Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Okrajová úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s jednostrannou podmínkou

Diplomová práce

Bc. Pavel Holšan

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2016

Holšan P., 2016: Okrajová úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s jednostrannou podmínkou. [The boundary value problem for the fourth order homogeneous linear ordinary differential equation with unilateral condition. Mgr. Thesis, in Czech.] – 79 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
Let us have a boundary value problem for the fourth order homogeneous linear ordinary differential equation with constant coefficients, four zero boundary conditions and one additional unilateral condition in the interior of the domain. We prove the existence of a sequence of non-trivial solutions for three types of boundary conditions.

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

České Budějovice, 18. dubna 2016

Poděkování

Mgr. Janu Eisnerovi, Dr., za vstřícný odborný dohled a věnovaný čas.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V této práci se budeme zabývat řešením okrajové úlohy pro homogenní lineární diferenciální rovnici čtvrtého řádu s jednostrannou podmínkou. Tato okrajová úloha je fyzikálně motivována popisem chování pružného tyčového nosníku s danými parametry technické instalace reprezentovanými okrajovými podmínkami, a stlačovaného v jeho podélné ose. Lineární diferenciální rovnice popisující chování takového nosníku má tvar

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),$$

kde parametr $\lambda > 0$ odpovídá tlakové síle působící na nosník v jeho podélné ose, ℓ určuje délku tyčového nosníku a $u(x)$ určuje výchylku nosníku od podélné osy v bodě x. Působištěm tlakové síly nechť je pro představu bod o souřadnicích $[\ell, 0]$ a nosník uvažujme splývající s rovnoběžnou osou, počínající v počátku souřadné soustavy. Vlivem působení tlakové síly, odpovídající parametru λ, se od jistého momentu nosník začíná prohýbat, a to právě způsobem závislým na svém uložení v krajních bodech $[0, 0]$ a $[\ell, 0]$, tj. zadaných okrajových podmínkách. Zatímco v klidovém stavu můžeme i bez hlubšího matematického zkoumání popsat polohu každého bodu nosníku - vzhledem k rovině nosníkem rovnoběžně procházející - funkcí $u(x) \equiv 0$ na intervalu $(0, \ell)$, ve stavu stlačeném bude situace o poznání složitější. Právě nalézání netriviálních funkcí $u(x, \lambda)$, tedy získávání explicitního názoru na tvar nosníku pro kvantitativně dané případy jeho podélného stlačení λ, bude předmětem takto fyzikálně motivované úlohy.

Okrajové podmínky spadající do oblasti našeho zájmu budou trojího typu. Prvními z nich jsou $u(0) = u(\ell) = 0$ a $u''(0) = u''(\ell) = 0$, po technické stránce reprezentující nevetknuté uložení nosníku v bodech $[0, 0]$, $[\ell, 0]$, které ponechává „volnost v první derivaci", a garantuje tak, mimo zřejmého zachovávání polohy koncových bodů, i zanedbatelné ohybové namáhání nosníku na jejich bezprostředních okolích. Druhými okrajovými podmínkami budou $u(0) = u(\ell) = 0$ a $u''(0) = u'(\ell) = 0$ reprezentující nevetknuté uložení v bodě [0,0] a vetknuté uložení v bodě $[\ell, 0]$. Tyto podmínky garantují zanedbatelné ohybové namáhání na bezprostředním okolí „konce levého" a zanedbatelné vychylování nosníku na bezprostředním okolí „konce pravého". Analogicky třetími podmínkami $u(0) = u(\ell) = 0$ a $u'(0) = u'(\ell) = 0$ bude reprezentována vetknutost nosníku na obou koncích, tedy garance zanedbatelného vychylování na bezprostředních okolích konců. Všemi těmito jednoduchými případy, bez dalších modifikací prostředí v okolí nosníku, se budeme zabývat v kapitole označované jako „bez překážky".

Představme si však nyní, a zvolna začněme s náhledem na nosník jako na hladkou spojitou funkci na intervalu $(0, \ell)$, co by pravděpodobně nastalo, kdybychom pod tento náš modelový nestlačený nosník v některém místě, tj. bodě $[x_0, 0]$, $x_0 \in (0, \ell)$, umístili pevnou bodovou podpěru, a vytvořili mu tak potenciální překážku v jeho tvarové adaptaci na tlakovou sílu reprezentovanou parametrem λ. Zřejmě by mohly nastat tyto tři případy: a) podpěra by nikterak nebránila nosníku v nabytí pro něj k danému λ přirozenému tvaru, neboť ten by ji „obcházel", b) podpěra by nikterak nebránila nosníku v nabytí pro něj k danému λ přirozenému tvaru, avšak ten by se jí „náhodou" dotýkal, c) podpěra by nosníku v nabytí pro něj k danému λ přirozenému tvaru bránila, a ten by tak byl nucen tvarově se zadaptovat rovněž na ni, přičemž by tak učinil při maximálním zachování hladkosti, což v našem případě bude znamenat do druhé derivace včetně.

Případy (b) a (c) se pro všechny okrajové podmínky zabýváme v kapitole nazvané „s překážkou".

V poslední kapitole nazvané „s jednostrannou podmínkou" se na základě získaných výsledků z předchozích kapitol komplexně zabýváme vybranými případy z (a), (b), (c) a interpretujeme je do názorných diagramů. Jednostrannou podmínku tedy lze plně interpretovat právě jako onu pevnou bodovou podpěru.

Podotkněme však, že navzdory výše uvedeným fyzikálním/technickým interpretacím, je naše práce zaměřena ryze matematicky. Rovněž nutno podotknout, že naše rovnice je zjednodušeným zlinearizovaným případem nelineárního modelu nosníku

$$\left(\frac{u''}{1-u'^2}\right)'' - \left(\frac{u''^2 u'}{(1-u'^2)^2}\right)' + \lambda\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = 0 \quad \text{na intervalu } (0, \ell)$$

(viz [1]) na okolí $u \equiv 0$. Pochopitelně tedy naše lineární úloha aproximuje nelineární úlohu pouze pro malé průhyby nosníku. Snaha o doslovnou fyzikální interpretaci některých výsledků našich úloh by tak mohla přinášet problémy a paradoxy (např. nosník by reagoval jen na diskrétní hladiny silového působení, nikoliv ve spojitém pásmu; nepotřeboval by pro zvětšování průhybu zvětšování tlakové síly; mohl by se nekonečně prodlužovat...).

Cílem práce je hledání netriviálních řešení uvedené rovnice s nulovými okrajovými podmínkami a nulovou jednostrannou podmínkou ve vybraném bodě uvnitř oblasti, a kvalitativní analýza vzhledem k parametru λ a poloze této jednostranné podmínky.

Práce je vysázena systémem LaTeX, obrázky jsou vykresleny programem Wolfram Mathematica.

Kapitola 2

Postup řešení lineární úlohy bez překážky

V této kapitole zavedeme základní pojmy a odvodíme obecný postup řešení, na jehož principu budou řešeny úlohy v Kapitole 3.

Definice 2.1 *Řešením úlohy*

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0,\ \ell > 0 \tag{2.1}$$

s právě čtyřmi okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} &u(0) = u(\ell) = 0 \\ &u^{(j)}(0) = u^{(k)}(\ell) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde (j,k) *je právě jeden z prvků množiny* $\{(2,2),(2,1),(1,1)\}$ *, nazveme dvojici* $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)))$ *takovou, že rovnosti (2.1) a (2.2) jsou splněny.*

Naše úloha je tvaru

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0,$$

což je homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty. Řešení takové úlohy hledáme ve tvaru $u(x) = e^{mx},\ m \in \mathbb{C}$, a tedy dospíváme k charakteristické rovnici

$$m^4 + \lambda m^2 = 0. \tag{2.3}$$

Z kořenů charakteristické rovnice následně získáváme čtyřprvkovou množinu lineárně nezávislých funkcí proměnné x s parametrem λ

$$\mathrm{FS}_{\mathbb{C}} = \{v_{1_{\mathbb{C}}}(x,\lambda), v_{2_{\mathbb{C}}}(x,\lambda), v_{3_{\mathbb{C}}}(x,\lambda), v_{4_{\mathbb{C}}}(x,\lambda)\},$$

kde

$$v_{i_{\mathbb{C}}} = v_{i_{\mathbb{C}}}(x,\lambda) : [0,\ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C},\ v_{i_{\mathbb{C}}} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)),\ i = 1,2,3,4.$$

Tuto množinu nazýváme komplexní fundamentální systém úlohy. Na základě transformace komplexního fundamentálního systému na reálný, tj.

$$\mathrm{FS} = \{v_1(x,\lambda), v_2(x,\lambda), v_3(x,\lambda), v_4(x,\lambda)\},$$

kde

$$v_i = v_i(x,\lambda) : [0,\ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ v_i \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)),\ i = 1,2,3,4,$$

dostáváme obecné řešení

$$u = u(x,\lambda) : [0,\ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)),$$

přičemž platí

$$u = Av_1 + Bv_2 + Cv_3 + Dv_4$$

a

$$u^{(h)} = Av_1^{(h)} + Bv_2^{(h)} + Cv_3^{(h)} + Dv_4^{(h)}, \quad h = 1,2,$$

kde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Z okrajových podmínek (2.2) vidíme, že na koeficienty A, B, C, D vyvstává obecný požadavek

$$\mathbf{M}(\lambda) \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} v_1(0,\lambda) & v_2(0,\lambda) & v_3(0,\lambda) & v_4(0,\lambda) \\ v_1(\ell,\lambda) & v_2(\ell,\lambda) & v_3(\ell,\lambda) & v_4(\ell,\lambda) \\ v_1^{(j)}(0,\lambda) & v_2^{(j)}(0,\lambda) & v_3^{(j)}(0,\lambda) & v_4^{(j)}(0,\lambda) \\ v_1^{(k)}(\ell,\lambda) & v_2^{(k)}(\ell,\lambda) & v_3^{(k)}(\ell,\lambda) & v_4^{(k)}(\ell,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Budeme-li se zajímat pouze o netriviální řešení úlohy, tj. $u \not\equiv 0$, pak je zřejmě nutné, aby

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

k čemuž je nutnou podmínkou

$$\det \mathbf{M}(\lambda) = 0. \tag{2.4}$$

Ukážeme, že existuje celá posloupnost $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ splňující (2.4), tedy celá posloupnost $\{\mathrm{FS_k}\}_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$, a tedy celá posloupnost funkcí $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tím konečně najdeme i posloupnost dvojic $\{(\lambda_k, u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, které řeší úlohu (2.1), (2.2).

Kapitola 3

Zpracování úlohy bez překážky

V této kapitole budeme zpracovávat úlohu popsanou v Kapitole 2 na principu v ní uvedeného postupu řešení. Jednotlivé případy pro uvažované tři typy okrajových podmínek budou uváděny postupně.

3.1 Okrajové podmínky 0-2, 0-2

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \; \lambda > 0$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{3.1}$$

$$u''(0) = u''(\ell) = 0. \tag{3.2}$$

Z charakteristické rovnice

$$m^4 + \lambda m^2 = 0$$

$$m^2(m^2 + \lambda) = 0,$$

jejímž řešením je čtveřice obecně komplexních čísel

$$m_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$m_{3,4} = 0,$$

vyplývá komplexní fundamentální systém

$$\mathrm{FS}_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\sqrt{\lambda}x}, e^{-i\sqrt{\lambda}x}, 1, x \right\},$$

který lze s použitím vztahů

$$\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2}$$

a

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2i}$$

transformovat na reálný fundamentální systém

$$\mathrm{FS} = \left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), 1, x\right\}. \tag{3.3}$$

Vytvořený reálný fundamentální systém FS generuje obecné řešení $u = u(x)$ ve tvaru

$$u(x) = A\cos(rx) + B\sin(rx) + Cx + D, \tag{3.4}$$

kde

$$r = \sqrt{\lambda}, \tag{3.5}$$

a tedy také

$$\begin{aligned} u'(x) &= -Ar\sin(rx) + Br\cos(rx) + C \\ u''(x) &= -Ar^2\cos(rx) - Br^2\sin(rx). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tento tvar má obecné řešení všech zkoumaných úloh bez překážky.

S využitím homogenních okrajových podmínek (3.1), (3.2) dostáváme soustavu

$$u(0) = A\cos(r\cdot 0) + B\sin(r\cdot 0) + C\cdot 0 + D = A + D = 0 \tag{3.7}$$

$$u(\ell) = A\cos(r\ell) + B\sin(r\ell) + C\ell + D = 0$$

$$u''(0) = -Ar^2\cos(r\cdot 0) - Br^2\sin(r\cdot 0) = -Ar^2 = 0 \tag{3.8}$$

$$u''(\ell) = -Ar^2\cos(r\ell) - Br^2\sin(r\ell) = 0.$$

Jelikož $\lambda > 0$, potom podle (3.5) je $r > 0$ a z rovnice (3.8) plyne $A = 0$, a tedy z rovnice (3.7) plyne $D = 0$, čímž se soustava rovnic zjednodušuje na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých maticově zapsatelnou v podobě

$$\begin{pmatrix} \sin(r\ell) & \ell \\ -r^2\sin(r\ell) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Označíme-li

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(r\ell) & \ell \\ -r^2\sin(r\ell) & 0 \end{pmatrix},$$

pak z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne vztah

$$\det\mathbf{M}(\lambda) = r^2\ell\sin(r\ell) = 0,$$

který po zpětném dosazení $r = \sqrt{\lambda}$ přechází v rovnici

$$\lambda\ell\sin\left(\sqrt{\lambda}\ell\right) = 0, \tag{3.10}$$

jejímiž řešeními jsou čísla λ_k. K nim lze pak najít odpovídající nenulové funkce $u_k = u_k(x)$ okrajovou úlohu na intervalu $(0,\ell)$ splňující ve smyslu obecného řešení (3.4).

Jak je patrné, rovnice (3.10) má na intervalu $\lambda \in (0,\infty)$ nekonečnou posloupnost kořenů

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2\right\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Pro taková λ_k pak zjevně soustava (3.9) nabývá tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0,$$

a tedy

$$B = K_k, \text{ kde } K_k \text{ je libovolnou konstantou z množiny } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$C = 0.$$

Kořenům λ_k tak odpovídá nekonečná posloupnost nenulových funkcí

$$\{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{K_k\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad K_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.11}$$

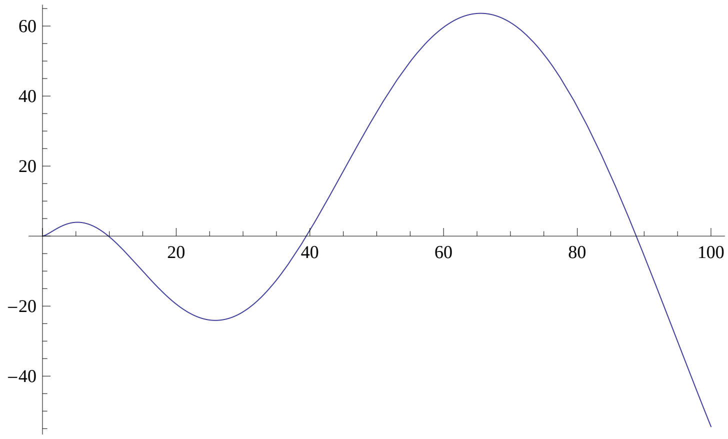
Tím získáváme i nekonečně mnoho řešení úlohy ve smyslu Definice 2.0.1, a je zřejmé, že

$$u_k \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

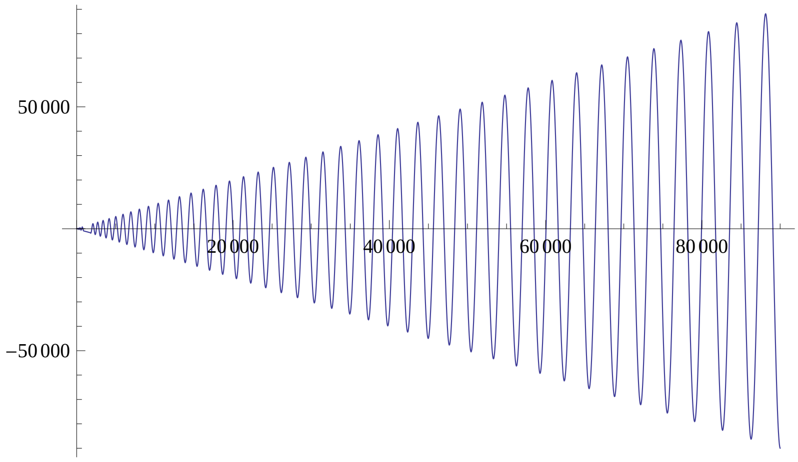
Příklad: Vykresleme první tři funkce, tj. $u_k = u_k(x),\ k \in \{1,2,3\}$, okrajovou úlohu na intervalu $(0,\ell)$ splňující. Volme $\ell = 1$. Tudíž

$$\lambda_1 = \pi^2, \qquad \lambda_2 = 4\pi^2, \qquad \lambda_3 = 9\pi^2,$$

jak možno pozorovat rovněž na Obrázku 3.1 zobrazujícím graf funkce $d(\lambda) = \lambda\sin\sqrt{\lambda}$ na intervalu $(0,100)$.



Obrázek 3.1: $d(\lambda) = \lambda \sin \sqrt{\lambda}, \quad \lambda \in (0, 100)$



Obrázek 3.2: $d(\lambda) = \lambda \sin \sqrt{\lambda}, \quad \lambda \in (0, 90000)$

Těmto číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tedy odpovídají nenulové funkce

$$u_1(x) = K_1 \sin(1\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

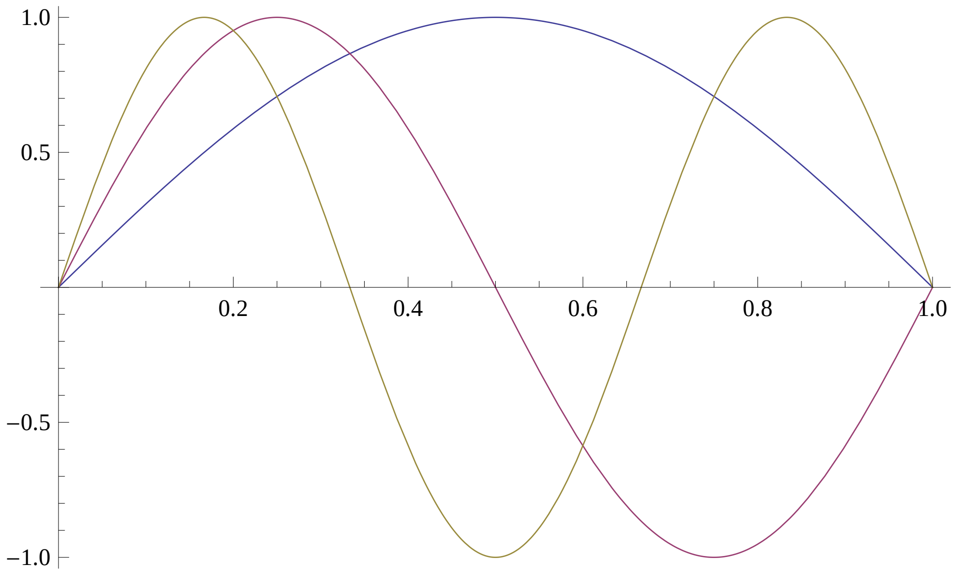
$$u_2(x) = K_2 \sin(2\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$u_3(x) = K_3 \sin(3\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tyto funkce pro $K_k = 1,\ k \in \{1, 2, 3\}$ vykreslujeme na Obrázku 3.3.

Obrázek 3.2 zobrazující graf funkce $d(\lambda) = \lambda \sin \sqrt{\lambda}$ na intervalu $(0, 90000)$ je doplňujícím ilustrativním podkladem existence nekonečně mnoha kořenů λ_k.

Definice 3.1 *Číslo λ_k nazveme vlastním číslem. Funkci u_k odpovídající vlastnímu číslu λ_k nazveme vlastní funkcí.*



Obrázek 3.3: $u_1(x)$ modrá, $u_2(x)$ fialová, $u_3(x)$ béžová, $K_k = 1,\ k \in \{1, 2, 3\}$

3.2 Okrajové podmínky 0-2, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{3.12}$$

$$u''(0) = u'(\ell) = 0. \tag{3.13}$$

S využitím již známého reálného fundamentálního systému (3.3), tvaru obecného řešení (3.4) a jeho derivací (3.6) a nyní zadaných homogenních okrajových podmínek (3.12), (3.13) dostáváme soustavu

$$u(0) = A\cos(r \cdot 0) + B\sin(r \cdot 0) + C \cdot 0 + D = A + D = 0 \tag{3.14}$$

$$u(\ell) = A\cos(r\ell) + B\sin(r\ell) + C\ell + D = 0$$

$$u''(0) = -Ar^2\cos(r \cdot 0) - Br^2\sin(r \cdot 0) = -Ar^2 = 0 \tag{3.15}$$

$$u'(\ell) = -Ar\sin(r\ell) + Br\cos(r\ell) + C = 0.$$

Jelikož $\lambda > 0$, potom $r = \sqrt{\lambda} > 0$ (viz (3.5)) a z rovnice (3.15) plyne $A = 0$. Dále z rovnice (3.14) plyne $D = 0$, čímž se soustava rovnic zjednodušuje na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých maticově zapsatelnou v podobě

$$\begin{pmatrix} \sin(r\ell) & \ell \\ r\cos(r\ell) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Označíme-li

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin(r\ell) & \ell \\ r\cos(r\ell) & 1 \end{pmatrix},$$

pak z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne

$$\det\mathbf{M}(\lambda) = \sin(r\ell) - r\ell\cos(r\ell) = 0. \tag{3.17}$$

Zavedením substituce $t = r\ell > 0$ pak z rovnice (3.17) dostáváme

$$\sin t = t\cos t. \tag{3.18}$$

Nyní ověříme, zda lze rovnici (3.18) podělit funkcí $\cos t$, aniž bychom tím přišli o nějaké její řešení t. Zřejmě $\cos t = 0$ tehdy a jen tehdy, když $t \in \left\{(2m-1)\frac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{N}\right\}$, a tedy $\sin t \in \{-1, 1\}$. Je-li $\sin t = 1$, tedy $t = \frac{\pi}{2}(1+4n),\ n \in \mathbb{N}_0$, získáváme dosazením do rovnice (3.18) rovnost

$$1 = 0,$$

která zřejmě není splněna pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$. Tedy $t = \frac{\pi}{2}(1+4n),\ n \in \mathbb{N}_0$ není řešením rovnice (3.18). Analogicky, je-li $\sin t = -1$, tedy $t = \frac{3\pi}{2}(1+\frac{4}{3}n),\ n \in \mathbb{N}_0$, pak dosazením do rovnice (3.18) získáváme rovnost

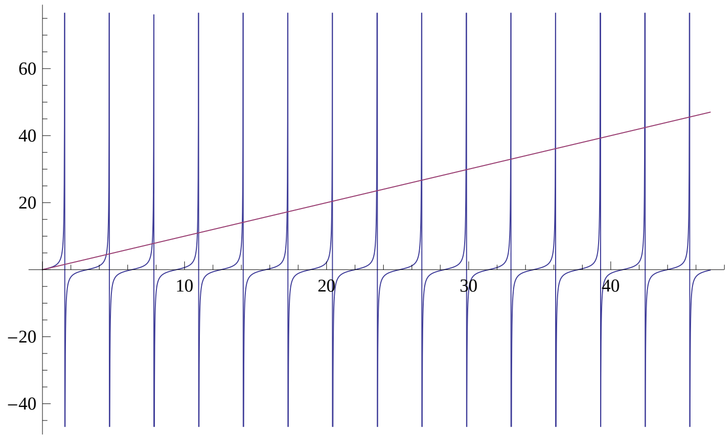
$$-1 = 0,$$

která rovněž není splněna pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$. Tedy $t = \frac{3\pi}{2}(1+\frac{4}{3}n),\ n \in \mathbb{N}_0$ není řešením rovnice (3.18). Rovnici (3.18) tedy lze podělit funkcí $\cos t$, aniž bychom tím přišli o nějaké její řešení t, čili

$$\operatorname{tg} t = t. \tag{3.19}$$

Jelikož $f = f(t) = \operatorname{tg} t$ je periodickou funkcí s definičním oborem $\mathrm{D}(f) = (0,\infty) \setminus \left\{(2m-1)\frac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{N}\right\}$ a s oborem hodnot $\mathrm{H}(f) = \mathbb{R}$ a $g = g(t) = t$ je funkcí definovanou na definičním oboru $\mathrm{D}(g) = (0,\infty)$ s oborem hodnot $\mathrm{H}(g) = (0,\infty)$, tak je patrné, že funkce f a g mají nekonečně mnoho průsečíků. Rovnice (3.19) má tedy nekonečně mnoho kořenů $t_k,\ k \in \mathbb{N}$, a tedy existuje i nekonečná posloupnost vlastních čísel

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{t_k}{\ell}\right)^2\right\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{3.20}$$



Obrázek 3.4: $f(t) = \operatorname{tg} t$ - modrá, $g(t) = t$ - fialová

a jim odpovídajících vlastních funkcí u_k, $k \in \mathbb{N}$. Tento závěr ilustrativně podkládá Obrázek 3.4.

Pro tato vlastní čísla nyní obecně nalezneme zbylé koeficienty B, C tak, aby vyhovovaly soustavě (3.16). Jelikož $\det \mathbf{M}(\lambda_k) = 0$, tak ze soustavy (3.16) plyne

$$B \sin(r_k \ell) + C\ell = 0. \tag{3.21}$$

Volbou $B = K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ z rovnice (3.21) získáváme

$$C = -K_k \frac{\sin(r_k \ell)}{\ell}.$$

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$\begin{aligned} u_k(x) &= K_k \left(\sin(r_k x) - \frac{\sin(r_k \ell)}{\ell} x \right) = \\ &= K_k \left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k} \ell\right)}{\ell} x \right). \end{aligned}$$

Příklad: Vykresleme první tři vlastní funkce, tj. $u_k = u_k(x)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, okrajovou úlohu na intervalu $(0, \ell)$ splňující. Volme opět $\ell = 1$. S využitím numerickým metod určíme první tři kořeny rovnice (3.19), tedy

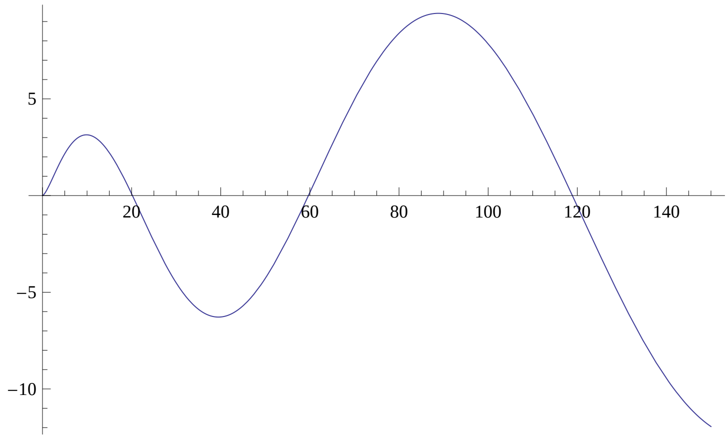
$$t_1 \approx 4.4934, \qquad t_2 \approx 7.7253, \qquad t_3 \approx 10.9041.$$

Ze vztahu (3.20) pak plynou vlastní čísla

$$\lambda_1 \doteq 20.19, \qquad \lambda_2 \doteq 59.68, \qquad \lambda_3 \doteq 118.90,$$

které ilustrativně podkládá Obrázek 3.5 zobrazující graf funkce (viz (3.17))

$$d(\lambda) = \sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}.$$



Obrázek 3.5: $d(\lambda) = \sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}$

Pro $\lambda_1 \doteq 20.19$ je tedy hledanou vlastní funkcí

$$u_1(x) = K_1\left(\sin\left(\sqrt{20.19}x\right) + 0.98x\right),$$

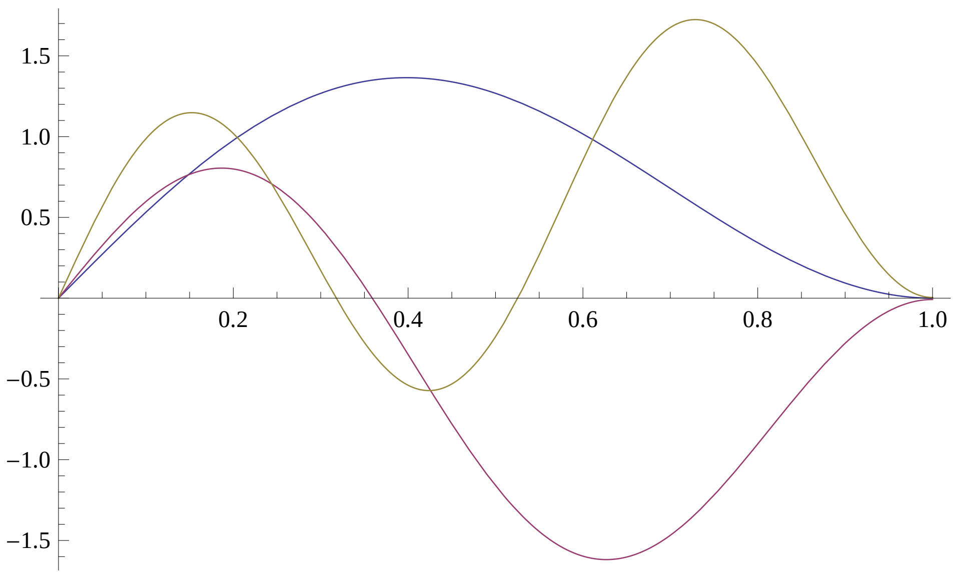
podobně pro $\lambda_2 \doteq 59.68$ dostáváme

$$u_2(x) = K_2\left(\sin\left(\sqrt{59.68}x\right) - 0.99x\right),$$

nakonec pro $\lambda_3 \doteq 118.90$ dostáváme

$$u_3(x) = K_3\left(\sin\left(\sqrt{118.90}x\right) + x\right).$$

Nalezené vlastní funkce jsou pro $K_k = 1,\ k \in \{1, 2, 3\}$ vykreslené na Obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: $u_1(x)$ modrá, $u_2(x)$ fialová, $u_3(x)$ béžová, $K_k = 1,\ k \in \{1, 2, 3\}$

3.3 Okrajové podmínky 0-1, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0$$

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{3.22}$$

$$u'(0) = u'(\ell) = 0. \tag{3.23}$$

S využitím již známého reálného fundamentálního systému (3.3), tvaru obecného řešení (3.4) a jeho derivací (3.6) a nyní zadaných homogenních okrajových podmínek (3.22), (3.23) dostáváme soustavu

$$u(0) = A\cos(r\cdot 0) + B\sin(r\cdot 0) + C\cdot 0 + D = A + D = 0 \tag{3.24}$$

$$u(\ell) = A\cos(r\ell) + B\sin(r\ell) + C\ell + D = 0$$

$$u'(0) = -Ar\sin(r\cdot 0) + Br\cos(r\cdot 0) + C = Br + C = 0 \tag{3.25}$$

$$u'(\ell) = -Ar\sin(r\ell) + Br\cos(r\ell) + C = 0.$$

Jelikož $\lambda > 0$, potom $r > 0$ (viz (3.5)), z rovnice (3.24) plyne $D = -A$ a z rovnice (3.25) plyne $C = -Br$. Tím se soustava rovnic zjednodušuje na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých maticově zapsatelnou v podobě

$$\begin{pmatrix} \cos(r\ell) - 1 & \sin(r\ell) - r\ell \\ -r\sin(r\ell) & r(\cos(r\ell) - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Označíme-li

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(r\ell) - 1 & \sin(r\ell) - r\ell \\ -r\sin(r\ell) & r(\cos(r\ell) - 1) \end{pmatrix},$$

pak z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne

$$\det\mathbf{M}(\lambda) = r(\cos(r\ell) - 1)^2 + r\,(\sin(r\ell))\,(\sin(r\ell) - r\ell) = 0. \tag{3.27}$$

Jelikož $r > 0$, platí

$$(\cos(r\ell) - 1)^2 + (\sin(r\ell))\,(\sin(r\ell) - r\ell) = 0. \tag{3.28}$$

Zavedením substituce $t = r\ell > 0$ z rovnice (3.28) dostáváme

$$t\sin t = 2 - 2\cos t. \tag{3.29}$$

Nyní opět ověříme, zda lze rovnici (3.29) podělit funkcí $\cos t$, aniž bychom tím přišli o nějaké její řešení t. Již víme, že $\cos t = 0$ tehdy jen tehdy, když $t \in \left\{(2m-1)\frac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{N}\right\}$ a $\sin t \in \{-1, 1\}$. Je-li $\sin t = 1$, tedy $t = \frac{\pi}{2}(1+4n),\ n \in \mathbb{N}_0$, získáváme dosazením do rovnice (3.29) rovnost

$$\frac{\pi}{2}(1+4n) = 2, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

která není splněna pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$. Tedy $t = \frac{\pi}{2}(1+4n),\ n \in \mathbb{N}_0$ není řešením rovnice (3.29). Analogicky pro $\sin t = -1$, tedy $t = \frac{3\pi}{2}(1+\frac{4}{3}n),\ n \in \mathbb{N}_0$, získáváme z rovnice (3.29) rovnost

$$-\frac{3\pi}{2}\left(1+\frac{4}{3}n\right) = 2, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

která rovněž není splněna pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$. Tedy $t = \frac{3\pi}{2}(1+\frac{4}{3}n),\ n \in \mathbb{N}_0$ není řešením rovnice (3.29). Můžeme tak bez ztráty řešení rovnici (3.29) podělit funkcí $\cos t$, a získat rovnici

$$t \operatorname{tg} t = 2 \sec t - 2. \tag{3.30}$$

Jelikož $f = f(t) = \operatorname{tg}\, t$ je periodickou funkcí s definičním oborem
$\mathrm{D}(f) = (0, \infty) \setminus \left\{(2m-1)\frac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{N}\right\}$ a s oborem hodnot $\mathrm{H}(f) = \mathbb{R}$
a $g = g(t) = 2\sec t - 2$ je periodickou funkcí definovanou na témže definičním oboru $\mathrm{D}(g) = (0, \infty) \setminus \left\{(2m-1)\frac{\pi}{2};\ m \in \mathbb{N}\right\}$ s oborem hodnot $\mathrm{H}(g) = (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$, tak je patrné, že funkce f a g mají nekonečně mnoho průsečíků. Rovnice (3.30) má tudíž nekonečně mnoho kořenů $t_k,\ k \in \mathbb{N}$, a tedy existuje nekonečná posloupnost vlastních čísel

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{t_k}{\ell}\right)^2\right\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{3.31}$$

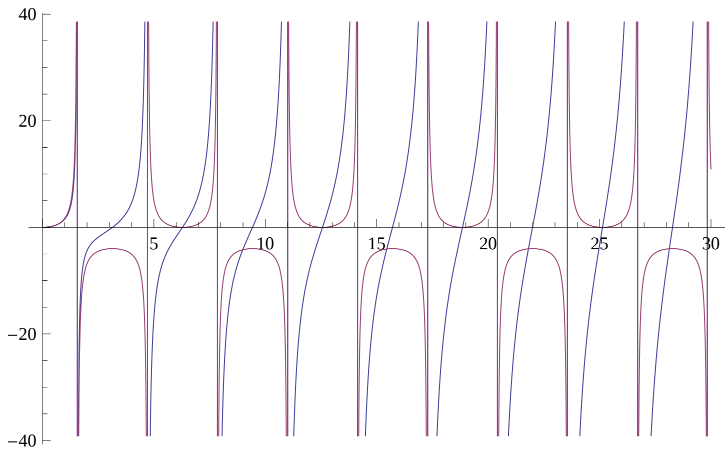
a jim odpovídajících vlastních funkcí $u_k,\ k \in \mathbb{N}$. Tento závěr ilustrativně podkládá Obrázek 3.7.

Pro tato vlastní čísla nyní obecně nalezneme zbylé koeficienty A, B tak, aby vyhovovaly soustavě (3.26). Jelikož $\det\mathbf{M}(\lambda_k) = 0$, pak ze soustavy (3.26) plyne

$$A(\cos(r_k\ell) - 1) + B(\sin(r_k\ell) - r\ell) = 0. \tag{3.32}$$

Volbou $A = K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ z rovnice (3.32) získáváme

$$B = -K_k \frac{\cos(r_k\ell) - 1}{\sin(r_k\ell) - r_k\ell}.$$



Obrázek 3.7: $f(t) = t\operatorname{tg} t$ - modrá, $g(t) = 2\sec t - 2$ - fialová

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$\begin{aligned} u_k(x) &= K_k\left(\cos(r_k x) - \frac{\cos(r_k\ell) - 1}{\sin(r_k\ell) - r_k\ell}\left(\sin(r_k x) - r_k x\right) - 1\right) = \qquad (3.33)\\ &= K_k\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \sqrt{\lambda_k}x\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Příklad: Vykresleme první tři vlastní funkce, tj. $u_k = u_k(x),\ k \in \{1, 2, 3\}$, okrajovou úlohu na intervalu $(0, \ell)$ splňující, volme opět $\ell = 1$. S využitím numerickým metod určíme první tři kořeny rovnice (3.30), tedy

$$t_1 \approx 6.2832, \qquad t_2 \approx 8.9868, \qquad t_3 \approx 12.5664.$$

Ze vztahu (3.31) tak plynou vlastní čísla

$$\lambda_1 \doteq 39.48, \qquad \lambda_2 \doteq 80.76, \qquad \lambda_3 \doteq 157.91,$$

které ilustrativně podkládá Obrázek 3.8 zobrazující graf funkce

$$d(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right)^2 + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\left(\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\right)$$

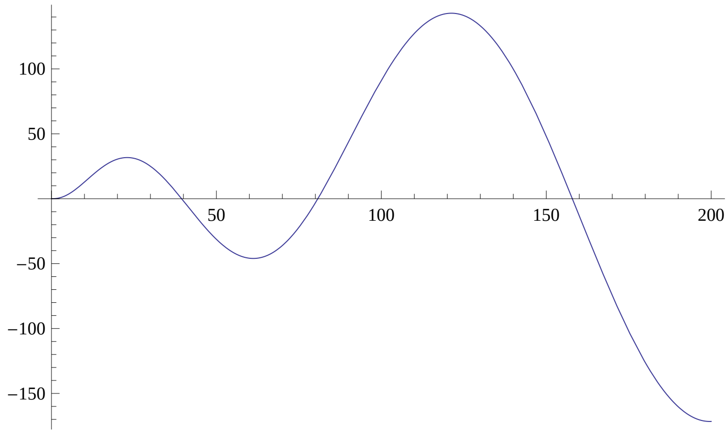
(viz (3.27)).

Pro $\lambda_1 \doteq 39.48$ je tedy hledanou vlastní funkcí

$$u_1(x) = K_1\left(\cos\left(\sqrt{39.48}x\right) - 1\right).$$

podobně pro $\lambda_2 \doteq 80.76$ dostáváme

$$u_2(x) = K_2\left(\cos\left(\sqrt{80.76}x\right) - 0.2225\left(\sin\left(\sqrt{80.76}x\right) - \sqrt{80.76}x\right) - 1\right),$$



Obrázek 3.8: $d(\lambda) = \sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda} - 1)^2 + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(\sin\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda})$

nakonec pro $\lambda_3 \doteq 157.91$ dostáváme

$$u_3(x) = K_3\left(\cos\left(\sqrt{157.91}x\right) - 1\right).$$

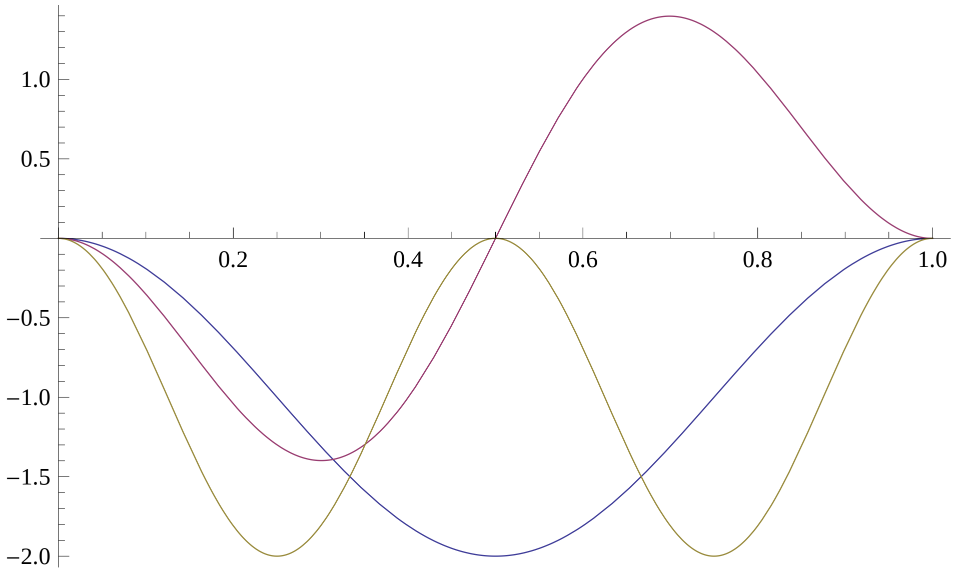
Nalezené vlastní funkce jsou pro $K_k = 1,\ k \in 1, 2, 3$ vykreslené na Obrázku 3.9.

Povšimněme si, že pro k lichá z řešení $u_k(x)$ zcela vypadávají členy $\sin(r_k x)$ a $r_k x$. To je dáno tím, že zřejmě, jak rovněž ilustruje Obrázek 3.7, pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí

$$t_{2i-1} \cdot \operatorname{tg} t_{2i-1} = 2\sec t_{2i-1} - 2 = 0,$$

a tedy pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí

$$\cos(r_{2i-1}\ell) - 1 = 0.$$



Obrázek 3.9: $u_1(x)$ modrá, $u_2(x)$ fialová, $u_3(x)$ béžová, $K_k = 1,\ k \in 1, 2, 3$

Kapitola 4

Postup řešení lineární úlohy s překážkou

V úloze s překážkou budeme studovat úlohu popsanou v Kapitole 2, k níž přidáme podmínku $u(x_0) = 0$. Pro splnění této podmínky budeme připouštět ztrátu C^3 hladkosti.

V této kapitole opět zavedeme základní pojmy a odvodíme obecný postup řešení, na jehož principu budeme řešit úlohy v Kapitole 5.

Definice 4.1 *Řešením úlohy*

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \ \lambda > 0, \ \ell > 0 \tag{4.1}$$

s právě čtyřmi okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} &u(0) = u(\ell) = 0 \\ &u^{(j)}(0) = u^{(k)}(\ell) = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde (j, k) *je právě jeden z prvků množiny* $\{(2,2), (2,1), (1,1)\}$ *, a přechodovými podmínkami v bodě* $x_0 \in (0, \ell)$

$$u(x_0) = 0 \tag{4.3}$$

$$u'_-(x_0) = u'_+(x_0) \tag{4.4}$$

$$u''_-(x_0) = u''_+(x_0) \tag{4.5}$$

$$\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \le \lim_{x \to x_0+} u'''(x) \tag{4.6}$$

nazveme dvojici $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell)))$ *, takovou, že rovnosti (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) a nerovnost (4.6) jsou splněny.*

Naše úloha je tvaru

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0,$$

což je homogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty. Řešení takové úlohy hledáme ve tvaru $u(x) = e^{mx},\ m \in \mathbb{C}$, a tedy dospíváme k charakteristické rovnici

$$m^4 + \lambda m^2 = 0.$$

Z kořenů charakteristické rovnice následně získáváme čtyřprvkovou množinu lineárně nezávislých funkcí proměnné x s parametrem λ

$$\mathrm{FS}_{\mathbb{C}} = \{v_{1_{\mathbb{C}}}(x, \lambda), v_{2_{\mathbb{C}}}(x, \lambda), v_{3_{\mathbb{C}}}(x, \lambda), v_{4_{\mathbb{C}}}(x, \lambda)\},$$

kde

$$v_{i_{\mathbb{C}}} = v_{i_{\mathbb{C}}}(x, \lambda) : [0, \ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C},\ v_{i_{\mathbb{C}}} \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, \ell)),\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Tuto množinu nazýváme komplexní fundamentální systém úlohy. Na základě transformace komplexního fundamentálního systému na reálný, tj.

$$\mathrm{FS} = \{v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda), v_3(x, \lambda), v_4(x, \lambda)\},$$

kde

$$v_i = v_i(x, \lambda) : [0, \ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ v_i \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, \ell)),\ i = 1, 2, 3, 4,$$

dostáváme obecné řešení

$$u = u(x, \lambda) : [0, \ell] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ u \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell)),$$

přičemž platí

$$u := u(x, \lambda) = \begin{cases} u_L(x, \lambda), & x \in [0, x_0] \\ u_P(x, \lambda), & x \in [x_0, \ell], \end{cases}$$

kde

$$u_L(x, \lambda) = A_1 v_1(x, \lambda) + B_1 v_2(x, \lambda) + C_1 v_3(x, \lambda) + D_1 v_4(x, \lambda)$$
$$u_P(x, \lambda) = A_2 v_1((\ell - x), \lambda) + B_2 v_2((\ell - x), \lambda) + C_2 v_3((\ell - x), \lambda) + D_2 v_4((\ell - x), \lambda)$$

a zároveň platí

$$
\begin{aligned}
u_L^{(h)}(x,\lambda) &= A_1 v_1^{(h)}(x,\lambda) + B_1 v_2^{(h)}(x,\lambda) + C_1 v_3^{(h)}(x,\lambda) + D_1 v_4^{(h)}(x,\lambda) \\
u_P^{(h)}(x,\lambda) &= A_2 v_1^{(h)}((\ell - x),\lambda) + B_2 v_2^{(h)}((\ell - x),\lambda) + C_2 v_3^{(h)}((\ell - x),\lambda) + \\
&\qquad + D_2 v_4^{(h)}((\ell - x),\lambda),
\end{aligned}
$$

kde $h = 1,2$ a $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 \in \mathbb{R}$. Tento tvar má obecné řešení všech zkoumaných úloh s překážkou.

Z okrajových podmínek (4.1), (4.2) a přechodových podmínek (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) vidíme, že na koeficienty $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ vyvstávají obecné požadavky

$$
\mathbf{M}(\lambda) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

kde

$$
\mathbf{M}(\lambda) =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
v_1(0,\lambda) & v_2(0,\lambda) & v_3(0,\lambda) & v_4(0,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & v_1(0,\lambda) & v_2(0,\lambda) & v_3(0,\lambda) & v_4(0,\lambda) \\
v_1^{(j)}(0,\lambda) & v_2^{(j)}(0,\lambda) & v_3^{(j)}(0,\lambda) & v_4^{(j)}(0,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & v_1^{(k)}(0,\lambda) & v_2^{(k)}(0,\lambda) & v_3^{(k)}(0,\lambda) & v_4^{(k)}(0,\lambda) \\
v_1(x_0,\lambda) & v_2(x_0,\lambda) & v_3(x_0,\lambda) & v_4(x_0,\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & v_1(\ell - x_0,\lambda) & v_2(\ell - x_0,\lambda) & v_3(\ell - x_0,\lambda) & v_4(\ell - x_0,\lambda) \\
v_1^{(j)}(x_0,\lambda) & v_2^{(j)}(x_0,\lambda) & v_3^{(j)}(x_0,\lambda) & v_4^{(j)}(x_0,\lambda) & -v_1^{(j)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_2^{(j)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_3^{(j)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_4^{(j)}(\ell - x_0,\lambda) \\
v_1^{(k)}(x_0,\lambda) & v_2^{(k)}(x_0,\lambda) & v_3^{(k)}(x_0,\lambda) & v_4^{(k)}(x_0,\lambda) & -v_1^{(k)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_2^{(k)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_3^{(k)}(\ell - x_0,\lambda) & -v_4^{(k)}(\ell - x_0,\lambda)
\end{pmatrix},
$$

a

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0-} \left(A_1 v_1'''(x,\lambda) + B_1 v_2'''(x,\lambda) + C_1 v_3'''(x,\lambda) + D_1 v_3'''(x,\lambda) \right) \leq \\
&\leq \lim_{x \to x_0+} \left(A_2 v_1'''(\ell - x,\lambda) + B_2 v_2'''(\ell - x,\lambda) + C_2 v_3'''(\ell - x,\lambda) + D_2 v_3'''(\ell - x,\lambda) \right).
\end{aligned}
$$

Budeme-li se zajímat pouze o netriviální řešení úlohy, tj. $u \not\equiv 0$, pak je zřejmě nutné, aby

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

k čemuž je nutnou podmínkou

$$\det\mathbf{M}(\lambda) = 0. \tag{4.7}$$

Ukážeme, že existuje celá posloupnost $\{\lambda_z\}_{z\in\mathbb{N}}$ splňující (4.7), tedy celá posloupnost $\{\mathrm{FS_z}\}_{\mathrm{z}\in\mathbb{N}}$, a tedy celá posloupnost funkcí $\{u_z\}_{z\in\mathbb{N}}$. Tím konečně najdeme i posloupnost dvojic $\{(\lambda_z, u_z)\}_{z\in\mathbb{N}}$, které řeší úlohu (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6).

Kapitola 5

Zpracování úlohy s překážkou

V této kapitole budeme zpracovávat úlohu popsanou v Kapitole 4, na základě v ní uvedeného postupu řešení, a podrobovat ji zkoumání. Jednotlivé případy pro uvažované tři typy okrajových podmínek budou uváděny postupně.

5.1 Okrajové podmínky 0-2, 0-2

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0,\ell),\ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{5.1}$$

$$u''(0) = u''(\ell) = 0 \tag{5.2}$$

a přechodovými podmínkami v bodě $x_0 \in (0,\ell)$

$$\begin{aligned} &u(x_0) = 0 \\ &u'_-(x_0) = u'_+(x_0) \\ &u''_-(x_0) = u''_+(x_0) \\ &\lim_{x\to x_0-} u'''(x) \le \lim_{x\to x_0+} u'''(x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Nechť tedy $u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$.

Jak vidíme, volbou

$$u(x) = \begin{cases} u_L(x), & x \in [0,x_0] \\ u_P(x), & x \in [x_0,\ell] \end{cases} \tag{5.4}$$

z přechodových podmínek (5.3) získáme

$$u_L(x_0) = u_P(x_0) = 0 \tag{5.5}$$

$$u'_L(x_0) = u'_P(x_0) \tag{5.6}$$

$$u''_L(x_0) = u''_P(x_0) \tag{5.7}$$

$$\lim_{x \to x_0 -} u'''_L(x) \leq \lim_{x \to x_0 +} u'''_P(x). \tag{5.8}$$

Funkce $u_L(x),\ u_P(x)$ přitom zřejmě mají tvar

$$u_L(x) = A_1 \cos(rx) + B_1 \sin(rx) + C_1 x + D_1$$
$$u_P(x) = A_2 \cos(r(\ell - x)) + B_2 \sin(r(\ell - x)) + C_2(\ell - x) + D_2,$$

kde

$$r = \sqrt{\lambda} > 0, \tag{5.9}$$

a jejich derivace $u'_1,\ u''_1,\ u'''_1,\ u'_2,\ u''_2,\ u'''_2$ mají tvar

$$\begin{aligned}
u'_L(x) &= -A_1 r \sin(rx) + B_1 r \cos(rx) + C_1 \\
u''_L(x) &= -A_1 r^2 \cos(rx) - B_1 r^2 \sin(rx) \\
u'''_L(x) &= A_1 r^3 \sin(rx) - B_1 r^3 \cos(rx) \\
u'_P(x) &= A_2 r \sin(r(\ell - x)) - B_2 r \cos(r(\ell - x)) - C_2 \\
u''_P(x) &= -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x)) \\
u'''_P(x) &= -A_2 r^3 \sin(r(\ell - x)) + B_2 r^3 \cos(r(\ell - x)).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Z okrajových podmínek (5.1), (5.2) plyne

$$u(0) = u_L(0) = A_1 \cos(r \cdot 0) + B_1 \sin(r \cdot 0) + C_1 \cdot 0 + D_1 = A_1 + D_1 = 0 \tag{5.11}$$

$$u(\ell) = u_P(\ell) = A_2 \cos(r \cdot 0) + B_2 \sin(r \cdot 0) + C_2 \cdot 0 + D_2 = A_2 + D_2 = 0 \tag{5.12}$$

$$u''(0) = u''_L(0) = -A_1 r^2 \cos(r \cdot 0) - B_1 r^2 \sin(r \cdot 0) = -A_1 r^2 = 0 \tag{5.13}$$

$$u''(\ell) = u''_P(\ell) = -A_2 r^2 \cos(r \cdot 0) - B_2 r^2 \sin(r \cdot 0) = -A_2 r^2 = 0 \tag{5.14}$$

a z přechodových podmínek (5.5), (5.6), (5.7) plyne

$$u_L(x_0) = A_1 \cos(r x_0) + B_1 \sin(r x_0) + C_1 x_0 + D_1 = 0$$

$$u_P(x_0) = A_2 \cos(r(\ell - x_0)) + B_2 \sin(r(\ell - x_0)) + C_2(\ell - x_0) + D_2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
u_L'(x_0) &= -A_1 r \sin(rx_0) + B_1 r\cos(rx_0) + C_1 = \\
&= A_2 r\sin(r(\ell - x_0)) - B_2 r\cos(r(\ell - x_0)) - C_2 = u_P'(x_0)
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

$$
\begin{aligned}
u_L''(x_0) &= -\,A_1 r^2 \cos(rx_0) - B_1 r^2 \sin(rx_0) = \\
&= -\,A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = u_P''(x_0).
\end{aligned}
$$

Jelikož $r = \sqrt{\lambda} > 0$ (viz (5.9)), z rovnic (5.13), (5.14) plyne $A_1 = A_2 = 0$, tedy i z rovnic (5.11), (5.12) plyne $D_1 = D_2 = 0$. Soustava rovnic (5.15) je tak redukována na soustavu

$$u_L(x_0) = B_1 \sin(rx_0) + C_1 x_0 = 0 \tag{5.16}$$

$$u_P(x_0) = B_2 \sin(r(\ell - x_0)) + C_2(\ell - x_0) = 0 \tag{5.17}$$

$$u_L'(x_0) = B_1 r\cos(rx_0) + C_1 = -B_2 r\cos(r(\ell - x_0)) - C_2 = u_P'(x_0) \tag{5.18}$$

$$u_L''(x_0) = -B_1 r^2 \sin(rx_0) = -B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = u_P''(x_0).$$

Z rovnic (5.16) a (5.17) získáváme

$$C_1 = -\frac{B_1 \sin(rx_0)}{x_0}, \qquad C_2 = -\frac{B_2 \sin(r(\ell - x_0))}{\ell - x_0}. \tag{5.19}$$

Dosazením těchto koeficientů C_1, C_2 do rovnice (5.18) získáme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$
\begin{aligned}
&B_1\left(r\cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0}\right) + B_2\left(r\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{\sin(r(\ell - x_0))}{\ell - x_0}\right) = 0 \\
&-B_1 r^2 \sin(rx_0) + B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = 0,
\end{aligned}
$$

maticově zapsatelnou ve tvaru

$$
\begin{pmatrix} r\cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0} & r\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{\sin(r(\ell - x_0))}{\ell - x_0} \\ -r^2 \sin(rx_0) & r^2 \sin(r(\ell - x_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.20}
$$

Označíme-li

$$
\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} r\cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0} & r\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{\sin(r(\ell - x_0))}{\ell - x_0} \\ -r^2 \sin(rx_0) & r^2 \sin(r(\ell - x_0)) \end{pmatrix},
$$

pak z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne

$$
\begin{aligned}
\det\mathbf{M}(\lambda) = &\left(r\cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0}\right) r^2 \sin(r(\ell - x_0)) + \\
&+ r^2 \sin(rx_0)\left(r\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{\sin(r(\ell - x_0))}{\ell - x_0}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

což po zpětném dosazení $r = \sqrt{\lambda}$ přechází v rovnici

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)}{x_0}\right)\lambda\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)\right) + \\ + \lambda\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)\right)}{\ell - x_0}\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Proveďme na tomto místě pozorování, že pokud $\sin(\sqrt{\lambda}x_0) = 0$ resp. $\sin(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)) = 0$, pak díky požadavku na nulovost determinantu $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ dostáváme $\sin(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)) = 0$ resp. $\sin(\sqrt{\lambda}x_0) = 0$. Čísla $\lambda^P_{s_k} := \lambda_{s_k}$ taková, že pro $x_0 \in (0, \ell)$ platí

$$\sqrt{\lambda_{s_k}}x_0 = m_k\pi,\ m_k \in \mathbb{N} \qquad \text{a zároveň} \qquad \sqrt{\lambda_{s_k}}(\ell - x_0) = n_k\pi,\ n_k \in \mathbb{N},$$

tedy splňují rovnici (5.21). Jak snadno nahlédneme, taková čísla λ_{s_k} existují, právě když platí rovnost

$$\frac{m_k}{x_0} = \frac{n_k}{\ell - x_0},$$

a tedy, jelikož $m_k, n_k \in \mathbb{N}$, právě když

$$\frac{\ell - x_0}{x_0} \in \mathbb{Q}.$$

Definujme nyní číslo

$$\frac{a}{b} = \frac{\ell - x_0}{x_0} \in \mathbb{Q}, \tag{5.22}$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$ a jsou nesoudělná. Pak zjevně

$$n_k = m_k\frac{\ell - x_0}{x_0} = m_k\frac{a}{b}.$$

Aby platilo $n_k \in \mathbb{N}$, musí jistě platit, že $m_k = kb$, a tedy $n_k = ka$. Tím získáváme analytické vyjádření singulárních vlastních čísel

$$\lambda_{s_k} = \left(\frac{kb\pi}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{ka\pi}{\ell - x_0}\right)^2, \tag{5.23}$$

které tvoří nekonečnou posloupnost $\left\{\lambda^P_{s_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Nekonečná posloupnost singulárních vlastních čísel tedy bude existovat, právě když bude platit

$$\frac{\ell - x_0}{x_0} \in \mathbb{Q},$$

tedy

$$\frac{\ell - x_0}{x_0} = \frac{\ell}{x_0} - 1 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{\ell}{x_0} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{x_0}{\ell} \in \mathbb{Q}.$$

Nyní rovnici (5.21) podělíme výrazem

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}(x_0 - \ell)\right) \tag{5.24}$$

za předpokladu, že

$$\sqrt{\lambda}x_0 \neq m\pi,\ m \in \mathbb{N} \qquad \text{a zároveň} \qquad \sqrt{\lambda}(x_0 - \ell) \neq n\pi,\ n \in \mathbb{N}.$$

Podělením rovnice (5.21) výrazem (5.24) dostaneme rovnici

$$\sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}x_0\right) - \frac{1}{x_0} = -\sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)\right) + \frac{1}{\ell - x_0}. \tag{5.25}$$

Jelikož funkce (proměnné λ a parametru x_0)

$$f = f(\lambda, x_0) = \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}x_0\right) - \frac{1}{x_0}$$

je funkcí s definičním oborem

$$\mathrm{D}(f) = \left\{(0,\infty) \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left\{\left(\frac{m\pi}{x_0}\right)^2\right\}\right\}, \quad x_0 > 0$$

a s oborem hodnot $\mathrm{H}(f) = \mathbb{R}$ a funkce

$$g = g(\lambda, x_0, \ell) = -\sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}(\ell - x_0)\right) + \frac{1}{\ell - x_0}$$

je funkcí s definičním oborem

$$\mathrm{D}(g) = \left\{(0,\infty) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\left(\frac{n\pi}{\ell - x_0}\right)^2\right\}\right\}, \quad 0 < x_0 < \ell$$

a s oborem hodnot $\mathrm{H}(g) = \mathbb{R}$, přičemž funkce kotangens je periodická s periodou $\left(\frac{\pi}{x_0}\right)^2$ resp. $\left(\frac{\pi}{\ell - x_0}\right)^2$, je patrné, že funkce f a g mají nekonečně mnoho průsečíků. Rovnice (5.25) má tudíž na množině $\mathrm{D}(f) \cap \mathrm{D}(g)$ nekonečně mnoho kořenů $\lambda_k^P := \lambda_k$, a tedy existuje nekonečná posloupnost vlastních čísel $\left\{\lambda_k^P\right\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Pro vlastní čísla λ_k^P nyní obecně nalezneme zbylé koeficienty B_1, B_2 tak, aby vyhovovaly soustavě (5.20). Jelikož tedy $\det\mathbf{M}(\lambda_k^P) = 0$, pak ze soustavy (5.20) plyne

$$-B_1 \sin\left(r_k x_0\right) + B_2 \sin\left(r_k(\ell - x_0)\right) = 0. \tag{5.26}$$

Volbou $B_1 = K_k^P,\ K_k^P \in \mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kde symbolem $\mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P}$ označujeme množinu přípustných koeficientů K_k^P vzhledem k podmínce (5.8), pak z rovnice (5.26) získáváme

$$B_2 = K_k^P \frac{\sin(r_k x_0)}{\sin(r_k(\ell - x_0))}$$

a s použitím vztahů (5.19) dále dostáváme

$$C_1 = -K_k^P \frac{\sin(r_k x_0)}{x_0} \qquad \text{a} \qquad C_2 = -K_k^P \frac{\sin(r_k x_0)}{\ell - x_0}.$$

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$u_k^P(x) = \begin{cases} u_{k_L}^P(x) = K_k^P \left(\sin(r_k x) - \frac{\sin(r_k x_0)}{x_0} x\right), & x \in [0, x_0] \\ u_{k_P}^P(x) = K_k^P \left(\frac{\sin(r_k x_0)}{\sin(r_k(\ell - x_0))} \sin(r_k(\ell - x)) - \frac{\sin(r_k x_0)}{\ell - x_0}(\ell - x)\right), & x \in [x_0, \ell]. \end{cases}$$

K obecnému řešení dále potřebujeme znát množinu $\mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takovou, aby byla splněna přechodová podmínka (5.8). Potřebujeme-li tedy

$$\lim_{x \to x_0-} (u_{k_L}^P)'''(x) \leq \lim_{x \to x_0+} (u_{k_P}^P)'''(x),$$

pak

$$-K_k^P r_k^3 \cos(r_k x_0) \leq K_k^P \frac{\sin(r_k x_0)}{\sin(r_k(\ell - x_0))} r_k^3 \cos(r_k(\ell - x_0)),$$

což je po úpravě

$$K_k^P \left(\cos(r_k x_0) + \sin(r_k x_0) \mathrm{cotg}(r_k(\ell - x_0))\right) \geq 0. \tag{5.27}$$

Tedy

$$\mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P} = \left\{K_k^P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\ \mathrm{sign}\, K_k^P = \mathrm{sign}\left(\cos(r_k x_0) + \sin(r_k x_0) \mathrm{cotg}(r_k(\ell - x_0))\right)\right\},$$

pro $\cos(r_k x_0) + \sin(r_k x_0) \mathrm{cotg}(r_k(\ell - x_0)) \neq 0$ a

$$\mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ jinak.} \tag{5.28}$$

Poznamenejme, že rovnost

$$\mathrm{M}_\mathrm{k}^\mathrm{P} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{5.29}$$

by zřejmě platila, právě když by byly splněny rovnosti

$$\lim_{x \to x_0-} (u_{k_L}^P)'''(x) = (u_{k_L}^P)'''(x_0) = (u_{k_P}^P)'''(x_0) = \lim_{x \to x_0+} (u_{k_P}^P)'''(x),$$

a tedy byla splněna příslušnost

$$u_k^P \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^3((0, \ell)) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell)). \tag{5.30}$$

Rovněž snadno ukážeme, že rovnost (5.29) by platila, právě když by platila příslušnost

$$u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \tag{5.31}$$

neboť

$$\lim_{x\to x_0-} (u_{k_L}^P)''''(x) = (u_{k_L}^P)''''(x_0) \quad = \quad (u_{k_P}^P)''''(x_0) = \lim_{x\to x_0+} (u_{k_P}^P)''''(x),$$

protože platí

$$\begin{aligned} K_k^P r_k^4 \sin(r_k x_0) &= K_k^P r_k^4 \frac{\sin(r_k x_0)}{\sin(r_k(\ell - x_0))} \sin(r_k(\ell - x_0)) \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka 5.1 *Později ukážeme a zdůvodníme, proč případ (5.29) pojednáván v odstavci výše nemůže nastat.*

Dále nalezneme koeficienty B_1, B_2 k singulárním vlastní číslům $\lambda_{s_k}^P$. Jelikož tedy nutně platí

$$\sin(r_{s_k} x_0) = \sin(r_{s_k}(\ell - x_0)) = 0, \tag{5.32}$$

dostáváme ze soustavy (5.20)

$$B_1 \cos(r_{s_k} x_0) + B_2 \cos(r_{s_k}(\ell - x_0)) = 0,$$

a tedy volbou $B_1 = K_{s_k}^P,\ K_{s_k}^P \in \mathrm{M}_{\mathrm{s_k}}^{\mathrm{P}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dostáváme

$$B_2 = -K_{s_k}^P \frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))}.$$

Dále ze vztahu (5.32) a z rovnic (5.16), (5.17) plyne

$$C_1 = C_2 = 0,$$

a tedy dostáváme tvar obecného singulárního řešení

$$u_{s_k}^P(x) = \begin{cases} u_{s_{k_L}}^P(x) = K_{s_k}^P \sin(r_{s_k} x), & x \in [0, x_0] \\ u_{s_{k_P}}^P(x) = -K_{s_k}^P \frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} \sin(r_{s_k}(\ell - x)), & x \in [x_0, \ell]. \end{cases} \tag{5.33}$$

I k obecnému singulárnímu řešení potřebujeme znát dále množinu $\mathrm{M}_{\mathrm{s_k}}^{\mathrm{P}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takovou, aby byla splněna přechodová podmínka (5.8). Potřebujeme-li tedy

$$\lim_{x\to x_0-} (u_{s_{k_L}}^P)'''(x) \le \lim_{x\to x_0+} (u_{s_{k_P}}^P)'''(x),$$

pak

$$-K^P_{s_k} r^3_{s_k} \cos(r_{s_k} x_0) \leq -K^P_{s_k} \frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} r^3_{s_k} \cos(r_{s_k}(\ell - x_0)),$$

a nerovnost je jistě splněna pro

$$K^P_{s_k} \in \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{s_k}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{5.34}$$

Zároveň jistě platí, že

$$\lim_{x \to x_0 -} (u^P_{s_{k_L}})'''(x) = (u^P_{s_{k_L}})'''(x_0) = (u^P_{s_{k_P}})'''(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} (u^P_{s_{k_P}})'''(x),$$

tedy

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ u^P_{s_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^3((0,\ell)) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)).$$

Snadno navíc prokážeme, že dokonce

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ u^P_{s_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)),$$

neboť

$$\lim_{x \to x_0 -} (u^P_{s_{k_L}})''''(x) = (u^P_{s_{k_L}})''''(x_0) \quad = \quad (u^P_{s_{k_P}})''''(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} (u^P_{s_{k_P}})''''(x),$$

protože platí

$$\begin{aligned} K^P_{s_k} r^4_{s_k} \sin(r_{s_k} x_0) &= -K^P_{s_k} r^4_{s_k} \frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} \sin(r_{s_k}(\ell - x_0)) \\ K^P_{s_k} r^4_{s_k} \cdot 0 &= -K^P_{s_k} r^4_{s_k} \frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} \cdot 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Podívme se nyní na získaný tvar (5.33) singulárního řešení a proveďme následující úvahu. Nechť $x_0 \in (0,\ell)$, $\frac{x_0}{\ell} \in \mathbb{Q}$. Mějme funkce $f_{1_k}(x) = C_{1_k} \sin(c_k x)$ a $f_{2_k}(x) = C_{2_k} \sin(c_k(\ell - x))$, kde $C_{1_k}, C_{2_k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a $c_k \in (0,\infty)$ je takové, že

$$f_{1_k}(x_0) = f_{2_k}(x_0) = 0. \tag{5.35}$$

Nechť c_1 je nejmenší možné kladné reálné číslo pro které (5.35) platí. Definujme funkci

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{1_k}(x), & x \in [0, x_0] \\ f_{2_k}(x), & x \in [x_0, \ell]. \end{cases}$$

Položme si prve otázku, kdy bude tato spojitá funkce f_k spojitě diferencovatelná. Jak si snadno uvědomíme, mohou nastat dva případy. Prvním je případ, kdy bude platit, že

$$\text{existuje } \delta > 0 \text{ takové, že } \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f_k(x) < 0$$

nebo

$$\text{existuje } \delta > 0 \text{ takové, že } \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f_k(x) > 0.$$

Tomuto případu zjevně odpovídá zlom v první derivaci v bodě x_0.

Podivme se na druhý případ, tj. když

$$\begin{aligned}&\text{existuje } \delta > 0 \text{ takové, že}\\ &\forall x \in O_\delta(x_0) \setminus [x_0, \ell) : f_k(x) < 0 \text{ a zároveň } \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus (0, x_0] : f_k(x) > 0,\end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}&\text{existuje } \delta > 0 \text{ takové, že}\\ &\forall x \in O_\delta(x_0) \setminus [x_0, \ell) : f_k(x) > 0 \text{ a zároveň } \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus (0, x_0] : f_k(x) < 0.\end{aligned}$$

Je patrné, že pro zvolený bod

$$x_0 := x_{0_2} = \frac{p}{q}\ell,$$

kde q je sudé přirozené číslo a p je takové přirozené číslo, aby čísla p a q byla nesoudělná, dostáváme tento případ právě tehdy, když položíme

$$\operatorname{sign} C_{1_k} = \operatorname{sign}(-C_{2_k}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pro zvolený bod

$$x_0 := x_{0_1} = \frac{p}{q}\ell,$$

kde q je liché přirozené číslo a p je takové přirozené číslo, aby čísla p a q byla nesoudělná, dostáváme tento případ právě tehdy, když položíme

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign} C_{1_k} = \operatorname{sign} C_{2_k}, \quad \text{pro } k \text{ lichá}\\ &\operatorname{sign} C_{1_k} = \operatorname{sign}(-C_{2_k}), \quad \text{pro } k \text{ sudá}.\end{aligned}$$

Funkce f_k bude spojitě diferencovatelná právě tehdy, když budou splněny tyto signové podmínky a bude navíc platit $C_k = |C_{1_k}| = |C_{2_k}|$. Uvědomme si však, že pro tak zvolená C_{1_k}, C_{2_k} potom dostáváme buďto

$$f_k(x) \equiv C_k \sin(c_k x), \quad \text{nebo} \quad f_k(x) \equiv -C_k \sin(c_k x) \quad \text{na intervalu } (0, \ell),$$

což jsou patrně funkce třídy $\mathrm{C}^4((0,\ell))$. Z uvedeného tedy plyne, že pro čísla tvaru x_{0_2} platí:

$$f_k \in \mathrm{C}^4((0,\ell)) \quad \text{právě tehdy, když} \quad C_{1_k} = -C_{2_k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

a pro čísla tvaru x_{0_1} platí:

$$f_k \in \mathrm{C}^4((0,\ell)) \quad \text{právě tehdy, když} \quad C_{1_k} = C_{2_k}, \quad \text{pro } k \text{ lichá}$$
$$f_k \in \mathrm{C}^4((0,\ell)) \quad \text{právě tehdy, když} \quad C_{1_k} = -C_{2_k}, \quad \text{pro } k \text{ sudá.}$$

To pro náš získaný tvar obecného singulárního řešení (5.33) jistě znamená, že

$$\frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ x_0 := x_{0_2}$$

a

$$\frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} = -1, \quad \text{pro } k \text{ lichá},\ x_0 := x_{0_1}$$
$$\frac{\cos(r_{s_k} x_0)}{\cos(r_{s_k}(\ell - x_0))} = 1, \quad \text{pro } k \text{ sudá},\ x_0 := x_{0_1}.$$

Tím jsme dokázali, že tvar singulárního řešení je ekvivalentní s tvarem obecného řešení v úloze bez překážky (3.11), a tedy, že každé řešení $u \in \mathrm{C}^4((0,\ell))$ přísluší právě vlastnímu číslu $\lambda^P_{s_k}$. V důsledku jsme tak dokázali, že

$$\forall k \in \mathbb{N}:\ u^P_k \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$$

a zároveň

$$\forall k \in \mathbb{N}:\ u^P_k \notin \mathrm{C}^3((0,\ell))$$

(viz vyplývající ekvivalence výroků (5.30), (5.31)).

Nyní definujme množiny

$$\mathrm{L_s} = \left\{\lambda^P_{s_k};\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ a } \mathrm{L}' = \left\{\lambda^P_k;\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

a jejich sjednocení

$$\mathrm{L} = \mathrm{L_s} \cup \mathrm{L}'.$$

Takové sjednocení L bude zřejmě udávat množinu všech vlastních čísel. Množině $\mathrm{L_s}$, jak jsme ukázali, odpovídají singulární vlastní funkce $u^P_{s_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$, a tedy je množina těchto singulárních vlastních čísel resp. funkcí podmnožinou množiny vlastních

čísel resp. funkcí úlohy bez překážky se stejnými okrajovými podmínkami. Množina L′ je naopak množina vlastních čísel λ_k^P, jimž odpovídají vlastní funkce
$u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$ a zároveň $u_k^P \notin \mathrm{C}^3((0,\ell))$.

Příklad: Pro další postoupení v úloze nyní zvolme $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$. Jelikož

$$\frac{\ell - x_0}{x_0} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

a

$$\frac{\ell - x_0}{x_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1,\ b = 2$$

(viz (5.22)), získáváme analytické vyjádření nekonečné posloupnosti singulárních vlastních čísel (viz (5.23))

$$\left\{\lambda_{s_k}^P\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{2k\pi}{x_0}\right)^2\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{9k^2\pi^2\right\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Pro $k = 1$ tedy

$$\lambda_{s_1}^P = 9\pi^2 \doteq 88.83.$$

Pro nalezení nesingulárních vlastních čísel použijeme rovnici (5.25), která dosazením $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$ přejde do podoby

$$\sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{9}{2} = 0.$$

Numerickými metodami nyní nalezneme první dvě nesingulární vlastní čísla, tedy

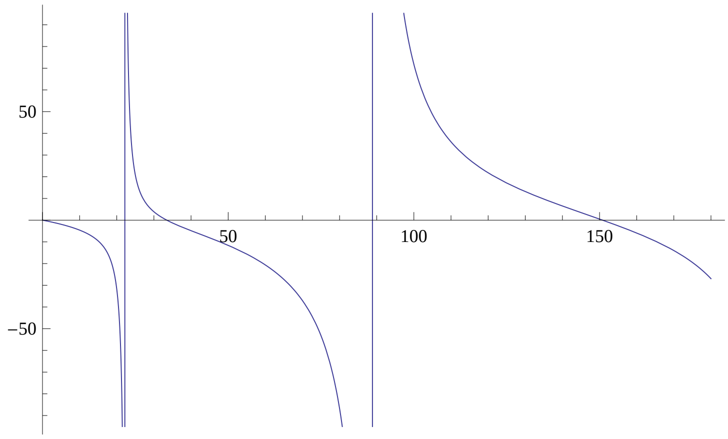
$$\lambda_1^P \doteq 33.47, \qquad \lambda_2^P \doteq 150.81,$$

které ilustrativně podkládá Obrázek 5.1 zobrazující graf funkce

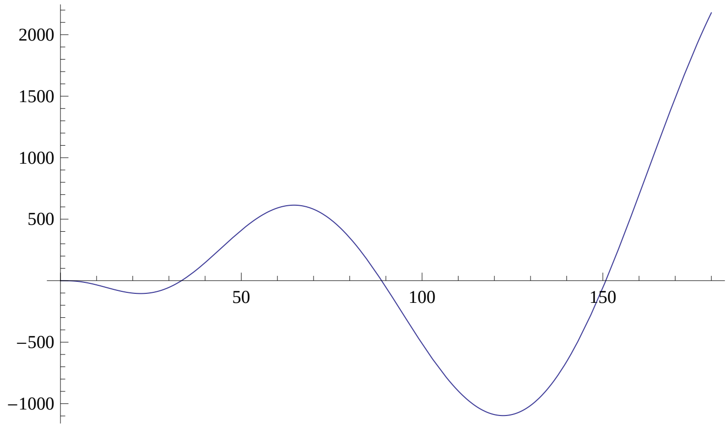
$$w(\lambda) = \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{9}{2}.$$

Dohromady tedy máme tři vlastní čísla $\lambda_1^P < \lambda_{s_1}^P < \lambda_2^P$, které ilustrativně podkládá Obrázek 5.2 zobrazující graf funkce

$$\begin{aligned} d(\lambda) = &\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right) \cdot \lambda\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \\ &+ \lambda\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) \cdot \left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - 3\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.36}$$



Obrázek 5.1: $w(\lambda) = \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\frac{1}{3}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\mathrm{cotg}\frac{2}{3}\sqrt{\lambda} - \frac{9}{2}$



Obrázek 5.2: Funkce $d(\lambda)$ - (5.36)

Našim podmínkám $\ell = 1, x_0 = \frac{2}{3}$ a jim příslušným vlastním číslům

$$\lambda_1^P \doteq 33.47, \qquad \lambda_{s_1}^P \doteq 88.83, \qquad \lambda_2^P \doteq 150.81$$

tak odpovídají vlastní funkce

$$u_1^P(x) = \begin{cases} u_{1_L}^P(x) = K_1^P \left(\sin\left(\sqrt{33.47}x\right) + 0.98x\right), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_P}^P(x) = K_1^P \left(-0.7\sin\left(\sqrt{33.47}(1-x)\right) + 1.97(1-x)\right), & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$$u_{s_1}^P(x) = \begin{cases} u_{s_{1_L}}^P(x) = K_{s_1}^P \sin(3\pi x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{s_{1_P}}^P(x) = K_{s_1}^P \sin(3\pi(1-x)), & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$$u_2^P(x) = \begin{cases} u_{2_L}^P(x) = K_2^P \left(\sin\left(\sqrt{150.81}x\right) - 1.42x\right), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{2_P}^P(x) = K_2^P \left(-1.16\sin\left(\sqrt{150.81}(1-x)\right) - 2.84(1-x)\right), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde $K_{s_1}^P \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ K_1^P \in \mathrm{M}_1^{\mathrm{P}},\ K_2^P \in \mathrm{M}_2^{\mathrm{P}}$.

Dále vidíme, že pro $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3},\ r_1 = \sqrt{33.47}$ platí

$$\operatorname{sign}\left(\cos(r_k x_0) + \sin\left(r_k x_0\right)\operatorname{cotg}(r_k(\ell - x_0))\right) = -1,$$

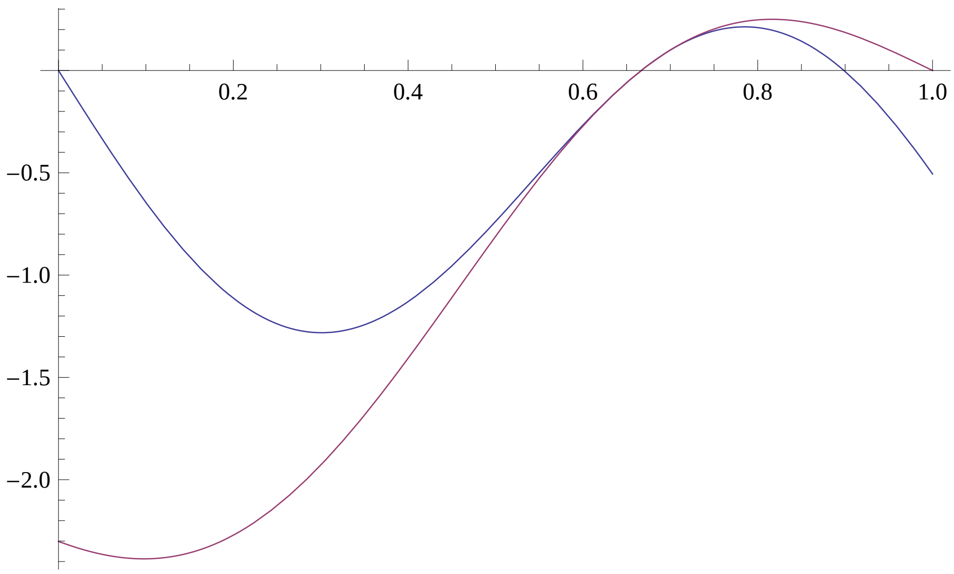
tedy

$$K_1^P \in \mathrm{M}_1^{\mathrm{P}} = (-\infty, 0).$$

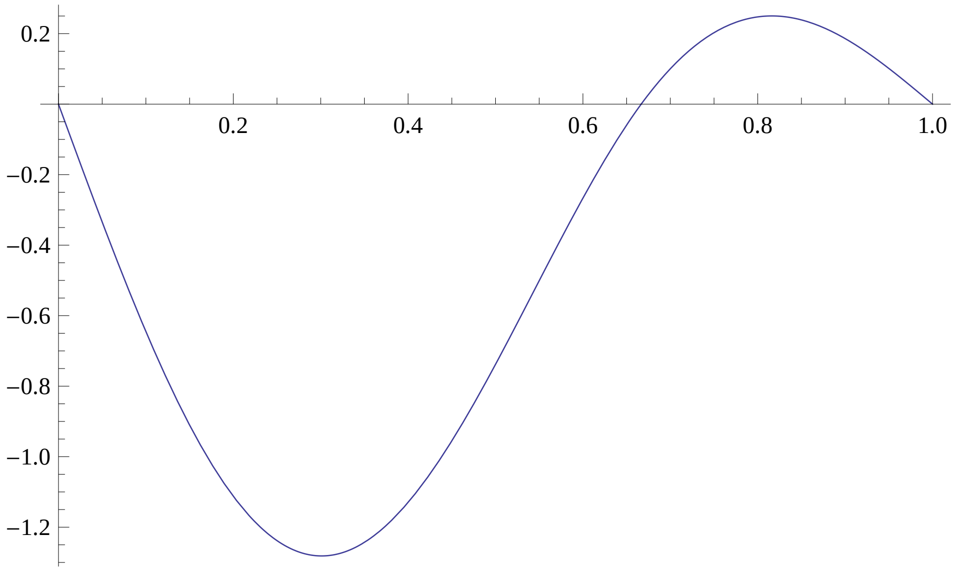
Analogicky pro $u_2^P(x)$ bude platit

$$K_2^P \in \mathrm{M}_2^{\mathrm{P}} = (0, \infty).$$

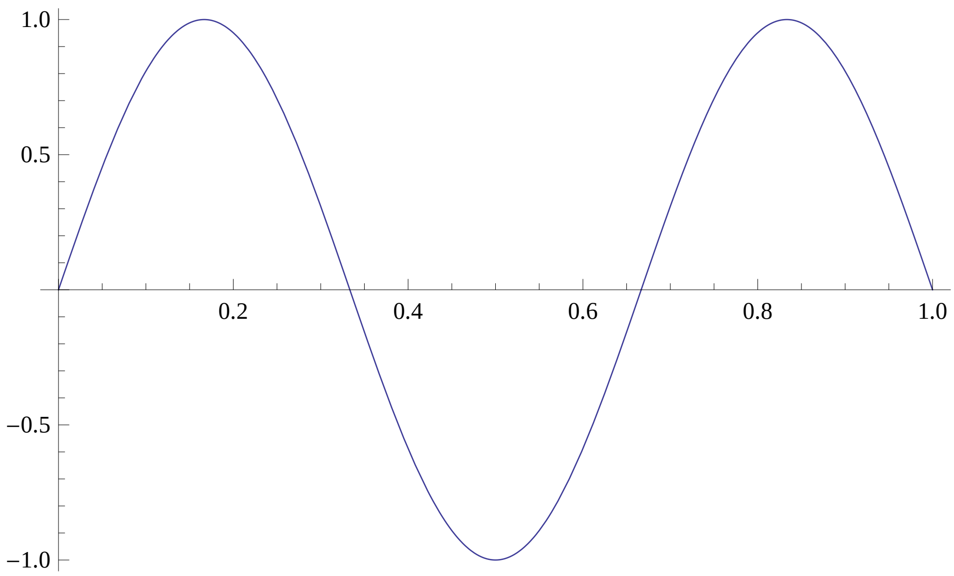
Uvedené funkce vykreslujeme na Obrázcích 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7.



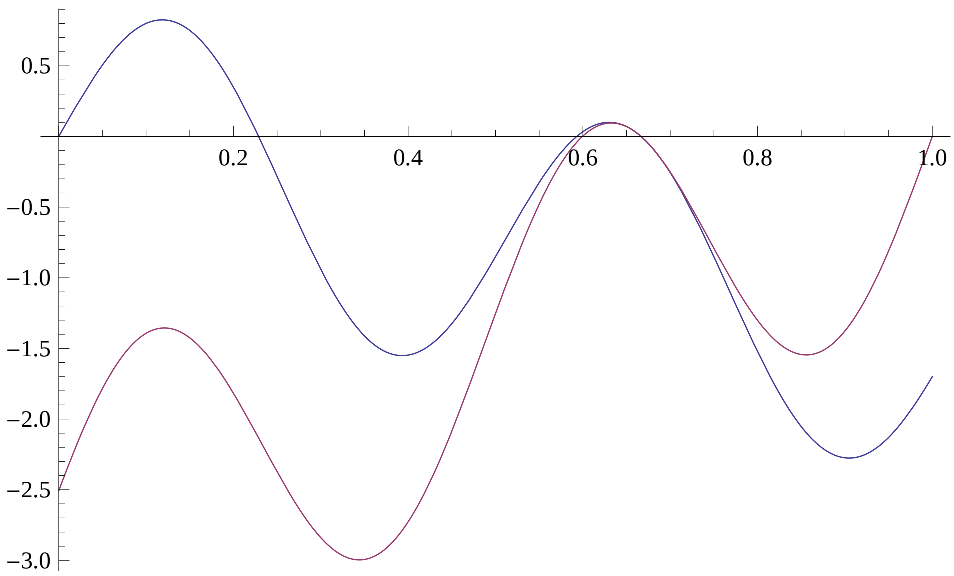
Obrázek 5.3: Funkce $u_{1_L}^P(x)$-modrá, $u_{1_P}^P(x)$-fialová na intevralu $[0, 1]$, $K_1^P = -1$



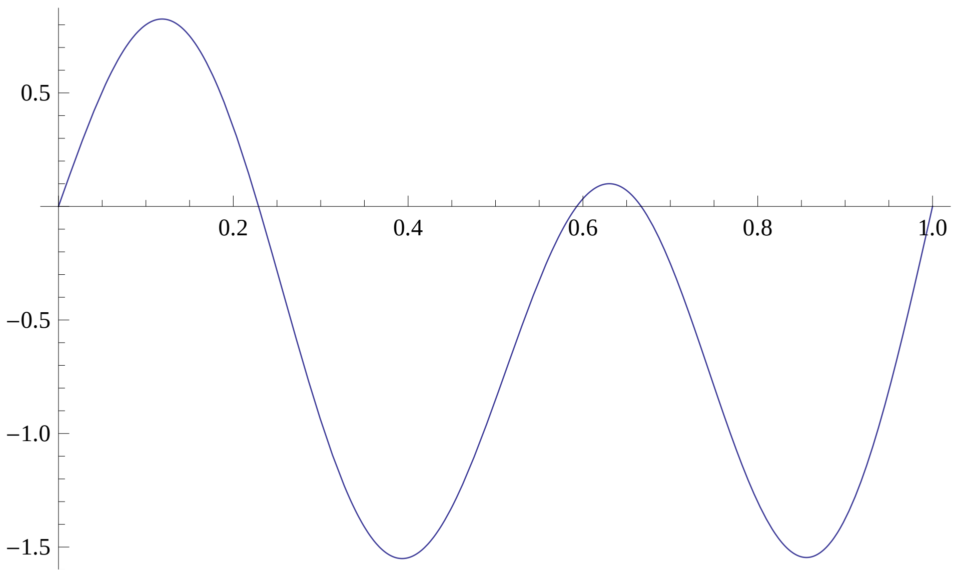
Obrázek 5.4: Funkce $u_1^P(x)$ na intevralu $[0,1]$, $K_1^P = -1$



Obrázek 5.5: Funkce $u_{s_1}^P(x)$ na intevralu $[0,1]$, $K_{s_1}^P = 1$



Obrázek 5.6: Funkce $u^P_{2_L}(x)$-modrá, $u^P_{2_P}(x)$-fialová na intevralu $[0, 1]$, $K^P_2 = 1$



Obrázek 5.7: Funkce $u^P_2(x)$ na intevralu $[0, 1]$, $K^P_2 = 1$

5.2 Okrajové podmínky 0-2, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{5.37}$$

$$u''(0) = u'(\ell) = 0 \tag{5.38}$$

a přechodovými podmínkami v bodě $x_0 \in (0, \ell)$

$$\begin{aligned} &u(x_0) = 0 \\ &u'_-(x_0) = u'_+(x_0) \\ &u''_-(x_0) = u''_+(x_0) \\ &\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \le \lim_{x \to x_0+} u'''(x). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Nechť tedy $u \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell))$.

S využitím volby (5.4), vztahů (5.9), (5.10) a okrajových podmínek (5.37), (5.38) dostáváme

$$u(0) = u_L(0) = A_1 \cos(r \cdot 0) + B_1 \sin(r \cdot 0) + C_1 \cdot 0 + D_1 = A_1 + D_1 = 0 \tag{5.40}$$

$$u(\ell) = u_P(\ell) = A_2 \cos(r \cdot 0) + B_2 \sin(r \cdot 0) + C_2 \cdot 0 + D_2 = A_2 + D_2 = 0 \tag{5.41}$$

$$u''(0) = u''_L(0) = -A_1 r^2 \cos(r \cdot 0) - B_1 r^2 \sin(r \cdot 0) = -A_1 r^2 = 0 \tag{5.42}$$

$$u'(\ell) = u'_P(\ell) = A_2 r \sin(r \cdot 0) - B_2 r \cos(r \cdot 0) - C_2 = -B_2 r - C_2 = 0 \tag{5.43}$$

Dále s využitím přechodových podmínek (5.39) resp. vztahů (5.5), (5.6), (5.7) dostáváme

$$\begin{aligned} &u_L(x_0) = A_1 \cos(r x_0) + B_1 \sin(r x_0) + C_1 x_0 + D_1 = 0 \\ &u_P(x_0) = A_2 \cos(r(\ell - x_0)) + B_2 \sin(r(\ell - x_0)) + C_2(\ell - x_0) + D_2 = 0 \\ &u'_L(x_0) = -A_1 r \sin(r x_0) + B_1 r \cos(r x_0) + C_1 = \\ &\qquad = A_2 r \sin(r(\ell - x_0)) - B_2 r \cos(r(\ell - x_0)) - C_2 = u'_P(x_0) \\ &u''_L(x_0) = -A_1 r^2 \cos(r x_0) - B_1 r^2 \sin(r x_0) = \\ &\qquad = -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = u''_P(x_0). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Jelikož $r = \sqrt{\lambda} > 0$ (viz (5.9)), z rovnic (5.40), (5.42) plyne $A_1 = D_1 = 0$. Z rovnice (5.41) dále plyne $D_2 = -A_2$ a z rovnice (5.43) plyne $C_2 = -B_2 r$. Soustava rovnic (5.44) je tak redukována na soustavu

$$u_L(x_0) = B_1 \sin(rx_0) + C_1 x_0 = 0 \tag{5.45}$$

$$u_P(x_0) = A_2(\cos(r(\ell - x_0)) - 1) + B_2(\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)) = 0 \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned} u'_L(x_0) &= B_1 r \cos(rx_0) + C_1 = \\ &= A_2 r \sin(r(\ell - x_0)) - B_2 r(\cos(r(\ell - x_0)) - 1) = u'_P(x_0) \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} u''_L(x_0) &= -B_1 r^2 \sin(rx_0) = \\ &= -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = \quad u''_P(x_0). \end{aligned} \tag{5.48}$$

Z rovnic (5.45) a (5.46) získáváme

$$C_1 = -B_1 \frac{\sin(rx_0)}{x_0}, \qquad A_2 = -B_2 \frac{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)}{\cos(r(\ell - x_0)) - 1}. \tag{5.49}$$

Dosazením těchto koeficientů C_1, A_2 do rovnic (5.47), (5.48) získáme po úpravě následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} &B_1 \left(r \cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0} \right) + \\ &+ B_2 r \left(-\frac{r(\ell - x_0) \sin(r(\ell - x_0))}{\cos(r(\ell - x_0)) - 1} - 2 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_1 \left(r^2 \sin(rx_0) \right) + \\ &+ B_2 r^2 \left(\frac{\sin(r(\ell - x_0)) - (r(\ell - x_0)) \cos(r(\ell - x_0))}{\cos(r(\ell - x_0)) - 1} \right) = 0, \end{aligned}$$

maticově zapsatelnou ve tvaru

$$\mathbf{M}(\lambda) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.50}$$

kde

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} r \cos(rx_0) - \frac{\sin(rx_0)}{x_0} & r \left(-\frac{r(\ell - x_0) \sin(r(\ell - x_0))}{\cos(r(\ell - x_0)) - 1} - 2 \right) \\ r^2 \sin(rx_0) & r^2 \left(\frac{\sin(r(\ell - x_0)) - (r(\ell - x_0)) \cos(r(\ell - x_0))}{\cos(r(\ell - x_0)) - 1} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det\mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne

$$
\begin{aligned}
&-r^3 \sin(rx_0)\left(-\frac{r(\ell-x_0)\sin(r(\ell-x_0))}{\cos(r(\ell-x_0))-1}-2\right)+\\
&+r^2\left(r\cos(rx_0)-\frac{\sin(rx_0)}{x_0}\right)\times\\
&\times\left(\frac{\sin(r(\ell-x_0))-(r(\ell-x_0))\cos(r(\ell-x_0))}{\cos(r(\ell-x_0))-1}\right)=0,
\end{aligned}
$$

což po zpětném dosazení $r = \sqrt{\lambda}$ přechází v rovnici

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{\lambda^3}\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)\left(-\frac{\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-1}-2\right)+\\
&+\lambda\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)}{x_0}\right)\times\\
&\times\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-1}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

Definičním oborem této rovnice o neznámé λ je, jak snadno nahlédneme, množina

$$
\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2;\ m \in \mathbb{N}\right\}.
$$

Tedy zřejmě bude kromě nalezení kořenů λ rovnice (5.51) nutné zjistit, zda pro některá $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2$, $m \in \mathbb{N}$ není rovněž možné najít ne vesměs nulové koeficienty $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ obecného řešení u naší úlohy, tedy, zda některá čísla $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2$, $m \in \mathbb{N}$ nejsou rovněž vlastními čísly, třebaže je rovnicí (5.51) nenajdeme.

Předpokládejme tedy, že $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2$, $m \in \mathbb{N}$. Pak $\cos(r(\ell-x_0)) - 1 = 0$, a tedy $\sin(r(\ell-x_0)) = 0$, a soustava rovnic (5.45), (5.46), (5.47), (5.48) je redukována na soustavu

$$u_L(x_0) = B_1 \sin(rx_0) + C_1 x_0 = 0 \tag{5.52}$$

$$u_P(x_0) = -B_2 r(\ell - x_0) = 0 \tag{5.53}$$

$$u'_L(x_0) = B_1 r\cos(rx_0) + C_1 = 0 = u'_P(x_0) \tag{5.54}$$

$$u''_L(x_0) = -B_1 r^2 \sin(rx_0) = -A_2 r^2 = u''_P(x_0). \tag{5.55}$$

Z rovnic (5.52), (5.53) získáváme

$$C_1 = -B_1\frac{\sin(rx_0)}{x_0}, \qquad B_2 = 0. \tag{5.56}$$

Dosazením těchto koeficientů do rovnic (5.54), (5.55) dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$
\begin{aligned}
&B_1\left(r\cos(rx_0)-\frac{\sin(rx_0)}{x_0}\right)=0\\
&B_1\left(-r^2\sin(rx_0)\right)+A_2r^2=0,
\end{aligned}
$$

maticově zapsatelnou ve tvaru

$$
\begin{pmatrix} r\cos(rx_0)-\frac{\sin(rx_0)}{x_0} & 0\\ -r^2\sin(rx_0) & r^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{5.57}
$$

Nenulové koeficienty B_1, A_2 bude tedy patrně možno získat, bude-li $\lambda=\left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2,\ m\in\mathbb{N}$ splňovat rovnost

$$
\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)}{x_0}=0. \tag{5.58}
$$

Definujme

$$
\mathrm{L}_1 = \{\lambda\in\mathbb{R};\ \det\mathbf{M}(\lambda)=0\}=\left\{\lambda^P_{1_1},\lambda^P_{1_2},\lambda^P_{1_3},...\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_2 &= \left\{\lambda\in\mathbb{R};\ \left(\lambda=\left(\frac{2m\pi}{\ell-x_0}\right)^2,\ m\in\mathbb{N}\right)\text{ a zároveň }\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)}{x_0}=0\right)\right\}=\\
&= \left\{\lambda^P_{2_1},\lambda^P_{2_2},\lambda^P_{2_3},...\right\}
\end{aligned}
$$

Množinou všech vlastních čísel je poté zřejmě

$$
\mathrm{L}=\mathrm{L}_1\cup\mathrm{L}_2.
$$

Pro vlastní čísla $\lambda^P_{1_k}$ nyní obecně nalezneme koeficienty B_1, B_2 tak, aby vyhovovaly soustavě (5.50). Jelikož tedy $\det\mathbf{M}(\lambda^P_k)=0$, pak ze soustavy (5.50) plyne

$$
\begin{aligned}
&B_1\left(r^2_{1_k}\sin(r_{1_k}x_0)\right)+\\
&+B_2r^2_{1_k}\left(\frac{\sin(r_{1_k}(\ell-x_0))-(r_{1_k}(\ell-x_0))\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))}{\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))-1}\right)=0.
\end{aligned} \tag{5.59}
$$

Volbou $B_2=K^P_{1_k},\ K^P_{1_k}\in\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{1_k}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ z rovnice (5.59) získáváme

$$
B_1=-K^P_{1_k}\frac{\sin(r_{1_k}(\ell-x_0))-(r_{1_k}(\ell-x_0))\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))}{\sin(r_{1_k}x_0)(\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))-1)}
$$

a s použitím vztahů (5.49) dále dostáváme

$$
C_1=K^P_{1_k}\frac{\sin(r_{1_k}(\ell-x_0))-(r_{1_k}(\ell-x_0))\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))}{x_0(\cos(r_{1_k}(\ell-x_0))-1)}
$$

a

$$A_2 = -K_{1_k}^P \frac{\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - r_{1_k}(\ell - x_0)}{\cos(r_{1_k}(\ell - x_0)) - 1}.$$

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$u_{1_k}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{k_L}}^P(x), & x \in [0, x_0] \\ u_{1_{k_P}}^P(x), & x \in [x_0, \ell], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{1_{k_L}}^P(x) &= K_{1_k}^P \frac{\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - (r_{1_k}(\ell - x_0))\cos(r_{1_k}(\ell - x_0))}{\cos(r_{1_k}(\ell - x_0)) - 1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{x}{x_0} - \frac{\sin(r_{1_k}x)}{\sin(r_{1_k}x_0)}\right) \\ u_{1_{k_P}}^P(x) &= K_{1_k}^P \left[\frac{\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - r_{1_k}(\ell - x_0)}{\cos(r_{1_k}(\ell - x_0)) - 1}(1 - \cos(r_{1_k}(\ell - x))) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(r_{1_k}(\ell - x)) - r_{1_k}(\ell - x)\right]. \end{aligned}$$

Potřebujeme však znát ještě množinu $\mathrm{M}_{1_k}^{\mathrm{P}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takovou, aby byla splněna přechodová podmínka (5.8). Potřebujeme-li tedy

$$\lim_{x \to x_0-} (u_{1_{k_L}}^P)'''(x) \leq \lim_{x \to x_0+} (u_{1_{k_P}}^P)'''(x),$$

pak

$$\begin{aligned} K_{1_k}^P &\left(\frac{\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - (r_{1_k}(\ell - x_0))\cos(r_{1_k}(\ell - x_0))}{\sin(r_{1_k}x_0)(\cos(r_{1_k}(\ell - x_0)) - 1)}\cos(r_{1_k}x_0) - \right. \\ &\left. - \frac{\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - r_{1_k}(\ell - x_0)}{\cos(r_{1_k}(\ell - x_0)) - 1}\sin(r_{1_k}(\ell - x_0)) - \cos(r_{1_k}(\ell - x_0))\right) \leq 0, \end{aligned} \tag{5.60}$$

a tedy

$$\mathrm{M}_{1_k}^{\mathrm{P}} = \left\{K_{1_k}^P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\ \text{platí nerovnost (5.60)}\right\}.$$

Zřejmě přitom

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}_{1_k}^{\mathrm{P}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0-} (u_{1_{k_L}}^P)'''(x) = (u_{1_{k_L}}^P)'''(x_0) = (u_{1_{k_P}}^P)'''(x_0) = \lim_{x \to x_0+} (u_{1_{k_P}}^P)'''(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{1_k} \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^3((0, \ell)) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell)). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Snadno navíc prokážeme, že

$$\mathrm{M}_{1_k}^{\mathrm{P}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow u_{1_k} \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, \ell)), \tag{5.62}$$

neboť

$$\lim_{x\to x_0-}(u^P_{1_{k_L}})''''(x) = (u^P_{1_{k_L}})''''(x_0) = (u^P_{1_{k_P}})''''(x_0) = \lim_{x\to x_0+}(u^P_{1_{k_P}})''''(x),$$

protože platí

$$\begin{aligned} &-\left(\sin\left(r_{1_k}(\ell-x_0)\right) - r_{1_k}(\ell-x_0)\cos\left(r_{1_k}(\ell-x_0)\right)\right) = \\ &= r_{1_k}(\ell-x_0)\cos\left(r_{1_k}(\ell-x_0)\right) - \sin\left(r_{1_k}(\ell-x_0)\right). \end{aligned} \tag{5.63}$$

Nyní obecně nalezneme koeficienty B_1, A_2 tak, aby vyhovovaly soustavě (5.57) pro vlastní čísla $\lambda^P_{2_k}$. Jelikož determinant matice tuto soustavu reprezentující je nulový, platí

$$A_2 - B_1\sin\left(r_{2_k}x_0\right) = 0. \tag{5.64}$$

Volbou $B_1 = K^P_{2_k},\ K^P_{2_k} \in \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{2_\mathrm{k}} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ z rovnice (5.64) dostáváme

$$A_2 = K^P_{2_k}\sin\left(r_{2_k}x_0\right)$$

a s použitím vztahů (5.56) dále dostáváme

$$C_1 = -K^P_{2_k}\frac{\sin\left(r_{2_k}x_0\right)}{x_0}.$$

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$u^P_{2_k}(x) = \begin{cases} u^P_{2_{k_L}}(x) = K^P_{2_k}\left(\sin\left(r_{2_k}x\right) - \frac{\sin\left(r_{2_k}x_0\right)}{x_0}x\right), & x\in[0,x_0] \\ u^P_{2_{k_P}}(x) = K^P_{2_k}\sin\left(r_{2_k}x_0\right)\left(\cos\left(r_{2_k}(\ell-x)\right)-1\right), & x\in[x_0,\ell]. \end{cases}$$

Dále zde potřebujeme znát množinu $\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{2_\mathrm{k}} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ takovou, aby byla splněna přechodová podmínka (5.8). Potřebujeme-li tedy

$$\lim_{x\to x_0-}(u^P_{2_{k_L}})'''(x) \le \lim_{x\to x_0+}(u^P_{2_{k_P}})'''(x),$$

pak

$$K^P_{2_k}\left(\cos\left(r_{2_k}x_0\right) - \sin\left(r_{2_k}x_0\right)\sin\left(r_{2_k}(\ell-x_0)\right)\right) \ge 0. \tag{5.65}$$

Jelikož

$$r_{2_k}(\ell-x_0) = 2m\pi, \quad m\in\mathbb{N}$$

dostáváme

$$K^P_{2_k}\cos\left(r_{2_k}x_0\right) \ge 0.$$

Aby tedy byla splněna nerovnost (5.65), musí jistě platit, že je-li

$$\left(r_{2_k}x_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ a zároveň } \left(r_{2_k}(\ell - x_0) = 2m\pi\right); \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{5.66}$$

pak

$$\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{2_{\mathrm{k}}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

a je-li pravda

$$\left(r_{2_k}x_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ a zároveň } \left(r_{2_k}(\ell - x_0) = 2m\pi\right); \quad m, n \in \mathbb{N},$$

pak

$$\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{2_{\mathrm{k}}} = \left\{K^P_{2_k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\ \operatorname{sign} K^P_{2_k} = \operatorname{sign}\left(\cos\left(r_{2_k}x_0\right)\right)\right\}.$$

Podmínka (5.66) by byla splněna, právě když by platila rovnost

$$\lim_{x\to x_0-}(u^P_{2_{k_L}})'''(x) = (u^P_{2_{k_L}})'''(x_0) = (u^P_{2_{k_P}})'''(x_0) = \lim_{x\to x_0+}(u^P_{2_{k_P}})'''(x),$$

a tedy by platila příslušnost

$$u^P_{2_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^3((0,\ell)) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)). \tag{5.67}$$

Navíc prokážeme, že podmínka (5.66) by byla platná, právě když by platila příslušnost

$$u^P_{2_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \tag{5.68}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0-}(u^P_{2_{k_L}})''''(x) = (u^P_{2_{k_L}})''''(x_0) &= (u^P_{2_{k_P}})''''(x_0) = \lim_{x\to x_0+}(u^P_{2_{k_P}})''''(x) \\
K^P_{2_k} r^4_{2_k} \sin\left(r_{2_k}x_0\right) &= K^P_{2_k} r^4_{2_k} \sin\left(r_{2_k}x_0\right)\cos\left(r_{2_k}(\ell - x_0)\right) \\
\cos\left(r_{2_k}(\ell - x_0)\right) &= 1.
\end{aligned}$$

Jelikož však pro žádné $\lambda = r^2_{2_k}$ splňující podmínku (5.66) není splněna rovnost (5.58), neboť

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{x_0}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{x_0} \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.69}$$

tak ani neexistuje žádné $k \in \mathbb{N}$, pro které je splněna podmínka (5.66). Tedy platí

$$\forall k \in \mathbb{N}:\ u^P_{2_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$$

a zároveň

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ u^P_{2_k} \notin \mathrm{C}^3((0,\ell)).$$

Množině L_1, jak jsme ukázali, odpovídají obecně vlastní funkce $u^P_{1_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$. Množině L_2 pak odpovídají vlastní funkce $u^P_{2_k} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$ a zároveň $u^P_{2_k} \notin \mathrm{C}^3((0,\ell))$. Upozorněme, že $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2 = \emptyset$.

Příklad: Pro další postoupení v úloze nyní zvolme $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$.

K nalezení prvních třech vlastních čísel, tj. $\lambda^P_{1_1}, \lambda^P_{1_2}, \lambda^P_{1_3}$, použijeme rovnici (5.51). Dosazením $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$ do této rovnice získáváme rovnici

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{\lambda^3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{3\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)}-2\right)+ \\
&+\lambda\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right)\times \\
&\times\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1}\right)=0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Tuto rovnici řešíme numericky, a získáváme tak její první tři řešení na intervalu $(0,\infty)$, tj. první tři vlastní čísla

$$\lambda^P_{1_1} \doteq 36.31, \qquad \lambda^P_{1_2} \doteq 104.22, \qquad \lambda^P_{1_3} \doteq 195.20.$$

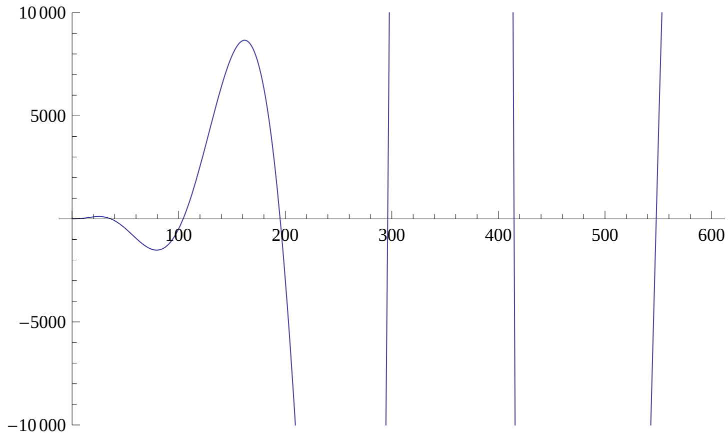
Nejmenší možný prvek množiny L_2 by byl pro zadané podmínky $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$ roven

$$\left(\frac{2\pi}{\ell - x_0}\right)^2 = 36\pi^2 \doteq 355.31.$$

Snadno se však přesvědčíme, že $\lambda = \left(\frac{2\pi}{\ell - x_0}\right)^2$ nesplňuje rovnici (5.58), a tedy se nejedná o vlastní číslo. V našem příkladu se tedy - vzhledem k uvažovanému intervalu - s konkrétními prvky množiny L_2, tj. s vlastními čísly $\lambda^P_{2_k}$, nesetkáme.

Vlastní čísla $\lambda^P_{1_1}, \lambda^P_{1_2}, \lambda^P_{1_3}$ ilustrativně pokládá Obrázek 5.8 zobrazující graf funkce

$$\begin{aligned}
d(\lambda) = &-\sqrt{\lambda^3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{3\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)}-2\right)+ \\
&+\lambda\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right)\times \\
&\times\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1}\right).
\end{aligned} \tag{5.71}$$



Obrázek 5.8: Funkce $d(\lambda)$ - (5.71)

Našim podmínkám $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}$ a jim příslušným vlastním číslům

$$\lambda_{1_1}^P = 36.31, \quad \lambda_{1_2}^P = 104.22, \quad \lambda_{1_3}^P = 195.20$$

tak odpovídají vlastní funkce

$$u_{1_1}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{1_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{1_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$u_{1_{1_L}}^P(x) = K_{1_1}^P(-1.61 \sin(\sqrt{36.31}x) - 1.85x)$$
$$u_{1_{1_P}}^P(x) = K_{1_1}^P\left(0.77\left(1 - \cos(\sqrt{36.31}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{36.31}(1-x)) - \sqrt{36.31}(1-x)\right),$$

dále

$$u_{1_2}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{2_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{2_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$u_{1_{2_L}}^P(x) = K_{1_2}^P(3.09 \sin(\sqrt{104.22}x) - 2.31x)$$
$$u_{1_{2_P}}^P(x) = K_{1_2}^P\left(1.86\left(1 - \cos(\sqrt{104.22}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{104.22}(1-x)) - \sqrt{104.22}(1-x)\right),$$

a nakonec

$$u_{1_3}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{3_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{3_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$u^P_{1_{3_L}}(x) = K^P_{1_3}(-6.37 \sin(\sqrt{195.20}x) + 1.05x)$$
$$u^P_{1_{3_P}}(x) = K^P_{1_3}\left(5.36\left(1 - \cos(\sqrt{195.20}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{195.20}(1-x)) - \sqrt{195.20}(1-x)\right).$$

Dále určíme množiny $\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{1_{\mathrm{k}}}$. Pro $k = 1$, jak snadno zjistíme, je nerovnost (5.60) splněna, je-li

$$K^P_{1_1} \in (0, \infty) = \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{1_1}.$$

Pro $k = 2$ analogicky platí

$$K^P_{1_2} \in (0, \infty) = \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{1_2}$$

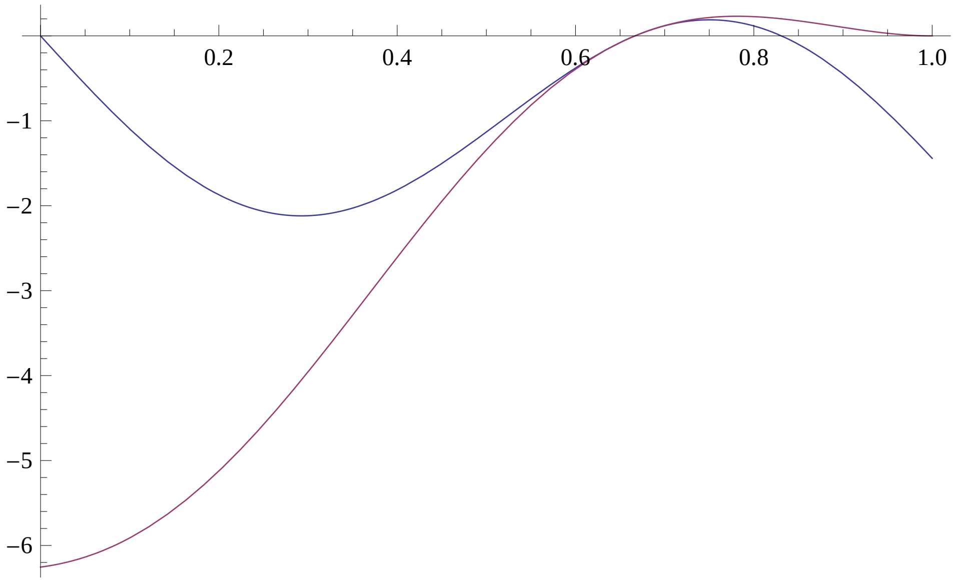
a pro $k = 3$ platí rovněž

$$K^P_{1_3} \in (0, \infty) = \mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{1_3}.$$

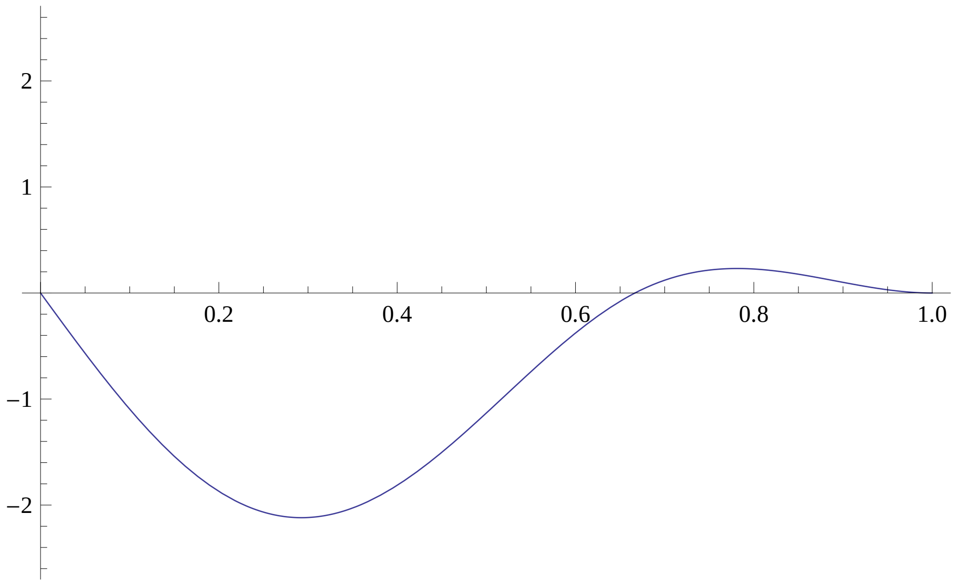
Platí tedy (viz (5.61))

$$u^P_{1_1},\ u^P_{1_2},\ u^P_{1_3} \in \left[\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(0, \frac{2}{3}\right)\right) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1)).$$

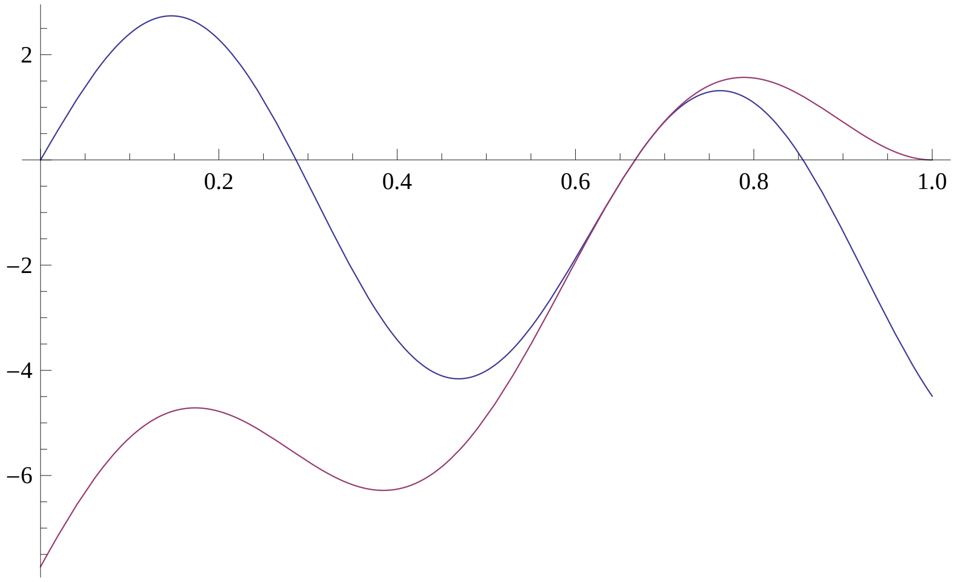
Uvedené funkce vykreslujeme na Obrázcích 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14.



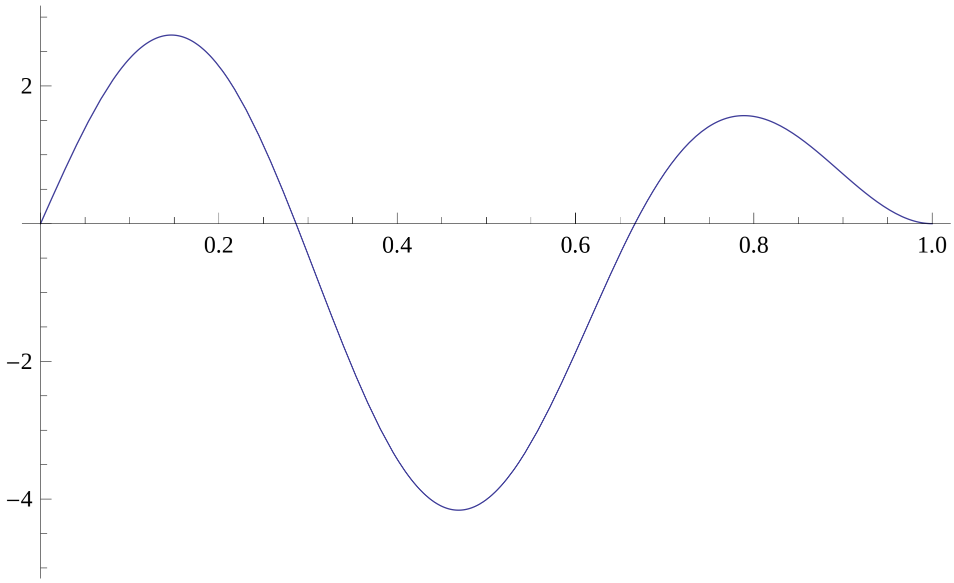
Obrázek 5.9: Funkce $u^P_{1_{1_L}}(x)$-modrá, $u^P_{1_{1_P}}(x)$-fialová na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_1} = 1$



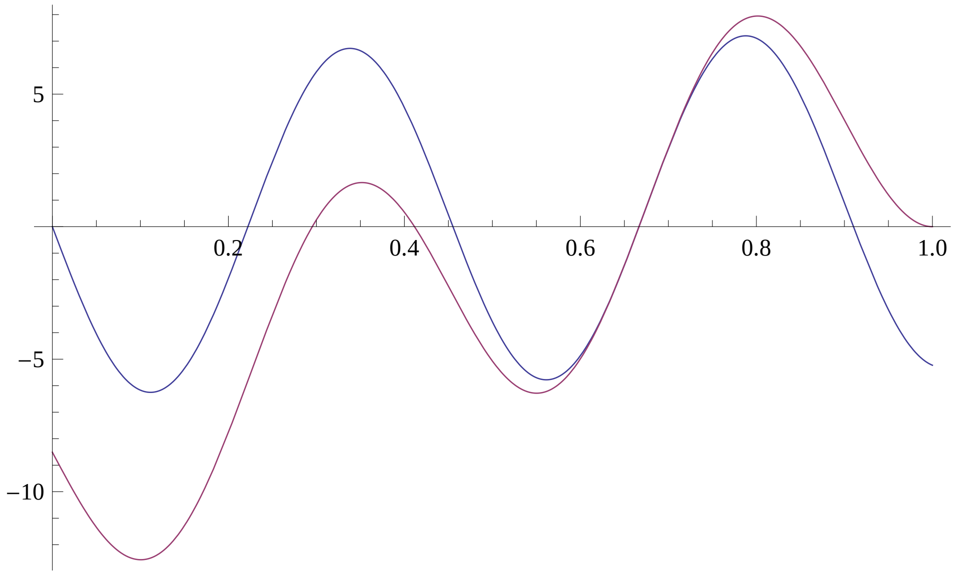
Obrázek 5.10: Funkce $u^P_{1_1}(x)$ na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_1} = 1$



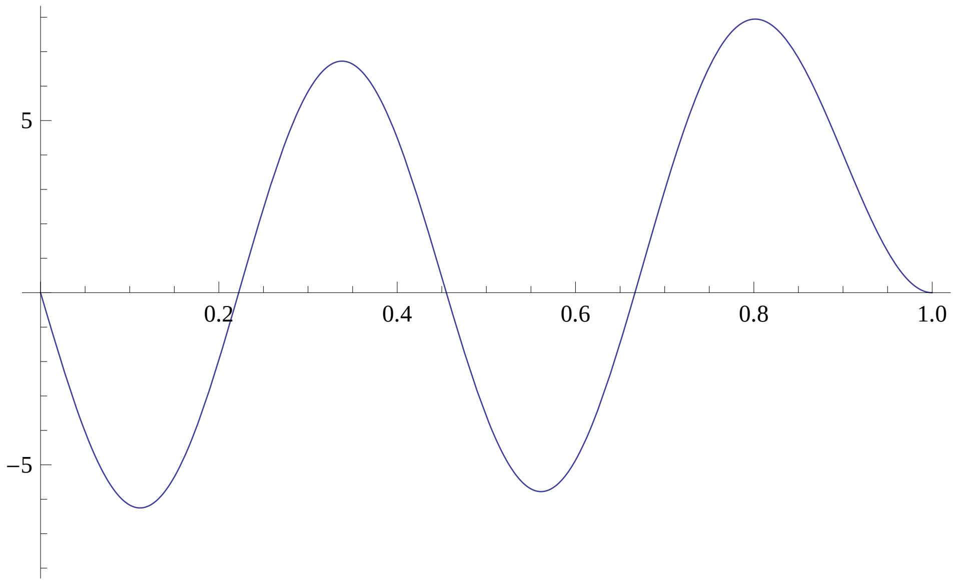
Obrázek 5.11: Funkce $u^P_{1_{2_L}}(x)$-modrá, $u^P_{1_{2_P}}(x)$-fialová na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_2} = 1$



Obrázek 5.12: Funkce $u^P_{1_2}(x)$ na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_2} = 1$



Obrázek 5.13: Funkce $u^P_{1_{3_L}}(x)$-modrá, $u^P_{1_{3_P}}(x)$-fialová na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_3} = 1$



Obrázek 5.14: Funkce $u^P_{1_3}(x)$ na intevralu $[0,1]$, $K^P_{1_3} = 1$

5.3 Okrajové podmínky 0-1, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{5.72}$$

$$u'(0) = u'(\ell) = 0 \tag{5.73}$$

a přechodovými podmínkami v bodě $x_0 \in (0, \ell)$

$$\begin{aligned} &u(x_0) = 0 \\ &u'_-(x_0) = u'_+(x_0) \\ &u''_-(x_0) = u''_+(x_0) \\ &\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \leq \lim_{x \to x_0+} u'''(x). \end{aligned} \tag{5.74}$$

Nechť tedy $u \in \mathrm{C}^2([0, \ell]) \cap \mathrm{C}^4((0, x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0, \ell))$.

S využitím volby (5.4), vztahů (5.9), (5.10) a okrajových podmínek (5.72), (5.73) dostáváme

$$u(0) = u_L(0) = A_1 \cos(r \cdot 0) + B_1 \sin(r \cdot 0) + C_1 \cdot 0 + D_1 = A_1 + D_1 = 0 \tag{5.75}$$

$$u(\ell) = u_P(\ell) = A_2 \cos(r \cdot 0) + B_2 \sin(r \cdot 0) + C_2 \cdot 0 + D_2 = A_2 + D_2 = 0 \tag{5.76}$$

$$u'(0) = u'_L(0) = -A_1 r \sin(r \cdot 0) + B_1 r \cos(r \cdot 0) + C_1 = B_1 r + C_1 = 0 \tag{5.77}$$

$$u'(\ell) = u'_P(\ell) = A_2 r \sin(r \cdot 0) - B_2 r \cos(r \cdot 0) - C_2 = -B_2 r - C_2 = 0 \tag{5.78}$$

a z přechodových podmínek (5.74) resp. vztahů (5.5), (5.6), (5.7) dostáváme

$$\begin{aligned} u_L(x_0) &= A_1 \cos(r x_0) + B_1 \sin(r x_0) + C_1 x_0 + D_1 = 0 \\ u_P(x_0) &= A_2 \cos(r(\ell - x_0)) + B_2 \sin(r(\ell - x_0)) + C_2(\ell - x_0) + D_2 = 0 \\ u'_L(x_0) &= -A_1 r \sin(r x_0) + B_1 r \cos(r x_0) + C_1 = \\ &= A_2 r \sin(r(\ell - x_0)) - B_2 r \cos(r(\ell - x_0)) - C_2 = u'_P(x_0) \\ u''_L(x_0) &= -A_1 r^2 \cos(r x_0) - B_1 r^2 \sin(r x_0) = \\ &= -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = u''_P(x_0). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Z rovnic (5.75), (5.76), (5.77), (5.78) jsou zřejmé vztahy $D_1 = -A_1,\ D_2 = -A_2,$ $C_1 = -B_1 r,\ C_2 = -B_2 r$. Soustava rovnic (5.79) je tak redukována na soustavu

$$u_L(x_0) = A_1 (\cos(rx_0) - 1) + B_1 ((\sin(rx_0) - rx_0) = 0 \tag{5.80}$$

$$u_P(x_0) = A_2(\cos(r(\ell - x_0)) - 1) + B_2(\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)) = 0 \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned} u_L'(x_0) &= -A_1 r \sin(rx_0) + B_1 r (\cos(rx_0) - 1) = \\ &= A_2 r \sin(r(\ell - x_0)) - B_2 r(\cos(r(\ell - x_0)) - 1) = u_P'(x_0) \end{aligned} \tag{5.82}$$

$$\begin{aligned} u_L''(x_0) &= -A_1 r^2 \cos(rx_0) - -B_1 r^2 \sin(rx_0) = \\ &= -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) - B_2 r^2 \sin(r(\ell - x_0)) = u_P''(x_0). \end{aligned} \tag{5.83}$$

Z rovnic (5.80) a (5.81) získáváme

$$B_1 = -A_1 \frac{\cos(rx_0) - 1}{\sin(rx_0) - rx_0}, \qquad B_2 = -A_2 \frac{\cos(r(\ell - x_0)) - 1}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)}. \tag{5.84}$$

Dosazením těchto koeficientů B_1, B_2 do rovnic (5.82), (5.83) získáme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} &- A_1 r \sin(rx_0) - A_1 \frac{\cos(rx_0) - 1}{\sin(rx_0) - rx_0} r (\cos(rx_0) - 1) = \\ &= A_2 r \sin(r(\ell - x_0)) + A_2 \frac{\cos(r(\ell - x_0)) - 1}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} r (\cos(r(\ell - x_0)) - 1) \\ &- A_1 r^2 \cos(rx_0) + A_1 \frac{\cos(rx_0) - 1}{\sin(rx_0) - rx_0} r^2 \sin(rx_0) = \\ &= -A_2 r^2 \cos(r(\ell - x_0)) + A_2 \frac{\cos(r(\ell - x_0)) - 1}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} r^2 \sin(r(\ell - x_0)) \end{aligned}$$

maticově zapsatelnou ve tvaru

$$\mathbf{M}(\lambda) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.85}$$

kde

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(\lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} -r \left(\sin(rx_0) + \frac{(\cos(rx_0) - 1)^2}{\sin(rx_0) - rx_0} \right) & -r \left(\sin(r(\ell - x_0)) + \frac{(\cos(r(\ell - x_0)) - 1)^2}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} \right) \\ -r^2 \left(\cos(rx_0) - \frac{(\cos(rx_0) - 1)\sin(rx_0)}{\sin(rx_0) - rx_0} \right) & r^2 \left(\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{(\cos(r(\ell - x_0)) - 1)\sin(r(\ell - x_0))}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z podmínky nulovosti determinantu matice soustavy $\det \mathbf{M}(\lambda) = 0$ plyne

$$\begin{aligned} &-r^3 \left(\sin(rx_0) + \frac{(\cos(rx_0) - 1)^2}{\sin(rx_0) - rx_0} \right) \left(\cos(r(\ell - x_0)) - \frac{(\cos(r(\ell - x_0)) - 1)\sin(r(\ell - x_0))}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} \right) - \\ &-r^3 \left(\cos(rx_0) - \frac{(\cos(rx_0) - 1)\sin(rx_0)}{\sin(rx_0) - rx_0} \right) \left(\sin(r(\ell - x_0)) + \frac{(\cos(r(\ell - x_0)) - 1)^2}{\sin(r(\ell - x_0)) - r(\ell - x_0)} \right), \end{aligned}$$

což po zpětném dosazení $r = \sqrt{\lambda}$ přechází v rovnici

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{\lambda^3}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)+\frac{\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-1\right)^2}{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\sqrt{\lambda}x_0}\right)\times\\
&\times\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-\frac{\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-1\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)}\right)-\\
&-\sqrt{\lambda}^3\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\frac{\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-1\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}x_0\right)-\sqrt{\lambda}x_0}\right)\times\\
&\times\left(\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)+\frac{\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-1\right)^2}{\sin\left(\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)\right)-\sqrt{\lambda}(\ell-x_0)}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

Pro vlastní čísla $\lambda_k^P := \lambda_k$ splňující rovnici (5.86) nyní obecně nalezneme koeficienty A_1, A_2 tak, aby vyhovovaly soustavě (5.85). Jelikož tedy $\det\mathbf{M}(\lambda_k^P) = 0$, pak ze soustavy (5.85) plyne

$$
\begin{aligned}
&A_1\left(\sin(r_kx_0)+\frac{(\cos(r_kx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}\right)+\\
&+A_2\left(\sin(r_k(\ell-x_0))+\frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

Volbou $A_2 = K_k^P,\ K_k^P \in \mathrm{M_k^P} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ z rovnice (5.87) získáváme

$$
A_1 = -K_k^P\frac{\sin(r_k(\ell-x_0))+\frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}}{\sin(r_kx_0)+\frac{(\cos(r_kx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}}
$$

a s použitím vztahů (5.84) dále dostáváme

$$
B_1 = K_k^P\frac{\sin(r_k(\ell-x_0))+\frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}}{\sin(r_kx_0)+\frac{(\cos(r_kx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}}\,\frac{\cos(r_kx_0)-1}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}
$$

$$
B_2 = -K_k^P\frac{\cos(r_k(\ell-x_0))-1}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}.
$$

Tím dostáváme i tvar obecného řešení

$$
u_k^P(x) = \begin{cases} u_{k_L}^P(x), & x\in[0,x_0]\\ u_{k_P}^P(x), & x\in[x_0,\ell], \end{cases}
\tag{5.88}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
u_{k_L}^P(x) &= K_k^P \frac{\sin(r_k(\ell-x_0)) + \frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}}{\sin(r_kx_0) + \frac{(\cos(r_kx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}} \times \\
&\quad \times \left(\frac{\cos(r_kx_0)-1}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0} (\sin(r_kx) - r_kx) - \cos(r_kx) + 1 \right)
\end{aligned}
$$

$$
u_{k_P}^P(x) = K_k^P \left(\frac{\cos(r(\ell-x_0))-1}{\sin(r(\ell-x_0)) - r(\ell-x_0)} (r(\ell-x) - \sin(r(\ell-x))) + \cos(r(\ell-x)) - 1 \right).
$$

Jak můžeme nahlédnout, analytický předpis funkce u_k^P platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$ s vyjímkou těch, pro něž

$$
\sin(r_kx_0) + \frac{(\cos(r_kx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0} = 0. \tag{5.89}
$$

Takovýmto $k \in \mathbb{N}$ a jim odpovídajícím řešením se pověnujeme později.

Nyní opět potřebujeme určit množinu $\mathrm{M_k^P}$ takovou, aby byla splněna přechodová podmínka (5.8). Potřebujeme-li tedy

$$
\lim_{x\to x_0-} (u_{k_L}''')(x) \le \lim_{x\to x_0+} (u_{k_P}''')(x),
$$

pak

$$
\begin{aligned}
&K_k^P r_k^3 \left(\sin(r_k(\ell-x_0)) + \frac{\cos(r_k(\ell-x_0))-1}{\sin(r_k(\ell-x_0)) - r_k(\ell-x_0)} \cos(r_k(\ell-x_0)) - \right. \\
&- \frac{\sin(r_k(\ell-x_0)) + \frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)}}{\sin(r_kx_0) + \frac{(\cos(rx_0)-1)^2}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0}} \times \\
&\left. \times \left(\sin(r_kx_0) + \frac{\cos(r_kx_0)-1}{\sin(r_kx_0)-r_kx_0} \cos(r_kx_0) \right) \right) \le 0,
\end{aligned} \tag{5.90}
$$

a tedy

$$
\mathrm{M_k^P} = \left\{ K_k^P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\ \text{platí nerovnost}(5.90) \right\}.
$$

Zřejmě

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M_k^P} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-} (u_{k_L}^P)'''(x) = (u_{k_L}^P)'''(x_0) = (u_{k_P}^P)'''(x_0) = \lim_{x\to x_0+} (u_{k_P}^P)'''(x) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow u_k \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^3((0,\ell)) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)).
\end{aligned} \tag{5.91}
$$

Podivme se, kdy platí navíc

$$
u_k \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)). \tag{5.92}
$$

Z požadavku na splnění (5.92) plyne

$$\lim_{x\to x_0-}(u_{k_L}^P)''''(x) = (u_{1_L}^P)''''(x_0) = (u_{k_P}^P)''''(x_0) = \lim_{x\to x_0+}(u_{k_P}^P)''''(x),$$

z čehož dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} &-\cos(rx_0) + \frac{\cos(rx_0)-1}{\sin(rx_0)-rx_0}\sin(rx_0) = \\ &= \cos(r(\ell-x_0)) - \frac{\cos(r(\ell-x_0))-1}{\sin(r(\ell-x_0))-r(\ell-x_0)}\sin(r(\ell-x_0)). \end{aligned} \tag{5.93}$$

Tedy (5.92) platí, právě když

$$\mathrm{M_k^P} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ a zároveň je splněna rovnost (5.93).}$$

Nyní se vraťme ke zmíněným $k \in \mathbb{N}$, pro něž nemá smysl analytický předpis (5.88) v důsledku (5.89). Rovnost (5.89) je zjevně splněna pro taková $k \in \mathbb{N}$, pro něž platí

$$\cos(r_k x_0) = 1, \tag{5.94}$$

tedy pro $\lambda_k^P = r_k^2$, pro něž platí

$$\lambda_k^P = \left(\frac{2n\pi}{x_0}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Omezme se nyní na případ (5.94), pro nějž je zjevně splněna rovnost (5.89). Snadno se dosazením vztahu (5.94) do matice soustavy (5.85) přesvědčíme, že nulovost jejího determinantu je pro $\cos(r_k x_0) = 1$, a tedy $\sin(r_k x_0) = 0$, splněna tehdy a jen tehdy, když je kromě rovnosti (5.89) splněna i rovnost

$$\sin(r_k(\ell-x_0)) + \frac{(\cos(r_k(\ell-x_0))-1)^2}{\sin(r_k(\ell-x_0))-r_k(\ell-x_0)} = 0. \tag{5.95}$$

Rovnost (5.95) je zjevně splněna pro $\cos(r_k(\ell-x_0)) = 1$. Pak tedy matice (5.85) přejde do podoby

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r^2 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z této matice je patrné, že pro $\cos(r_k x_0) = 1$ a zároveň $\cos(r_k(\ell-x_0)) = 1$ platí

$$A_1 = A_2,$$

čímž pro

$$r_k = \sqrt{\lambda_k^P} = \frac{2n\pi}{x_0} = \frac{2m\pi}{\ell-x_0}, \quad m,n \in \mathbb{N} \tag{5.96}$$

dostáváme i tvar obecného řešení

$$u_k^P(x) = \begin{cases} u_{k_L}(x) = K_k^P(\cos(r_k x) - 1), & x \in [0, x_0] \\ u_{k_P}(x) = K_k^P(\cos(r_k(\ell - x)) - 1) & x \in [x_0, \ell]. \end{cases} \tag{5.97}$$

Dále, jelikož $\cos(r_k x_0) = 1$ a zároveň $\cos(r_k(\ell - x_0)) = 1$, tak jistě platí

$$\lim_{x\to x_0-} u'''_{k_L}(x) = u'''_{k_L}(x_0) = u'''_{k_P}(x_0) = \lim_{x\to x_0+} u'''_{k_P}(x),$$

a tedy

$$u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^3((0,\ell)) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)),$$

neboť

$$\begin{aligned} \sin(r_k x_0) &= -\sin(r(\ell - x_0)) \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

a dokonce platí

$$u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)),$$

neboť

$$\lim_{x\to x_0-} (u_{k_L}^P)'''(x) = (u_{k_L}^P)'''(x_0) = (u_{k_P}^P)'''(x_0) = \lim_{x\to x_0+} (u_{k_P}^P)'''(x),$$

protože platí

$$\begin{aligned} \cos(r_k x_0) &= \cos(r(\ell - x_0)) \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Podívme se nyní na získaný tvar řešení (5.97) a proveďme následující úvahu. Nechť máme obecně funkce $f_1(x) = C(\cos(cx) - 1)$ a $f_2(x) = C(\cos(c(\ell - x) - 1)$, kde $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in (0,\infty)$ a $x_0 \in (0,\ell)$, $\frac{x_0}{\ell} \in \mathbb{Q}$, takové, že $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, x_0] \\ f_2(x), & x \in [x_0, \ell]. \end{cases}$$

Jak vidíme $f(x) \equiv C(\cos(cx) - 1)$ na intervalu $(0,\ell)$, což je zřejmě funkce třídy $\mathrm{C}^4((0,\ell))$. Ukázali jsme tedy, že tvar obecného řešení (5.97) je ekvivalentní s tvarem obecného řešení (3.33) pro k lichá v úloze bez překážky (viz závěr sekce 3.3).

Nyní definujme množiny

$$\mathrm{L} = \left\{ \lambda_k^P ;\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

a

$$\mathrm{L_s} = \left\{ \lambda_k^P \in \mathrm{L};\ \cos\left(r_k x_0\right) = 1 \text{ a zároveň } \cos\left(r(\ell - x_0)\right) = 1 \right\}.$$

Množině $\mathrm{L_s}$, jak jsme ukázali, odpovídají singulární vlastní funkce $u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$, a tedy je množina těchto singulárních vlastních čísel resp. funkcí podmnožinou množiny vlastních čísel resp. funkcí z úlohy bez překážky. Množina $\mathrm{L} \setminus \mathrm{L_s}$ je množina vlastních čísel λ_k^P, jimž budou obecně odpovídat vlastní funkce $u_k^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$.

Poznámka 5.2 *Jelikož neumíme s jistotou analyticky rozhodnout, zda některá vlastní čísla* $\lambda_k^P \neq \left(\frac{2n\pi}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{2m\pi}{\ell - x_0}\right)^2$, $m,n \in \mathbb{N}$ *rovněž nesplňují rovnost (5.89), tak je možné, že analyticky nepopíšeme všechny tvary příslušných vlastních funkcí. Tedy pro taková potenciální vlastní čísla bychom tvar vlastních funkcí hledali numericky.*

Příklad: Pro další postoupení v úloze zvolme $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$.

K nalezení prvních tří vlastních čísel, tj. $\lambda_1^P, \lambda_2^P, \lambda_3^P$, použijeme rovnici (5.86). Dosazením $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$ do této rovnice získáváme rovnici

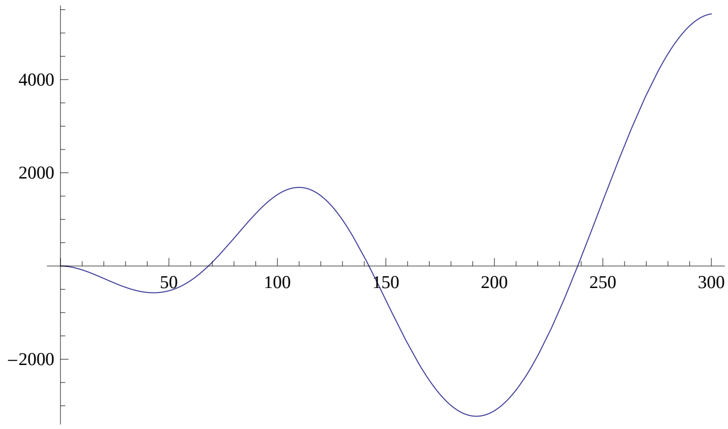
$$\begin{aligned}
&-\sqrt{\lambda^3}\left(\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - 1\right)^2}{\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}}\right) \times \\
&\times \left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - 1\right)\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{\lambda}}\right) - \\
&-\sqrt{\lambda^3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - 1\right)\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}}\right) \times \\
&\times \left(\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - 1\right)^2}{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{\lambda}}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Tuto rovnici řešíme numericky, a získáváme tak její první tři řešení na intervalu $(0,\infty)$, tj. první tři vlastní čísla

$$\lambda_1^P \doteq 68.20, \qquad \lambda_2^P \doteq 142.21, \qquad \lambda_3^P \doteq 238.41,$$

které ilustrativně pokládá Obrázek 5.15 zobrazující graf funkce

$$
\begin{aligned}
d(\lambda) = &-\sqrt{\lambda^3}\left(\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)^2}{\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}}\right)\times \\
&\times\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}}\right)- \\
&-\sqrt{\lambda^3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right) - \frac{\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{2}{3}\sqrt{\lambda}}\right)\times \\
&\times\left(\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right) + \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-1\right)^2}{\sin\left(\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{\lambda}}\right).
\end{aligned} \tag{5.99}
$$



Obrázek 5.15: Funkce $d(\lambda)$ - (5.99)

Našim podmínkám $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}$ a jim příslušným vlastním číslům

$$\lambda_1^P \doteq 68.20, \qquad \lambda_2^P \doteq 142.21, \qquad \lambda_3^P \doteq 238.41$$

tak odpovídají vlastní funkce

$$u_1^P(x) = \begin{cases} u_{1_L}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_P}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$
\begin{aligned}
u_{1_L}^P(x) &= K_1^P\left(1.6544\left(0.0462\left(\sin(\sqrt{68.20}x) - \sqrt{68.20}x\right) - \cos(\sqrt{68.20}x) + 1\right)\right) \\
u_{1_P}^P(x) &= K_1^P\left(0.8111\left(\sqrt{68.20}(1-x) - \sin(\sqrt{68.20}(1-x))\right) + \cos(\sqrt{68.20}(1-x)) - 1\right),
\end{aligned}
$$

dále

$$u_2^P(x) = \begin{cases} u_{2_L}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{2_P}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$
\begin{aligned}
u^P_{2_L}(x) &= K^P_2\left(-1.6208\left(0.1576\left(\sin(\sqrt{142.21}x)-\sqrt{142.21}x\right)-\cos(\sqrt{142.21}x)+1\right)\right)\\
u^P_{2_P}(x) &= K^P_2\left(0.3547\left(\sqrt{142.21}(1-x)-\sin(\sqrt{142.21}(1-x))\right)+\cos(\sqrt{142.21}(1-x))-1\right),
\end{aligned}
$$

a nakonec

$$
u^P_3(x)=\begin{cases} u^P_{3_L}(x), & x\in[0,\frac{2}{3}]\\ u^P_{3_P}(x), & x\in[\frac{2}{3},1],\end{cases}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
u^P_{3_L}(x) &= K^P_3\left(0.9543\left(0.1488\left(\sin(\sqrt{238.41}x)-\sqrt{238.41}x\right)-\cos(\sqrt{238.41}x)+1\right)\right)\\
u^P_{3_P}(x) &= K^P_3\left(0.0956\left(\sqrt{238.41}(1-x)-\sin(\sqrt{238.41}(1-x))\right)+\cos(\sqrt{238.41}(1-x))-1\right).
\end{aligned}
$$

Dále určíme množiny $\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{k}}$. Pro $k=1$, jak snadno zjistíme, je nerovnost (5.90) splněna, je-li

$$K^P_1\in(-\infty,0)=\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_1.$$

Pro $k=2$ analogicky platí

$$K^P_2\in(-\infty,0)=\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_2.$$

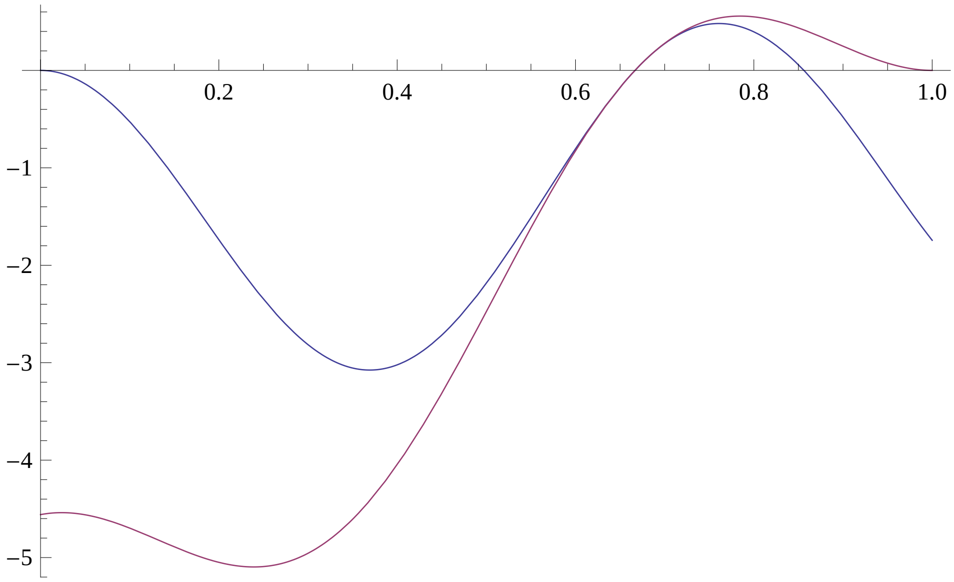
a pro $k=3$ pak

$$K^P_3\in(0,\infty)=\mathrm{M}^{\mathrm{P}}_3.$$

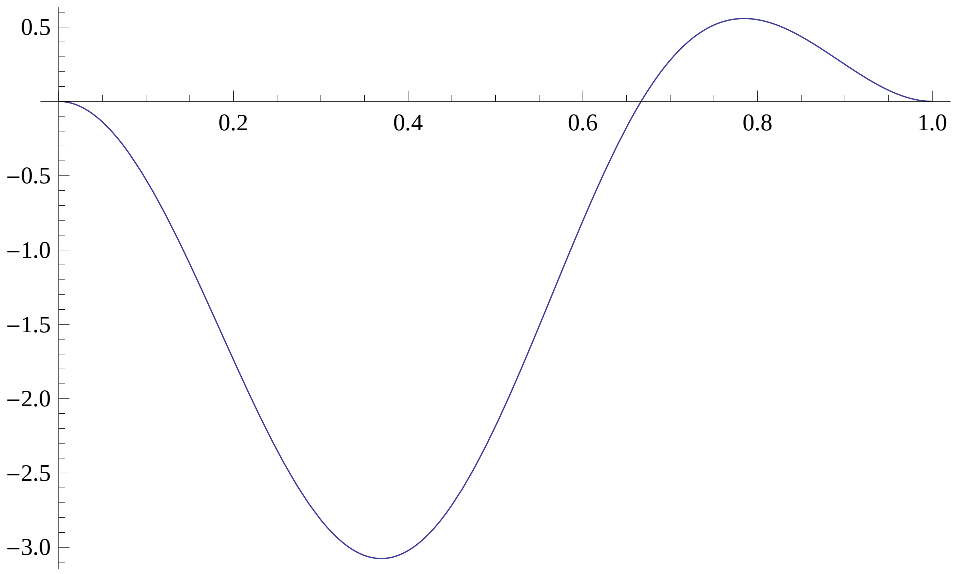
Platí tedy (viz (5.91))

$$u^P_1,\ u^P_2,\ u^P_3\in\left[\mathrm{C}^2([0,1])\cap\mathrm{C}^4\left(\left(0,\frac{2}{3}\right)\right)\cap\mathrm{C}^4\left(\left(\frac{2}{3},1\right)\right)\right]\setminus\mathrm{C}^3((0,1)).$$

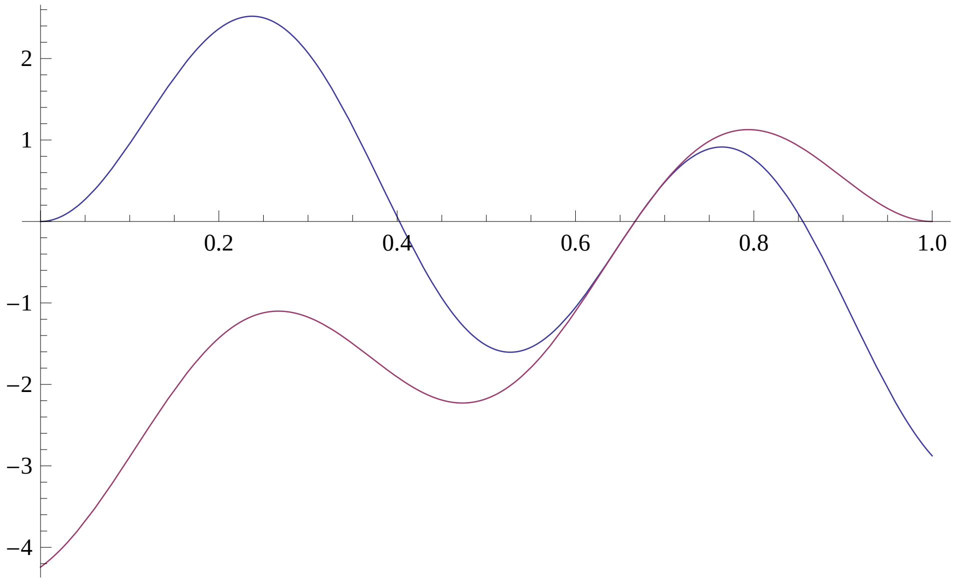
Uvedené funkce vykreslujeme na Obrázcích 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21.



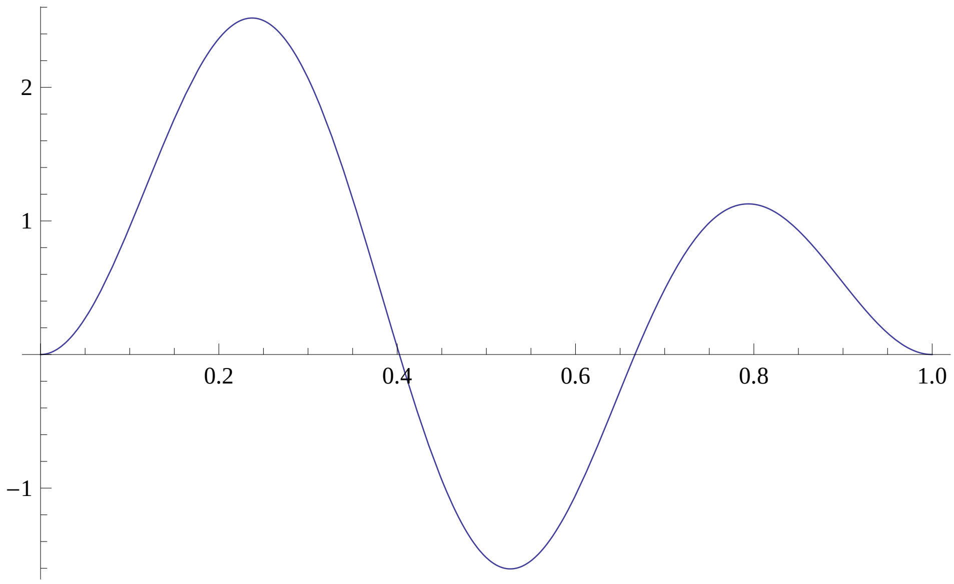
Obrázek 5.16: Funkce $u^P_{1_L}(x)$-modrá, $u^P_{1_P}(x)$-fialová na intevralu $[0, 1]$, $K^P_1 = -1$



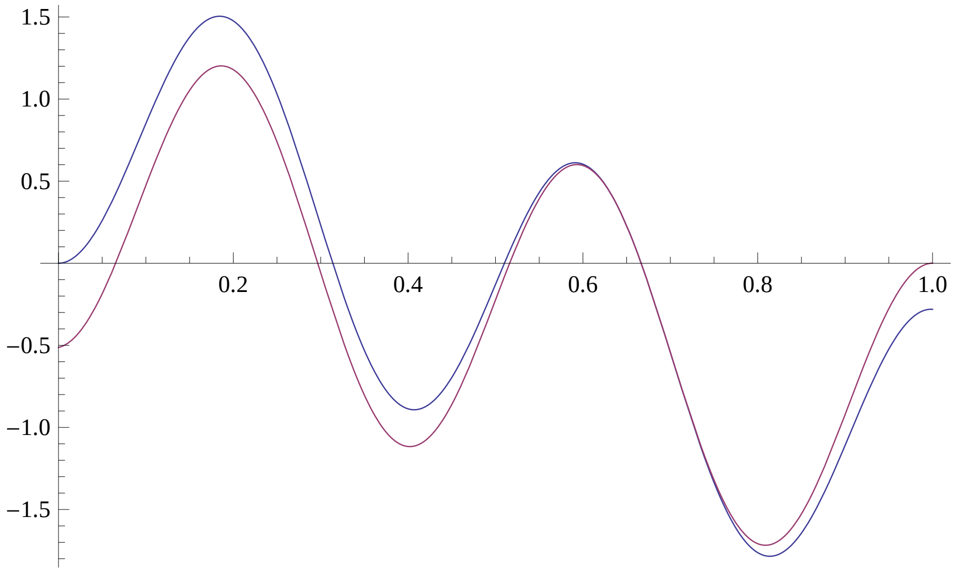
Obrázek 5.17: Funkce $u^P_1(x)$ na intevralu $[0, 1]$, $K^P_1 = -1$



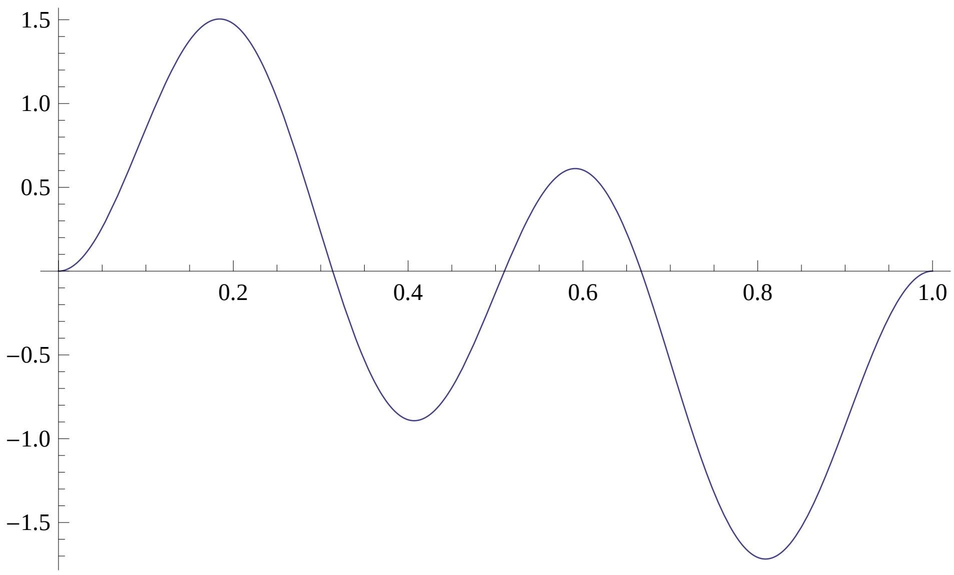
Obrázek 5.18: Funkce $u_{2_L}^P(x)$-modrá, $u_{2_P}^P(x)$-fialová na intevralu $[0, 1]$, $K_2^P = -1$



Obrázek 5.19: Funkce $u_2^P(x)$ na intevralu $[0, 1]$, $K_2^P = -1$



Obrázek 5.20: Funkce $u^P_{3_L}(x)$-modrá, $u^P_{3_P}(x)$-fialová na intevralu $[0, 1]$, $K^P_3 = 1$



Obrázek 5.21: Funkce $u^P_3(x)$ na intevralu $[0, 1]$, $K^P_3 = 1$

Kapitola 6

Úloha s jednostrannou podmínkou

V této kapitole budeme studovat úlohu popsanou v Kapitole 2, k níž přidáme jednostrannou podmínku $u(x_0) \geq 0$. Budeme tak studovat úlohu analogickou kapitole s překážkou, jen $u(x_0) = 0$ bude nahrazeno $u(x_0) \geq 0$. Řešení se nám tím „rozpadne" na případ, kdy vlastní funkce překážku správným směrem obejde (a zachová si svoji C^4 hladkost), nebo se překážky „náhodou dotkne" (a zachová si C^4 hladkost), nebo se o překážku ze správného směru zlomí (a ztratí C^3 hladkost).

6.1 Okrajové podmínky 0-2, 0-2

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell), \ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{6.1}$$

$$u''(0) = u''(\ell) = 0 \tag{6.2}$$

a jednostrannou podmínkou v bodě $x_0 \in (0, \ell)$

$$u(x_0) \geq 0, \tag{6.3}$$

kde $u(x)$ je funkcí takovou, že

$$
\begin{aligned}
& u(x_0) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)) \qquad \text{nebo} \\
& \quad u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \\
& u(x_0) > 0 \Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))
\end{aligned}
$$

a

$$\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \leq \lim_{x \to x_0+} u'''(x).$$

Funkce u se tedy musí v bodě x_0 buďto překážky „dotknout“ tak, aby v něm minimálně její druhá derivace nepozbyla spojitosti, nebo ji musí požadovaným směrem, tj. kladným neboli „seshora“, obejít, a zachovat si tak v tomto bodě spojitost ve všech v tomto bodě uvažovaných derivacích, tj. minimálně do čtvrtého řádu.

Předmětem této úlohy tedy zjevně bude vhodné využití a interpretace závěrů z již řešených úloh „bez překážky“ a „s překážkou“ pro okrajové podmínky (6.1), (6.2).

Podívejme se tedy prve na bezpřekážkovou variantu. Zde jsme obecně dospěli k vlastním číslům (viz sekce 3.1)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

a k nim příslušejícím vlastním funkcím

$$u_k(x) = K_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right), \quad k \in \mathbb{N},\ K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Z těchto vlastních funkcí bude patrně nutné vybrat takové, které splňují jednostrannou podmínku (6.3). Takový výběr budeme zřejmě provádět výběrem správného znaménka příslušné konstanty K_k.

Nechť tedy máme obecně množinu funkcí

$$\mathrm{U} = \left\{ u_k(x);\ u_k(x) = K_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right),\ K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

a množinu funkcí

$$\mathrm{U}' = \left\{ u_{k_{bp}}(x);\ u_{k_{bp}}(x) = K_{k_{bp}} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right),\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

kde

$$\operatorname{sign} K_{k_{bp}} = \operatorname{sign} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x_0\right), \qquad \text{pro } x_0 \neq \frac{z}{k}\ell,\ z \in \mathbb{N},\ z < k \tag{6.4}$$

a

$$K_{k_{bp}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{pro } x_0 = \frac{z}{k}\ell,\ z \in \mathbb{N},\ z < k, \tag{6.5}$$

a tedy je pro funkce $u_{k_{bp}}$ splněna podmínka (6.3) (pozn. z podmínky kladené na bod x_0 v (6.4) je zřejmé, že $K_{k_{bp}} \neq 0$). Pak jistě $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$, a tedy funkce $u_{k_{bp}},\ k \in \mathbb{N}$ jsou řešeními úlohy.

Nyní se zaměřme na vlastní funkce, které jsme získali v úloze překážkové. Je bezesporné, že veškeré vlastní funkce, které lze v překážkové úloze získat, budou podmínku (6.3) splňovat. Rovněž je známo, že vlastní funkce odpovídající vlastním číslům, která jsme v překážkové úloze nazývali singulárními a které budeme i v této kapitole značit $u^P_{s_n}$, příslušejí prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$. Naproti tomu funkce odpovídající vlastním číslům nesingulárním příslušejí prostoru $[\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))] \setminus \mathrm{C}^3((0,\ell))$. Tyto budeme značit $u^P_n(x)$. Snadno si navíc uvědomíme, že takovéto vlastní funkce jsou právě ty, které se v daném bodě x_0 „dotknou a zlomí ve třetí derivaci“, zatímco prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ odpovídá „čistý dotyk“, tedy bez pozbytí spojitosti derivací minimálně do čtvrtého řádu v tomto bodě. Množina singulárních vlastních funkcí z prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ nalezitelných v překážkové úloze je množinou všech vlastních funkcí nalezitelných v úloze bezpřekážkové, jejichž funkční hodnota je v bodě x_0 nulová.

Vlastní funkce bezpřekážkové úlohy, jejichž funkční hodnota je v bodě x_0 nulová, budeme značit $u^{B_0}_n$, vlastní funkce bezpřekážkové úlohy, jejichž funkční hodnota je v bodě x_0 kladná, budeme značit u^B_n.

Uvažujme tedy opět případ $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}$, kterým jsme se již zabývali v překážkové a bezpřekážkové úloze s týmiž okrajovými podmínkami (6.1), (6.2).

V úloze bez překážky jsme pro uvedené parametry vypočítali vlastní čísla

$$\lambda^B_1 := \lambda_1 = \pi^2$$
$$\lambda^B_2 := \lambda_2 = 4\pi^2$$
$$\lambda^{B_0}_1 := \lambda_3 = 9\pi^2$$

a k nim získali vlastní funkce

$$u_1(x) = K_1 \sin(1\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$u_2(x) = K_2 \sin(2\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$u_3(x) = K_3 \sin(3\pi x), \quad x \in (0,1),\ K_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Z kritérií (6.4), (6.5) tedy zřejmě vyplývají funkce

$$
\begin{aligned}
&u_1^B := u_{1_{bp}}(x) = K_{1_{bp}} \sin(1\pi x), \quad K_1^B := K_{1_{bp}} > 0 \\
&u_2^B := u_{2_{bp}}(x) = K_{2_{bp}} \sin(2\pi x), \quad K_2^B := K_{2_{bp}} < 0 \\
&u_1^{B_0} := u_{3_{bp}}(x) = K_{3_{bp}} \sin(3\pi x), \quad K_1^{B_0} := K_{3_{bp}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\},
\end{aligned}
$$

které jsou z prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ a jsou řešeními naší úlohy s jednostrannou podmínkou.

Nyní se podivme na vlastní čísla, která jsme určili v překážkové úloze, tj.

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1^P \doteq 33.47 \\
&\lambda_{s_1}^P = 9\pi^2 = \lambda_3 \\
&\lambda_2^P \doteq 150.81,
\end{aligned}
$$

a jim odpovídající vlastní funkce

$$
u_1^P(x) = \begin{cases} u_{1_L}^P(x) = K_1^P\left(\sin\left(\sqrt{33.47}x\right) + 0.98x\right), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_P}^P(x) = K_1^P\left(-0.7\sin\left(\sqrt{33.47}(1-x)\right) + 1.97(1-x)\right), & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}
$$

$$
u_{s_1}^P(x) = \begin{cases} u_{s_{1_L}}^P(x) = K_{s_1}^P \sin(3\pi x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{s_{1_P}}^P(x) = K_{s_1}^P \sin(3\pi(1-x)), & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}
$$

$$
u_2^P(x) = \begin{cases} u_{2_L}^P(x) = K_2^P\left(\sin\left(\sqrt{150.81}x\right) - 1.42x\right), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{2_P}^P(x) = K_2^P\left(-1.16\sin\left(\sqrt{150.81}(1-x)\right) - 2.84(1-x)\right), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}
$$

kde

$$
K_1^P < 0, \qquad K_{s_1}^P \in R \setminus \{0\}, \qquad K_2^P > 0.
$$

Jak vidíme, $u_{s_1}^P(x) \equiv u_1^{B_0}(x)$, $u_{s_1}^P \in \mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,1))$ a rovněž bychom snadno ověřili, že

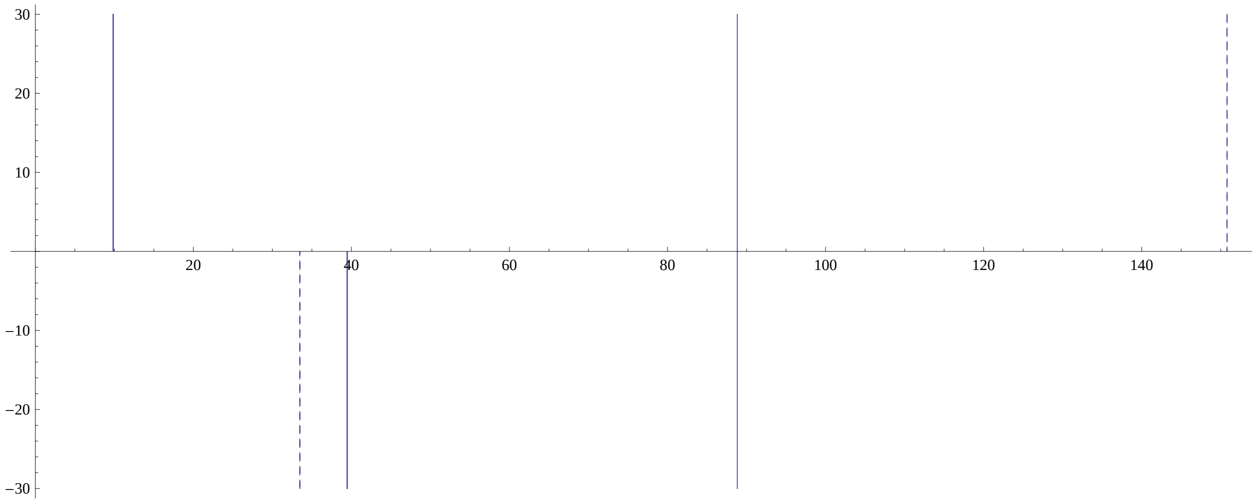
$$
u_1^P,\ u_2^P \in \left[\mathrm{C}^2((0,1)) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(0, \frac{2}{3}\right)\right) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1)).
$$

Nalezli jsme tedy pro prvních pět vlastních čísel

$$
\lambda_1^B < \lambda_1^P < \lambda_2^B < \lambda_1^{B_0} = \lambda_{s_1}^P < \lambda_2^P, \tag{6.6}
$$

odpovídající vlastní funkce, které řeší úlohu se zadanou jednostrannou podmínkou (6.3).

Naznačené svislice v diagramu na Obrázku 6.1 protínají vodorovnou osu v hodnotách vlastních čísel (6.6). Průměty těchto svislic na svislou osu pak vždy znázorňují množinu přípustných nenulových K, pro která vybranému vlastnímu číslu λ odpovídající vlastní funkce u splňuje pro dané parametry $x_0 = \frac{2}{3}$, $\ell = 1$ úlohu s jednostrannou podmínkou (6.3). Plná čára dále značí příslušnost této vlastní funkce prostoru $\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,1))$, přerušovaná čára příslušnost prostoru $\left[\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,\frac{2}{3})) \cap \mathrm{C}^4((\frac{2}{3},1))\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1))$.



Obrázek 6.1: Diagram - λ, K, hladkost

6.2 Okrajové podmínky 0-2, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0,\ell),\ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{6.7}$$

$$u''(0) = u'(\ell) = 0 \tag{6.8}$$

a jednostrannou podmínkou v bodě $x_0 \in (0,\ell)$

$$u(x_0) \geq 0, \tag{6.9}$$

kde $u(x)$ je funkcí takovou, že

$$\begin{aligned} &u(x_0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)) \qquad \text{nebo} \\ &\quad u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \\ &u(x_0) > 0 \Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)) \end{aligned}$$

a

$$\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \le \lim_{x \to x_0+} u'''(x).$$

Podívejme se tedy opět prve na bezpřekážkovou variantu. Zde jsme hledali vlastní čísla $\lambda_k^B := \lambda_k$ taková, že platí

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) = \sqrt{\lambda_k}\ell, \quad k \in \mathbb{N}$$

(viz (3.19), (3.20)), a k nim příslušející vlastní funkce

$$u_k(x) = K_k\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right)}{\ell}x\right), \quad k \in \mathbb{N},\ K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Z těchto vlastních funkcí bude nutné vybrat takové, které splňují jednostrannou podmínku (6.9), což budeme provádět opět omezováním hodnot, jichž můžou nabývat konstanty K_k.

Nechť tedy máme obecně množinu funkcí

$$\mathrm{U} = \left\{u_k(x);\ u_k(x) = K_k\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right)}{\ell}x\right),\ K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

a množinu funkcí

$$\mathrm{U}' = \left\{u_{k_{bp}}(x);\ u_{k_{bp}}(x) = K_{k_{bp}}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right)}{\ell}x\right),\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

kde

$$\operatorname{sign} K_{k_{bp}} = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x_0\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right)}{\ell}x_0\right) \tag{6.10}$$

pro

$$\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x_0\right) \ne \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right)}{\ell}x_0$$

a

$$K_{k_{bp}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{jinak.} \tag{6.11}$$

Pro funkce $u_{k_{bp}}$ je tím splněna podmínka (6.9) a jistě platí $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$. Tedy jsou tyto funkce $u_{k_{bp}},\ k \in \mathbb{N}$ řešeními naší úlohy.

Nyní se opět zaměříme na vlastní funkce, které jsme získali v úloze překážkové. Je přirozené, že všechny vlastní funkce v překážkové úloze nalezené splňují podmínku (6.9). Zároveň pro oba typy vlastních funkcí $u^P_{1_n},\ u^P_{2_n}$ obecně platí příslušnost prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$, přičemž tehdy a jen tehdy, je-li $M^P_{1_n} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, platí navíc $u^P_{1_n} \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ (viz (5.62), pozn. $n := k$). Takové funkce $u^P_{1_n}$ jsou pak funkcemi, které se v daném bodě x_0 „dotknou čistým dotykem“. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $u^P_{2_n} \in [\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))] \setminus \mathrm{C}^3((0,\ell))$. Tomuto prostoru přirozeně přísluší i funkce $u^P_{1_n}$, pro něž $M^P_{1_n} \neq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (viz (5.61), pozn. $n := k$). Tedy takovéto $u^P_{1_n}$ a všechny $u^P_{2_n}$ se v daném bodě x_0 „dotýkají a lámou ve třetí derivaci“.

Vlastní funkce bezpřekážkové úlohy, jejichž funkční hodnota je v bodě x_0 kladná, budeme značit u^B_n.

Uvažujme tedy opět případ $\ell = 1,\ x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$, kterým jsme se již zabývali v překážkové a bezpřekážkové úloze s týmiž okrajovými podmínkami (6.7), (6.8).

V úloze bez překážky jsme pro uvedené parametry určili vlastní čísla

$$\lambda_1 \doteq 20.19$$

$$\lambda_2 \doteq 59.68$$

$$\lambda_3 \doteq 118.90$$

a k nim příslušné vlastní funkce

$$u_1(x) = K_1 \left(\sin\left(\sqrt{20.19}x\right) + 0.98x\right), \quad x \in (0,1), \quad K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$u_2(x) = K_2 \left(\sin\left(\sqrt{59.68}x\right) - 0.99x\right), \quad x \in (0,1), \quad K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$u_3(x) = K_3 \left(\sin\left(\sqrt{118.90}x\right) + x\right), \quad x \in (0,1), \quad K_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Z kritérií (6.10), (6.11) tedy zřejmě vyplývají funkce

$$u^B_1 := u_{1_{bp}}(x) = K_{1_{bp}} \left(\sin\left(\sqrt{20.19}x\right) + 0.98x\right), \quad K^B_1 := K_{1_{bp}} > 0$$

$$u^B_2 := u_{2_{bp}}(x) = K_{2_{bp}} \left(\sin\left(\sqrt{59.68}x\right) - 0.99x\right), \quad K^B_2 := K_{2_{bp}} < 0$$

$$u^B_3 := u_{3_{bp}}(x) = K_{3_{bp}} \left(\sin\left(\sqrt{118.90}x\right) + x\right), \quad K^B_3 := K_{3_{bp}} > 0,$$

které jsou z prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ a jsou řešeními naší úlohy s jednostrannou podmínkou.

Nyní se podivme na vlastní čísla, která jsme určili v překážkové úloze, tj.

$$\begin{aligned} \lambda_{1_1}^P &\doteq 36.31 \\ \lambda_{1_2}^P &\doteq 104.22 \\ \lambda_{1_3}^P &\doteq 195.20, \end{aligned} \tag{6.12}$$

a jim odpovídající vlastní funkce

$$u_{1_1}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{1_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{1_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{1_{1_L}}^P(x) &= K_{1_1}^P(-1.61 \sin(\sqrt{36.31}x) - 1.85x) \\ u_{1_{1_P}}^P(x) &= K_{1_1}^P\left(0.77\left(1 - \cos(\sqrt{36.31}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{36.31}(1-x)) - \sqrt{36.31}(1-x)\right), \end{aligned}$$

dále

$$u_{1_2}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{2_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{2_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{1_{2_L}}^P(x) &= K_{1_2}^P(3.09 \sin(\sqrt{104.22}x) - 2.31x) \\ u_{1_{2_P}}^P(x) &= K_{1_2}^P\left(1.86\left(1 - \cos(\sqrt{104.22}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{104.22}(1-x)) - \sqrt{104.22}(1-x)\right), \end{aligned}$$

a nakonec

$$u_{1_3}^P(x) = \begin{cases} u_{1_{3_L}}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_{3_P}}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{1_{3_L}}^P(x) &= K_{1_3}^P(-6.37 \sin(\sqrt{195.20}x) + 1.05x) \\ u_{1_{3_P}}^P(x) &= K_{1_3}^P\left(5.36\left(1 - \cos(\sqrt{195.20}(1-x))\right) + \sin(\sqrt{195.20}(1-x)) - \sqrt{195.20}(1-x)\right), \end{aligned}$$

přičemž

$$K_{1_1}^P > 0, \quad K_{1_2}^P > 0, \quad K_{1_3}^P > 0$$

a platí (viz (5.61))

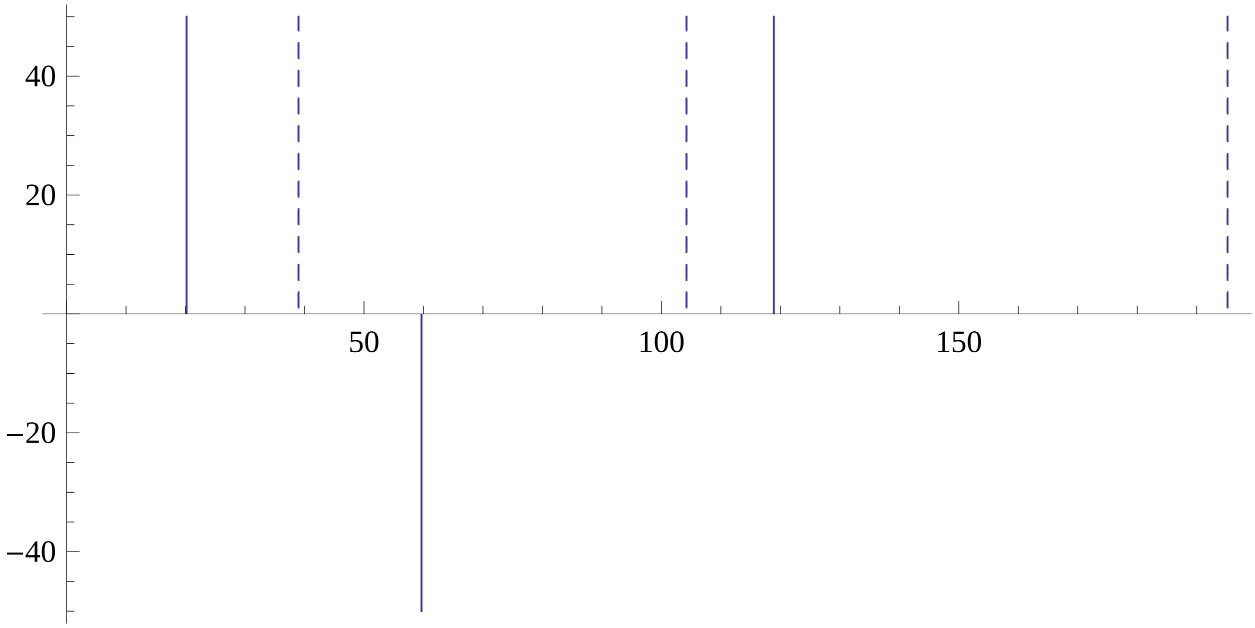
$$u_{1_1}^P,\ u_{1_2}^P,\ u_{1_3}^P \in \left[\mathrm{C}^2\left([0,1]\right) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(0,\frac{2}{3}\right)\right) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(\frac{2}{3},1\right)\right)\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1)).$$

Nalezli jsme tedy pro prvních šest vlastních čísel

$$\lambda_1^B < \lambda_{1_1}^P < \lambda_2^B < \lambda_{1_2}^P < \lambda_3^B < \lambda_{1_3}^P \tag{6.13}$$

odpovídající vlastní funkce, které řeší úlohu se zadanou jednostrannou podmínkou (6.9).

Naznačené svislice v diagramu na Obrázku 6.2 protínají vodorovnou osu v hodnotách vlastních čísel (6.13). Průměty těchto svislic na svislou osu pak vždy znázorňují množinu přípustných nenulových K, pro která vybranému vlastnímu číslu λ odpovídající vlastní funkce u splňuje pro dané parametry $x_0 = \frac{2}{3}$, $\ell = 1$ úlohu s jednostrannou podmínkou (6.9). Plná čára dále značí příslušnost této vlastní funkce prostoru $\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,1))$, přerušovaná čára příslušnost prostoru $\left[\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,\frac{2}{3})) \cap \mathrm{C}^4((\frac{2}{3},1))\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1))$.



Obrázek 6.2: Diagram - λ, K, hladkost

6.3 Okrajové podmínky 0-1, 0-1

Nechť je zadána úloha

$$u''''(x) + \lambda u''(x) = 0, \quad x \in (0, \ell),\ \lambda > 0$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(\ell) = 0 \tag{6.14}$$

$$u'(0) = u'(\ell) = 0 \tag{6.15}$$

a jednostrannou podmínkou v bodě $x_0 \in (0, \ell)$

$$u(x_0) \geq 0, \tag{6.16}$$

kde $u(x)$ je funkcí takovou, že

$$\begin{aligned} & u(x_0) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell)) \qquad \text{nebo} \\ & \quad u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)), \\ & u(x_0) > 0 \Rightarrow u \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell)) \end{aligned}$$

a

$$\lim_{x \to x_0-} u'''(x) \leq \lim_{x \to x_0+} u'''(x).$$

Podívejme se opět prve na bezpřekážkovou variantu. Zde jsme hledali vlastní čísla $\lambda_k^B := \lambda_k$ taková, že platí

$$\sqrt{\lambda_k}\ell \ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) = 2\sec\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - 2, \quad k \in \mathbb{N}$$

(viz (3.30), (3.31)), a k nim příslušející vlastní funkce

$$u_k(x) = K_k\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell}\left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \sqrt{\lambda_k}x\right) - 1\right),$$
$$\text{kde } k \in \mathbb{N},\ K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Z těchto vlastních funkcí bude opět nutné vybrat takové, které splňují jednostrannou podmínku (6.16), což budeme provádět opět omezováním hodnot, jichž můžou nabývat konstanty K_k.

Nechť tedy máme obecně množinu funkcí

$$\mathrm{U} = \{u_k(x);\ V(u_k(x)),\ k \in \mathbb{N}\},$$

kde $V(u_k(x))$ je vlastností

$$u_k(x) = K_k \left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell} \left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) - \sqrt{\lambda_k} x \right) - 1 \right),$$

kde $K_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a množinu funkcí

$$\mathrm{U}' = \left\{ u_{k_{bp}}(x);\ V'(u_{k_{bp}}(x)),\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

kde $V'(u_{k_{bp}}(x))$ je vlastností

$$u_{k_{bp}}(x) = K_{k_{bp}} \left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell} \left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k} x\right) - \sqrt{\lambda_k} x \right) - 1 \right)$$

a kde

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign} K_{k_{bp}} = \\ &= \operatorname{sign}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k} x_0\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell} \left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k} x_0\right) - \sqrt{\lambda_k} x_0 \right) - 1 \right) \end{aligned} \tag{6.17}$$

pro

$$\cos\left(\sqrt{\lambda_k} x_0\right) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}\ell) - 1}{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ell\right) - \sqrt{\lambda_k}\ell} \left(\sin\left(\sqrt{\lambda_k} x_0\right) - \sqrt{\lambda_k} x_0 \right) - 1 \neq 0$$

a

$$K_{k_{bp}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{jinak.} \tag{6.18}$$

Pro funkce $u_{k_{bp}}$ je tím splněna podmínka (6.16) a jistě platí $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$. Tedy jsou tyto funkce $u_{k_{bp}},\ k \in \mathbb{N}$ řešeními naší úlohy.

Nyní se opět zaměříme na vlastní funkce, které jsme získali v úloze překážkové. Je přirozené, že všechny vlastní funkce v překážkové úloze nalezené splňují podmínku (6.16). Zároveň pro vlastní funkce u_i^P obecně platí příslušnost prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,x_0)) \cap \mathrm{C}^4((x_0,\ell))$, přičemž při splnění podmínky (5.96, pozn. $i := k$) platí $u_i^P \in \mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$, a takové funkce u_i^P jsou tedy funkcemi, které se v daném bodě x_0 „dotknou čistým dotykem“.

Vlastní funkce bezpřekážkové úlohy, jejichž funkční hodnota je v bodě x_0 kladná, budeme značit u_i^B.

Uvažujme tedy opět případ $\ell = 1$, $x_0 = \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3}$, kterým jsme se již zabývali v překážkové a bezpřekážkové úloze s týmiž okrajovými podmínkami (6.14), (6.15).

V úloze bez překážky jsme pro uvedené parametry vypočítali vlastní čísla

$$\lambda_1 \doteq 39.48$$
$$\lambda_2 \doteq 80.76$$
$$\lambda_3 \doteq 157.91,$$

a k nim získali vlastní funkce

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= K_1 \left(\cos\left(\sqrt{39.48}x\right) - 1\right),\ K_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
u_2(x) &= K_2 \left(\cos\left(\sqrt{80.76}x\right) - 0.2225\left(\sin\left(\sqrt{80.76}x\right) - \sqrt{80.76}x\right) - 1\right), \\
&\qquad \text{kde } K_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
u_3(x) &= K_3 \left(\cos\left(\sqrt{157.91}x\right) - 1\right),\ K_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Z kritérií (6.17), (6.18) tedy zřejmě vyplývají funkce

$$\begin{aligned}
u_1^B &:= u_{1_{bp}}(x) = K_{1_{bp}} \left(\cos\left(\sqrt{39.48}x\right) - 1\right),\ K_1^B := K_{1_{bp}} < 0 \\
u_2^B &:= u_{2_{bp}}(x) = K_{2_{bp}} \left(\cos\left(\sqrt{80.76}x\right) - 0.2225\left(\sin\left(\sqrt{80.76}x\right) - \sqrt{80.76}x\right) - 1\right), \\
&\qquad \text{kde } K_2^B := K_{2_{bp}} > 0, \\
u_3^B &:= u_{3_{bp}}(x) = K_{3_{bp}} \left(\cos\left(\sqrt{157.91}x\right) - 1\right),\ K_3^B := K_{3_{bp}} < 0,
\end{aligned}$$

které jsou z prostoru $\mathrm{C}^2([0,\ell]) \cap \mathrm{C}^4((0,\ell))$ a jsou řešeními naší úlohy s jednostrannou podmínkou.

Nyní se podívme na vlastní čísla, která jsme určili v překážkové úloze, tj.

$$\begin{aligned}
\lambda_1^P &\doteq 68.20 \\
\lambda_2^P &\doteq 142.21 \\
\lambda_3^P &\doteq 238.41,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

a jim odpovídající vlastní funkce

$$u_1^P(x) = \begin{cases} u_{1_L}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{1_P}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned}
u_{1_L}^P(x) &= K_1^P \left(1.6544\left(0.0462\left(\sin(\sqrt{68.20}x) - \sqrt{68.20}x\right) - \cos(\sqrt{68.20}x) + 1\right)\right) \\
u_{1_P}^P(x) &= K_1^P \left(0.8111\left(\sqrt{68.20}(1-x) - \sin(\sqrt{68.20}(1-x))\right) + \cos(\sqrt{68.20}(1-x)) - 1\right),
\end{aligned}$$

dále

$$u_2^P(x) = \begin{cases} u_{2_L}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{2_P}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{2_L}^P(x) &= K_2^P \left(-1.6208 \left(0.1576 \left(\sin(\sqrt{142.21}x) - \sqrt{142.21}x\right) - \cos(\sqrt{142.21}x) + 1\right)\right) \\ u_{2_P}^P(x) &= K_2^P \left(0.3547 \left(\sqrt{142.21}(1-x) - \sin(\sqrt{142.21}(1-x))\right) + \cos(\sqrt{142.21}(1-x)) - 1\right), \end{aligned}$$

a nakonec

$$u_3^P(x) = \begin{cases} u_{3_L}^P(x), & x \in [0, \frac{2}{3}] \\ u_{3_P}^P(x), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} u_{3_L}^P(x) &= K_3^P \left(0.9543 \left(0.1488 \left(\sin(\sqrt{238.41}x) - \sqrt{238.41}x\right) - \cos(\sqrt{238.41}x) + 1\right)\right) \\ u_{3_P}^P(x) &= K_3^P \left(0.0956 \left(\sqrt{238.41}(1-x) - \sin(\sqrt{238.41}(1-x))\right) + \cos(\sqrt{238.41}(1-x)) - 1\right), \end{aligned}$$

přičemž

$$K_1^P < 0, \qquad K_2^P < 0, \qquad K_3^P > 0$$

a platí (viz (5.91))

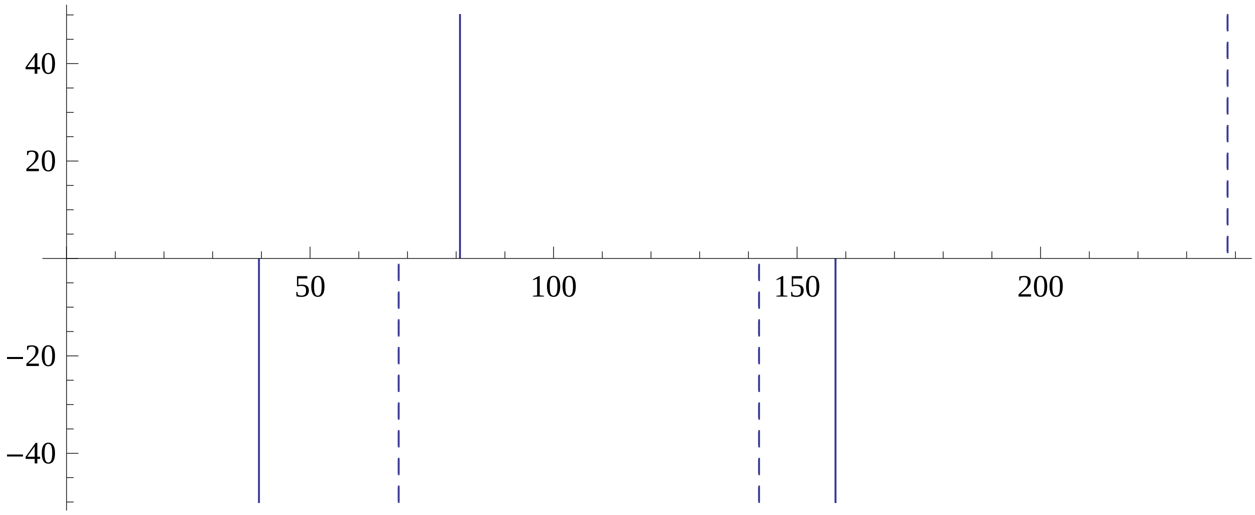
$$u_1^P,\ u_2^P,\ u_3^P \in \left[\mathrm{C}^2((0,1)) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(0, \frac{2}{3}\right)\right) \cap \mathrm{C}^4\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right)\right)\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1)).$$

Nalezli jsme tedy pro prvních šest vlastních čísel

$$\lambda_1^B < \lambda_1^P < \lambda_2^B < \lambda_2^P < \lambda_3^B < \lambda_3^P \tag{6.20}$$

odpovídající vlastní funkce, které řeší úlohu se zadanou jednostrannou podmínkou (6.16).

Naznačené svislice v diagramu na Obrázku 6.3 protínají vodorovnou osu v hodnotách vlastních čísel (6.20). Průměty těchto svislic na svislou osu opět znázorňují množinu přípustných nenulových K, pro která vybranému vlastnímu číslu λ odpovídající vlastní funkce u splňuje pro dané parametry $x_0 = \frac{2}{3}$, $\ell = 1$ úlohu s jednostrannou podmínkou (6.16). Plná čára dále značí příslušnost této vlastní funkce prostoru $\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0,1))$, přerušovaná čára příslušnost prostoru $\left[\mathrm{C}^2([0,1]) \cap \mathrm{C}^4((0, \frac{2}{3})) \cap \mathrm{C}^4((\frac{2}{3}, 1))\right] \setminus \mathrm{C}^3((0,1))$.



Obrázek 6.3: Diagram - λ, K, hladkost

Kapitola 7

Závěr

V celé práci jsme se snažili o maximální analytický vhled do dílčích situací, odvozovali předpisy vlastních funkcí a kritéria pro splňování zadaných podmínek úlohy. Rovněž jsme s pomocí analyticko-numerických metod dospívali ke konkrétním vlastním číslům, nebo k jejich obecným vyjádřením, a na základě analyticky vybudované teorie pak k vlastním funkcím splňujícím požadované podmínky. Tyto vlastní funkce jsme následně vykreslovali. Také jsme obecně monitorovali řády spojité diferencovatelnosti vlastních funkcí a komplexní poznatky intepretovali v názorných diagramech.

Předmětem dalšího zkoumání by mohla být analogická úloha se dvěma jednostrannými podmínkami uvnitř intervalu.

Literatura

[1] RECKE, L., EISNER, J., KUČERA, M. Smooth bifurcation for variational inequalities based on the implicit function theorem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, roč. 275, č. 2, s. 615-641. ISSN: 0022-247X.

[2] MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1981.

[3] KURZWEIL, Jaroslav. Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978. 418 s.