UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Důkazy divergence harmonické řady

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Ludvík Ph.D.**
Vypracoval(a): **Veronika Šmajserová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Veronika Šmajserová

Název práce: Důkazy divergence harmonické řady

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Ludvík Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Hlavním cílem práce je popsat vybrané důkazy divergence harmonické řady včetně rozvedení související teorie. Dále práce zarhnuje i zajímavá fakta o variantách a zobecněních harmonické řady, konkrétně o prvočíselné harmonické řadě. Práce se zabývá klasickými sčítacími metodami divergentních řad, které harmonickou řadu sečíst nedokáží, ale i sčítací metodou, která harmonickou řadu sečte. Vedlejším cílem je popsat několik aplikací harmonické řady.

Klíčová slova: harmonická řada, divergence, důkazy

Počet stran: 50

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Veronika Šmajserová

Title: The proofs of divergence of the harmonic series

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Pavel Ludvík Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: The main aim of the thesis is to describe selected proofs of divergence of the harmonic series and furnish it with the required theory. The thesis includes interesting facts about variations and generalisations of the harmonic series, especially the prime harmonic series. The thesis deals with classical summation methods, that are not able to sum the harmonic series, but also a summation method, that is able to. The secondary aim of the thesis is to demonstrate some aplications of the harmonic series.

Key words: harmonic series, divergence, proofs

Number of pages: 50

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Pavla Ludvíka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala panu RNDr. Pavlu Ludvíkovi Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, cenné rady, ochotu a čas, který práci věnoval.

Úvod

Divergence harmonické řady je známý fakt, který lze dokázat mnoha způsoby. V bakalářské práci je uvedeno několik důkazů, které se jeví jako velmi zajímavé a často i jednoduché. Nicméně tyto důkazy jsme se pokusili sepsat do podrobnější a jasnější podoby než té, která se objevuje v literatuře.

První tři kapitoly jsou věnované obecné teorii o řadách a také přímo o harmonické řadě a její historii. Teorii z jiných kapitol matematické analýzy, která je v práci dále využita, je uvedena ve druhé kapitole. Po kapitole věnované již zmiňovaným důkazům přichází téma zobecnění harmonické řady a témata s tím související. V této části bakalářské práce lze najít kapitolu věnovanou rychlosti divergence harmonické řady, Riemannově zeta funkci a také část o prvočíselné harmonické řadě, která poměrně překvapivě také diverguje.

Kapitola číslo 6 pojednává o klasických sčítacích metodách divergentních řad, které harmonickou řadu sečíst nedokáží, konkrétně o Cesàrově a Abelově sčítací metodě. V poslední části této kapitoly je popsána i sčítací metoda, která harmonickou řadu sečíct dokáže.

Závěrečná kapitola je věnována aplikacím harmonické řady, kterých je opravdu mnoho. První z nich je loterie, u které platí, že střední hodnota výhry diverguje k nekonečnu, zatímco hráči jsou obvykle v praxi ochotni zaplatit jen malou částku za tuto hru. Druhou aplikací harmonické řady je problém skládání bloků, kde dokážeme, že je možné, aby pozice vrchního bloku byla od pozice spodního vzdálena o vzdálenost větší než je šířka jednoho bloku. Poslední z vybraných aplikací harmonické řady je problém červíka Štístka, který se snaží přelézt elastické lano, které se průběžně natahuje.

Kapitola 1

Řady - základní pojmy

V této kapitole se budeme zabývat základními pojmy týkajícími se řad. Uvedeme definici řady a souvisejících pojmů a dále zformulujeme kritéria, která budeme v následujících kapitolách využívat. V celé kapitole jsme vycházeli z [15].

1.1. Definice řad a souvisejících pojmů

Nejprve si uvedeme definici (nekonečné) řady, jejího součtu a také konvergence a divergence řady.

Definice. *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Symbol* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazýváme nekonečnou řadou, případně jen řadou, přičemž číslo* a_n *je* n*-tým členem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Jestliže položíme pro* $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

pak nazýváme číslo s_m m*-tým částečným součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Definice. *Součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je limita posloupnosti* $\{s_m\}$*, pokud tato limita existuje. Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, jestliže je jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní, jestliže* $\lim\limits_{m\to\infty} s_m$ *neexistuje, nebo je nevlastní. Jestliže* $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = \infty$*, respektive* $\lim\limits_{m\to\infty} s_m = -\infty$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* ∞*, respektive diverguje k* $-\infty$*. Jestliže* $\lim\limits_{m\to\infty} s_m$ *neexistuje, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje nebo osciluje.*

Po definování řady můžeme přejít i k definici mocninné řady se středem v a.

Definice. *Mocninnou řadou o středu a rozumíme funkční řadu ve tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-a\right)^n .$$

Číslo a nazýváme střed mocninné řady, čísla c_n *pro* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *nazýváme koeficienty řady, číslo* c_0 *nazýváme absolutní člen.*

1.2. Formulace a důkazy vět a kritérií, které budou v práci dále použity

Nyní uvedeme nutnou podmínku konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

V řadě důkazů se při předpokladu konvergence často využívá asociativní zákon.

Věta 2 (asociativní zákon pro konvergentní řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $k_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme*

$$b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Následující tvrzení platí pro řady s nezápornými členy.

Definice. *Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řadou s nezápornými členy.*

Pro řadu s nezápornými členy platí následující věta o přerovnání konvergentní řady.

Věta 3 (věta o přerovnání konvergentní řady)**.** *Nechť řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nyní si uvedeme tři kritéria, která v práci dále využíváme.

Věta 4 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je řada s kladnými členy a existuje* $\lim \frac{a_n}{b_n}$*. Označme* $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$*.*

1. *Jestliže* $A \in (0, \infty)$*, pak je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

2. *Jestliže* $A = 0$ *a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní, pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

3. *Jestliže* $A = \infty$ *a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Věta 5 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je neroustoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$*.*

Věta 6 (integrální kritérium)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je na intervalu* $[1, \infty)$ *nezáporná a nerostoucí. Označme* $a_n = f(n)$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, když* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *konverguje.*

Kapitola 2

Další teorie

Nyní si uvedeme další věty, které budou v práci použity. Při tvorbě této kapitoly byla využita literatura [14].

První z nich je věta o třech limitách, která je v literatuře nazývána též jako věta o dvou strážnících.

Věta 7 (věta o třech limitách)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže existují limity posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \in \mathbb{R},$$

pak existuje i limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a je rovna L.

Druhá věta, kterou v této kapitole uvedeme, je věta o limitě složené funkce.

Věta 8 (věta o limitě složené funkce)**.** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1, \lim_{y\to L_1} g(y) = L_2.$$

Jestliže navíc

1. *existuje redukované okolí $\mathcal{R}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{R}(x_0)$ platí $f(x) \neq L_1$, nebo*

2. *g je v L_1 spojitá (tedy L_1, $L_2 \in \mathbb{R}$ a $L_2 = g(L_1)$),*

pak

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = L_2.$$

Věta 9 (Heineho)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na redukovaném okolí bodu c. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(a) Platí

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

(b) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující, že x_n, $x_n \neq c$, je bod definičního oboru funkce f pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Pro záměnu integrálu a sumy budeme potřebovat Leviho větu.

Věta 10 (Leviho věta pro řady, [12])**.** *Jestliže f_n jsou nezáporné $\mu-$měřitelné funkce definované na X, pak*

$$\int_X \sum f_n \, d\mu = \sum \int_X f_n \, d\mu.$$

Nyní uvedeme dvě podstatné věty.

Věta 11. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená. Posloupnost, která má nevlastní limitu ∞, je zdola ohraničená a shora neohraničená. Posloupnost, která má nevlastní limitu $-\infty$, je shora ohraničená a zdola neohraničená.*

Věta 12. *Posloupnost je Cauchyovská právě tehdy, když je konvergentní.*

V kapitole o sčítací metodách se objevují i komplexní čísla.

Definice. *Komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel $a = (a_1, a_2)$, kde a_1 se nazývá reálná část a značí se $\Re(a)$, a_2 se nazývá imaginární část.*

Kapitola 3

Harmonická řada

Nyní přejdeme k samotné harmonické řadě, která je náplní práce.

3.1. Definice harmonické řady

Definice ([15]). *Řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *nazýváme harmonickou řadou.*

Definice ([4]). *Čísla* H_n*, která odpovídají částečným součtům harmonické řady, tj.* $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$*, nazýváme harmonická čísla.*

3.2. Historie harmonické řady

V kapitole o historii harmonické řady vycházíme z literatury [9]. Název harmonické řady je odvozen od harmonického součtu. Ten je definován následovně. Jestliže x a $x + 2y$ mají aritmetický průměr $x + y$, pak jejich převrácené hodnoty, tj. $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x+2y}$, mají harmonický průměr roven převrácené hodnotě aritmetického průměru původních hodnot, tj. $\frac{1}{x+y}$. Ekvivaletně lze harmonický průměr H hodnot a a b definovat jako

$$H = \frac{2ab}{a + b}$$

nebo rovnicí

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Další způsob definice harmonického průměru spočívá v tom, že je roven podílu druhé mocniny geometrického průměru G a aritmetického průměru A, tj. $H = \frac{G^2}{A}$. Pro každé tři po sobě jdoucí členy harmonické řady platí, že druhý z nich je harmonickým průměrem prvního a třetího členu, protože

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{n+1}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Kapitola 4

Divergence harmonické řady

První důkaz divergence harmonické řady byl zaznamenán ve 14. století a jeho autorem byl Mikuláš Oresme. Dalšími autory podobných důkazů byli Pietro Mengoli nebo Jacob Bernoulli. Tyto a další důkazy divergence harmonické řady uvedeme v této kapitole.

4.1. Vybrané důkazy divergence harmonické řady

V této kapitole si uvedeme několik důkazů divergence harmonické řady. Při zpracování důkazů číslo 1 až 9 jsme vycházeli z [7] včetně stejného číslování. Důkazy 10 až 15 jsou opět podle [7], ovšem v literatuře s čísly 12 až 17, přičemž poslední dva důkazy (14 a 15) neobsahují důkazy tvrzení, kterých je v důkazech využito. U důkazů číslo 16 a 17 jsme vycházeli z prezentace [8]. Předposlední důkaz číslo 19 vychází ze článku [6].

4.1.1. Důkaz č. 1

První důkaz divergence harmonické řady, kterým se budeme zabývat, pochází z období okolo roku 1350 a byl proveden Mikulášem Oresmem[1].

Uvažujme podposloupnost $\{H_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$. Metodou matematické indukce dokážeme, že pro členy této posloupností platí $H_{2^k} \geq 1 + k\left(\frac{1}{2}\right)$.

[1] Mikuláš Oresme byl francouzský teolog a matematik, který se mimo jiné zabýval obecnými souřadnicemi ještě dříve než René Descartes, po němž je kartézská soustava souřadnic pojmenována.

(0) Pro $k = 1$ dostaneme $H_{2^1} = H_2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \geq 1 + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$. Tato podmínka je tedy splněna.

(1) Nyní předpokládejme, že daná nerovnost platí pro $k \in \mathbb{N}$, tj. $H_{2^k} \geq 1+k\left(\frac{1}{2}\right)$, a dokážeme ji pro $k+1$, tj. $H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)$.

Na pravé straně nerovnice dostaneme výraz, který upravíme a následně využijeme indukční předpoklad. Poslední nerovnost vyplývá z vlastnosti posloupnosti $\{H_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$, kdy $H_{2^{k+1}} - H_{2^k} \geq \frac{1}{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$:

$$1 + (k+1)\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + k\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \leq H_{2^k} + \left(\frac{1}{2}\right) \leq H_{2^{k+1}}.$$

Dokázáním tvrzení $H_{2^k} \geq 1 + k\left(\frac{1}{2}\right)$ jsme ověřili neomezennost posloupnosti $\{H_{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$ a tedy i fakt, že posloupnost $\{H_n\}$ diverguje.

4.1.2. Důkaz č. 2

Následující důkaz pochází od Rosse Honsbergera z druhé poloviny 20. století. Pokud bychom dokázali, že posloupnost $\{H_{10^k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je neomezená, mohli bychom říci, že je neomezená i posloupnost $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz provedeme dokázáním vztahu $H_{10^k-1} > k\left(\frac{9}{10}\right)$ a to metodou matematické indukce.

(0) Pro $k = 1$ dostaneme nerovnost

$$H_{10^1-1} = H_9 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 1\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{10}.$$

(1) Nyní předpokládejme, že nerovnost platí pro k, tj. $H_{10^k-1} > k\left(\frac{9}{10}\right)$, a dokážeme ji pro $k+1$, tj. $H_{10^{k+1}-1} > (k+1)\left(\frac{9}{10}\right)$.

Na pravé straně nerovnosti dostaneme

$$(k+1)\left(\frac{9}{10}\right) = k\left(\frac{9}{10}\right) + \frac{9}{10} < H_{10^k-1} + \frac{9}{10} < H_{10^{k+1}-1},$$

kde jsme využili indukčního předpokladu a vlastnosti $H_{10^{k+1}-1} - H_{10^k-1} > \frac{9}{10}$ pro všecchna $k \in \mathbb{N}$, kterou ověříme následovně

$$H_{10^{k+1}-1} - H_{10^k-1} = \sum_{j=1}^{10^{k+1}-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{10^k-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=10^k}^{10^{k+1}-1} \frac{1}{j}$$
$$> \left[\left(10^{k+1}-1\right) - \left(10^k\right) + 1\right] \frac{1}{10^k} = 9 > \frac{9}{10}.$$

4.1.3. Důkaz č. 3

Třetí důkaz, kterým se budeme zabývat, pochází od italského matematika jménem Pietro Mengoli, který žil v letech 1626 až 1686.

Nejprve poznamenejme, že pro $n = 2, 3, 4, \ldots$ platí následující vztah:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}. \tag{4.1}$$

Důkaz budeme provádět sporem. Předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Tedy

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + S,$$

kde jsme v nerovnosti využili upraveného vztahu (4.1), konkrétně

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$$

a aplikovali jej na všechny členy harmonické řady kromě prvního, tj. 1.

Tím jsme se dostali do sporu $S > 1 + S$. Harmonická řada tedy nemá součet a diverguje.

4.1.4. Důkaz č. 4

Uvažujme posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $S_n = H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Protože platí $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{S_n\}$ roustoucí.

Platí také

$$\frac{1}{2} = S_1 \leq S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

tj. posloupnost $\{S_n\}$ má kladné členy a je omezená intervalem $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Z toho plyne, že posloupnost konverguje ke kladnému číslu z intervalu $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Z definice posloupnosti $\{S_n\}$ a jejích výše uvedených vlastností plyne, že posloupnost $\{H_n\}$ není Cauchyovská a musí tedy divergovat.

4.1.5. Důkaz č. 5

Následující důkaz vychází z nerovnosti $e^x > 1 + x$ platné pro všechna $x \neq 0$, kterou musíme nejprve dokázat.

Budeme se zabývat průběhem funkce $e^x - 1 - x$ a pokusíme se najít její globální minimum. Po zderivování a položení výsledné funkce rovno nule dostaneme rovnici $e^x - 1 = 0$, jejíž řešení je $x = 0$. Protože na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce klesající a na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí, nabývá funkce v bodě $x = 0$ globálního minima s hodnotou 0. Tím jsme dokázali, že pro všechna $x \neq 0$ platí nerovnost $e^x > 1 + x$.

Nyní přejdeme k samotnému důkazu. Uvažujme posloupnost $\{e^{H_n}\}_{n=1}^{\infty}$, tj.

$$e^{H_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}} > \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1,$$

kde jsme využili námi dokázané nerovnosti $e^x > 1 + x$.

Protože je posloupnost $\{e^{H_n}\}$ neomezená, což plyne z nerovnosti $e^{H_n} > n+1$, je podle Heineho věty (tj. Věty 9) a věty o limitě složené funkce (tj. Věty 8) neomezená i posloupnost $\{H_n\}$.

4.1.6. Důkaz č. 6

Tento důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Potom

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) > \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = S.$$

Tím jsme se dostali ke sporu $S > S$. Součet S tedy neexistuje a předpoklad toho, že harmonická řada konverguje, byl nesprávný.

Důkaz může mít různé modifikace, lze uvažovat skupiny po 3 sčítancích. V tom případě bychom měli

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=3j-2}^{3j} \frac{1}{n} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j-2} + \frac{1}{3j-1} + \frac{1}{3j}$$
$$> 3\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = S.$$

Tím jsme opět došli ke sporu.

Pro obecné $k \in \mathbb{N}$ bychom dostali

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k(j-1)+1}^{jk} \frac{1}{n} \right) > k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = S.$$

4.1.7. Důkaz č. 7

Následující důkaz je založen na tom, že platí rovnost

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Ta lze dokázat postupnou úpravou levé strany nerovnosti, tj.

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2+2n+1}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)+1}{2(2n+1)(n+1)}$$
$$= \frac{2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Potom

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= S + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}, \end{aligned}$$

kde poslední člen je vždy nenulový, tudíž jsme došli ke sporu a náš předpoklad konvergence harmonické řady je vyvrácen.

4.1.8. Důkaz č. 8

V důkazu č. 8 opět předpokládáme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Předpokládejme také, že

$$\frac{1}{2} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}.$$

Protože využitím věty o přerovnání konvergentní řady, tj. Věty 3, dostaneme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1},$$

mělo by platit

$$\frac{1}{2} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

To platit nemůže, protože $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\frac{1}{2} S > \frac{1}{2} S$.

4.1.9. Důkaz č. 9

V tomto důkazu se na harmonickou řadu pokusíme aplikovat integrální kritérium. Podle toho by mělo platit, že harmonická řada konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$. Protože

$$\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \ln(t) = \infty,$$

harmonická řada diverguje.

4.1.10. Důkaz č. 10

Následující důkaz byl publikován v roce 1689 Jacobem Bernoullim.

Nejprve poznamenejme, že pro $c \in \mathbb{Z}$, $c > 1$ platí

$$\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \cdots + \frac{1}{c^2} = \sum_{i=c+1}^{c^2} \frac{1}{i} \geq \left(c^2 - c\right) \frac{1}{c^2} = 1 - \frac{1}{c}.$$

Přičtením $\frac{1}{c}$ k oběma stranám nerovnosti dostaneme

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \cdots + \frac{1}{c^2} \geq 1.$$

Předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Potom platí

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k^2+1}^{(k^2+1)^2} \frac{1}{n} \right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + \infty = \infty.$$

Tím jsme došli ke sporu s naším předpokladem o konvergenci harmonické řady, musí tedy divergovat.

4.1.11. Důkaz č. 11

Následující interpretace důkazu pochází opět od Jacoba Bernoulliho, nicméně oficiálně je důkaz připisován jeho bratru Johannovi.

Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, která je teleskopická a konverguje k 1, protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Nyní předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Potom

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\cdots \\
&= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\right)+\cdots \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \\
&= 1+S,
\end{aligned}
$$

čímž jsme došli ke sporu. Harmonická řada tedy diverguje.

4.1.12. Důkaz č. 12

Následující důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že harmonická řada konverguje se součtem S. Protože už pro součet prvních čtyř členů harmonické posloupnosti platí

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}>2,$$

musí platit nerovnost $S>2$.

Dále pro součet S podle Věty 2 platí:

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=\frac{k(k+1)}{2}+1}^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\frac{1}{n}\right) = 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+ \\
&+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\cdots > 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+2} \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = 2(S-1).
\end{aligned}
$$

Z $S>2(S-1)$ plyne, že $S<2$, což je ve sporu s faktem $S>2$. Harmonická řada tedy musí divergovat.

4.1.13. Důkaz č. 13

Následující důkaz je založen na neomezenosti posloupnosti $\{H_{n!}\}_{n=1}^{\infty}$.

Nejprve poznamenejme, že pro $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$ platí vztah

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k-1)!+1}+\frac{1}{(k-1)!+2}+\cdots+\frac{1}{k!} &> \frac{k!-(k-1)!}{k!}\\ &=\frac{(k-1)!(k-1)}{k!} = 1-\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Nyní uvažujme posloupnost $\{H_{n!}\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned}H_{n!} &= \sum_{k=1}^{n!}\frac{1}{k} = 1+\sum_{k=2}^{n!}\frac{1}{k} = 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\\ &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)!+1}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!+1}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) > 1+\sum_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 1+n-H_n,\end{aligned}$$

kde jsme využili Větu 2.

Tedy platí $2H_{n!} > H_{n!} + H_n > 1 + n$, kde první nerovnost vychází z toho, že $H_{n!} > H_n$, protože $n! > n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{H_{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neomezená a harmonická řada diverguje.

4.1.14. Důkaz č. 14

V důkazu č.14 využijeme upravenou nutnou podmínku konvergence číselné řady.

Věta 13. *Nechť je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladná a klesající. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.*

Důkaz. Definujme posloupnost $\{b_N\}_{N=1}^{\infty}$ takovou, že pro všechna $N \in \mathbb{N}$,

$$b_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Z konvergence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne $\lim_{N\to\infty} b_N = 0$.

Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \le na_{2n} \le a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \le b_N$. Podle věty o třech limitách (tj. Věty 7) platí $\lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0$, tedy $\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$.

Podobně pro liché indexy platí $(2n+1)a_{2n+1} = 2n \cdot a_{2n+1} + a_{2n+1} \le 2n \cdot a_{2n} + a_{2n+1}$, a tedy $\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$.

Celkem jsme tedy dostali požadovanou rovnost $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ □

Nyní ji můžeme aplikovat na harmonickou řadu.

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Protože není splněna modifikovaná nutná podmínka konvergence, harmonická řada diverguje.

4.1.15. Důkaz č. 15

Důkaz je založen na následujícím tvrzení.

Věta 14. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *je divergentní řada s kladnými členy. Jestliže* $s_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$*, pak* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{s_{n-1}}$ *diverguje.*

Důkaz. Úpravou vztahu $\frac{d_{N+1}}{s_N} + \cdots + \frac{d_{N+k}}{s_{N+k-1}}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d_{N+1}}{s_N} + \cdots + \frac{d_{N+k}}{s_{N+k-1}} &\ge \frac{d_{N+1}}{s_{N+k-1}} + \cdots + \frac{d_{N+k}}{s_{N+k-1}} = \frac{s_{N+k} - s_N}{s_{N+k-1}} \\ &\ge \frac{s_{N+k} - s_N}{s_{N+k}} = 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{s_{n-1}}$ konverguje. Pak pro každé $L > 0$, a tedy i pro $L \in (0,1)$, existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{d_m}{s_{m-1}} + \cdots + \frac{d_n}{s_{n-1}} < L$ pro všechna m, n, kde $n > m \ge N$. Pak platí

$$1 - \frac{s_N}{s_{N+k}} \le \frac{d_{N+1}}{s_N} + \cdots + \frac{d_{N+k}}{s_{N+k-1}} < L$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pro $k \to \infty$ je $s_{N+k} \to \infty$, protože posloupnost diverguje a má kladné členy. Potom dostaneme nerovnost $1 \le L$, která je ve sporu s předpokladem $L \in (0,1)$.

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{s_{n-1}}$ tedy za daných podmínek diverguje. □

Uvažujme divergentní řadu s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, kde $d_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $s_{n-1} = n-1$, a tedy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{s_{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Podle výše uvedené věty harmonická řada diverguje. Tímto způsobem můžeme ke každé divergentní řadě najít řadu, která diverguje pomaleji. Neexistuje tedy nic jako nejpomaleji divergující řada.

4.1.16. Důkaz č. 16

Následující důkaz využívá vzorce pro součet geometrické řady a Věty 2.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k^2+k+1}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{k^2+k+2} + \cdots + \frac{1}{k^3+k^2+k+1}\right) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\sum_{i=0}^{j} k^i} + \cdots + \frac{1}{\sum_{i=0}^{j+1} k^i}\right) > 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^{j+1}}{\sum_{i=0}^{j+1} k^i} \\ &\overset{(*)}{>} 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{j} = \frac{1}{1-\frac{k}{k+1}} = k+1.\end{aligned}$$

Nerovnost $(*)$ jsme získali pomocí vztahu

$$\sum_{i=0}^{j+1} k^i < \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} k^i \overset{(**)}{=} (k+1)^{j+1}$$

pro všechna $j > 0$, kde jsme využili toho, že vždy platí $\binom{j+1}{i} \geq 1$ a pro důkaz ostré nerovnosti zbývá najít aspoň jedno kombinační číslo, které je větší než 1. Tím je například $\binom{j+1}{1}$. Rovnost $(**)$ jsme získali využitím binomické věty.

Harmonická řada tedy diverguje.

4.1.17. Důkaz č. 17

Důkaz č. 17 je založen na následujícím tvrzení.

Věta 15. *Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ platí nerovnost $x \geq \ln(x)$.*

Důkaz. Uvažujme funkci f definovanou pro $x > 0$ vztahem $f(x) = x - \ln(x)$. První derivace je ve tvaru $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, a proto je funkce f klesající na intervalu $(0, 1)$ a rostoucí na intervalu $(1, \infty)$. Položme první derivaci rovnu nule, tj. $1 - \frac{1}{x} = 0$, a tím najděme absolutní minimum. Toho funkce nabývá v $x = 1$ s hodnotou 1. Platí tedy $f(x) = x - \ln(x) \geq 1 > 0$. □

Z tvrzení plyne, že

$$\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Pro posloupnost $\{H_n\}_{n=1}^{k}$ potom platí

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1).$$

Tím jsme dokázali neomezenost shora posloupnosti $\{H_n\}_{n=1}^{k}$, a tedy i divergenci harmonické řady.

4.1.18. Důkaz č. 18

V tomto důkazu ověříme divergenci harmonické řady srovnáním s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, která je teleskopická a diverguje, protože

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(k+1) - \ln(k)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria (tj. Věty 4), tj.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 > 0,$$

diverguje i harmonická řada. Ve výpočtu limity jsme aplikovali l'Hospitalovo pravidlo.

4.1.19. Důkaz č. 19

Důkaz vychází z Fibonacciho posloupnosti, která je definována rekurzivně $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Limita poměru dvou následujících členů Fibonacciho posloupnosti je rovna zlatému řezu, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=f_n+1}^{f_{n+1}} \frac{1}{j} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{13}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{21}\right) + \cdots \\
&\geq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{13} + \cdots,
\end{aligned}$$

kde jsme využili Větu 2.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence (tj. Větu 1), tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \neq 0$, harmonická řada diverguje.

4.1.20. Důkaz č. 20

Nyní dokážeme divergenci harmonické řady pomocí kondenzačního kritéria (tj. Věty 5).

Předpoklad kondenzačního kritéria, tj. posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n \frac{1}{n}$, je nerostoucí a má nezáporné členy, je splněn. Podívejme se, jak nyní vypadá řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.$$

Protože tato řada diverguje, diverguje i harmonická řada.

4.2. Rychlost divergence harmonické řady

Harmonická řada diverguje velmi pomalu. Například součet prvních 13000 členů sotva převýší číslo 10. Uvažujme, jak lze harmonický součet H_n omezit zdola i shora.

$$\begin{aligned}\ln(n+1) &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n\end{aligned}$$

V první rovnosti jsme využili vzorce pro neurčitý integrál $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, kde C je libovolná konstanta, a dosadili meze 1 a $n+1$. Nyní se zaměříme na horní mez harmonického součtu H_n.

$$\begin{aligned}H_n - 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln(n)\end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n).$$

Pokud bychom chtěli zjistit, kolik členů harmonické řady bude potřeba, abychom dostali součet 1000, tj. $H_n > 1000$, stačí vyjít ze vztahu $\ln(n+1) > 1000$, jehož řešením bychom došli k tomu, že n musí být nejméně 10^{435}. Pro představu uveďme, že na nejrychlejším superpočítači v roce 2020 by tento výpočet trval

$$\frac{10^{435}}{415 \cdot 10^{15}} \cdot \frac{1}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 7{,}6 \cdot 10^{409}$$

let, protože tento superpočítač dosahuje rychlosti 415 petaflops, tj. $415 \cdot 10^{15}$ operací za sekundu. Podrobnosti najdete v [6],[16].

Kapitola 5

Zobecnění harmonických řad a související témata

5.1. Riemannova zeta funkce

Riemannovu zeta funkci, která je významnou součástí tak zvané Riemannovy hypotézy, zavedl roku 1859 německý matematik Bernhard Riemann, jak je uvedeno v [17]. Ve zbylé části kapitoly jsme čerpali z [10].

$$\zeta\left(z\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$$

Pro tuto funkci platí, že absolutně konverguje pro všechna komplexní čísla z, která mají reálnou část větší než 1.

Nyní se zaměřme na Eulerovu–Mascheroniho konstantu, která je definována následovně:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Nejprve dokažme, že tato limita opravdu existuje. Uvažujme posloupnost $\{\gamma_n\}_{n=2}^{\infty}$ definovanou jako

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

K tomu, abychom dokázali, že posloupnost $\{\gamma_n\}_{n=2}^{\infty}$ je monotónní a omezená, potřebujeme následující vztah platný pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

jehož platnost je dokázána v [10, Section 3.3]. Tento vztah upravíme do jiného tvaru

$$n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 < (n+1) \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$n < \frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} < n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}. \tag{5.1}$$

Užitím první nerovnosti výsledného tvaru a definice γ_n dokážeme, že posloupnost $\{\gamma_n\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající, tj.

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) = \gamma_{n+1} - \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n) > \gamma_{n+1}.$$

a užitím druhé nerovnosti

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \\ &> 1 + [\ln(3) - \ln(2)] + [\ln(4) - \ln(3)] + \cdots + [\ln(n+1) - \ln(n)] - \ln(n) \\ &= 1 - \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(n) > 1 - \ln(2) > 0\end{aligned}$$

jsme dokázali omezenost posloupnosti $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ zdola.

Užitím této konstanty, která se nazývá též jen Eulerova, můžeme určit součet alternující harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Z definice Eulerovy–Mascheroniho konstanty lze odvodit následující dva vztahy

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right),$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \ln n,$$

jejichž odečtením získáme

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots - \frac{1}{2n}\right) - \ln 2.$$

Tedy platí

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots .$$

Analogicky lze odvodit také vztah pro $\ln 3$. Z definice plynou dva vztahy

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n} - \ln(3n)\right),$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) - \ln(n),$$

jejichž odečtením získáme

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + + - \cdots - \frac{2}{3n}\right) - \ln(3).$$

Tedy

$$\ln 3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots .$$

5.2. Prvočíselná harmonická řada

V této kapitole se budeme zabývat řadou $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$, kde $P \subset \mathbb{N}$ je množina všech prvočísel. Při zpracování této kapitoly včetně podkapitoly o posloupnosti částečných součtů prvočíselné harmonické řady jsme vycházeli především z [10].

Jak už víme, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ už konverguje, a proto by nás mohlo zajímat, jak je to s konvergencí řady skládající se z převrácených hodnot prvočísel. Pokusme se dokázat, že tato řada poměrně překvapivě diverguje.

Nejprve poznamenejme, že pro každé $p > 1$ platí podle vztahu pro součet geometrické řady, že

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{\substack{n=0,\\ p\in P}}^{\infty} \frac{1}{p^n}.$$

Nechť $N \geq 3$ a nechť $2 < 3 < \cdots < m$ jsou všechna prvočísla menší než N. Pak platí

$$\prod_{\substack{p<N,\\ p\in P}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdots\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3^j}\right)\cdots\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m^k}\right)$$

$$\geq \left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{3^j}\right)\cdots\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{m^k}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\cdots\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^i\cdot 3^j\cdot\ldots\cdot m^k},$$

kde poslední suma obsahuje všechna čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,$\ldots$,$\frac{1}{N-1}$ a mnoho dalších, protože všechna přirozená čísla $n < N$ lze zapsat ve tvaru $n = 2^i \cdot 3^j \cdot \ldots \cdot m^k$, kde i, j, $\ldots$, k jsou nezáporná celá čísla. Tedy platí

$$\prod_{\substack{p<N,\\ p\in P}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p<N,\\ p\in P}} \frac{p}{p-1} \geq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}.$$

Logaritmováním obou stran dostaneme

$$\ln\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right) \leq \ln\left(\prod_{\substack{p<N,\\ p\in P}}\frac{p}{p-1}\right) = \sum_{\substack{p<N,\\ p\in P}}\left(\ln(p)-\ln(p-1)\right)$$

$$\leq \sum_{\substack{p<N,\\ p\in P}}\frac{1}{p-1} \leq \sum_{\substack{p<N,\\ p\in P}}\frac{2}{p},$$

kde jsme v předposlední nerovnosti využili vztahu 5.1 a v poslední vztahu $p \leq 2(p-1)$, který platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$ diverguje k ∞ pro $N \to \infty$, je $\ln\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)$ také jdoucí k ∞ pro $N \to \infty$, a tedy diverguje k ∞ i řada složená z převrácených hodnot prvočísel $\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$.

5.2.1. Posloupnost částečných součtů prvočíselné harmonické řady

Definujme posloupnost $\{s_n\}$ jako posloupnost částečných součtů prvočíselné harmonické řady $\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$, tj. $s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p_n}$, kde p_n je n-té prvočíslo.

Víme, že tato posloupnost diverguje k ∞ pro n jdoucí k ∞. Navíc se vyhýbá celým číslům. To se nyní pokusíme dokázat vynásobením s_n součinem $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-1}$, tj.

$$\begin{aligned} s_n\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-1} &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-1}\\ &= 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p_{n-1}+2\cdot 5\cdot\ldots\cdot p_{n-1}\\ &\quad +\cdots+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-2}+\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-1}}{p_n}. \end{aligned}$$

Na pravé straně jsou všichni sčítanci kromě posledního celočíselní, protože jsou tvořeni součinem celých čísel. Naopak poslední celočíslený není, protože součin prvočísel dělíme jiným prvočíslem. Součet na pravé straně tedy není celočíselný, a proto nemůže být celočíselný ani součin na levé straně. Součin $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p_{n-1}$ zřejmě celočíselný je a z toho plyne neceločíselnost s_n.

Kapitola 6

Sčítací metody divergentních řad

V této kapitole, při jejímž zpracování jsme vycházeli především z [5], se budeme zabývat klasickými sčítacími metodami, které harmonickou řadu nesečtou, ale i sčítací metodou, která divergentní harmonickou řadu sečte. Sčítací metoda je zobrazení, které přiřazuje nekonečné řadě číslo představující součet této řady.

6.1. Klasické sčítací metody divergentních řad

6.1.1. Abelova sčítací metoda

Věta 16. *Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence r, $0 < r < \infty$ a nechť v bodě $x = r$ tato řada konverguje. Potom součet $s(x)$ této řady je funkce zleva spojitá v r, tj. $\lim\limits_{x \to r^-} s(x) = \sum a_n r^n$.*

Definice. *Nechť $\sum a_n$ je nekonečná řada. Mějme příslušnou mocninnou řadu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jestliže $f(x)$ konverguje pro všechna $x \in (0, 1)$ a $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = s$, pak definujeme Abelův součet $\sum a_n$ následovně $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.*

Nyní se pokusíme Abelovu sčítací metodu aplikovat na harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Příslušná mocninná řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ a platí $f(x) = -\ln(1 - x)$ pro $x \in (0, 1)$. Abelův součet je pak ve tvaru

$$s = \lim_{x \to 1^-} -\ln(1 - x) = -\lim_{x \to 1^-} \ln(1 - x) = \infty.$$

Abelova sčítací metoda tedy nelze úspěšně aplikovat na harmonickou řadu.

6.1.2. Cesàrova sčítací metoda

Označme $s_n^0 = s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a $s_n^k = s_0^{k-1} + s_1^{k-1} + \cdots + s_n^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále

$$E_n^0 = 1 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$E_n^1 = E_0^0 + E_1^0 + \cdots + E_n^0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1,$$

$$E_n^2 = E_0^1 + E_1^1 + \cdots + E_n^1 = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \tbinom{n+2}{2},$$

$$\ldots$$

$$E_n^k = E_0^{k-1} + E_1^{k-1} + \cdots + E_n^{k-1} = 1 + 2 + \cdots + (n+k-1) = \tbinom{n+k}{k}.$$

Definice. *Jestliže existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n^k}{E_n^k} = s$, $k \in \mathbb{N}$, *pak řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má* (C,k) *součet. Značíme* $(C,k)\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Věta 17. *Nechť* $s = (C,k)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$. *Potom platí* $s = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k!}{n^k} s_n^k$.

Nyní se pokusíme aplikovat Cesàrovu sčítací metodu na harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. V tom případě máme $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, … Nejprve uvažujme možnost $(C,1)$. Musíme tedy určit $s_n^1 = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}$. Potom by mělo platit

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} s_n^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(n-2) + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n} + \frac{n-2}{3n} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right), \end{aligned}$$

čímž jsme se dostali zpět k harmonické řadě.

Uvedeme ještě možnost $(C,2)$. V tom případě bychom měli

$$\begin{aligned} s_n^2 &= s_0^1 + s_1^1 + \cdots + s_n^1 = s_0^0 + (s_0^0 + s_1^0) + \cdots + (s_0^0 + \cdots + s_n^0) \\ &= 1 + \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] + \cdots + \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= (1 + 2 + \cdots + n + 1)1 + (0 + 1 + \cdots + n)\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}1 + \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Potom

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} s_n^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{(n-1)n}{3n^2} + \cdots + \frac{2}{n^3} \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots .$$

Stejného výsledku bychom dosáhli i pro (C, k) pro $k > 2$, protože podle [5, Theorem 55] platí, že jestliže řada není Abelovsky sčítatelná, pak není ani Cesàrovsky sčitatelná. Harmonická řada tedy nelze sečíst ani pomocí Cesàrovy sčítací metody, proto se v následující kapitole podíváme na metodu, která harmonickou řadu sečtou.

6.2. Sčítací metoda, která harmonickou divergentní řadu sečte

Po neúspěšných pokusech sečíst harmonickou řadu klasickými sčítacími metodami uvedeme metodu, která to dokáže. Vycházeli jsme z [3]. Na úvod uvedeme dvě definice.

Definice. *Nechť $\alpha > 0$ a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Píšeme, že funkce $g \in \mathcal{O}^\alpha$, pokud*

1. *existuje $a \in \mathbb{R}$, $a < 1$, takové, že g je analytická na $\{x \in \mathbb{C} : \Re(x) > a\}$.*
2. *existuje $C \in \mathbb{R}$ a $\beta < \alpha$ takové, že $|g(x)| \leq Ce^{\beta|x|}$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$, že $\Re(x) > a$.*

Definice. *Jestliže $f \in \mathcal{O}^\pi$, potom existuje jediné řešení $R_f \in \mathcal{O}^\pi$ rovnic*

$$R_f(x) - R_f(x+1) = f(x), \int_1^2 R_f(x)\,dx = 0.$$

Funkci R_f nazýváme zbytek funkce f a $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f(n) := R_f(1)$.

Nyní se to pokusíme aplikovat na harmonickou řadu, tj. $f(x) = \frac{1}{x}$. Nejprve poznamenejme, že platí $\frac{1}{x} \in \mathcal{O}^\pi$. To lze dokázat následovně:

Funkce $\frac{1}{x}$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, protože polynom je analytická funkce a podíl dvou analytických funkcí je analytická funkce všude, kde je definován. Tedy $\frac{1}{x}$ je speciálně analytická na množině

$$D := \{x \in \mathbb{C} : \Re(x) > \frac{1}{2}\}.$$

Pro $x \in D$ je

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \leq 2.$$

Na druhou stranu pro $x \in D$ a volbu $C := 2e^{-\frac{\pi}{4}}$, $\beta := \frac{\pi}{2}$ je

$$Ce^{\beta|x|} \geq Ce^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}} = C \cdot e^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

Tedy $\frac{1}{x}$ je v $\mathcal{O}^{\pi}$ podle definice.

Tvar hledané řady konverugující pro $x > 0$ je

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} \right),$$

protože $R(x) - R(x+1) = \frac{1}{x}$. Pro splnění $\int_1^2 R_{\frac{1}{x}}(x)\,dx = 0$ je třeba přičíst konstantu, tj.

$$R_{\frac{1}{x}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} \right) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+1} \right) dy.$$

Poslední integrál upravíme

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+1} \right) dy &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+1} \right) dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n+2) - \frac{2}{n+1} - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n} = -\gamma,
\end{aligned}$$

kde γ je Eulerova–Mascheroniho konstanta. Ve výpočtu integrálu jsme využili větu 10 a vzorců pro neučitý integrál. Tedy

$$R_{\frac{1}{x}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+y} - \frac{1}{n+1} \right) + \gamma$$

a dostaneme

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = R_{\frac{1}{x}}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \gamma.$$

Kapitola 7

Aplikace harmonické řady

V této kapitole se zameříme na některé z mnoha aplikací harmonické řady.

7.1. Loterie

Uvažujme loterii, kdy máme urnu, která na začátku obsahuje jeden bílý a jeden černý míček. Hráč losuje jeden míček z této urny. Jestliže vytáhne bílý míček, obdrží 1 korunu, v opačném případě nic. Míček je vrácen zpět do urny, a navíc je přidán jeden černý navíc. Potom se losování opakuje. Následující věta pochází z [1] a my se ji pokusíme dokázat.

Věta 18. *Nechť $p_n(x)$ je pravděpodobnost výhry $x \in [0, n]$ korun po n tazích losování. Pak platí*

a) $p_n(0) = \frac{1}{n+1}$,

b) $p_n(n) = \frac{1}{(n+1)!}$,

c) $p_n(x) = p_{n-1}(x)\frac{n}{n+1} + p_{n-1}(x-1)\frac{1}{n+1}$ *pro* $x \in [1, n-1]$.

Důkaz. Dokažme tyto tři vztahy.

a) Výhra je po n tazích rovna nule právě tehdy, když hráč v žádném tahu nevyhraje.

$$p_n(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

b) Výhra je po n-tém tahu rovna n právě tehdy, když hráč vyhraje v každém tahu.

$$p_n(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

c) Výhra je po n-tém tahu rovna $x \in [1, n-1]$ právě tehdy,
když po $(n-1)$-ním tahu byla výhra x a v n-tém tahu hráč nevyhrál,
nebo když po $(n-1)$-ním tahu byla výhra $x-1$ a v n-tém tahu hráč vyhrál.

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)\frac{n}{n+1} + p_{n-1}(x-1)\frac{1}{n+1}.$$

□

V [1] je uvedeno, že maximální cena, jakou je ochoten hráč zaplatit za takovou hru, je v praxi konečná a často poměrně nízká. My dokážeme, že střední hodnota výhry diverguje k nekonečnu. Důkaz není přebrán z [1], kde je uveden jiný vztah pro výslednou střední hodnotu, než ke kterému jsme dospěli my.

Označme střední hodnotu μ_n, tj. $\mu_n = 0 \cdot \frac{1}{n+1} + \sum_{x=1}^{n-1} x p_n(x) + n \cdot \frac{1}{(n+1)!}$. Matematickou indukcí dokážene, že platí

$$\mu_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{x=1}^{n-1} x \cdot p_n(x).$$

(0) Pro $n = 1$ dostaneme $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0$.

(1) Pro $n = 2$ dostaneme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3!} + 1 \cdot p_2(1) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}$.

(2) Předpokládejme, že rovnost platí pro n, tj.$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{x=1}^{n-1} x \cdot p_n(x)$,

a dokážeme ji pro $n+1$, tj. $\sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j} = \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_{(n+1)}(x)$.

$$\sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+2} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+2} + \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{x=1}^{n-1} x \cdot p_n(x) \tag{7.1}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) - n \cdot p_n(n)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \left(\frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n+2} \right) - n \frac{1}{(n+1)!} \tag{7.2}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2} + \sum_{x=2}^{n+1} (x-1) \cdot p_n(x-1) \frac{1}{n+2} \tag{7.3}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} (x-1) \cdot p_n(x-1) \frac{1}{n+2}$$

$$- 0 + n \cdot p_n(n) \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2}$$

$$+ \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x-1) \frac{1}{n+2} - \sum_{x=1}^{n} p_n(x-1) \frac{1}{n+2} + n \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+2} \tag{7.4}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_n(x-1) \frac{1}{n+2}$$

$$- \frac{1}{n+2} \sum_{x=1}^{n+1} p_n(x-1) + \frac{1}{n+2} p_n(n) + \frac{n}{(n+2)!}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{n}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n+2}$$

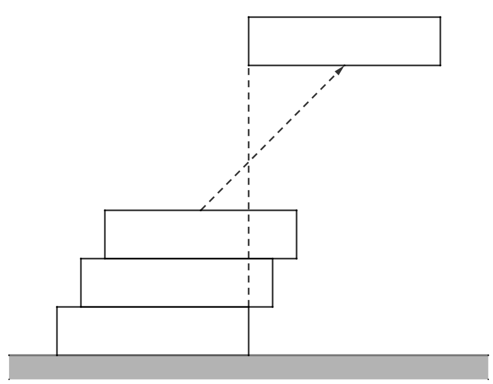
$$+ \sum_{x=1}^{n} \left(x \cdot p_n(x) \frac{n+1}{n+2} + x \cdot p_n(x-1) \frac{1}{n+2} \right) \tag{7.5}$$

$$= \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{x=1}^{n} x \cdot p_{n+1}(x) \tag{7.6}$$

Na řádku 7.1 jsme využili indukčního předpokladu a na dalším přeindexování sumy. Tvar na řádku 7.2 jsme získali vynásobením součtem zlomků, který je roven 1, a využitím vztahu pro pravděpodobnost $p_n(n)$. Součet 7.3 jsme získali opět posunutím sumačního indexu a následně jsme se vrátili k původnímu indexování ovšem s jiným součtem. Roznásobením závorkou $(x - 1)$ a využitím známého vztahu pro $p_n(n)$ jsme dostali vztah 7.4. Další rovnost jsme získali opět pomocí přeindexování sumy a k rovnosti 7.5 jsme došli díky tomu, že $\sum_{x=1}^{n+1} p_n(x-1) = 1$, jelikož se jedná o součet pravděpodobností jevů, které jsou neslučitelné a jejich sjednocení je jistý jev. Využitím vztahu c) z věty 18 jsme došli k výsledné rovnosti 7.6.

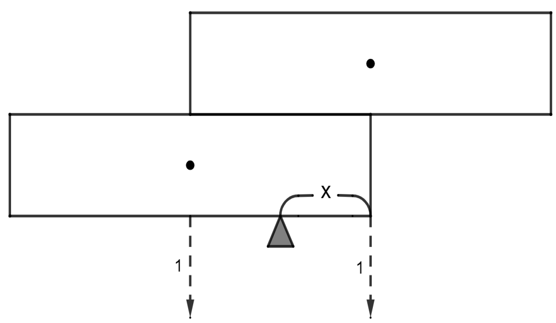
7.2. Skládání bloků

V této kapitole jsme využili literaturu [13]. Uvažujme situaci, kdy máme několik bloků se stejnými rozměry, a pokoušíme se je skládat na sebe bez rizika jejich pádu. Zamysleme se nad otázkou, zda je možné poskládat několik bloků na sebe tak, aby se pozice horního bloku lišila od pozice spodního bloku o horizontální vzdálenost větší než je šířka jednoho bloku. Situace je znázorněna na obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Skládání bloků

Nejprve uvažujme situaci, kdy máme k dispozici dva bloky. Je zřejmé, že horní blok bude od spodního posunutý nejvýše o $\frac{1}{2}$ šířky jednoho bloku, o které uvažujeme, že je rovna 1. Těžiště bude potom mezi středem horního a spodního bloku, tj. $x = \frac{1}{4}$, kde x je vzdálenost těžiště od pravého rohu spodního bloku. Viz obrázek 7.2.



Obrázek 7.2: Těžiště bloků

Při stavění třetího bloku si uvedeme, jak vypadá rovnice rovnováhy, ze které je možné určit polohu těžiště, tj. x.

$$1 \cdot x = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

Řešením je $x = \frac{1}{4}$. Polohu těžiště tedy známe a můžeme přidat další blok. Rovnice rovnováhy bude nyní ve tvaru

$$2 \cdot x = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

a její řešení je $x = \frac{1}{6}$.

Pro n-tý blok bude platit

$$(n-2) \cdot x = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

s řešením $x = \frac{1}{2(n-1)}$, a tedy máme posloupnost $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2(n-1)}, \cdots$ posunutí bloků tak, aby nedošlo k jejich pádu.

Naším úkolem bylo zjistit, zda je možné bloky postavit tak, aby bylo posunutí větší než je šířka jednoho bloku, v našem případě 1. Na to nám bude stačit pět bloků, protože

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} > 1.$$

Ze vztahu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

a divergence harmonické řady lze dokázat, že posunutí spodního bloku od horního může být libovolně velké při předpokladu nekonečného počtu bloků.

7.3. Červík Štístko

Nyní si představme známý problém červa zvaného Štístko, při jehož zpracování jsme vycházeli z [2]. Ten se snaží přelézt elastické lano, které je 1 metr dlouhé. Červ se plazí rychlostí 2 centimetry za minutu a na konci každé minuty si dá pauzu a lano se v tu chvíli prodlouží o 1 metr. Natahování lana probíhá rovnoměrně. tj. červ je ve stejné části cesty po natažení jako před natažením. Hmotnost červa zanedbejme a uvažujme, zda se mu někdy podaří dojít na konec lana.

V první minutě urazil vzdálenost 2 centimetry ze 100 centimetrů, je tedy ve $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ lana. Po odpočinku urazil další 2 centimetry z 200 centimetrů a tím se dostal do $\frac{2}{200} = \frac{1}{100}$ lana. Další časové a polohé údaje jsou uvedeny v tabulce 7.1.

Čas	**Poloha**
1. minuta	$\frac{2}{100}$
2. minuta	$\frac{2}{200}$
3. minuta	$\frac{2}{300}$
4. minuta	$\frac{2}{400}$
5. minuta	$\frac{2}{500}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabulka 7.1: tabulka

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Za n minut tedy urazí celkovou vzdálenost

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \cdots + \frac{1}{50n} = \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Jelikož pro $n \to \infty$ dostaneme divergentní harmonickou řadu, určitě existuje n, pro které platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 50$, čímž přeleze celé lano.

Závěr

Bakalářská práce splňuje cíle stanovené v úvodu. Po teoretické části následuje několik důkazů divergence harmonické řady, které jsem vybírala z různé literatury a doplnila nebo upravila do korektní podoby.

V další části práce jsem se věnovala historii harmonické řady a také rychlosti její divergence, o které jsem zjistila, že je velmi pomalá. Zajímala jsem se také o modifikaci harmonické řady, kterou je prvočíselná řada, u které jsem dokázala divergenci.

V předposlední kapitole jsem popsala klasické sčítací metody, konkrétně Abelovu a Cesàrovu sčítací metodu, a pokusila se je aplikovat na harmonickou řadu. Tento pokus byl neúspěšný, a proto jsem v následující části popsala Ramanujanovu sčítací metodu, která harmonické řadě přiřadí součet roven Eulerově–Mascheroniho konstantě.

V poslední kapitole jsem se věnovala některým z mnoha využití harmonické řady. Z těchto aplikací jsem vybrala speciální loterii, popsanou v odborném článku [1], o které jsem dokázala, že střední hodnota výhry v této hře diverguje k nekonečnu. Další vybranou aplikací harmonické řady je problém skládání bloků a nakonec zvláštní situace červíka, který se snaží přelézt elastické lano, což se mu poměrně překvapivě podaří.

Během zpracovávání bakalářské práce jsem prohloubila své znalosti z tématiky nekonečných řad, ale i jiných částí matematické analýzy, dále jsem si také procvičila sepisování formálních důkazů, které jsou významnou součástí matematiky. Další výhodou byla také práce s odbornou literaturou nebo články v anglickém jazyce a práce v systému LaTeX, se kterým jsem se setkala poprvé.

Literatura

[1] BLAVATSKYY, Pavlo R.: *Harmonic Sequence Paradox.* Economic Theory, vol. 28, no. 1, Springer, 2006. 221–26.

[2] BONAR, D.D. a KHOURY, M.J.: *Real Infinite Series* Mathematical Association of America. ISBN 9780883857458.

[3] CANDELPERGHER, Bernard.: *Ramanujan Summation of Divergent Series* [online]. Springer, 2017. ISBN 978-3-319-63630-6.

[4] CORN, Patrick a Nihar MAHAJAN.: *Harmonic Number* [online]. Dostupné z: https://brilliant.org/wiki/harmonic-number

[5] HARDY, G.H.: *Divergent series.* Oxford: Oxford at the Clarendon Press, 1949.

[6] KIFOWIT, Steve a Terra STAMPS.: *Serious About the Harmonic Series II* [online]. 2006. Dostupné z: https://stevekifowit.com/pubs/al1.pdf

[7] KIFOWIT, Steven J. a Terra A. STAMPS.: *The harmonic series diverges again and again.* The AMATYC Review. 2006, (27), 31-43.

[8] KIFOWIT, Steven J.: *The Harmonic Series for Every Occasion* [online prezentace]. Dostupné z: https://cdn.ymaws.com/amatyc.site-ym.com

[9] KULLMAN, David E.: *What's Harmonic about the Harmonic Series?* The College Mathematics Journal [online]. 2001(Vol. 32, 3). Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/2687471

[10] LOYA, Paul.: *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis.* New York: Springer, 2017. ISBN 978-1-4939-6793-3.

[11] LOYA, Paul.: *Infinite Sequences of Real and Complex Numbers* [online]. Springer, New York, NY, 2018. ISBN 978-1-4939-6795-7. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6795-7

[12] LUKEŠ, Jaroslav. a MALÝ, Jan.: *Measure and Integral.* Prague: matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-68-1.

[13] NISHIYAMA, Yutaka.: *Building blocks and harmonic series.* International Journal of Pure and Applied Mathematics. 78. 1111-1120.

[14] TOMEČEK, Jan.: *Matematická analýza 1* [online]. Olomouc, 2020. Dostupné z: https://kma.upol.cz/data/xinha/SOUBORY/Studenti/Studijni-materialy/2020-0017-Tomecek-Matematicka-analyza-1.pdf. Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-5743-7.

[15] TOMEČEK, Jan.: *Matematická analýza 2* [online]. Olomouc, 2020. Dostupné z: https://kma.upol.cz/data/xinha/SOUBORY/Studenti/Studijni-materialy/Tomecek-Matematicka-analyza-2.pdf. Univerzita Palackého v Olomouci. ISBN 978-80-244-5853-3.

[16] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: *Superpočítač* [online]. 2022. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Superpočítač

[17] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: *Riemannova funkce zeta*. 2022. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova-funkce-zeta