0	0
Kolmost přímek	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kolinearita bodů	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Koncykličnost bodů	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Celkem	0	0	3	6	2	2	1	0	0	0

	Ročník									
	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Shodnost úseček	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0
Shodnost úhlů	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rovnoběžnost přímek	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Kolmost přímek	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
Kolinearita bodů	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Koncykličnost bodů	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Celkem	0	3	0	0	3	0	1	2	2	0

	Ročník									
	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
Shodnost úseček	1	0	0	0	2	1	1	1	0	0
Shodnost úhlů	0	0	0	1	2	1	0	1	0	0
Rovnoběžnost přímek	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
Kolmost přímek	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Kolinearita bodů	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Koncykličnost bodů	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
Celkem	1	2	0	3	4	2	3	3	3	3

	Ročník									
	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
Shodnost úseček	1	0	0	1	0	2	1	0	0	0
Shodnost úhlů	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
Rovnoběžnost přímek	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Kolmost přímek	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0
Kolinearita bodů	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Konkurentnost přímek	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Koncykličnost bodů	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
Celkem	1	2	0	1	0	5	2	3	2	0

	Ročník									
	41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
Shodnost úseček	0	1	0	0	0	0	1	0	2	1
Shodnost úhlů	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Rovnoběžnost přímek	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kolmost přímek	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Kolinearita bodů	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Konkurentnost přímek	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Koncykličnost bodů	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Celkem	1	2	1	0	1	0	1	1	2	3

	Ročník									
	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
Shodnost úseček	1	3	1	3	2	3	1	3	4	3
Shodnost úhlů	2	2	2	2	3	1	1	4	4	1
Rovnoběžnost přímek	1	0	1	2	1	2	0	1	0	1
Kolmost přímek	1	1	0	1	1	0	1	1	0	4
Kolinearita bodů	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Koncykličnost bodů	0	0	2	0	2	3	0	1	0	2
Celkem	6	6	7	8	10	9	4	10	8	11

	Ročník								
	61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.
Shodnost úseček	0	0	2	0	3	2	2	2	1
Shodnost úhlů	1	4	2	0	1	1	1	3	1
Rovnoběžnost přímek	3	3	0	0	1	0	1	0	0
Kolmost přímek	1	0	2	0	2	0	2	3	4
Kolinearita bodů	0	0	0	2	0	1	1	0	1
Konkurentnost přímek	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Koncykličnost bodů	1	2	1	2	0	2	0	1	2
Celkem	6	9	7	4	8	7	8	10	9

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

Autoreferát disertační práce

Deduktivní metody řešení důkazových planimetrických úloh

2021

Vojtěch Zlámal

Název práce:	Deduktivní metody řešení důkazových planimetrických úloh
Autor:	Mgr. Vojtěch Zlámal
Studijní obor:	P1102 Matematika – Didaktika matematiky
Školitel:	RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.
Oponenti:	prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc. Pedagogická fakulta – Katedra matematiky Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D. Přírodovědecká fakulta – Katedra algebry a geometrie Univerzita Palackého v Olomouci
Místo a termín obhajoby:	Katedra algebry a geometrie Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci 8. 3. 2022
Místo vystavení práce:	Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc

Obsah

Úvod

V oboru planimetrie se lze setkat se dvěma typy úloh. Jsou to úlohy určovací (a to včetně úloh kontrukčních) a důkazové. Řešení důkazových úloh je náročnou tvůrčí činností, neboť kromě respektování logické správnosti jednotlivých kroků musí řešitel důkaz *objevit*. Jinými slovy řešitel prozkoumává a objevuje vztahy a souvislosti mezi jednotlivými objekty a jejich vlastnostmi. Řešení důkazových úloh je tak činností, která stimuluje logické uvažování, prohlubuje poznatky řešitele v daném tématu a také rozvíjí schopnosti řešení problému (analýzu celku a syntézu dílčích kroků). Z tohoto hlediska lze považovat důkazové úlohy za velmi důležitou součást vzdělávání žáků našich škol.

V rámci výuky planimetrie na středních školách se žáci seznamují s planimetrií syntetickou a analytickou. Obor analytické geometrie (a tedy i planimetrie) je založen na práci René Descartesa (1596 až 1650), tj. na využití analyticko-algebraických metod v geometrii. Původ syntetické planimetrie, jinak též axiomatické planimetrie, lze pak nalézt v *Základech* sepsaných starověkým matematikem Eukleidem z Alexandrie (přibližně 325 př. n. l. až 260 př. n. l.). Přestože syntetická planimetrie je tak mnohonásobně starším oborem, její názornost, srozumitelnost a praktická aplikovatelnost ji stále drží v hlavním proudu matematického vzdělávání.

Pro důkazové planimetrické úlohy je charakteristické, že je lze řešit metodami výpočetními nebo deduktivními. Výpočetní metody důkazů jsou založeny na výpočtu konkrétní číselné hodnoty, zatímco deduktivní metody se opírají o základní vlastnosti a polohu zadaných geometrických útvarů. Není však možné říci, že úlohy jsou vždy řešitelné oběma způsoby, proto se tato práce zabývá pouze planimetrickými důkazovými úlohami řešitelnými deduktivními metodami.

Obecná teorie matematických důkazů rozlišuje důkazy přímé, nepřímé, sporem, využitím principu matematické indukce a důkazy úplnou indukcí. Na deduktivních postupech jsou pak založeny matematické důkazy přímé, nepřímé, sporem a využitím principu matematické indukce. Jednotlivé případy zkoumané v rámci provádění úplné matematické indukce jsou dokazovány některou z výše uvedených metod, proto se i zde deduktivní postupy objevují. Planimetrické důkazové úlohy ve svých řešení povětšinou využívají důkazy přímé či sporem, v obecně zadaných úlohách se pak řešení opírá o úplnou indukci, tj. vyšetření všech možností vyplývajících ze zadání.

Vzhledem k tomu, že důkazové úlohy jsou zpravidla pro žáky obtížnou součástí matematiky, stanovila si tato disertační práce za cíl prozkoumat oblast přípravy žáků na řešení těch důkazových úloh syntetické planimetrie, které jsou řešitelné deduktivními metodami. Je zřejmé, že uvedená obtížnost důkazových úloh směřuje tuto práci do oblasti nadstandardní matematiky, tj. oblasti matematických soutěží, popřípadě rekreační matematiky.

První fází je průzkum a analýza současného stavu, tedy rozbor využívaných výukových materiálů na středních školách s tím, že se tato analýza zaměřuje na metodologii řešení důkazových planimetrických úloh a její didaktické aspekty. Přestože dokazování je *tvořením*, pro efektivní řešení důkazových úloh se využívá známých metod a postupů, které lze pro konkrétní úlohu modifikovat či kombinovat. Systematická metodologie řešení důkazových úloh by tak měla obsahovat „paletu“ základních metod, na nichž řešitel důkazové úlohy může vystavět postup řešení dané úlohy.

V návaznosti na provedenou analýzu je dalším krokem návrh metodologie, která by eliminovala nedostatky současného stavu a která by umožnila efektivnější přípravu žáků na řešení důkazových úloh uvedeného typu. Tato metodologie by také měla respektovat oblast, v níž se tyto úlohy vyskytují nejčastěji, tj. oblast nadstandardní matematiky.

Text této disertační práce je v návaznosti na výše uvedenou úvahu rozdělen do čtyř částí. V první části je provedena úvodní analýza současného stavu využívaných materiálů ve výuce syntetické planimetrie a v přípravě žáků na důkazové úlohy v této oblasti. Druhá část se zabývá didaktickými aspekty volby vhodné metodologie řešení úloh této problematiky. Ve třetí části jsou uvedena vybraná tvrzení z planimetrie, která nepatří mezi nejznámější, avšak mají potenciál stát se základem pro efektivní metody řešení důkazových úloh syntetické planimetrie. Čtvrtá, nejobsáhlejší část uvádí návrh systematického uspořádání metod řešení úloh této problematiky včetně řešených i neřešených úloh. Přílohou této práce je pak sumarizovaná tabulka výskytu důkazových úloh syntetické planimetrie v jednotlivých ročnících Matematické olympiády v České republice upravená s přihlédnutím k obsahu druhé části této práce.

1 Možnosti přípravy žáků na důkazové úlohy syntetické planimetrie řešitelné deduktivními metodami

S planimetrickými úlohami, jejichž řešením nebo součástí jejich řešení je důkaz vedený deduktivními metodami, se často setkávají žáci v různých matematických soutěžích. Tyto úlohy zde mají své místo, protože jde o úlohy náročné na kognitivní schopnosti řešitelů (úlohy směřují k nejvyššímu stupni Bloomovy taxonomie – tvoření), přičemž právě náročné úlohy umožňují identifikovat ty nejnadanější žáky. V ČR je možné brát jako etalon soutěž Matematická olympiáda, která se každoročně koná nepřetržitě od školního roku 1951/1952. Do této soutěže se zapojují žáci základních a středních škol rozdělení do kategorií podle ročníku, který ve škole navštěvují. Matematická olympiáda je soutěží postupovou, jsou organizována školní, okresní a krajská kola. Pouze v nejvyšší kategorii A je organizováno ústřední kolo. Kategorie A je určena pro žáky 3. a 4. ročníku středních škol. Vzhledem k náročnosti a komplexnosti úloh kategorie A jsou soutěžícími v této kategorii zpravidla žáci, kteří se matematické olympiády účastnili v předchozích ročnících (a tedy nižších kategoriích). Je zřejmé, že pro přípravu na účast ve vyšších kategoriích a kolech matematické olympiády je nutná dlouhodobá a systematická příprava. Ačkoliv se žáci mohou připravovat zcela samostatně, velmi často odpovědnost za přípravu žáků přebírá škola a vyučující matematiky. Tato část disertační práce se tak zaměřuje na výzkum efektivních možností, způsobů a forem přípravy žáků školami na uvedený typ úloh.

Na problematiku přípravy žáků na důkazové synteticko-planimetrické úlohy, které se objevují v Matematické olympiádě, je možné pohlížet z různých stran. Prvním hlediskem jsou organizační možnosti a formy přípravy. Jde zejména o přípravu v rámci standardních hodin, nadstandardní přípravu ve formě zájmových kroužků atp. nebo samostudium. V rámci přípravy v běžných vyučovacích hodinách mohou učitelé vybrané žáky stimulovat dobrovolnými úlohami či doplněním probíraných úloh o nestandardní prvky. V zájmových kroužcích/seminářích se jedná zpravidla o přímou přípravu na konkrétní matematickou soutěž. Samostudium pak umožňuje žákům se zabývat vybranými tématy dle svých zájmů.

Dalším hlediskem je dostupnost a kvalita literatury, kterou mohou žáci využívat v rámci své přípravy. Má-li být důkazová úloha uváděná v literatuře ukázkou metody řešení a také inspirací pro řešení obdobných úloh, je velmi vhodné opatřit tuto úlohu didakticko-metodickým komentářem (poznámkou), který pomůže žákovi zařadit si jednotlivé kroky důkazu do interního myšlenkového systému. Pokud žák využívá danou publikaci v rámci dlouhodobé přípravy, je nutné, aby tyto didakticko-metodické komentáře byly pak vhodně systematizovány.

Jelikož cílem studie byl průzkum možností přípravy žáků na důkazové úlohy středoškolské syntetické planimetrie, a to zejména efektivních možnosti, zaměřoval se tento výzkum na školy, jejichž příprava je úspěšná. Vzhledem k organizačnímu charakteru Matematické olympiády lze považovat za úspěšné školy[1] ty, jejichž žáci se dlouhodobě umisťují na čelních příčkách výsledkových listin.

Výzkum se tak zaměřil na zodpovězení následujících otázek:

1) Jaké jsou využívané možnosti přípravy žáků úspěšných škol na matematické soutěže?
2) Jaké jsou využívané materiály pro výuku syntetické planimetrie ve standardních hodinách na uvedených školách?
3) Jaké jsou využívané materiály v dalších aktivitách uvedených škol určených pro přípravu žáků na soutěžní úlohy syntetické planimetrie?
4) V jaké míře a formě jsou zastoupeny důkazové úlohy v materiálech užívaných uvedenými školami pro přípravu žáků na úlohy syntetické planimetrie v matematických soutěžích?

V rámci otázky 4 se výzkum zabýval také zmiňovaným didakticko-metodickým aspektem uváděných úloh. Na základě výše uvedených výzkumných otázek byl postup rozdělen do dvou fází. V první fázi se zjišťovaly odpovědi na otázky 1 až 3. Následující druhá fáze se pak zaměřovala na rozbor výukových materiálů, které vyplynou z výsledků první fáze.

Z provedeného výzkumného šetření vyplynulo, že školy, jejichž žáci se účastní Matematické olympiády, nejsou koncentrovány pouze v hlavním městě nebo určitém regionu ČR. Matematická olympiády tedy nemá diskriminační charakter z hlediska umístění školy. Dále se potvrzuje všeobecně známý fakt, že úspěšné školy se žákům nadstandardně věnují (forma podpory je obdobná na všech vybraných školách).

Přestože je v současné době na trhu množství učebnic matematiky pro střední školy a dalších publikací, úspěšné školy jsou v tomto ohledu poněkud konzervativní. V případě hlavní učebnice pro běžnou výuku preferují učebnici „Matematika pro gymnázia – Planimetrie“, která byla poprvé vydána již v roce 1993, a mezi materiály pro další přípravu žáků se objevuje seriálová publikace edice „Škola mladých matematiků“ z druhé poloviny 20. století.

Z rozborů jednotlivých učebnic vyplynulo, že ačkoliv se věnují důkazovým úlohám syntetické planimetrie řešitelným deduktivními metodami v nezanedbatelné míře, zásadně v nich chybí didakticko-metodické vedení. Uvedené důkazy a důkazové úlohy tak slouží především k zařazení a propojení učiva do celku. Jejich podpůrná role v přípravě žáků na soutěžní důkazové úlohy Matematické olympiády tedy nemůže být plně rozvinuta. Analýza dalších podpůrných textů prokázala, že ani v nich není didakticko-metodický přístup uspokojivý.

Tento výzkum odhalil slabé místo v možnostech přípravy žáků na důkazové úlohy syntetické planimetrie, konkrétně v přípravě na Matematickou olympiádu. Materiály, které jsou zde využívány, nemohou žáky vést k systematické a metodické přípravě na uvedený druh úloh, jak tomu je v jiných oblastech.

[1]Termín *úspěšná škola* se v této práci vztahoval pouze k úspěšnosti školy v soutěži Matematická olympiáda v České republice.

2 Didaktické aspekty volby vhodné metodologie

V literatuře věnované metodologii řešení planimetrických důkazových úloh se lze setkat s členěním metod podle použitých prostředků, například metody opírající se o využití stejnolehlosti, metody využívající rovnoběžných přímek, metody vyhledávání shodných úhlů atp. Z didaktického hlediska se však toto rozdělení může jevit jako nevhodné. Je to dáno tím že k tomu, aby takto uspořádané rozdělení bylo žáku nápomocné při řešení neznámé úlohy, by žák musel v prvním kroku volit prostředek, jímž by chtěl úlohu řešit. Poté by mu toto rozdělení poskytlo přehled možných postupů využívajících zvolený prostředek. Je ale zřejmé, že v běžné praxi žák-řešitel takto nepostupuje. Úvahy žáků vycházejí většinou z analogie dané povahou řešené úlohy. Pokud by žák měl k dispozici metody rozdělené podle úkolu obsaženém v úloze, tedy cíle, kterého má žák v úloze dosáhnout, dostalo by se mu přehledu více či méně podobných úloh a metod, jimiž tyto úlohy byly řešeny. To by mu nejen mohlo usnadnit orientaci v dané problematice, ale také na základě právě analogie by mohl volit vhodný postup a prostředek či vytvořit zcela novou metodu.

Tato úvaha vede k nutnosti provést nejprve základní rozčlenění úloh podle jejich povahy neboli cíle či úkolu. Na toto rozdělení pak navazuje systematická tvorba didakticky vhodné metodologie řešení důkazových úloh syntetické planimetrie.

Základní rozdělení důkazových úloh syntetické planimetrie se opírá o kategorizaci provedenou J. Švrčkem. Uvedená kategorizace rozděluje úlohy do sedmi oblastí (typů) podle stanoveného úkolu na úlohy, v nichž je cílem dokázat

a) shodnost úseček,

b) shodnost úhlů,

c) rovnoběžnost přímek,

d) kolmost přímek,

e) kolinearitu bodů[2],

f) konkurentnost přímek[3],

g) koncykličnost bodů[4].

Toto rozdělení ale nepokrývá všechny možnosti cílů důkazových úloh. Nejen že výše uvedené kategorie lze kombinovat, ale také je možné uvést další typy úloh, v jejichž řešení je nutno dokázat například

h) podobnost trojúhelníků,

i) konkurentnost kružnic[5],

j) rovnost součtů délek úseček.

[2]Body se nazývají kolineární, leží-li na téže přímce.
[3]Přímky se nazývají konkurentení, procházejí-li týmž bodem.
[4]Body se nazývají koncyklické, leží-li na téže kružnici.
[5]Kružnice se nazývají konkurentní, procházejí-li týmž bodem.

Avšak úlohy kategorií h) a i) lze často s úspěchem převést na úlohy spadající do některé ze základních kategorií a využívat tak metody pro tuto kategorii určené. Například úlohy o konkurentnosti kružnic lze převést na úlohy o koncykličnost vhodných čtveřic bodů (např. 50. MO, A–P–3) a úlohy o podobnosti trojúhelníků jsou často řešeny využitím důkazu shodnosti úhlů. Dále řešení úloh typu j) se v literatuře opírá o výpočetní metody (viz např. 54. MO, A–P–5).

Vzhledem k uvedené specifičnosti úloh typu h) až j) a zaměření této práce vychází dále uvedená metodologie pouze ze sedmi základních kategorií úloh.

Vzhledem k tomu, že práce je cílena na české žáky a jejich učitele, je potřeba brát v potaz specifika českého prostředí. Jak již bylo uvedeno dříve, etalonem matematických soutěží v České republice je Matematická olympiáda (MO), proto by metodologie měla z úloh MO vycházet. Ve výkladu metod a v příkladech by tak měly být využity formulace a symbolika úloh MO.

Dále by členění metod mělo akceptovat výše uvedené rozdělení úloh na základě stanoveného úkolu v dané úloze. Tím bude zajištěna možnost využití metodologie v analogických úvahách žáků a také tím bude umožněno zvýšení orientace žáků v dané problematice, což pro žáky-soutěžící znamená zvýšení šancí na úspěch.

Popis každé metody by se měl také zabývat možnostmi formulace zadání úlohy spadající do dané kategorie. Jak již bylo uvedeno výše, podstatou volby vhodné metody je zařazení úlohy do správné kategorie. Klíčovou roli v tomto zařazení hraje pochopení zadání úlohy, což se zakládá na pochopení použitých formulací, popřípadě se lze v některých případech dívat na formulaci jako na jistou formu nápovědy.

V neposlední řadě je nutné zdůraznit postup využívaný ve výkladu obecně. Jedná se nejprve o obecné shrnutí základních principů, na kterých je založena popisovaná metoda, což umožní zorientovat se lépe v dané problematice. Následně by popisované postupy měly být aplikovány na typové úlohy, v nichž jsou uváděné postupy konkretizovány. Pro upevnění poznatků a pro případné zájemce o problematiku je pak vhodné na závěr popisu každé metody přiložit několik neřešených úloh.

3 Vybraná planimetrická tvrzení

Tato část disertační práce obsahuje planimetrická tvrzení vybraná z oblasti základních tvrzení středoškolské planimetrie a také z oblasti nadstandardních planimetrických poznatků s ohledem jejich efektivní využitelnost v důkazových úlohách syntetické planimetrie. Vzhledem k zaměření této práce však vybraná nadstandardní tvrzení byla zvolena tak, že jsou uchopitelná i na úrovni standardní středoškolské matematiky. Ke všem větám jsou uvedeny důkazy využívající metody syntetické planimetrie s tím, že důkazy některých tvrzení je možno případně pojmout také jako ukázkové úlohy dále uvedených metod.

Práce zahrnuje vybraná tvrzení z následujících oblastí:

– geometrie trojúhelníků a čtyřúhelníků,

– geometrie kružnic,

– geometrická zobrazení,

– Cèvova a Menelaova věta.

Z oblasti geometrie trojúhelníků a čtyřúhelníků byla zvolena tvrzení:

– věta o střední příčce lichoběžníku,

– věta o ose úhlu.

V oblasti geometrie kružnic byla uvedeny:

– věty využívající Thaletovu kružnici,

– věta o obvodovém, středovém a úsekovém úhlu,

– věty o tětivovém čtyřúhelníku.

V oblasti geometrických zobrazení se práce zabývala následujcími větami:

– věta o koncykličnosti obrazů ortocentra trojúhelníku v osové souměrnosti podle jeho stran,

– věta o skládání dvou netriviálních otočení.

4 Metody řešení

Vzhledem k zaměření této práce využívají dále popisované metody řešení převážně běžných středoškolských poznatků, se kterými se žáci setkávají ve výuce. Nadto jsou zde zařazeny také metody, které využívají nadstandardních planimetrických tvrzení (tj. vět, které nejsou zařazeny v běžné výuce matematiky na středních školách, přestože jejich myšlenky nepřesahují úroveň poznatků středoškolské matematiky). Popisované metody však nejsou založeny pouze na tvrzeních výše uvedených standardních či nadstandardních vět, ale mnohdy také jejich důkazy jsou významnými zdroji různých postupů a inspirací pro hlavní myšlenku důkazu.

Rozdělení důkazových úloh syntetické planimetrie do sedmi elementárních kategorií umožňuje systematicky rozdělit také metody řešení na základě zmíněného třídění. Aby bylo možné metody prezentovat ve snadno uchopitelném a přehledném systému, je nutné v jednotlivých kategoriích identifikovat tzv. *základní úlohy* a tzv. *násobné úlohy*. Násobnou úlohou je myšlena úloha rozdělitelná na několik podúloh stejné kategorie, jako je původní úloha. Základní úlohou je pak úloha v tomto smyslu nedělitelná. Vzhledem k možnosti rozdělení násobných úloh na podúlohy se kategorizace metod opírá právě o základní úlohy, řešením násobných úloh pak je kompozice řešení jejich podúloh. Metody řešení základních úloh tak tvoří kostru celé metodologie řešení syntetickoplanimetrických důkazových úloh, na které lze budovat další (a mnohdy velmi specifické) postupy.

Metody řešení úloh o shodnosti úseček či o shodnosti úhlů se s ohledem na násobné úlohy mohou zaměřit pouze na důkaz shodnosti dvojice uvedených prvků. Shodnost více prvků (úseček nebo úhlů) lze následně dokázat rozložením úlohy na důkazy shodnosti vhodně zvolených dvojic (tzn. základní úlohy). Obdobně lze postupovat v případě dokazování rovnoběžnosti nebo kolmosti přímek.

V případě řešení úloh, v nichž je úkolem dokázat kolinearitu bodů, je základní úlohou důkaz kolinearity tří bodů, neboli že jeden z bodů leží na přímce určené zbývajícími dvěma. Metody řešení se tak budou zabývat pouze problematikou kolinearity tří bodů, neboť násobné úlohy lze rozložit na úlohy o důkazu kolinearity vhodných trojic. Metody dokazování konkurentnosti přímek lze zcela analogicky redukovat na metody důkazu konkurentnosti trojice přímek.

Vzhledem k tomu, že libovolná kružnice je jednoznačně dána třemi body, lze za základní úlohu o koncykličnosti bodů považovat důkaz koncykličnosti čtyř bodů. Násobné úlohy je možné (stejně jako v předchozích případech) dělit na vhodné podúlohy.

Dále uváděné metody poskytují možný návod k řešení typových základních úloh v každé kategorii. Ukázkové úlohy názorně ilustrující konkrétní popisované metody byly vybrány tak, aby svou různorodostí pokud možno pokrývaly celou šíři dané kategorie.

Tato kapitola obsahuje metody a příklady řešení důkazových úloh z následujících oblastí:

1. Důkaz shodnosti dvojice úseček
   (a) Využití shodnosti trojúhelníků
   (b) Využití vlastností rovnoramenných trojúhelníků
   (c) Kombinace metrických a polohových vlastností některých základních rovinných útvarů
   (d) Využití shodných zobrazení
2. Důkaz shodnosti dvojice úhlů
   (a) Využití vhodných trojúhelníků
   (b) Využití úhlů příslušných k oblouku kružnice
3. Důkaz rovnoběžnosti dvojice přímek
   (a) Využití úhlů vyťatých příčkou
   (b) Využití některých vlastností dalších rovinných útvarů
4. Důkaz kolmosti dvojice přímek
   (a) Vyjádření uvažovaného úhlu pomocí vhodných dílčích úhlů
   (b) Využití vybraných rovinných útvarů
   (c) Využití vlastností příčky rovnoběžek
   (d) Využití vlastností geometrických zobrazení
5. Důkaz kolinearity trojice bodů
   (a) Důkaz existence přímého či nulového úhlu
   (b) Využití vhodného bodu na přímce
   (c) Využití geometrických zobrazení
   (d) Menelaova věta
6. Důkaz konkurentnosti trojice přímek
   (a) Důkaz existence přímého úhlu
   (b) Využití průsečíků dvojic přímek
   (c) Využití polohových vlastností v geometrii trojúhelníku
   (d) Využití Cèvovy věty
7. Důkaz koncykličnosti čtyř bodů
   (a) Využití vlastností obvodových úhlů
   (b) Využití mocnosti bodu ke kružnici

Závěr

Cílem disertační práce bylo analyzovat podobu v současnosti využívaných materiálů ve výuce syntetické planimetrie se zaměřením na důkazové úlohy řešitelné deduktivními metodami. Ze závěrů této analýzy vyplynula potřeba zpracovat didakticky vhodnější metodologii řešení úloh uvedeného typu. Systematické uspořádání metod navržené v této práci poskytuje nejen ucelený přehled základních postupů a metod, ale také ukazuje uvedené metody na praktických ukázkách a dává k dispozici rovněž neřešené úlohy k dalšímu procvičení. Takto uspořádané metody a postupy mohou efektivně využívat jak žáci řešící úlohy matematických soutěží, zejména Matematické olympiády, tak učitelé a na jejich základě mohou vytvářet další a sofistikovanější metody.

Kapitola věnovaná vlastní metodologii byla zpracována tak, aby mohla posloužit jako samostatný materiál určený v přípravě žáků na matematické soutěže. Struktura této kapitoly, založená na kategorizaci metod odvozené z kategorizace důkazových úloh, umožňuje využití této části jako „kuchařky pro začátečníky“. Jinak řečeno tuto část mohou s úspěchem využívat žáci, kteří s důkazovými úlohami syntetické planimetrie nemají mnoho zkušeností a v této problematice se příliš neorientují. Zkušenějším řešitelům nabízí tato část možnost upevnit si své poznatky, popřípadě se dále zdokonalovat na předkládaných neřešených úlohách. Není ambicí předložené práce vytvořit vyčerpávající systém metod. Uváděné metody jsou základní a jejich zařazení do práce odpovídá také četnosti jejich využívání v literatuře.

Výsledky této práce mohou dále využívat učitelé středních škol jako metodický materiál a případně také studenti vysokých škol ve své přípravě v oblasti elementární matematiky.

Dílčí myšlenky a závěry této práce byly průběžně prezentovány na XXIII. Česko-Polsko-Slovenské matematické konferenci v Novém Jičíně (10. června 2016), Seminářích z didaktiky matematiky a elementární matematiky na Katedře algebry a geometrie University Palackého v Olomouci (10. listopadu 2015, 18. dubna 2017). Dále byly vybrané části publikovány v časopise Matematika-Fyzika-Informatika a dále v časopise Journal of Advances in Mathematic. Rovněž jedna autorská úloha byla zařazena jako soutěžní úloha školního kola kategorie C 70. ročníku Matematické olympiády.

Přestože tato práce nabízí ucelený přehled základních deduktivních metod řešení důkazových úloh syntetické planimetrie, je možné výsledky této práce dále rozšiřovat. Nejedná se pouze o doplnění dalších témat a metod, ale celou uvedenou metodologii lze významně obohatit výzkumem v oblasti rozborů v důkazových úlohách. Problematika rozborů, jakožto součásti řešení důkazových úloh, může být významným didaktickým prvkem ve výuce matematiky na středních školách (čemuž odpovídá autorova vlastní zkušenost) a vhodné uchopení této problematiky může výrazně pomoci ve výkladu této (mnohdy obtížné) oblasti.

Použitá literatura a zdroje

[1] ANDREESCU, T., ROLÍNEK, M., TKADLEC, J.: *106 Geometry Problems from the AwesomeMath Summer Program.* XYZ Press, 2013.

[2] ANDREESCU, T., ROLÍNEK, M., TKADLEC, J.: *107 Geometry Problems from the AwesomeMath Year-round Program.* XYZ Press, 2013.

[3] BENDA, P., SKÁLA, J., DAŇKOVÁ, B.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971.

[4] BOČEK, L., KOČANDRLE, M., SEKANINA, M., ŠEDIVÝ, J.: *Geometrie II.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[5] CALDA, E.: *Sbírka řešených úloh: středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[6] DI PASQUALE, A., DO, N., MATHEWS, D.: *Problem Solving Tactics: Lessons from the Australian Mathematical Olympiad Committee Training Program.* AMT Publishing, 2014.

[7] GARDINER, A. D., BRADLEY, C. J.: *Plane Euclidean Geometry: Theory and Problems.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2012.

[8] GERETSCHLÄGER, R., KALINOWSKI, J., ŠVRČEK, J.: *A Central European Olympiad: The Mathematical Duel.* World Scientific Publishing Company, 2017.

[9] HERMAN, J., KUČERA, R., ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[10] HERMAN, J., KUČERA, R., ŠIMŠA, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 2011.

[11] HOO, H. K., MENG, K. K.: On Menelaus' Theorem. *Mathematical Medley.* 1996, roč. 23, č. 2, s. 71–76.

[12] JOBBINGS, A.: *A Problem Solver's Handbook: A Guide to Intermediate Mathematical Olympiads.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2013.

[13] KODETOVÁ, M.: *Sbírka úloh z planimetrie.* 2010. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce M. BULANT.

[14] LIDSKIJ, V. B.: *Úlohy z elementární matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965.

[15] MAČKOVÁ, P.: *Planimetrické výpočty v příkladech.* 2018. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce J. ŠIMŠA.

[16] *Matematická olympiáda.* Brno: Masarykova univerzita, 2020. Dostupné také z: `http://www.matematickaolympiada.cz`.

[17] MAXWELL, E. A.: *Deductive Geometry.* Macmillan, 1962.

[18] MONK, D.: *New Problems in Euclidean Geometry.* United Kingdom Mathematics Trust, Leeds, 2009.

[19] MÚČKOVÁ, M.: *Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí shodností.* 2016. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce J. JANYŠKA.

[20] *Názvy a značky školské matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.

[21] OLŠÁK, M., TKADLEC, J.: Geometrická zobrazení. *Matematický korespondenční seminář.* 2011/2012, roč. 31.

[22] PARKER, T.: *Elementary geometry for teachers.* Sefton-Ash Publishing, Okemos, 2008.

[23] PAVLÍK, T.: Cèvova a Menelaova věta. In: *Sborník soustředění Domaslav 2010.* Matematický korespondenční seminář, Domaslav, 2010, s. 34–37.

[24] PETÁKOVÁ, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha, 1998.

[25] PÓLYA, G.: *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod.* MatfyzPress, Praha, 2016.

[26] POMPE, W.: *Wokół obrotów: przewodnik po geometrii elementarnej.* Wydawnictwo Szkolne Omega, 2016.

[27] POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* Prometheus, Praha, 2000.

[28] POSPÍŠILOVÁ, H.: *Sbírka úloh z planimetrie.* 2010. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno. Vedoucí práce M. BULANT.

[29] *Ročenka matematické olympiády na středních školách.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1952-.

[30] SMIDA, J., ŠEDIVÝ, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro 1. ročník gymnázií.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1985.

[31] STEFANOWICZ, A.: *Proofs and Mathematical Reasoning.* University of Birmingham, 2014.

[32] *Škola mladých matematiků.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1961-1988.

[33] ŠVRČEK, J.: Jak provádět důkazy v planimetrii. In: *Dva dny s didaktikou matematiky 2012: sborník příspěvků, Praha, Univerzita Karlova v Praze 16. - 17. 2. 2012.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha, 2012, s. 58–62.

[34] ŠVRČEK, J.: *Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2014.

[35] ŠVRČEK, J., CALÁBEK, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, Praha, 2007.

[36] ŠVRČEK, J., VANŽURA, J.: *Geometrie trojúhelníka.* SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988.

[37] ŠVRČEK, J., ZLÁMAL, V.: Čtyři body na kružnici. *MFI.* 2015, roč. 24, č. 5.

[38] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J.: *Methods of Problem Solving Book 1*. Australian Mathematics Trust, 1996.

[39] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J.: *Methods of Problem Solving Book 2*. Australian Mathematics Trust, 1996.

[40] TABOV, J. B., TAYLOR, P. J., KOLEV, E. M.: *Methods of Problem Solving Book 3*. Australian Mathematics Trust, 2019.

[41] THIELE, R.: *Matematické důkazy*. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1985.

[42] TRIGG, C. W.: *Mathematical Quickies: 270 Stimulating Problems with Solutions*. Dover Publications, 1985.

[43] VENEMA, G. A.: Applications of the Theorem of Menelaus. In: *Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra*. American Mathematical Society, 2013, s. 85–98.

[44] VONDRA, J., GAZÁRKOVÁ, D., MELICHAROVÁ, S., VOKŘÍNEK, R., KVĚTOŇOVÁ, M.: *Matematika pro střední školy*. Didaktis, Brno, 2013.

[45] VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[46] YIU, P.: *Advanced Euclidean Geometry*. Department of Mathematics Florida Atlantic University, 2016.

[47] ZLÁMAL, V.: O důkazech konkurentnosti přímek v rovině. *MFI*. 2018, roč. 27, č. 3.

[48] ZLÁMAL, V.: Possibilities of Preparing Pupils for Proof Problems of Synthetic Plane Geometry Solvable by Deductive Methods. *JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS*. 2021, roč. 20, s. 440–448.

Přehled publikační činnosti

1. ZLÁMAL, Vojtěch. Possibilities of Preparing Pupils for Proof Problems of Synthetic Plane Geometry Solvable by Deductive Methods. JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS. 2021, 20, 440-448. ISSN 2347-1921. Dostupné z: doi:10.24297/jam.v20i.9137

2. ZLÁMAL, Vojtěch. O důkazech konkurentnosti přímek v rovině. Matematika-fyzika-informatika. 2018, 27(3), 161–168. ISSN 1805-7705.

3. ONDRÁČKOVÁ, Ivana, Václav SLOVÁK, Jakub TLÁSKAL a Vojtěch ZLÁMAL. Testy 2018 z matematiky pro žáky 9. tříd ZŠ. 1. Brno: Didaktis, 2017. Testy (Didaktis). ISBN 978-80-7358-277-7.

4. ZLÁMAL, Vojtěch. On Three Concurent Lines. In: Book of Abstracts of the 23rd CPS Conference. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2016, s. 39. ISBN 978-80-244-4972-2.

5. ŠVRČEK, Jaroslav a Vojtěch ZLÁMAL. Čtyři body na kružnici. Matematika-fyzika-informatika. 2015, 24(5), 334–343. ISSN 1805-7705.

6. ZLÁMAL, Vojtěch. Nekonečno v matematice na SŠ. In: Profesní příprava učitelů přírodovědných předmětů. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013, s. 208-217. ISBN 978-80-244-3449-0.

Abstrakt

Disertační práce se zabývá deduktivními metodami řešení důkazových úloh středoškolské syntetické planimetrie. Jsou zde sumarizovány, kategorizovány a zpracovány poznatky z metodologie řešení úloh uvedeného typu s důrazem na využitelnost v přípravě žáků středních škol na matematické soutěže (Matematická olympiáda, Česko-polsko-slovenské střetnutí aj.). Vlastní text práce je rozdělen do čtyř kapitol.

První část práce se věnuje výzkumu současného stavu možností přípravy žáků na řešení důkazových úloh středoškolské planimetrie. Tento výzkum analyzuje nejen způsoby a formy přípravy žáků na úlohy dané problematiky v matematických soutěžích, ale také učební texty dostupné žákům. Tato analýza učebních textů je zaměřena na výskyt metod a technik využití základních polohových a metrických poznatků v důkazových planimetrických úlohách a na jejím základě jsou zhodnoceny možnosti přípravy žáků k řešení úloh daného typu. Hlavním cílem uvedené analýzy je zjistit existenci vhodného učebního textu, který by žákům středních škol nabídl možnost komplexní přípravy v problematice důkazových planimetrických úloh.

Druhá část obsahuje rozbor didaktických aspektů využívání systému metod řešení důkazových úloh syntetické planimetrie. Uvedený rozbor se zabývá zejména možnostmi kategorizace úloh a následným převodem této kategorizace do systematické metodologie.

V třetí části jsou uvedena vybraná planimetrická tvrzení využitelná při řešení úloh dané problematiky. Tvrzení jsou doplněna důkazy využívajícími prostředky syntetické planimetrie s tím, že tyto důkazy je možno pojmout jako ukázkové úlohy dále uvedených metod.

Čtvrtá část obsahuje základní metody řešení důkazových úloh dané problematiky, přičemž je využita kategorizace úloh popsaná v druhé části této práce. Pro jednotlivé kategorie úloh jsou uvedeny základní metody řešení. Každá prezentovaná metoda je vysvětlena v obecné rovině a aplikována na typových úlohách. Uvedené kategorie jsou následně doplněny sadami řešených a neřešených úloh. Celou čtvrtou část je možno využít jako samostatný učební text pro příravu na řešení úloh matematických soutěží.

Klíčová slova

planimetrie, syntetická planimetrie, deduktivní metody, metody řešení, důkazové úlohy, matematická soutěž, střední škola

Abstract

The thesis deals with the deductive methods of proof problems solving in the field of synthetic plane geometry at secondary schools. The dissertation is to summarise, categorize and process the methodology findings of solving the above-mentioned plane geometry problems aiming at practical application by secondary school pupils in preparation for mathematical competitions (i.e. Mathematical Olympiad, Czech-Polish-Slovak Mathematical Competition). The content of the thesis is divided into four main chapters.

The first chapter explores the current state of possibilities of pupils' preparation for solving the above-mentioned problems. This research analyzes not only forms and strategies but also available study materials. The focus of this analysis is the presence of methods concerning usage of basic geometrical findings in plane geometry proof problems on which is made regarding evaluation. The main objective is to find the most accurate secondary school study material in terms of pupils' preparation for solving the above-mentioned problems.

The second part analyses different categorizations of problem-solving strategies from the didactical point of view, establishes the most accurate categorization and converts it into a systematic methodology.

The third chapter offers a set of plane geometry theorems that can be used for solving the above-mentioned problems. In addition, the theorems are followed by relevant proofs that can be considered as examples of the application of further mentioned problem-solving methods.

The fourth part uses the established categorization to expose the basic methods of solving plane geometry proof problems. Each category presents its elementary methods. These methods are described and demonstrated in particular examples. There is a set of solved and unsolved problems for each category, therefore the whole part of the thesis can be used as an independent study material.

Keywords

plane geometry, synthetic plane geometry, deductive methods, methods of problem-solving, proof problems, mathematical competition, secondary school