JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Diplomová práce

Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ

Autor diplomové práce: Vladislav Beňadik

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

České Budějovice 2011

Jihočeská univerzita

Pedagogická fakulta

Zadání diplomové práce

Autor:	**Vladislav Beňadik**
Studijní program:	M7504 Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky a tělesné výchovy
Název závěrečné práce:	**Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ**
Garantující pracoviště:	katedra matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D
Datum zadání závěrečné práce:	26. 11. 2008
Datum odevzdání závěrečné práce:	29. 4. 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne

podpis

Anotace

BEŇADIK, VLADISLAV. Diferenciální počet více proměnných pro studenty učitelství 2. stupně ZŠ, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice 2011.

Práce obsahuje řešení základních příkladů diferenciálního počtu funkce více proměnných (speciálně dvou a tří proměnných). Zahrnuje příklady na řešení definičního oboru, prvních a druhých parciálních derivací, určování lokálních extrémů funkcí (explicitně i implicitně zadaných) a nalezení rovnice tečné roviny ke grafu funkce v bodě. Příklady jsou řazeny dle obtížnosti.

Klíčová slova: funkce, definiční obor, první parciální derivace, druhá parciální derivace, stacionární bod, lokální minimum, lokální maximum, tečná rovina.

Abstract

BEŇADIK, VLADISLAV. The differential calculus of functions of several variables - a collection of solved and unsolved examples, University of South Bohemia - Pedagogical faculty, České Budějovice 2011.

This thesis includes solving the basic examples of differential calculus (especially two and three variables). The work covers examples of the solutions of the domain, the first and second partial derivatives, determining the functions of local extremes (both explicitly and implicitly given) and find the equation of the tangent plane to a point in the graphs of functions. The examples are sorted by difficulty.

Key words: function, domain of definition, first partial derivative, second partial derivative, stationary point, local minimum, local maximum, tangent plane.

Poděkování

Děkuji vedoucí práce paní RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D za cenné připomínky a rady při psaní této diplomové práce a panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. s pomocí při vykreslování grafů.

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Cílem mé diplomové práce je vytvoření sbírky úloh řešených a neřešených příkladů ze základů diferenciálního počtu více proměnných, především však dvou a tří proměnných. Práce je určena pro studenty učitelství matematiky pro základní i střední školy. Příklady jsou vybrány tak, aby na nich byl ukázán co nejsrozumitelněji postup při řešení různých typů úloh.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř hlavních kapitol, které obsahují základní problémy diferenciálního počtu. První kapitola se zabývá definičními obory funkcí více proměnných, druhá kapitola jejími parciálními derivacemi. Jsou zde řešeny příklady jak funkcí zadaných explicitně, tak i implicitně. V následujících dvou kapitolách zúročíme praktické zkušenosti procvičené z prvních dvou kapitol při výpočtech lokálních extrémů a tečných rovin, resp. nadrovin. Příklady jsem volil tak, aby byl čtenář seznámen se základními postupy při řešení jednotlivých typů příkladů (převážně ukázkových k danému tématu).

V úvodu každé kapitoly se nachází výběr základní teorie, kterou by měl čtenář minimálně znát k tomu, aby zvládl dané výpočty. Je potřeba mít už základní znalosti z matematické analýzy, převážně z funkcí jedné proměnné. V příkladech jsem se snažil tuto teorii co nelépe čtenáři přiblížit. Pro další studium a rozšíření obzorů tohoto tématu bych doporučil především literaturu [2], [3], [4], [6].

Příklady jsou v této práci řazeny dle obtížnosti. U některých příkladů jsou uvedena dvě řešení, aby čtenář dosáhl širšího náhledu na daný problém. Každý příklad je podrobně vysvětlen a u většiny je doplněn obrázkem pro lepší pochopení jak zadaného příkladu, tak i teorie.

Práce je napsána v Microsoft Office Word 2007 a převedena do formátu PDF. Obrázky jsou vytvořeny a upraveny v programech Maple 12, GeoGebra a Zoner Photo Studio 8.

1. Definiční obor funkce dvou proměnných

V této kapitole se budeme zabývat určováním definičního oboru. Každý příklad je doplněn grafickým zobrazením výsledku. Na začátku kapitoly je stručná teorie týkající se tématu, kterou jsem převzal a upravil z literatury [2], [4], [5].

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1: Eukleidovským 2-rozměrným prostorem (značíme E_2) rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. $E_2 = R \times R$. Body tohoto prostoru mají podobu $A = [a_1, a_2]$. Vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2], Y = [y_1, y_2]$ určuje tzv. eukleidovská metrika (značíme ρ):

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definice 1.2: Funkce f je zobrazení $f: M \to R$, které každému prvku $[x, y] \in M$ přiřazuje právě jedno $z \in R$ tak, že platí $z = f(x, y) \in R$. Množinu M nazveme definičním oborem funkce f, značíme D_f.

Poznámka 1.2: Pokud nebude definiční obor specifikován, tak jím rozumíme maximální množinu, na které můžeme funkci definovat.

Definice 1.3: Nechť $A = [a_1, a_2]$, potom množina $f(M) = \{f(A) | A \in D_f\}$ se nazývá obor hodnot funkce f na množině M.

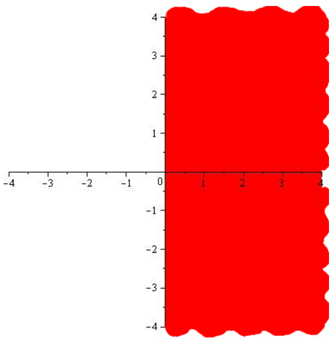
1.2 Řešené příklady

Příklad 1.1: Najděte definiční obor funkce $f: f(x,y) = y + \sqrt{2x}$ a zakreslete.

Řešení:

Zajímá nás, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ bude funkce dvou proměnných definována. Ze zadání vidíme, že y není omezeno žádnou podmínkou, tudíž patří do intervalu $(-\infty;\infty)$ a pro x platí podmínka: $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$, to znamená x patří do intervalu $\langle 0;\infty)$. Definičním oborem dané funkce je polorovina, pro kterou platí $x \in \langle 0;\infty) \wedge y \in (-\infty;\infty)$. Výsledek je tedy:

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R \,|x \in \langle 0;\infty), y \in (-\infty;\infty)\}.$$



Obrázek 1.1: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = y + \sqrt{2x}$.

Příklad 1.2: Určete definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$ a zakreslete.

Řešení:

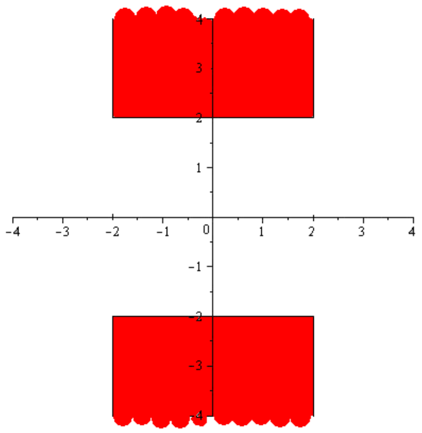
Opět nás zajímá, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ je daná funkce definovaná. Rozdělíme si postup do dvou fází, kdy nejdříve budeme vyšetřovat podmínky existence první odmocniny a poté druhé:

$$\sqrt{4 - x^2} \rightarrow 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -2,2 \rangle$$

$$\sqrt{y^2-4} \rightarrow y^2-4 \geq 0 \rightarrow |y| \geq 2 \Rightarrow y \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty).$$

Definiční obor dané funkce je:

$$D_f = \{[x,y] \in R \times R \mid x \in \langle -2,2\rangle, y \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)\}.$$



Obrázek 1.2: Definiční obor funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-4}$.

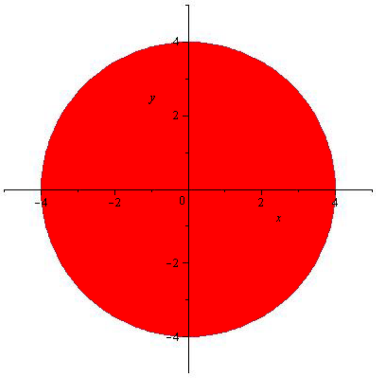
Příklad 1.3: Zjistěte, pro které uspořádané dvojice $[x,y] \in R \times R$ je funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ definována a definiční obor znázorněte.

Řešení:

Vyšetříme podmínky, kdy má daná odmocnina smysl:

$$\sqrt{16-x^2-y^2} \rightarrow 16-x^2-y^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 \leq 16.$$

Definičním oborem funkce $f\colon f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ je kruh s poloměrem 4, včetně hraniční kružnice: $D_f = \{[x,y] \in R \times R \mid x^2+y^2 \leq 16\}$.



Obrázek 1.3: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Příklad 1.4: Nalezněte definiční obor funkce

$$f: f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(16 - x^2 - y^2)}.$$

Řešení:

Nejprve určíme, pro která $[x, y] \in R \times R$ je odmocnina definovaná, tedy musí platit, že $(x^2 + y^2 - 4)(16 - x^2 - y^2) \geq 0$. Rozdělíme to na dva případy. První, kdy budeme předpokládat, že jsou obě závorky záporné nebo rovny nule a druhý, kdy předpokládáme, že jsou závorky kladné nebo rovny nule.

První případ: $(x^2 + y^2 - 4 \leq 0) \wedge (16 - x^2 - y^2 \leq 0) \rightarrow (x^2 + y^2 \leq 4) \wedge$

$$\wedge (x^2 + y^2 \geq 16).$$

Pro zjednodušení a lepší viditelnost to lze napsat jako: $4 \geq x^2 + y^2 \geq 16$.

Z tohoto zápisu lze vidět, že se jedná o kruh (včetně hraniční kružnice) s poloměrem 2 a se středem v počátku soustavy a vnější okolí kružnice (včetně hraniční kružnice) s poloměrem 4 a se středem $S = [0,0]$. Tyto dvě množiny se neprotnou. Proto tento případ nemá řešení.

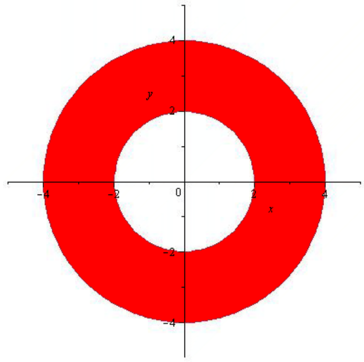
Druhý případ: $(x^2 + y^2 - 4 \geq 0) \wedge (16 - x^2 - y^2 \geq 0) \rightarrow (x^2 + y^2 \geq 4) \wedge$

$$\wedge (x^2 + y^2 \leq 16).$$

Opět pro zjednodušení a lepší viditelnost to lze napsat jako: $16 \geq x^2 + y^2 \geq 4$.

Tedy definičním oborem funkce $f\colon f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-4)(16-x^2-y^2)}$ je mezikruží kružnic $x^2+y^2=4$ a $x^2+y^2=16$, včetně hraničních kružnic, tj.:

$$D_f=\{[x,y]\in R\times R\ |16\geq x^2+y^2\geq 4\}.$$

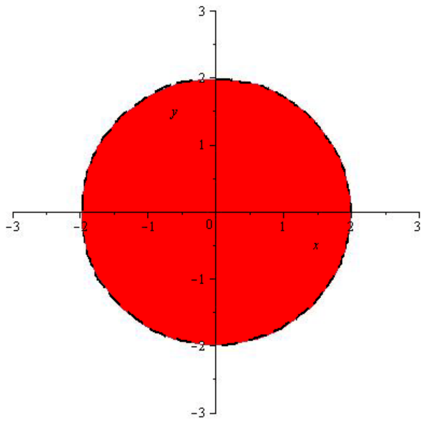


Obrázek 1.4: Definiční obor funkce *f*.

Příklad 1.5: Určete definiční obor funkce $f\colon f(x,y)=\ln(4-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)$ a zakreslete ho do kartézské soustavy souřadnic.

Řešení:

Abychom našli definiční obor této funkce, je potřeba zjistit, pro jaké dvojice $[x,y]\in R\times R$ je argument logaritmu kladný, tj. $4-x^2-y^2>0$. To znamená, že platí: $D_f=\{[x,y]\in R\times R|x^2+y^2<4\}$. Definičním oborem je tedy kruh s poloměrem 2 a se středem v počátku soustavy souřadnic.

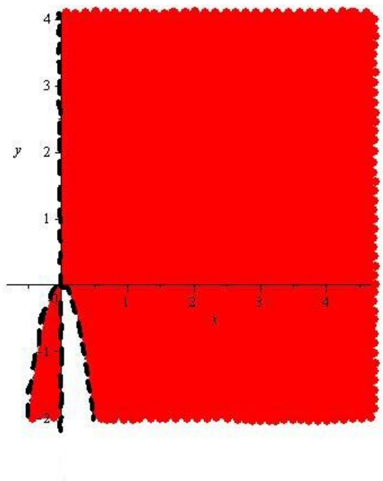


Obrázek 1.5: Definiční obor funkce $f\colon f(x,y)=\ln(4-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2)$.

Příklad 1.6: Určete a zakreslete definiční obor funkce $f: f(x,y) = ln\left(2x + \frac{y}{4x}\right)$.

Řešení:

Daná funkce je definovaná, jestliže platí: $2x + \frac{y}{4x} > 0$. Levou stranu nerovnice převedeme na společného jmenovatele, tím získáme nerovnici $\frac{8x^2+y}{4x} > 0$. Nerovnost platí, jestliže: $\left((8x^2 + y > 0) \wedge (4x > 0)\right) \vee \left((8x^2 + y < 0) \wedge (4x < 0)\right)$. Vidíme tedy, že $D_f = \{[x,y] \in R \times R | (y > -8x^2 \wedge x > 0) \vee (y < -8x^2 \wedge x < 0)\}$.



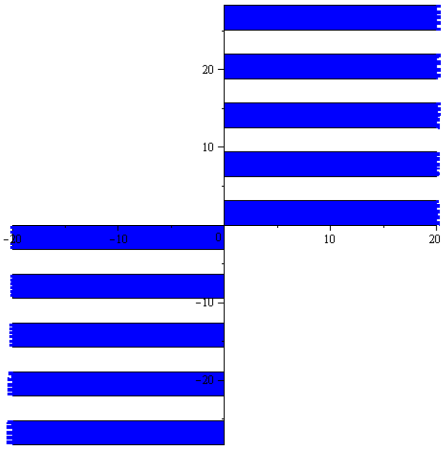
Obrázek 1.6: Definiční obor funkce $f: f(x,y) = ln\left(2x + \frac{y}{4x}\right)$.

Příklad 1.7: Určete a nakreslete definiční obor funkce $f: f(x,y) = \sqrt{x(\sin y)}$.

Řešení:

Tento příklad bude specifický tím, že se nám zde objevila funkce sinus, která je periodická. Postup bude ale stejný jako u předchozích příkladů. Nejprve si tedy určíme podmínky, pro které $[x,y] \in R \times R$ má odmocnina smyl: $x(\sin y) \geq 0 \rightarrow (x \geq 0 \wedge \sin y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge \sin y \leq 0)$. Definiční obor se tedy rovná (nesmíme zapomenout, že je funkce sinus periodická):

$$D_f = \{[x, y] \in R \times R; \left(x \geq 0 \land y \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle\right)$$
$$\lor \left(x \leq 0 \land y \in \bigcup_{k=0}^{-\infty} \langle (2k-1)\pi, 2k\pi \rangle\right)\}.$$



Obrázek 1.7: Definiční obor funkce $f: f(x, y) = \sqrt{x(\sin y)}$.

1.3 Neřešené příklady

1. Určete definiční obory funkcí dvou proměnných a zakreslete:

   a) $f: f(x, y) = \log(1 - x) + \sqrt{1 - y^2}$ [11],

   b) $f: f(x, y) = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$ [11],

   c) $f: f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ [2],

   d) $f: f(x, y) = \log\left(\frac{x-1}{x+y+1}\right)$ [11],

   e) $f: f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 8y}$.

2. Parciální derivace

V druhé kapitole si ukážeme, jak derivovat funkci více proměnných. Budeme derivovat funkce zadané jak explicitně, tak i implicitně. Teoretická část je převzata z literatury [1], [4], [6], [7], [8], [11], [15].

2.1 Základní pojmy

Teorie funkce dvou proměnných

Definice 2.1: Pro $\epsilon > 0$ definujeme:

ϵ – okolí bodu $X \in R \times R$: $U_\epsilon(X) = \{Y \in R \times R: \rho(X,Y) < \epsilon\}$.

Prstencové ϵ – okolí bodu $X \in R \times R$:

$$P_\epsilon(X) = U_\epsilon(X) - \{X\} = \{X \in R \times R: 0 < \rho(X,Y) < \epsilon\}.$$

Definice 2.2: Funkce f má v bodě $X_0 = [x_1, x_2]$ limitu A, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x,y) - A| < \epsilon$ platí pro všechny body $X \in P_\delta(X_0)$.

Poznámka 2.1: Limitu funkce *f* v bodě $X_0 = [x_1, x_2]$, která je rovna *A*, značíme znakem $\lim_{[x,y]\to[x_1,x_2]} f(x,y) = A$.

Definice 2.3: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $X_0 = [x_1, x_2]$ svého definičního oboru, jestliže platí: $\lim_{[x,y]\to[x_1,x_2]} f(x,y) = f(x_1, x_2)$.

Definice 2.4: (Vnitřní bod množiny)

Nechť $A \subset M$. Bod $X_0 \in M$ je vnitřní bod množiny *A*, existuje-li nějaké $U_\epsilon(X_0) \subseteq A$.

Definice 2.5: (Parciální derivace funkce dvou proměnných)

Nechť f je funkce 2 proměnných definovaná na $D_f \subset R \times R$ a nechť bod $X_0 = [x_1, x_2]$ je vnitřním bodem D_f.

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné x v bodě X_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}.$$

Řekneme, že funkce f má parciální derivaci podle proměnné y v bodě X_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_1, x_2)}{h}.$$

Poznámka 2.2: V některé další literatuře je parciální derivace podle x definována místo $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_0, x_2)}{h}$ limitou $\lim_{x\to x_1} \frac{f(x, x_2) - f(x_1, x_2)}{x - x_1}$ (respektive parciální derivace podle proměnné y definována místo $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2+h) - f(x_1, x_2)}{h}$ limitou $\lim_{y\to x_2} \frac{f(x_1, y) - f(x_1, x_2)}{y - x_2}$).

Poznámka 2.3: V praxi počítáme parciální derivace podle x tak, že derivujeme funkci f podle proměnné x a proměnnou y bereme jako konstantu. Obdobně počítáme i parciální derivace funkce f podle y, kdy x bereme jako konstantu.

Poznámka 2.4: Derivace funkce podle proměnné x značíme $f_x'(x, y)$, derivace podle proměnné y značíme $f_y'(x, y)$.

Poznámka 2.5: (Druhé parciální derivace)

U většiny příkladů se budeme setkávat i s druhou parciální derivací. Jedná se o následné derivování již derivovaných funkcí tak, že první parciální derivaci podle x vezmeme jako funkci a postupujeme jako při první derivaci (tudíž derivujeme podle x a y bereme jako konstantu tj. $f_{x^2}''(x, y) = \left(f_x'(x, y)\right)_x'$). Stejný postup opakujeme i u druhé parciální derivace podle y: $f_{y^2}''(x, y) = \left(f_y'(x, y)\right)_y'$.

Druhé parciální derivace, které jsme poprvé derivovali podle x a podruhé také podle x, značíme $f''_{x^2}(x, y)$.

Druhé parciální derivace, které jsme poprvé derivovali podle y a podruhé také podle y, značíme $f''_{y^2}(x, y)$.

Derivacím, které jsme poprvé derivovali podle jedné proměnné a podruhé derivovali podle druhé, se říká smíšené parciální derivace. Budeme je značit: $f''_{xy}(x, y)$, kdy jsme poprvé derivovali funkci podle x a následně podle y (tj. $f''_{xy}(x, y) = \left(f'_x(x, y)\right)'_y$) a $f''_{yx}(x, y)$, kdy jsme poprvé derivovali funkci podle y a následně podle x $f''_{yx}(x, y) = \left(f'_y(x, y)\right)'_x$.

Úplně stejný postup aplikujeme i při druhých parciálních derivacích funkce tří proměnných.

Věta 2.1: Pokud jsou smíšené derivace $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ v bodě $X_0 = [x_1, x_2]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny, tzn. $f''_{xy}(x_1, x_2) = f''_{yx}(x_1, x_2)$.

Teorie funkce tří proměnných

Definice 2.6: Pro $\epsilon > 0$ definujeme:

ϵ – okolí bodu $X \in R \times R \times R$: $U_\epsilon(X) = \{Y \in R \times R \times R: \rho(X, Y) < \epsilon\}$.

Prstencové ϵ – okolí bodu $X \in R \times R \times R$:

$$P_\epsilon(X) = U_\epsilon(X) - \{X\} = \{Y \in R \times R \times R: 0 < \rho(X, Y) < \epsilon\}.$$

Definice 2.7: Funkce f má v bodě $X_0 = [x_1, x_2, x_3]$ limitu A, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x, y, z) - A| < \epsilon$ platí pro všechny body $X \in P_\delta(X_0)$.

Poznámka 2.6: Limitu funkce f v bodě $X_0 = [x_1, x_2, x_3]$, která je rovna A, značíme znakem $\lim_{[x,y,z]\to[x_1,x_2,x_3]} f(x, y, z) = A$.

Definice 2.8: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $X_0 = [x_1, x_2, x_3]$ svého definičního oboru, jestliže platí: $\lim_{[x,y,z]\to[x_1,x_2,x_3]} f(x,y,z) = f(x_1,x_2,x_3)$.

Definice 2.9: (Vnitřní bod množiny)

Nechť $A \subset M$. Bod $X_0 \in M$ je vnitřní bod množiny A, existuje-li nějaké $U_\epsilon(X_0) \subseteq A$.

Definice 2.10: (parciální derivace funkce tří proměnných)

Nechť f je funkce 3 proměnných definovaná na $D_f \subset R \times R \times R$ a nechť bod $X_0 = [x_1, x_2, x_3]$ je vnitřním bodem D_f.

Řekneme, že funkce *f* má parciální derivaci podle proměnné *x* v bodě X_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h}.$$

Řekneme, že funkce *f* má parciální derivaci podle proměnné *y* v bodě X_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2+h, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h}.$$

Řekneme, že funkce *f* má parciální derivaci podle proměnné *z* v bodě X_0, pokud existuje vlastní limita:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3+h) - f(x_1, x_2, x_3)}{h}.$$

Poznámka 2.7: Parciální derivace se počítají úplně stejným principem, jako u funkce dvou proměnných (definice 2.5), jen s tím rozdílem, že při derivování podle *x* (respektive *y*) bereme i *z* jako konstantu a přibude zde navíc ještě derivace funkce podle *z*, kdy logicky *x* a *y* bereme jako konstanty a značíme $f_z'(x,y,z)$.

Věta 2.2: Pokud jsou smíšené parciální derivace funkce tří proměnných v bodě $X_0 = [x_1, x_2, x_3]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny:

$$f_{xy}''(x_1, x_2, x_3) = f_{yx}''(x_1, x_2, x_3),$$

$$f_{xz}''(x_1, x_2, x_3) = f_{zx}''(x_1, x_2, x_3),$$

$$f''_{yz}(x_1, x_2, x_3) = f''_{zy}(x_1, x_2, x_3).$$

Obecná pravidla při derivování

Věta 2.3: Nechť existují vlastní derivace funkcí f, g v bodě $A = [a_1, a_2]$, kde $A \in D_f \subset R \times R$. Potom:

$$(f + g)'(A) = f'(A) + g'(A),$$

$$(f \cdot g)'(A) = f'(A) \cdot g(A) + f(A) \cdot g'(A),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \frac{f'(A) \cdot g(A) - f(A) \cdot g'(A)}{\left(g(A)\right)^2}.$$

Věta 2.4: (Derivace složené funkce)

Nechť funkce $h = g \circ f$, kde f je vnější funkce a g je vnitřní funkce, $A = [a_1, a_2] \in D_h$. Nechť existují vlastní derivace $f'\left(g(A)\right), g'(A)$. Potom existuje $(f \circ g)'(A)$ a platí $\left(f\left(g(A)\right)\right)' = f'\left(g(A)\right) \cdot g'(A)$.

Věta 2.5: (Derivace elementárních funkcí)

Platí:

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, pro $n \in N, x \in R$ nebo pro $n \in Z, x \in R - \{0\}$ nebo pro $n \in R, x \in (0, \infty)$
- $(\sin x)' = \cos x$, pro $x \in R$
- $(\cos x)' = -\sin x$, pro $x \in R$
- $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$, pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$
- $(cotg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$, pro $x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$
- $(e^x)' = e^x$, pro $x \in R$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, pro $x > 0$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, pro $x \in R, a > 0$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pro $x \in R$
- $(\operatorname{arccotg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, pro $x \in R$

Poznámka 2.8: Derivace elementárních funkcí jedné proměnné jsem zde uvedl proto, neboť tato pravidla používáme také u funkcí více proměnných, kdy druhou, popř. třetí, proměnnou bereme jako konstantu.

Implicitní funkce

Uvažujme nejprve případ množiny $M \subset E_2$ popsané rovnicí $F(x, y) = 0$. Množinu *M* můžeme chápat jako množinu nulových bodů funkce *F* dvou proměnných *x*, y.

Vzniká otázka, zda v určitém čtvercovém ε-okolí nějakého bodu $P_0 = [x_0, y_0] \in M$ tvoří tyto nulové body graf nějaké funkce *f* jedné proměnné *x*, tzn. zda ke každému $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde $\delta \leq \varepsilon$, existuje jedno $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ tak, že $F(x^*, y^*) = 0$.

Mějme kružnici o středu v počátku a poloměru $r = 1$ v prostoru E_2, která je definována jako množina bodů $[x, y]$ vyhovující rovnici $x^2 + y^2 = 1$. U této kružnice to platí v okolí každého bodu *P* kromě bodů $P_1 = [1,0]$ a $P_2 = [-1,0]$

Definice 2.11: Uvažujme rovnici $F(x, y) = 0$; množinu bodů $[x, y]$ vyhovující této rovnici označme *M*. Říkáme, že daná rovnice definuje nebo popisuje implicitně funkci *f* v okolí bodu $P_0 = [x_0, y_0]$, jestliže ke každému x^* v určitém okolí bodu x_0 existuje právě jedno y^* v určitém okolí bodu y_0 tak, že $F(x^*, y^*) = 0$.

Funkce f definovaná jako množina všech uspořádaných dvojic $[x^*, y^*]$ s výše uvedenou vlastností se nazývá implicitní funkce definovaná rovnicí $F(x, y) = 0$ nebo funkce zadaná v implicitním tvaru $F(x, y) = 0$ v okolí bodu P_0.

Poznámka 2.9: Pokud se z rovnice $F(x,y) = 0$ podaří v okolí bodu P_0 „vypočítat" proměnnou y, dostáváme funkci f v tzv. explicitním tvaru $y = f(x)$.

Například z rovnice naší kružnice $x^2 + y^2 = 1$ v okolí bodu $P_3 = [0,1]$ vypočteme y ve tvaru $y = \sqrt{1 - x^2}$, v okolí bodu $P_4 = [0,-1]$ vypočteme y ve tvaru $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Poznámka 2.10: Zatímco přechod od explicitního k implicitnímu tvaru dané funkce je snadný, neboť stačí anulovat pravou stranu „funkčního předpisu"

$$y = f(x) \Rightarrow y - f(x) = 0,$$

opačný přechod není obvykle možný.

Věta 2.6: (věta o existenci implicitní funkce dvou proměnných)

Uvažujme rovnici $F(x,y) = 0$. Množinu řešení této rovnice označme M.

Nechť

1. bod $P_0 = [x_0, y_0] \in M$,
2. funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu P_0,
3. $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom

I. rovnice $F(x,y) = 0$ popisuje v určitém okolí bodu P_0 implicitní funkci f, přičemž
II. f je spojitá v okolí bodu x_0 a
III. v tomto okolí má spojitou derivaci $y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$, kde y probíhá hodnoty implicitní funkce f.

Poznámka 2.11: Při výpočtu derivace funkce zadané rovnicí $F(x,y) = 0$ využíváme často místo vzorce $y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$ postupu uvedeného při jeho odvození, tj. rovnici $F(x,y) = 0$ derivujeme podle x a na y se díváme jako na funkci jedné proměnné x ($y = f(x)$). Pak dostáváme $F_x'(x,y) + y_x' F_y'(x,y) = 0$ a z této rovnice vyjádříme y_x'.

Tento postup je vhodný i při výpočtu vyšších derivací funkce implicitně zadané rovnicí $F(x,y) = 0$. Derivujeme-li rovnici $F_x'(x,y) + y_x' F_y'(x,y) = 0$ ještě jednou podle x, pak dostáváme

$$F_{x^2}''(x,y) + F_{xy}''(x,y)y_x' + y_{x^2}''F_y'(x,y) + y_x'\left(F_{yx}''(x,y) + F_{y^2}''(x,y)y_x'\right) = 0$$

a z této rovnice vypočteme y_{x^2}''.

Větu o implicitní funkci lze zobecnit na funkci n proměnných. My si zde uvedeme pouze větu o implicitní funkcí tří proměnných:

Věta 2.7: (věta o existenci implicitní funkci tří proměnných)

Uvažujme rovnici $F(x,y,z) = 0$. Množinu řešení této rovnice označme M.

Nechť

1. bod $P_0 = [x_0, y_0, z_0] \in M$,
2. funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu P_0,
3. $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Potom

I. rovnice $F(x,y,z) = 0$ popisuje v určitém okolí bodu P_0 implicitní funkci f proměnných x,y, přičemž
II. f je spojitá v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a
III. v tomto okolí má spojité parciální derivace $z_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_z'(x,y)}$ a

$z_y' = -\frac{F_y'(x,y)}{F_z'(x,y)}$, kde z probíhá hodnoty implicitní funkce f.

Poznámka 2.12: Při výpočtu derivace funkce zadané rovnicí $F(x,y,z) = 0$ využíváme (stejně jako u funkce zadané rovnicí $F(x,y) = 0$, viz. poznámka 2.17) místo vzorců $z_x' = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}, z_y' = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$ postupu uvedeného při jejich odvození, tj. rovnici $F(x,y,z) = 0$ derivujeme podle x a na z se díváme jako na funkci dvou proměnných

x,y. Poté derivujeme rovnici $F(x,y,z)=0$ podle y a na z se díváme jako na funkci dvou proměnný x,y. Pak dostáváme

$F_x'(x,y,z)+z_x'F_z'(x,y,z)=0$ a $F_y'(x,y,z)+z_y'F_z'(x,y,z)=0$.

Z těchto rovnic vypočteme z_x' a z_y'.

Tento postup je vhodný i při výpočtu vyšších derivací funkce implicitně zadané rovnicí $F(x,y,z)=0$.

Derivujeme-li rovnici $F_x'(x,y,z)+z_x'F_z'(x,y,z)=0$ ještě jednou podle x, pak dostáváme

$$F_{x^2}''(x,y,z)+F_{xz}''(x,y,z)z_x'+z_{x^2}''F_z'(x,y,z)+z_x'\left(F_{zx}''(x,y,z)+F_{z^2}''(x,y,z)z_x'\right)=0$$

a z této rovnice vypočteme z_{x^2}''.

Derivujeme-li rovnici $F_y'(x,y,z)+z_y'F_z'(x,y,z)=0$ ještě jednou podle y, pak dostáváme

$$F_{y^2}''(x,y,z)+F_{yz}''(x,y,z)z_y'+z_{y^2}''F_z'(x,y,z)+z_y'\left(F_{zy}''(x,y,z)+F_{z^2}''(x,y,z)z_y'\right)=0$$

a z této rovnice vypočteme z_{y^2}''.

Derivujeme-li rovnici $F_y'(x,y,z)+z_y'F_z'(x,y,z)=0$ podle x, pak dostáváme

$$F_{yx}''(x,y,z)+F_{xz}''(x,y,z)z_y'+z_{yx}''F_z'(x,y,z)+z_y'\left(F_{zx}''(x,y,z)+F_{z^2}''(x,y,z)z_x'\right)=0$$

a z této rovnice vypočteme z_{yx}''.

Analogicky bychom to dělali pro derivaci rovnice $F_x'(x,y,z)+z_x'F_z'(x,y,z)=0$ podle y. Nám ale stačí tyto smíšené derivace vypočíst pouze jednou, protože víme podle věty 2.1 a věty 2.2, že jsou-li parciální derivace spojité, potom se smíšené derivace rovnají.

2.2 Řešené příklady na parciální derivace

Příklad 2.1: Vypočtěte první derivaci funkce $f: f(x,y) = x^2y^4 + 2x^4 + 3xy^2 - 2$ v bodě $[1; 0]$

a) podle definice parciálních derivací,
b) podle vět o parciálních derivacích.

Řešení:

a) Podle definice parciálních derivací platí:

$$f_x^{'}(1,0) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2\cdot 0 + 2x^4 + 3x\cdot 0 - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^4-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(x^4-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} 2\cdot(x+1)(x^2+1) = 8$$

$$f_y^{'}(1,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1\cdot y^4 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot y^2 - 2}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4+3y^2}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2(y^2+3)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\big(y(y^2+3)\big) = 0.$$

Parciální derivace jsou:

$$f_x^{'}(1,0) = 8;$$

$$f_y^{'}(1,0) = 0.$$

b) Nyní si ukážeme ekvivalentní způsob, jak lze určit parciální derivace v bodě. Vypočteme parciální derivace v obecném bodě a teprve poté dosadíme za proměnné souřadnice daného bodu. Uděláme první derivaci funkce *f* podle *x*, kdy *y* budeme brát jako konstantu a poté derivaci funkce *f* podle *y*, kdy *x* budeme brát jako konstantu. V tomto konkrétním případě pro výpočet budeme používat větu 2.5 (přesněji pravidlo $(x^n)^{'} = nx^{n-1}$):

$$f_x'(x,y) = 2x \cdot y^4 + 2 \cdot 4x^3 + 3y^2 = 2xy^4 + 8x^3 + 3y^2$$
$$f_y'(x,y) = x^2 \cdot 4y^3 + 3x \cdot 2y = 4x^2y^3 + 6xy.$$

Máme vypočítané derivace funkce v obecném bodě $[x, y]$. Abychom získali výsledek, stačí dosadit za proměnné *x* a *y*:

$$f_x'(1{,}0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 8$$
$$f_y'(1{,}0) = 4 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 2.2: Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$f\colon f(x,y) = 3x^3 + 5x - 2y^4 + 4x^2y^3.$$

Řešení:

Máme danou funkci $f\colon f(x,y) = 3x^3 + 5x - 2y^4 + 4x^2y^3$, nyní uděláme první derivaci funkce *f* podle *x* (*y* budeme brát jako konstantu) a potom derivaci funkce *f* podle *y* (kde *x* budeme brát jako konstantu). Jako v příkladu 2.1 budeme používat pravidlo $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$f_x'(x,y) = 9x^2 + 5 - 0 + 8xy^3 = 9x^2 + 5 + 8xy^3$$
$$f_y'(x,y) = 0 + 0 - 8y^3 + 12x^2y^2 = +12x^2y^2 - 8y^3.$$

Příklad 2.3: Vypočítejte první parciální derivace funkce

$$h\colon h(x,y) = (x^2y + y)^4.$$

Řešení:

Už ze zápisu funkce je patrné, že se jedná o funkci složenou: $h = g \circ f$, přičemž pro vnější funkci *f* platí: $f\colon f(x) = x^4$ a pro vnitřní funkci $g\colon g(x) = x^2y + y$. Funkci *h* budeme derivovat podle věty 2.4, tzn. nejprve derivujeme funkci vnější a poté ji vynásobíme derivovanou funkcí vnitřní. Tedy parciální derivace budou mít tvar:

$$f_x'(x,y) = 4(x^2y + y)^3 \cdot 2xy = 8xy \cdot (x^2y + y)^3$$

$$f_y'(x,y) = 4(x^2y + y)^3 \cdot (x^2 + 1).$$

Příklad 2.4: Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce

$$h: h(x,y) = \ln(x + y^2) \text{ ([3]).}$$

Řešení:

Opět se jedná o složenou funkci $h = g°f$. Podle věty 2.4 víme, že $\left(f\left(g(A)\right)\right)' = = f'\left(g(A)\right) \cdot g'(A)$. V našem příkladě je funkce $f = ln$ a funkce g je dána funkčním předpisem $g(x,y) = x + y^2$. Při výpočtech budeme aplikovat jak tuto větu, tak věty o parciálních derivacích.

První parciální derivace:

$$h_x'(x,y) = \frac{1}{x + y^2} \cdot 1 = \frac{1}{x + y^2}$$

$$h_y'(x,y) = \frac{1}{x + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x + y^2}.$$

$$D_h = \{[x,y] \in R \times R; x + y^2 > 0\} = D_{h_x'} = D_{h_y'}$$

Příklad 2.5: Vypočtěte první parciální derivace funkce $h: h(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ v bodě $[1; 2]$.

Řešení:

Nejprve vypočteme parciální derivace v obecném bodě, kdy derivujeme funkci *f* podle *x*, *y* bereme jako konstantu a poté obráceně. Do získaných derivací dosadíme daný bod a určíme hodnotu parciálních derivací v bodě. Protože ale máme funkci složenou, musíme použít větu 2.4, kdy nejprve derivujeme funkci vnější a poté ji vynásobíme derivovanou funkcí vnitřní. V našem případě $h = g \circ f$ je vnější funkce $f = ln$ a vnitřní funkce g je dána funkčním předpisem $g(x,y) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$. Vnitřní funkce g

je součtem dvou funkcí, přičemž jedna ze součtových funkcí je opět funkcí složenou ($g = g_1 + g_2$, kde $g_1 \colon g_1(x, y) = x$, $g_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ - složená funkce).

První parciální derivace:

$$f_x'(x,y) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) = \frac{1 + \frac{2x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{x^2 + y^2} + 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}.$$

Podmínka: $D_h = \left\{[x, y] \in R \times R; x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0\right\} = D_{h_x'} = D_{h_y'}$.

Nyní dosadíme bod $[1; 2]$ a získáme výsledek:

$$f_x'(1,2) = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}};\ f_y'(1,2) = \frac{2}{\sqrt{1+4} + 1 + 4} = \frac{2}{\sqrt{5} + 5}.$$

Příklad 2.6: Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce

$$f \colon f(x,y) = x^3 + 3x^2y - y^2x + 2y^3.$$

Řešení:

Abychom získali druhé parciální derivace, musíme nejprve vypočítat první derivace funkce a ty posléze opětovně derivovat:

$$f_x'(x,y) = 3x^2 + 6xy - y^2$$

$$f_y'(x,y) = 3x^2 - 2yx + 6y^2.$$

Teď přistoupíme k druhým parciálním derivacím. Budeme brát každou z prvních derivací jako funkci a ty postupně derivujeme opět podle x a podle y. Výsledkem budou druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = (3x^2 + 6xy - y^2)'_x = 6x + 6y$$

$$f''_{y^2}(x,y) = (3x^2 - 2yx + 6y^2)'_y = -2x + 12y$$

$$f''_{xy}(x,y) = (3x^2 + 6xy - y^2)'_y = 6x - 2y$$

$$f''_{yx}(x,y) = (3x^2 - 2yx + 6y^2)'_x = 6x - 2y.$$

Příklad 2.7: Vypočtěte $f''_{x^2}(a), f''_{y^2}(a), f''_{xy}(a)$ funkce

$$f: f(x,y) = 4x^2y + 2\ln x^2 - y^3,$$

je-li $a = [1,2]$, popřípadě $a = [-1,3]$.

Řešení:

Nejprve vypočítáme první parciální derivace dle pravidel o derivování, ale bod ještě nebudeme dosazovat. Dosadíme až do druhých derivací, které vypočítáme z prvních:

$$f'_x(x,y) = 8xy + 2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 8xy + \frac{4}{x}$$

$$f'_y(x,y) = 4x^2 - 3y^2.$$

Podmínka: $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{[x,y] \in R \times R; x \neq 0\}$.

Druhé parciální derivace jsou rovny:

$$f''_{x^2}(x,y) = \left(8xy + \frac{4}{x}\right)'_x = 8y + 4 \cdot (-1) \cdot (x)^{-2} \cdot 1 = 8y - \frac{4}{x^2}$$

$$f''_{y^2}(x,y) = (4x^2 - 3y^2)'_y = 0 - 6y = -6y$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \left(8xy + \frac{4}{x}\right)'_y = (4x^2 - 3y^2)'_x = 8x - 0 = 8x.$$

Podmínka: $D_f = D_{f''_{x^2}} = D_{f''_{y^3}} = D_{f''_{xy}} = \{[x,y] \in R \times R; x \neq 0\}$.

Nyní dosadíme dané body do druhých derivací a získáme hodnoty:

$$f''_{x^2}(1,2) = 8 \cdot 2 - \frac{4}{1} = 12$$

$$f''_{y^2}(1,2) = -6 \cdot 2 = -12$$

$$f''_{xy}(1,2) = f''_{yx}(1,2) = 8$$

$$f''_{x^2}(-1,3) = 8 \cdot 3 - \frac{4}{(-1)^2} = 20$$

$$f''_{y^2}(-1,3) = -6 \cdot 3 = -18$$

$$f''_{xy}(-1,3) = f''_{yx}(-1,3) = -8.$$

Příklad 2.8: Zjistěte první a druhé parciální derivace funkce $f: f(x,y) = \sin x \ \cdot \cos y$.

Řešení:

V této funkci máme součin dvou periodických funkcí. Ve větě 2.5 nalezneme pravidla, podle kterých budeme derivovat ($(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$). Opět bereme nejdřív *x* jako proměnnou a *y* jako konstantu a poté naopak.

První parciální derivace:

$$f'_x(x,y) = \cos x \ \cdot \cos y$$

$$f'_y(x,y) = \sin x \ \cdot (-\sin y).$$

Po vypočítání prvních parciálních derivací se zaměříme na druhé parciální derivace.

Druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = (\cos x \cdot \cos y)'_x = -\sin x \cdot \cos y$$

$$f''_{y^2}(x,y) = (\sin x \cdot (-\sin y))'_y = -\sin x \cdot \cos y$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (\cos x \cdot \cos y)'_y = (\sin x \cdot (-\sin y))'_x = -\cos x \cdot \sin y.$$

Příklad 2.9: Vypočítejte parciální derivace 2.řádu funkce

$h: h(x,y) = \ln(x + y^2)$ ([3]).

Řešení:

První parciální derivace této funkce jsme již vypočítali v příkladu 2.4 a mají tvar:

$$h'_x(x,y) = \frac{1}{x + y^2}$$

$$h'_y(x,y) = \frac{2y}{x + y^2}.$$

Druhé parciální derivace získáme použitím pravidla o derivaci podílu funkcí ve větě 2.3:

$$h''_{x^2}(x,y) = \left(\frac{1}{x + y^2}\right)'_x = \frac{0 \cdot (x + y^2) - 1 \cdot 1}{(x + y^2)^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2}$$

$$h''_{y^2}(x,y) = \left(\frac{2y}{x + y^2}\right)'_y = \frac{2 \cdot (x + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x + y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x + 2y^2 - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}$$

$$h''_{xy}(x,y) = h''_{yx}(x,y) = \left(\frac{1}{x + y^2}\right)'_y = \frac{0 \cdot (x + y^2) - 1 \cdot 2y}{(x + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

Podmínka: $D_h = \{[x,y] \in R \times R; x + y^2 > 0\} = D_{h''_{x^2}} = D_{h''_{y^2}} = D_{h''_{xy}}$.

Příklad 2.10: Vypočtěte druhé parciální derivace funkce $f: f(x,y) = e^{2y} \cdot \sin x$ v bodě [0,0].

Řešení:

Abychom získali druhé parciální derivace v určitém bodě, musíme nejprve vypočítat první derivace funkce a ty posléze opětovně derivovat. Do druhých derivací pak stačí pouze dosadit daný bod a určit hodnotu derivací. V našem případě budeme dosazovat bod [0,0].

První derivace funkce *f* získáme tak, že opět budeme derivovat nejprve podle *x* a proměnnou *y* budeme brát jako konstantu a poté obráceně:

$$f'_x(x,y) = e^{2y} \cdot \cos x$$

$$f'_y(x,y) = e^{2y} \cdot 2 \cdot \sin x.$$

Když máme vypočteny první derivace, přistoupíme k druhým parciálním derivacím:

$$f''_{x^2}(x,y) = -e^{2y} \cdot \sin x$$

$$f''_{y^2}(x,y) = 4e^{2y} \cdot \sin x$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2e^{2y} \cdot \cos x.$$

Určili jsme druhé parciální derivace, dosadíme bod [0,0] za proměnné a vypočítáme hodnoty:

$$f''_{x^2}(0,0) = -e^{2\cdot 0} \cdot \sin 0 = -1 \cdot 0 = 0$$

$$f''_{y^2}(0,0) = 4 \cdot e^{2\cdot 0} \cdot \sin 0 = 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 2 \cdot e^{2\cdot 0} \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Příklad 2.11: Vypočítejte druhé parciální derivace funkce $h{:}\, h(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y+z^2}}$ ([3]).

Řešení:

Tento příklad je obdobný, jako příklad 2.4. Máme složenou funkci, kterou přepíšeme do tvaru $h(x,y,z) = (2x^2+y+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Podle pravidla o derivování složené funkce, kdy nejprve derivujeme vnější funkci a poté vnitřní, jednoduše derivujeme.

První parciální derivace:

$$h'_x(x,y,z) = -\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x = -\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}$$

$$h'_y(x,y,z) = -\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1 = -\frac{1}{2\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}$$

$$h'_z(x,y,z) = -\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -\frac{z}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}.$$

Podmínka: $D_h = D_{h'_x} = D_{h'_y} = \{[x,y] \in R \times R; 2x^2+y+z^2 > 0\}$

Abychom získali druhé parciální derivace, musíme derivovat podíl dvou funkcí, které jsme získali první derivací. Navíc je jedna z těchto funkcí funkce složená, tedy máme tvar $h' = \frac{f}{g}$, kde funkce h' značí naší první parciální derivaci podle libovolné proměnné, g je funkce složená a f je funkce lineární. Druhé parciální derivace budou vypadat:

$$h''_{x^2}(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_x =$$

$$= -\frac{2(2x^2+y+z^2)^{\frac{3}{2}} - 2x \cdot \frac{3}{2}(2x^2+y+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 4x}{(2x^2+y+z^2)^3} =$$

$$= -\frac{2(2x^2+y+z^2)^{\frac{3}{2}} - 12x^2 \cdot (2x^2+y+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2+y+z^2)^3}$$

$$h''_{y^2}(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(2x^2+y+z^2)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{(2x^2+y+z^2)^5}}$$

$$h''_{z^2}(x,y,z) = \left(-\frac{z}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_z = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - z\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z}{(2x^2+y+z^2)^3} =$$

$$= -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2+y+z^2)^3}.$$

Smíšené parciální derivace vypočítáme jednodušeji, neboť nemáme podíl dvou funkcí.

$$h''_{xy}(x,y,z) = h''_{yx}(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_y = \left(-\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = -\frac{1}{2}\cdot$$
$$\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(2x^2+y+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 4x = \frac{12x}{(2x^2+y+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$h''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_y = \left(-\frac{z}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_x =$$

$$= -z\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(2x^2+y+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 4x = \frac{12xz}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^5}}$$

$$h''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}(2x^2+y+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_z = \left(-\frac{z}{\sqrt{(2x^2+y+z^2)^3}}\right)'_y =$$

$$= -z\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(2x^2+y+z^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3z}{2\sqrt{(2x^2+y+z^2)^5}}.$$

Podmínka pro existenci druhých parciálních derivací:

$$D_h = D_{h''_{x^2}} = D_{h''_{y^2}} = D_{h''_{xy}} = \{[x,y] \in R\times R; 2x^2+y+z^2 > 0\}.$$

Příklad 2.12: Vypočítejte první derivaci funkce $x^2 + 2xy - y^2 - a^2 = 0$, kde $a \in R$ ([3]).

Řešení:

Tuto funkci máme zadanou v implicitním tvaru. Máme dvě možnosti, jak určit parciální derivaci této funkce:

a) podle věty o existenci implicitní funkce, kde je uveden výpočet derivace (věta 2.6)
b) nebo podle poznámky 2.11.

a) Nejprve příklad vypočítáme podle věty 2.6:

Nejprve musíme zjistit obě parciální derivace funkce *F* (dle věty 2.6), kdy parciální derivace podle proměnné *y* musí být různá od nuly, tedy:

$$F_x'(x,y) = 2x + 2y$$

$$F_y'(x,y) \neq 0\text{: } F_y'(x,y) = 2x - 2y \neq 0, \text{pro } \forall x \neq y.$$

Nyní dosadíme derivace do vzorce $y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$, čímž získáme derivaci implicitně zadané funkce:

$$y_x' = -\frac{2x + 2y}{2x - 2y} = -\frac{x + y}{x - y}.$$

b) Nyní budeme derivovat funkci *F* jako funkci jedné proměnné:

Určíme první parciální derivace funkce $x^2 + 2xy - y^2 - a^2 = 0$, kdy y bereme jako funkci jedné proměnné *x*. Pokaždé, když budeme *y* derivovat, vynásobíme derivovanou část značením y_x':

$$2x + (2y + 2xy_x') - 2yy_x' - 0 = 0 \rightarrow 2x + 2y + 2xy_x' - 2yy_x' = 0.$$

Ze získané rovnice vyjádříme y_x', tím získáme první derivaci funkce zadané implicitně:

$$2xy_x' - 2yy_x' = -2x - 2y \rightarrow y_x'(2x - 2y) = -2x - 2y \rightarrow y_x' = -\frac{x+y}{x-y}.$$

Příklad 2.13: Máme funkci $2x + 3y - e^{x-y} = 0$. Vypočtěte první a druhou derivaci této funkce.

Řešení:

Abychom získali první derivaci, budeme postupovat jako v příkladě 2.12 v případě b). Přistoupíme k derivaci rovnice $2x + 3y - e^{x-y} = 0$, kdy y bereme jako funkci jedné proměnné x:

$$2 + 3y_x' - e^{x-y}\left(1 - y_x'\right) = 0.$$

Ze získané rovnice vyjádříme y_x':

$$3y_x' - 1 \cdot e^{x-y} + e^{x-y}y_x' = -2 \rightarrow 3y_x' + e^{x-y}y_x' = -2 + e^{x-y} \rightarrow$$

$$\rightarrow y_x' = \frac{e^{x-y} - 2}{e^{x-y} + 3}.$$

Nyní abychom určili druhé derivace implicitní funkce, vezmeme derivovanou rovnici $2 + 3y_x' - e^{x-y}\left(1 - y_x'\right) = 0$. Tuto rovnici ještě jednou zderivujeme. Opět bereme y jako funkci jedné proměnné x. Máme tu ale navíc značení y_x', které značí derivovanou funkci jedné proměnné x. S tím budeme počítat tak, že jakmile dojde na jeho derivaci, nahradíme ho označením pro druhou derivaci y_{x^2}'' a již nebudeme nic násobit:

$$0 + 3y_{x^2}'' - \left(e^{x-y}\left(1 - y_x'\right)\left(1 - y_x'\right) + e^{x-y}\left(-y_{x^2}''\right)\right) = 0.$$

Výsledek upravíme a vyjádříme y''_{x^2}, tím získáme druhou derivaci:

$$3y''_{x^2} - e^{x-y}\left(1 - y'_x\right)^2 - e^{x-y}\left(-y''_{x^2}\right) = 0 \rightarrow 3y''_{x^2} - e^{x-y}\left(-y''_{x^2}\right) = e^{x-y}\left(1 - y'_x\right)^2$$

$$\rightarrow y''_{x^2} = \frac{e^{x-y}\left(1 - y'_x\right)^2}{e^{x-y} + 3}.$$

Příklad 2.14: Vypočítejte první parciální derivaci funkce $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, kde $a, b, c \neq 0$.

Řešení:

Máme funkci dvou proměnných zadanou v implicitním tvaru. Postup řešení je ekvivalentní jako u příkladu 2.11, kdy máme opět dvě možnosti, jak řešit:

a) pomocí věty 2.7
b) nebo podle poznámky 2.12.

a) Nejprve budeme příklad počítat podle věty 2.7:

Abychom mohli derivovat, musí být splněna podmínka: $F'_z(x, y, z) \neq 0$, tedy $F'_z(x, y, z) = -\frac{2}{c^2} \cdot z \neq 0$. Podmínka je splněna, když $z \neq 0$. Přistoupíme k derivacím. Podle věty víme, že:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \; z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

$F'_z(x, y, z)$ jsme již vypočetli při ověřování podmínky, tudíž nám stačí určit $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ a dosadit:

$$F'_x(x, y, z) = \frac{2x}{a^2}$$

$$F'_y(x, y, z) = \frac{2y}{b^2}.$$

První parciální derivace mají tvar:

$$z_x' = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{-\frac{2z}{c^2}} = \frac{xc^2}{za^2}$$

$$z_y' = -\frac{\frac{2y}{b^2}}{-\frac{2z}{c^2}} = \frac{yc^2}{za^2}.$$

b) Nyní určíme derivace podle poznámky 2.12, kdy *z* budeme brát jako funkci dvou proměnných *x* ,*y*. Když budeme derivovat rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ podle *x*, a derivujeme z, vynásobíme derivovanou část znakem z_x'. Analogicky budeme postupovat při derivování podle *y*, kdy budeme násobit derivovanou část z_y'.
Určíme první parciální derivace a vyjádříme z_x' a z_y'.
Rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ derivujeme podle *x* a vyjádřímez_x':

$$\frac{2x}{a^2} + 0 - \frac{2zz_x'}{c^2} = 0 \to \frac{2zz_x'}{c^2} = \frac{2x}{a^2} \to z_x' = \frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}} \to z_x' = \frac{xc^2}{za^2}.$$

Rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ derivujeme podle *y* a vyjádřímez_y':

$$0 + \frac{2y}{b^2} - \frac{2zz_y'}{c^2} = 0 \to \frac{2zz_y'}{c^2} = \frac{2y}{b^2} \to z_y' = \frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}} \to z_y' = \frac{yc^2}{za^2}.$$

Příklad 2.15: Vypočítejte první parciální derivace funkce $\ln(x^2) + xyz - 3xyz^2 = 0$.

Řešení:

Opět máme funkci dvou proměnných zadanou implicitně. Postupovat budeme stejně jako v příkladě 2.14.

a) Ověříme, zda platí podmínka $F_z'(x,y,z) \neq 0$, tedy $F_z'(x,y,z) = xy - 6xyz \neq 0$. Nyní určíme parciální derivace podle x a podle y a dosadíme do vzorce ve větě 2.7:

$$F_x'(x,y,z) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x + yz - 3yz^2$$

$$F_y'(x,y) = xz - 3xz^2.$$

První derivace budou mít tvar:

$$z_x' = -\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x+yz-3yz^2}{xy-6xyz} = \frac{3yz^2-yz-\frac{2}{x}}{xy-6xyz}$$

$$z_y' = -\frac{xz-3xz^2}{xy-6xyz} = \frac{3xz^2-xz}{xy-6xyz}.$$

b) Budeme derivovat podle poznámky 2.12, kdy z budeme brát jako funkci dvou proměnných *x*, *y*.

Rovnici $\ln(x^2) + xyz - 3xyz^2 = 0$ derivujeme podle x:

$$\frac{1}{x^2}\cdot 2x + yz + xyz_x' - 3yz^2 - 6xyzz_x' = 0.$$

Z rovnice vyjádříme z_x':

$$xyz_x' - 6xyzz_x' = -\frac{1}{x^2}\cdot 2x - yz + 3yz^2 \to z_x'(xy - 6xyz) = -yz + 3yz^2 - \frac{2}{x} \to$$

$$\to z_x' = \frac{-yz + 3yz^2 - \frac{2}{x}}{xy - 6xyz}.$$

Rovnici $\ln(x^2) + xyz - 3xyz^2 = 0$ derivujeme podle y:

$$xz + xyz_y' - 3xz^2 - 6xyzz_y' = 0 \to xyz_y' - 6xyzz_y' = -xz + 3xz^2 \to$$

$$z_y'(xy6xyz) = 3xz^2 - xz \to z_y' = \frac{3xz^2 - xz}{xy - 6xyz}.$$

Příklad 2.16: Vypočítejte první parciální derivaci funkce $xe^{2y} - y\,ln\,x - 8 = 0$ v bodě $A = [1, ?]$ ([7]).

Řešení:

Musíme zjistit druhou souřadnici bodu A.. Proto dosadíme do rovnice $xe^{2y} - y\,ln\,x - 8 = 0$ $x = 1$ a druhou souřadnici dopočítáme: $1e^{2y} - y\ln 1 - 8 = 0 \to e^{2y} = 8$. Po zlogaritmování rovnice obdržíme: $y = \ln\sqrt{8}$. Tedy bod A má souřadnice

$[1, \ln\sqrt{8}]$. Nyní zjistíme, zda bod vyhovuje druhé podmínce ve větě o implicitní funkci: $F_y^{'}(x,y) \neq 0$, tj. $F_y^{'}(x,y) = 2xye^{2y} - \ln x \neq 0$ pro bod $[1, \ln\sqrt{8}]$: $2\ln\sqrt{8}\, e^{2\ln\sqrt{8}} \neq 0$.

Dopočítáme derivaci funkce *F* podle proměnné *x*, do které následně dosadíme za proměnné bod $[1, \ln\sqrt{8}]$:

$$F_x^{'}(x,y) = 1 \cdot e^{2y} - y \cdot \frac{1}{x} \rightarrow F_x^{'}\left(1, \ln\sqrt{8}\right) = e^{2\cdot\ln\sqrt{8}} - \frac{\ln\sqrt{8}}{1}.$$

Výsledek derivace upravíme: $e^{2\cdot\ln\sqrt{8}} - \frac{\ln\sqrt{8}}{1} = e^{\ln\sqrt{8}^2} - \ln\sqrt{8} = 8 - \ln\sqrt{8}$.

Podle věty 2.17 víme, že $y_x^{'} = -\frac{F_x^{'}(x,y)}{F_y^{'}(x,y)}$. Jestliže chceme vypočítat derivaci v bodě, stačí nyní dosadit za $F_x^{'}(x,y), F_y^{'}(x,y)$ získané hodnoty a upravit:

$$y_x^{'} = -\frac{8 - \ln\sqrt{8}}{2\ln\sqrt{8}\, e^{2\ln\sqrt{8}}} \rightarrow y_x^{'} = -\frac{8 - \ln\sqrt{8}}{2\ln\sqrt{8}\cdot 8} \rightarrow y_x^{'} = -\frac{8 - \ln\sqrt{8}}{16\ln\sqrt{8}} \rightarrow y_x^{'} = \frac{\ln\sqrt{8} - 8}{16\ln\sqrt{8}} \rightarrow$$

$$\rightarrow y_x^{'} = \frac{\ln\sqrt{8}}{16\ln\sqrt{8}} - \frac{8}{16\ln\sqrt{8}} \rightarrow y_x^{'} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2\ln\sqrt{8}}.$$

Příklad 2.17: Vypočítejte první a druhé parciální derivace funkce

$$y\sin x + x^2 + y^3 - 1 = 0\,.$$

Řešení:

Máme funkci zadanou implicitně. Abychom určili první derivaci, zvolíme postup který je uveden v poznámce 2.11, protože tímto postupem lépe určíme druhou derivaci funkce.

První derivaci získáme ze zderivované rovnice $y\sin x + x^2 + y^3 - 1 = 0$:

$$y\cos x + y_x^{'}\sin x + 2x + 3y^2 y_x^{'} = 0.$$

Vyjádříme $y_x^{'}$: $y_x^{'}\sin x + 3y^2 y_x^{'} = -y\cos x - 2x \rightarrow y_x^{'} = \frac{-y\cos x - 2x}{\sin x + 3y^2}$.

Při výpočtu druhé derivace budeme vycházet z rovnice: $y\cos x + y_x' \sin x + 2x + 3y^2 y_x' = 0$. Tuto rovnici budeme derivovat podle proměnné *x*, přičemž na *y* se budeme dívat jako na funkci této proměnné:

$$\left(-y\sin x + \cos x \cdot y_x'\right) + \left(y_{x^2}'' \cdot \sin x + y_x' \cdot \cos x\right) + 2 + \left(6y \cdot y_x' + 3y^2 y_{x^2}''\right) = 0.$$

Z rovnice vyjádříme y_{x^2}'':

$$y_{x^2}'' \cdot \sin x + 3y^2 y_{x^2}'' = y\sin x - \cos x \cdot y_x' - y_x' \cdot \cos x - 2 - 6y \cdot y_x'$$

$$y_{x^2}'' = \frac{y\sin x - \cos x \cdot y_x' - y_x' \cdot \cos x - 2 - 6y \cdot y_x'}{\sin x + 3y^2}$$

$$y_{x^2}'' = \frac{y\sin x - 2\cos x \cdot y_x' - 2 - 6y \cdot y_x'}{\sin x + 3y^2}.$$

Příklad 2.18: Určete první a druhé parciální derivace funkce

$$x^2 y + z\ln x^2 - y^3 z^2 + 5 = 0.$$

Řešení:

Máme funkci zadanou implicitně. Abychom určili první parciální derivace, zvolíme postup který je uveden v poznámce 2.12, protože tímto postupem lépe určíme druhé parciální derivace funkce.

První parciální derivace získáme derivováním rovnice $x^2 y + z\ln x^2 - y^3 z^2 + 5 = 0$,

ze které vyjádříme z_x' $\left(\text{respektive } z_y'\right)$:

Parciální derivace podle *x*:

$$2xy + z_x' \ln x^2 + z \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - 2zy^3 z_x' = 0 \rightarrow 2xy + z_x' \ln x^2 + \frac{2z}{x} - 2zy^3 z_x' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z_x' = \frac{-2xy - \frac{2z}{x}}{\ln x^2 - 2zy^3}.$$

Parciální derivace podle *y*:

$$x^2 + z_y' \ln x^2 - 3y^2z^2 - 2y^3zz_y' = 0 \to z_y' = \frac{-x^2 + 3y^2z^2}{\ln x^2 - 2y^3z}.$$

Abychom určili druhé parciální derivace, budeme derivovat rovnici $2xy + z_x' \ln x^2 + \frac{2z}{x} - 2zy^3z_x' = 0$ podle x, rovnici $x^2 + z_y' \ln x^2 - 3y^2z^2 - 2y^3zz_y' = 0$ podle y a potom např. rovnici $x^2 + z_y' \ln x^2 - 3y^2z^2 - 2y^3zz_y' = 0$ podle x. Opět bereme *z* jako funkci dvou proměnných *x*, *y*. Máme tu ale navíc značení z_x' a z_y', které značí derivovanou funkci dvou proměnných *x*, *y*. S tím budeme počítat tak, že jakmile dojde na jejich derivování, nahradíme je označením pro druhou derivaci z_{x^2}'' (pro derivování z_x' podle *x*) nebo z_{y^2}'' (pro derivování z_y' podle *y*). U smíšené derivace, kdy funkci, kterou jsme získali derivováním podle *x* a budeme ji derivovat podle *y*, označíme druhou derivaci z_{xy}''. Analogicky při derivování funkce podle *x*, kterou jsme získali první derivací podle *y*, označíme druhou derivaci z_{yx}''. Tyto derivace se budou rovnat (věta 2.1), proto stačí určit pouze jednu smíšenou derivaci.

Druhé derivace budou mít tvar (opět vyjádříme z_{x^2}'', z_{y^2}'' a z_{xy}''.).

Derivace rovnice $2xy + z_x' \ln x^2 + \frac{2z}{x} - 2zy^3z_x' = 0$ podle *x*:

$$2y + \left(z_{x^2}'' \ln x^2 + z_x' \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\right) + \left(2z_x' \cdot \frac{1}{x} - \frac{2z}{x^2}\right) - \left(2\left(z_x'\right)^2 y^3 + 2y^3zz_{x^2}''\right) = 0 \to$$

$$\to z_{x^2}''(\ln x^2 - 2y^3z) = -2y - \frac{4z_x'}{x} - \frac{2z}{x^2} + 2\left(z_x'\right)^2 y^3 \to$$

$$\to z_{x^2}'' = \frac{= -2y - \frac{4z_x'}{x} - \frac{2z}{x^2} + 2\left(z_x'\right)^2 y^3}{\ln x^2 - 2y^3z}.$$

Derivace rovnice $x^2 + z_y' \ln x^2 - 3y^2z^2 - 2y^3zz_y' = 0$ podle *y*:

$$0 + z_{y^2}'' \ln x^2 - \left(6yz^2 + 6y^2zz_y'\right) - \left(6y^2zz_y' + 2y^3\left(z_y'\right)^2 + 2y^3zz_{y^2}''\right) = 0 \to$$

$$\to z_{y^2}''(\ln x^2 - 2y^3z) = 6yz^2 + 12y^2zz_y' + 2y^3\left(z_y'\right)^2 \to$$

$$\rightarrow z''_{y^2} = \frac{6yz^2 + 12y^2 z z'_y + 2y^3 \left(z'_y\right)^2}{\ln x^2 - 2y^3 z}.$$

Smíšená derivace:

$$2x + z''_{xy} \cdot \ln x^2 + \frac{2z'_y}{x} - 2\left(y^3 z'_y z'_x + 3y^2 z z'_x + y^3 z z''_{xy}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z''_{xy}(\ln x^2 - y^3 z) = -2x - \frac{2z'_y}{x} + 2y^3 z'_y z'_x + 6y^2 z z'_x \rightarrow$$

$$\rightarrow z''_{xy} = \frac{-2x - \frac{2z'_y}{x} + 2y^3 z'_y z'_x + 6y^2 z z'_x}{\ln x^2 - y^3 z}.$$

2.3 Neřešené příklady

1) Vypočítejte první parciální derivace funkcí [4]:
   a) $f: f(x,y) = e^x \cos(xy)$,
   b) $f: f(x,y) = \ln \sqrt{(2x^2 + y^2)}$,
   c) $f: f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$,
   d) $f: f(x,y) = \frac{x}{x-y}$,
   e) $f: f(x,y,z) = x^3 y z^2$,
   f) $f: f(x,y,z) = x^3 + y^2 - z^2 - 2x + 3y + z$,
   g) $f: f(x,y,z) = z \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.
2) Vypočítejte druhé parciální derivace funkcí:
   a) $f: f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ [4],
   b) $f: f(x,y) = (x^2 y + x y^2)^5$ [4],
   c) $f: f(x,y) = e^x \cos(xy) + e^y \sin(xy)$ [4],
   d) $f: f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}$ [3],
   e) $f: f(x,y) = \ln(x + y^3)$ [3],

3) Určete y'_x, y''_{x^2} funkce $x + y^3 + xy^2 + 2 = 0$ [2].

4) Vypočítejte z'_x, z'_y u funkcí:

a) $x^2 + y^2 - zx + zy^4 - 1 = 0$ [2],

b) $2x^2 - 3y^2 + z^2 + x - 2y + 7 = 0$ [4],

c) $x^2 + y \cdot \sin z + x^3 z^2 - 6 = 0$ [4],

d) $z = xy \cdot \sin(xz)$ [4],

e) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ [2],

f) $x + y + z = e^z$ [2].

3. Extrémy funkce dvou a tří proměnných

V této kapitole, týkající se lokálních extrémů funkce, jsem použil převážně teorii z literatury [4], [11], [12], [15]. Tuto literaturu jsem použil jak u první podkapitoly, tak i u druhé.

3.1 Extrémy funkce zadané explicitně a implicitně

Teorie pro funkce dvou proměnných

Definice 3.1: Řekneme, že funkce dvou proměnných f má v bodě $C \in R \times R$ lokální minimum (resp. lokální maximum), jestliže existuje okolí U_ϵ ($U_\epsilon \subset D_f$) bodu C ($C = [c_1, c_2]$), tak že $f(C) \leq f(X)$ (resp. $f(C) \geq f(X)$), pro všechna $X = [x_1, x_2] \in U_\in$.

Řekneme, že funkce dvou proměnných f má v bodě $C \in R \times R$ ostré lokální minimum (resp. ostré lokální maximum), jestliže $f(C) < f(X)$ (resp. $f(C) > f(X)$), pro všechna $X \in U_\epsilon \setminus \{C\}$.

Věta 3.1: Má-li funkce dvou proměnných f ve vnitřním bodě $C \in R \times R$ svého definičního oboru extrém a existují-li v tomto bodě obě spojité parciální derivace funkce f, které jsou v tomto bodě spojité, pak v tomto bodě platí: $f_x^{'}(C) = f_y^{'}(C) = 0$.

Definice 3.2: Bod $C \in R \times R$, pro který platí $f_x^{'}(C) = f_y^{'}(C) = 0$ se nazývá stacionární bod.

Definice 3.3: Nechť f je reálná funkce dvou proměnných. Nechť v libovolném bodě D_f existují všechny parciální derivace druhého řádu. Hessovou maticí funkce dvou proměnných f chápeme matici druhého řádu:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix}.$$

Definice 3.4: Nechť bod $C \in D_f$ a nechť existují druhé parciální derivace funkce dvou proměnných f v bodě C. Potom položme: $D_2(C) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{vmatrix}, D_1(C) = f''_{x^2}$.

Poznámka 3.1: Determinanty D_1, D_2 jsou subdeterminanty Hessovy matice:

$$H(C) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix}.$$

Definice 3.5: Sedlem funkce f rozumíme bod grafu, v němž má funkce f spojité parciální derivace 1. řádu, tyto parciální derivace jsou rovny nule a současně v tomto bodě nenastává lokální extrém. Bod definičního oboru D_f, v němž sedlo funkce f nastává, se nazývá sedlový bod.

Věta 3.2: (Postačující podmínka pro lokální extrém funkcí dvou proměnných)

Buď$C \in D_f$ stacionárním bodem funkce dvou proměnných f. Nechť má funkce f spojité parciální derivace až do druhého řádu. Pak platí:

1) Jestliže $D_1(C) > 0, D_2(C) > 0$, pak funkce f má v C lokální minimum.

2) Jestliže $D_1(C) < 0, D_2(C) > 0$, pak má funkce f v C lokální maximum.

3) Jestliže $D_2(C) < 0$ má funkce f v C sedlový bod.

4) Jestliže $D_2(C) = 0$, pak nelze rozhodnout, zda funkce f má v bodě C lokální extrém, sedlový bod, či ani jedno.

Teorie funkce tří proměnných

Definice 3.6: Řekneme, že funkce tří proměnných f má v bodě$C \in R \times R \times R$ lokální minimum (resp. lokální maximum), jestliže existuje okolí U_ε ($U_\epsilon \subset D_f$) bodu C ($C = [c_1, c_2, c_3]$) tak, že $f(C) \leq f(X)$ (resp. $f(C) \geq f(X)$), pro všechna $X = [x_1, x_2, x_3] \in U_\varepsilon$.

Řekneme, že funkce tří proměnných *f* má v bodě $C \in R \times R \times R$ ostré lokální minimum (resp. ostré lokální maximum), jestliže $f(C) < f(X)$ (resp. $f(C) > f(X)$), pro všechna $X \in U_\varepsilon \backslash \{C\}$.

Věta 3.3: Má-li funkce tří proměnných f ve vnitřním bodě $C \in R \times R \times R$ svého definičního oboru extrém a existují-li v tomto bodě všechny parciální derivace funkce *f*, které jsou v tomto bodě spojité, pak v tomto bodě platí: $f_x'(C) = f_y'(C) = f_z'(C) = 0$.

Definice 3.7: Bod $C \in R \times R \times R$, pro který platí $f_x'(C) = f_y'(C) = f_z'(C) = 0$, se nazývá stacionární bod.

Definice 3.8: Nechť *f* je reálná funkce tří proměnných. Nechť v libovolném bodě D_f existují všechny parciální derivace druhého řádu. Hessovou maticí funkce tří proměnných *f* chápeme matici třetího řádu:

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{x^2}'' & f_{xy}'' & f_{xz}'' \\ f_{yx}'' & f_{y^2}'' & f_{yz}'' \\ f_{zx}'' & f_{zy}'' & f_{z^2}'' \end{pmatrix}.$$

Definice 3.9: Nechť bod $C \in D_f$ a nechť existují druhé parciální derivace funkce tří proměnných f v bodě *C*. Potom položme:

$$D_3(C) = \begin{vmatrix} f_{x^2}'' & f_{xy}'' & f_{xz}'' \\ f_{yx}'' & f_{y^2}'' & f_{yz}'' \\ f_{zx}'' & f_{zy}'' & f_{z^2}'' \end{vmatrix}, D_2(C) = \begin{vmatrix} f_{x^2}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{y^2}'' \end{vmatrix}, D_1(C) = f_{x^2}''.$$

Poznámka 3.2: Determinanty D_1, D_2, D_3 jsou subdeterminanty Hessovy matice:

$$H(C) = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{pmatrix}.$$

Věta 3.4: (Postačující podmínka pro lokální extrém funkcí tří proměnných)

Buď $C \in D_f$ stacionárním bodem funkce tří proměnných f. Nechť má funkce f spojité parciální derivace až do druhého řádu. Pak platí:

1) je-li $D_1(C) > 0, D_2(C) > 0, D_3(C) > 0$, funkce f má v C lokální minimum;

2) je-li $D_1(C) < 0, D_2(C) > 0, D_3(C) < 0$, funkce f má v C lokální maximum;

3) je-li $D_1(C) \in R, D_2(C) < 0, D_3(C) \in R$, funkce f má v C sedlo;

4) je-li $D_1(C) > 0, D_2(C) \in R, D_3(C) < 0$, funkce f má v C sedlo;

5) je.li $D_1(C) < 0, D_2(C) \in R, D_3(C) > 0$, funkce f má v C sedlo.

Poznámka 3.3: Věta 3.2 a věta 3.4 ukazují, jak lze subdeterminantů využít k vyšetření lokálních extrémů.

3.1.1 Řešené příklady

Příklad 3.1: Vypočtěte lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ a určete jejich hodnotu.

Řešení:

Dle věty 3.1 určíme parciální derivace funkce *f*. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a tím obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$f'_x(x,y) = 2x - y - 2 = 0$$

$$f'_y(x,y) = -x + 2y + 1 = 0.$$

Jejím vyřešením získáme stacionární body. Soustavu vyřešíme tak, že z první rovnice vyjádříme $x = 1 + \frac{1}{2}y$ a dosadíme do druhé rovnice. Po dosazení obdržíme rovnici: $-1 - \frac{1}{2}y + 2y + 1 = 0$. Po jednoduché úpravě zjistíme, že $y = 0$. Tuto hodnotu zpětně dosadíme do první rovnice a určíme jediný stacionární bod [1,0]. Poté dopočítáme z prvních derivací druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = 2$$

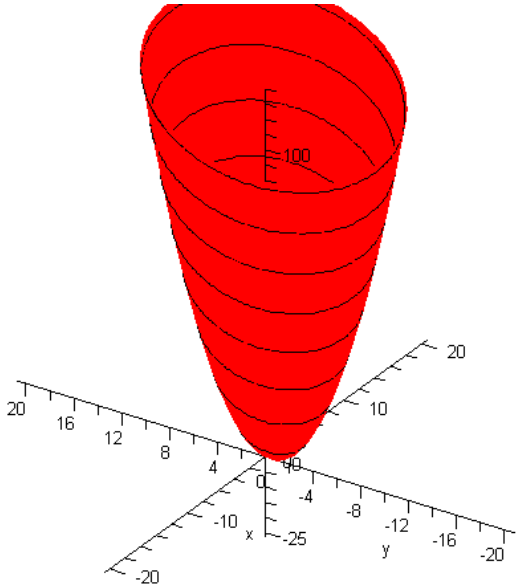
$$f''_{y^2}(x,y) = 2$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -1.$$

Druhé parciální derivace jsou číselné hodnoty, proto nemusíme dosazovat stacionární bod a stačí tyto hodnoty dosadit do Hessovy matice (definice 3.3). Z příslušných subdeterminantů této matice zjistíme, o jaký druh extrému se v daném bodě jedná nebo zda tam extrém vůbec je (věta 3.2):

$D_2(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \wedge D_1(1,0) = 2 > 0 \rightarrow$ podle věty 3.2 můžeme říci, že v bodě [1,0] je lokální minimum.

Hodnotu extrému vypočítáme tak, že dosadíme stacionární bod do funkčního předpisu funkce *f*: $f(1,0) = 1^2 - 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 + 0 = -1$.



Obrázek 3.1: Funkce $f: f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

Příklad 3.2: Máme zadanou funkci $f: f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + x^2y^2 - \frac{y^2}{2}$. Zjistěte lokální extrémy této funkce.

Řešení:

Nejprve vypočítáme první parciální derivace funkce *f*, které položíme rovny nule. Tím získáme dvě rovnice o dvou neznámých a určíme stacionární bod (či body) dle věty 3.1:

$$f_x'(x,y) = -x + 2xy^2 = 0$$

$$f_y'(x,y) = -y + 2yx^2 = 0.$$

Tato soustava je složitější na řešení než v předešlém příkladě. Lze ji vyřešit například tímto způsobem: v první rovnici vytkneme x, takže získáme tvar $x(-1 +$

$2y^2) = 0$. Aby byla splněna rovnost, musí platit $x = 0 \vee y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tyto hodnoty dosadíme do druhé rovnice. Dopočítáním zjistíme souřadnice stacionárních bodů, které jsou:

$$a = [0;0], b = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right], c = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right], d = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right], e = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Následně zjistíme druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = -1 + 2y^2$$

$$f''_{y^2}(x,y) = -1 + 2x^2$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 4xy.$$

Teď již stačí do druhých derivací dosadit stacionární body a vypočíst hodnoty, které dosadíme do Hessovy matice (definice 3.3). Z příslušných subdeterminantů této matice pak podle věty 3.2 odvodíme, o jaký druh extrému se v daném bodě jedná, nebo zda-li tam extrém vůbec je.

Pro bod $a = [0,0]$:

$$f''_{x^2}(0,0) = -1, f''_{y^2}(0,0) = -1, f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0) = 0.$$

$D_2(0,0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 > 0 \wedge D_1(0,0) = -1 < 0 \rightarrow$ podle věty 3.2 se v bodě $a = [0,0]$ jedná o lokální maximum.

Pro bod $b = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a bod $e = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$:

$$f''_{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,\ f''_{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$f''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{yx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{yx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

$D_2(b) = D_2(e) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0 \wedge D_1(b) = D_1(e) = 0 \rightarrow$ body b a e jsou sedlové body funkce *f*.

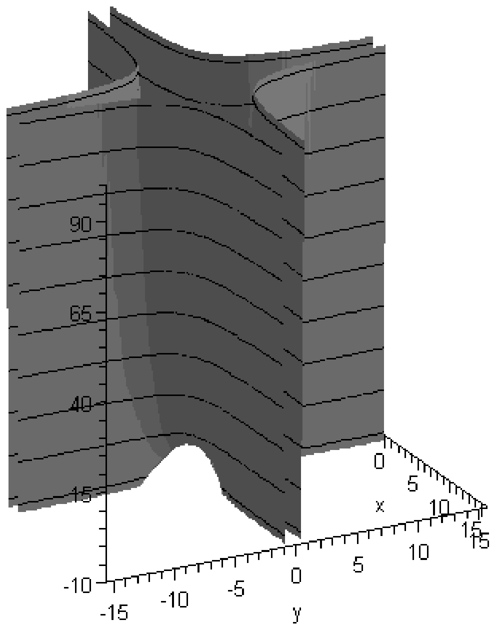
Pro bod $c = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a bod $d = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$:

$$f''_{x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,\ f''_{y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$f''_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{yx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''_{yx}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2.$$

$D_2(c) = D_2(d) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 < 0\ \wedge D_1(c) = D_1(d) = 0 \rightarrow$ body c a d jsou sedlové body funkce *f*.

Zjistili jsme, že bod $a = [0,0]$ je jediným bodem funkce, kde se nachází extrém a nalezneme zde lokální maximum.



Obrázek 3.2: Funkce $f: f(x, y) = -\frac{x^2}{2} + x^2y^2 - \frac{y^2}{2}$.

Příklad 3.3.: Vypočtěte lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = \ln(x-y) - x^2 + y$ ([12]).

Řešení:

Vypočítáme první parciální derivace, které položíme rovny 0. Tím získáme soustavu rovnic dle věty 3.1 a z této soustavy určíme stacionární bod (či body):

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x-y} - 2x = 0$$

$$f'_y(x,y) = (-1) \cdot \frac{1}{x-y} + 1 = 0.$$

Podmínka: $D_f = D_{f'_x} = D_{f'_y} = \{[x,y] \in R \times R; x-y > 0\}$. Z druhé rovnice vyjádříme x: $-1 + x - y = 0 \rightarrow x = 1 + y$ a dosadíme do první rovnice, kterou jsme upravili na $1 - 2x^2 + 2xy = 0$. Tím získáme rovnici: $1 - 2(1+y)^2 + 2y(1+y) = 0$. Tuto rovnici upravíme a zjednodušíme:

$$1 - 2(1 + 2y + y^2) + 2y + 2y^2 = 0 \rightarrow 1 - 2 - 4y - 2y^2 + 2y + 2y^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -1 - 2y = 0.$$

Vyjádříme proměnnou y: $y = -\frac{1}{2}$, kterou zpětně dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme neznámou x: $x = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Tím obdržíme stacionární bod $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y) = (-1)(x-y)^{-2} - 2 = -\frac{1}{(x-y)^2} - 2$$

$$f''_{y^2}(x,y) = (-1)(-1)(x-y)^{-2} \cdot (-1) - 0 = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (-1)(-1)(x-y)^{-2} = \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Do druhých parciálních derivací dosadíme stacionární bod:

$$f''_{x^2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} - 2 = -3$$

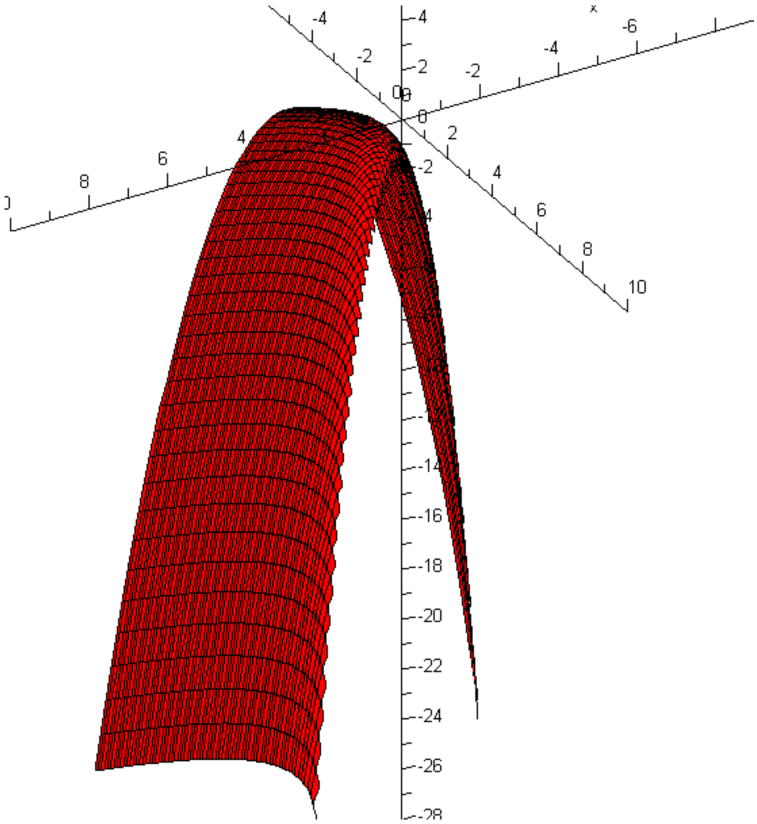
$$f''_{y^2}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = -1$$

$$f''_{xy}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = f''_{yx}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Poté zjistíme Hessovu matici a na základě věty 3.2 zjistíme, zda se jedná o extrém:

$D_2\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0 \wedge D_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -3 < 0 \rightarrow$ jedná se o lokální maximum.

Funkce $f: f(x,y) = \ln(x-y) - x^2 + y$ má v bodě $\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$ lokální maximum.



Obrázek 3.3: Funkce $f: f(x,y) = \ln(x-y) - x^2 + y$.

Příklad 3.4: Máme danou funkci $f: f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, vypočítejte její extrémy.

Řešení:

Máme zadanou funkci dvou proměnných. Abychom zjistili extrémy této funkce, musíme nejprve vypočítat první parciální derivace, které položíme rovny nule. Obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešením soustavy jsou stacionární body:

$$f_x'(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 0$$

$$f_y'(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 0.$$

Je zřejmé, že platí:

$$e^{x^2+y^2} = 0 \vee 2x = 0 \to x = 0; e^{x^2+y^2} = 0 \vee 2y = 0 \to y = 0.$$

Případ $e^{x^2+y^2} = 0$ nikdy nemůže nastat, proto souřadnice stacionárního bodu získáme z druhých podmínek rovnic. Stacionární bod má tedy souřadnice $[0,0]$.

Teď stačí dopočítat druhé parciální derivace, dosadit stacionární bod, abychom vypočítali hodnoty a ty poté mohli dosadit do Hessovy matice:

$$f_{x^2}''(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2 \to f_{x^2}''(0,0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

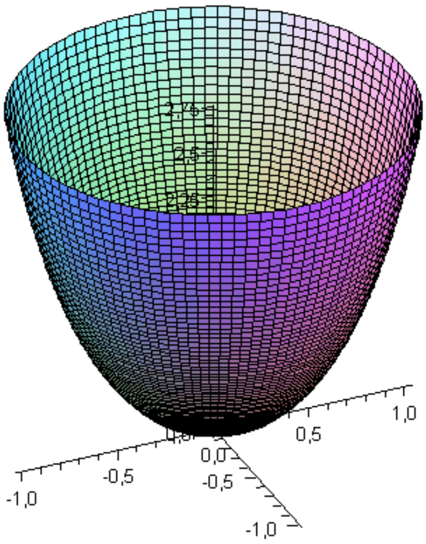
$$f_{y^2}''(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 2 \to f_{y^2}''(0,0) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$f_{xy}''(x,y) = f_{yx}''(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \cdot 2y + e^{x^2+y^2} \cdot 0 \to f_{xy}''(0,0) = f_{yx}''(0,0) = 0.$$

Dosadíme hodnoty do matice a z ní odvodíme hodnoty příslušných subdeterminantů:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0; D_1 = 2 > 0.$$

Podle věty 3.2 se v bodě $[0,0]$ nachází lokální minimum.



Obrázek 3.4: Graf funkce $f: f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

Příklad 3.5: Vypočítejte lokální extrémy funkce dané rovnicí

$$f: f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z \text{ ([3]).}$$

Řešení:

Ze zadání vidíme, že máme danou funkci tří proměnných. Postup je stejný jako u funkcí dvou proměnných, které jsme již počítali výše. Určíme první parciální derivace podle všech proměnných, které položíme rovny nule. Obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterou vyřešíme, tím získáme stacionární bod:

$$f_x'(x,y,z) = 2x + 2 = 0$$

$$f_y'(x,y,z) = 2y + 4 = 0$$

$$f_z'(x,y,z) = 2z - 6 = 0.$$

Ze soustavy je zřejmé, že $x = -1; y = -2; z = 3$, tedy stacionární bod máme jen jeden a ten má souřadnice $[-1, -2, 3]$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace:

$$f''_{x^2}(x,y,z) = f''_{y^2}(x,y,z) = f''_{z^2}(x,y,z) = 2$$

$$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = 0, f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = 0,$$

$$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že druhé parciální derivace jsou čísla, jsou jejich hodnoty ve všech bodech definičního oboru stejné.

Z Hessovy matice (definice 3.8) získáme příslušné subdeterminanty (definice 3.9):

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0; D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0; D_1 = 2 > 0.$$

Na základě věty 3.4 obdržíme, že v bodě $[-1,-2,3]$ je lokální minimum.

Příklad 3.6: Mějme $f\colon f(x,y,z) = -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}$. Zjistěte u této funkce lokální extrémy.

Řešení:

Máme zadanou funkci tří proměnných. Vypočítáme první parciální derivace podle všech proměnných, které položíme rovny nule. Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$f'_x(x,y,z) = -\frac{1}{8}x = 0$$

$$f'_y(x,y,z) = -\frac{2}{9}y = 0$$

$$f'_z(x,y,z) = -\frac{1}{2}z = 0.$$

Je zřejmé, že stacionární bod je jediný a má souřadnice $[0,0,0]$.

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace. Dosadíme do nich stacionární bod a určíme hodnoty. Vzhledem k tomu, že druhé parciální derivace jsou čísla, jsou jejich hodnoty ve všech bodech definičního oboru stejné:

$$f''_{x^2}(x,y,z) = -\frac{1}{8};\ f''_{y^2}(x,y,z) = -\frac{2}{9};\ f''_{z^2}(x,y,z) = -\frac{1}{2}$$

$$f''_{xy}(x,y,z) = f''_{yx}(x,y,z) = 0, f''_{xz}(x,y,z) = f''_{zx}(x,y,z) = 0,$$

$$f''_{yz}(x,y,z) = f''_{zy}(x,y,z) = 0.$$

Z Hessovy matice získáme příslušné subdeterminanty:

$$D_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{72} - 0 = -\frac{1}{72} < 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} \end{vmatrix} = \frac{1}{36} > 0;\ D_1 = -\frac{1}{8} < 0.$$

Podle věty 3.4 jsme určili, že v bodě $[0,0,0]$ se nachází lokální maximum funkce $f(x,y,z) = -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}$.

Příklad 3.7: Máme danou funkci $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z = 0$, vypočítejte její extrémy.

Řešení:

Funkci máme zadanou implicitně. V kapitole 2 jsme si ukázali, jak postupujeme při derivování takto zadaných funkcí. Rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z = 0$, zderivujeme podle *x* a podle *y* a vyjádříme z'_x , z'_y:

$$2x + 2zz'_x - 2 - 6z'_x = 0 \rightarrow 2zz'_x - 6z'_x = 2 - 2x \rightarrow z'_x = \frac{2-2x}{2z-6}$$

$$2y + 2zz'_y + 2 - 6z'_y = 0 \rightarrow 2zz'_y - 6z'_y = -2 - 2y \rightarrow z'_y = \frac{-2y-2}{2z-6}; z \neq 3.$$

Nyní derivace položíme rovny 0, tím získáme dvě rovnice o třech neznámých. Jako třetí rovnici vložíme do soustavy funkci zadanou v implicitním tvaru. Vyřešením soustavy rovnic získáme stacionární body:

$$\frac{2-2x}{2z-6}=0$$

$$\frac{-2y-2}{2z-6}=0$$

$$\underline{x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z=0.}$$

Z prvních dvou rovnic je zřejmé, že $2-2x=0 \to x=1$ a $-2y-2=0 \to y=-1$.

Získané hodnoty dosadíme do třetí rovnice soustavy:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z=0 \to 1+1+z^2-2-2-6z=0 \to$$

$$\to z^2-6z-2=0.$$

Nyní vypočítáme kořeny kvadratické rovnice, které vyjdou $z_1=3+\sqrt{11}$ a

$z_2=3-\sqrt{11}$. Tím jsme určili dva stacionární body $\left[1,-1,3+\sqrt{11}\right]$ a

$\left[1,-1,3-\sqrt{11}\right]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace z''_{x^2}, z''_{y^2} a $z''_{xy}=z''_{yx}$. Za proměnné z'_x, z'_y dosadíme 0, neboť z prvních parciálních derivací víme, že jsou rovny 0, aby byla splněna podmínka o existenci stacionárních bodů (věta 3.1):

$$2+2z'_xz'_x+2zz''_{x^2}-6z''_{x^2}=0 \to 2zz''_{x^2}-6z''_{x^2}=-2 \to z''_{x^2}=\frac{-2}{2z-6}$$

$$2+2z'_yz'_y+2zz''_{y^2}-6z''_{y^2}=0 \to 2zz''_{y^2}-6z''_{y^2}=-2 \to z''_{y^2}=\frac{-2}{2z-6}$$

$$0+2z'_xz'_y+2zz''_{xy}-0-6z''_{xy}=0 \to 2zz''_{xy}-6z''_{xy}=0 \to z''_{xy}=0.$$

Do druhých parciálních derivací dosadíme stacionární body, abychom určili hodnoty. Ty poté dosadíme do Hessovy matice a určíme typ extrému:

Pro bod $[1, -1, 3+\sqrt{11}]$:

$$z''_{x^2}(1,-1,3+\sqrt{11}) = -\frac{1}{\sqrt{11}}, z''_{y^2}(1,-1,3+\sqrt{11}) = -\frac{1}{\sqrt{11}},$$

$$z''_{xy}(1,-1,3+\sqrt{11}) = z''_{yx}(1,-1,3+\sqrt{11}) = 0.$$

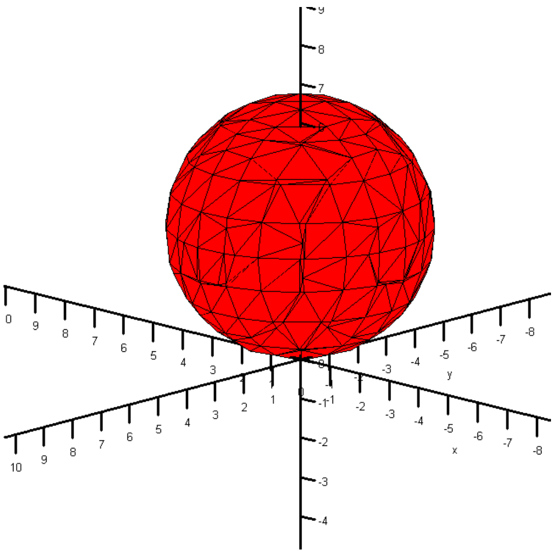
$D_2(1,-1,3+\sqrt{11}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{11}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{11}} \end{vmatrix} = \frac{1}{11} > 0 \wedge D_1(1,-1,3+\sqrt{11}) = -\frac{1}{\sqrt{11}} < 0 \rightarrow$ jedná se o lokální maximum.

Pro bod $[1, -1, 3-\sqrt{11}]$:

$$z''_{x^2}(1,-1,3-\sqrt{11}) = \frac{1}{\sqrt{11}}, z''_{y^2}(1,-1,3-\sqrt{11}) = \frac{1}{\sqrt{11}},$$

$$z''_{xy}(1,-1,3-\sqrt{11}) = z''_{yx}(1,-1,3-\sqrt{11}) = 0.$$

$D_2(1,-1,3-\sqrt{11}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{vmatrix} = \frac{1}{11} > 0 \wedge D_1(1,-1,3-\sqrt{11}) = \frac{1}{\sqrt{11}} > 0 \rightarrow$ v tomto bodě se nachází lokální minimum.



Obrázek 3.5: Graf funkce $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z = 0$.

3.1.2 Neřešené příklady

1) Určete lokální extrémy funkcí:
   a) $f: f(x,y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$ [11],
   b) $f: f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [11],
   c) $f: f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ [11],
   d) $f: f(x,y,z) = x - 4xy - y^2 + 5z^2 - 2yz$ [11],
   e) $f: f(x,y,z) = 25 - x^2 - y^2 - z^2$ [11].

2) Vypočítejte lokální extrémy funkce zadané implicitně:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \quad [2].$$

3.2 Extrémy funkce 2 proměnných vázané na množinu (metoda přímého dosazení a Lagrangeova metoda)

Definice 3.10: Je dána funkce dvou proměnných g. Tato funkce vymezuje v rovině množinu bodů $M = \{[x, y]; g(x, y) = 0\}$. Podmínka $g(x, y) = 0$ se nazývá vazba.

Řekneme, že funkce dvou proměnných f nabývá v bodě $C \in R \times R$ lokální extrém vzhledem k vazbové podmínce $g(x, y) = 0$, jestliže má funkce f v bodě C lokální extrém vzhledem k množině $M \cap D_f$.

Poznámka 3.4: Funkce g v uvedené definici vymezuje často v rovině některou ze známých křivek nebo jejich částí – přímku, kružnici, elipsu, atd. Hledáme tedy lokální extrémy funkce *f* na křivce *M* nebo by bylo možno říci „nad“ křivkou *M*.

Lagrangeova metoda

Věta 3.5: (Nutná podmínka extrému funkce vzhledem k množině)

Nechť funkce dvou proměnných *f* a g mají spojité parciální derivace 1. řádu na celém svém definičním oboru, $M \subseteq D_f, C \in M (C = [c_1, c_2])$ a $g_y'(C) \neq 0$.

Jestliže funkce f má v bodě c lokální extrém vzhledem k množině M, platí, že existuje reálné číslo $\lambda, \lambda \neq 0$ takové, že $f_x'(C) + \lambda g_x'(C) = 0 \wedge f_y'(C) + \lambda g_y'(C) = 0$, kde množina M je popsána rovnicí $g(x, y) = 0$. Číslo λ nazýváme Lagrangeovým multiplikátorem.

Definice 3.11: Nechť funkce dvou proměnných *f* a g, kde rovnice $g(x, y) = 0$ vyjadřuje vazbu. Lagrangeovu funkci L, nazveme funkci o předpisu $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Poznámka 3.5: Bod extrému funkce f vzhledem k M je stacionárním bodem Lagrangeovy funkce $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Věta 3.6: (Postačující podmínka lokálního extrému funkce vzhledem k množině)

Nechť jsou splněny předpoklady nutné podmínky lokálního extrému funkce vzhledem k množině *M*.

Jestliže Lagrangeova funkce $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ má v bodě $C = [x_1, x_2]$ lokální extrém, má funkce f v bodě $C = [x_1, x_2]$ lokální extrém vzhledem k množině *M* a to stejného typu.

Metoda přímého dosazení

Poznámka 3.6:

V některých případech lze z rovnice $g(x, y) = 0$ jednoznačně určit x či y, například $y = g(x)$. Pak za y dosadíme $g(x)$ do $f(x, y)$, tak vznikne funkce jedné proměnné $f\big(x, g(x)\big)$. U ní pak hledáme lokální extrémy běžnými metodami.

Pokud nelze použít tuto metodu, využívá se např. Lagrangeovy metody.

3.2.1 Řešené příklady

Příklad 3.8: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x, y) = e^{xy}$ na množině

$$M = \{[x, y] | x + y - 1 = 0\}.$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit pomocí dosazovací metody. Z rovnice $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ lze jednoduše vyjádřit libovolná neznámá, kterou dosadíme do funkce $f: f(x, y) = e^{xy}$. Tím získáme funkci jedné proměnné. My vyjádříme proměnnou y, tj.:

$$x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x.$$

Nyní do funkce f dosadíme za proměnnou y a budeme zkoumat extrémy funkce jedné proměnné (proměnné x): $f\big(x, g(x)\big) = e^{x(1-x)} = e^{x-x^2}$.

Dále budeme, pro přehlednost, funkci $f\big(x, g(x)\big)$ značit jako funkci $h(x)$.

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Funkci h derivujeme a derivaci položíme rovnu nule: $h'(x) = e^{x-x^2}(1-2x) = 0$.

Z výše uvedené rovnice určíme stacionární bod. Je zřejmé, že musí platit: $e^{x-x^2} = 0 \vee (1-2x) = 0$. První možnost nemůže nastat, neboť je vždy $e^{x-x^2} > 0$. Proto platí $1-2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$. Stacionární bod funkce $h(x)$ je $x = \frac{1}{2}$.

Abychom získaly druhou souřadnici stacionárního bodu funkce f, dosadíme hodnotu první derivace do funkce g: $g\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2} + y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Postačující podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Vypočítáme druhou derivaci:

$$h''(x) = e^{x-x^2}(1-2x)(1-2x) + e^{x-x^2}(-2).$$

Po úpravě získáme: $h''(x) = e^{x-x^2}((1-2x)^2 - 2)$. Do druhé derivace dosadíme stacionární bod $x = \frac{1}{2}$: $h''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}((1-1)^2 - 2) = -2 \cdot e^{\frac{1}{2}} < 0$. Funkce h má v bodě $x = \frac{1}{2}$ lokální maximum.

Závěr

Funkce $f: f(x,y) = e^{xy}$ má v bodě $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ lokální maximum vzhledem k množině M.

Příklad 3.9: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = x^2 + 2x + 2y$ na množině

$$M = \{[x,y] | y + x^2 = 0\} \text{ ([10]).}$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit metodou přímého dosazení, neboť z vazební podmínky $y + x^2 = 0$ lze jednoduše vyjádřit neznámá *y:* $y = -x^2$. Za tu pak dosadíme do funkce f, čímž získáme funkci jedné proměnné *x*:

$$f: f\big(x, g(x)\big) = x^2 + 2x + 2(-x^2).$$

Tu upravíme: $f: f\big(x, g(x)\big) = -x^2 + 2x$.

Dále budeme funkci $f\big(x, g(x)\big)$ značit jako funkci h.

Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Vypočítáme první derivaci a určíme stacionární bod:

$$h'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1.$$

Stacionární bod funkce *f* vypočítáme dosazením $x = 1$ do funkce *g*:

$$y + 1^2 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow \text{stacionární bod funkce } f \text{ je tedy: } [1, -1].$$

Postačující podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné

Určíme druhou derivaci funkce *h*:

$$h''(x) = -2 < 0.$$

Druhá derivace vyšla číselná hodnota, proto nemusíme nic dosazovat: Rovnou tedy víme, že funkce $f: f(x,y) = x^2 + 2x + 2y$ má v bodě $[1, -1]$ lokální maximum vzhledem k množině *M*.

Příklad 3.10: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = 4x + 4y - 3$ na množině

$$M = \left\{[x,y] \middle| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\right\} \text{ ([10]).}$$

Řešení:

Tento příklad budeme řešit pomocí Lagrangeovy metody. Vytvoříme Lagrangeovu funkci z funkcí *f* a g. Poté ji zderivujeme podle proměnných x, y, přičemž při derivování budeme λ brát jako konstantu. Derivace položíme rovny nule. Tím získáme dvě rovnice o třech neznámých x ,y a λ. Jako třetí rovnici dáme do soustavy vazební podmínku.

Lagrangeova funkce bude mít tvar:

$$L(x,y) = 4x + 4y - 3 + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2\right).$$

První parciální derivace:

$$L_x'(x,y) = 4 - \frac{\lambda}{x^2}$$

$$L_y'(x,y) = 4 - \frac{\lambda}{y^2}.$$

Soustava rovnic bude mít tvar:

$$4 - \frac{\lambda}{x^2} = 0$$

$$4 - \frac{\lambda}{y^2} = 0$$

$$\underline{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2}.$$

Soustavu vyřešíme tak, že z první a druhé rovnice vyjádříme lambda: $\lambda = 4x^2 \wedge \lambda = 4y^2$. Tyto výrazy dáme do rovnosti: $4x^2 = 4y^2$. Zjednodušíme a vypočítáme, že: $x = y \vee x = -y$. Po dosazení do třetí rovnice získáme pro:

$$x = -y: -\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow 0 = 2$$

$$x = y: \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 2 \rightarrow 2 = 2y \rightarrow y = 1.$$

Teď dopočítáme hodnotu proměnné *x*: $x = y \rightarrow x = 1$ a hodnotu λ:

$\lambda = 4 \cdot 1^2 \rightarrow \lambda = 4$. Stacionární bod má souřadnice: [1,1].

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace, do kterých dosadíme stacionární bod a tím získáme Hessovu matici. Pomocí jejích subdeterminantů určíme typ lokálního extrému:

$$L''_{x^2}(x,y) = \frac{2\lambda}{x^3} \rightarrow L''_{x^2}(1,1) = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

$$L''_{y^2}(x,y) = \frac{2\lambda}{y^3} \rightarrow L''_{y^2}(1,1) = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

$$L''_{xy}(x,y) = 0.$$

$D_1(1,1) = 8 > 0, D_2(1,1) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 0 = 64 > 0 \rightarrow$ podle věty 3.2 má Lagrangeova funkce v bodě [1,1] lokální minimum a tedy i funkce *f* má v tomto bodě lokální minimum.

Příklad 3.11: Určete lokální extrémy funkce $f: f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, kde $a, b > 0$, na množině

$$M = \{[x,y] | x^2 + y^2 = 1\} \text{ ([2]).}$$

Řešení:

Neboť máme množinu *M* zadanou komplikovanějším podmínkou (nelze jednoduše vyjádřit jedna proměnná), budeme tento příklad počítat pomocí Lagrangeovy funkce. Tuto funkci vytvoříme z funkcí *f* a g:

$$L(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vypočítáme první parciální derivace Lagrangeovy funkce, které položíme rovny nule a spolu s vazební podmínkou vytvoříme soustavu tří rovnic o třech neznámých *x*, *y* a λ:

$$L_x'(x,y) = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0$$

$$L_y'(x,y) = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 1.}$$

Soustavu vyřešíme tak, že z první a druhé rovnice vyjádříme proměnou *x*, resp. *y*: $x = -\frac{1}{2\lambda a}; y = -\frac{1}{2\lambda b}$. Ty dosadíme do třetí rovnice: $\frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2} = 1$. Výraz upravíme: $\frac{b^2+a^2}{4a^2b^2\lambda^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2b^2\lambda^2$ a vyjde nám: $\lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$, tedy: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$; $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. Zpětně dosadíme do rovnic a dopočítáme proměnné *x* a *y*:

Pro $\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$ vyjde $x_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pro $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$ vyjde $x_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Máme tedy dva stacionární body: $A = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right], B = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$.

Vypočítáme druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce:

$$L''_{x^2}(x,y) = 2\lambda$$

$$L''_{y^2}(x,y) = 2\lambda$$

$$L''_{xy}(x,y) = 0.$$

Do druhých derivací dosadíme stacionární body, vypočítáme hodnoty. Ty dosadíme do Hessovy matice a pomocí věty 3.2 určíme typ extrému:

Pro bod $A = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ a $\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$: $L''_{x^2}\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

$$L''_{y^2}\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

$D_1(A) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} > 0$ (vidíme z podmínky $a, b > 0$), $D_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{vmatrix} =$

$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{(ab)^2} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} > 0 \rightarrow$ lokální minimum v bodě *A*.

Pro bod $B = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ a $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$: $L''_{x^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$,

$$L''_{y^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

$D_1(B) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} < 0$(vidíme z podmínky $a, b > 0$),

$D_2(A) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{(ab)^2} = \frac{a^2+b^2}{(ab)^2} > 0 \rightarrow$ lokální maximum v bodě *B*.

Lagrangeova funkce má v bodě $A = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ lokální minimum a tedy i funkce *f* má v tomto bodě lokální minimum a v bodě $B = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ lokální maximum a tedy i funkce *f* má v tomto bodě lokální maximum.

Příklad 3.12: Určete rozměry bazénu tvaru kvádru tak, aby při daném objemu V byl obsah plochy jeho dna a stěn nejmenší možný a kdy proměnné a a b jsou délka a šířka a proměnná c je výška bazénu.

Řešení:

$V = abc$ – daný objem kvádru, který bereme jako funkci tří proměnných a kde V značí konstantu. Toto je vazební podmínka.

Obsah ploch dna a stěn bazénu je funkce S tří proměnných:

$$S_{(a,b,c)} = 2ab + 2bc + ac.$$

Z vazební podmínky vyjádříme libovolnou neznámou, např. $c = \frac{V}{ab}$ a dosadíme do funkce tří proměnných S, tím získáme funkci dvou proměnných $S_{\left(a,b,\frac{V}{ab}\right)} = 2ab + 2\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$. Nyní budeme pokračovat v hledání extrémů jako v předešlých příkladech, tzn. určíme parciální derivace funkcí dvou proměnných S podle proměnných a,b:

$$S_a' = 2b - 2\frac{V}{a^2} \rightarrow a \neq 0$$

$$S_b' = 2a - \frac{V}{b^2} \rightarrow b \neq 0.$$

Parciální derivace položíme rovny nule a tím získáme soustavu rovnic:

$$2b - 2\frac{V}{a^2} = 0$$

$$2a - \frac{V}{b^2} = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $b = \frac{V}{a^2}$a dosadíme do druhé, tím získáme rovnici $2a - \frac{V}{\frac{V^2}{a^4}} = 0$. Po úpravách dostaneme $a\left(2 - \frac{a^3}{V}\right) = 0$. Vidíme, že $a_1 = 0 \vee a_2 = \sqrt[3]{2V}$. a_1 nebude řešení, neboť nemůžeme mít nulový rozměr kvádru. Proto jako jediné řešení lze brát $a_2 = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow b = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. Stacionární bod je $T = \left[\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right]$.

Nyní vypočítáme druhé parciální derivace, dosadíme stacionární bod a vypočítáme hodnotu. Jako v předcházející kapitole budeme určovat, zda je v tomto bodě extrém pomocí věty 3.2:

$$S''_{a^3} = \frac{4V}{a^3} \rightarrow S''_{a^3}\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2$$

$$S''_{b^2} = \frac{2V}{b^3} \rightarrow S''_{b^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 8$$

$$S''_{ab} = S''_{ba} = 2.$$

$D_2\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} > 0 \wedge D_1\left(\sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \sqrt[3]{2V}\right) = 2 > 0 \rightarrow$ dle věty 3.2 lze vidět, že v bodě $\left[\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}/2, \sqrt[3]{2V}\right]$ se nachází lokální minimum.

Rozměry bazénu tedy při daném objemu *V* jsou $a = \sqrt[3]{2V}, b = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$ a výška $c = \sqrt[3]{2V}$.

3.2.2 Neřešené příklady

1) Určete lokální extrémy na dané množině *M* funkcí:
   a) $f: f(x,y,z) = x - 2y + 2z; M = \{[x,y,z] | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ [2],
   b) $f: f(x,y) = x^2 + y^2; M = \left\{[x,y] \middle| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right\}, (a \neq 0, b \neq 0)$ [2],
   c) $f: f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; M = \left\{[x,y,z] \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}, (a > b > c > 0)$ [3].

4. Tečná rovina ke grafu funkce

K této kapitole jsem použil teorii z literatury [2], [3], [4], [10].

4.1 Základní pojmy

Věta 4.1: Nechť f je reálná funkce dvou proměnných a bod $t = [t_1, t_2]$ je vnitřním bodem definičního oboru této funkce. Jestliže funkce f má v bodě $t = [t_1, t_2]$ spojité parciální derivace 1. řádu, pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě má tvar:

$$x_3 = f(t) + f'_{x_1}(t) \cdot (x_1 - t_1) + f'_{x_2}(t) \cdot (x_2 - t_2).$$

Tečným bodem je tedy bod o souřadnicích $T = [t_1, t_2, f(t_1, t_2)]$

Poznámka 4.1: Rovnice tečné roviny lze také psát ve tvaru $f'_{x_1}(t)x_1 + f'_{x_2}(t)x_2 - x_3 + c = 0$, kde $c \in R$.

Poznámka 4.2: U funkcí jedné proměnné jsme byli zvyklí, že v tečném bodě procházela jen jedna tečna a ta měla s funkcí společný pouze tento bod. U funkcí dvou proměnných může procházet tímto bodem víc tečen, které ale tvoří pouze jednu tečnou rovinu! A ta nemusí mít s plochou jen tento společný bod.

4.2 Řešené příklady

Příklad 4.1: Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f: f(x, y) = x^2 + y^2$ v tečném bodě $T = [1,1,2]$.

Řešení:

Abychom mohli vypočítat tečnou rovinu, musíme zjistit, zda má daná funkce v bodě $t = [1,1]$ spojité parciální derivace 1. řádu. Ze zadání je patrno, že funkce má spojité parciální derivace na celém definičním oboru.

Vypočítáme první parciální derivace funkce v bodě $t = [1,1]$ a funkční hodnotu v tomto bodě:

$$f_x'(x, y) = 2x \rightarrow f_x'(1,1) = 2$$

$$f_y'(x, y) = 2y \rightarrow f_y'(1,1) = 2$$

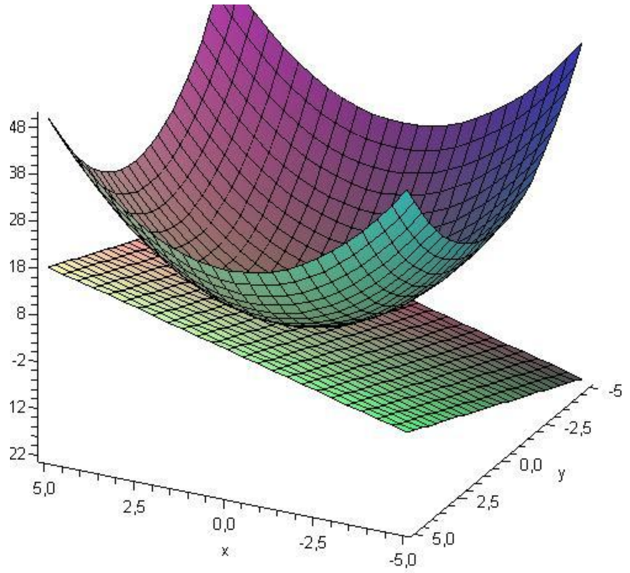
$$f(1,1) = 2.$$

Nyní příslušné hodnoty dosadíme do rovnice tečné roviny, kterou máme uvedenou ve větě 4.1:

$$z = 2 + 2 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) \rightarrow z = 2x + 2y - 2.$$

Po jednoduché úpravě lze získat rovnici tečné roviny ve tvaru, který máme uvedený v poznámce 4.1:

$$x + y - \frac{1}{2}z - 1 = 0.$$



Obrázek 4.1: Graf funkce f a její tečné roviny.

Příklad 4.2: Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f: f(x,y) = arctg\left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)$ v bodě $T = [0,2,?]$.

Řešení:

V okolí bodu $t = [0,2]$ má funkce f spojité parciální derivace 1. řádu, proto můžeme určit rovnici tečné roviny. Vypočítáme jako v předchozím příkladě první parciální derivace a funkční hodnotu v daném bodě:

$$f_x'(x,y) = \frac{3}{1+\left(3x-\ln\frac{1}{2}y\right)^2} \to f_x'(0,2) = \frac{3}{1+(3\cdot 0+\ln 1)^2} = 3$$

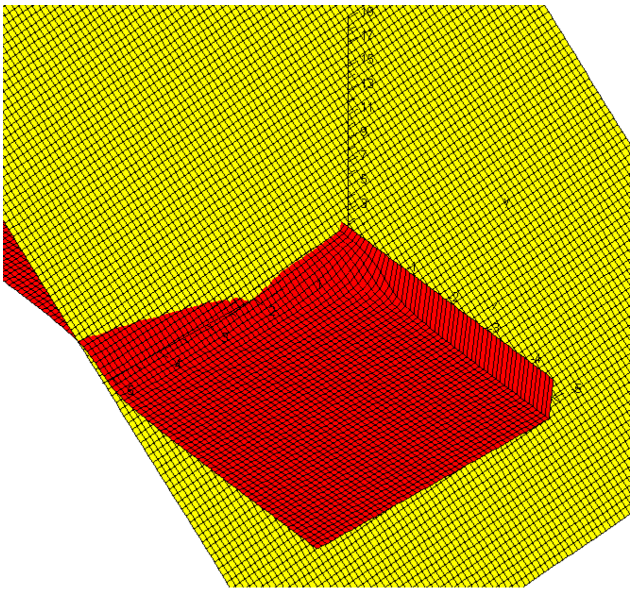
$$f_y'(x,y) = -\frac{1}{y\left(1+\left(3x-\ln\frac{1}{2}y\right)^2\right)} \to f_y'(0,2) = \frac{1}{2(1+(3\cdot 0+\ln 1)^2)} = \frac{1}{2}$$

$$f(0,2) = 0.$$

Nyní dosadíme hodnoty do rovnice tečné roviny:

$$z = 0 + 3\cdot(x-0) - \frac{1}{2}\cdot(y-2) \to 3x - \frac{1}{2}y + 1 - z = 0.$$

Rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f: f(x,y) = arctg\left(3x - \ln\frac{1}{2}y\right)$ v tečném bodě $T = [0,2,0]$ je $3x - \frac{1}{2}y + 1 - z = 0$.



Obrázek 4.2: Graf funkce f a tečné roviny.

Příklad 4.3: Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f: f(x,y) = arctg\ \frac{y}{x}$ v tečném bodě $T = \left[1,1,\frac{\pi}{4}\right]$ ([3]).

Řešení:

Funkce f má v bodě $t = [1,1]$ spojité parciální derivace 1. řádu, proto můžeme v tomto bodě určit rovnici tečné roviny:

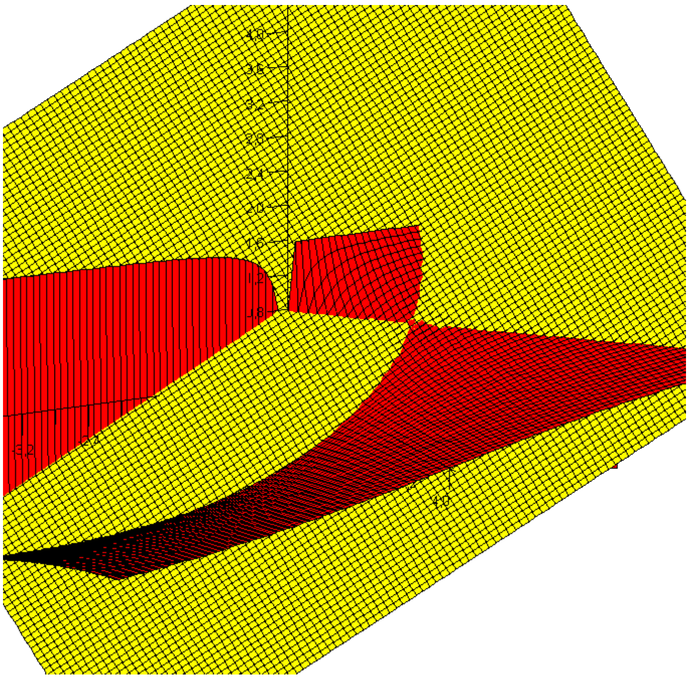
$$f_x'(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \to f_x'(1,1) = -\frac{1}{1^2 + 1^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \to f_y'(1,1) = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny:

$$z = -\tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) + \frac{\pi}{4} \to -x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Tečná rovina má rovnici $-x + y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$.



Obrázek 4.3: Tečná rovina k ploše $f: f(x,y) = arctg\ \frac{y}{x}$.

Příklad 4.4: Určete tečnou rovinu ke grafu funkce určené implicitně $z^3 + 3x^2z - 2xyz = 0$ v tečném bodě $T = [1,2,1]$.

Řešení:

Tentokrát je funkce zadána v implicitním tvaru. Abychom mohli derivovat, musíme nejprve ověřit, zda bod *T* vyhovuje podmínkám $F(T) = 0$ a $F_z'(T) \neq 0$, tedy: $F(T) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$ a $F_z'(x,y,z) = 3z^2 + 3x^2 - 2xy \rightarrow$

$\rightarrow F_z'(T) = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$. Obě tyto podmínky jsou splněny, a tak můžeme funkci zderivovat podle pravidel o derivování implicitní funkce v bodě (věta 2.6 v kapitole 2):

$$F_x'(x,y,z) = 6xy - 2yz$$

$$F_y'(x,y,z) = -2xz$$

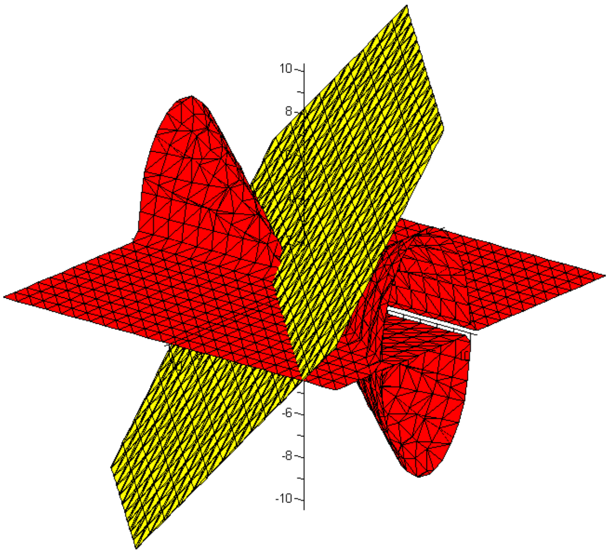
$$z_x' = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} \rightarrow z_x' = -\frac{6xy - 2yz}{3z^2 + 3x^2 - 2xy}$$

$$z_y' = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} \rightarrow z_y' = -\frac{-2xz}{3z^2 + 3x^2 - 2xy}.$$

Dosadíme bod *T*: $z_x'(1,2,1) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{-2}{2} = -1$, $z_y'(1,2,1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$. V těchto příkladech, kdy máme funkci zadanou implicitně, dosadíme do rovnice tečny za $f(T)$ *z*-tovou souřadnici bodu *t*.

Tečná rovina bude mít tedy rovnici:

$$z = -1(x - 1) + 1(y + 2) + 1 \rightarrow -x + y - z + 4 = 0.$$



Obrázek 4.4: Implicitní funkce $z^3 + 3x^2z - 2xyz = 0$ a její tečná rovina.

Příklad 4.5: Určete tečnou rovinu k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ v tečném bodě

$T = [2\sqrt{2}, 1{,}1]$.

Řešení:

Funkci máme opět zadanou implicitně. Ověříme podmínky, zda existuje derivace v bodě *T*:

$F(2\sqrt{2}, 1{,}1) = \frac{(2\sqrt{2})^2}{16} + \frac{1^2}{4} + \frac{(1)^2}{4} - 1 = 0 \rightarrow$ vidíme, že levá strana se rovná pravé. Podmínka je splněna.

$F_z'(x, y, z) = \frac{1}{2}z \rightarrow F_z'(2\sqrt{2}, 1{,}1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow$ derivace podle z je různá od nuly, podmínka je splněna.

Podmínky jsou splněny, proto můžeme přistoupit k derivacím podle proměnných *x*,*y* v bodě *T*:

$$F'_x(x,y,z) = \frac{2x}{16} = \frac{x}{8}$$

$$F'_y(x,y,z) = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2}$$

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \rightarrow z'_x = -\frac{\frac{x}{8}}{\frac{z}{2}} = -\frac{x}{4z}$$

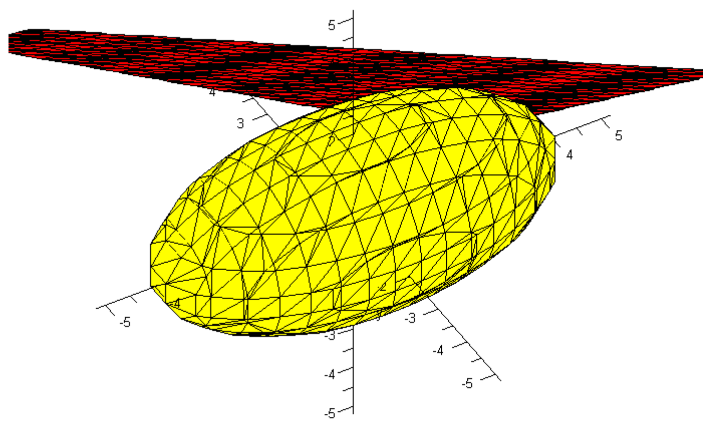
$$z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \rightarrow z'_y = -\frac{\frac{y}{2}}{\frac{z}{2}} = -\frac{y}{z}.$$

Dosadíme bod T: $z'_x(2\sqrt{2},1{,}1) = -\frac{1}{2}; z'_y(2\sqrt{2},1{,}1) = -1$. V těchto příkladech, kdy máme funkci zadanou implicitně, dosadíme do rovnice tečny za $f(T)$ *z*-tovou souřadnici bodu *T*.

Tečná rovina bude mít rovnici: $z = 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - 2\sqrt{2}\right) + (-1) \cdot (y-1) \rightarrow$

$\rightarrow z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2 - y + 1 \rightarrow 2z = -\sqrt{2}x - 2y + 8 \rightarrow \sqrt{2}x + 2y + 2z - 8 = 0.$

Rovnice tečné rovnice ke grafu plochy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ v tečném bodě T je $\sqrt{2}x + 2y + 2z - 8 = 0.$



Obrázek 4.5: Implicitní funkce $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ a její tečná rovina.

Příklad 4.6: Zjistěte tečnou rovinu ke grafu plochy dané rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ v bodě $T=[2,2,?]$, kdy $a=4, b=4, c=2$.

Řešení:

Rovnice plochy po dosazení konstant bude $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$, což je rotační dvoudílný hyperboloid. Vidíme, že nemáme *z*-tovou souřadnici bodu *T*, kterou musíme získat dosazením do rovnice plochy a dopočítáním. Tím nejen získáme souřadnice bodu *T*, ale i hodnotu $f(T)$:

$$F(2,2,z)=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}-\frac{z^2}{4}+1=0\rightarrow\frac{z^2}{4}-1-\frac{1}{2}=0\rightarrow z^2=6\rightarrow z=\pm\sqrt{6}.$$

Po dosazení jsme získali dva tečné body: $T_1=[2,2,\sqrt{6}], T_2=[2,2,-\sqrt{6}]$. Tím můžeme vypočítat dvě tečné roviny k ploše. Ověříme podmínku existence parciální derivace:

$F_z'(x,y,z)=-\frac{1}{4}\cdot 2z=-\frac{1}{2}z\neq 0$ pro $F_z'(T_1)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\neq 0$ a pro $F_z'(T_2)=-\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{6})\neq 0$. Podmínky platí, můžeme dopočítat parciální derivace a rovnice tečen:

$$F_x'(x,y,z)=\frac{2x}{16}=\frac{x}{8}$$

$$F_y'(x,y,z)=\frac{2y}{16}=\frac{y}{8}$$

$$z_x'=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\rightarrow z_x'=-\frac{\frac{x}{8}}{-\frac{z}{2}}=\frac{x}{4z}$$

$$z_y'=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\rightarrow z_y'=-\frac{\frac{y}{8}}{-\frac{z}{2}}=-\frac{y}{4z}.$$

Dosadíme body T_1, T_2: $z_x'(T_1)=\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_y'(T_1)=\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_x'(T_2)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}, z_y'(T_2)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Rovnice tečen tedy bude vypadat:

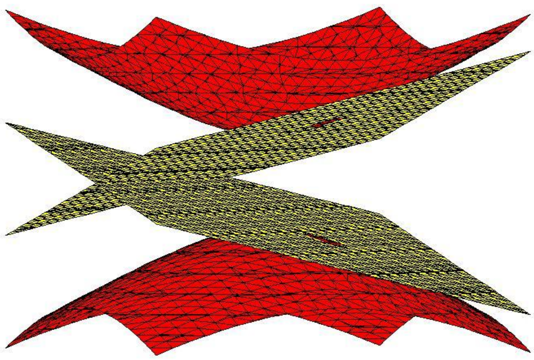
Tečna $n_1: z = \sqrt{6} + \frac{1}{2\sqrt{6}}(x-2) + \frac{1}{2\sqrt{6}}(y-2) \to 2\sqrt{6}z = 8 + x + y \to$

$$\to x + y - 2\sqrt{6}z + 8 = 0.$$

Tečna $n_2: z = -\sqrt{6} - \frac{1}{2\sqrt{6}}(x-2) - \frac{1}{2\sqrt{6}}(y-2) \to 2\sqrt{6}z = -8 - x - y \to$

$\to x + y + 2\sqrt{6}z + 8 = 0.$

Tečné roviny, ke grafu plochy $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$ v bodech T_1, T_2 mají rovnice $x + y - 2\sqrt{6}z + +8 = 0$ a $x + y + 2\sqrt{6}z + 8 = 0.$



Obrázek 4.6: Dvoudílný hyperboloid $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1$ a jeho tečny.

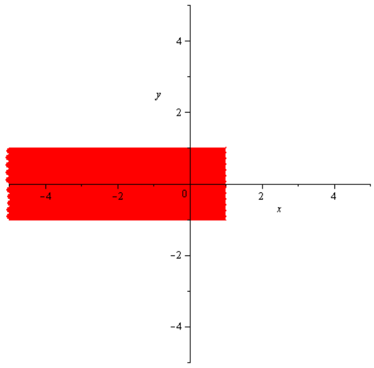
4.3 Neřešené příklady

1) Najděte rovnici tečné roviny k dané ploše v daném bodě:
   a) $f: f(x,y) = 3x^2 + 2y^2, [-1,2,11]$ [4],
   b) $f: f(x,y) = e^x \cdot \cos y, [0,0,1]$ [4],
   c) $f: f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \left[4,-3,\frac{4}{5}\right]$ [4],
   d) $f: f(x,y) = \frac{xy}{x-2y} + 3, A = [3,1], B = [-1,-1]$ [11],
   e) $f: f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + x + y, A = [-1,2], B = [0,7]$ [11].
2) Vypočítejte tečné roviny k daným implicitním funkcím v daných bodech:
   a) $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{9} = 1, \left[4,\sqrt{2},3\right]$ [4],
   b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1, [2,3,5]$ [4],
   c) $x^2 + y^2 + z^2 = 169, [3,4,12]$ [3],
   d) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, [x_0, y_0, z_0]$ [3].

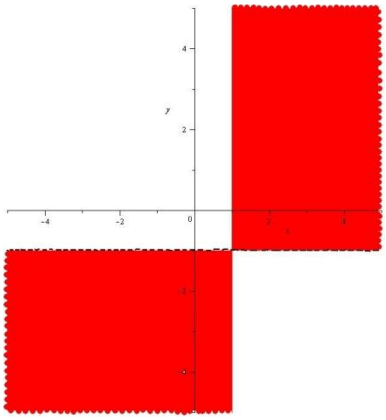
5. Výsledky neřešených příkladů

Kapitola 1.3:

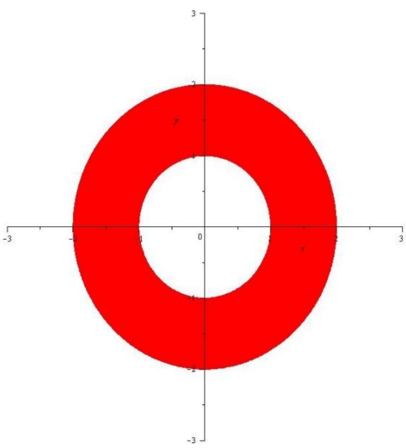
1.a) $D_f = x < 1 \wedge |y| \leq 1$



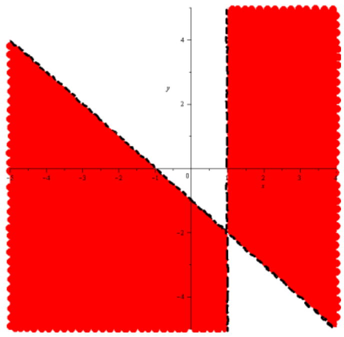
b) $D_f = (x \geq 1 \wedge y > -1) \vee (x \leq 1 \wedge y < -1)$



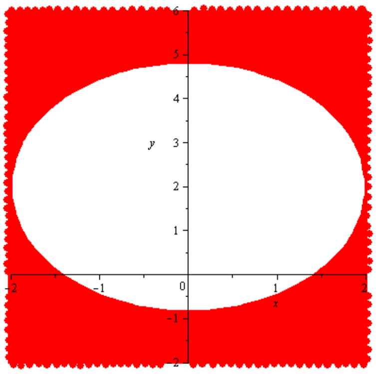
c) $D_f: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$



d) $D_f: (x > 1 \wedge y > -1 - x) \vee (x < 1 \wedge y < -1 - x)$



e) $D_f: \frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} \geq 1$



Kapitola 2.3:

1. a) $f_x^{'} = e^x \cdot cos\,(xy) - ye^x \cdot sin\,(xy), f_y^{'} = -ye^x \cdot sin(xy)$

b) $f_x^{'} = \frac{2x}{(2x^2+y^2)}, f_y^{'} = \frac{y}{(2x^2+y^2)}$

c) $f_x^{'} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, f_y^{'} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

d) $f_x^{'} = \frac{1}{x-y} - \frac{x}{(x-y)^2}, f_y^{'} = \frac{x}{(x-y)^2}$

e) $f_x^{'} = 3x^2yz^2, f_y^{'} = x^3z^2, f_z^{'} = 2x^3yz$

f) $f_x^{'} = 3x^2 - 2, f_y^{'} = 2y + 3, f_z^{'} = -2z + 1$

g) $f_x^{'} = -\frac{z}{x}, f_y^{'} = \frac{z}{y}, f_z^{'} = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

2. **a)** $f''_{x^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)$, $f''_{y^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2++y^2)$, $f''_{xy} = -4xy\sin(x^2+y^2)$

b) $f''_{x^2} = 20(x^2y+xy^2)^3(2xy+y^2)^2 + 10(x^2y+xy^2)^4y$

$f''_{y^2} = 20(x^2y+xy^2)^3(2xy+x^2)^2 + 10(x^2y+xy^2)^4x$

$f''_{xy} = 20(x^2y+xy^2)^3(2xy+y^2)(x^2+2xy) + 5(x^2y+xy^2)^4(2x+2y)$

c) $f''_{x^2} = e^x\ln e^2\cos(xy) - 2\,e^x\ln e\sin(xy)\,y - e^x\cos(xy)y^2 - e^y\sin(xy)\,y^2$

$f''_{y^2} = e^y\ln e^2\sin(xy) + 2\,e^y\ln e\cos(xy)\,x - e^x\cos(xy)x^2 - e^y\sin(xy)\,x^2$

$f''_{xy} = -e^x\ln e\sin(xy)\,x - e^x\cos(xy)\,xy - e^x\sin(xy) + e^y\ln e\cos(xy)\,y - e^y\sin(xy)\,xy + e^y\cos(xy)$

d) $f''_{x^2} = -\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$, $f''_{y^2} = \frac{2\cos x^3}{y^3}$, $f''_{xy} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$

e) $f''_{x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f''_{y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$, $f''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$

3. $y'_x = -\frac{1+y^2}{3y^2+2xy}$, $y''_{x^2} = \frac{2(3y^5-3y+2xy^2+3xy^4-X)}{y^3(27y^3+54xy^2+36x^2y+8x^3)}$

4. a) $z'_x = -\frac{2x-z}{-x+y^4}$, $z'_y = -\frac{2y+4zy^3}{-x+y^4}$

b) $z'_x = -\frac{(4x+1)}{2z}$, $z'_y = \frac{(3y+1)}{z}$

c) $z'_x = -\frac{(2x+3x^2z^2)}{(2x^3z+y\cos z)}$, $z'_y = -\frac{\sin z}{(2x^3z+y\cos z)}$

d) $z'_x = \frac{y\sin(xz)+xyz\cos(xz)}{1-x^2y\cos(xz)}$, $z'_y = \frac{x\sin(xz)}{1-x^2y\cos(xz)}$

e) $z'_x = -\frac{x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$

f) $z'_x = z'_y = \frac{1}{1-e^z}$

Kapitola 3.1.2:

1.a) lokální maximum v $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

b) lokální maximum v [0,0]

c) lokální maximum v [1,1]

d) $\left[-\frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}\right]$, nelze určit

e) lokální maximum v [0,0,0]

2. lokální maximum v $[1, -1, 6]$ a lokální minimum v $[1, -1, -2]$

Kapitola 3.2.2:

1.a) maximum v $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, minimum v $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$

b) maximum v $\left[\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right]$

c) minimum v $[0,0,\pm c]$, maximum v $[\pm a, 0,0]$

Kapitola 4.3:

1.a) $6x - 8y + z + 11 = 0$

b) $x - z + 1 = 0$

c) $16x - 12y - 125z = 0$

d) pro bod [3,1]: $2x - 9y + z = 0$; pro bod $[-1,-1]$: $2x - y + z = 0$

e) pro bod $[-1,2]$: $5x - 9y + z + 11 = 0$; pro bod [0,7]: $x + 29y - z - 97 = 0$

2.a) $3x - 3\sqrt{2}y - z - 3 = 0$

b) $3x + 2y - 3z + 3 = 0$

c) $x + 12y + 4z - 99 = 0$

d) $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1$

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvoření sbírky řešených a neřešených úloh diferenciálního počtu více proměnných, především pak dvou a tří proměnných. Jelikož je toto téma obsáhlé, zaměřil jsem se pouze na výpočty ukázkových příkladů tak, aby byl čtenář seznámen se základy dané problematiky. V úvodu každé kapitoly se nachází výběr ze základní teorie diferenciálního počtu více proměnných, který je potřebný při výpočtech ukázkových příkladů.

Dané postupy řešení příkladů jsem se snažil předložit stručně a především přehledně. K vybraným příkladům jsem rovněž připojil grafy, které umožní lepší pochopení daného zadání problému i teorie.

Vzhledem k tomu, že je diferenciální počet více proměnných zajímavé a rozsáhlé téma, musel jsem danou problematiku zobecnit a zkrátit. Především pak kapitoly týkající se lokálních extrémů funkce více proměnných a tečné roviny funkce více proměnných. Pokud by čtenář projevil o toto téma hlubší zájem, doporučil bych k prostudování především literaturu [2], [3], [4].

Použitá literatura:

[1] AKSAMIT, P., MRÁZ, F.: *Příklady z matematické analýzy pro učitelské stadium*. České Budějovice: Ediční studio PF JU České Budějovice, 2000, ISBN 80-7040-158-8.

[2] AKSAMIT, P., ČERNYCH, J., JOHN,O., STARÁ, J.: *Příklady z matematické analýzy V*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

[3] DĚMIDOVIČ, B.P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Praha: Fragment, 2003, ISBN 80-7200-587-1.

[4] GILLMAN, L., McDOWELL, R. H.: *Matematická analýza*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1980.

[5] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet I*. Praha: ČSAV, 1974.

[6] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet II*. Praha: ČSAV, 1956.

[7] KAŇKA, M., HENZLER, J.: *Matematika pro ekonomy II*. Praha: Ekopress, 1997.

[8] *Funkce zadaná implicitně* [online]:

dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/tiser/web8.pdf [cit. 2011-2-11]

[9] *Matematické výpočty se systémem Maple* [online]:

Dostupné z:

http://www.maple.vladimirzak.com/publikace/matematicke_vypocty_maple.pdf [cit. 2010-11-27]

[10] *Matematika II* [online]:

Dostupné z: http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fceviceprom.html [cit. 2011-3-23]

[11] NÝDL, V., KLUFOVÁ, R.: *Matematika, část 2 – Matematická analýza*. Zemědělská fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice, 1998, ISBN 80-7040-273-3.

[12] MARKOVÁ, H.: *Derivace funkcí více proměnných*. Olomouc, 2009. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého. Vedoucí diplomové práce Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

[13] *Příklady na lokální extrémy* [online]:

Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/index.php?item=14 [cit. 2011-2-14]

[14] *Příklady na parciální derivace* [online]:

Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/m29798l.pdf [cit. 2011-2-23]

[15] ZUBČÁKOVÁ, J.: *Implicitní funkce*. Brno, 2008. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Vedoucí práce RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.