Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra Matematiky

Dynamické modely v ekonomii

Bakalářská práce

Autor: Monika Hofmanová

Studijní program: B 1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Vedoucí práce: Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2015

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Monika Hofmanová**
Studijní program:	B 1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Název práce:	Dynamické modely v ekonomii
Název práce v AJ:	Dynamic models in economics
Cíl a metody práce:	Cílem práce je představit dynamické modely v ekonomii. V první části se zavede potřebná teorie diferenciálních rovnic a ekonomická teorie, ve druhé části se pak na vybraných modelech ukáže analýza jednotlivých systémů, jejich srovnání a závěrečné zhodnocení z ekonomického hlediska.
Garantující pracoviště:	Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UHK
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.
Datum zadání práce:	11. 4. 2014
Datum odevzdání práce:	

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne   Monika Hofmanová

Poděkování:

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí své bakalářské práce, Mgr. Jitce Kühnové, Ph.D., za veškerý věnovaný čas a rady při vedení mé práce.

Anotace

Hofmanová, M. *Dynamické modely v ekonomii.* Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 46 s.

Cílem práce je představit dynamické modely v ekonomii. V první části se zavede potřebná teorie diferenciálních rovnic a ekonomická teorie, ve druhé části se pak na vybraných modelech ukáže analýza jednotlivých systémů, jejich srovnání a závěrečné zhodnocení z ekonomického hlediska.
Literatura: Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování

Klíčová slova

diferenciální rovnice, hospodářský růst, Harrodův-Domarův model, Solowův-Swanův model

Annotation

Hofmanová, M. *Dynamic models in economics.* Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Mgr. Jitka Kühnová, Ph.D. 46 p.

The aim is to introduce dynamic models in economics. The first part introduces the necessary theory of differential equations and economic theory, in the second part, on selected models is shown the analysis of individual systems, their comparison and final evaluation from an economic point of view.
References: Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování

Keywords

differential equation, economic growth, Harrod-Domar model, Solow-Swan model

Obsah

Úvod

Tato práce pojednává o dynamických modelech ekonomického růstu. Ekonomický růst je růst potencionálního produktu, tedy produktu dosaženého při plném využití všech zdrojů a dané technologii. V reálném životě je mnohdy ekonomický růst ztotožňován s růstem skutečného reálného hrubého domácího produktu. Ekonomický růst je důležitým makroekonomickým ukazatelem, který odráží vzestup životní úrovně. Je to téma zaměstnávající mysl každého ekonoma. Cílem práce je seznámit čtenáře se dvěma modely, které využívají diferenciální rovnice. Prvním z nich je Harrodův-Domarův model, který je prvním modelem moderní teorie růstu. Jedná se o nejvýznamnější model z období před příchodem neoklasického paradigmatu. Druhým modelem je Solowův-Swanův neoklasický model z roku 1956, jenž dodnes představuje základní rámec pro analýzu hospodářského růstu. Je nutné si uvědomit, že žádný model není v pravém smyslu „realistický“, neboť zachycuje pouze zlomek vztahů reálného světa a od většiny abstrahuje. Smyslem modelů není věrně kopírovat realitu, ale pochopit ji. Jde o to, poznat její strukturu a pochopit vztahy mezi jejími prvky. Model je nepostradatelnou metodou poznání, je užitečný, poněvadž umožňuje předvídat.

Práce je rozdělena do dvou kapitol. Předpokládá znalost diferenciálního a integrálního počtu a alespoň základní znalosti z oblasti mikroekonomie a makroekonomie. První kapitola mimo jiné vysvětluje pojem matematického modelování a důležitost hospodářského růstu. Největší část této kapitoly je však věnována nezbytné matematické teorii, jde především o vybrané diferenciální rovnice 1. řádu a jejich způsob řešení. V druhé kapitole, která tvoří hlavní část práce, jsou postupně rozebrány oba modely. Nejprve je vždy pojednáno o autorech modelu, dále jsou uvedeny předpoklady modelu a jeho samotné odvození. Text je doplněný přibližujícími obrázky. Nakonec je uvedeno závěrečné zhodnocení a porovnání.

Původním záměrem bylo modelování v programu GNU Octave dle [9], to by však bylo již nad rámec této práce. Mohlo by to ovšem být vhodné téma například pro diplomovou práci.

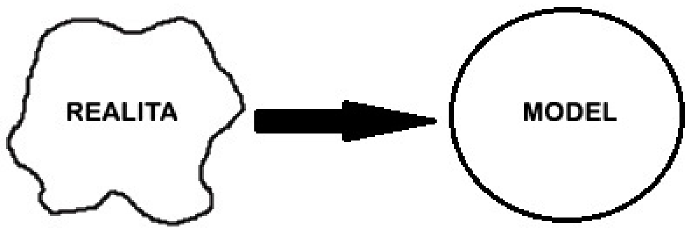
Tato práce je vysázena systémem LaTeX a obrázky jsou vytvořené pomocí programu *GeoGebra*.

Kapitola 1

Základní teorie

1.1 Matematické modelování

Matematické modelování je velmi rozsáhlá oblast, která zahrnuje mnoho různých disciplín. Když si tento pojem rozebereme, termín *matematický* vyvolá představu, že bude použit matematický aparát. *Modelem* nazýváme zjednodušené zobrazení zkoumané skutečnosti (například ekonomického jevu) realizované k určitému cíli. Zkoumanou skutečnost nazýváme originálem. Zkráceně můžeme říci, že model je zjednodušením reality.



Obrázek 1.1: Model jako zjednodušení reality

Modelování je účelové zobrazení vyšetřovaných vlastností originálu pomocí vhodně zvolených vlastností modelu. Jde o reprodukci vybraných vlastností studovaného objektu na modelu, tj. analogickém objektu, který simuluje chování a vlastnosti originálu. Jedním z motivů pro používání modelování je to, že model umožňuje interpretovat některé teorie a tvoří tak jakýsi spojovací článek mezi teorií a skutečností. [7]

Protože žádnou realitu není možné popsat do nejmenších detailů, je nutné zabývat se pouze důležitými částmi. Při vytváření modelu se musí dbát hlavně na to, abychom model nezjednodušili moc, nebo naopak málo. V prvním případě, pokud model hodně zjednodušíme, bude zkreslený a získané výsledky budou nereálné až nesmyslné. V druhém případě, pokud se budeme snažit o co nejlepší zachycení skutečnosti, získáme kvalitní model, ale jeho analýza bude neproveditelná a výsledky nedosažitelné. Je nutné najít určitý kompromis mezi věrnou kopií skutečnosti a snadnou řešitelností úlohy, vyjádřené daným modelem. [4]

Matematické modelování v ekonomii nám slouží k tomu, abychom zpravidla složitý ekonomický problém převedli do „matematické řeči“ a velmi často dojdeme k tomu, že problém již není tak složitý. Tedy složitý ekonomický problém vyřešíme pomocí jednoduchého matematického. Toto samozřejmě platí i pro všechny další obory, kde můžeme matematiku použít (biologie, fyzika atd.).

Matematické modelování v ekonomii má několik částí:

1. Definice problému
2. Ekonomický model
3. Matematický model
4. Řešení matematického modelu (řešení úlohy)
5. Ekonomická interpretace

Modely můžeme třídit různými způsoby. Jednou z možností je třídění z hlediska formálně konstruktivního

- *modely matematické* - modely vytvořené pomocí matematických výrazových prostředků
- *modely schematické* - všechny nematematické modely

Matematické modely můžeme ještě rozdělit podle různých kritérií. Jedním z kritérií je například časové hledisko. To znamená, jestli se ekonomická veličina může měnit v čase. Tedy zařadíme-li časové hledisko do modelu, pak mluvíme o modelech *dynamických*. Jestliže se ekonomická veličina v čase nemění, to znamená, že čas v modelu vůbec neuvažujeme, pak se jedná o *statický* model. Dalším kritériem může být charakter veličin. Podle tohoto kritéria dělíme modely na *deterministické* a *stochastické*. V deterministických modelech jsou prvky zkoumané veličiny a vztahy mezi nimi pevně dány. U stochastických modelů je to přesně naopak, veličiny mají náhodný charakter. My se budeme věnovat deterministickým dynamickým modelům, které se dále dělí na *spojité* a *diskrétní*. Spojité modely, jak už název napovídá, pracují se spojitými veličinami a diskrétní modely s diskrétními veličinami. Laicky řečeno spojitý čas je čas, který se mění plynule. Naopak diskrétnost času znamená, že čas se mění ve skocích. Vyšetřování deterministických modelů bývá mnohem jednodušší. Lze je snáze analyzovat a numericky vypočítat a s experimentálními daty se v mnoha případech shodují. Spojité deterministické modely mají mnohdy podobu systému diferenciálních rovnic. Někdy je užitečné matematické modely ještě rozlišovat na *explikativní*, založené na jasných (pozorovatelných a kvantifikovatelných) pojmech a *demonstrativní*, obsahující parametry, které nemají interpretovatelný význam. Typickým příkladem demonstrativního modelu je vyrovnávání experimentálních dat nějakou regresní funkcí. [7]

Ekonomické modely lze dělit podle druhu či velikosti systému, který popisují. Rozlišujeme modely *mikroekonomické* a *makroekonomické*. Mikroekonomické modely se týkají podniků, individuálních trhů výrobků a služeb, spotřebitelů, domácností apod. Makroekonomické modely slouží hlavně k analýze vývoje celého národního hospodářství. Někdy se ještě navíc rozlišují tzv. *mezomodely*, které se používají např. k analýze konkrétních odvětví národního hospodářství. [4]

1.2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Nyní si uvedeme potřebnou matematickou teorii, kterou budeme v práci používat. Jedná se hlavně o diferenciální rovnice prvního řádu. Teorie diferenciálních rovnic byla čerpána převážně z knížky [8].

Nejprve si musíme říci, jak budeme v této práci značit derivaci funkce. Jedním ze způsobů je použití znaku „$'$“. Např. $f'(x)$ tedy značí derivaci podle proměnné funkce. Totéž můžeme zapsat i takto $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Jestliže se jedná o funkci více proměnných, musíme upřesnit, podle které proměnné funkce derivujeme. Mluvíme o tzv. parciálních derivacích. Pokud derivujeme funkci $F(x,y)$ podle x zapíšeme to $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$. Derivaci proměnné podle času budeme vždy značit tečkou nad proměnnou, kterou podle času derivujeme, tedy např. $\dot{F}$.

1.2.1 Základní pojmy

Buď G podmnožina euklidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ a f reálná funkce definovaná na G. Rovnice

$$y' = f(x,y), \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

se nazývá *diferenciální rovnice 1. řádu*. Řešením této rovnice se rozumí funkce y, která je diferencovatelná v nějakém intervalu J a splňuje podmínky

$$[x, y(x)] \in G \quad a \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{pro každé } x \in J.$$

Jedna diferenciální rovnice může mít nekonečně mnoho řešení.

Buď $[x_0, y_0]$ libovolný bod v G. Úloha určit řešení rovnice (1.1), které splňuje *počáteční podmínku*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

se nazývá *počáteční úloha* (*počáteční problém*). Může se stát, že daný počáteční problém nemá řešení nebo má řešení více.

Nastane-li taková situace, že existuje řešení y počátečního problému (1.1), (1.2), které není zúžením žádného jiného řešení, nazývá se y *úplné řešení*. Existuje-li úplné řešení počátečního problému (1.1), (1.2) takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme stručně říkat, že daný problém má právě jedno řešení.

Obecným řešením rovnice (1.1) budeme rozumět funkci závisející na jednom parametru C takovou, že speciální volbou C lze získat řešení každého počátečního problému (1.1), (1.2).

Geometrická interpretace rovnice 1. řádu

Diferenciální rovnice (1.1) přiřazuje každému bodu $[x, y]$ definičního oboru G funkce f právě jednu hodnotu $y'(x)$, kde $y'(x)$ chápeme jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku nazýváme *lineární element*. Množina všech lineárních elementů je *směrové pole* dané rovnice. Směrové pole poskytuje představu o průběhu řešení rovnice (1.1). Graf řešení y nazýváme *integrální křivka* y. Konstrukci směrového pole často usnadní nalezení křivek, vrstevnic funkce f, v jejichž bodech mají lineární elementy tentýž směr. Takové křivky se nazývají *izokliny*. Jsou určeny rovnicí

$$y' = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Typy diferenciálních rovnic 1. řádu

Nyní se podíváme na některé typy jednotlivých diferenciálních rovnic 1. řádu. Konkrétně se budeme zabývat těmito typy:

1. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými: $y' = f(x)g(y)$
2. Lineární diferenciální rovnice: $y' = a(x)y + b(x)$
3. Bernoulliova rovnice: $y' = a(x)y + b(x)y^r$

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$

Pomocná věta 1. *Nechť* $f \in C^0(a, b),\ g \in C^0(c, d)$ *a* $g(y) \neq 0$ *pro každé* $y \in (c, d)$. *Pak je funkce* y *řešením počátečního problému*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0 = y_0), \quad x_0 \in (a, b),\ y_0 \in (c, d) \tag{1.3}$$

na intervalu I *právě tehdy, když*

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{d}s \quad \textit{pro každé } x \in I. \tag{1.4}$$

Rovnice

$$y' = f(x)g(y)$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými. Její řešitelnost zaručuje následující věta.

Věta 1. *Nechť* $f \in C^0(a, b),\ g \in C^0(c, d),\ g(y) \neq 0$. *Pak má počáteční problém* (1.3) *právě jedno řešení, které je určeno implicitně vzorcem* (1.4). *Toto řešení je definováno na každém intervalu* $J \subseteq (a, b)$ *takovém, že* $x_0 \in J$ *a*

$$\inf_{\lambda\in(c,d)}\int_{y_0}^{\lambda}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)} < \int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{d}s < \sup_{\lambda\in(c,d)}\int_{y_0}^{\lambda}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}, \quad x\in J.$$

Následující dvě věty zaručují řešitelnost rovnice se separovanými proměnnými, jestliže je funkce g spojitá na intervalu uzavřeném zprava či zleva.

Věta 2. *Nechť* $f\in C^0(a,b),\ g\in C^0(c,d\rangle,\ g(y)\neq 0$ *pro* $y\in(c,d),\ g(d)=0$. *Nechť*

$$\lim_{\lambda\to d^-}\left|\int^{\lambda}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}\right| = \infty.$$

Pak má počáteční problém (1.3) *pro každé* $x_0\in(a,b),\ y_0\in(c,d\rangle$ *právě jedno řešení.*

Věta 3. *Nechť* $f\in C^0(a,b),\ g\in C^0\langle c,d),\ g(y)\neq 0$ *pro* $y\in(c,d),\ g(c)=0$. *Nechť*

$$\lim_{\lambda\to c^+}\left|\int^{\lambda}\frac{\mathrm{d}s}{g(s)}\right| = \infty.$$

Pak má počáteční problém (1.3) *pro každé* $x_0\in(a,b),\ y_0\in\langle c,d)$ *právě jedno řešení.*

Nyní si uvedeme jednoduché kritérium, které nám umožní poznat, kdy lze rovnici

$$y' = f(x,y) \tag{1.5}$$

upravit na rovnici se separovanými proměnnými.

Věta 4. *Buď* G *konvexní oblast v* $\mathbb{R}^2$, $f : G\to\mathbb{R}$ *funkce, která má v* G *spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a* $f(x,y)\neq 0$. *Nutná a dostatečná podmínka pro to, aby rovnice* (1.5) *bylo možné upravit na rovnici se separovanými proměnnými je, aby*

$$D := \det\begin{bmatrix} f(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\end{bmatrix} = 0 \quad \textit{pro každé } [x,y]\in G.$$

Lineární diferenciální rovnice $y' = a(x)y + b(x)$

Předpokládejme, že funkce a, b jsou spojité v intervalu $I=(\alpha,\beta)$ a buď $x_0\in I$. Transformujme rovnici

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{1.6}$$

substitucí

$$y = u\exp\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s.$$

Obdržíme

$$(u' + a(x)u)\exp\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = a(x)u\exp\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s + b(x),$$

takže

$$u' = b(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Řešením této rovnice splňující počáteční podmínku $u(x_0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R}$, je funkce

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} b(s)\exp\left(-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s + y_0.$$

Proto je funkce

$$y(x) = \exp\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\left[\int_{x_0}^{x} b(s)\exp\left(-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s + y_0\right]$$

řešením počátečního problému $y' = a(x)y + b(x),\ y(x_0) = y_0$ pro všechna $x \in I$.

Bernoulliova rovnice $y' = a(x)y + b(x)y^r$

Lineární diferenciální rovnice je zvláštním případem rovnice Bernoulliovy

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Nadále budeme opět předpokládat, že funkce a, b jsou spojité v intervalu $I = (\alpha, \beta)$ a že $b(x) \not\equiv 0$. Pro $r = 0$ nebo $r = 1$ je rovnice (1.7) lineární. Ukážeme, že i pro $r \neq 0$ a $r \neq 1$ lze rovnici převést na rovnici lineární.

Vskutku, jednoduchou úpravou rovnice (1.7), vynásobením členem y^{-r}, obdržíme

$$y'y^{-r} = a(x)y^{1-r} + b(x).$$

Nyní podle pravidel derivování[1] upravíme na tvar

$$\frac{1}{1-r}(y^{1-r})' = a(x)y^{1-r} + b(x).$$

Položíme-li $u = y^{1-r}$, je $u' = (1-r)y^{-r}y'$ a dostaneme rovnici

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

a to je rovnice lineární.

[1] $(y^r)' = ry^{r-1}y'$, v našem případě tedy $(y^{1-r})' = (1-r)y^{-r}y'$ resp. $\frac{1}{1-r}(y^{1-r})' = y^{-r}y'$

1.2.3 Stabilita

Definice 1. (Ljapunov) Řešení x_0 rovnice $x' = f(t, x)$ se nazývá *ljapunovsky stabilní* (stručněji *stabilní*), když ke každému $\varepsilon > 0$ a $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ tak, že každé řešení x rovnice $x' = f(t, x)$ vyhovující podmínce $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existuje pro $t \geq t_1$ a splňuje pro tato t nerovnost $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$; není-li řešení x_0 stabilní, nazývá se *nestabilní*.

Definice 2. (Persidskij) Řešení x_0 rovnice $x' = f(t, x)$ se nazývá *stejnoměrně stabilní*, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq t_0$ všechna řešení x rovnice $x' = f(t, x)$ splňující podmínku $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_1$ a splňují pro ně nerovnost $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Rozdíl mezi těmito definicemi je v tom, že v definici 2 se oproti definici 1 vyžaduje nezávislost čísla δ na výběru čísla $t_1 \geq t_0$.

Definice 3. (Ljapunov) Řešení x_0 rovnice $x' = f(t, x)$ se nazývá *asymptoticky stabilní*, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení x rovnice $x' = f(t, x)$ splňující nerovnost $|x(t_1) - x_0(t)| < \delta$ platí

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

1.3 Hospodářský růst

Ekonomové, kteří se zabývají hospodářským růstem, mnohdy tvrdí, že dlouhodobý růst výstupu na hlavu je jediným skutečně důležitým makroekonomickým ukazatelem. I když je to velké zjednodušení, je pravda, že rozdíly v dlouhodobých tempech hospodářského růstu mají oproti dopadu obvyklých hospodářských fluktuací mnohonásobně vyšší dopad na životní úroveň jednotlivců. Rozsah hospodářských fluktuací je obvykle v řádu několika procent hrubého domácího produktu, takže se ekonomická situace v nejlepším případě může zlepšit v rozsahu několika procent HDP vlivem krátkodobé stabilizační politiky. Pokud se ale dlouhodobě podaří zvýšit tempo hospodářského růstu třeba i o pouhý jeden procentní bod, v ekonomice to může znamenat řádový rozdíl v dosahovaných úrovních blahobytu. Pro dokreslení uvedeme příklad od Mgr. Martina Čiháka a Mgr. Tomáše Holuba z [3]. *Pokud HDP ekonomiky* *roste ročním tempem 2 procenta, v horizontu jednoho století se zvýší na zhruba sedminásobek, což nezní jako špatný výsledek. Avšak ekonomika rostoucí o pouhý jeden procentní bod ročně rychleji dokáže svůj výstup za tutéž dobu zdvacetinásobit, takže skončí s téměř trojnásobným HDP než ekonomika první.* Z dlouhodobého hlediska může trvale udržovaný rozdíl pouhého jednoho procentního bodu znamenat rozdíl mezi blahobytem a mizérií. V hospodářské výkonnosti jsou skutečné rozdíly ještě působivější než tento příklad. Rozdíl mezi blahobytem a mizérií vzniká mnohem rychleji, než je zde naznačeno. Knížka, ze které byl příklad, uvádí, že v některých zemích to může být během pouhé jedné lidské generace. Studium toho, jak může hospodářská politika ovlivnit dlouhodobé tempo růstu hospodářského výstupu, má velký význam. [3]

V rámci dějin ekonomického myšlení má teorie hospodářského růstu pevné místo a bohatou tradici. Toto téma se objevovalo i v klasických dílech Adama Smithe („Pojednání o podstatě a původu bohatství národů“[2], 1776), Thomase Robert Malthuse („Esej o principu populace“[3], 1799) či Davida Ricarda („Zásady politické ekonomie a zdanění“[4], 1817). Za bezprostředního předchůdce moderní teorie hospodářského růstu je považován Harrodův-Domarův model, kterému se budeme věnovat jako prvnímu. Všechny modely jsou vystavěné na zjednodušujících a zevšeobecňujících předpokladech, díky kterým je dovolena samotná konstrukce, ale zároveň je odkloní od reality. Jak už jsme uvedli, realitu je téměř nemožné úplně popsat. Základním zjednodušením, které budeme v práci využívat, je uzavřenost ekonomiky, tzn. uvažujeme ekonomiku, která neobchoduje se zahraničím, je plně soběstačná a izoluje se od vnějšího světa.

[2]An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, zkrácený název Wealth of Nations česky „Bohatství národů“, zdroj hospodářského růstu viděl A. Smith v dělbě práce a ve svobodné tržní směně

[3]T. R. Malthus hledal souvislosti mezi hospodářským růstem a populačním růstem

[4]D. Ricardo rozvíjel teorii stagnace a předvídal, že hospodářský růst se nakonec zastaví

Kapitola 2

Modely ekonomického růstu

2.1 Harrodův-Domarův model

Roy Forbes Harrod byl britský ekonom, který žil v letech 1900 až 1978. Vystudoval ekonomii na Oxfordské univerzitě, kde ji poté od roku 1922 vyučoval a v roce 1952 byl jmenován jejím mimořádným profesorem. Specializoval se na mezinárodní ekonomii. Významně přispěl k rozvoji teorie nedokonalé konkurence, teorie mezinárodního obchodu a především teorie ekonomického růstu, čemuž se budeme v této práci věnovat. Mimo jiné byl Harrod redaktorem časopisu Economic Journal.

Evsey David Domar byl americký ekonom polského původu, který žil v letech 1914 až 1997. Byl zastánce ekonometrické metody hospodářské analýzy a zabýval se otázkami hospodářského růstu a jeho temp. Oba tito ekonomové se pokoušeli o dynamizaci Keynesovy teorie. Keynesova Obecná teorie je převážně teorií krátkého období.

Harrodův-Domarův model je součástí teoretického proudu, který zkoumá ekonomický růst z pohledu poptávky a meziregionálního obchodu. Poptávkově orientované modely staví na předpokladu, že výrobní faktory jsou determinovány poptávkou po statcích, a proto poptávková omezení ekonomického růstu přijdou na řadu dříve, než dojde k vyčerpání volných výrobních faktorů a nabídkovému omezení ekonomiky.

Nyní si definujeme agregátní poptávku. Agregátní poptávka vyjadřuje různá množství statků a služeb (reálného produktu), která chtějí spotřebitelé, firmy, vláda a zahraniční zákazníci koupit při různých cenových hladinách. V ekonomice se příjmy rovnají výdajům, každá vydaná jednotka je někoho příjmem, tedy agregátní poptávka se rovná celkové produkci (Y), HDP. Matematicky je agregátní poptávka (AD) součet spotřebních výdajů domácností (C), investičních výdajů firem (I), vládních nákupů statků a služeb (G) a čistého exportu (X). Jelikož se pohybujeme v uzavřené ekonomice, tak $X = 0$. Vládní výdaje rovněž zanedbáme, $G = 0$. Domácnosti buď spotřebovávají, nebo spoří. Největší vliv ze složek poptávky na ekonomický růst mají investice, které zabezpečují firmy. Podle keynesovské teorie se musí investice (I) rovnat úsporám (S) v ekonomice. Každá jednotka uspořená domácností, je obsažena v investicích. Platí tedy:

$$AD = C + I = Y. \tag{2.1}$$

Mluvíme zde o Harrodově-Domarově modelu, ale v podstatě se jedná o dva modely, které však i přes různé postupy vedou ke stejnému výsledku. Harrod se ve svém modelu z roku 1939 pokusil zdynamizovat Keynesovu rovnost mezi úsporami a investicemi, přičemž rovnovážný růst, tzv. zaručený růst, znamenal takový růst důchodu, který dynamicky vyrovnával úspory a investice. Odvození Harrodova zaručeného tempa růstu plyne z keynesiánské rovnosti plánovaných úspor a investic, kde je využito akcelerátoru. Akcelerátor vyjadřuje, jak se musí změnit zásoba kapitálu, aby se produkt zvýšil o jednotku. Někdy bývá označován jako kapitálový koeficient.

Domarův model z roku 1947 vychází rovněž z keynesiánských základů. Jeho teorie je založena na úvaze, že investice zvyšují jak poptávku, tak i nabídku. Poptávku zvyšují přes Keynesův výdajový multiplikátor a nabídku přes zvyšování kapitálové zásoby, tzn. produkt je obecně funkcí výrobních faktorů z nichž jedním je kapitál.

2.1.1 Odvození modelu

Zde si ukážeme konstrukci Harrodova-Domarova modelu, tak jak je uvedena v [12]. Za základní ekonomickou veličinu považujeme tedy produkci. Produkovat může subjekt, který vlastní kapitál, což jsou nejenom peníze, ale především budovy, stroje, zařízení apod. Kapitál vzniká a obnovuje se investicemi. V modelu budeme využívat tři ekonomické ukazatele, tj. tři proměnné, které jsou závislé na čase. Jedná se o produkci $Y = Y(t)$, kapitál $K = K(t)$ a investice $I = I(t)$. Přičemž víme, že veličina Y je kladná, protože pokud je někde vyvíjena jakákoliv ekonomická aktivita, musí tam být i nějaká produkce. Z výše uvedeného plyne, že veličina K je rovněž kladná, poněvadž kde je produkce, tam musel být kapitál.

Model je založen na třech předpokladech:

(1) Kapitál vzniká investicemi a mizí amortizací.

(2) Do tvorby kapitálu je investován stálý podíl produktu.

(3) Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.

Pomocí symbolu δ, jenž označuje podíl kapitálu, který se znehodnotí amortizací za jednotku času[1], jinak řečeno δ vyjadřuje míru opotřebení kapitálu, a symbolu κ, jenž značí čas, za který se z investované částky stane kapitál[2], upřesníme tyto předpoklady. Uvažujeme kapitál v čase t, $K(t)$, a podíváme se, jak to bude vypadat po krátkém časovém okamžiku Δt, $K(t + \Delta t)$. Kapitál vzniklý investicemi za jednotku času můžeme vyjádřit jako podíl I(t) a κ, a pokud tento podíl vynásobíme Δt, dostaneme kapitál vzniklý investicemi za krátký časový okamžik Δt. Za použití δ vyjádříme amortizaci kapitálu za jednotku času, $\delta K(t)$. Za Δt se kapitál tedy sníží o $\delta K(t)\Delta t$. A nyní už tedy můžeme vyjádřit Předpoklad (1):

$$K(t + \Delta t) = K(t) + \frac{1}{\kappa} I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta t.$$

Jednoduchými úpravami, odečtením $K(t)$ a následným vydělením Δt, dostáváme

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa} I(t) - \delta K(t).$$

Předpokládáme-li, že čas plyne spojitě a veličina K je diferencovatelná, pak limitním přechodem $\Delta t \to 0$ můžeme vyjádřit předpoklad (1) ve tvaru diferenciální rovnice

$$\dot{K} = \frac{1}{\kappa} I - \delta K. \tag{2.2}$$

Podle rovnice (2.1) je produkce součtem spotřeby domácností a investic. Abychom mohli vyjádřit předpoklad (2), musíme zavést parametr $c \in (0, 1)$, který určuje mezní sklon ke spotřebě[3]. Jinými slovy vyjadřuje podíl produkce, který není investován, je buď spotřebován nebo uspořen. Dostaneme tedy rovnost v podobě

$$Y = C + I = cY + I \quad \Rightarrow \quad I = Y - cY = (1 - c)Y. \tag{2.3}$$

Díky nerovnostem $c < 1$ a $Y > 0$ víme, že veličina I je kladná.

[1] $\delta \in (0, 1)$

[2] Typicky $\kappa = 1$, protože investice z jednoho období představují v následujícím období již kapitál.

[3] Výraz $(1 - c)$ označuje míru úspor.

Třetí, tudíž poslední předpoklad zapíšeme jako rovnost

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}. \tag{2.4}$$

Uvedenou rovnost (2.4) můžeme upravit na tvar

$$0 = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}Y - K\dot{Y}}{KY}.$$

Tuto rovnici je vhodné rozšířit Y a následně ze zlomku vytknout $\frac{Y}{K}$. Dostáváme

$$0 = \frac{\dot{K}Y^2 - KY\dot{Y}}{KY^2} = \frac{Y}{K}\frac{\dot{K}Y - K\dot{Y}}{Y^2}.$$

Pokud se na poslední zlomek pořádně podíváme, zjistíme, že se v něm skrývá derivace podílu[4]. Rovnici můžeme tedy ještě zjednodušit na tvar

$$0 = \frac{Y}{K}\dot{\left(\frac{K}{Y}\right)}.$$

Víme, že $K > 0$ a $Y > 0$. Aby výraz vpravo byl roven 0, musí být roven 0 výraz $\dot{\left(\frac{K}{Y}\right)}$. To nastane tehdy, když existuje konstanta $r \in \mathbb{R}$, pro kterou platí, že

$$\frac{K}{Y} = r \tag{2.5}$$

neboli

$$K = rY. \tag{2.6}$$

Pokud zderivujeme rovnici (2.6) dostaneme $\dot{K} = r\dot{Y}$. Následným vydělením této rovnice rovností (2.6) dostaneme rovnost (2.4). Předpoklad (3) lze tedy ekvivalentně vyjádřit rovností (2.4) nebo (2.6).

Spojením všech rovností, které vyjadřují předpoklady, rovnic (2.2), (2.3), (2.4) a (2.6), dostaneme

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\frac{1}{\kappa}I - \delta K}{K} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{(1-c)Y}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{(1-c)Y}{rY} - \delta = \frac{1-c}{\kappa r} - \delta,$$

tedy

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1-c}{\kappa r} - \delta = const,$$

konstantní relativní rychlost růstu produkce, kterou si označíme g.

Nyní tedy budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g. \tag{2.7}$$

[4]Pro derivaci podílu platí $\left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)' = \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b^2(x)}$, $b(x) \neq 0$

Je to rovnice se separovanými proměnnými a její řešení určíme pomocí (1.4).

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} = g\,\mathrm{d}t$$

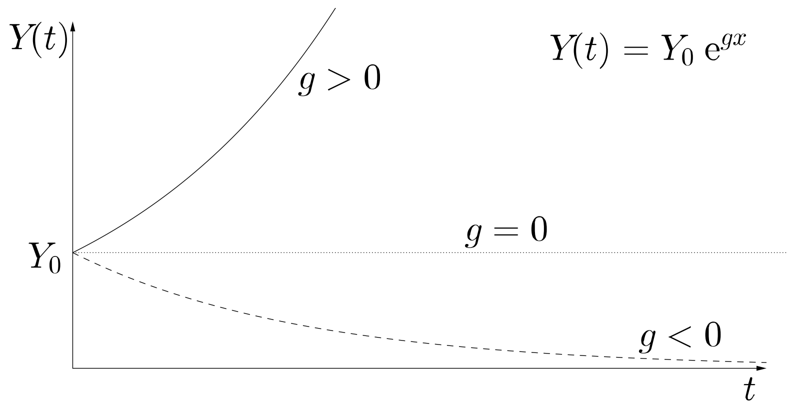
Zintegrujeme od 0 do t.

$$\int_0^t \frac{1}{Y(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t g\,\mathrm{d}\tau$$
$$\ln Y(t) - \ln Y(0) = gt$$

Řešení rovnice (2.7) je tedy

$$Y(t) = Y_0 \mathrm{e}^{gt},$$

kde $Y_0 = Y(0)$ je počáteční produkce. Znaménko konstanty g určuje, zda produkce klesá, stagnuje či roste.



Obrázek 2.1: Harrodův-Domarův model: produkce v závislosti na čase

Z rovnice (2.5) vidíme, že konstanta r představuje podíl kapitálu a produkce, což můžeme nazvat jako *kapitálovou náročnost jednotky produkce.*

Nyní můžeme přeformulovat závěr analýzy modelu,

- pro $g < 0$ platí $r > \dfrac{1-c}{\kappa\delta}$, produkce klesá a množství kapitálu v ekonomice se snižuje,
- pro $g = 0$ platí $r = \dfrac{1-c}{\kappa\delta}$, produkce stagnuje a množství kapitálu v ekonomice se nemění,
- pro $g > 0$ platí $r < \dfrac{1-c}{\kappa\delta}$, produkce roste a množství kapitálu v ekonomice se zvyšuje.

Stručně lze říci, pokud je kapitálová náročnost jednotky produkce příliš velká, nemůže produkce růst.

2.1.2 Leontiefova produkční funkce

Produkční funkce je funkce vyjadřující závislost produktu na vstupech jako jsou práce, půda nebo kapitál. Harrod a Domar se dále rozhodli zkoumat, jak to bude s dlouhodobým růstem v ekonomice při použití konkrétní produkční funkce. Vybrali si Leontiefovu produkční funkci (1941), podle níž výrobní faktory v ekonomice vstupují do produkce vždy ve fixním poměru. Funkce obecně využívá pouze dvě vstupní veličiny. Jelikož Harrod s Domarem chtěli zavést do modelu práci, zvolili si jako podstatné vstupy ekonomiky kapitál K a pracovní sílu L.
Leontiefovu produkční funkci lze zapsat jako

$$Y = F(K, L) = \min(AK, BL), \tag{2.8}$$

kde A a B jsou konstanty a platí $A > 0$ a $B > 0$. Tento zápis říká, že výrobní faktory jsou potřeba vždy v poměru B/A (např. „čtyři dělníci na jeden stroj“).
V případě, že

a) $AK = BL$, pak je plně využit všechen kapitál a pracovní síla je plně zaměstnaná, jsou plně zaměstnáni všichni pracovníci a stroje.

b) $AK > BL$, využívá se z kapitálu pouze část $(\frac{B}{A}) \cdot L$, a zbytek zůstává nečinný. Pracovní síla je plně zaměstnaná a $Y = BL$.

c) $AK < BL$, využívá se pouze množství práce $(\frac{A}{B}) \cdot K$, a zbytek je nezaměstnaný. Naopak kapitál je zcela využit a $Y = AK$.

Druhou možností, jak lze Leontiefovu produkční funkci vyjádřit, je přepočítání na jednoho pracovníka, tedy vydělením (2.8) pracovní silou L. Poměr $\frac{Y}{L}$ vyjadřuje produktivitu jednoho pracovníka a označíme si ji y. Dále označme k podíl práce a kapitálu, $\frac{K}{L}$. Poté pro produkční funkci platí

$$y = f(k) = \min(Ak, B). \tag{2.9}$$

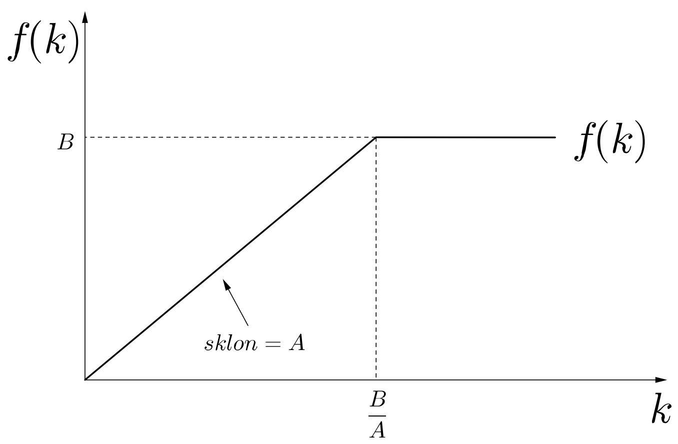
Podobně jako v předchozím tvaru platí, pokud

1) $k < \frac{B}{A}$, tedy $AK < BL$, využívá se celý kapitál, ale zaměstnaná je pouze část pracovní síly a $y = Ak$.

2) $k > \frac{B}{A}$, tedy $AK > BL$, tak je pracovní síla plně zaměstnána, ale z kapitálu je využívaná pouze část a $y = B$.

V prvním případě může ekonomika růst zvyšováním množství kapitálu, což odpovídá $g > 0$ z modelu. V situaci 2) je v dané ekonomice přebytek kapitálu, toto odpovídá $g < 0$ z modelu. V ekonomice je příliš mnoho kapitálu, jenž společnost nedokáže plně využít.

Na základě uvedených vlastností, jsme schopni sestrojit graf, který naznačuje průběh Leontiefovy produkční funkce ve tvaru rovnice (2.9).



Obrázek 2.2: Leontiefova produkční funkce přepočítaná na jednoho pracovníka

Díky předpokladu pevného poměru mezi prací a kapitálem, tedy nemožnou substitucí mezi prací L a kapitálem K, dospěli Harrod a Domar k závěru, že kapitalistické ekonomiky budou mít nežádoucí důsledky a to buď v podobě trvalého růstu nezaměstnanosti nebo trvale nevyužitého kapitálu. Ekonomický růst nesměřuje do rovnovážného stavu.

2.2 Solowův-Swanův model

Nyní se budeme věnovat Solowovu-Swanovu modelu ekonomického růstu. Jedná se o neoklasický model, který přečkal téměř půl století a dodnes představuje pro většinu ekonomů základní rámec pro analýzu hospodářského růstu. Obvykle je považován za skutečný základ moderní teorie hospodářského růstu. Stejně jako předchozí model je i tento pojmenován po dvou významných ekonomech, kteří se ke stejnému výsledku dobrali nezávisle na sobě. Jde o Roberta Mertona Solowa a Trevora Swana. I když model vyvinuli prakticky současně v roce 1956, Solowa práce se dočkala většího ohlasu. Důvodem je zřejmě to, že přispěl i dalšími klíčovými pracemi ke studiu růstu. Podle slavnějšího autora je někdy tento model zkráceně nazýván Solowův model.

Robert Merton Solow je americký ekonom narozený v roce 1924. Vystudoval sociologii, antropologii a ekonomii na Harvardově univerzitě. Od roku 1951 je profesorem statistiky, ekonometrie a makroekonomie, i když v současné době již emeritním, na Massachusettském technologickém institutu. Působil v Radě ekonomických poradců prezidenta J. F. Kennedyho. V roce 1987 obdržel Nobelovu cenu za ekonomii odůvodněnou jeho výzkumy v oblasti teorie a měření ekonomického růstu. Mezi jeho hlavní práce patří: „Povaha a zdroje nezaměstnanosti v USA“[5] (1964), „Teorie kapitálu a výnosová míra“[6] (1965), „Očekávání vývoje cen a chování cenové hladiny“[7] (1968), „Teorie růstu“[8] (1969).

Solowův hlavní přínos spočívá v rozpracování neoklasické teorie růstu, jejíž základem se stala jeho práce *Příspěvek k teorii ekonomického růstu* (1956). Solow v ní vytváří model ekonomického růstu na základě agregátní produkční funkce. I když pro tento model byl odrazovým můstkem již popsaný Harrodův-Domarův model, dost podstatně se od tohoto keynesiánského modelu lišil. V Solowově modelu probíhá růst jednak na základě substituce práce kapitálem a jednak na základě technického pokroku. [5]

2.2.1 Základní předpoklady

Pro ekonomiku, ve které budeme model popisovat, platí.

1. Domácnosti vlastní vstupy a majetek. Každá domácnost si sama rozhodne, jaký díl svého příjmu spotřebuje a jaký ušetří, kolik bude mít dětí, zda vstoupí jako pracovní síla a kolik bude pracovat.

[5] Nature and Sources of Unemployment in the USA
[6] Capital Theory and the Rate of Return
[7] Price Expectations and the Behavior of the Price Level
[8] Growth Theory: An Exposition

2. Firmy najímají vstupy, jako jsou například kapitál a pracovní síla, a používají je k produkci statků. Tyto statky prodávají domácnostem nebo jiným firmám. Firmy mají přístup k technologii, která jim umožní transformovat vstupy na výstupy.

3. Existují dva trhy. Prvním z nich je trh statků a služeb, kde firmy prodávají vyprodukované statky domácnostem nebo dalším firmám. A druhým je trh výrobních faktorů, kde domácnosti prodávají do firem své vstupy. Poptávané a nabízené množství určuje relativní ceny u vstupů a vyprodukovaných statků.

Základním předpokladem Solowova-Swanova modelu je neoklasická produkční funkce. Přesnému tvaru této funkce se budeme věnovat v další části textu. Obecněji lze produkční funkci napsat ve tvaru

$$Y(t) = F[K(t), L(t), A(t)], \tag{2.10}$$

kde

- Y je velikost produkce.
- $K(t)$ představuje kapitál, trvalé fyzické vstupy, jako jsou stroje, budovy, tužky atd., které byly vyrobeny někdy v minulosti. Je důležité si uvědomit, že tyto vstupy nemůže používat více subjektů současně. Tato vlastnost se nazývá rivalita.
- $L(t)$ je pracovní síla a představuje vstupy spojené s člověkem. Tento druhý vstup do produkční funkce zahrnuje počet pracovníků, jejich pracovní dobu, fyzickou sílu, schopnosti a zdraví. Práce je také rivalitní, což znamená, že pracovník nemůže bez snížení času na jednu činnost pracovat na jiné činnosti.
- $A(t)$ označuje úroveň znalostí a technologií, jenž je třetím vstupem do produkční funkce. Díky tomu mohou pracovníci a stroje produkovat. Technologie se v průběhu času zvyšuje, například stejné množství kapitálu a pracovních sil dává větší množství produkce v roce 2000 než v roce 1900, protože technologie použitá v roce 2000 je lepší. Technologie se liší i v jednotlivých zemích, například stejné množství kapitálu a práce přináší větší množství produkce v Japonsku než v Zambii, protože technologie, které jsou k dispozici v Japonsku,

jsou lepší. Technologie je nerivalitní, výrobci mohou používat ve stejném čase stejnou technologii. Proto dva výrobci, kteří vyrábějí Y musí používat jinou sadu strojů a pracovníků, ale mohou použít stejnou technologii.

Evoluce vstupů

Samozřejmě stále platí, že ekonomika je uzavřená. Tedy pro produkci platí již dříve zmiňovaná rovnice (2.1). Stále také platí „keynesiánská“ rovnost

$$I(t) = S(t).$$

Rovnici pro produkci můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$Y(t) = C(t) + S(t).$$

Pro kapitál a investice platí rovnice (2.2) a (2.3), které vyjadřují předpoklad (1) a (2) z Harrodova-Domarova modelu. V rovnici (2.2) uvažujeme $\kappa = 1$, protože investice z jednoho období představují v následujícím období již kapitál. Dále budeme vycházet z toho, že domácnosti buď spotřebovávají nebo šetří. Zavedeme si parametr $s \in (0, 1)$, který označuje exogenní (vnější) míru úspor a platí $s + c = 1$. Rovnici (2.3) můžeme tedy přepsat ve tvaru

$$I(t) = sY(t). \tag{2.11}$$

Spojením rovnic (2.2) a (2.11) dostaneme

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t), \tag{2.12}$$

a po dosazení produkční funkce (2.10) dostáváme

$$\dot{K}(t) = s \cdot F[K(t), L(t), A(t)] - \delta K(t).$$

Pracovní síla, $L(t)$, se v průběhu času mění v důsledku populačního růstu, změn počtu odpracovaných hodin, zlepšování dovedností a kvality pracovníků. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že pracovní síla roste konstantní, exogenní rychlostí

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \geq 0. \tag{2.13}$$

O úrovni technologií budeme také uvažovat, že roste konstantním tempem

$$\dot{A}(t) = pA(t) \quad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = p \geq 0. \tag{2.14}$$

Diferenciální rovnice (2.13) a (2.14) se řeší stejně jako rovnice (2.7), dostáváme tedy

$$L(t) = L_0 \mathrm{e}^{nt}$$
$$A(t) = A_0 \mathrm{e}^{pt}.$$

Parametry n a p jsou exogenní parametry růstu a musí splňovat nerovnost

$$\delta + n + p > 0.$$

Jiná omezení, než je výše uvedená nerovnost, pro tyto jednotlivé parametry nejsou.

2.2.2 Neoklasická produkční funkce

Nyní se budeme věnovat neoklasické produkční funkci, tak jak je uvedena v [3]. Neoklasická produkční funkce musí splňovat následující vlastnosti:

1. **Harrodovsky neutrální technologický pokrok.** Technologický pokrok je takzvaně „rozšiřující práci“, tj. technologické inovace působí na výstup, jako by násobovaly objem fyzické práce. Produkční funkci[9] můžeme zapsat ve tvaru

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)). \tag{2.15}$$

   V tomto případě bývá veličina A označována jako „efektivnost práce“ a součin $A \cdot L$ jako „efektivní práce“. Tento typ technologického pokroku vede ke stálému stavu s konstantním poměrem $\frac{K}{Y}$. Je to v souladu s empirickými pozorováními viz [1, str. 54–55].

2. **Konstantní výnosy z rozsahu** (neboli CRS – constant returns to scale). Tento předpoklad vyjadřuje následující rovnice

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL) \quad \text{pro všechna } \lambda \geq 0.$$

   Slovy to můžeme říci takto: kolikrát se zvýší oba vstupy, tolikrát se zvýší výstup. Solowův model předpokládá, že výstup není nijak výrazně omezen přírodními zdroji. Proto stačí jako proměnné určující výstup v produkční

[9] Obecně je možné funkci zapsat $Y(t) = F[A(t)K(t), B(t)L(t)]$, kde existují tři speciální případy. Pokud se $A(t) = B(t)$ mluvíme o Hickovsky neutrálním technickém pokroku, když $B(t) = 1$ jedná se o tzv. technický pokrok rozšiřující kapitál a třetí možností je $A(t) = 1$, což je nazýváno jako Harrodovsky neutrální technologický pokrok.

funkci uvažovat pouze pracovní sílu, kapitál a znalosti. Skutečně ani standardní empirické studie nenaznačují podstatné omezení růstu přírodními zdroji. Tento předpoklad, konstantní výnosy z rozsahu, sdílí prakticky celá moderní teorie hospodářského růstu. Nové teorie růstu dokonce říkají, že výnosy z rozsahu jsou rostoucí.

3. **Kladné a klesající mezní výnosy z faktorů.** Tento předpoklad je odrazem praktického pozorování, že přidáním dodatečné jednotky vstupu lze zvýšit výstup. S rostoucím objemem je však zvyšování výstupu stále obtížnější. Matematicky to můžeme zapsat jako:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

   pro všechna $K > 0$ a $L > 0$. Kladná první parciální derivace funkce zaručuje, že se jedná o rostoucí funkci, a druhá parciální derivace zajišťuje klesání přírůstků funkce v čase.

4. **Inadovy podmínky**

$$\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \infty$$
$$\lim_{K\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \lim_{L\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = 0$$

   Tyto podmínky říkají, že čím více se množství kapitálu či práce blíží k nule, tím větší je jeho mezní produkt a to až k nekonečnu a naopak, čím větší je množství kapitálu či práce, tím menší je jeho mezní produkt a tato hodnota konverguje k nule. Inadovy podmínky zaručují vnitřní stabilitu modelu. Jsou pojmenované podle japonského ekonoma Ken-Ichi Inady (1963).

Díky předpokladu konstantních výnosů z rozsahu můžeme vyjádřit produkční funkci v jednotkách efektivní práce. Nejprve vynásobíme rovnici (2.15) zlomkem $\frac{1}{AL}$. Dostaneme

$$\frac{Y}{AL} = \frac{1}{AL}F(K, AL) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right).$$

Pro zjednodušení si zavedeme substituci $y = \frac{Y}{AL}$, $k = \frac{K}{AL}$ a $f(k) = F(k, 1)$. Nyní tedy můžeme produkční funkci přepsat ve tvaru

$$y = f(k).$$

Jedná se o produkční funkci, která vyjadřuje výstup na jednotku efektivní práce jako funkci kapitálu na jednotku efektivní práce. Označuje se jako produkční funkce v intenzivním tvaru. A teď si ukážeme, že $f'(k)$ je mezní produkt kapitálu[10], který značíme MPK.

$$MPK = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = \frac{\partial [AL[F(\frac{K}{AL}, 1)]]}{\partial K} = AL\frac{\partial [F(\frac{K}{AL}, 1)]}{AL\,\partial (\frac{K}{AL})} = f'(k)$$

2.2.3 Odvození klíčové rovnice

Když už jsme si uvedli všechny potřebné předpoklady modelu, pokusíme se nyní popsat dynamiku modelu. Pro tento účel je vhodné podívat se na vývoj proměnné $k = \frac{K}{AL}$ a využít faktu, že k je funkcí K, A a L, které jsou funkcemi času. Lze tedy napsat

$$\dot{k} = \frac{\partial k}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial k}{\partial L}\dot{L} + \frac{\partial k}{\partial A}\dot{A}. \tag{2.16}$$

Dosazením do rovnice (2.16) dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}[A(t)\dot{L}(t) + \dot{A}(t)L(t)] = \\ = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nyní využijeme našich zavedených parametrů n a p, rovnice (2.12) a definice $k = \frac{K}{AL}$ a rovnici (2.17) zjednodušíme. Dostáváme:

$$\dot{k}(t) = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)n - k(t)p = s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - pk(t)$$

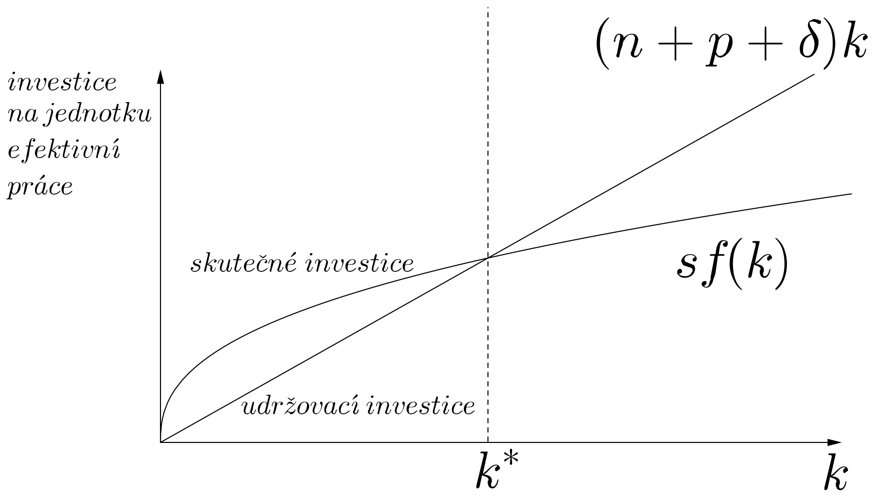
Ještě můžeme využít definici $y = \frac{Y}{AL} = f(k)$, díky čemuž dostaneme:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + p + \delta)k(t) \tag{2.18}$$

Rovnice (2.18) je klíčovou v Solowově modelu. První člen výrazu na pravé straně vyjadřuje skutečné úspory (investice) na jednotku efektivní práce. Druhým členem pravé strany jsou „udržovací investice“, tj. takové investice, aby kapitál na jednotku efektivní práce neklesal.

Proč musí docházet k udržovacím investicím? Za prvé, v průběhu času dochází k znehodnocování kapitálu, tudíž nové investice musí toto opotřebení nahradit. To

[10] Mezní produkt je změna celkové produkce při změně právě jednoho ze vstupů o jednu jednotku.



Obrázek 2.3: Solowův model: skutečné a udržovací investice

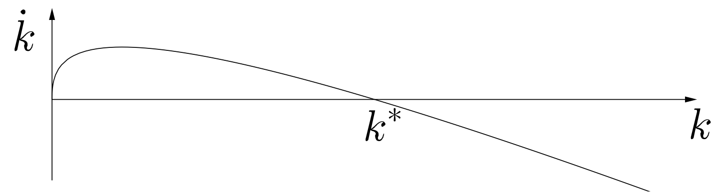
vyjadřuje člen δk. Za druhé, jelikož objem pracovní síly roste tempem n a produktivita tempem p, roste množství efektivní práce v průběhu času tempem $(n + p)$. Objem kapitálu na jednotku efektivní práce může buď zůstat konstantní, růst nebo klesat.

- k je konstantní: přírůstek objemu kapitálu na jednotku efektivní práce musí být roven $(n + p + \delta)k$.
- k roste: skutečné investice na jednotku kapitálu jsou větší než udržovací investice
- k klesá: skutečné investice na jednotku kapitálu jsou menší než udržovací investice

2.2.4 Stálý stav a základní kvalitativní závěry

Rovnice (2.18) nám tedy říká, jak se pohybuje k a lze z ní vydedukovat, kdy se dostane do rovnováhy, tj. pro jakou hodnotu se nebude měnit. Pokud je objem kapitálu na jednotku efektivní práce konstantní, je ekonomika v rovnováze. Graficky můžeme jednoduše tuto rovnováhu vyjádřit jako rozdíl dvou křivek. Tam, kde se protnou, je ekonomika v rovnováze, viz obrázek 2.3. Z obrázku vidíme, že křivky se protínají v počátku a bodě $k = k^*$. Počátek je opravdu rovnovážným bodem, ale je velmi nestabilní. Pokud se ekonomika trochu vychýlí od počátku, „doputuje“

do druhého rovnovážného bodu. Tento druhý bod je stabilní[11]. Druhou možností grafického vyjádření je forma tzv. fázového diagramu, který přímo ukazuje $\dot{k}$ jako funkci k, obrázek 2.4. V bodě k^* platí $\dot{k} = 0$, jedná se tedy o rovnováhu diferenciální rovnice (2.18).



Obrázek 2.4: Fázový diagram veličiny k v Solowowě modelu

Matematicky lze rovnováhu k^* vyjádřit rovnicí

$$sf(k^*) = (n + p + \delta)k^*. \tag{2.19}$$

Pokud by se hodnota k vychýlila o kousek „doleva" od k^*, bude hodnota $\dot{k}$ kladná, tedy funkce bude růst „zpět" do k^* a naopak, pokud by se hodnota vychýlila „doprava", $\dot{k} < 0$ a funkce bude klesat – vrátí se zpět do k^*. Jakmile tedy funkce $k(t)$ jednou nabude hodnotu k^*, v průběhu času se nebude měnit a již na této hodnotě zůstane. Tedy ani výstup na jednotku efektivní práce se nebude měnit a zůstane na hodnotě $y^* = f(k^*)$. V takovéto situaci říkáme, že je ekonomika ve stálém stavu.

Nyní se podíváme na vývoj jednotlivých veličin ve stálém stavu. Podle našich úvodních předpokladů roste pracovní síla i úroveň technologií konstantním tempem (bez ohledu na to, zda je či není ve stálém stavu). Konkrétně tedy L roste tempem n a A tempem p. Z definice je kapitál na jednotku efektivní práce, $k = \frac{K}{AL}$, ve stálém stavu konstantní. Jmenovatel, tedy efektivní práce (AL), roste tempem $n + p$, tudíž musí objem kapitálu ve stálém stavu růst také tempem $n + p$. I $y = \frac{Y}{AL}$ je ve stálém stavu z definice konstantní, a proto musí výstup Y rovněž růst tempem $n+p$. Výstup na hlavu, $\frac{Y}{L}$, a s ním i reálná mzda roste tempem růstu technologie, p. Výstup na jednotku kapitálu a s ním i mezní výnos kapitálu a úroková sazba jsou však v průběhu času konstantní, jejich tempo růstu je rovno nule.

[11] V tomto případě všechny definice stability, které jsme uvedli v první kapitole, splývají, a proto mluvíme pouze o stabilitě rovnovážného bodu(stavu).

Ukážeme si důkaz, že $\frac{Y}{L}$ roste tempem p.

$$\dot{\left(\frac{Y}{L}\right)} = \frac{\dot{Y}L - \dot{L}Y}{L^2} = \frac{\dot{Y}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{Y}{L}$$

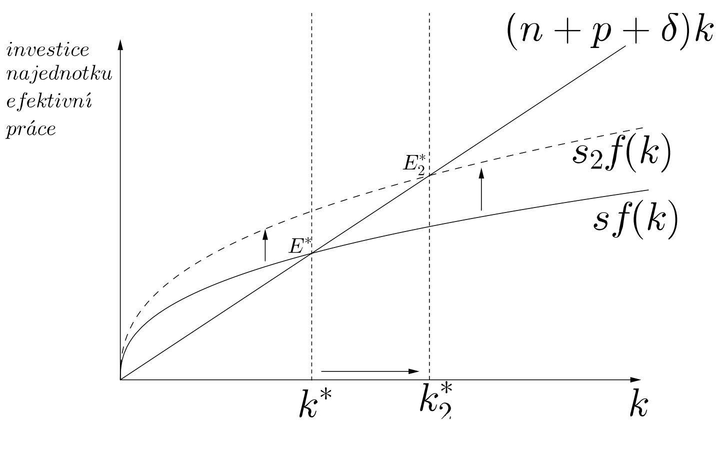
$$\frac{\dot{\left(\frac{Y}{L}\right)}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\dot{Y}}{L}\frac{L}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = n + p - n = p$$

Obdobným způsobem lze dokázat tempo růstu i ostatních veličin. Závěry Solowova modelu jsou shrnuty v následující tabulce.

VELIČINA	TEMPO RŮSTU
L	n
A	p
K	$n+p$
Y	$n+p$
Y/L	p
Y/K	0
MPK	0
MPL	n

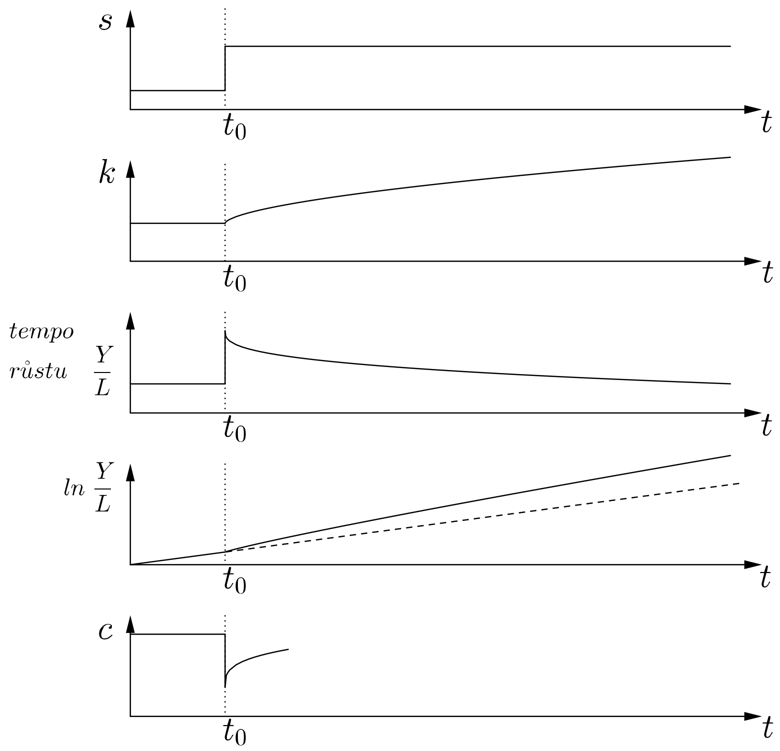
2.2.5 Vliv míry úspor

Nejsnáze může hospodářská politika ovlivnit míru úspor. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že na počátku je ekonomika ve stálém stavu a dojde k trvalému jednorázovému zvýšení míry úspor. Grafické řešení je velmi jednoduché, viz obrázek 2.5.



Obrázek 2.5: Účinky zvýšení míry úspor na investice

Nejprve se tedy ekonomika ocitne mimo stálý stav, takže kapitál na jednotku efektivní práce se bude dočasně zvyšovat, až dokud ekonomika nedosáhne nového stálého stavu, E_2^*. Během tohoto času bude dočasně růst i výstup na hlavu a to tempem vyšším než p. Vývoj jednotlivých veličin shrneme v následujícím obrázku.



Obrázek 2.6: Účinky zvýšení míry úspor v Solowově modelu

Stručně řečeno, zvýšení míry úspor má *úrovňový efekt*, ale nemá *růstový efekt*. V budoucích obdobích se zvýší úroveň výstupu na hlavu, ale nejedná se o dlouhodobý účinek na rychlost hospodářského růstu. [3]

Na posledním grafu obrázku 2.6 je zachycen vývoj spotřeby na jednotku efektivní práce, která je vyjádřena vztahem $\frac{C}{AL} = z(k) = (1-s)f(k)$. V teorii hospodářského růstu je za klíčovou veličinu mnohdy považována spotřeba, neboť je úzce spjata s blahobytem ekonomických aktérů. Ve stálém stavu se $z(k)$ nemění. Zvýšení míry úspor vede ke snížení $z(k)$, ale postupem času roste důsledkem toho, že se $f(k)$ zvyšuje směrem k novému stálému stavu. Otázkou zůstává, zda bude spotřeba nakonec vyšší, stejná či nižší, než byla v původním stálém stavu. Spotřebu ve stálém stavu lze zapsat rovnicí

$$z^* = f(k^*) - sf(k^*). \tag{2.20}$$

Za využití rovnice (2.19) můžeme rovnici (2.20) přepsat ve tvaru

$$z^* = f(k^*) - (n + p + \delta)k^*. \tag{2.21}$$

Nyní obě strany rovnici (2.21) zderivujeme vzhledem k s.

$$\frac{\partial z^*}{\partial s} = f'\frac{\partial k^*}{\partial s} - (n+p+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} = (f' - (n+p+\delta))\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

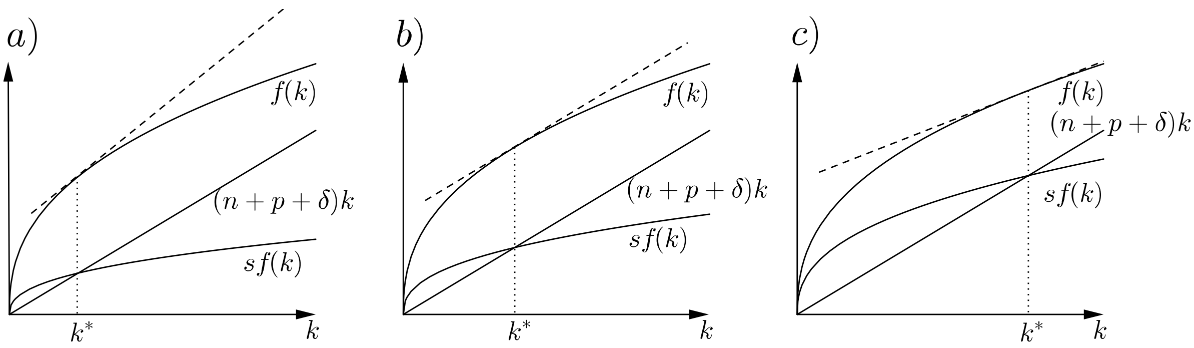
Jelikož víme, že $\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0$, tak o tom jaká bude spotřeba po zvýšení míry úspor rozhodne znaménko členu $(f' - (n + p + \delta))$.

a) $f' > n+p+\delta$, tedy $\dfrac{\partial z^*}{\partial s} > 0$, spotřeba s růstem míry úspor v konečném důsledku vzroste

b) $f' = n + p + \delta$, tedy $\dfrac{\partial z^*}{\partial s} = 0$, spotřeba se s růstem míry úspor nezmění

c) $f' < n + p + \delta$, tedy $\dfrac{\partial z^*}{\partial s} < 0$, spotřeba s růstem míry úspor klesá

Graficky to můžeme znázornit následovně.



Obrázek 2.7: Dopad zvýšení míry úspor na spotřebu: a) Zvýšení spotřeby b) Spotřeba se nezmění c) Snížení spotřeby

Nyní se ještě podíváme, jaký vliv má míra úspor na výstup v dlouhém období. Již víme, že na tempa růstu nemá žádný vliv, na velikost produktu však ano. V nějaké době po růstu/poklesu s roste produkt rychleji/pomaleji. Efekt na úroveň důchodu budeme zjišťovat podobně jako v případě vlivu na spotřebu. Hodnota důchodu, produkce, je ve stálém stavu $y^* = f(k^*)$ a nyní budeme derivovat vzhledem k s. Dostáváme

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s}. \tag{2.22}$$

Ve stálém stavu platí rovnice (2.19). Obě strany rovnice zderivujeme opět vzhledem k s.

$$f(k^*) + sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} = (n+p+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \tag{2.23}$$

Upravíme rovnice (2.23).

$$f(k^*) = ((n+p+\delta) - sf'(k^*))\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

$$\frac{f(k^*)}{(n+p+\delta) - sf'(k^*)} = \frac{\partial k^*}{\partial s} \tag{2.24}$$

Spojením rovnic (2.22) a (2.24) dostáváme rovnici

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{f(k^*)}{(n+p+\delta) - sf'(k^*)},$$

kterou ještě vynásobíme členem $\frac{s}{y^*}$ a získáme

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{s}{y^*}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+p+\delta) - sf'(k^*)}, \tag{2.25}$$

kde $s = \frac{(n+p+\delta)k^*}{f(k^*)}$, což je vyjádřeno z rovnice (2.19). Výraz na levé straně rovnice (2.25) vyjadřuje elasticitu růstu produktu vzhledem k s, tj. o kolik procent vzroste produkt, jestliže s vzroste o 1%. Dosazením za s a úpravami dostaneme

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{k^*f'(k^*)/f(k^*)}{1 - [k^*f'(k^*)/f(k^*)]}, \tag{2.26}$$

kde $k^*f'(k^*)/f(k^*)$ je elasticita výstupu vzhledem ke kapitálu v bodě $k = k^*$, kterou označíme $\alpha_K(k^*)$. Teď můžeme rovnici (2.26) přepsat.

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{\alpha_K(k^*)}{1 - \alpha_K(k^*)} \tag{2.27}$$

Za předpokladu konkurenčních trhů přináší kapitál svůj mezní produkt a výnos kapitálu ve stálém stavu je $k^*f'(k^*)$. Podíl kapitálu na celkovém produktu se ve stálém stavu tedy rovná $\alpha_K(k^*) = \frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}$. Ve většině zemí je $\alpha_K(k^*) = \frac{1}{3}$. Dosazením do rovnice (2.27) získáme

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} = \frac{1}{2}.$$

Jinými slovy 10 % růst s (např. z 20 % na 22 %) vyvolá zhruba 5 % nárůst y. Tudíž poměrně dramatická změna v hospodářských poměrech vede k poměrně nepatrným změnám v životní úrovni – alespoň v logice Solowova modelu. [14]

2.2.6 Cobbova-Douglasova produkční funkce

Cobbova-Douglasova produkční funkce je konkrétním příkladem neoklasické produkční funkce. Má tvar

$$F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha},$$

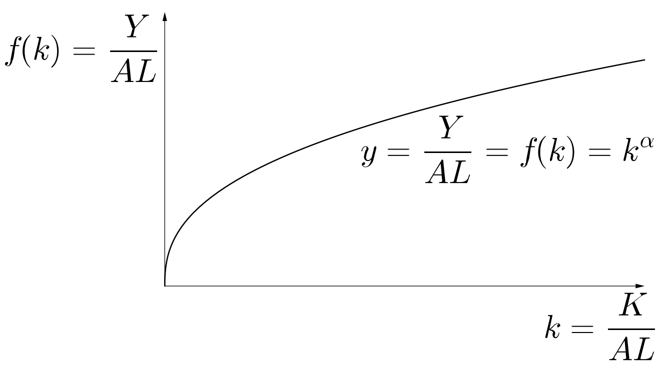
kde $0 < \alpha < 1$.

Tato funkce musí splňovat všechny výše uvedené podmínky neoklasické produkční funkce. Důkaz tohoto tvrzení můžeme provést jednoduše. Už na první pohled je vidět, že funkce splňuje první vlastnost. Je ve tvaru $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$. Dále ověříme druhou vlastnost,

$$\begin{aligned} F(\lambda K, bAL) &= (\lambda K)^{\alpha}(\lambda LA)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha}K^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}(LA)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{\alpha+1-\alpha}K^{\alpha}(LA)^{1-\alpha} \\ &= \lambda K^{\alpha}(LA)^{1-\alpha} \\ F(\lambda K, \lambda AL) &= \lambda F(K, AL). \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce má konstantní výnosy z rozsahu. Pro další výpočty je užitečné vyjádřit Cobbovu-Douglasovu produkční funkci v intenzivním tvaru. Dostáváme:

$$f(k) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}\left(\frac{AL}{AL}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}(1)^{1-\alpha} = k^{\alpha}$$



Obrázek 2.8: Cobbova-Douglasova produkční funkce vyjádřená na jednotku efektivní práce, tzn. v intenzivním tvaru

Nyní si ukážeme, že Cobbova-Douglasova produkční funkce splňuje i vlastnost kladných a klesajících mezních výnosů.

$$
\begin{aligned}
f(k) &= k^{\alpha} \\
f'(k) &= \alpha k^{\alpha-1} > 0 \\
f''(k) &= \alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0
\end{aligned}
$$

Zbývají nám už jen Inadovy podmínky.

$$
\begin{aligned}
\lim_{K\to 0}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) &= \lim_{k\to 0} f'(k) = \lim_{k\to 0}\big(\alpha k^{\alpha-1}\big) = \alpha \lim_{k\to 0}\big(k^{\alpha-1}\big) \\
\lim_{K\to \infty}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) &= \lim_{k\to \infty} f'(k) = \lim_{k\to \infty}\big(\alpha k^{\alpha-1}\big) = \alpha \lim_{k\to \infty}\big(k^{\alpha-1}\big)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Poněvadž $\alpha \in (0,1)$, je výraz $(\alpha - 1)$ vždy záporný a jeho absolutní hodnotu si označíme b. Teď můžeme limity (2.28) přepsat a vypočítat[12]:

$$
\begin{aligned}
\alpha \lim_{k\to 0}\big(k^{\alpha-1}\big) &= \alpha \lim_{k\to 0}\big(k^{-b}\big) = \alpha \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{k^{b}}\right) = \infty \\
\alpha \lim_{k\to \infty}\big(k^{\alpha-1}\big) &= \alpha \lim_{k\to \infty}\big(k^{-b}\big) = \alpha \lim_{k\to \infty}\left(\frac{1}{k^{b}}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Coobova-Douglasova produkční funkce tedy splňuje i Inadovy podmínky.

Nyní do klíčové rovnice Solowova modelu dosadíme Cobbovu-Douglasovu produkční funkci, tedy v rovnici (2.18) využijeme $f(k(t)) = k^{\alpha}(t)$. Dostáváme

$$
\dot{k}(t) = sk^{\alpha}(t) - (n + p + \delta)k(t). \tag{2.29}
$$

Pokud se na rovnici (2.29) pořádně podíváme, zjistíme, že se jedná o Bernoulliovu rovnici. Vyřešíme ji podle návodu v první kapitole. Pro zjednodušení zápisu budeme místo $k(t)$ psát pouze k. Nejprve tedy rovnici (2.29) vynásobíme členem $k^{-\alpha}$ a obdržíme

$$
\begin{aligned}
\dot{k}k^{-\alpha} &= s - (n + p + \delta)k^{1-\alpha} \\
\frac{1}{1-\alpha}\big(\dot{k^{1-\alpha}}\big) &= s - (n + p + \delta)k^{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Teď zavedeme substituci $u = k^{1-\alpha}$, tedy $\dot{u} = \big(\dot{k^{1-\alpha}}\big) = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$. Dostáváme rovnici

$$
\dot{u} = (1-\alpha)s - (1-\alpha)(n + p + \delta)u. \tag{2.30}
$$

[12] Jestliže konstantu dělíme stále menším a menším číslem, pak získáváme stále větší a větší číslo. A naopak pokud konstantu dělíme stále větším a větším číslem, získáváme stále menší a menší číslo.

Rovnice (2.30) je lineární diferenciální rovnice. Řešení najdeme podle první kapitoly a budeme ho dále upravovat.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \mathrm{e}^{\int_0^t -(1-\alpha)(n+p+\delta)\,\mathrm{d}\tau} \left[\int_0^t (1-\alpha)s\,\mathrm{e}^{-\int_0^\tau -(1-\alpha)(n+p+\delta)\,\mathrm{d}\varsigma}\,\mathrm{d}\tau + u_0\right] \\
u(t) &= \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t} \left[\int_0^t (1-\alpha)s\,\mathrm{e}^{(1-\alpha)(n+p+\delta)\tau}\,\mathrm{d}\tau + u_0\right] \\
u(t) &= \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t} \left\{(1-\alpha)s\frac{1}{(1-\alpha)(n+p+\delta)}\left[\mathrm{e}^{(1-\alpha)(n+p+\delta)t} - \mathrm{e}^0\right] + u_0\right\} \\
u(t) &= \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t} \left\{\frac{s}{(n+p+\delta)}\left[\mathrm{e}^{(1-\alpha)(n+p+\delta)t} - 1\right] + u_0\right\} \\
u(t) &= \frac{s}{(n+p+\delta)} - \frac{s}{(n+p+\delta)}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t} + u_0\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t} \\
u(t) &= \frac{s}{(n+p+\delta)} + \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t}\left(u_0 - \frac{s}{(n+p+\delta)}\right)
\end{aligned}
$$

Nyní budeme uvažovat počáteční podmínku $k(0) = k_0$ a provedeme zpětnou substituci $k = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Dostáváme:

$$
(k(t))^{1-\alpha} = \frac{s}{(n+p+\delta)} + \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t}\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{(n+p+\delta)}\right)
$$

$$
k(t) = \left[\frac{s}{(n+p+\delta)} + \mathrm{e}^{-(1-\alpha)(n+p+\delta)t}\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{(n+p+\delta)}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

Pro funkci k platí

$$
\lim_{t\to\infty} k(t) = \left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},
$$

tedy ve stálém stavu platí

$$
k^* = \left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.31}
$$

Dosazením k^* z rovnice (2.31) do vztahu $y = f(k) = k^\alpha$ dostaneme vyjádření celkového výstupu ve stálém stavu:

$$
y = \left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

Nyní dosadíme do rovnice (2.20) a získáme tím spotřebu ve stálém stavu.

$$
z^* = \left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s\left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-s)\left(\frac{s}{(n+p+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

2.3 Zhodnocení a porovnání modelů

Oba rozebírané modely jsou velmi zjednodušené a teoretické. Vychází z několika zjednodušujících předpokladů, které je odklání od reality. Největším nedostatkem obou modelů je předpoklad uzavřenosti ekonomiky, což v dnešní době už téměř neexistuje.

Harrodův-Domarův model byl odrazovým můstkem pro neoklasické modely ekonomického růstu. Důraz klade na stranu poptávky. Velký význam je uvědomění si důležitosti úspor a investic, každá uspořená jednotka představuje možnou investici. Model je vystavěn na třech předpokladech a z matematického hlediska nepředstavuje složitou úlohu na řešení. Produkci bere pouze jako funkci kapitálu a práce, je zde tedy zcela opomenut možný technologický pokrok. Velké mínus je v předpokladu nemožnosti substituce výrobních faktorů, tedy v pevném poměru mezi kapitálem a pracovní silou. Odklání to model ještě více od reality, poněvadž v případě technologického pokroku v reálné ekonomice lze jedním novým „lepším“ strojem nahradit několik pracovníků, je tedy možná substituce.

Solowův-Swanův model vycházel opět z rovnosti mezi úsporami a investicemi. Velký rozdíl oproti Harrodovu-Domarovu modelu je v tom, že do produkční funkce je zahrnut technologický pokrok. Díky technologickému pokroku a umožnění substituce mezi výrobními faktory se Solowův-Swanův model přibližuje realitě více než Harrodův-Domarův model.

Harrodův-Domarův model říká, že ekonomický růst nemůže směřovat do rovnovážného stavu. Rychlost hospodářského růstu se zvyšuje s klesající kapitálovou náročností jednotky produkce. K tomu dochází, pokud klesá mezní sklon ke spotřebě, respektive roste míra růstu, nebo se snižuje míra opotřebení kapitálu. Naopak Solowův-Swanův model říká, že každá ekonomika míří ke stálému stavu. Zvýšení míry úspor vede k rychlejšímu růstu, ale jedná se pouze o zrychlení dočasné, poněvadž po určité době se míra růstu vrací zpět na původní úroveň, vrací se do tzv. stálého stavu. Vyšší míra úspor vede k větším investicím a následně tedy k větší zásobě kapitálu a vyšší úrovni produktu na jednoho obyvatele. Vyšší hospodářský růst si ovšem nezachová trvale. V modelu lze také kritizovat předpoklad konstantní rychlosti růstu populace, protože ta z dlouhodobého pohledu závisí nepochybně na hospodářské situaci země a na dalších faktorech.

Kvalitativní závěr Solowova-Swanova modelu říká, že produkce na jednoho obyvatele roste tempem růstu úrovně technologií. Toto tempo je konstantní. Úroveň technologií však v modelu vystupuje pouze jako exogenní nerivalitní veličina. To znamená, že není v modelu nijak vysvětlována, není řečeno jaké faktory ji ovlivňují a je dostupná pro všechny stejně, což není pravda (např. patenty). Je proto vhodné zahrnout do modelu rivalitní endogenní růst technologií, což použili ekonomové v dalších modelech. Neoklasický model vede i při své jednoduchosti a nedostatcích k předpovědím, které nejsou v zásadním rozporu s pozorovanými fakty, a proto dodnes představuje základní rámec při analýze hospodářského růstu a další, složitější modely popisující hospodářský růst se od něho odvíjejí.

Závěr

Cílem naší práce bylo ukázat modelování ekonomického růstu pomocí diferenciální rovnice. V teoretické kapitole jsme se věnovali hlavně vybraným diferenciálním rovnicím, které jsou potřebné pro dané modely. Druhá kapitola je věnována Harrodově-Domarově modelu a Solowově-Swanově modelu. Uvedli jsme některé důležité informace o autorech modelů a dále jsme se věnovali předpokladům a vlastnímu odvození. Harrodův-Domarův model, který je rozebírán jako první, byl základem Solowova-Swanova modelu.

V Harrodově-Domarově modelu je ekonomický růst odvozen pomocí produkce, kapitálu, investic. Ukázali jsme situaci při využití Leontiefovy produkční funkce, která do modelu zavádí pracovní sílu. Tato produkční funkce vede k závěru, že kapitalistické ekonomiky budou mít nežádoucí důsledky. Druhým rozebíraným modelem byl Solowův-Swanův, kterému byla věnována větší pozornost. Jedním z předpokladů tohoto modelu je neoklasická produkční funkce, která zahrnuje exogenní technologický pokrok a musí splňovat 4 výše uvedené podmínky. Dle tohoto modelu směřuje ekonomika do stálého stavu. Velkou roli zde hraje míra úspor, a proto jsme zkoumali její vliv. Nakonec jsme v modelu aplikovali Cobbovu-Douglasovu produkční funkci, u níž jsme nejprve museli dokázat, že se jedná o neoklasickou produkční funkci. Teprve potom jsme mohli hledat matematické vyjádření některých veličin jako funkce parametrů. Na konci práce jsme oba modely zhodnotili a porovnali.

Oba modely představují zajímavý pohled na fungování ekonomiky, ale jejich problémem jsou zjednodušující předpoklady, které je odklání od reality. Jsou ovšem odrazovým můstkem pro složitější modely, které ve snaze přiblížit se realitě postupně uvolňují nutné předpoklady.

Seznam obrázků

Literatura

[1] BARRO, Robert J., SALA–I–MARTIN, Xavier. *Economic Growth.* Second edition. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2004. 654 s. ISBN 0–262–02553–1.

[2] ČADIL, Jan. *Regionální ekonomie: teorie a aplikace.* 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2010. 152 s. ISBN 978-80-7400-191-8.

[3] ČIHÁK, Martin a Tomáš HOLUB. *Teorie růstové politiky.* 1. vydání. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2000. 170 s. ISBN 80-245-0126-0.

[4] FÁBRY, Jan. *Matematické modelování.* 1. vydání. Praha: Professional Publishing, 2011. 180 s. ISBN 978-80-7431-066-9.

[5] HOLMAN, Robert. *Dějiny ekonomického myšlení.* 3. vydání. Praha: C. H. Beck, 2005. 539 s. ISBN 80-7179-380-9.

[6] HOLMAN, Robert. *Makroekonomie: středně pokročilý kurz.* 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2004. 424 s. ISBN 80-7179-764-2.

[7] KALAS, Josef a Zdeněk POSPÍŠIL. *Spojité modely v biologii.* 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 256 s. ISBN 80-210-2626-X.

[8] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice.* 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[9] LEPIL, Oldřich a Lukáš RICHTEREK. *Dynamické modelování.* 1.vydání. Ostrava: Repronis, 2007. 159 s. ISBN 978-80-7329-156-3.

[10] MEZNÍK, Ivan. *Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy.* 1. vydání. Brno: Fakulta podnikatelská Vysokého učení technického v Brně, 2011. 189 s. ISBN 978-80-214-4239-9.

[11] PAVELKA, Tomáš. *Makroekonomie: Základní kurz.* 1. vydání. Praha: Melandrium, 2006. 278 s. ISBN 80-86175-45-6.

[12] POSPÍŠIL, Zdeněk. *Spojité deterministické modely I* [online]. Brno: Masarykova univerzita, 2013.
Dostupné z: http://www.math.muni.cz/ pospisil/FILES/SDMi.pdf.

[13] RÁB, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* 3. vydání Brno: Masarykova univerzita, 2004. 96 s. ISBN 80-210-3416-5.

[14] ZAJÍČEK, Miroslav. *Vybrané kapitoly z makroekonomické analýzy.* 1. vydání. Praha: Oeconomica, 2005. 93 s. ISBN 80-245-0861-3.