UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Diplomová práce

Lucie Bendová

Divergentní úlohy v matematice na 1. stupni základních škol

Olomouc 2014 vedoucí práce: PaedDr. Anna Stopenová, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

Ve Vilémově dne 24. 3. 2014 ……………………………….

Lucie Bendová

Poděkování

Děkuji paní Mgr. Evě Bártkové, Ph.D. za odborné vedení v počátcích vzniku mé diplomové práce a paní PaedDr. Anně Stopenové, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které přispěly k jejímu dokončení. Dále bych chtěla poděkovat ZŠ Helsinské za umožnění výzkumu a v neposlední řadě rodině a přátelům za podporu nejen při psaní diplomové práce, ale i během celého studia.

OBSAH

PRAKTICKÁ ČÁST

Úvod

Předložená diplomová práce je zaměřena na problematiku „Divergentní úlohy v matematice na 1. stupni ZŠ”. Hlavním důvodem, proč jsem si vybrala toto téma, je můj zájem o netradiční, nestandardní úlohy ve vyučování matematiky na 1. stupni základních škol. Jedním typem nestandardních úloh jsou divergentní úlohy, které vedou žáky k tvořivému řešení problémů, k tvořivému myšlení. Žák při řešení takové úlohy hledá více možných řešení, nebo naopak hledá různé cesty, kterými dojde k jednomu možnému výsledku. Opakem divergentních úloh jsou úlohy konvergentní, které mají pouze jedno řešení.

Na svých praxích, vykonávaných v 1. – 5. ročnících základních škol, jsem měla jen zřídkakdy možnost vidět hodinu matematiky, která by podněcovala žáky k tvořivému myšlení. Spíše převládá tradiční způsob výuky, kdy žáci řeší úlohy předem daným postupem a dojdou k jednomu výsledku, který je správný nebo špatný.

Divergentní úlohy jsou vhodné i pro žáky, kteří mají v hodinách matematiky problémy, jelikož k vyřešení některých úloh divergentního charakteru žák nemusí užít pamětných operací, algoritmů (např. Je možné rozdělit čtverec na čtyři shodné části? Načrtni.). Složitější divergentní úlohy můžeme naopak zadávat nadaným žákům pro matematiku (např. úlohy kombinatorického typu). Vhodně zvolená divergentní úloha může být pro žáky velkou motivací, která sehrává především na 1. stupni ZŠ významnou roli. Odměnou za zařazování divergentních úloh do výuky matematiky nám budou žáci, pro které se stane matematika zajímavější a především žáci, kteří budou jednou schopni tvořivého řešení různých životních a pracovních problémů.

Diplomová práce je rozdělena na dvě části, teoretickou a praktickou. Cílem teoretické části je shrnutí dosavadních poznatků o divergentním myšlení, divergentních úlohách, strategiích řešení problémových úloh a zařazení divergentních úloh do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV).

Praktická část se věnuje analýze žákovských řešení divergentních úloh. Pro účely této diplomové práce byl sestaven nestandardizovaný didaktický test, který se skládá ze šesti matematických úloh divergentního charakteru. Jednotlivé úlohy jsou různého typu - aritmetické, geometrické, kombinatorická a diofantovská. Test bude předložen žákům 5. ročníku ZŠ. Cílem praktické části je tedy vytvořit divergentní matematické úlohy, které mohou využít pedagogové 1. stupně ZŠ v praxi a dále analýza postupů, strategií a výsledků řešení jednotlivých úloh.

Žáci nebyli předem seznámeni s faktem, že úlohy mají více řešení. V rámci analýzy bude práce totiž rozebírat, zda žáci vyřešili úlohu konvergentně nebo divergentně. Abych pomohla jejich kreativnímu myšlení, snažila jsem se ve třídě zajistit příjemnou atmosféru.

Odváží se žáci 5. ročníku ZŠ o netradiční způsoby řešení a projeví tak svoji kreativitu? Je nutné podotknout, že záleží také na učiteli, zda zařazuje do hodin matematiky nestandardní úlohy a zda jsou tedy žáci zvyklí řešit takový typ úloh. Řešení divergentních úloh a s tím spojené tvořivé myšlení napomáhá rozvoji kreativity, která se čím dál více stává nezbytnou vlastností moderního člověka.

I TEORETICKÁ ČÁST

1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY DIVERGENTNÍHO MYŠLENÍ

Než se začneme blíže zabývat divergentním myšlením, podívejme se pro širší porozumění na některá vyjádření významu pojmu myšlení a jeho základní dělení.

1.1 Vymezení pojmu myšlení

„Myšlení je zřejmě nejsložitější kognitivní proces. Je to vnitřní mentální děj, který nelze přímo pozorovat. V širokém slova smyslu ho lze definovat jako ***proces zpracování a využívání informací****"* (Plháková, 2008, s. 262).

Podle Vágnerové (1999, s. 146): *„Myšlení je poznávání, které je více vázáno na individuální aktivitu vědomí, než vývojově jednodušší poznávací procesy jako je např. vnímání."*

Myšlení je zkoumáno z hlediska jeho nejdůležitějších **funkcí**, kterými jsou formování pojmů, objevování vztahů, usuzování, řešení problémů a v neposlední řadě produkce něčeho nového. V některých odborných publikacích se můžeme setkat s tím, že tyto funkce budou zahrnuty pod jedinou, kterou je **řešení problémů**. Problém se vytváří, pokud je dán cíl a jedinec neví, jak tohoto cíle dosáhnout. Problémová situace pak vzniká tehdy, pokud se nám aktuálně k dosažení žádoucího cíle nedostává prostředků. Řešení problémů se uskutečňuje prostřednictvím vytváření a ověřování hypotéz, jež představují dílčí varianty uspořádání vzájemných vztahů. To se odehrává v naší mysli, když přemýšlíme o různých variantách hypotéz. Ty následně ověřujeme, upravujeme nebo zavrhujeme (Plháková, 2008, Vágnerová, 1999).

Právě autorky Plevová, Petrová (2012) a Vágnerová (1999) chápou myšlení jako **proces řešení problémů**. Při řešení nějakého problému, tedy při myšlení, probíhají v každém z nás **základní myšlenkové operace**:

1. Abstrakce a zobecňování. Pomocí abstrakce dochází k uvažování od konkrétního k obecnému a tyto obecnější závěry lze dále aplikovat na situace obdobného charakteru.

2. Analýza a syntéza. Analýzou dojde k rozdělení problému na jednotlivé vlastnosti. Jejím opakem je syntéza. Tato operace představuje myšlenkové sjednocení.
3. Srovnávání a třídění nám umožňuje nacházet podobnosti a rozdíly mezi jevy, tyto nalezené podobnosti dále spojíme do nového celku.

Pokud myšlenkové operace probíhají na vědomé úrovni, hovoříme o racionálním myšlení. Opakem racionálního myšlení je myšlení intuitivní. Někdy se totiž můžeme rozhodovat pouze na základě naší intuice (Plevová, Petrová, 2012).

Výsledkem myšlení je nový poznatek. Rozlišujeme následující tři formy poznatků: pojem, soud a úsudek. *„Pojem je slovně vyjádřený souhrn obecných a podstatných vlastností předmětů a jevů. Soud je vyjádření vztahu mezi dvěma pojmy. Úsudek je vyjádřením vztahu mezi dvěma nebo více pojmy"* (Plevová, Petrová, 2012, s. 91, 92).

Proces myšlení je ovlivněn emocemi, které mohou sloužit jako motivující a regulativní funkce. Emoce dokážou aktivizovat jedince také v oblasti uvažování a při řešení nejrůznějších problémů.

1.2 Matematické myšlení

Košč (1972) představuje čtyři druhy přístupu k matematickému myšlení:

1. v první řadě se matematické myšlení popisuje jako proces řešení problémů,
2. dále se matematické myšlení objasňuje na specifikách myšlenkových postupů u matematicky vysoce nadaných osob,
3. zvláštnost tohoto myšlení je demonstrována na povaze rozvoje matematického myšlení v ontogenezi,
4. specifika mentálního fungování se objasňují na konkrétních podobách řešení matematických úloh.

1.3 Druhy myšlení

Existují různá kritéria dělení, od základního až po specifičtější. Nejprve uvádím dělení myšlení na tři základní druhy podle Plhákové (2008):

1. Myšlení **konkrétní**, při němž manipulujeme s vjemy. Tento druh myšlení využíváme např. při různých opravách, při různých činnostech jako je žehlení, skládání stavebnice.

2. Myšlení **názorné**, při kterém operujeme nejčastěji se zrakovými představami. Využíváme ho při řešení geometrických úloh.
3. Myšlení **abstraktní**, při kterém vykonáváme operace např. s matematickými symboly. Za nejběžnější druh tohoto myšlení považujeme myšlení **pojmové**, kdy v mysli pracujeme s pojmy.

Kupříkladu Košč (1986) rozlišuje kromě myšlení konkrétního a abstraktního mnoho dalších druhů myšlení. Pro účely této práce jsou nejdůležitější dva typy produktivního myšlení – konvergentní a divergentní. Tyto dva druhy myšlenkových operací rozlišil v 50. letech 20. století významný americký psycholog Joy Paul Guilford.

1.3.1 Konvergentní myšlení

Konvergence je pojem, který označuje sbíhání, sbíhavost. Lokšová a Lokša (1999) označují tedy konvergentní myšlení za myšlení sbíhavé, při němž se jde logicky a algoritmicky ke správnému závěru. Z toho rozumíme, že při konvergenci se myšlenkové operace sbíhají k jedinému správnému řešení (Zelina, 1990). Dacey a Lennon (2000) tvrdí, že konvergentní myšlení vyplývá ze správné odpovědi na otázku, jež může mít jen jednu správnou odpověď. K tomu uvádí následující příklad: „kolik je 2 + 2?“.

Konvergentní rozumové operace můžeme tedy charakterizovat jako logicko-deduktivní, své uplatnění nachází v úlohách s jedním možným řešením, které logicky vyplývá z uvedených informací.

„Konvergentní „produkce” umožňuje vyvozování závěrů (konkluzí) na základě logického uvažování” (Plháková, 2008, s. 296). Při takovém typu myšlení využíváme tedy logického myšlení a již naučených algoritmů.

Konvergentní myšlení je měřeno testy inteligence.

1.3.2 Divergentní myšlení

Opakem konvergentního myšlení je myšlení divergentní. Divergence je pojem označující rozbíhavost. Divergentní myšlení má tedy rozbíhavý charakter a využívá se v úlohách, při kterých je nutné řešení objevovat v různých směrech, hledat různé logické alternativy. Divergentní myšlení jedince nevede k jedné správné odpovědi, jak je tomu u myšlení konvergentního, ale naopak vybízí k produkci co nejvíce možných řešení (Lokšová, Lokša, 1999).

Podle Plhákové (2008, s. 296): *„Divergentní myšlení se uplatňuje při řešení problémů, které mají několik různých řešení nebo k jejichž vyřešení vede několik rozdílných cest."*

Jak bylo uvedeno výše, konvergentní a divergentní myšlení rozlišil Guilford. Ten tvrdil, že k vyřešení problému je zapotřebí jak myšlení divergentního, tak konvergentního. Díky myšlení divergentnímu jsme schopni vytvořit celou řadu myšlenek, poté následuje myšlení konvergentní, díky kterému vybereme nejvhodnější možné řešení. Divergentní myšlení rozvíjí navíc další psychické funkce, nejen pouze ty, jež se podílejí na konvergentním myšlení. Například rozhodovací procesy a kritické myšlení (Dacey, Lennon, 2000, Lokšová, Lokša, 2003).

Podstatu divergentního myšlení charakterizuje také velmi poutavě Zelina (1990, s. 11): *„Je nutné odmítnout staré řešení a pustit se nějakým novým směrem, pomocí čehož vynalézavý organismus dosáhne pravděpodobně úspěchu."*

Guilford zastával názor, že divergentní myšlení je typické spíše pro tvořivé osoby. Tento styl myšlení vede totiž k originálním výsledkům. V současné době se autoři shodují v názoru, že **divergentní rozumové operace jsou základem tvůrčího řešení problémů** a jednotlivé divergentní operace vymezují jako nadcházející tvůrčí (tvořivé) schopnosti (Lokšová, Lokša, 1999):

1. **fluence** (plynulost), schopnost rychlé produkce množství nápadů a bohatost myšlenek,
2. **flexibilita** (pružnost), schopnost produkovat rozličná řešení úloh, problémů, používat různé přístupy,
3. **originalita**, schopnost vytvářet neobvyklá, zajímavá, často až překvapivá řešení problémů,
4. **redefinice**, schopnost použít staré znalosti nějakým novým způsobem, schopnost přechodu od navyklých způsobů řešení problémů ke způsobům novým,
5. **elaborace**, schopnost najít při řešení úkolu všelijaké pozoruhodné detaily,
6. **senzitivita**, schopnost cítit, vnímat problémy, vidět různé nedostatky, schopnost předpovídat vývoj.

Můžeme tedy také říci, že tyto schopnosti spadají pod divergentní myšlení (složky divergentního myšlení) a zároveň se zahrnují pod pojem tvořivosti.

Divergentní myšlení je zjišťováno testy tvořivosti.

Kusák a Dařílek (2001) představují některé příklady **Guilfordových testů tvořivosti**:

- K testům **fluence** patří následující úlohy. Za daný čas vymyslet co nejvíce slov, začínajících na určené písmeno nebo vymyslet co největší množství nápadů na smyšlenou situaci – jaké by byly důsledky toho, kdyby lidé neměli dostatek spánku? Na závěr se jednoduše spočítají všechny odpovědi.

- K testům **flexibility** se řadí test neobvyklého použití věcí. Subjekt má za určitý čas vyprodukovat některá netradiční použití věcí. Např. K jakým neobvyklým činnostem můžeme využít noviny? Při vyhodnocování těchto testů je důležité klást důraz na rozdílnost odpovědí, na změny zaměřenosti myšlení. V tomto smyslu mluvíme o pružnosti myšlení.
- K testům **originality** patří např. test s názvem „Titulky k příběhům“. Jedná se o vymyšlení co nejoriginálnějších, vtipných, neobvyklých titulků k nějakému netradičnímu, zvláštnímu příběhu. Např. Nový úředník v obchodním centru objednal nedopatřením 100 levých rukavic, namísto 100 párů rukavic. Originální odpověď by byla např. Levý s množstvím levých.
- K testům **redefinice** je řazen např. test spojování předmětů. Tento test obsahuje seznamy dvojic předmětů, každý předmět je jiného druhu. Úkolem je spojit je tak, abychom z nich vytvořili nový předmět. Např. spojením hole a hřebíku nám vznikne oštěp nebo také udice. Při vyhodnocování se za správnou odpověď považuje takový předmět, který je funkční bez použití dalších předmětů.
- K testům **elaborace** se řadí test vypracování plánu. Subjektu se předloží náčrtek plánu. Jeho úkolem je dokreslit do náčrtku detaily, aby se stal plán účelným. Např. plánek nedokončeného pokoje, města.
- K testům **senzitivity** patří např. test vidění problémů. Tento test zahrnuje názvy běžných předmětů, jako je např. svíčka. Jedinec má uvést různé problémy, jež ho napadnou s uvedeným předmětem. V našem případě se svíčkou. Problémy mohou být následující – Čím můžeme svíčku zapálit? Co když se nám nebude dařit ji zapálit?

Tyto testy zjišťují tvořivé schopnosti jak u dětí, tak u dospělých. Pro jednotlivé testy je většinou určen časový limit v rozpětí 2-5 minut. Testy tvořivosti ovšem nemusí spolehlivě naznačovat tvořivost, protože tvůrčí aktivita se nemusí projevit právě v daném okamžiku, ať už je důvod jakýkoliv. Např. nervozita, problém písemného vyjadřování.

1.4 Divergentní myšlení ve vztahu k tvořivosti

Jak je patrné z předchozí kapitoly, divergentní myšlení má blízký vztah ke kreativitě (tvořivosti). Nemůžeme ale tvrdit, že divergentní myšlení je to samé jako myšlení tvořivé. Stejně tak nemůžeme ztotožňovat konvergentní myšlení s myšlením netvořivým, reproduktivním. Jelikož se zde budeme krátce zabývat také pojmem tvořivost, pokládám za vhodné uvést její definici, přesněni řečeno definici matematické tvořivosti. Matematická tvořivost je schopnost tvorby originálních a neobvyklých metod řešení problémů v matematice, schopnost hledání a kombinace různých způsobů řešení. Je to proces plodný, divergentní (Zelina, 1990).

Podle Lokšové a Lokšy (2003, s. 27): „*Divergentní myšlení nemůže být synonymem tvořivosti*." Při řešení problému se uplatňují divergentní i konvergentní myšlenkové operace. Tyto dva styly myšlení jsou sice odlišné, ale dohromady vytváří jeden typ myšlení. V tvořivém myšlení se uplatňují tyto dva druhy myšlení komplexně. Nemůžeme tedy tvrdit, že divergentní myšlení je synonymem tvořivosti, protože se na něm podílí i myšlení konvergentní. Mohli bychom ale říci, že divergentní myšlení je způsob, jak dojít ke kreativním odpovědím.

1.4.1 Zásady pro podporu tvořivého myšlení

Tvořivé myšlení je soubor operací, jež se pohybují v dimenzích reality a imaginace (tj. obrazotvornosti, představivosti). Myšlení se spojuje s fantazií v tvorbu něčeho nového (Petrová, 1999).

Podle Lokšové a Lokšy (1999) tvořivost podléhá především cílevědomým výchovným vlivům. Je možné tedy tvořivé myšlení žáků záměrně rozvíjet již na 1. stupni ZŠ. Záleží především na učiteli, zda bude žákům předkládat úlohy, které budou vyžadovat tvořivý přístup. Takové úlohy můžeme nazvat jako tvořivé. Obsahují prvky neurčitosti, novosti, netradičnosti. Základní zásadou ve tvořivém vyučování je snažit se **nahradit část netvořivých úloh (úlohy konvergentního typu) úlohami divergentního charakteru**, které rozvíjejí žákovo tvořivé myšlení.

Uvedeme si některé vybrané zásady pro podporu tvořivého myšlení podle Fichnové a Szobiové (2007):

1. Nehodnotit

Neměli bychom žákovi říkat, že něco udělal špatně, že neumí nic vymyslet. Měli bychom ho naopak povzbuzovat slovy: „Líbí se mi ale, že nad tím přemýšlíš“.

2. Dobrovolnost

   Nenuťme žáky, aby se zúčastňovali her a různých činností. Po jisté době se budou chtít sami vyjádřit a zapojit.

3. Bezpečí

   Některé děti jsou nesmělé, tak jim např. dáme možnost, aby řešili úlohu s kamarádkou. Snažíme se vytvořit prostředí, ve kterém se děti budou cítit bezpečně.

4. Humor

   Při řešení úloh je vítaný také humor, kdy se všichni zasmějeme vtipné odpovědi. Musíme dát ovšem pozor, aby nedošlo k zesměšňování.

5. Pochvala

   I když žáci nebudou mít nejoriginálnější nápady, pochvalme je. Místo kritiky je na místě pochvala, ocenění jejich snahy.

Již Guilford představoval následující metodické zásady, které by měly být součástí tvořivého vyučování (Zelina, 1990):

1. Vytvořit pedagogickou situaci, kdy se žák nebude bát klást otázky. Učitel by se měl těmito otázkami zabývat a dát tím žákovi najevo, že je jeho dotaz důležitý, něčím přínosný.
2. Vytvářet situace, které budou podněcovat žákovu představivost. Vzniklou imaginaci musíme brát vážně, ne ji ubíjet nevhodnými větami typu: „Co si to zase vymýšlíš?”.
3. Další zásadou je ukázat žákům, že jsou pro nás jejich myšlenky hodnotné, obzvláště pak divergentní produkce. Pokud žák udělá nějakou chybu, měli bychom ho pochválit za to, že nad danou úlohou přemýšlel a vyzvat k diskusi i jiné žáky, aby se k chybnému výroku vyjádřili a zhodnotili ho.
4. Učitel by měl vytvářet takové divergentní matematické situace, jež jsou žákům blízké. Má to jednak motivační účinek, ale také to žákům umožní více divergovat (např. zvažovat různé důsledky).
5. Důležité je hodnocení tvorby žáků, na kterém se podílí samozřejmě učitel. Ke správnému hodnocení by se měli vyjádřit také samotní žáci.

1.4.2 Tvořivý žák

Cílem začleňování divergentních úloh do výuky matematiky je tvořivý žák, který se jednou dokáže přiměřeně přizpůsobit měnícím se životním podmínkám a bude tak moci prožívat plnohodnotný život.

Pokud bychom měli srovnávat tvořivého žáka s méně tvořivým jedincem, tvořivý žák je pak otevřenější, zvídavější, živější, hravější, s učivem často experimentuje, místo aby se ho mechanicky naučil. Tvořiví žáci jsou také více dynamičtí, pohybliví. Na rozdíl od žáků méně tvořivých jsou tito žáci odvážnější při řešení nových, netradičních problémů. Při řešení různých úloh jsou samostatní, nápaditím, projevují svoji tvořivou fantazii. Problémy neřeší pouze jedním způsobem, ale snaží se je řešit divergentně (více možnými způsoby, postupy). K dalším znakům se řadí vysoká produkce myšlenek, flexibilita, vytrvalost, originalita, současné sledování více myšlenek.

Ve třídě se mohou projevovat až hyperaktivně, a to především tehdy, pokud je úkoly nezajímají. Projevují nesouhlas při využívání různých šablon a stereotypů. Velmi často kladou ve výuce učiteli otázky. Proto se tvořivý žák může stát méně oblíbeným u učitele, dokonce i u spolužáků. Učitel by měl jednoznačně tvořivé myšlení svých žáků podporovat a následně rozvíjet (Lokšová, Lokša, 1999, Maňák, 1998).

Podle Telcové a Odehnala (2002) je ve skutečnosti pro vyučování v tradiční škole typický spíše autoritativní způsob vyučování, kdy učitel představuje pro žáky jistou autoritu. Trestá chyby, nebere v úvahu tvořivé myšlenky svých žáků, cení se spíše kázeň, zdvořilost a ochotu přizpůsobit se názoru učitele (autority). Žák je tak připraven o možnost tvořivého řešení problémů.

2 DIVERGENTNÍ ÚLOHY V MATEMATICE A JEJICH ŘEŠENÍ

2.1 Pojem matematická úloha a její funkce ve vyučovacím procesu

Obecně můžeme úlohou označit situace, jež jedince podněcují k činnosti vedoucí k řešení situace. Například Kuřina (2011, s. 185) tvrdí: *„Úlohou rozumíme obvykle jakoukoli výzvu k činnosti. Matematická úloha vyzývá řešitele k matematické činnosti.*"

Novák a Stopenová (1993) vymezují matematickou úlohu o něco podrobněji, jako zadání, situaci, podněcující žáka (řešitele) k uvědomělé činnosti, jež spěje k dosažení stanoveného cíle. Tato činnost se zaměřuje na následující aspekty učení:

- obsahový (objevování nových poznatků, zopakování učiva, přezkoumání jeho zvládnutí),
- operační (žákovy operace při učebních a poznávacích činnostech),
- motivační (zájmy a potřeby žáka).

Podle Nováka a Stopenové (1993, s. 5): *„Pojem matematická úloha, resp. matematická učební úloha, se obvykle chápe jako nadřazený všem ostatním termínům (příklad, problém, otázka, cvičení)."* Příkladem obvykle rozumíme výpočet požadovaného údaje, ale také text úlohy s tzv. vzorovým příkladem. Cvičením označujeme soubor úloh, které slouží k procvičení probrané látky. Pod pojmem problém se obvykle rozumí úloha problémového charakteru, zde se od řešitele očekává větší míra vynalézavosti a aktivity. Otázkou značíme úlohu (nebo její část), která je zformulovaná jako věta tázací.

V matematické úloze (přesněji řečeno v její struktuře) rozlišujeme 3 základní složky:

- **předmětnou komponentu** (množinu objektů a vztahy mezi nimi, např. čísla v zadání úlohy),
- **požadavek na řešení úlohy** (pokyn k řešení nebo otázka na konci úlohy),
- **operátor** (operace, jež je nutné uskutečnit, aby se splnil požadavek celé úlohy, zpravidla to jsou početní výkony, pomocí kterých úlohu řešíme).

Ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy nachází matematické úlohy uplatnění ve všech fázích vyučovacího procesu, podle Nováka a Stopenové (1993) mají následující funkce:

1. Matematická úloha nám může sloužit při **motivování** žáků k nadcházející práci, kdy vyvolá jejich zájem a zajistí pozornost. Aby úloha žáky motivovala, musí být pro ně atraktivní. Více žáky zaujme úloha s jim blízkou tematikou (např. při počítání obvodu obdélníku zvolíme úlohu, kdy bude úkolem žáka zjistit, kolik centimetrů špejle by potřeboval k orámování fotky pro maminku k narozeninám, přičemž délka strany a= 10 cm, b= 15 cm), než úloha s pouhým zadáním parametrů.
2. Matematickou úlohu můžeme využít také k **výkladu nové učební látky** (seznámení s novým pojmem nebo novou matematickou dovedností).
3. Při řešení matematické úlohy dochází k **aplikaci** již osvojených poznatků a jejich **procvičování**. Při této funkci je žákům poskytována příležitost aplikace jak osvojených vědomostí a dovedností, tak možnost projevu tvůrčí aktivity, matematických objevů. Přitom jsou rozvíjeny žákovy matematické schopnosti.
4. V neposlední řadě mají matematické úlohy funkci **diagnostickou**, pomocí které zjišťujeme stav dosažených vědomostí a dovedností žáka.

2.1.1 Matematická úloha jako problém

Terminologie je v této oblasti poměrně nejednotná. Novák a Stopenová (1993) považují matematickou úlohu za jakousi nadmnožinu problému, kdežto Kopka (1999) chápe samotnou úlohu jako problém, přesněji řečeno jako nerutinní, skutečný problém. Někdo pod pojmem problém rozumí termíny netradiční nebo zajímavé úlohy (Kuřina, 2011). Dle Kopky (1999, s. 14): *„Současný americký didaktik matematiky Jeremy Kilpatrick například charakterizuje **problém** jako situaci, v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována. Aby byl problém matematický, pak bychom při hledání odpovědi měli užívat matematické pojmy a principy."*

Problém má podle Kopky (1999) tři hlavní složky:

1. **Výchozí situace**, ve které udáváme informace a souvislosti.
2. **Cíl**, kterého chce řešitel (v našem případě žák) dosáhnout.
3. **Cesta** od výchozí situace k cíli, jež nemusí být vždy pro řešitele zřejmá či dosažitelná.

Pro vymezení pojmu problém jej rozdělíme do těchto kategorií (Kopka, 1999):

1. **Cvičení** či **rutinní problémy**, jestliže:
   - výchozí (počáteční) situace je přesně popsaná (je uzavřená),
   - cíl je přesně daný (je uzavřený),
   - cesta je známá.

Příklad: Pokud žák 1. stupně základní školy umí narýsovat čtverec a my mu zadáme, aby narýsoval konkrétní čtverec o délce strany a= 5cm, zadali jsme mu rutinní problém.

2. **Úlohy** či **nerutinní problémy**, jestliže:
   - počáteční situace je přesně popsaná (je uzavřená),
   - cíl je přesně daný (je uzavřený),
   - cesta není známá.

Příklad: Pokud má žák dokázat nějaké tvrzení, jehož důkaz nikdy neslyšel, pak můžeme hovořit o nerutinním problému. Ve školské matematice by měl tento druh problémů převládat. Stálým procvičováním přechází určité nerutinní problémy do rutinních problémů. Může se stát, že zadaný problém bude pro někoho rutinní a pro někoho jiného nerutinní.

3. **Zkoumání**, pokud:
   - výchozí situace je přesně popsaná,
   - cíl není přesně určený nebo není vůbec zadaný (je otevřený),
   - cesta k cíli není známá.

Podle **způsobu zadání úlohy** rozlišujeme otevřenost či uzavřenost daného problému, podle **způsobu řešení problému** konvergentnost (uzavřenost, rutinnost) nebo divergentnost (otevřenost), **výsledek úlohy** je pak otevřený či uzavřený.

RP je označení pro rutinní procesy (uzavřené) a **OP** představují otevřené procesy.

Podle Zeliny (1990) vede kombinace uvedených složek k této klasifikaci **tvořivých úloh**:

1. Tvořivost nejnižšího stupně se projevuje v úlohách:

   RP – RP – RP

   Charakteristický je pro takovou úlohu rutinní postup při definování problému i při samotném řešení, jež směřuje k jedinému správnému výsledku. Při řešení takových úloh se uplatňuje převážně konvergentní myšlení.

2. Tvořivost druhého stupně se ukazuje v úlohách typu:
   RP – RP – OP
   RP – OP – RP
   OP – RP – RP
   Jedna složka je otevřená pro divergentní produkce, zatímco ostatní dvě předpokládají rutinní aplikaci již známých postupů (pomocí konvergentního myšlení).
3. Tvořivost třetího stupně se projevuje v úlohách:
   RP – OP – OP
   OP – RP – OP
   OP – OP – RP
   Charakteristikou takové úlohy jsou dvě složky otevřené pro možnost divergentního myšlení a jen jedna složka je relativně uzavřená.
4. Tvořivost nejvyššího stupně se může projevit v úlohách typu:
   OP – OP – OP
   Pro takové úlohy je typická relativní otevřenost při definování problému, různorodost při použití procesů a metod řešení, i otevřenost na straně výsledků. V těchto typech úloh se nejvíce využívá divergentního myšlení.

2.1.2 Klasifikace matematických úloh

Matematické úlohy v učivu 1. stupně základní školy můžeme klasifikovat podle různých kritérií. Novák a Stopenová (1993) uvádí třídění úloh podle matematického obsahu, operační náročnosti, způsobu jazykového vyjádření, charakteru požadavků na řešení a podle povahy objektů, které v úlohách vystupují. Nás budou pro potřeby této práce zajímat především první dvě kritéria.

1. Matematický obsah
   Dle obsahu můžeme úlohy klasifikovat v mnohých rovinách, např.:
   - **matematické úlohy** (aritmetické, geometrické, algebraické)
   - **aritmetické úlohy** (např. na porovnávání čísel, na sčítání, na odčítání)
   - **slovní úlohy**
   - **kombinatorické úlohy**
   - **logické úlohy**
   - **smíšené úlohy**

2. Operační (kognitivní) náročnost

   Kritériem tohoto třídění je náročnost na myšlenkové operace žáka, které potřebuje při řešení úlohy. Rozlišujeme následující kategorie úloh:

   - vyžadující **pamětní reprodukci** matematických poznatků (Kolik stupňů měří pravý úhel?)

     Takové úlohy začínají nejčastěji slovy: Jak se nazývá? Definujte.
   - vyžadující provedení **jednoduchých myšlenkových operací** s matematickými poznatky (jednoduché výpočty)

     Úlohy této kategorie obsahují formulace jako: Popište, porovnejte.
   - vyžadující **složitější myšlenkové operace** s matematickými poznatky (dokazování, zdůvodnění)

     Úlohy vyžadující složitějších operací jsou často uvozeny slovy: Vysvětlete, dokažte, ověřte, odůvodněte.
   - vyžadující **tvořivé myšlení** (řešení problémových situací, tvorba úloh žáky, vlastní úvahy a objevování)

     Úlohy poslední kategorie mohou začínat: Jak bys využil...? Vymysli příklad.

Úlohy, které vyžadují pamětní produkci, provedení jednoduchých myšlenkových operací nebo složitějších myšlenkových operací, můžeme zjednodušeně nazvat jako **standardní** úlohy. Jsou to úlohy, které k řešení využívají již známého postupu (algoritmu).

Úlohy vyžadující tvořivé myšlení označujeme jako **nestandardní**, protože k vyřešení takové úlohy nám známé postupy nestačí. Žák pak musí sám objevovat různé cesty, jak dospět k vyřešení úlohy.

Mezi nestandardní úlohy patří právě **divergentní úlohy**, které hrají v této diplomové práci klíčovou roli. Pojmem divergentní úlohy se budeme blíže zabývat v následující kapitole.

2.2 Dělení úloh podle poznávacích procesů

V hodinách matematiky se uplatňují úlohy, které rozvíjejí více buď konvergentní, nebo divergentní poznávací procesy. Vyskytují se ale také komplexní úlohy, kdy dochází ke střídání konvergentních i divergentních procesů, jako je tomu například při tvořivém řešení úloh prostřednictvím heuristiky. Jelikož jsme se již seznámili s pojmem konvergentního a divergentního myšlení, můžeme přistoupit k otázkám konvergentních a divergentních úloh ve vyučování matematice.

2.2.1 Konvergentní úlohy

Podle Plhákové (2008) jsou to úlohy, které mají jediné nebo jednoznačné řešení, jež důsledně vyplývá z podmínek úlohy. Při řešení tohoto typu úloh se uplatňuje již zmiňované **konvergentní myšlení**, myšlení, které směřuje k jedinému způsobu řešení a také k jedinému výsledku řešení, závěru. Proto takové úlohy nazýváme jako úlohy konvergentní. Můžeme říci, že jsou opakem tvořivých úloh, jelikož k vyřešení takové úlohy nemusíme použít něco nového, neobvyklého.

Při řešení úloh konvergentního charakteru dochází k aplikaci známých**, algoritmických postupů**. Podle Zeliny (1990, s. 68) je algoritmus: *„Soustava /schéma/ formálních úkonů, pomocí kterých se mechanickým výpočtem dají řešit všechny úlohy určitého typu."* Algoritmus můžeme tedy chápat jako postup, s jehož pomocí lze vyřešit určitý typ úlohy.

Algoritmické úlohy řešíme tedy s využitím již naučených definic a vzorců, jsou obyčejnými aplikacemi jednoho nebo více algoritmů Algoritmy nesnižují zcela žákův tvořivý přístup k vyučování, jelikož ho podněcují k objevování nových algoritmů.

Schopnost řešit konvergentní úlohy označuje Kuřina (2011) jako matematickou gramotnost žáka. Po absolvování určitého stupně školy by měli být žáci tedy matematicky gramotní.

Ve vyučování matematice na 1. stupni základní školy převládají právě konvergentní typy úloh.

2.2.2 Divergentní úlohy

Divergentní úlohy jsou zvláštním případem netradičních matematických úloh. Mohli bychom také říci, že se jedná o nestandardní typ úloh, jelikož divergentní úlohy se vyznačují tím, že nemají jen jediný správný výsledek nebo jedinou možnou metodu řešení, jako tomu je u úloh konvergentních. Divergentní úlohy jsou takové úlohy, které směřují k různým výsledkům řešení, nebo úlohy, k jejichž vyřešení vede několik různých způsobů nebo metod řešení. Řešení nejsou jednoznačně determinována podmínkami úlohy, myšlení tak může divergovat (vytvářet více řešení). Při řešení úloh divergentního charakteru se uplatňuje **divergentní myšlení**, které nabízí příležitost, jak objevit v každé situaci více, než je běžné, tudíž je tvořivější než myšlení konvergentní. Divergentní úlohy rozvíjejí tvořivé myšlení a matematické myšlení, podporují vynalézavost a nápaditost žáků, stimulují jejich zájem o matematiku.

Pokládáme je proto za **úlohy tvořivého charakteru**. Při řešení tvořivé úlohy žák musí použít něco nového, neobvyklého, ať už v procesu řešení, nebo ve výsledku úlohy. Takovou úlohu nevyřešíme pouhou aplikací algoritmických postupů. Při řešení divergentních úloh využíváme **postupy heuristické**. Podle Zeliny (1990, s. 12): *„Heuristika je věda o metodách tvořivého řešení problémů."* Žák úlohu řeší postupným objevováním. Nemůžeme ovšem tvrdit, že při tvořivém řešení problémů se uplatňují jen heuristické postupy a metody. Řešení problému je komplexní činnost, která obsahuje postupy heuristické i algoritmické (Zelina, 1990).

Ve vyučování matematice na 1. stupni základních škol převládají konvergentní úlohy. Učitel může takovou úlohu mnohdy lehce **přeměnit na úlohu divergentní**, která může být pro žáky atraktivnější a vybízí je k divergentnímu, tvořivějšímu řešení. V učebnicích je obecně málo úloh, které by u žáků rozvíjely divergentní myšlení, proto je tato přeměna konvergentních úloh na úlohy divergentní poměrně jednoduché a efektivní řešení.

Právě Zelina (1990) rozlišuje **různé podoby divergentních úloh**:

- úloha má jediné správné řešení, ale učitel podněcuje žáky, aby nacházeli různá řešení, nechává je divergovat,
- úloha má vskutku více možných řešení, ovšem jejich počet je omezený,
- úloha má nekonečně mnoho správných řešení.

Divergentní úlohy by měly obsahovat následující pokyny, které žáky podnítí k divergentní tvorbě: vymysli, navrhni, promysli i jiné způsoby, zvaž různé důsledky, pokus se najít co nejvíce možností, co by se mohlo stát, kdyby…, jak by se dalo zlepšit…, zkus vytvořit nový, originální…, k čemu všemu by se dalo využít…, navrhni něco, co ještě nikdo ve třídě neřekl.

Každá divergentní úloha je svým způsobem méně či více divergentní, proto se zavádí pojem **míra divergence úlohy**. Hovoříme o míře možných způsobů postupů a řešení, ať už ze strany příjemce úlohy (žák), samotné úlohy a prostředí. Příjemce úlohy ovlivňuje její míru divergence schopnostmi jeho vlastního divergentního myšlení. Míra divergence je ovlivněna samotnou úlohou, vzhledem k jejímu obsahu a daným podmínkám. Na míru divergence úlohy má také vliv prostředí, které určuje, do jaké míry může žák rozvinout svoje divergentní myšlení. To závisí především na učiteli, do jaké míry je schopen tolerovat žákovy produkce (Zelina 1990).

Řešení úloh divergentního charakteru má své klady i zápory. Za klady jsou považovány:

- **Motivace**, při níž dojde k aktivizaci žákova chování a cítí tak potřebu dosáhnout daného cíle. Divergentní úlohy svým charakterem nabízí žákovi něco nového, zajímavého, co ho motivuje k vyřešení úlohy. Pokud žák vykonává nějakou činnost pro své potřeby a zájmy, hovoříme o motivaci vnitřní, která je ve vyučovacím procesu žádanější, než motivace vnější, kdy žák plní určité cíle jen pro dobré známky nebo pro možnou odměnu.
- **Procvičení učiva** zajímavější formou, než jaké jim nabízí konvergentní úlohy se svými algoritmickými postupy. Pokud budeme žákům k procvičení nové látky předkládat pouze již známé podoby konvergentních úloh, může se pro ně stát učivo nezajímavé, nudné. Pokud jim ovšem zadáme úlohu, která se jim bude jevit jako atraktivní a budou moci užít i jiných než algoritmických postupů, danou látku budou považovat za zajímavější a procvičení bude efektivnější.
- Žáci vyžadují **tvořivé hledání nových podmínek, hledání problému**, které jim tyto úlohy umožňují.
- Řešení úloh je **nové, netradiční, tvořivé**. Divergentní úlohy mohou být proto zajímavé i pro žáky, kteří nemají k matematice zrovna blízký vztah. Pomocí takových netradičních (nestandardních) úloh je můžeme více přiblížit matematice, protože k vyřešení si mnohdy vystačí s logickým uvažováním, aniž by museli ovládat nějaké algoritmy.
- Podporuje **samostatnost a pozitivní sebehodnocení**. Pokud je žák motivován zajímavou, netradiční úlohou a zároveň jsou dodrženy zásady pro tvořivé myšlení, s největší pravděpodobností bude chtít úlohu vyřešit sám, pro svoje vlastní uspokojení. S rozvojem samostatnosti souvisí i kladné sebehodnocení, jež je důležité pro pozitivní rozvoj jedince. Pokud žák dokáže pracovat na úloze samostatně a dojde k nějakému zajímavému, originálnímu výsledku, měl by být pochválen či pozitivně ohodnocen učitelem, ale hlavně by měl dojít ke kladnému hodnocení sebe sama.
- Dávají **prostor k diskusi**. Diskuse přispívá k rozvoji komunikačních schopností. Žáci sdělují ostatním svoje výsledky řešení a způsob, jak k nim došli. Vedeme je k tomu, aby uměli vyjádřit slovy to, co si zrovna myslí. Ne pro všechny žáky je lehké sdělovat svoje myšlenky v takové formě, aby byly srozumitelné i pro ostatní.

Mezi zápory řešení úloh divergentního charakteru můžeme řadit:

- Pro žáky je mnohdy **obtížné rozeznat problém**. S divergentními úlohami se setkávají většinou jen zřídka, nejsou zvyklí řešit problémové úlohy, a proto pro ně může být těžké najít v úloze problém.
- Zpočátku **řeší každou úlohu rutinně, konvergentně.** V učebnicích matematiky převažují úlohy konvergentního typu, kdy žáci využívají určitý algoritmus, proto je pro ně mnohdy nezvyklé řešit úlohu divergentně, netradičně, tvořivě.
- Pokud nejsou žáci zpočátku provokovaní otázkami, **úlohu dál neřeší**. Pokud vidíme, že žáci nerozpoznali problém, nebo že nevidí všechna možná řešení úlohy, snažíme se je vhodně navést, pomoci jim při divergování jejich myšlení.

Všechny tyto rozličné klady divergentních úloh ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ podle mého názoru jednoznačně převažují nad zápory. Také podle Chlebka (2000) každý moderní pedagog nesporně řekne, že zařazení divergentních úloh a postupů obohacuje mnohdy jednotvárné hodiny matematiky, kupříkladu o originální nápady žáků nebo o přínosné diskuse.

2.3 Heuristické strategie řešení problémů

Při tradičním vyučování matematice, jako i ostatním předmětům, jsou žákům prostřednictvím učitele vysvětlovány pojmy, metody i strategie a úkolem žáků je vše si zapamatovat a následně používat. Pokud jim ale dáme příležitost, aby na dané metody či strategie přicházeli sami, ať už s jistou cizí pomocí, nebo po zvláštní přípravě, hovoříme o učení metodou objevování (Petty, 2008).

Kopka (1999) uvádí, že myšlenky heuristiky (umění objevu) se ve spojitosti s výukou matematiky vyskytují již od starověku, ale až americký matematik a didaktik matematiky maďarského původu George Polya se zasloužil o to, že se tyto myšlenky dostaly mezi učitelskou veřejnost. Domníval se, že žáci porozumí matematice lépe, když sami uvidí, jak se matematika vytváří a když si budou moci toto vytváření vyzkoušet. Žáky je třeba nejprve naučit tvořivému řešení problémů, proto by měl učitel do svých vyučovacích hodin vkládat problémy s cílem **rozvíjet schopnosti žáků problémy řešit**.

Pokud učitel matematiky do svého tvořivého vyučování zařadí strategie, které umožní žákům více různých přístupů k řešení problémů, napomáhají rozvoji tvořivého myšlení a nepovolují produkovat mentální stereotypy, jedná se o **problémové vyučování** (Lokšová, Lokša, 2003). Podle Nelešovské a Spáčilové (2005, s. 72): *„**Podstata této koncepce** spočívá v tom, že žákům nejsou sdělovány hotové poznatky, ale řešením problémů (problémových situací) žáci sami objevují nové poznatky a získávají nové zkušenosti, případně se učí již osvojené vědomosti a dovednosti používat při řešení nových, problémových situací."* Žák se může cítit při procesu řešení problémových úloh jako badatel či vynálezce (může sloužit jako vhodná motivace), takové úlohy rozvíjejí nejen tvořivé myšlení žáka, formují také složky jeho osobnosti – citovou, volní a činnostní. Mezi klady problémového vyučování patří rozvoj samostatnosti, kreativity a aktivity žáků, objevování různých cest vedoucích k cíli, schopnosti zdolávat překážky apod. Nevýhodou je pak časová a organizační náročnost na přípravu učitele (Nelešovská, Spáčilová, 2005).

Heuristické úvahy jsou takové úvahy, pomocí kterých objevujeme řešení daných problémů. Nezaručují nám ale, že výsledné řešení bude správné. Proto bychom měli nakonec dokázat, že výsledek je opravdu správný. V této podkapitole si ukážeme **výchozí (základní) strategie**, jež jsou obvykle používány matematiky při tvorbě své disciplíny a jichž by měli využívat také učitelé při práci se svými žáky. Heuristické (objevitelské) strategie jsou tedy činnosti, které matematik dělá, když řeší nerutinní problémy, zároveň jsou to nástroje, pomocí kterých hledáme cestu k cíli (Kopka, 2013).

Kopka (2013) se zmiňuje o pěti výchozích strategiích:

1. Systematické experimentování
2. Pokus – omyl
3. Odhad – ověření – oprava
4. Algebraická cesta
5. Geometrická cesta

První tři uvedené strategie je možné řadit mezi výzkumné strategie, další dvě jsou hodně používány ve školské a nejen školské matematice. Následně se blíže seznámíme s charakteristikami těchto pěti strategií.

2.3.1 Strategie systematické experimentování

Strategii systematického experimentování je vhodné použít v případě, když nemáme žádný vhled do dané problematiky. Aby byla tato strategie úspěšná, je třeba experimentovat dostatečně dlouhou dobu. Výsledky experimentování jsou následně psané do tabulky, pomocí které můžeme lépe objevit jistou zákonitost a nalézt tak příslušný vzorec. K vyslovení závěru experimentování je zapotřebí jisté zobecnění (Kopka, 1999, 2013).

Na 1. stupni základních škol se tato výzkumná strategie řešení úloh příliš nepoužívá vzhledem k časové náročnosti a faktu, že ne všichni žáci jsou schopni trvalé, systematické práce a bylo by tak pro ně složité nalézt hledanou zákonitost, hledaný vzorec.

2.3.2 Strategie pokus – omyl

Tuto strategii řešení úloh můžeme nazvat také experimentováním. Od předchozí strategie, strategie systematického experimentování, se liší tím, že se jedná o experimentování nesystematické. Podle Kopky (2013, s. 26): *„Je to nejjednodušší možná metoda, ale může vést k cíli až po mnoha experimentech, nebo nemusí vést k cíli vůbec."*

Ve škole nebývá tato metoda taky příliš využívána, nemusí totiž vést rychle k objevení řešení. Jak už samotný název strategie napovídá, řešitel zkouší daný problém vyřešit pomocí pokusu, kdy doufá v nalezení správného výsledku. Dosazuje například do rovnice náhodné číslice a buď dojde ke správnému řešení, nebo ne.

2.3.3 Strategie odhad, ověření a oprava

Pokud si řešitel (žák) uvědomí, že může využít odhadnutý a ověřený výsledek k učinění nového, opraveného odhadu, využije - li tedy předchozí výsledek k novému odhadu, hovoří Kopka (2013) o strategii odhad, ověření, oprava. Jedná se o jisté zdokonalení strategie předchozí. Pro lepší nalezení zákonitosti, která nám pomůže dostat se rychle ke správnému řešení, je příhodné vytvořit si tabulku a vkládat do ní postupně nalezené vhodné výsledky.

Tato metoda se využívá v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ např. při dělení víceciferných čísel číslem dvojciferným. Žák odhaduje, kolikrát se vejde dělitel do daného čísla a následně ověřuje správnost svého odhadu. Pokud se stane, že odhad byl chybný, učiní na základě předešlého odhadu odhad nový. Tímto způsobem postupuje, dokud není dělení u konce.

2.3.4 Algebraická cesta

Podle Kopky (2013) se algebraická cesta neboli strategie sestavení rovnice nebo soustavy rovnic liší od ostatních tím, že je více abstraktní. Není založena na experimentech či odhadech, jako tomu bylo u strategií předchozích, jde o uvědomělé vytvoření rovnice nebo soustavy rovnic.

Jedná se o strategii často používanou ve školské matematice. Žáci jsou již od prvního ročníku ZŠ vedeni k tomu, aby uměli vyřešit jednoduché rovnice. Cílem je, aby byli schopni tuto metodu dále sami využívat. Algebraická cesta představuje velice účinný nástroj řešení problémů. Žák, který dokáže předloženou úlohu vyřešit za pomoci této strategie, dokazuje, že se jeho myšlení posunulo od konkrétního k abstraktnímu. Na rozdíl od předchozích strategií algebraická cesta není tak náročná na čas. To je jistě přínosné jak pro učitele matematiky, tak pro samotné žáky.

2.3.5 Geometrická cesta

Velmi využívanou strategií na 1. stupni ZŠ je geometrická cesta neboli strategie grafického znázornění, jelikož si díky ní může žák vytvořit názornou geometrickou představu (Kopka, 2013).

Pokud žák neví, jakou metodou by dospěl ke správnému výsledku předloženého problému, obvykle se rozhodne právě pro názorné řešení pomocí obrázku. Právě ilustrace dokáže žákovi pomoci při konkretizaci zadaného problému. Obrázek může mít různé podoby, může představovat např. číselnou osu, různé grafy či diagramy. Na 1. stupni ZŠ je nejčastěji využívaná právě číselná osa nebo jednoduché ilustrace.

Ne vždy je ovšem možné použít při řešení problémové úlohy geometrickou cestu. Pokud je úloha složitější nebo obsahuje např. několikaciferná čísla, bylo by použití této metody poněkud zdlouhavé, někdy až nemožné.

3 ZAŘAZENÍ DIVERGENTNÍCH ÚLOH DO RÁMCOVÉHO VZDĚLÁVACÍHO PROGRAMU PRO ZÁKLADNÍ VZDĚLÁVÁNÍ

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) vymezuje základní rámec pro vzdělávání na základní škole. Od 1.9.2013 nabývá účinnosti upravený RVP ZV.

Veškerý vzdělávací obsah, aktivity a činnosti probíhající ve škole musí směřovat k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí. Divergentní úlohy utváří a rozvíjí především **Kompetence k řešení problémů**. Na konci základního vzdělávání žák (RVP ZV, 2013, s. 11): *„využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení; volí vhodné způsoby řešení; užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy"*.

Vzdělávací oblast **Matematika a její aplikace** je založena zejména na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích.

Vzhledem k cílovému zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, divergentní úlohy vedou žáka k (RVP ZV, 2013, s. 27): *„rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby"*.

Vzdělávací obor Matematika a její aplikace je rozdělen na následující tematické okruhy: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru, **Nestandardní aplikační úlohy a problémy** (RVP ZV, 2013).

Divergentní úlohy jsou svým charakterem netradiční, nestandardní, a proto bych je zařadila do posledního tematického okruhu, který představuje **důležitou součást matematického vzdělávání** na 1. stupni základní školy.

3.1 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Řešení nestandardních aplikačních úloh a problémů může být do jisté míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, je přitom ale nezbytné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prostupovat všemi tematickými okruhy během celého základního vzdělávání. *„Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života,* *pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy"* (RVP ZV, 2013, s. 26). Obtížnost logických úloh je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, řešení takových úloh pak posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti jeho logického uvažování. Řešení takových úloh může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní (RVP, 2013).

Očekávané výstupy - 2. období

žák

„M-5-4-01 řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky" (RVP ZV, 2013, s. 29).

Učivo

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost (RVP ZV, 2013).

K řešení nestandardní úlohy nám tedy mnohdy nestačí obvyklé postupy školské matematiky, je třeba užití divergentního myšlení, heuristických postupů a strategií. RVP ZV rozděluje učivo tohoto tematického okruhu na slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce a učivo na prostorovou představivost.

Pokusím se blíže specifikovat možný divergentní charakter těchto úloh:

- **Slovní úlohy**

  Divergentní slovní úloha je taková úloha, kterou lze řešit více postupy nebo která má více možných řešení. Konvergentní slovní úlohu přetvoříme na divergentní jednoduše – vypustíme nějakou podmínku, např.:

  Vojta, Jakub a Eliška mají za úkol rozdělit si 12 hrušek tak, aby každý dostal stejně. Pokud vypustíme podmínku, že každý musí dostat stejně, úloha má více řešení. Jedním z řešení např. je, že chlapci přenechají všechny hrušky Elišce.

- **Číselné a obrázkové řady**

  Číselná řada je řada čísel, která se rozvíjí podle daného logického principu, např. 3, 4, 7, 11, 18, …

Jediné možné řešení – 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,… (následující číslo získáme součtem posledních dvou čísel).

Divergentní číselná řada by mohla vypadat následovně:

1, 1, 2, …

1. možné řešení – 1, 1, 2, 2, 3, 3, … (střídavě přičítáme 0 a 1).

2. možné řešení – 1, 1, 2, 3, 5, 8,… (následující číslo získáme součtem posledních dvou čísel).

- **Magické čtverce**

  Magický čtverec představuje čtvercovou síť o rozměrech n x n. Tato síť se vyplňuje přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby součet čísel ve všech sloupcích, řádcích i diagonálách byl stejný.

  Pokud máme magický čtverec 3 x 3, můžeme do čtverce doplňovat pouze přirozená čísla 1 až 9. Magický čtverec může mít více možných způsobů řešení, záleží na tom, kolik čísel do čtverce umístíme nebo také jaká čísla dáme žákům k dispozici v zadání úlohy. Obvykle se sice každé číslo v tabulce smí vyskytovat jen jednou, můžeme ale úlohu obměnit a žáci mohou dosazovat různá čísla. Takto modifikovaná úloha rozvíjí divergentní myšlení.

- **Prostorová představivost**

  Na rozvoj prostorové představivosti můžeme pro žáky sestavit úlohu, kdy bude řešením úlohy pouze jedna možnost (úloha konvergentní). Můžeme také použít např. tangram. Tangram je čtverec rozdělený na 7 různých geometrických tvarů a úkolem žáka je složit z něj právě čtverec, nebo různé tvary, věci, zvířata, aj. Tato činnost je velmi zábavná, žáci vymýšlí a skládají různé tvary.

Divergentní matematické úlohy by měly stejně jako nestandardní aplikační úlohy a problémy prostupovat všemi tematickými celky. Matematické úlohy divergentního charakteru mohou být např. aritmetické, algebraické, geometrické, kombinatorické, diofantovské nebo smíšené.

II PRAKTICKÁ ČÁST

4 VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ

Praktická část diplomové práce analyzuje řešení matematických divergentních úloh žáků 5. ročníku ZŠ Helsinská v Olomouci, dále hodnotí úroveň schopností žáků řešit divergentní matematické úlohy.

4.1 Cíle a celkové pojetí výzkumného šetření

Pro výzkumné šetření byly stanoveny následující cíle:

Hlavní cíle:

- vytvořit divergentní matematické úlohy, které mohou využít pedagogové 1. stupně ZŠ v praxi,
- analyzovat postupy, strategie a výsledky řešení jednotlivých úloh,
- zhodnotit úspěšnost řešení divergentních úloh u oslovených žáků.

Při zkoumání dané problematiky využiji smíšený výzkum, který Hendl (2005) definuje jako obecný přístup, v němž se prolínají kvalitativní a kvantitativní metody či techniky. Samotným kvalitativním výzkumem se rozumí hloubková analýza popisující zvláštnosti jednotlivých případů. Strauss a Corbinová (1999) rozumí kvalitativním výzkumem *„jakýkoli výzkum, jehož výsledků se nedosahuje pomocí statistických procedur nebo jiných způsobů kvantifikace"* (In Švaříček, Šeďová, 2007, s. 16). Oproti tomu závěrem kvantitativního výzkumu jsou právě kvantitativní data (čísla).

Výzkumné šetření se bude nejprve zabývat kvalitativní analýzou vybraných žákovských řešení, poté kvantitativního vyhodnocení, jaká byla úspěšnost žáků při řešení úloh. Dojde tedy ke kvantifikaci nalezených kvalitativních dat. Jelikož vzorek respondentů není statisticky reprezentativní, nelze výsledky této práce zobecňovat.

4.2 Výzkumný vzorek a jeho stručná charakteristika

Výzkumné šetření proběhlo u žáků 5. ročníku fakultní ZŠ Helsinské v Olomouci. Tato škola je odloučeným pracovištěm ZŠ Tererovo nám. 1. Pátý ročník ZŠ Helsinská momentálně navštěvuje 20 žáků, výzkumu se zúčastnilo celkem 18 žáků.

Žáky této třídy jsem poznala již během své praxe v 5. ročníku zimního semestru, kdy jsem měla možnost nahlédnout do jejich hodin matematiky a sama si také několik hodin odučit. Úlohy, které se nacházely v jejich učebnici, rozvíjely jen pramálo tvořivé myšlení žáků. Tak jsem dospěla k názoru, že by bylo zajímavé zjistit, jak by byli žáci úspěšní při řešení divergentních úloh.

Vytvořila jsem tedy didaktický test, na jehož vyřešení měli žáci vyhraněnou celou vyučovací hodinu, tedy 45 minut. Po celou dobu výzkumu jsem jim byla k dispozici. Před rozdáním testů byli seznámeni s některými instrukcemi – všechny výpočty psát do testu, nepoužívat žádné jiné papíry a byli také obeznámeni s tím, že test se nebude hodnotit a poslouží jen pro mé účely. Cílem bylo navodit příjemnou atmosféru ve třídě, zajistit tak žákům klidné prostředí při řešení úloh. Dále jsem je požádala, aby mi ke každé vyřešené úloze vždy alespoň stručně napsali postup, pomocí kterého dospěli k výsledku. Pokud měli při řešení úloh nějaký dotaz nebo problém, jednotlivě jsem se jim věnovala. Žáci měli test vyřešený během 30 minut, zbývající čas jsme diskutovali o různých možnostech řešení daných úloh.

4.3 Výzkumná metoda

Metoda, zvolená pro výzkumné šetření v praktické části, se nazývá didaktický test. Didaktickým testem se rozumí zkouška, jež se orientuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u jisté skupiny osob a od běžné zkoušky se odlišuje především tím, že je navrhován, ověřován, hodnocen a interpretován dle předem určených pravidel (Chráska, 1999).

Stručnou a výstižnou definici didaktického testu představuje také Byčkovský (In Chráska, 1999, s. 12): didaktický test je *„nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky"*.

Rozlišujeme různé druhy didaktických testů. Liší se zejména tím, jaké informace s jejich pomocí získáváme. Didaktický test tvoří jednotlivé testové úlohy. Testovou úlohou se rozumí otázka, úkol nebo problém, jenž je zahrnutý v testu. V didaktických testech jsou používány také rozličné typy testových úloh.

Pro výzkumné šetření diplomové práce byl zvolen nestandardizovaný didaktický test, který ověří především žákovu kreativní činnost a s tím spojenou schopnost divergentního myšlení. Skládá se ze šesti divergentních úloh, které mají charakter otevřených širokých úloh. Každá úloha je záměrně formulovaná tak, aby žáka přímo nevybízela k více možným odpovědím. Jen tak budu moci validně zhodnotit, zda žák vyřešil úlohu divergentně, nebo konvergentně. Jedná se o úlohy, které náleží do výše zmíněného tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. První a pátá úloha je aritmetická, druhá a čtvrtá geometrická, třetí kombinatorická a šestá diofantovská.

V otevřených úlohách s širokou odpovědí se vyžaduje od žáka rozsáhlejší odpověď, např. vyřešení daného problému. Doporučují se při zkoušení komplexních vědomostí, osvojovaných v delším časovém úseku a jsou vhodné pro zkoušení vyšších úrovní osvojování dané látky, např. řešení problémových úloh (Chráska, 1999).

4.4 Testová úloha č. 1

Zadání úlohy č. 1

1. Mamince je 35 let, babička je o 24 let starší. Teta je starší než maminka, ale mladší než babička. Kolik let je tetě (Kadlčíková, 2010)?

První divergentní úloha je úloha aritmetická. Tuto slovní úlohu jsem zvolila záměrně na začátek celého testu. Domnívala jsem se, že právě tato úloha žáky snadno navede k více možným řešením úlohy. Pro žáky by bylo navíc vyřešení první úlohy motivující k řešení úloh dalších.

Jedná se o úlohu, se kterou se mohou žáci setkat v reálném životě. Je pro ně proto blízká a její pochopení by jim nemělo činit větší obtíže.

4.4.1 Možná řešení úlohy

Zápis:

Maminka ….….35 let

Babička ……... o 24 let více než maminka

Teta …...…..… starší než maminka

Teta …………. mladší než babička

Teta …………. ? let

---

35 + 24 = 59 – babička má 59 let

Divergentní řešení:

1. možnost – vypsání všech variant:

35 < 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 < 59

Odpověď:

Tetě může být 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 nebo 58 let.

2. možnost – určení rozmezí:

Odpověď:

Tetě může být mezi 36 a 58 lety.

Konvergentní řešení:

Žák si spočítá, kolik let má babička. Poté dokáže určit všechny varianty, kolik let může mít teta. Jelikož je ale žákovo myšlení spíše konvergentní povahy, vybere si pouze jedno možné číslo (jeden možný věk tety) a to napíše do odpovědi.

Pomocí první divergentní úlohy můžeme také zjistit, zda se žáci zamýšlí nad tím, jestli je jejich řešení reálné. Divergentní myšlení je myšlení rozbíhavé. Nejde pouze o nalezení všech možných řešení úlohy, ale také o to, jak žáci přemýšlí nad samotným zadáním. Jedno zadání může být pochopeno různě jednotlivými žáky, nebo jeden žák nalezne např. nepřesnost či neúplnost v zadání a tím i různá řešení.

V zadání dané úlohy nestojí, zda jsou maminka, teta a babička v příbuzenském vztahu. Předpokládám, že žáci budou vycházet ze situace, kdy babička je matka maminky i tety, tudíž je teta sestrou maminky. V tomto případě nejsou všechna divergentní řešení reálná. Teta nemůže mít například 58 let, protože její matce (babičce) je 59. Znamenalo by to, že babička měla svoji dceru (tetu) v jednom roce. Domnívám se, že se žáci touto otázkou nebudou zabývat.

4.4.2 Řešení respondentů

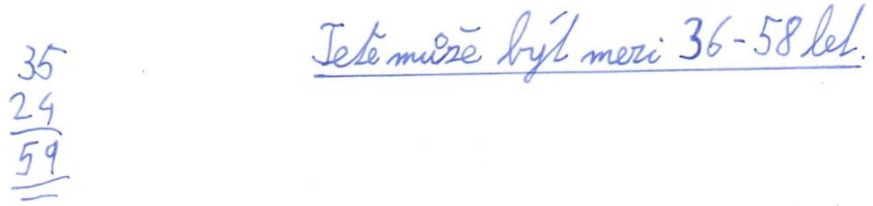
Divergentní řešení:

35 + 24 = 59

babičce je 59 let.

Tetě může být: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.

Respondent č. 1 byl při řešení první úlohy schopen divergentního myšlení, které se projevilo v jejím řešení. Nejprve si pomocí početní operace sčítání určil věk babičky. Poté zapsal odpověď, kdy využil první možnost řešení a to systematické, konkrétní vypsání všech možných variant.


35
24
59

Tetě může být mezi 36-58 let.

Respondent č. 2 vyřešil úlohu také divergentně. Při jejím řešení ale na rozdíl od respondenta č. 1 nevypsal konkrétně všechny možnosti. Jeho odpověď byla úspornější, obsahovala pouze rozmezí všech čísel, která mohla představovat věk tety. Použil tedy druhou možnost řešení.

Konvergentní řešení:

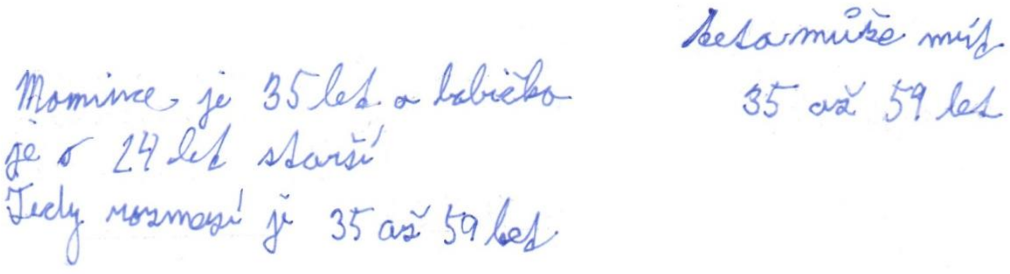

35
24
59

Babičce je 59 let.
Tetě může být 39 let.

Respondent č. 3 vyřešil danou úlohu konvergentně, jelikož uvedl do odpovědi pouze jedno, jím vybrané řešení. Aby ale dospěl k tomuto řešení, musel si určit celé rozmezí čísel, které by mohlo odpovídat věku tety. Chápal tedy, že úloha má více řešení, do odpovědi přesto napsal jedinou vybranou možnost, že tetě může být 39 let.

Několik žáků se mě po přečtení úlohy ptalo, jestli stačí vybrat pouze jedno řešení. Evidentně chápali, že teta může mít 36 až 58 let, měli ale potřebu vybrat jen jednu jedinou možnost. Na jejich dotaz jsem jim odpověděla pouze to, aby mi k úloze jednoduše napsali, co si myslí.

Chybné řešení:



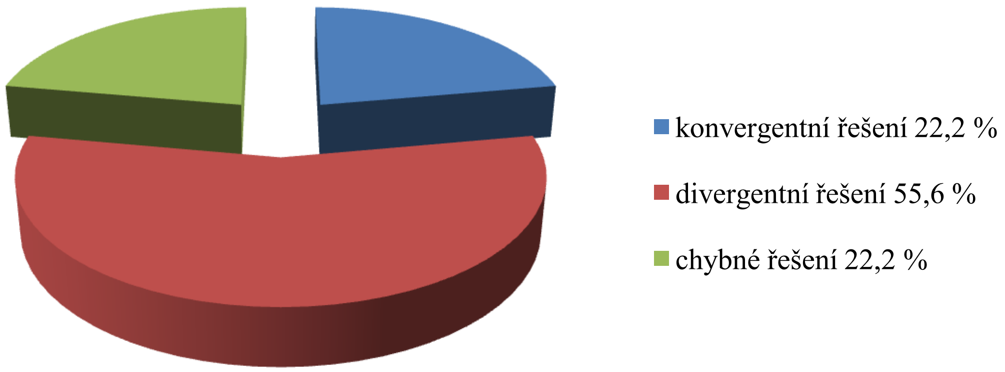
Respondent č. 4 úlohu nevyřešil, ačkoliv byl jeho postup správný. Zpaměti si spočítal, kolik let má babička a pak pokračoval dál. Uvědomoval si sice, že výsledkem řešení bude rozmezí více čísel, co si ale neuvědomil, byl fakt, že teta nemůže být stejně stará ani jako maminka, ani jako babička. Nejspíše šlo o pouhou nepozornost, protože do zadání si zapsal, že babička je o 24 let starší.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení	Chybné řešení
Počet žáků	4	10	4

Tabulka č. 1: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 1. úlohy.

V tabulce č. 1 najdeme shrnutí způsobu řešení první divergentní úlohy u respondentů, kteří dospěli k jednomu nebo všem správným řešením. 10 žáků vyřešilo úlohu divergentně a našli tak všechna možná řešení. 4 žáci řešili úlohu nejprve také divergentním způsobem, do odpovědi ale napsali pouze jednu, jimi zvolenou možnost. U těchto žáků zvítězilo konvergentní myšlení, které žáky nabádá k jednomu správnému výsledku řešení úlohy.

Zbylým 4 žákům se nepodařilo úlohu vyřešit. Vypočítali věk babičky a dál si s úlohou nedokázali poradit. Respondent č. 4 řešil úlohu sice divergentně, ale neuvědomil si, že teta nemůže být stejně stará jako maminka a babička.



Graf č. 1: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 1. úlohy.

Graf č. 1 znázorňuje procentuální vyhodnocení použitého způsobu řešení úlohy č. 1. 22,2 % respondentů vyřešilo úlohu konvergentně, jelikož našli pouze jedno řešení. Více než dvojnásobek těchto respondentů, přesně 55,6 %, objevilo více možných řešení a jejich řešení bylo tedy divergentní. 22,2 % žáků vyřešilo úlohu chybně. Řešení první divergentní úlohy považuji za úspěšné, jelikož většina třídy projevila svoji tvořivost a s tím spojené divergentní myšlení. Nevybrali pouze jedno možné řešení, ale vypsali celý výčet možných čísel, která představovala věk tety, nebo někteří jednodušeji zapsali pouze jejich rozmezí.

Po vyřešení celého testu všech žáků následovala společná diskuse o různých možnostech řešení dané úlohy. Měla jsem tak možnost slyšet od samotných žáků, proč řešili úlohu zrovna jejich uvedeným způsobem. Když někteří žáci, kteří vyřešili tuto úlohu konvergentně, zjistili, že měli vypsat všechna řešení, ohrazovali se tím, že v zadání nestojí, aby našli více možných odpovědí. Vybrali proto jen jednu, kterou uvedli. Tato úloha tedy ukázala, že někteří žáci řeší úlohu konvergentně pouze proto, že nedostali impuls k tomu, aby se pokusili najít více řešení a to i v případě, že si jsou vědomi více možných odpovědí. Žádný respondent se dle očekávání nezabýval otázkou, zda maminka, teta a babička jsou nebo nejsou v příbuzenském vztahu a jejich řešení tak obsahovala i nějaká nereálná řešení.

4.5 Testová úloha č. 2

Zadání úlohy č. 2

2. Je možné rozdělit čtverec na čtyři shodné části? Načrtni.

Druhá divergentní úloha předložená respondentům byla úloha geometrická. Záměrně jsem zvolila jiný typ úlohy, aby byl pro žáka test pestřejší a tak i zábavnější. Jedná se o úlohu, která se stává pro žáka zajímavější v okamžiku, kdy zjistí, že čtverec lze rozdělit na čtyři shodné části více způsoby. Pro účely diplomové práce šlo především o to, zda bude žák schopen kreativnějšího řešení a nalezne tak více možných variant řešení. Znamenalo by to tak, že úlohu vyřešil divergentně.

Většina žáků neměla s pochopením zadání problémy a přistoupili tak k samotnému řešení úlohy. Jen jeden žák se přihlásil, jelikož mu nebylo jasné, co se rozumí těmi shodnými částmi. Nechtěla jsem ho nijak zvlášť podněcovat ke správnému postupu řešení, proto jsem ho jen navedla, aby si zkusil úlohu přečíst ještě jednou. Ukázalo se, že tato malá pomoc stačila a žák se mohl věnovat řešení úlohy. Jiné dotazy se k této úloze nevyskytly.

4.5.1 Možná řešení úlohy

Druhá divergentní úloha nabádá žáka, aby použitím geometrické strategie načrtl čtverec, který se poté bude snažit rozdělit na čtyři shodné části. Úmyslně jsem do zadání neuvedla, aby se žák pokusil nalézt více řešení. Chtěla jsem, stejně jako u ostatních úloh, zjistit, zda ho tato možnost vůbec napadne.

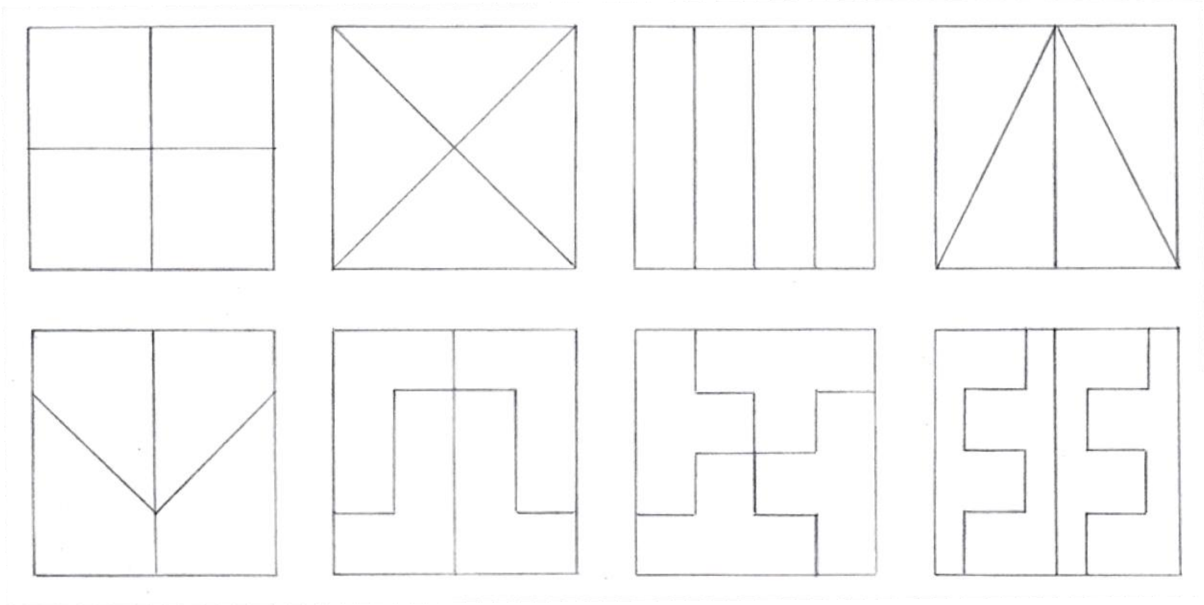
Konvergentní řešení:

Konvergentním řešením dané úlohy bude, pokud žák rozdělí čtverec na čtyři shodné části pouze jedním způsobem. Předpokládám, že část žáků rozdělí čtverec na čtyři shodné čtverce nebo na čtyři shodné trojúhelníky.

Divergentní řešení:

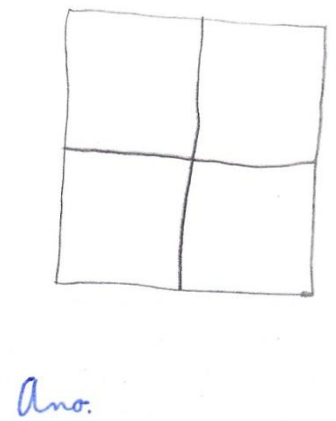
Divergentním řešením úlohy by bylo, pokud by žák rozdělil čtverec na čtyři shodné části více způsoby. To znamená, že by našel více možných řešení. V takovém případě by se jednalo o žáka, který má rozvinuté divergentní myšlení, je tvořivý a je schopen plně vnímat rovinný útvar.

Možná řešení:

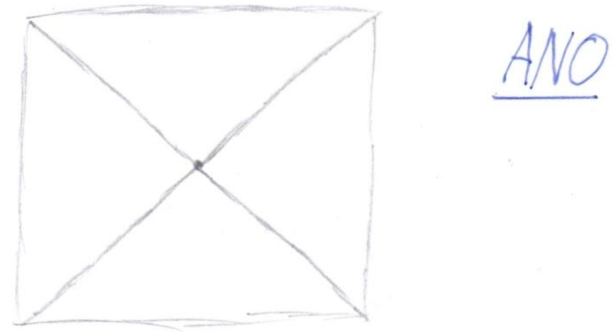


4.5.2 Řešení respondentů

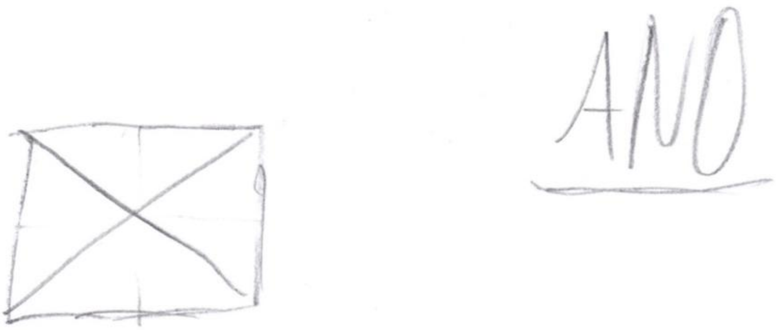
Konvergentní řešení:



Respondent č. 5 si správně podle pokynu v zadání načrtl čtverec, který poté rozdělil na čtyři shodné čtverce. Jeho řešení je konvergentní, jelikož nalezl pouze jedno možné východisko úlohy.

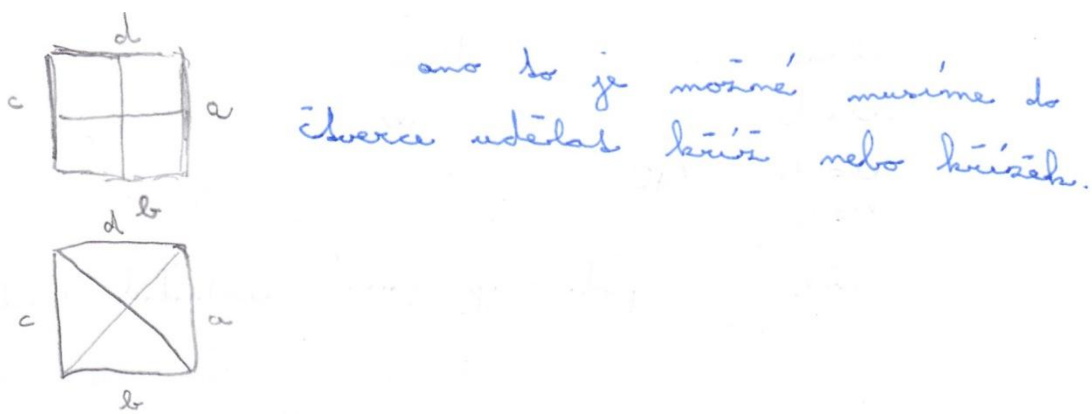


Respondent č. 6 vyřešil úlohu stejně tak jako respondent č. 5, konvergentně. Na rozdíl od něj ale rozdělil čtverec jiným způsobem a to pomocí úhlopříček na čtyři shodné trojúhelníky.

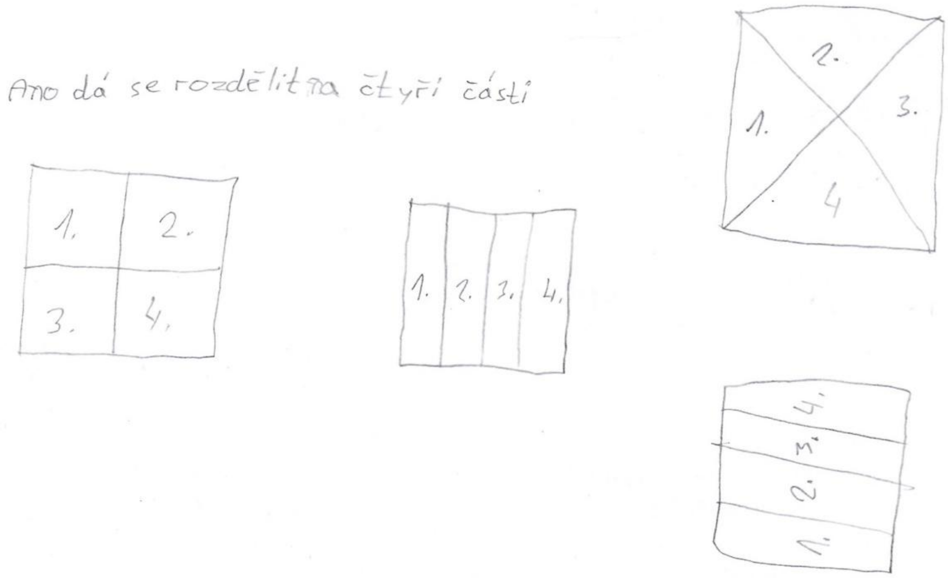


Respondent č. 7 byl velmi blízko k tomu, aby bylo jeho řešení divergentní. Nejprve totiž rozdělil čtverec na čtyři shodné čtverce, ale poté se rozmyslel a rozdělil ho na čtyři shodné trojúhelníky. Nemůžu sice říci, zda on sám přišel na obě dvě řešení, nebo jestli druhé řešení uviděl od spolužáka sedícího vedle něj, je ovšem patrné, že i když si byl vědom dvou možných způsobů řešení úlohy, uvedl jen jeden. Převládlo u něj tedy konvergentní myšlení.

Divergentní řešení:



Respondent č. 8 vyřešil úlohu divergentně, uvedl totiž více možných řešení úlohy, konkrétně dvě. Nejprve čtverec rozdělil na čtyři shodné čtverce tak, že spojil středy protějších stran a poté jej rozdělil pomocí úhlopříček na čtyři shodné trojúhelníky. Tento respondent vyřešil sice úlohu pro účely diplomové práce úspěšně, co bych mu ale určitě ve vyučovací hodině jinak vytkla, je chybný popis stran čtverce.

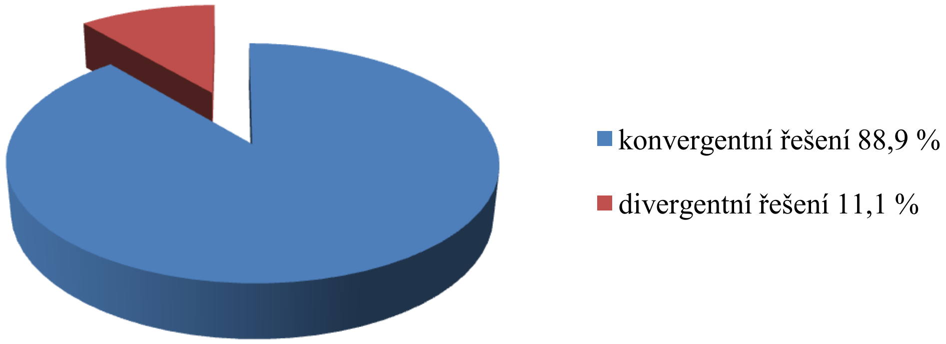


Respondent č. 9 byl v řešení druhé divergentní úlohy nejúspěšnější. Podařilo se mu nalézt nejvíce variant řešení. Rozdělil čtverec na čtyři shodné čtverce, čtyři shodné obdélníky a čtyři shodné trojúhelníky. Rozdělení na obdélníky provedl dokonce dvěma způsoby a to pomocí vertikálních a horizontálních čar. Respondent jednotlivé části vždy i očísloval.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení
Počet žáků	16	2

Tabulka č. 2: Vyhodnocení řešení 2. divergentní úlohy.

Tabulka č. 2 shrnuje výsledky řešení druhé divergentní úlohy u respondentů. 16 žáků našlo pouze jedno východisko, 2 žáci uvedli dvě a více možných řešení. Všech 16 žáků, kteří úlohu vyřešili konvergentně, čtverec rozdělili buď na čtyři shodné čtverce, nebo na čtyři shodné trojúhelníky. Potvrdil se mi tedy můj předpoklad. Tato úloha byla poměrně obtížná v tom smyslu, že žáci neměli žádný podnět k tomu, aby úlohu řešili více způsoby. Uspokojili se tedy většinou jednoduše s jedním řešením. Navíc pro některé žáky mohla hrát jistou roli při řešení úlohy neschopnost vnímat čtverec jako rovinný útvar a nedokázali si tak představit i jiná řešení.



Graf č. 2: Vyhodnocení řešení 2. divergentní úlohy.

Graf č. 2 vyjadřuje, kolik procent respondentů vyřešilo úlohu konvergentně, nebo divergentně. Většina respondentů, to je 88,9 %, vyřešilo úlohu konvergentně. Pouze 11,1 % respondentů bylo v řešení úspěšnější, našli více než jedno možné východisko a jejich řešení bylo divergentní.

Úspěšnost respondentů při řešení druhé úlohy byla nízká. Žáci mi při závěrečné diskusi potvrdili, že geometrické úlohy podobného typu dělají jen zřídka. Byla pro ně proto obtížná. Když už jsem jim na tabuli načrtla několik možných řešení, stala se pro ně úloha zajímavou a každý hned přemýšlel, jak by šel čtverec ještě rozdělit, aby dostal požadované čtyři shodné části.

4.6 Testová úloha č. 3

Zadání úlohy č. 3

3. Lenka chtěla poslat pohlednici prarodičům z výletu, ale bohužel zapomněla, jaké číslo má jejich dům. Věděla, že číslo je dvojciferné a obsahuje číslice 8 nebo 9. Kolik čísel mohla Lenka sestavit při použití pouze těchto číslic?

Třetí divergentní úlohu představuje slovní úloha kombinatorická. Každý žák se jistě již někdy ocitl v situaci, kdy potřeboval vytvořit kombinace nějakých číslic. Tato úloha vychází z reálné situace, žák by si tak měl lépe představit uvedený problém. Předpokládám, že žáci nebudou psát žádný zápis a přistoupí rovnou k samotnému řešení úlohy. Úloha není záměrně složitá, aby nebyla pro žáka demotivující.

Aby žák vyřešil úlohu úspěšně, musí vytvořit všechny čtyři kombinace číslic. Předmětem analýzy bude, zda žák vyřešil úlohu konvergentně, či divergentně. V případě divergentního řešení dále rozeberu, jestli žák našel všechna, nebo alespoň více než jedno řešení.

4.6.1 Možná řešení úlohy

Divergentní řešení:

Řešení této úlohy bude divergentní, pokud žák najde všechna, nebo více než jedno řešení. Předpokládám, že naleznou všechna čtyři nebo dvě řešení. Jedná se tedy pouze o sudý počet možných řešení. Lichý počet kombinací při divergentním řešení nepředpokládám, jelikož pokud žák objeví kombinací číslic 8 a 9 číslo 89, zapíše i číslo 98 a naopak. Stejně tak, pokud objeví kombinaci číslic 8 a 8 číslo 88, zapíše i číslo 99 a naopak.

Správné řešení: 89, 98, 88, 99

Odpověď: Lenka mohla sestavit čtyři čísla.

Uvedené řešení lze považovat za jediné správné (úplné).

Neúplné řešení č. 1: 89, 98

Odpověď: Lenka mohla sestavit dvě čísla.

Neúplné řešení č. 2: 88, 99

Odpověď: Lenka mohla sestavit dvě čísla.

Konvergentní řešení:

Za konvergentní řešení budu považovat odpověď, kde žák uvede pouze jednu vytvořenou kombinaci, tudíž jedno z čísel 89, 98, 88 nebo 99.

4.6.2 Řešení respondentů

Divergentní řešení:

Respondent č. 2 vyřešil úlohu divergentně, a jelikož našel všechny čtyři kombinace číslic 8 a 9, vyřešil úlohu správně. Vzhledem k úspěšnosti řešení dané úlohy můžeme předpokládat, že respondent č. 2 a další respondenti, kteří byli stejně úspěšní, přistoupili k jejímu řešení tvořivěji, než respondenti ostatní.

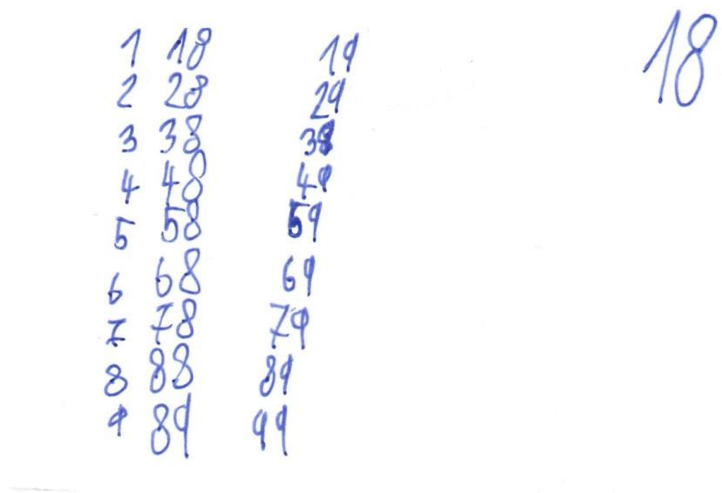
Respondent č. 5 našel dvě řešení kombinatorické úlohy, můžeme tedy říci, že ji vyřešil divergentně. Našel totiž více než jedno řešení. Tento žák zapsal rovnou odpověď, kde uvedl dvě čísla – 89 a 98. Řešení není ovšem úplné.

Respondent č. 6 vyřešil úlohu také divergentně, uvedl ale jiné kombinace čísel – 88 a 99. Jeho řešení ale není, stejně tak jako u předchozího případu, úplné.

Konvergentní řešení:

Respondent č. 10 vyřešil úlohu konvergentně, našel totiž pouze jedno řešení úlohy. Zapsal pomocí kombinace číslic 8 a 9 jediné číslo, a to 89. Stejné řešení napsal ještě jeden respondent. Pouze ti dva vyřešili úlohu konvergentně. Je pozoruhodné, že oba tito autoři konvergentního řešení zapsali právě číslo 89 a našli tak tuto, stejnou kombinaci. Domnívám se, že uvedenou kombinaci vytvořili na základě zadání, kde stálo: obsahuje číslice 8 nebo 9. Kdyby byla čísla v zadání zaměněná, jejich řešením by bylo nejspíš číslo 98.

Chybné řešení:



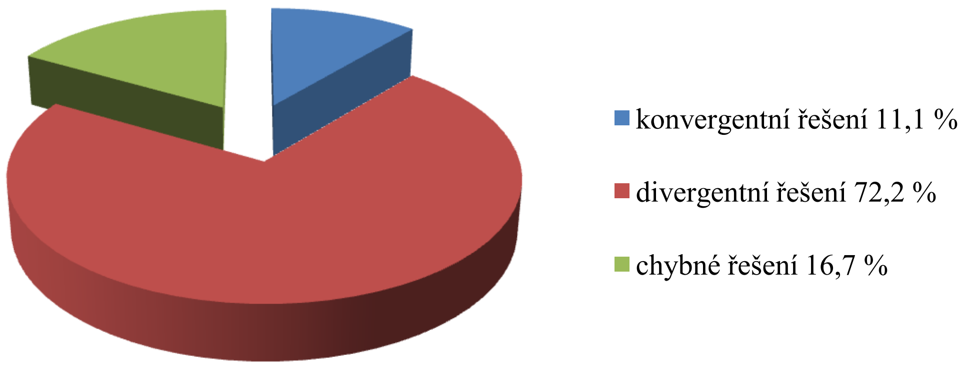
Respondent č. 11 si přečetl špatně zadání, a proto vyřešil úlohu chybně. V zadání úlohy jasně stojí, že Lenka mohla k sestavení čísla použít pouze číslice 8 a 9. Tento respondent ale vytvořil všechny kombinace číslic 1 - 9, aby získal požadovaná dvojciferná čísla. Ta nakonec spočítal a výsledkem mu bylo číslo 18. Navíc se dopustil chyby, jelikož zapsal místo čísla 98 číslo 89, které má tím pádem v zápise dvakrát.

Řešení respondenta č. 11 nebylo sice správné, ale pokud bych měla analyzovat jeho způsob myšlení z hlediska poznávacích procesů, jeho myšlení mělo divergentní charakter. Uvědomoval si, že úloha má více řešení, pouze si přečetl špatně zadání úlohy. Domnívám se, že by si řešení opravil, pokud bych ho požádala, aby si ještě jednou přečetl zadání.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení	Chybné řešení
Počet žáků	2	13	3

Tabulka č. 3.1: Vyhodnocení řešení 3. divergentní úlohy.

V tabulce č. 3.1 najdeme shrnutí použitého způsobu řešení třetí divergentní úlohy. Konvergentně ji vyřešili pouze 2 respondenti a výsledkem jim byla jedna kombinace čísel, konkrétně číslo 89. 13 respondentů úlohu vyřešilo divergentně, jelikož našli více než jedno možné řešení. Zbylí 3 respondenti úlohu vyřešili chybně.



Graf č. 3.1: Vyhodnocení řešení 3. divergentní úlohy.

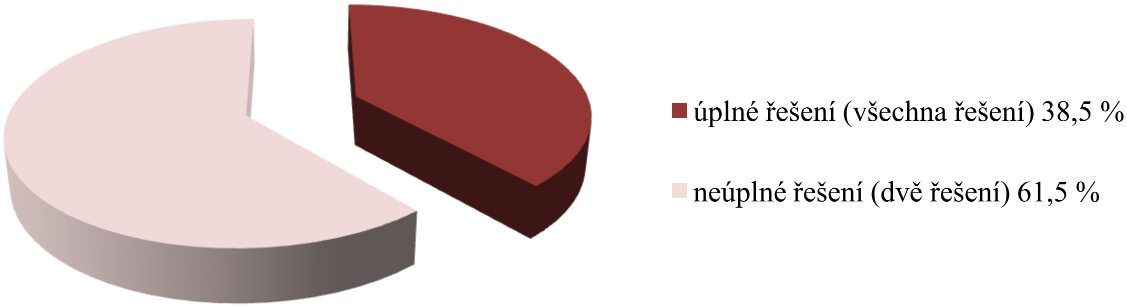
Graf č. 3.1 znázorňuje procentuální hodnoty použitého způsobu řešení třetí divergentní úlohy. 11,1 % respondentů vyřešilo úlohu konvergentně a 72,2 % divergentně. Několik procent respondentů se dopustilo chybného řešení, přesně 16,7 %.

Následně se budu zabývat samotnou analýzou všech třinácti respondentů, kteří úlohu vyřešili divergentně (72,2 %). Vyhodnotím tak, jak byli úspěšní při jejich divergentním řešení. Bude mě zajímat, zda tito respondenti našli všechna řešení úlohy (úplné řešení), nebo jestli našli pouze jejich část (neúplné řešení). Pro tyto účely jsem sestavila následující tabulku č. 3.2 a graf č. 3.2.

Divergentní řešení	Úplné řešení (89, 98, 88, 99)	Neúplné řešení (89 a 98, nebo 88 a 99)
Počet žáků	5	8

Tabulka č. 3.2: Vyhodnocení úspěšnosti žáků při divergentním řešení úlohy č. 3.

Tabulka č. 3.2 představuje vyhodnocení úspěšnosti žáků při divergentním řešení dané úlohy. 5 respondentů našlo všechna řešení a byli tak nejúspěšnější. 8 žáků vytvořilo pouze dvě číselné kombinace.



Tabulka č. 3.2: Vyhodnocení úspěšnosti žáků při divergentním řešení úlohy č. 3.

Jak znázorňuje graf č. 3.2, 38,5 % respondentů našlo všechna čtyři řešení dané úlohy – čísla 89, 98, 88 i 99, jiný zase pouze dvě řešení – 89 a 98, nebo 88 a 99. Úspěšnost žáků, kteří řešili třetí úlohu divergentně, hodnotím kladně, jelikož většina našla všechna řešení.

Úloha se mohla zdát pro žáky 5. ročníku příliš jednoduchá, jak ale ukázal výzkum, ne všichni si s ní dokázali poradit. Při závěrečné diskusi nikdo neměl žádné připomínky. Pouze žáci, kteří neobjevili všechna řešení, byli překvapeni, když se dozvěděli, že jejich řešení nebylo úplné.

4.7 Testová úloha č. 4

Zadání úlohy č. 4

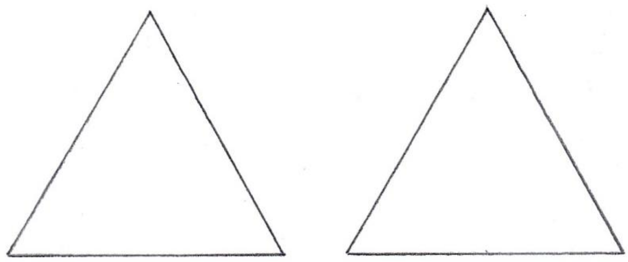
4. Pavel měl za domácí úkol rýsovat trojúhelníky. Celkem použil při rýsování 6 úseček. Kolik trojúhelníků narýsoval?

Čtvrtou úlohu v testu představovala úloha geometrická. Geometrická byla v případě, kdy se žák skutečně pustil do rýsování, či načrtnutí úseček a úlohu tak vyřešil geometrickou cestou. Pokud si ovšem zpaměti spočítal, že 6 : 3 = 2 a rovnou napsal odpověď „Narýsoval dva trojúhelníky", došel k výsledku pomocí základní početní operace dělení a úloha je pro něj aritmetická. Domnívám se, že nejčastěji žáci využijí kombinovaný postup, kdy si aritmeticky spočítají, že Pavel narýsoval dva trojúhelníky a poté je i narýsují.

Otázku jsem mohla formulovat více způsoby. Pokud bych položila otázky typu „Kolik trojúhelníků mohl narýsovat?", „Kolik trojúhelníků narýsoval?" „Má úloha více řešení?", podnítila bych tak žáka k divergentnímu řešení úlohy. Záměrně jsem otázku formulovala takovým způsobem, abych zjistila, zda jsou žáci sami schopni úlohu vyřešit divergentně.

4.7.1 Možná řešení úlohy

Konvergentní řešení:



Pokud žák narýsuje pomocí šesti úseček dva trojúhelníky, znamená to, že úlohu vyřešil konvergentně. Žák si jednoduše zpaměti vypočítá za pomoci základní početní operace dělení příklad 6 : 3 = 2 a poté narýsuje dva trojúhelníky. Hovoříme tedy o konvergentním řešení dané úlohy.

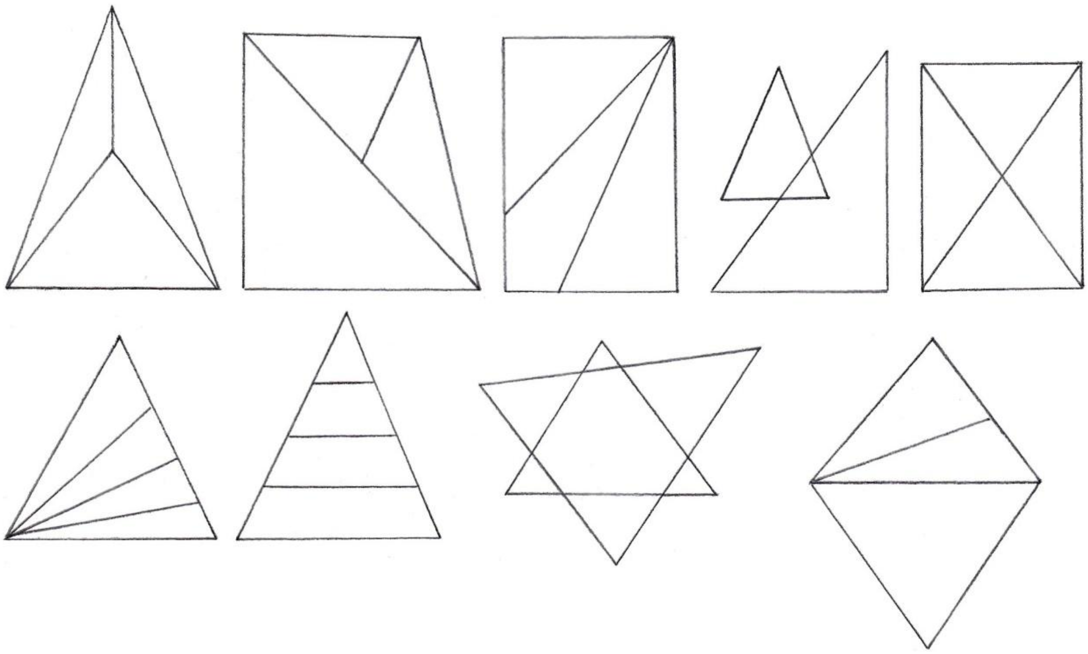
Odpověď:

Pavel mohl narýsovat dva trojúhelníky.

Divergentní řešení:

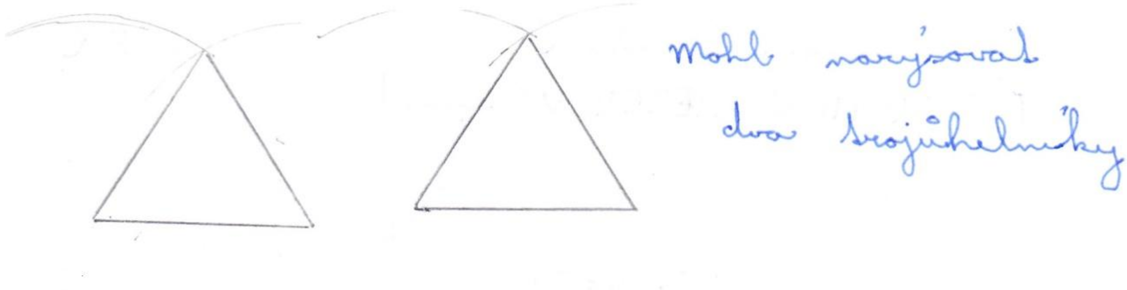
Pokud žák zapojí svoje kreativní myšlení a najde tak více trojúhelníků, které lze narýsovat pomocí šesti úseček, vyřeší úlohu divergentně. Existuje několik možných řešení jak úlohu vyřešit, pro názorný příklad uvádím jen ta vybraná.

Možná řešení:



4.7.2 Řešení respondentů

Konvergentní řešení:

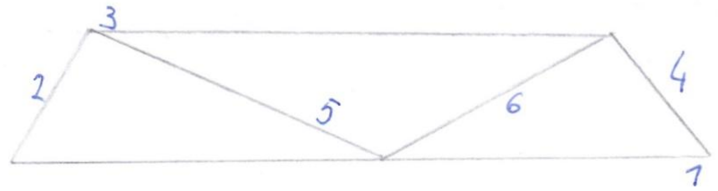


Respondent č. 12 vyřešil úlohu konvergentně, stejně tak jako většina jeho spolužáků. Našel pouze jediné řešení, kdy výsledkem shledal pouze dva trojúhelníky. Jelikož se domníval, že úlohu vyřešil správně, dál ji neřešil.

Narýsoval dva trojúhelníky

Respondent č. 13 užil zjevně pamětného výpočtu 6 : 3 = 2 a tím pro něj byla úloha vyřešená. Nepovažoval vůbec za nutné si úlohu geometricky znázornit. Našel tedy jedno východisko úlohy a jeho řešení tak bylo, stejně jako u respondenta č. 14, konvergentní.

Divergentní řešení:



Narýsoval pouze 3 trojúhelníky.

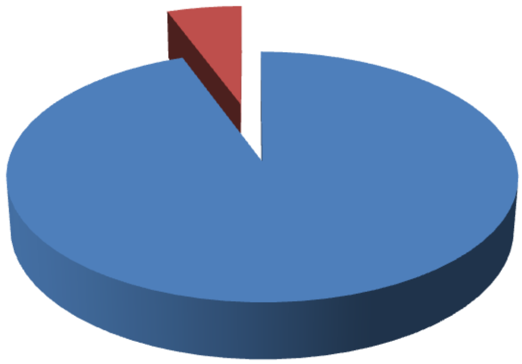
Respondent č. 2 jako jediný vyřešil tuto úlohu divergentně. Využil strategii grafického znázornění, která mu pomohla tvořivě přemýšlet a naleznout tak více jak dva trojúhelníky.

Jelikož jsem si během průzkumného šetření všimla, že tento žák jako jediný úlohu vyřešil nestandardním způsobem, divergentně, zeptala jsem se jej, jak přišel na tento způsob řešení. Zajímala jsem se, z jakého důvodu to byl právě on, který nalezl jiné řešení, než jeho spolužáci. Odpověděl mi, že se už nějaký čas skoro každý den připravuje na přijímací řízení školy druhého stupně pomocí SCIO testů z matematiky, tudíž má v řešení podobných úloh jisté zkušenosti.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení
Počet žáků	17	1

Tabulka č. 4: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 4. úlohy.

Tabulka č. 4, shrnující analýzu řešení čtvrté divergentní úlohy prokázala, že ze všech oslovených 18 žáků, kteří řešili úlohu, ji 17 žáků vyřešilo konvergentně a pouze 1 žák divergentně. Při konvergentním řešení žáci narýsovali dva trojúhelníky a dopsali odpověď, někteří zapsali rovnou pouze odpověď, aniž by úlohu znázornili graficky.



Graf č. 4: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 4. úlohy.

Graf č. 4 vyjadřuje, kolik procent ze všech osmnácti respondentů řešilo úlohu divergentně a kolik konvergentně. Pouze 5,6 % odpovídá konvergentnímu řešení, zbytek, čili 94,4 %, řešení divergentnímu.

Překvapilo mě, že pouze jeden žák se neuspokojil s řešením, které uvedla naprostá většina jeho spolužáků a nalezl tak netradiční řešení předložené úlohy. Domnívala jsem se, že žákům bude podezřelé, jak lehce úlohu vyřešili. Očekávala jsem, že více projeví svoji tvořivost a objeví tak různá originální řešení. Úloha byla pro žáky obtížná, jelikož se s podobnými úlohami setkávají jen zřídka a nejsou tak zvyklí na jejich netradiční způsoby řešení. Jelikož úloha žáky nenabádala k více možným řešením, našli většinou tu nejjednodušší cestu, která se jim nabízela a považovali tím úlohu za vyřešenou.

Na konci hodiny jsem s žáky diskutovala i o této úloze. Všichni si byli jisti, že jejich řešení je správné, ovšem do doby, než respondent č. 2 znázornil na tabuli jeho řešení. Poté nastala diskuse, kdy žáky napadala i jiná, originální řešení. Úloha se pro ně stala rázem zajímavou a motivovala je k dalším možnostem řešení.

Pokud bych měla zhodnotit celkovou úspěšnost, projevenou tvořivost a s tím spojené divergentní myšlení při řešení této úlohy, dopadla úloha nejhůře ze všech šesti divergentních úloh v testu. Domnívám se, že žáci úlohu viděli spíše jako aritmetickou, než geometrickou, a proto je vůbec nenapadla možnost, že by úloha mohla mít více řešení. Spočítali si jednoduchý aritmetický příklad a tím pro ně byla úloha vyřešená. Překvapilo mě, že žákům nebylo nijak nápadné, jak snadno úlohu vyřešili.

4.8 Testová úloha č. 5

Zadání úlohy č. 5

5. Jirka měří 140 cm. Chce se podívat přes plot vysoký 180 cm. Kolik cihel 10 cm vysokých si musí naskládat pod nohy?

Pátou divergentní úlohu představuje úloha slovní. Jedná se o složenou slovní úlohu, k jejichž vyřešení musí řešitel užít dvě a více početních operací. Tato úloha nesleduje procvičení či zopakování nějakého matematického jevu. Jedná se o úlohu na logické uvažování.

Úloha vychází z reálného života. Snad každý z oslovených žáků se již někdy ocitl v situaci, kdy se potřeboval podívat přes nějakou překážku a pochopil tak, že k tomu, aby přes ni viděl, musí být prostě vyšší. Výsledek analýzy této úlohy zhodnotí, jak jsou respondenti schopni řešit logickou slovní úlohu.

4.8.1 Možná řešení úlohy

Zápis:

Jirka ………………………. 140 cm

plot ……………………..…180 cm

cihla ……………………….. 10 cm

kolik cihel ………………….. ?

---

180 – 140 = 40 - žák si spočítá, o kolik centimetrů je plot vyšší, než Jirka

40 : 10 = 4 - následně získaný rozdíl vydělí výškou jedné cihly a získá tak počet cihel

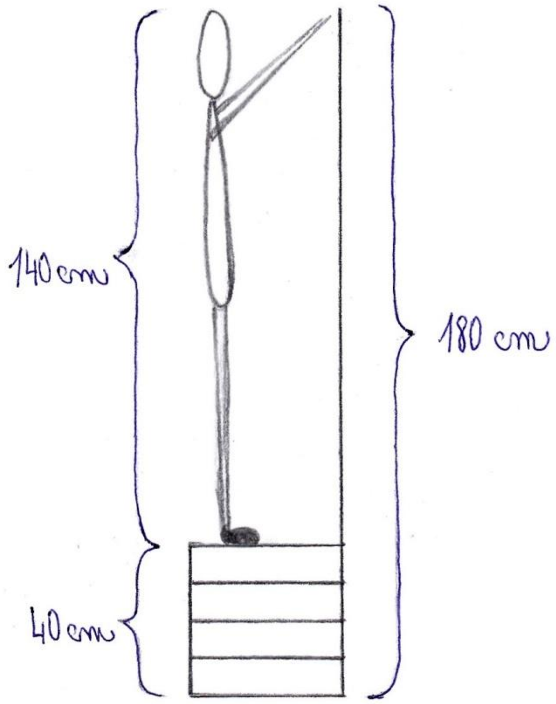
Konvergentní řešení:

Řešení úlohy bude konvergentní v případě, že si žák nedokáže představit situaci v realitě a vyřeší ji tradičním způsobem, použitím známého algoritmu. Takový výpočet pak bude špatný, jelikož nebude odpovídat realitě. Pokud by si Jirka, vysoký 140 cm, naskládal pod nohy 4 cihly, měřící na výšku 40 cm, byl by stejně vysoký jako plot, přes který by se chtěl podívat. Takové řešení je tedy chybné.

Odpověď:

Jirka si musí naskládat pod nohy 4 cihly.

Žákova odpověď by pak znázorňovala tuto situaci, kdy je Jirka stejně vysoký jako plot a proto přes něj nic nevidí:



Divergentní řešení:

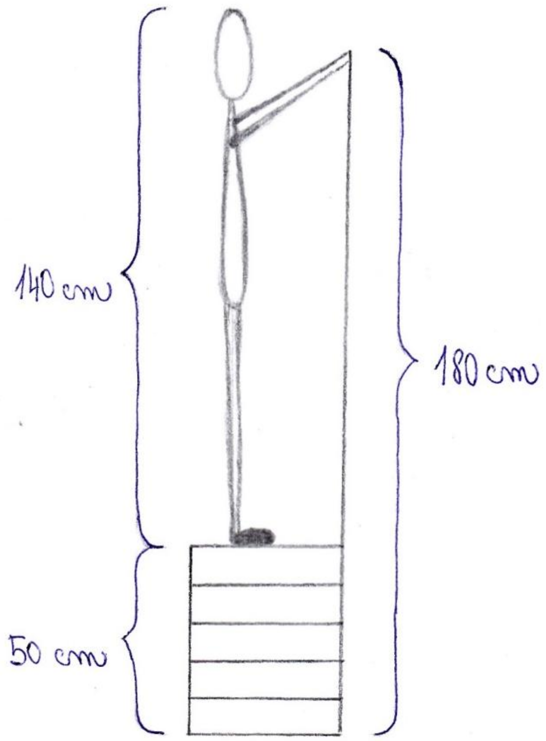
Žák vypočítá úlohu divergentně, pokud si situaci dokáže reálně představit a logicky dojde k závěru, že Jirkovi nebude stačit, aby si pod nohy naskládal 4 cihly. Pak by byl totiž stejně vysoký jako plot a neviděl by přes něj. Pokud by respondent učinil tento závěr, projevil by tak, že je schopen logického, kreativního uvažování a není závislý pouze na osvojených algoritmech.

Úloha je divergentní, jelikož má více řešení. Předpokládám, že pokud respondenti vyřeší úlohu divergentně, dojdou k závěru, že Jirka si musí naskládat pod nohy 5 cihel. Není to ovšem jediná správná možnost. Jirka by si mohl pod nohy naskládat např. i 6 nebo 7 cihel. Otázkou by pak ovšem bylo, kdy už by přestala být situace reálná.

Odpověď:

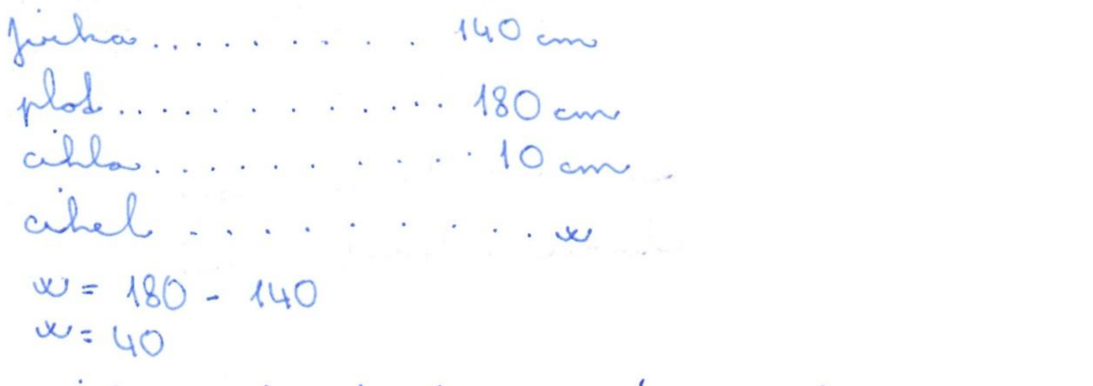
Jirka si musí naskládat pod nohy 5 cihel.

Žákova odpověď by tak znázorňovala tuto reálnou situaci, kdy Jirka vidí přes plot:

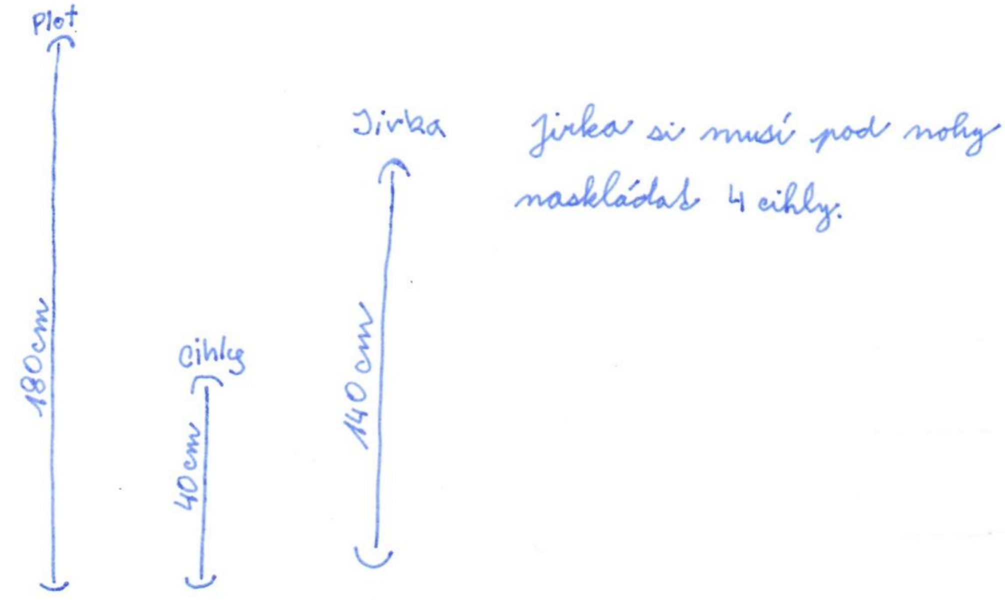


4.8.2 Řešení respondentů

Konvergentní řešení

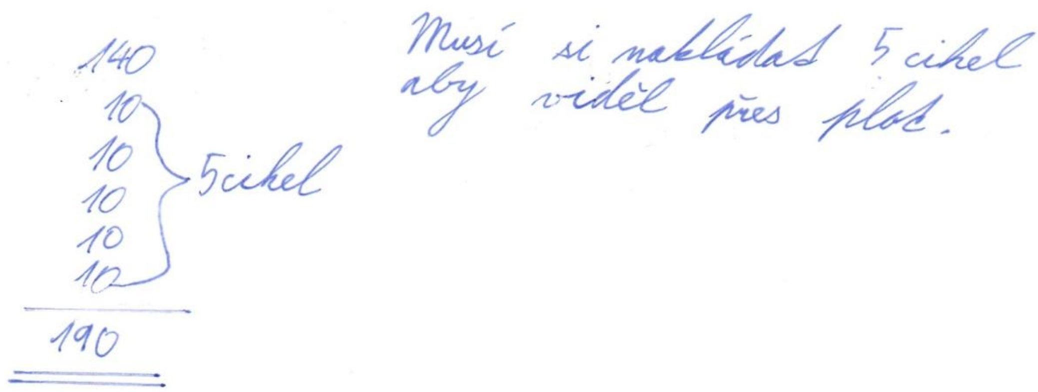

Jirka .... 140 cm
plot .... 180 cm
cihla .... 10 cm
cihel x
x = 180 - 140
x = 40
Jirka si podnohy musí naskládat 4 cihly.

Respondent č. 8 nejprve provedl zápis a poté výpočet, kdy odečetl Jirkovu výšku od výšky plotu. Dostal tak rozdíl, který si zpaměti vydělil desíti a došel k výsledku, že si Jirka musí naskládat pod nohy čtyři cihly. Vykonal tak konvergentní řešení, které se opírá o pouhý algoritmický výpočet bez většího logického, tvořivého uvažování.

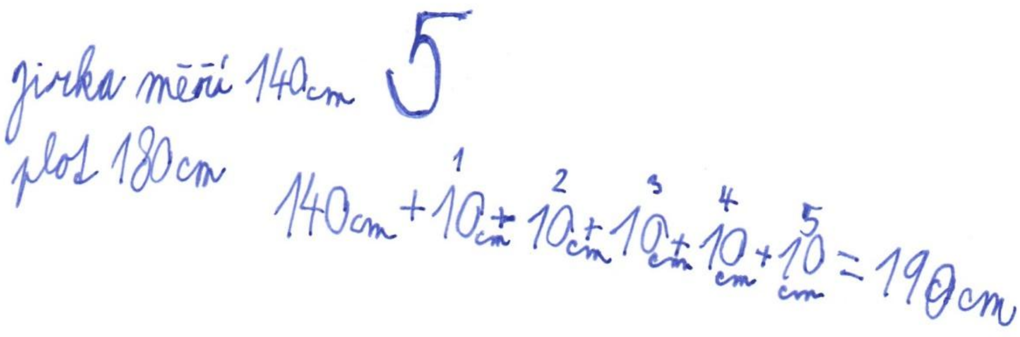


Respondent č. 1 zvolil při řešení jako jediný geometrickou strategii. Zvolení této strategie bylo nejvhodnější, bohužel nákres, který si žák vytvořil, nebyl natolik přesný, aby z něj žák vydedukoval správné řešení. Nákres představuje spíše zadání, než samotné řešení úlohy. Jeho řešení má proto také konvergentní charakter.

Divergentní řešení



Respondent č. 3 vyřešil úlohu úspěšně. Provedl stručný zápis, kde uvedl Jirkovu výšku a pod tento údaj zapisoval výšku jednotlivých cihel. Správně pod Jirku, neboli pod číslo, které představuje jeho výšku, zapsal pět cihel. Logicky přišel na to, že Jirka musí být vyšší než plot, přes který se chce podívat. Správné řešení doplnil i o stručnou odpověď. Dokázal si představit konkrétní situaci v reálném životě a to ho přivedlo k úspěšnému řešení.

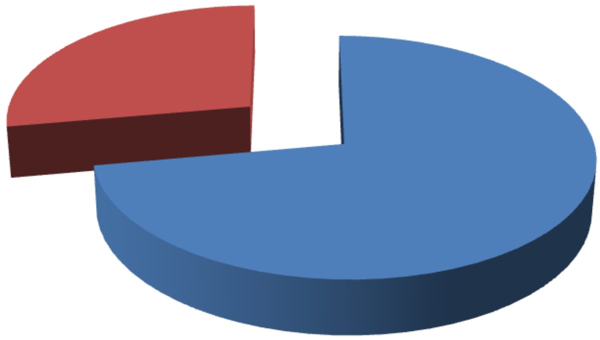

jirka měří 140cm 5
plot 180cm
140cm + 10 cm + 10 cm + 10 cm + 10 cm + 10 cm = 190cm

Respondent č. 11 vyřešil úlohu zpaměti a napsal rovnou výsledek. Jelikož jsem si toho všimla ještě během výzkumu, požádala jsem ho, aby mi dopsal, jak k tomuto výsledku došel. Zapsal tedy krátký zápis, kde uvedl výšku Jirky a výšku plotu, přes který se chce Jirka podívat. Pak provedl výpočet. Uvedl Jirkovu výšku a přičítal k ní postupně výšky pěti cihel. Nakonec vše sečetl a dostal výsledek 190 cm, představující Jirkovu výšku, se kterou se už bude moci podívat přes plot.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení
Počet žáků	13	5

Tabulka č. 5: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 5. úlohy.

V tabulce č. 5 jsou uvedeny počty žáků, jichž řešení bylo divergentní, nebo konvergentní. Pátou divergentní úlohu řešilo všech 18 respondentů. Z toho 13 žáků úlohu vyřešilo konvergentně a 5 divergentně. Konvergentní řešení bylo častější, většina žáků tedy při řešení úlohy použila známý algoritmus a nepředstavila si konkrétní situaci. Proto bylo jejich řešení chybné. 5 žáků nalezlo pomocí logického myšlení správnou odpověď a vyřešili tak úlohu divergentně.



Graf č. 5: Vyhodnocení použitého způsobu řešení 5. úlohy.

Graf č. 5 znázorňuje procentuální vyjádření použitého způsobu řešení páté divergentní úlohy, kdy 72,2 % respondentů vyřešilo úlohu konvergentně a zbylých 27,8 % divergentně. Vzhledem k povaze zadání lze považovat za správné řešení pouze ty úlohy, které byly řešeny divergentní cestou a jejichž východiskem je odpověď, kdy si Jirka musí naskládat pod nohy pět cihel, aby viděl přes plot.

V závěrečné diskusi jsme opět hovořili o možných řešeních. Úlohu jsem žákům nakreslila na tabuli, stejně jako v úvodu této podkapitoly. Když jsem Jirkovi nakreslila pod nohy čtyři cihly a žáci spatřili, že Jirka přes plot nevidí, pochopili hned, že by si pod sebe musel vzít ještě jednu cihlu navíc.

V jiných úlohách dělalo žákům problém, zapsat do odpovědi různé možnosti řešení. Tato úloha neočekávala více možných řešení, ale sledovala, zda budou žáci kreativní a odhalí tak správné řešení úlohy za pomoci logického myšlení, nebo jestli ji budou řešit algoritmicky bez představení si konkrétní situace. V takovém případě by bylo jejich řešení chybné, v praxi nereálné. Celkové řešení respondentů dané úlohy hodnotím jako neúspěšné, jelikož většina nebyla schopna logického myšlení, nenakreslili si žádný nákres, který by je dovedl ke správnému výsledku.

4.9 Testová úloha č. 6

Zadání úlohy č. 6

6. Kosmonautovi se v noci zdálo, že jeho ložnici navštívili marťani. Bohužel si už moc nepamatoval, jak vypadali. Vzpomněl si ale na marťana, který mu říkal, že přiletěli z planety, kde žijí pouze dvojnozí a trojnozí marťani. Z neznámého důvodu kosmonaut také věděl, že v jeho ložnici bylo celkem 18 marťanských nožiček. Kolik dvojnohých a trojnohých marťanů mohlo být v jeho snu (Kopka, 1999)?

Šestou slovní úlohu představuje úloha diofantovská, jíž řešení se hledá v oboru celých čísel. K nalezení všech možných řešení dané úlohy museli žáci využít operaci sčítání, odčítání, násobení i dělení.

Jako poslední divergentní úlohu jsem do testu záměrně zařadila slovní úlohu o mimozemšťanech, abych žáky přenesla do imaginárního světa fantazie a podnítila tak více jejich kreativní myšlení.

4.9.1 Možná řešení úlohy

Divergentní řešení:

Pokud se žákům podaří nalézt všechna, nebo více než jedno řešení dané úlohy, bude jejich řešení divergentní. Domnívám se, že nejlepší strategií, vedoucí k jejímu úspěšnému vyřešení, by bylo vytvoření jednoduché tabulky:

Počet trojnohých	**0**	1	**2**	3	**4**	5	**6**
Počet nohou trojnohých	0	3	6	9	12	15	18
Počet dvojnohých	**9**	-	**6**	-	**3**	-	**0**
Počet nohou dvojnohých	18	-	12	-	6	-	0

V ložnici mohli být pouze samí dvojnozí marťani, jelikož číslo 18 je násobek čísla 2.
-> **1. možné řešení**.
Pokud by byl v ložnici jeden trojnohý marťan, počet nohou by byl 18 – 3 = 15. Jelikož číslo 15 není násobek čísla 2, není možné, aby zbytek nožiček patřil marťanům dvojnohým. **Řešení** proto **neexistuje**.
Pokud by byli v ložnici dva trojnozí marťani, počet nohou by byl 18 – 6 = 12. Jelikož číslo 12 je násobek čísla 2, mohli být v ložnici celkem dva trojnozí a šest dvojnohých marťanů.
-> **2. možné řešení**.
Pokud by byli v ložnici tři trojnozí marťani, počet nohou by byl 18 – 9 = 9. Jelikož číslo 9 není násobek čísla 2, není možné, aby zbytek nožiček patřil marťanům dvojnohým. **Řešení** proto **neexistuje**.
Pokud by byli v ložnici čtyři trojnozí marťani, počet nohou by byl 18 – 12 = 6. Jelikož číslo 6 je násobek čísla 2, mohli být v ložnici celkem čtyři trojnozí a tři dvojnozí marťani.
-> **3. možné řešení**.
Pokud by bylo v ložnici pět trojnohých marťanů, počet nohou by byl 18 – 15 = 3. Jelikož číslo 3 není násobek čísla 2, není možné, aby zbytek nožiček patřil marťanům dvojnohým. **Řešení** proto **neexistuje**.
V ložnici mohli být také pouze samí trojnozí marťani, jelikož číslo 18 je násobek čísla 3.
-> **4. možné řešení**.

Shrnutí možného divergentního řešení:

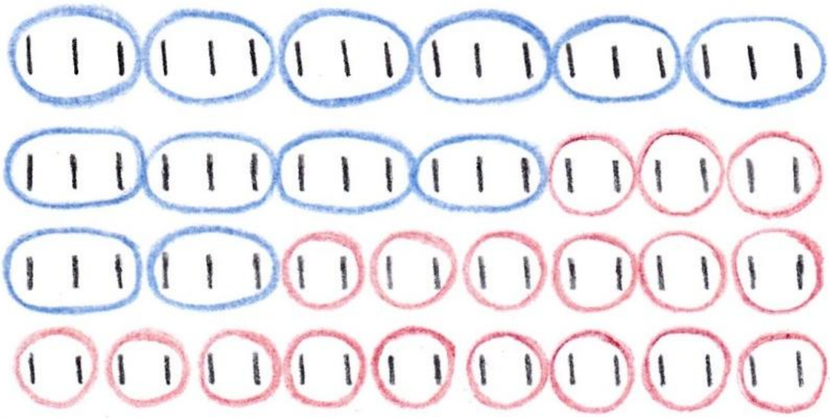
Respondent nalezne všechna řešení (správné řešení): 9 dvojnohých,
2 trojnozí a 6 dvojnohých,
4 trojnozí a 3 dvojnozí,
6 dvojnohých.

Respondent nenalezne všechna, ale více než jedno z uvedených řešení (neúplné řešení).

Správná (úplná) odpověď:

Ve snu mohlo být 9 dvojnohých, 2 trojnozí a 6 dvojnohých, 4 trojnozí a 3 dvojnozí a také 6 dvojnohých marťanů.

Respondenti by mohli úlohu řešit také pomocí strategie pokus – omyl, kdy by prostřednictvím nesystematického experimentování našli některá, třeba i všechna řešení. Mohli by tak činit pomocí symbolického nákresu osmnácti čárek (nožiček), kdy by kroužkovali nožičky po třech a po dvou. Pro lepší orientaci by bylo vhodné barevně odlišit trojnohé a dvojnohé marťany, jako je tomu v následující ukázce:



Konvergentní řešení:

Žák vyřeší úlohu konvergentně v případě, že nalezne pouze jedno řešení úlohy. Zapíše buď možnost, že jsou v ložnici jen dvojnozí, jen trojnozí, nebo uvede jen jednu ze dvou možných variant, kdy mohou být v ložnici trojnozí i dvojnozí marťani.

Možná odpověď č. 1:

V jeho snu mohlo být 9 dvojnohých marťanů.

Možná odpověď č. 2:

V jeho snu mohli být 2 trojnozí a 6 dvojnohých marťanů.

Možná odpověď č. 3:

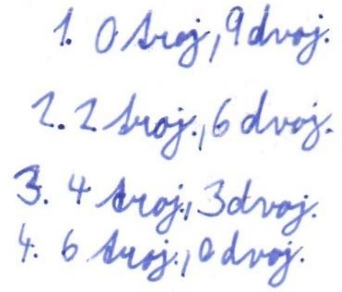
V jeho snu mohli být 4 trojnozí a 3 dvojnozí marťani.

Možná odpověď č. 4:

V jeho snu mohlo být 6 dvojnohých marťanů.

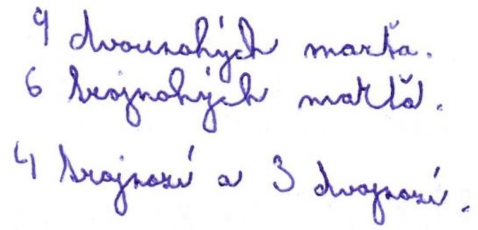
4.9.2 Řešení respondentů

Divergentní řešení:



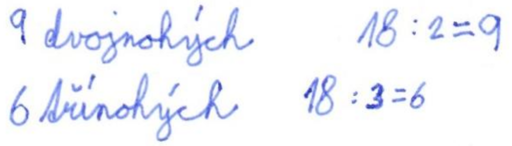
1. 0 troj.,9 dvoj.
2. 2 troj.,6 dvoj.
3. 4 troj.,3 dvoj.
4. 6 troj.,0 dvoj.

Respondent č. 6 vyřešil úlohu jako jediný správně, jelikož našel všechna čtyři řešení. Jako první zapsal možnost, kdy mohou být v ložnici pouze dvojnozí marťani, dále obě možnosti, kdy tam mohou být trojnozí i dvojnozí marťani a jako poslední uvedl, že v ložnici mohou být pouze marťani trojnozí. Postupoval systematicky, podobně, jako jsem uvedla výše v tabulce. K vyřešení úlohy nepotřeboval ani nákres, ani tabulku, všechny potřebné aritmetické operace si dokázal spočítat zpaměti.



9 dvounohých marťa.
6 trojnohých marťů.
4 trojnozí a 3 dvojnozí.

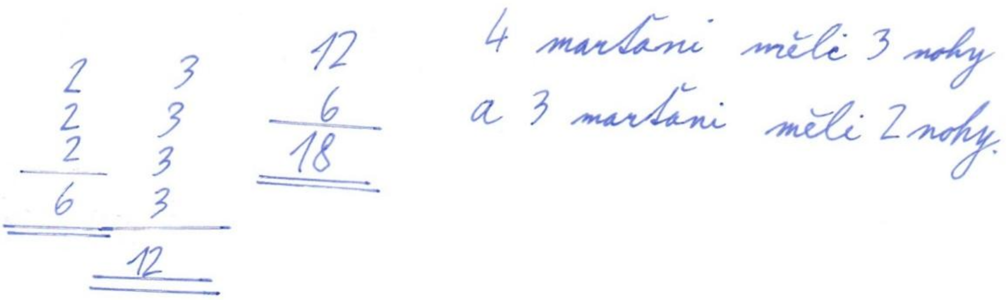
Respondent č. 14 vyřešil úlohu také divergentně, ale řešení nepovažuji za správné, jelikož není úplné. Jako jediný našel tři řešení z možných čtyř. Nepostupoval systematicky, jako respondent č. 6, proto se mu nepodařilo najít všechna řešení. Nejprve našel obě varianty, kdy se mohli v ložnici nacházet pouze dvojnozí, nebo trojnozí marťani, jako třetí uvedl možnost, kdy se tam mohli nacházet čtyři trojnozí a tři dvojnozí.



9 dvojnohých 18 : 2 = 9
6 třínohých 18 : 3 = 6

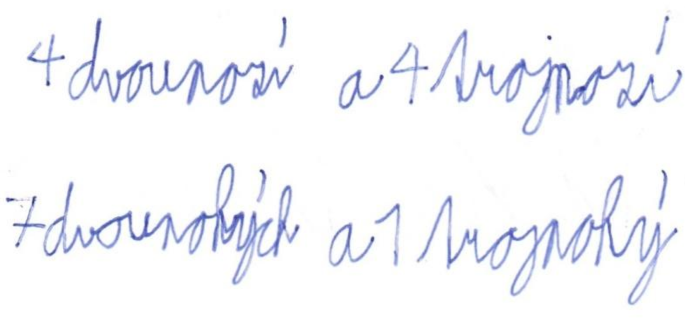
Respondent č. 9 nalezl dvě řešení úlohy, jeho řešení můžeme tedy považovat za divergentní. Jednoduše strategií pokus-omyl zjistil, že číslo dvě i číslo tři jsou násobky čísla osmnáct, a proto v kosmonautově snu mohli být jak pouze dvojnozí, tak i pouze trojnozí marťani.

Konvergentní řešení:



Respondent č. 3 vyřešil poslední testovou úlohu konvergentně, protože našel pouze jediné řešení. Neobjevil možnost, že by se ve snu mohli nacházet pouze trojnozí, nebo pouze dvojnozí marťani, zapsal ale jednu z možných variant, kdy by byli ve snu trojnozí i dvojnozí marťani společně. Nejprve si pod sebe zapsal tři číslice 2, symbolizující tři dvojnohé marťany a poté čtyři číslice 3, které symbolizují čtyři trojnohé marťany. Nakonec zapsal součet nohou dvojnohých i trojnohých marťanů. Udělal si tak zkoušku. Domnívám se, že jeho řešení vychází ze strategie pokus – omyl. Pokud by totiž pod sebe nejprve zapsal pouze dvě číslice 2, následně by zjistil, že by úloha neměla řešení.

Chybné řešení:

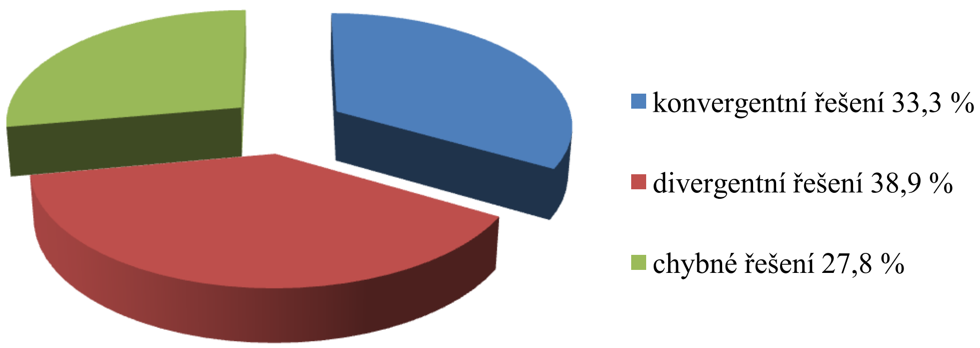


Respondent č. 15 vyřešil úlohu chybně. Ani jedna jeho uvedená varianta řešení není správná. Nezapsal si žádný pomocný výpočet, žádnou tabulku, ani jiné znázornění, pouze zkusil uvést nějaké řešení, které naprosto postrádá smysl.

Způsob řešení	Konvergentní řešení	Divergentní řešení	Chybné řešení
Počet žáků	6	7	5

Tabulka č. 6.1: Vyhodnocení řešení 6. divergentní úlohy.

Tabulka č. 6.1 přináší shrnutí použitého způsobu řešení poslední divergentní úlohy všech respondentů, kteří se zúčastnili výzkumného šetření. 6 respondentů vyřešilo úlohu konvergentně a našlo pouze jedno řešení, 7 respondentů ji vyřešilo divergentně, jelikož nalezli více než jedno řešení. Zbylých 5 respondentů nenašlo buď žádné řešení, nebo úlohu vyřešili chybně.



Graf č. 6.1: Vyhodnocení řešení 6. divergentní úlohy.

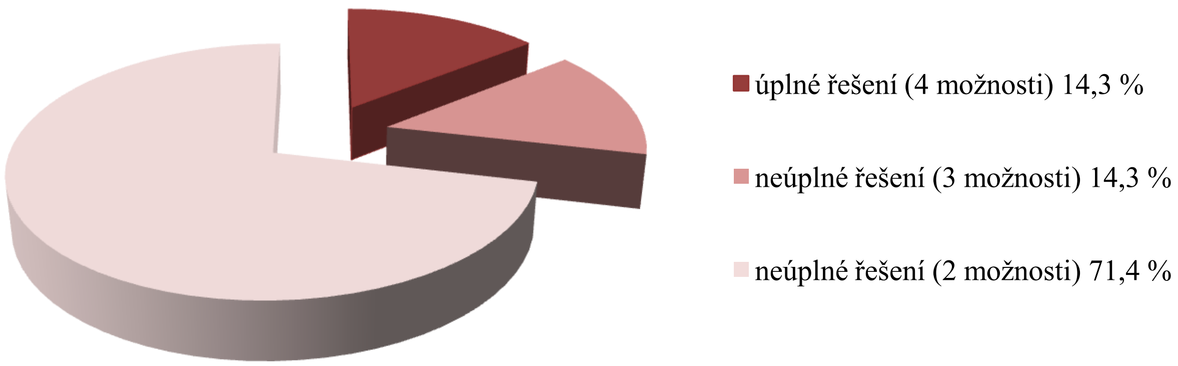
Graf č. 6.1 procentuálně vyjadřuje uvedené hodnoty z tabulky č. 6.1. Šestou divergentní úlohu vyřešilo konvergentně 33,3 % respondentů, 38,9 % respondentů ji vyřešilo divergentně a 27,8 % respondentů úlohu vyřešilo chybně nebo vůbec.

Nyní se budu zabývat analýzou všech sedmi respondentů, kteří úlohu vyřešili divergentně (38,9 %). Vyhodnotím tak, jak bylo jejich divergentním řešení úspěšné. Analýza se bude týkat zjištění, zda tito respondenti našli všechna řešení úlohy (úplné řešení), nebo jestli našli pouze jejich část (neúplné řešení). Pro tyto účely jsem sestavila následující tabulku č. 6.2 a graf č. 6.2, které budu dále rozebírat.

Divergentní řešení	Úplné řešení	Neúplné řešení	
	(4 možnosti)	(3 možnosti)	(2 možnosti)
Počet žáků	1	1	5

Tabulka č. 6.2: Vyhodnocení úspěšnosti žáků při divergentním řešení úlohy č. 6.

Tabulka č. 6.2 vyjadřuje, jak byli respondenti úspěšní při divergentním řešení dané úlohy. K úplnému řešení dospěl pouze 1 respondent, jelikož našel všechna čtyři možná východiska řešení. 6 respondentů vyřešilo úlohu divergentně, ale neobjevilo všechna řešení, proto považuji jejich řešení za neúplné. 1 respondent našel tři možnosti a byl tak druhý nejúspěšnější, 5 respondentů pak uvedlo dvě možná řešení.



Graf č. 6.2: Vyhodnocení úspěšnosti žáků při divergentním řešení úlohy č. 6.

Graf č. 6.2 obsahuje procentuální vyjádření hodnot z tabulky č. 6.2. Ze všech respondentů, kteří úlohu vyřešili divergentně, 14,3 % našlo všechna čtyři možná řešení, 14,3 % tři řešení a největší část (71,4 %) představovali respondenti, kteří našli dvě řešení dané úlohy.

Když jsem po odevzdání všech testů přistoupila k diskusi o této úloze, podotkla jsem na úvod, že úloha mohla být pro někoho obtížnější. V tom se mnou žáci většinou nesouhlasili, protože jim úloha přišla jednoduchá. Až po zjištění, že úloha měla více řešení, pochopili, že moje poznámka na úvod byla oprávněná. Řešení všech respondentů této úlohy hodnotím průměrně, jelikož konvergentní i divergentní řešení bylo poměrně v rovnováze.

Závěr

Diplomová práce se zabývá analýzou divergentních úloh v matematice, řešených žáky 5. ročníku základní školy. Teoretické poznatky a sestavený nestandardizovaný didaktický test byly nezbytné pro naplnění cílů praktické části práce.

V teoretické části jsem se za pomoci odborné literatury věnovala problematice divergentního myšlení a jeho vztahu ke kreativitě, dále jsem se zabývala divergentními úlohami v matematice a heuristickými strategiemi řešení problémů. Krátce se zmiňuji i o konvergentních úlohách, které tvoří jakýsi protipól úloh divergentních. Na závěr teoretické části jsem se pokusila zařadit divergentní úlohy do RVP ZV, konkrétně do tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Praktická část se skládá z analýzy nestandardizovaného didaktického testu, který obsahoval šest divergentních úloh s otevřenou širokou odpovědí. První a pátá divergentní úloha je aritmetická, druhá a čtvrtá geometrická, třetí kombinatorická a poslední, šestá úloha, je diofantovská. Získané výsledky z analýzy byly shrnuty a kvantitativně vyhodnoceny. Na vyřešení testu měli žáci 45 minut, ale většina byla hotová dříve. Nestalo se, že by někdo nestihl test během stanoveného času vyplnit.

Na základě provedené analýzy a následného vyhodnocení jsem dospěla k názoru, že žáci 5. ročníku ZŠ Helsinská v Olomouci jsou schopni řešit divergentní úlohy divergentně, více ale upřednostňují standardní způsob řešení, tedy řešení konvergentní. Analýza každé úlohy obsahuje nejprve možná řešení, poté samotná řešení jednotlivých respondentů, doplněná mnou provedeným rozborem a na závěr kvantitativní vyhodnocení kvalitativních dat, doplněné o různé postřehy při výzkumu. Nejvíce úspěšných řešitelů měla třetí kombinatorická úloha, naopak čtvrtá geometrická úloha byla pro žáky nejobtížnější. U třetí a šesté kombinatorické úlohy práce dále vyhodnocuje, zda žáci, kteří úlohu vyřešili divergentně, dospěli k úplnému, nebo jen částečnému řešení. U obou zmiňovaných úloh převládalo neúplné, neboli částečné divergentní řešení. Závěry výzkumného šetření diplomové práce nelze zobecňovat, jelikož se ho zúčastnil statisticky nereprezentativní vzorek.

Stanovené cíle teoretické i praktické části diplomové práce byly naplněny. Práce obsahuje teoretické poznatky týkající se divergentního myšlení, divergentních úloh, strategií řešení problémových úloh a zařazení divergentních úloh do RVP ZV, dále byla provedena analýza řešení divergentních úloh žáků 5. ročníku ZŠ a vyhodnocena úspěšnost jejich řešení.

Při závěrečné diskusi o možných řešeních úloh byli žáci většinou překvapeni, když zjistili, že úlohy měly více řešení. V průběhu testu se mě také často ptali, kterou nalezenou možnost mají uvést jako výsledné řešení. Domnívám se, že konvergentní řešení některých žáků mohlo být následkem toho, že se žáci mnohem častěji v hodinách matematiky setkávají s úlohami, které mají pouze jedno správné řešení. Takové úlohy nerozvíjí jejich přirozenou tvořivost, jelikož dochází k aplikaci již známých algoritmických postupů.

Od 1. 9. 2013 nabývá účinnosti upravený Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, jehož cílem je především naplňování klíčových kompetencí. Jednu z těchto kompetencí představuje kompetence k řešení problémů, kterou by měl učitel matematiky naplňovat právě zařazováním nestandardních úloh do vyučování. Pokud tedy pedagog na 1. stupni ZŠ obohatí hodinu matematiky divergentní úlohou, přispěje nejen k rozvoji kreativity, logického a divergentního myšlení svých žáků, ale bude také naplňovat vzdělávací cíl a klíčové kompetence, především kompetenci k řešení problémů.

Dovolím si tvrdit, že žáci 1. stupně ZŠ ocení vždy něco nového, netradičního, a proto na ně divergentní úloha bude působit také motivačně. Pedagogové mohou vytvořit jednoduše divergentní úlohu z úlohy konvergentní, a to např. vynecháním nějaké podmínky v zadání, která by připouštěla právě více možných řešení. Byla bych velmi ráda, kdyby jim byl nápomocí právě mnou vytvořený didaktický test. Domnívám se, že především učitel na 1. stupni by měl usilovat o to, aby pomocí různých metod rozvíjel přirozenou tvořivost svých žáků.

Seznam pramenů a literatury

DACEY, John S. a Kathleen H. LENNON. *Kreativita*. Praha: Grada Publishing, 2000, 250 s. ISBN 80-716-9903-9.

FICHNOVÁ, Katarína a Eva SZOBIOVÁ. *Rozvoj tvořivosti a klíčových kompetencí dětí: Náměty k RVP pro předškolní vzdělávání.* Praha: Portál, 2007, 130 s. ISBN 978-807-3673-239.

HENDL, Jan. *Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace.* Praha: Portál, 2005, 407 s. ISBN 80-736-7040-2.

CHLEBEK, Petr. *Tvořivost a chyba v matematice*. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2000, 16 s. ISBN 80-702-0069-3.

CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství.* Brno: Paido, 1999, 91 s. ISBN 80-859-3168-0.

KADLČÍKOVÁ, Kateřina. *Komparace řešení matematických úloh u žáků primární školy.* Olomouc, 2010. diplomová práce (Mgr.). UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI. Pedagogická fakulta.

KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1999, 196 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-704-4247-6.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013, 212 s. ISBN 978-80-903625-5-0.

KOŠČ, Ladislav. *Psychológia matematických schopností*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1972, 276 s.

KOŠČ, Ladislav. *Myslenie a inteligencia: Kapitoly zo všeobecnej psychológie*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1986, 124 s.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011, 210 s. ISBN 978-80-7394-307-3.

KUSÁK, Pavel a Pavel DAŘÍLEK. *Pedagogická psychologie - A.* 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, 234 s. ISBN 80-244-0294-7.

LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole.* Praha: Portál, 1999, 199 s. ISBN 80-717-8205-X.

LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Tvořivé vyučování.* Praha: Grada Publishing, 2003, 208 s. ISBN 80-247-0374-2.

MAŇÁK, Josef. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků.* Brno: Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta, 1998, 134 s. ISBN 80-210-1880-1.

NELEŠOVSKÁ, Alena a Hana SPÁČILOVÁ. *Didaktika primární školy*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2005, 254 s. Učebnice. ISBN 80-244-1236-5.

NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ: Určeno pro studující učitelství 1. st. ZŠ v IS i DS PdF UP.* Olomouc: Univerzita Palackého, 1993, 51 s. ISBN 80-706-7294-3.

PETROVÁ, Alexandra. *Tvořivost v teorii a praxi: (učební texty).* Praha: Vodnář, 1999, 169 s. ISBN 80-862-2605-0.

PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování*. Vyd. 5. Praha: Portál, 2008, 380 s. ISBN 978-80-7367-427-4.

PLEVOVÁ, Irena a Alena PETROVÁ. *Obecná psychologie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, 134 s. ISBN 978-80-244-3247-2.

PLHÁKOVÁ, Alena. *Učebnice obecné psychologie*. Praha: Academia, 2008, 472 s. ISBN 978-80-200-1499-3.

ŠVAŘÍČEK, Roman a Klára ŠEĎOVÁ. Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách. Praha: Portál, 2007, 384 s. ISBN 978-80-7367-313-0.

TELCOVÁ, Jana a Lubomír ODEHNAL. Úvod do pedagogické psychologie: Část 1. Brno: Ústav psychologického poradenství a diagnostiky, 2002. Informace. ISBN 80-8656-13-X.

VÁGNEROVÁ, Marie. *Úvod do psychologie*. 2. vyd. Praha: Karolinum, 1999, 210 s. ISBN 80-718-4421-7.

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice: Metodický materiál pro učitele matematiky.* Ostrava: Kraj. pedagog. ústav, 1990, 83 s. ISBN 80-900-1589-1.

Internetové adresy

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2013. 142 s. [cit. 2014-01-05]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/29397/download/.

Obrazový materiál

http://www.health-host.co.uk/10-foods-eat-weight-lifting cvičící mozek

http://cz.123rf.com/photo_10976402_lidska-mozek-va-zkum-a-inteligence-puzzle-s-modra-m-za-a-a-ca-bludia-ta-a-labyrint-ve-tvaru-lidska-h.html hlava s otazníkem

http://cz.clipartlogo.com/image/buildings-house-small-cartoon-homes-houses-estate-real_389010.html dům

http://www.kados.cz/zdici-materialy/429-cihla-plna-palena-cp.html cihla

http://cz.123rf.com/photo_15997814_roztomila-zelena-mimozema-a-an-s-cedulkou-nebo-na-obrazovce-s-copyspace.html dvojnohý marťan

http://zpravy.idnes.cz/foto.aspx?r=domaci&foto1=KUZ2c22fa_UFO_uvod.jpg trojnohý marťan

Seznam příloh

Příloha č. 1

ZAJÍMAVÉ ÚLOHY Z MATEMATIKY

Jméno a příjmení: ……………………………………….. Třída: ……………
Škola: ………………………………………………….

---

1. Mamince je 35 let, babička je o 24 let starší. Teta je starší než maminka, ale mladší, než babička. Kolik let je tetě?

2. Je možné rozdělit čtverec na čtyři shodné části? Načrtni.

3. Lenka chtěla poslat pohlednici prarodičům z výletu, ale bohužel zapomněla, jaké číslo má jejich dům. Věděla, že číslo je dvojciferné a obsahuje číslice 8 nebo 9. Kolik čísel mohla Lenka sestavit při použití pouze těchto číslic?

4. Pavel měl za domácí úkol rýsovat trojúhelníky. Celkem použil při rýsování 6 úseček. Kolik trojúhelníků narýsoval?

5. Jirka měří 140 cm. Chce se podívat přes plot vysoký 180 cm. Kolik cihel 10 cm vysokých si musí naskládat pod nohy?

6. Kosmonautovi se v noci zdálo, že jeho ložnici navštívili marťani. Bohužel si už moc nepamatoval, jak vypadali. Vzpomněl si ale na marťana, který mu říkal, že přiletěli z planety, kde žijí pouze dvojnozí a trojnozí marťani. Z neznámého důvodu kosmonaut také věděl, že v jeho ložnici bylo celkem 18 marťanských nožiček. Kolik dvojnohých a trojnohých marťanů mohlo být v jeho snu?

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Lucie Bendová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	PaedDr. Anna Stopenová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2014

Název práce:	Divergentní úlohy v matematice na 1. stupni základních škol
Název v angličtině:	Divergent tasks in mathematics at primary schools
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá analýzou řešení divergentních úloh v matematice u žáků 5. ročníku ZŠ. Teoretická část obsahuje tři kapitoly. První kapitola uvádí do problematiky divergentního myšlení. Druhá kapitola se věnuje divergentním úlohám v matematice a jejich řešením. Třetí kapitola zařazuje divergentní úlohy do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Praktická část analyzuje pomocí nestandardizovaného didaktického testu jednotlivá řešení divergentních úloh žáků 5. ročníku ZŠ.
Klíčová slova:	divergentní myšlení, kreativita, tvořivý žák, divergentní úlohy, konvergentní úlohy, rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, nestandardní aplikační úlohy a problémy
Anotace v angličtině:	This diploma thesis is focused on the analysis of solutions of divergent tasks in mathematics in the 5th grade of primary school. The theoretical part consists of three chapters. The first chapter introduces the issue of divergent thinking. The second chapter deals with divergent tasks in mathematics and their solutions. The third chapter classifies divergent tasks into the Framework Educational Programme for Primary Education. The practical part analyses different solutions of divergent tasks of 5th graders by using non-standardized didactic test.
Klíčová slova v angličtině:	divergent thinking, creativity, creative student, divergent tasks, convergent tasks, Framework Educational Programme for Primary Education, non-standard application tasks and problems

Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Předloha didaktického testu
Rozsah práce:	74 stran
Jazyk práce:	Český