



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## NAPĚŤOVÁ ANALÝZA POSLEDNÍHO DOCHOVANÉHO PILÍŘE PŮVODNÍHO IVANČICKÉHO VIADUKTU

STRESS ANALYSIS OF THE ONLY EXTANT PIER OF THE FORMER IVANČICE VIADUCT

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Pelaj

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Vaverka, Ph.D.

BRNO 2024

## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Jakub Pelaj**  
Studijní program: Základy strojního inženýrství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Jiří Vaverka, Ph.D.**  
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Napětíová analýza posledního dochovaného pilíře původního Ivančického viaduktu**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Současný Ivančický viadukt je ocelový železniční most na trati Brno – Hrušovany nad Jevišovkou, kterým byl nahrazen původní viadukt, jenž byl v provozu v letech 1870–1978. Původní konstrukce byla (na rozdíl od současné) příhradová. Z této původní konstrukce je v současné době zachováno pouze krajní pole mostovky s 1 pilířem a podpěrou.

#### **Cíle bakalářské práce:**

- 1.) Stručně uvést historii Ivančického viaduktu. Shromáždit dostupné technické údaje o původní příhradové konstrukci (její rozměry, příčné průřezy prutů, materiál, ...).
- 2.) Navrhnout 3D prutový model posledního stojícího pilíře původní konstrukce jako soustavu axiálně zatížených prutů pospojovaných styčníky. Navrhnout vhodné uložení a statické zatížení modelu vycházející z původních provozních podmínek.
- 3.) Analyzovat model z hlediska pohyblivosti a statické určitosti. S využitím vhodného softwaru provést analytický výpočet normálových sil a napětí v prutech a posoudit bezpečnost soustavy vzhledem k meznímu stavu pružnosti a meznímu stavu vzpěrné stability. Popsat postup řešení.
- 4.) Provést numerické řešení pomocí softwaru Ansys (Workbench nebo APDL). Výsledky srovnat s analytickým řešením.

#### **Seznam doporučené literatury:**

JANÍČEK, Přemysl; ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; BURŠA, Jiří. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. vyd. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X.

FLORIAN, Zdeněk; ONDRÁČEK, Emanuel; PŘIKRYL, Karel. Mechanika těles: statika. 7. vyd. Brno: CERM, 2007, 182 s. ISBN 978-80-214-3440-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Bakalářská práce se zaměřuje napět'ovou analýzou pilíře původního Ivančického viaduktu. V úvodní části je popsán teoretický základ nezbytný pro řešení analýzy. Druhá část se zabývá historií a montáží mostu. Třetí část se věnuje tvorbě prostorového modelu, který slouží jako základ pro provedení napět'ové analýzy. Poté je detailně rozebrán postup řešení a samotné analytické výpočty. V závěru práce jsou získané výsledky verifikovány pomocí numerických výpočtů a doplněny o dílčí výsledky týkající se dalšího druhu zatížení.

### **Klíčová slova**

příhradová konstrukce, prut, napětí, statická neurčitost, vzpěrná stabilita, Metoda konečných prvků

## **ABSTRACT**

The bachelor thesis focuses on the stress analysis of the original Ivančice viadukt pillar. The introductory part describes the theoretical basis necessary for the analysis. The second part deals with the history and assembly of the bridge. The third part dedicates to the creation of three-dimensional structure which serves as a basis for conducting the stress analysis. The following part provides a detailed expansion of the solution process and analytical calculations itself. In the conclusion, the obtained results are verified using numerical calculations a supplement with partial results concerning an additional type of load.

### **Klíčová slova**

Truss structure, beam, stress, static indetermination, buckling stability, Finite Element Method



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

PELAJ, Jakub. *Napětová analýza posledního dochovaného pilíře původního Ivančického viaduktu*. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/157460>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Vaverka.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem *výpočtovou* práci na téma **Napětová analýza posledního dochovaného pilíře původního Ivančického viaduktu** vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, které tvoří přílohu této práce.

Jakub Pelaj

## **PODĚKOVÁNÍ**

Chtěl bych poděkovat panu Ing. Jiřímu Vavrkovi Ph.D. za jeho hodnotné rady, pomoc, ochotu a čas, který mi při vypracování této bakalářské práce věnoval. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům za veškerou podporu během studia.

## OBSAH

ÚVOD .....	10
1. TEORETICKÝ ZÁKLAD .....	11
1.1 Prutové těleso .....	11
1.1.1 Předpoklady prutových těles .....	11
1.1.2 Namáhání prutů v příhradových konstrukcích .....	12
1.2 Mezní stavy .....	12
1.2.1 Mezní stav pružnosti .....	12
1.2.2 Mezní stav vzpěrné stability .....	12
1.3 Prutová soustava .....	14
1.3.1 Kinematický rozbor .....	15
1.3.2 Statická určitost .....	15
1.3.3 Styčnicková metoda .....	16
1.3.4 Řešení staticky neurčitých úloh .....	16
1.4 Srovnání modelu s realitou .....	17
2. ZÁKLADNÍ INFORMACE O MOSTU .....	18
2.1 Základní technické údaje .....	19
2.2 Montáž mostu .....	19
2.3 Clayperova třímomentová metoda .....	20
3. CHARAKTERISTIKA ŘEŠENÉ SOUSTAVY .....	21
3.1 Informace k ocelovému pilíři .....	21
3.2 Spojení jednotlivých prutů .....	22
3.3 Převod na prutovou konstrukci .....	23
3.3.1 Upravení modelu prutové konstrukce .....	23
3.3.2 CAD model pro analytické a numerické řešení .....	23
3.4 Určení příčných průřezů a materiálové charakteristiky .....	24
3.5 Zatěžující vlaková souprava .....	27
3.6 Model zatížení .....	28
3.6.1 Varianta zatížení č. 1 .....	28
3.6.2 Varianta zatížení č. 2 .....	28
4. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ .....	30
4.1 Kinematický a statický rozbor .....	30
4.2 Částečné uvolnění .....	32
4.3 Postup řešení .....	33
4.3.1 Sestavení rovnic rovnováhy .....	33
4.3.2 Vyjádření deformačních podmínek .....	35
4.4 Prezentace a rozbor výsledků .....	35
4.4.1 Vzpěrná stabilita .....	37
4.4.2 Mezní stav pružnosti .....	38
5. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ .....	40
5.1 Okrajové podmínky .....	40

---

5.2	Varianta zatížení č. 1 .....	41
5.3	Varianta zatížení č. 2 .....	43
ZÁVĚR.....		45
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....		46
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....		47
SEZNAM OBRÁZKŮ .....		48
SEZNAM TABULEK.....		49
SEZNAM PŘÍLOH.....		50

## ÚVOD

Již od 19. století se při stavbě železničních tratí pro překlenutí údolí či řeky používají ocelové mosty. Pro strukturu těchto mostů se postupem času dostaly do popředí příhradové konstrukce. Jejich nejvýznamnější devizou je navzdory nízké hmotnosti schopnost přenést velmi vysoké zatížení. Do této kategorie bezesporu patřil i původní Ivančický viadukt, jenž spojoval dvě strany údolí na trati mezi Brnem a Vídní.

Náplní této práce bylo analyzovat pouze jeho část, tj. pátý pilíř, který je, jako jediný, zachován do současnosti. Pilíř je tvořen prvky, které se vyznačují násobně větším rozměrem v jednom směru než ve zbylých dvou směrech, proto jej lze zkoumat teorií prutových soustav. Pro návrh řešení bude nutné vycházet z dochované technické dokumentace a vytvořit 3D model konstrukce. Pro řešení napěťové analýzy se vycházelo ze stávající konstrukce. Při výpočtech byly použity poznatky získané ze skript „Pružnost a pevnost“ a „Statika“, jejichž části se zaměřují na řešení prutových soustav.

Samotné řešení obsahuje dvě části, analytickou a numerickou. Jedná se o rozsáhlý analytický výpočet, kde bylo využito výpočetního softwaru. Numerické řešení primárně sloužilo pro verifikaci výsledků, popřípadě k vypočtení dílčích výsledků. Byl využit software pracující na bázi metody konečných prvků.

# 1. TEORETICKÝ ZÁKLAD

## 1.1 Prutové těleso

Prut, který byl použit, je teoretickým modelem reálného tělesa. Jedná se o spojitě deformované těleso, jehož základním prvkem je trojnásobně elementární prvek. Musí splňovat určité geometrické, vazbové, deformační a napjatostní předpoklady. [1]

### 1.1.1 Předpoklady prutových těles

#### Geometrické předpoklady:

V lineární pružnosti zjednodušujeme prut na jednorozměrný model tělesa, které je určeno střednicí a příčným průřezem. Prut má rozměr v jedné ose násobně větší, než ve zbývajících dvou osách (příčný průřez). Příčné průřezy  $\Psi$  mohou mít různé tvary, např. kruh, čtverec, profil I, profil C. Plocha příčného průřezu je dána vztahem:

$$S = \int_{\Psi} dS \quad (1.1)$$

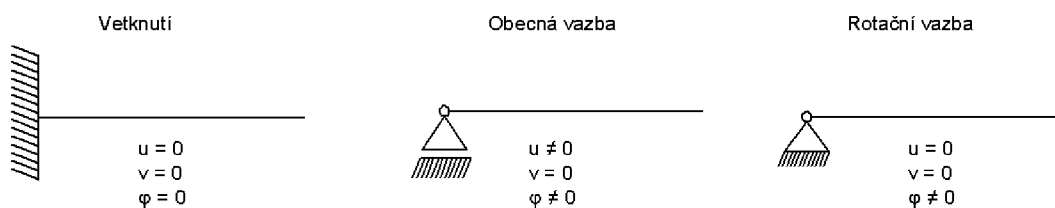
kde platí vztah:

$$dS = dydz \quad (1.2)$$

pro plochu  $dS$  elementu  $\Psi$ . Pro výpočet namáhání a posuvu musíme určit průřezové charakteristiky (kvadratické momenty průřezu). [1]

#### Vazbové a zatěžovací předpoklady:

- omezují jen posuvy a úhly natočení jejich střednice,
- silové zatížení, liniové zatížení a silové dvojice působí pouze na střednici prutu.



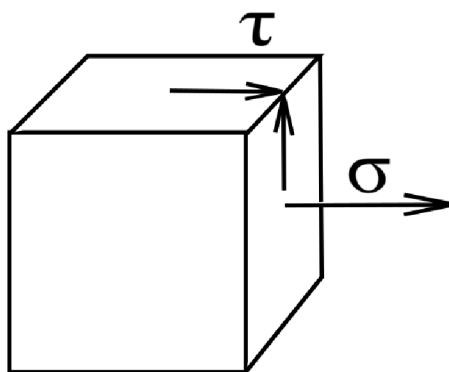
Obr. 1.1 Typy vazeb s omezujícími parametry

#### Deformační předpoklady:

- střednice v procesu deformace zůstává hladká,
- příčné průřezy si zachovávají rovinnost a kolmost k deformované střednici. [1]

#### Napjatostní předpoklady:

Pruty mají specifickou prutovou napjatost znázorněnou na Obr. 1.2, která se skládá z normálových a smykových napětí v příčném průřezu. Uvažujeme-li, že namáhání nepůsobí na povrch tělesa, ale pouze na jeho střednici, pak pro namáhání tahem nebo tlakem neuvažujeme změnu průřezu při výpočtu namáhání. Normálové napětí prutů, může být pouze tah nebo tlak. [1]



Obr. 1.2 Prutová napjatost elementárního prvku [1]

V praxi je velice málo případů, kdy se dá reálné těleso nahradit modelem prutového tělesa a toto nahrazení by bylo ekvivalentní. Proto musíme formulovat podmínky použitelnosti, které určují, jestli lze modelové těleso použít k řešení daného problému.

### 1.1.2 Namáhání prutů v příhradových konstrukcích

Při řešení prutových konstrukcí dochází k namáhání prutů na tah nebo tlak. Pokud dochází k tlačení prutu, může dojít k jeho vybočení, kdy začne čím dál výrazněji působit ohyb. U prutových soustav k tomuto kombinovanému namáhání tlaku a ohybu současně nesmí dojít.

## 1.2 Mezní stavy

Mezní stavy slouží k určení hranice, kdy je sestava ještě funkční z určitého aspektu a kdy už je nefunkční. Tuto hranici musíme číselně vyjádřit, abychom ji mohli porovnat s vypočtenými výsledky. Číselnou hodnotu označujeme koeficient bezpečnosti  $k$ :

$k < 1$  – nevyhovuje,

$k > 1$  – pravděpodobně vyhovuje,

$k_i > k_j$  – stav  $i$  je bezpečnější než stav  $j$ .

V této práci se budeme zabývat mezním stavem pružnosti a mezním stavem vzpěrné stability.

### 1.2.1 Mezní stav pružnosti

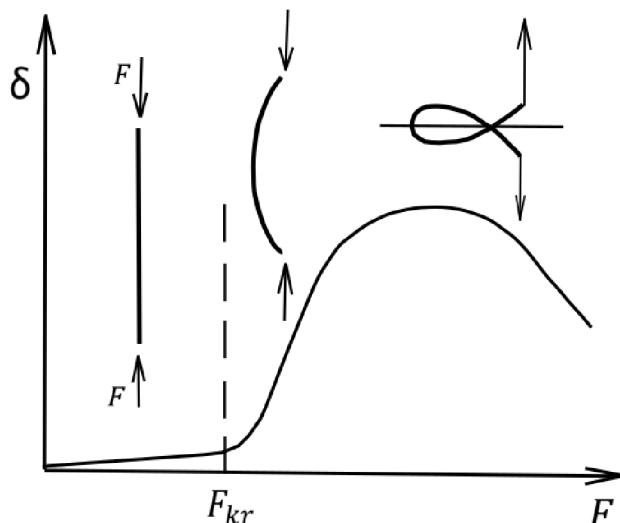
Soustava je funkční, dokud nevznikají makroplastické deformace. Tedy pokud zatížíme prut, zdeformuje se do určité polohy. Pokud zatížíme prut a překročíme mezní stav pružnosti, po odlehčení se nevrátí do původního tvaru před zatížením. [1]

### 1.2.2 Mezní stav vzpěrné stability

Ke vzpěru dochází, když se ke stlačování prutu začne přidávat i ohyb. Pokud by zatěžující síla působila na téže přímce jako je osa prutu, tak by docházelo jen ke stlačování. V reálných případech k tomuto nedochází. Tedy v průběhu zatěžování dochází ke změně charakteru deformace zobrazený na Obr. 1.3. U vzpěrné stability se jedná o nelineární problematiku, proto je nutné uvolnit prvek v deformovaném stavu. [1]

Z počátku je průhyb zanedbatelný. Jakmile překročíme kritickou sílu zatěžování, průhyb začne prudce narůstat. Při dlouhodobém navyšujícím se zatížení vytvoří prut smyčku, až nastane lom. Průběh síly v závislosti na deformaci popisuje graf na Obr. 1.3. [1]





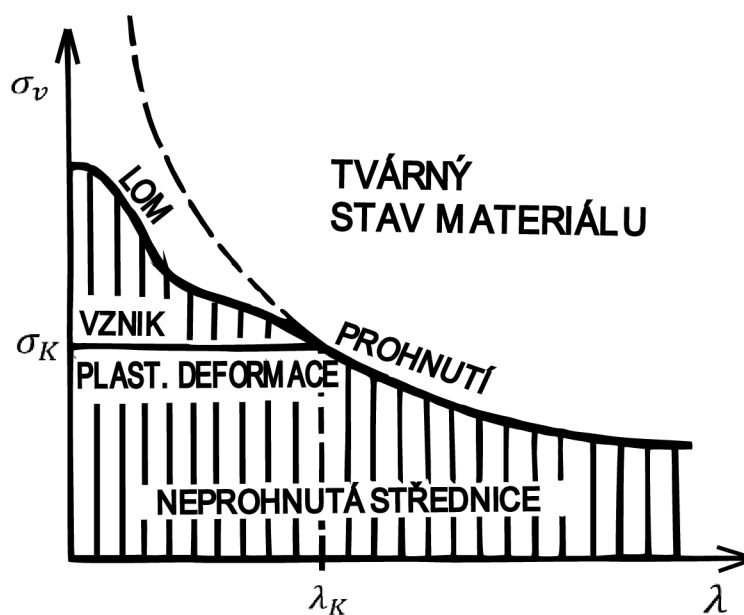
Obr. 1.3 Závislost tlačné síly na deformaci štíhlého prutu [1]

Mezní stav vzpěrné stability nastane v okamžiku, kdy začne převládat ohyb nad tlakem. Abychom byli schopni určit toto místo, potřebujeme zhodnotit štíhlost prutu. Kritická štíhlost prutu pro houževnaté materiály je dána vztahem:

$$\lambda_K = \alpha_V \sqrt{\frac{E}{\sigma_K}} \quad (1.3)$$

Štíhlost prutu určíme z rozměrových charakteristik vztahem:

$$\lambda = l \sqrt{\frac{S}{J_2}} \quad (1.4)$$



Obr. 1.4 Eulerova hyperbola [1]

Podle Eulerovy hyperboly jsme schopni určit, jestli nastane dříve mezní stav pružnosti, nebo mezní stav vzpěrné stability podle velikosti napětí a štíhlosti prutu. Následně porovnáme kritickou štíhlost se štíhlostí prutu, abychom zjistili, jakým způsobem budeme určovat bezpečnost.

Pro  $\lambda < \lambda_K$  určíme napětí:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (1.5)$$

A následně bezpečnosti:

$$k_K = \frac{\sigma_K}{|\sigma|} \quad (1.6)$$

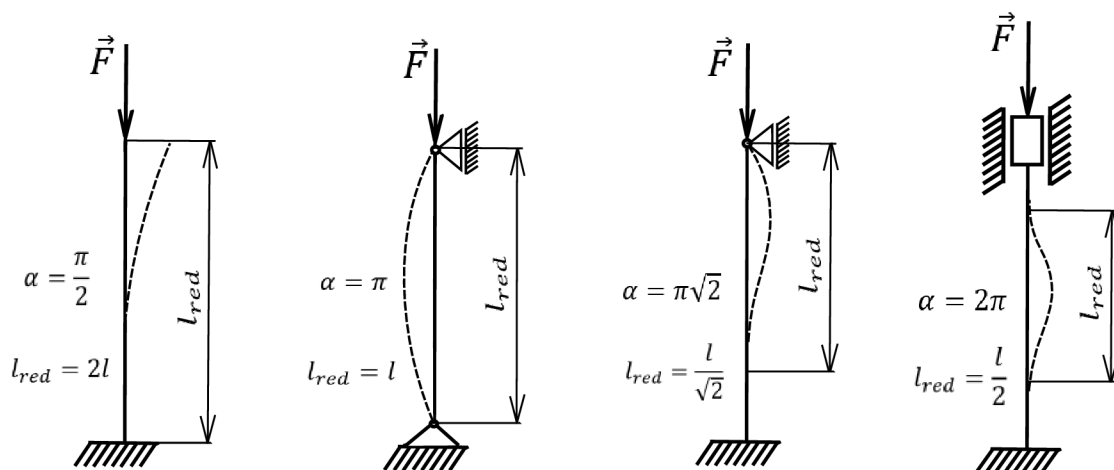
Pro:  $\lambda > \lambda_K$  určíme kritickou sílu:

$$F_V = \frac{\alpha_V^2 EJ_2}{l^2} \quad (1.7)$$

A následně bezpečnost:

$$k_V = \frac{F_V}{|N|} \quad (1.8)$$

V druhém případě je nutné ještě určit konstantu uložení, protože pro různé typy uložení mohou být až šestnáctinásobně rozdílné kritické síly. Jednotlivé nákresy určují při určitém uložení konstantu  $\alpha_V$ . [1]



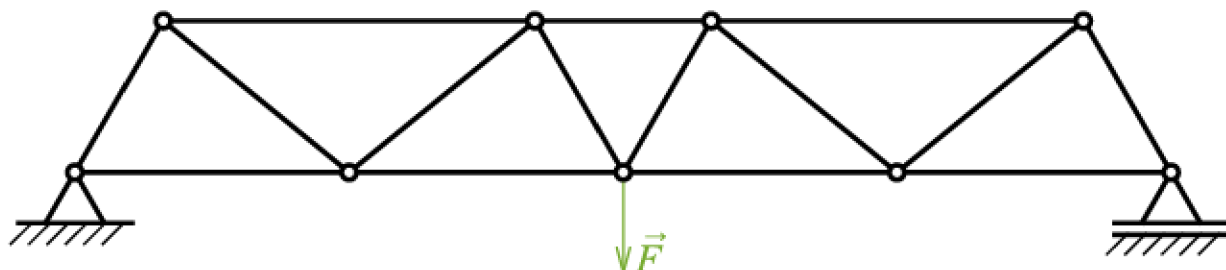
Obr. 1.5 Způsoby prohnutí prutů při různých typech vazeb

### 1.3 Prutová soustava

Ne vždy, když je spojeno více prutů, jde o prutovou soustavu. Soustavy dělíme na 3 druhy: soustavy prutů, soustavy prutů s tuhým tělesem a prutové soustavy. Prutové soustavy jsou jednoznačně charakterizovány souborem předpokladů:

- vazby jsou rotační kinematické dvojice,

- jednotlivá tělesa jsou buď pruty, nebo styčnicková tělesa,
- styčnickové těleso spojuje dva nebo více prutů,
- zatěžující síly působí pouze ve styčnicích,
- k základnímu tělesu je prutová soustava vázána sférickou nebo obecnou kinematickou dvojicí,
- soustava prutů vytváří nepohyblivé prutové těleso.



Obr. 1.6 Prutová soustava zatížena silou  $F$

### 1.3.1 Kinematický rozbor

Kinematickým rozбором určíme, jestli je soustava pohyblivá a popřípadě kolik má stupňů volnosti. Vztah pro určení kinematického rozboru:

$$i = n \cdot i_v - \left( \sum_{i=1}^m \xi_i - \eta \right) - \sum_{j=1}^k \delta_j \quad (1.9)$$

kde:  $n$  – počet těles,

$i_v$  – počet stupňů volnosti nezavazbeného tělesa (ve 3D  $i_v = 6$  °V),

$\xi_i$  – počet stupňů volnosti odebraný jednotlivými vazbami,

$\eta$  – počet omezených parametrů deformace,

$\delta_j$  – počet stupňů volnosti odpovídající degenerovaným členům (jejich volné rotace).

### 1.3.2 Statická určitost

Pro řešení prutové soustavy je nutné určit statickou určitost. U prutových soustav rozlišujeme vnitřní, vnější a celkovou statickou určitost. [2] Vnější statická určitost se vztahuje k určení vnějších stykových sil a je dána vztahem:

$$v = \mu_v \quad (1.10)$$

kde:  $v$  – je počet použitelných statických podmínek,

$\mu_v$  – je počet neznámých parametrů vnějších sil.

Soustava je staticky určitá, pokud je počet použitelných statických podmínek roven počtu neznámých parametrů.

Vnitřní statická určitost se vztahuje k určení sil v prutech. Uvolníme všechny pruty ve styčnicích a napíšeme všechny použitelné podmínky statické rovnováhy. Pak určíme tvar vnitřní statické určitosti. [2] Pro prostorovou prutovou soustavu:

$$3k - 6 = p \quad (1.11)$$

pro rovinnou prutovou soustavu:

$$2k - 3 = p \quad (1.12)$$

kde:  $k$  – počet styčníků,

$p$  – počet prutů.

### 1.3.3 Styčnicková metoda

Pokud vyhodnotíme prutovou soustavu staticky určitou, lze řešit styčnickovou metodou. Můžeme využít dvou postupů řešení: obecná styčnicková metoda a postupná styčnicková metoda. Obě metody spočívají v uvolňování styčníků a řešení lineárních rovnic. [2]

#### a) Obecná styčnicková metoda

Spočívá v uvolnění všech styčníků a sestavení  $k$  nim statických rovnic. Tyto rovnice můžeme zapsat do maticového tvaru a řešit lineární maticovou rovnicí ve tvaru:

$$A \cdot x = b \quad (1.13)$$

kde:  $A$  – je matice soustavy popisující prutovou soustavu geometricky,

$x$  – sloupcový vektor neznámých parametrů,

$b$  – sloupcový vektor úplně zadaných silových prvků.

Tato metoda je vhodná pro řešení v numerickém softwaru. Po vyřešení neznámých parametrů je nutné provést rozbor výsledku a vyhodnotit, zda jsou výsledky reálné. [2]

#### b) Postupná styčnicková metoda

Spočívá v uvolňování styčníků od určité vazby, ve které jsou maximálně dva neznámé parametry u rovinné a tři neznámé parametry u prostorové úlohy. Pro tento styčnick lze statickými rovnicemi vyřešit neznámé parametry. Dále se pokračuje na další styčnick ne libovolně, ale řešíme styčnick, kde jsou maximálně dva neznámé parametry u rovinné a tři neznámé parametry u prostorové úlohy. Tuto metodu je vhodné použít při řešení symetrických úloh. Ne vždy touto metodou je možné vyřešit úlohu, pak je nutné použít obecnou styčnickovou metodu. [2]

### 1.3.4 Řešení staticky neurčitých úloh

Pokud ze statického rozboru zjistíme, že prutová soustava je staticky neurčitá, nemůžeme použít metody řešení z předchozí kapitoly. V tomto případě musíme zjistit stupeň vnější statické neurčitosti:

$$s = \mu_v - v \quad (1.14)$$

Kolikrát je úloha staticky neurčitá, tolikrát je potřeba provést částečné uvolnění a tolik je potřeba určit deformačních podmínek. Deformační podmínky pak vyjadřují, že deformace jsou

vázány posuvem styčnicku. Pro částečné uvolnění se zpravidla volí prut s montážní vůlí nebo přesahem, či teplotní odlišností od ostatních prutů. [1]

Dále musíme určit stupeň vnitřní statické neurčitosti pro prostorovou úlohu:

$$s = p - 3k + 6 \quad (1.15)$$

anebo pro rovinnou úlohu:

$$s = p - 2k + 3 \quad (1.16)$$

Podle parametru  $s$  provedeme částečné uvolnění pro soustavu vazeb vnitřně staticky neurčité. To znamená uvolnění nadbytečného prutu ve styčnicku, zavedení normálové síly a sestavení deformační podmínky prutu ve vazbě. [1]

Pro řešení neurčitých soustav se využívá Maxwellova-Mohrova varianta Castiglianovy věty, kterou jsme schopni vyjádřit deformační podmínku v závislosti na známých parametrech a normálové síle uvolněného prutu. Pro dosazení do rovnice je nutné sestavení rovnic rovnováhy sil ve styčnicku, následně vyjádření všech neznámých normálových sil, které nejsou uvolněny. Matematicky formulujeme podmínku pro uvolněný prut takto:

$$u_{N_1^c} = \frac{\partial W}{\partial N_1^c} = \sum_{i=1}^m \frac{N_i L_i}{E S_i} \frac{\partial N_i}{\partial N_1^c} = \Delta \quad (1.17)$$

Tuto rovnici vytvoříme tolikrát, jaký je stupeň statické neurčitosti. Získáme soustavu  $x$  rovnic o  $x$  neznámých, kterou jsme schopni numericky vyřešit ve výpočetním programu.  $\Delta$  je příslušná hodnota posuvu ve směru síly, podle které derivujeme. Obvykle se pro řešení prutových soustav rovná 0. [1]

#### 1.4 Srovnání modelu s realitou

V první řadě u příhradových konstrukcí nejsou v realitě ve styčnicích kloubové spoje bez tření. V realitě jsou pruty spojené nýty, svary nebo šroubovými spoji, proto se v těchto případech nebude jednat o kloubové spoje. Ale pokud je ohybová tuhost výrazně menší než osová, pak natočení výrazně neovlivňuje způsob řešení.

Další odchylkou od reality je materiál prutů. V praxi nelze dosáhnout homogenního materiálu po celé jeho délce. V materiálu se vyskytují vady, mikrotrhliny a staženiny způsobené výrobou. Těmto nedokonalostem se nedá vyhnout, ale mohou být zahrnuty ve vlastnostech daného materiálu.

Dalším aspektem může být volba okrajových podmínek (vazeb, zatížení). Ne vždy můžeme vytvořit vazební podmínky tak, aby odpovídaly skutečnému řešení a zároveň je byl schopen numerický software zpracovat.

## 2. ZÁKLADNÍ INFORMACE O MOSTU

*Tato kapitola byla vypracována na základě údajů uvedených ve zdroji [3], pokud není uvedeno jinak.*

V roce 1866 bylo rozhodnuto vybudovat železniční trať spojující Vídeň s Brnem. Tato trasa byla z hlediska provádění staveb velice náročná. Trať vedla členitým terénem, kde bylo potřeba vybudovat řadu mostů a tunelů. Celá trať byla vybudována jako dvoukolejná až na most přes řeku Jihlavu, který byl navržen jako jednokolejný. Do té doby na území Rakouska-Uherska ještě nikdo nenavrhol takto velký most, proto se projektanti nové železnice nechali inspirovat mosty ve Španělsku, Anglii a Francii.

Ve hře o typ mostu byly diskutovány kamenný, kombinace kamenného a železného a železný. Nakonec zejména z časových a cenových důvodů vyhrál návrh železného mostu. Projekt mostu byl zpracován v roce 1868 Karlem von Ruppertem a obsahoval statický výpočet, posouzení všech částí konstrukce a grafické rozdělení materiálu hlavních nosníků. Výpočet vycházel z početního řešení Clapeyronovou (třímomentovou) metodou a obsahoval vykreslení obalové křivky maximálních ohybových momentů. Početně byla řešena i vzpěrná únosnost prvků.

Most se dostal do provozu roku 1870, kdy šéf konstrukční kanceláře předával most s dvěma zásadními kritickými připomínkami. První se týkala metody montáže a jejího vlivu na namáhání konstrukce a druhá se týkala nevhodnosti uložení konstrukce na celé šířce pilířové hlavy. Už po deseti letech se zjistily až několikacentimetrové trhliny na litinových konstrukcích pilířů. Za příčinu se považovaly otřesy konstrukce vyvolané tvrdým uložením kolejí a také účinky mrazu. Později se ukázalo, že výraznému vzniku trhlin přispěly lokální vady materiálu při lití trub ve vodorovné poloze. Proto roku 1889 byly litinové pilíře vyměněny za pilíře ze svářkového železa.

Během další let proběhlo několik menších oprav především z důvodu nízké jakosti materiálů. Most fungoval nepřetržitě do roku 1966, kdy došlo k roztržení kamenných úložných kvádrů pod pevnými ložisky. Roztržení kvádrů způsobilo narůstající vodorovné zatížení dilatačními pohyby nosné konstrukce při nesprávné funkci pohyblivých ložisek. Brněnská opěra byla opravena pomocí ocelových rámců a táhel. Následně začaly přípravné práce projektu nového betonového mostu, který ho nahradil.

Podle zpracovaného projektu měl být starý most zlikvidován. Již v průběhu přípravných prací byly snahy o zachování mostu jako technické památky. Tyto snahy nakonec dosáhly jen částečného vítězství. Při stavbě nového mostu docházelo ke ztrátě stability svahu a podloží základů, proto se začaly projevovat ztráty stability a most se dostával do havarijního stavu. V roce 1999 byla velká část mostu demontována a zůstalo jen torzo po první pilíř. Tato část do současnosti podstupuje pravidelnou kontrolu, zatím ale nebyl schválen žádný projekt pro vhodné využití zbylé části mostu. Doposud zůstává turistickou atrakcí pro nadšence technických památek.



Obr. 2.1 Dobové foto celého Ivančického viaduktu [4]

## 2.1 Základní technické údaje

Jedná se o příhradovou železnou konstrukci. Celková délka spojitě konstrukce je 373,5 m. Mostovka je podepřena pěti pilíři, které rozdělují mostovku po 60 m. Pilíře jsou složeny z příhradových, přímopásových, dvojnásobně ztužených soustav. Hlavní nosníky pilíře jsou vzdáleny 3600 mm a maximální výška příhrady je 5640 mm. Největší výška mostu je 44 m nad údolím.

Konstrukce mostu byla navržena na nahodilé zatížení 4000 kg/m. Na výrobu konstrukce bylo spotřebováno 1 238 tun svářkového železa a 296 tun litiny, její část byla později vyměněna za svářkové železo.

## 2.2 Montáž mostu

Za zmínku také stojí, jakým způsobem byla celá konstrukce montována. Způsob udivuje jednoduchostí, rychlostí a malou náročností. Most byl sestavován na hrušovanské základně. Postupně snýtovaná konstrukce byla po etapách vysouvána, a to pouze za použití kladek, lana a navijáku. Před opěrou byla sestavena asi 60 m konstrukce, kterou byla následně vysunuta k pilíři. Vysouvání část byla podpírána pomocí dřevěného pilíře. Ve třetí poslední etapě vysouvání musela být soustava lan a kladek zdvojená a za spolupráce 36 dělníků bylo vysunuto 635 tun železa o 56 m. Vlastní vysouvání konstrukce probíhalo rychlostí asi 2 m za hodinu.



Obr. 2.2 Historická fotografie ze stavby mostu [5]

Dalším inovativním způsobem montáže byla výměna litinových pilířů za pilíře z válcovaných profilů ze svářkového železa. Současně s rekonstrukcí pilířů se také změnilo uložení konstrukce. Hlavní nosníky uloženy byly na všech pilířích vyměněny za jednobodová pohyblivá válcová ložiska. Pevné ložisko bylo uloženo na brněnskou opěru a celá mostní konstrukce se mohla pohybovat vlivem tepelných rozdílů směrem k hrušovanské opěře. Po výměně pilířů bylo nutné konstrukci vážící 1043 tun přesunout o 600 mm na nová ložiska. Mechanicky to nešlo, proto bylo využito teplotních rozdílů mezi dnem a nocí. Tedy v noci v době nejnižší teploty byl zafixován most na jedné straně a na druhé straně se vlivem změny teploty protáhnul. Ve dne byla zafixována druhá strana. Tímto způsobem dosedla konstrukce na nová ložiska za 10 dní. [4]

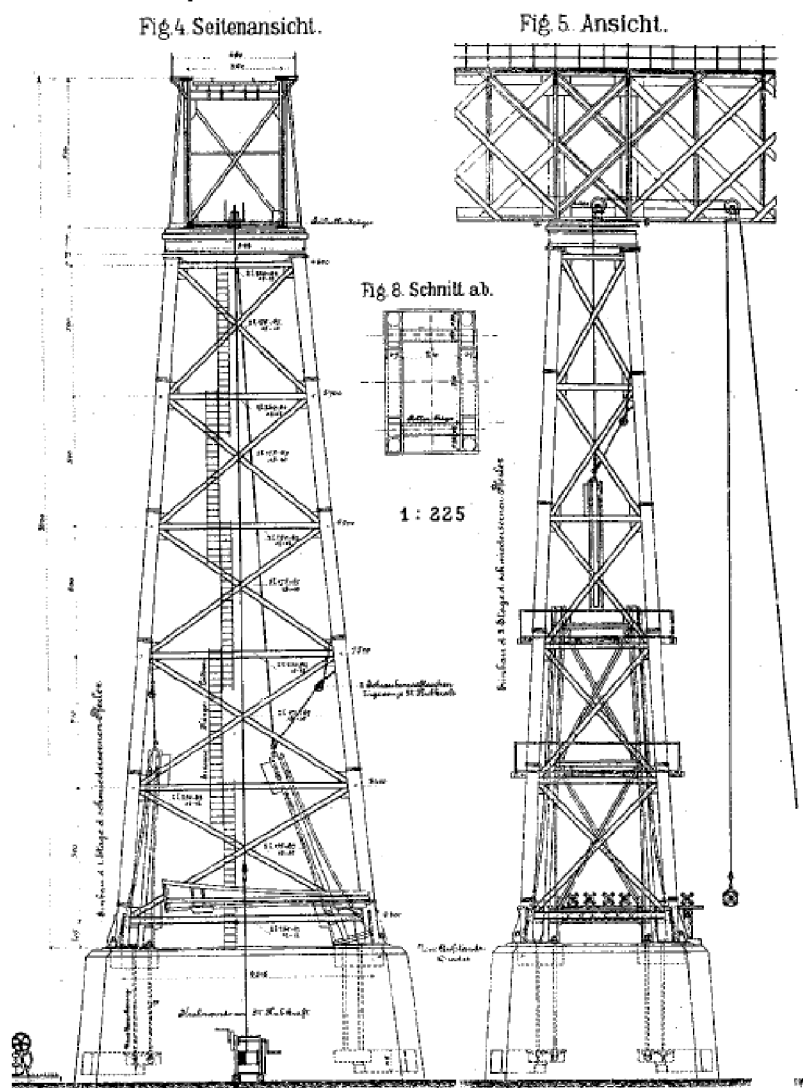
### 2.3 Clayperova třímomentová metoda

Jedná se o silovou metodu, která volí za staticky neurčité veličiny spojitého nosníku podporové momenty. Tato metoda při stanovení deformačních podmínek vychází z ohybové čáry spojitého nosníku, která je po celé jeho délce spojitá. Při určování deformačních podmínek pracuje s momentem ve styčnicku a s jeho natočením. Pro vetknutý nosník přidá před vetknutí tzv. nulové pole, které je nezátížené a dokonale neohebné. [6]



### 3. CHARAKTERISTIKA ŘEŠENÉ SOUSTAVY

V této práci jsme se zabývali řešením napjatostní analýzy pouze pátého pilíře, který jako jediný ještě stojí viz Obr. 3.1. Pro řešení úlohy bylo potřeba udělat pár zjednodušení oproti realitě, například některé průřezy nejsou homogenní po celé jejich délce. Spousta prutů je v místě spojů vyztužena dalšími profily, které by se jen složitě zahrnovaly do řešení danou metodou. Pilíř je řešen jako prostorová příhradová konstrukce.



Obr. 3.1 Výkres řešeného pilíře

Řešení bude mít několik částí:

- řešení staticky neurčité soustavy se zatížením pilíře vlakovou soupravou a mostovkou (Varianta zatížení č. 1),
- řešení staticky neurčité soustavy s Variantou zatížení č. 1 a zatížením pilíře vlivem teploty, které vytvoří boční sílu na nejvyšší styčníky pilíře (varianta zatížení č. 2).

#### 3.1 Informace k ocelovému pilíři

Pilíř je tvořen prostorovou ocelovou příhradovou konstrukcí s obdélníkovým půdorysem, která se kónicky zužuje k vrcholu. Pilíř je zakotven do betonové pátky. Konstrukce je vertikálně

rozdělena na 5 příhrad. Ve vrcholu je konstrukce zakončena hlavou o rozměrech 1,6 x 3,6 m. Mostovka přenáší zatížení na pilíře přes dvě válečková ložiska. Pod každým ložiskem je nosníková konstrukce (truhlík) vymežující pohyb ložiska viz Obr. 3.2.



Obr. 3.2 Detail uložení skutečného stavu mostu



Obr. 3.3 Detail vetknutí mostu

- Pruty spodní podstav – I profil výšky 500 mm snýtované z pásnic tl. 13 mm a úhelníků L 70x70x9 mm (příhradový nosník)
- Pruty dalších podstav I 220 (podle normalizovaných rozměrů)
- Hlava – truhlík z I-profilu a dvou U-profilu výšky 770 mm, v příčném směru truhlík propojen I-profilem 770 mm
- Diagonály mezi podstavami-zdvojené profily 2x L 80x80x10 mm
- Diagonály a příčnice uprostřed podstav L 70x70x9 mm
- Vertikální pruty – snýtované několik L profilů a pásnic (budeme uvažovat jako jeden profil)

### 3.2 Spojení jednotlivých prutů

Všechny profily jsou spojeny nýtovými spoji, takže nesplňují předpoklad možnosti natočení styčnicku. Většinou jsou jednotlivé profily spojeny přes styčnickový plech několika nýty. Tyto desky byly v modelu nahrazeny styčnickami. Spousta profilů je vyztužena v některých jejich částech nebo po celé délce. Například svislé profily jsou snýtované z několika pásnic, I–profilů

a L – profilů. Všechny tyto složené pruty byly pro potřeby výpočtů v této práci nahrazeny jediným celistvým prutem s odpovídající plochou příčného průřezu.

### 3.3 Převod na prutovou konstrukci

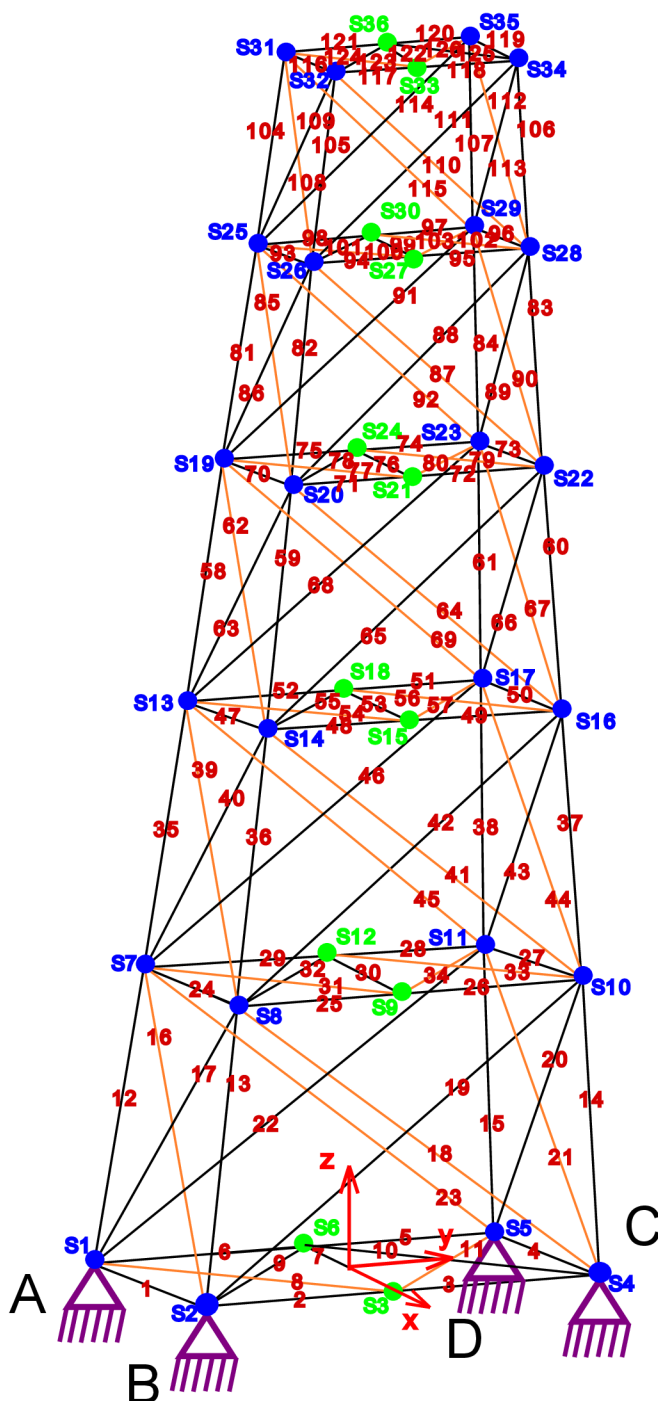
#### 3.3.1 Upravení modelu prutové konstrukce

Pro řešení úlohy bylo potřeba popsat několik věcí, které jsme uvažovali při výpočtu. Tyto změny oproti realitě jsou nezbytné k úspěšnému vyřešení úlohy.

1. Vertikální profily budeme uvažovat s konstantním průřezem po celé jejich délce.
2. Spoje mezi některými pruty jsou ve skutečnosti pevné, to by porušovalo podmínky prutové soustavy a vyžadovalo by zahrnout do výpočtu také vliv ohybových momentů, které lze, vzhledem k charakteru řešené soustavy, považovat za zanedbatelné. Z tohoto důvodu budou snýtované spoje ve výpočtovém modelu nahrazeny rotačními kinematickými dvojicemi.
3. Vazby k základnímu tělesu nebyly uvažovány jako vetknutí, ale jako rotační prostorové vazby. Nutné pro řešení prutových soustav.
4. Zatěžující síly působí pouze ve styčnicích nejvyšší podstavky. Jak lze vidět na Obr. 3.2, nosník pod ložisky se neopírá o horizontální prut.
5. Střednice jsme uvažovali stejně, jak je znázorněno ve výkresových přílohách. K nim se také vázaly všechny potřebné rozměry modelu.

#### 3.3.2 CAD model pro analytické a numerické řešení

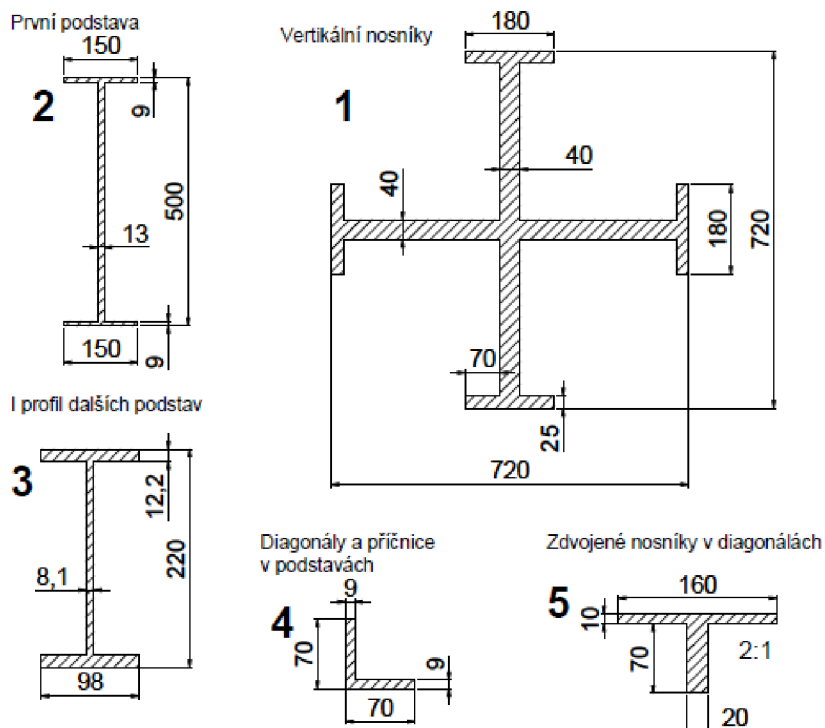
Pro prutovou soustavu bylo zavedeno značení jednotlivých styčniců velkým písmenem S a za ním indexem s pořadím styčniců čísla 1–36 a jednotlivých prutů čísla 1–126. Pruty lze rozdělit na horizontální, vertikální (i když nejsou zcela svislé, budeme je takto označovat) a diagonální. Rotační vazby jsou uvažovány ve styčnicích S1, S2, S4, S5. Na Obr. 3.4. je znázorněna soustava, jak budeme primárně řešit, kde jsou oranžově znázorněny pruty, které budou částečně uvolněny. Je vhodné vybrat jeden z prutů, který se kříží. Lze si všimnout analogie výběru částečně uvolněných prutů v jednotlivých částech pilíře.



Obr. 3.4 Rozbor prutové soustavy staticky neurčitého pilíře

### 3.4 Určení příčných průřezů a materiálové charakteristiky

Pro pilíř bylo použito pět druhů průřezů zobrazené a zakótované na Obr. 3.5. Pouze nosník I200 je normalizovaným průřezem. Ostatní průřezy jsou snýtovány z několika normalizovaných pásnic a L profilů. Tyto rozměry jsme využili v numerickém i analytickém řešení. V průřezích zanedbáváme zaoblení a zkosení v rozích. Protože u druhého typu průřezu se jedná o příhradový nosník, vytvořili jsme průřez, který nahradí skutečný tvar.



Obr. 3.5 Typy použitých příčných průřezů

Jako materiál nosníků byla použita svařková ocel, která je obdobou současné uhlíkové oceli. Hlavní rozdíl je v mezích pevnosti. Důležité vlastnosti pro náš výpočet jsou znázorněny v Tab. 3.1.

Tab. 3.1 Vlastnosti oceli řešeného pilíře [7]

Svařková ocel		
Vlastnost	Značení	Hodnota
Mez pevnosti	$R_m$	330–400 MPa
Mez kluzu	$\sigma_K$	200–240 MPa
Tažnost	A	12–25 %
Modul pružnosti	E	210 GPa
Poissonova konstanta	$\mu$	0,33
Součinitel teplotní délkové roztažnosti	$\alpha$	$1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

Tab. 3.2 popisuje průřezové charakteristiky použité v prutové soustavě. Typy průřezů určují tvar průřezu podle Obr. 3.5. Z délky, plochy příčného průřezu a kvadratického momentu jsme dopočítali štíhlost prutu. Štíhlost prutu jsme porovnali s kritickou štíhlostí prutu. Pruty s vyšší hodnotou koeficientu bylo nutné řešit k meznímu stavu vzpěrné stability (hodnoty označeny v Tab. 3.2 žlutě). V následující rovnici je vypočtena kritická štíhlost prutu z materiálových charakteristik.

$$\lambda_K = \alpha_V \sqrt{\frac{E}{\sigma_K}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{(210 \cdot 10^9 \text{ Pa})}{(220 \cdot 10^6 \text{ Pa})}} = 97 [-] \quad (3.1)$$

Tab. 3.2 Tabulka průřezových charakteristik jednotlivých prutů

Průřezové charakteristiky					
typ průřezu	čísla prutů	délka prutu	plocha příčného průřezu	kvadratický moment	štíhlost prutu
		L [mm]	S [mm <sup>2</sup> ]	J [mm <sup>4</sup> ]	λ [-]
1	12, 13, 14, 15	5 729	56 400	1 064 045 000	41,71
	35, 36, 37, 38	5 226	56 400	1 064 045 000	38,05
	58, 59, 60, 61	4 724	56 400	1 064 045 000	34,39
	81, 82, 83, 84	4 221	56 400	1 064 045 000	30,73
	104, 105, 106, 107	3 719	56 400	1 064 045 000	27,08
2	1, 4	3 913	8 966	5 150 746	163,26
	2,3,5,6	3 920	8 966	5 150 746	163,55
3	24, 27	3 363	3 976	1 922 420	152,93
	47, 50	2 861	3 976	1 922 420	130,11
	70, 73	2 408	3 976	1 922 420	109,50
	93, 96	2 003	3 976	1 922 420	91,09
	116, 119	1 646	3 976	1 922 420	74,85
3	25, 26, 28, 29	3 416	3 976	1 922 420	155,34
	48, 49, 51, 52	2 956	3 976	1 922 420	134,43
	71, 72, 74, 75	2 541	3 976	1 922 420	115,55
	94, 95, 97, 98	2 169	3 976	1 922 420	98,64
	117, 118, 120, 121	1 842	3 976	1 922 420	83,77
4	7	3 913	1 179	220 692	286,00
	30	3 363	1 179	220 692	245,80
	53	2 861	1 179	220 692	209,11
	76	2 408	1 179	220 692	176,00
	99	2 003	1 179	220 692	146,40
	122	1 646	1 179	220 692	120,31
4	8, 9, 10, 11	5 539	1 179	220 692	404,85
	31, 32, 33, 34	4 794	1 179	220 692	350,40
	54, 55, 56, 57	4 114	1 179	220 692	300,70
	77, 78, 79, 80	3 500	1 179	220 692	255,82
	100, 101, 102, 103	2 952	1 179	220 692	215,76
	123, 124, 125, 126	2 470	1 179	220 692	180,53
5	18, 19, 22, 23	9 302	3 000	1 779 667	381,92
	41, 42, 45, 46	8 229	3 000	1 779 667	337,86
	64, 65, 68, 69	7 236	3 000	1 779 667	297,09
	87, 88, 91, 92	6 314	3 000	1 779 667	259,24
	110, 111, 114, 115	5 460	3 000	1 779 667	224,17
5	16, 17, 20, 21	6 781	3 000	1 779 667	278,41
	39, 40, 43, 44	6 078	3 000	1 779 667	249,55
	62, 63, 66, 67	5 404	3 000	1 779 667	221,87
	85, 86, 89, 90	4 758	3 000	1 779 667	195,35
	108, 109, 112, 113	4 138	3 000	1 779 667	169,90

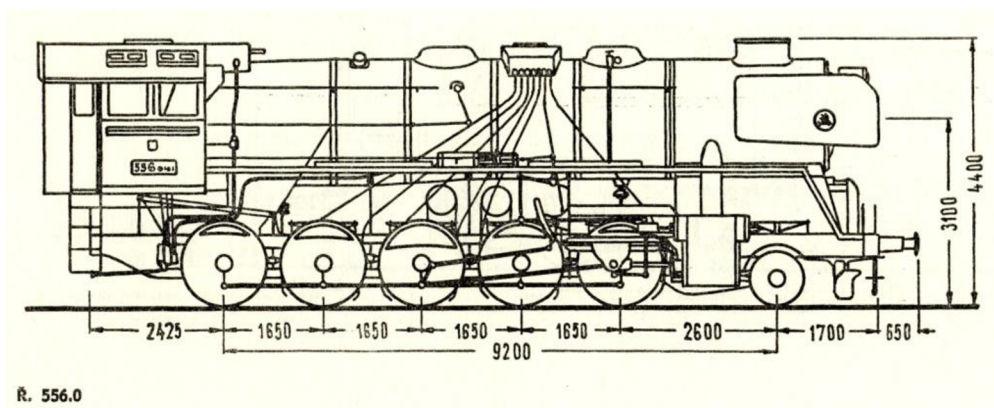


### 3.5 Zatěžující vlaková souprava

Po mostě za celou dobu fungování jezdilo přes dvacet druhů lokomotiv, nejprve parních a následně i spalovacích. Pro tuto práci byla vybrána zatěžující vlaková souprava obsahující parní lokomotivu 556.0 zvanou „Štokr“, tendry řady 935.2 a nákladní vagóny „Faccs“, především proto, že jezdily několik let a jedná se o jedny z nejtěžších souprav, co po mostě jezdily.

#### Lokomotiva řady 556.0

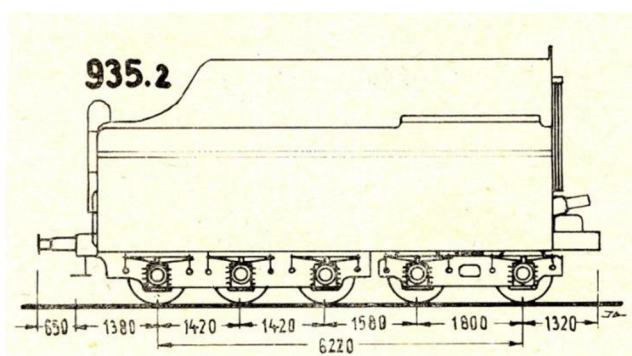
- Rok výroby – 1952
- Hmotnost – 99 tun
- Nápravové tlaky dvojkolí – 16,8 MPa



Obr. 3.6 Nákres lokomotivy použité ve výpočtu [8]

#### tendry řady 935.2

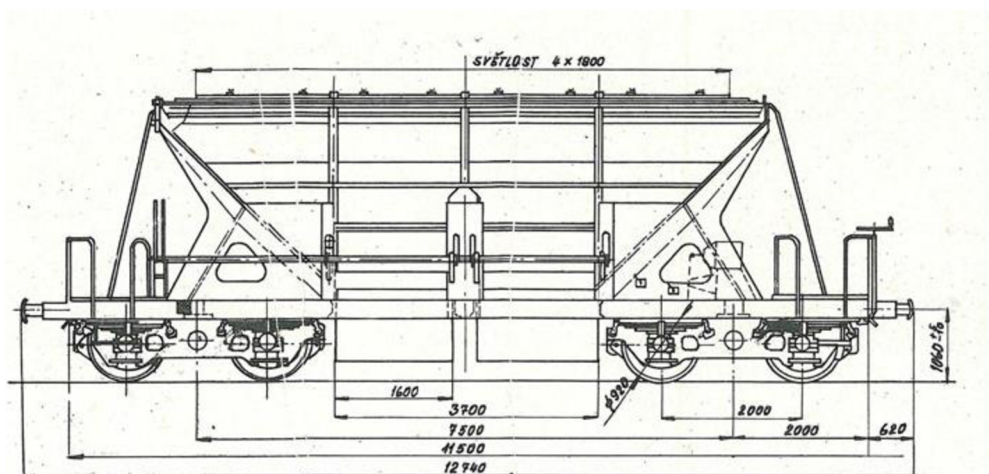
- Hmotnost ve službě – 80,8 tun
- Nápravové tlaky 1. a 2. dvojkolí – 16,7 MPa
- Nápravové tlaky 3.-5. dvojkolí – 15,8 MPa



Obr. 3.7 Nákres tendru použitého při výpočtu [8]

## nákladní vagóny Faccs

- Hmotnost ve službě – 45 tun



Obr. 3.8 Náčrtes nákladního vagónu použitého při výpočtu [9]

## 3.6 Model zatížení

Oba modely zatížení jsou od sebe rozdílné pouze způsobem zatížení, tedy všechny kroky, které jsou popsány ve variantě č. 1, se shodují pro obě varianty zatížení.

### 3.6.1 Varianta zatížení č. 1

Pilíř musí unést zatížení 1/6 mostovky, což činí 62,7 m mostovky. Na tuto délku se vejde lokomotiva s tendrem a tři nákladní vagóny. Pokud bychom uvažovali tender s vagóny plně naložené, celkové zatížení od vlakové soupravy by odpovídalo 314,8 tun. Celá mostovka vážila 1 238 tun viz kapitola „Základní informace o mostu“, jedna šestina odpovídá 206,3 tun. Tedy zatížení na jeden pilíř vychází na 521,1 tun, které se rozloží do čtyř styčníků.

Při tomto zatížení má pilíř dvě roviny symetrie. Tudíž můžeme očekávat stejné normálové síly v jednotlivých prutech, zrcadlově vůči těmto rovinám symetrie.  $F_c$  znázorňuje celkovou sílu působící na pilíř:

$$F_c = m \cdot g = (521,1 \cdot 10^3 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) = 5112 \text{ kN} \quad (3.2)$$

kde:  $g$  – gravitační konstanta,

$m$  – hmotnost zatěžující pilíř.

A následně dopočítaná síla na jednotlivé styčnícíky  $F_i$ :

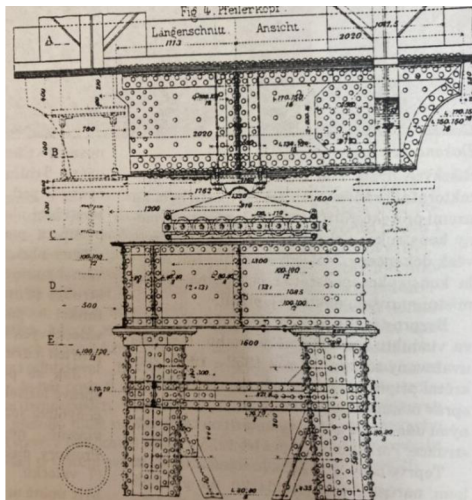
$$F_i = \frac{F_c}{4} = \frac{(5112 \text{ kN})}{4} = 1278 \text{ kN} \quad (3.3)$$

### 3.6.2 Varianta zatížení č. 2

Tato varianta je založena na určitém druhu závady, který byl dohledán ve zdrojích o mostu. Ke konci života mostu se na brněnské betonové opěře vyskytla trhlinka. Po prošetření příčiny se došlo k závěru, že prasklina vznikla z důvodu zanesení ložisek mezi opěrou a mostovkou a pilíři a mostovkou. Zanesení ložisek zapříčinilo jejich nepohyblivost, která vedla k napětí



v mostovce a k přenášení sil vlivem teplotní roztažnosti mostovky. Detail z výkresu ložisek je zobrazen na Obr. 3.9.



Obr. 3.9 Detail výkresu válečkového uložení

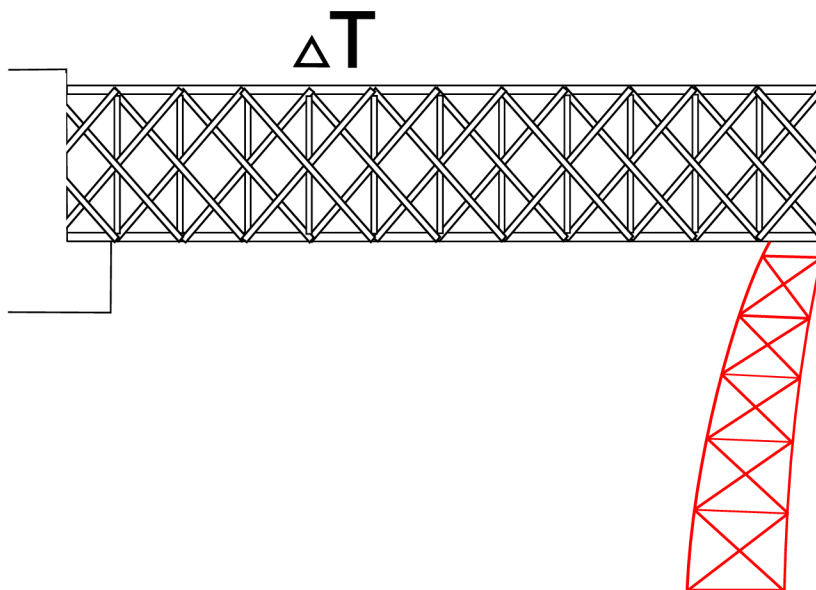
Z předpokladu nepohyblivosti ložisek jsme vytvořili model zatížení. Protože nejsme schopni určit sílu, která by popisovala vhodně realitu, rozhodli jsme se zvolit popis zatížení pomocí délkového prodloužení mostovky znázorněné v rovnici:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \alpha \cdot \Delta T \cdot L = (1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}) \cdot (15 \text{ }^\circ\text{C}) \cdot (62,7 \text{ m}) \\ &= 11,3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde:  $\alpha$  – součinitel teplotní délkové roztažnosti (pro ocel),

$L$  – délka mostovky mezi mostovkou a prvním pilířem,

$\Delta T$  – rozptyl teplot (největší vzdálenost od střední teploty) volíme 15 °C.



Obr. 3.10 Schématické zobrazení druhého typu zatížení

## 4. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

### 4.1 Kinematický a statický rozbor

Pro řešenou soustavu bylo vhodné nejprve provést statický rozbor a až po něm kinematický rozbor, jelikož stupeň statické neurčitosti získaný ze statického rozboru určuje počet omezených deformačních parametrů, jež vystupuje v kinematickém rozboru.

**Vnější statický rozbor:**

$$\begin{aligned} NP &= \{F_{AX}, F_{AY}, F_{AZ}, F_{BX}, F_{BY}, F_{BZ}, F_{CX}, F_{CY}, F_{CZ}, F_{DX}, F_{DY}, F_{DZ}, \} \\ \mu &= 12 \\ \nu &= 6 \\ s_e &= \mu - \nu = 12 - 6 = 6 \end{aligned} \quad (4.1)$$

**Vnitřní statický rozbor:**

Z hlediska silového působení se v řešené soustavě vyskytují dva různé typy styčnicků, které jsou na Obr. 3.4 rozlišeny modrou a zelenou barvou. Na modré styčnický, kterých je celkem  $k_m = 24$ , působí centrální prostorové silové soustavy, pro které lze sestavit 3 použitelné rovnice rovnováhy. Naproti tomu  $k_z = 12$  zelených styčnicků je zatíženo centrálními rovinnými soustavami (jelikož neuvažujeme zatížení ve svislém směru), a proto máme pro každý z nich k dispozici pouze 2 použitelné rovnice rovnováhy. Na základě těchto poznatků lze tedy stupeň vnitřní statické neurčitosti vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} s_i &= p - (3 \cdot k_m + 2 \cdot k_z) + 6 = 126 - (3 \cdot 24 + 2 \cdot 12) + 6 \\ &= 36 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Z toho plyne, že jsme museli částečně uvolnit 36 prutů (vhodně vybraných) a dále 6 složek posuvů (z celkových 12), které zamezují vazby A, B, C, D.

**Kinematický rozbor:**

Kinematický rozbor je poněkud komplikován prostorovostí řešené soustavy, její statickou neurčitostí a také přítomností styčnicků, které představují tzv. degenerované členy. Tato degenerovanost je dána tím, že styčnický sice lze při rozboru považovat za samostatná tělesa, avšak z praktického hlediska nemá význam uvažovat jejich 3 nezávislé rotace. Tyto rotace nezpůsobí žádný pohyb prutů, které jsou daným styčnickem vázány, a nezmění ani rozložení sil v soustavě. Z praktického hlediska jsou tedy nepodstatné, a proto je ve staticce odečítáme od celkového počtu stupňů volnosti viz rovnice (1.9). Obdobným způsobem je v našem případě nutné odečíst také rotace všech prutů kolem jejich osy, které taktéž z praktického hlediska nemají význam. Dále je třeba mít na paměti, že každá z vazeb (jak k okolí, tak mezi pruty a styčnický) sice odebírá příslušný počet stupňů volnosti, avšak vzhledem ke statické neurčitosti soustavy některé z těchto vazeb omezují deformaci soustavy. Celkový počet těchto omezených deformačních parametrů je dán stupněm statické neurčitosti soustavy a do kinematického rozboru je nutné jej zahrnout podle rovnice (1.9).

S uvážením těchto poznatků tedy můžeme počet stupňů volnosti celé soustavy určit tak, že nejprve budeme uvažovat pro každé těleso (prut i styčnický) 6 stupňů volnosti, následně od celkového počtu stupňů volnosti soustavy odečteme počet deformací neomezujících stupňů

volnosti odebraných vazbami (člen v závorce v rovnici (4.9)) a nakonec odečteme všechny degenerované stupně volnosti.

$$\xi_{vazby} = 4 \cdot 3 = 12 \quad (4.3)$$

$$\xi_{h+d} = 2 \cdot (4 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3) = 204 \quad (4.4)$$

$$\xi_{stř} = (4 \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 4 = 552 \quad (4.5)$$

$$\eta = s_e + s_i = 6 + 36 = 42 \quad (4.6)$$

$$\delta_{pruty} = 1 \cdot p = 1 \cdot 126 = 126 \quad (4.7)$$

$$\delta_{styčnický} = 3 \cdot (k_m + k_z) = 3 \cdot 36 = 108 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} i &= n \cdot i_v - \left( \sum_{i=1}^m \xi_i - \eta \right) - \sum_{j=1}^k \delta_j \\ &= (p + k_m + k_z) \cdot i_v - (\xi_{h+d} + \xi_{stř} + \xi_{vazby} - \eta) \\ &\quad - (\delta_{pruty} + \delta_{styčnický}) \\ &= (126 + 36) \cdot 6 - (204 + 552 + 12 - 42) \\ &\quad - (126 + 108) = 12 \text{ °V} \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde:  $p$ – počet prutů soustavy,

$k_m$ – styčnický, na které působí centrálně prostorové silové soustavy,

$k_z$ – styčnický, na které působí centrálně rovinné silové soustavy,

$i_v$ – počet stupňů volnosti nezavazbeného tělesa,

$\xi_{vazby}$ – počet odebraných stupňů volnosti vazbami k základnímu tělesu,

$\xi_{stř}$ – počet stupňů volnosti odebraných vazbami mimo vrchní a spodní podstavu,

$\xi_{h+d}$ – počet stupňů volnosti odebraných vazbami ve vrchní a spodní podstavě,

$\eta$  – počet omezených parametrů deformace (v našem případě vychází ze stupně statické neurčitosti),

$\delta_{pruty}$  – degenerované členy prutů,

$\delta_{styčnický}$ – degenerované členy styčnicků.

Kinematický rozbor vychází 12 stupňů volnosti, což z formálního hlediska znamená, že se nejedná o prutovou soustavu. Posuv styčnicků nastává uprostřed jednotlivých podstav (zobrazených na Obr. 3.4 zeleně). Pokud nebudeme uvažovat vertikální zatěžující sílu v těchto styčnicích, bude soustava v rovnovážném stavu (přestože je soustava pohyblivá, pohyb nenastane). Nosníky pod ložisky jsou opřeny pouze o styčnický v rozích viz Obr. 3.2.

## 4.2 Částečné uvolnění

### Vnější částečné uvolnění

Prutovou soustavu jsme  $6 \times$  částečně uvolnili ve vazbách. Vazbu „A“ jsme částečně neuvolňovali, zbylé tři vazby jsme každou obecnou prostorovou rotační vazbu  $2 \times$  částečně uvolnili a nahradili jí obecnou vazbou, přičemž vazba „B“ a „C“ zamezuje pohybu ve směru osy  $y$  a vazba „D“ zamezuje v pohybu ve směru osy  $x$  viz Obr. 4.1. Posuvy styčnicků B, C, D ve směrech sil získaných částečným uvolněním musejí být nulové, a proto deformační podmínky musí mít tvar:

$$\frac{\partial W}{\partial F_{ex}} = 0 \quad (4.10)$$

kde:  $F_{ex} \in \{F_{bx}, F_{bz}, F_{cx}, F_{cz}, F_{dy}, F_{dz}\}$ .

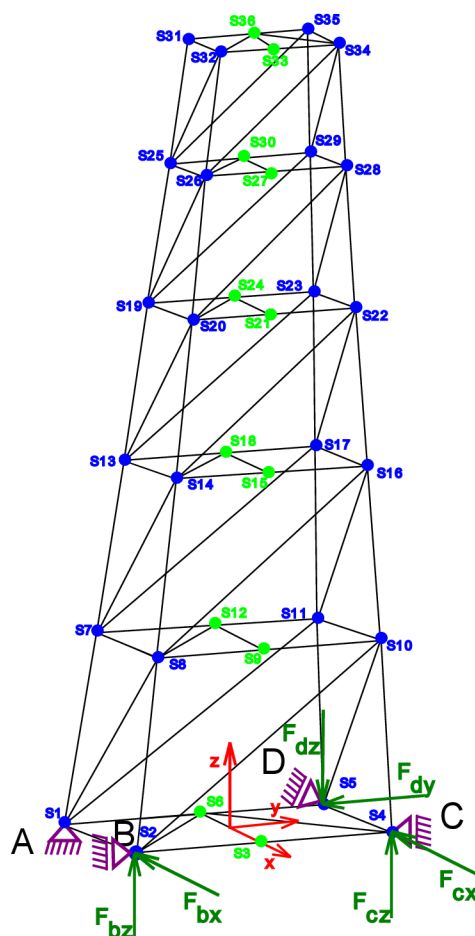
### Vnitřní částečné uvolnění

Soustava je  $36 \times$  vnitřně staticky neurčitá. Částečné uvolnění jsme provedli tak, že vhodně zvolených 36 prutů soustavy jsme odpojili na jednom konci ze styčnicku a takto uvolněnou vazbu jsme nahradili silovým působením. Bylo vhodné uvolnit pruty, které se kříží. Tímto způsobem jsme uvolnili pouze 32 prutů, proto zbylé 4 pruty jsme odstranili po jednom v podstavách daných úrovní. Uvolněné pruty jsou na Obr. 3.4 znázorněny oranžově. Deformační podmínky mají tvar:

$$\frac{\partial W}{\partial F_{in}} = 0 \quad (4.11)$$

kde:  $F_{in} \in \{N_8, N_{11}, N_{16}, N_{18}, N_{21}, N_{23}, N_{31}, N_{33}, N_{34}, N_{39}, N_{41}, N_{44}, N_{45}, N_{54}, N_{56}, N_{57}, N_{62}, N_{64}, N_{67}, N_{69}, N_{77}, N_{79}, N_{80}, N_{85}, N_{87}, N_{90}, N_{92}, N_{100}, N_{102}, N_{103}, N_{108}, N_{110}, N_{113}, N_{115}, N_{123}, N_{126}\}$ .

Deformační podmínky dle rovnice (4.10) a rovnice (4.11) dohromady tvoří  $6 + 36 = 42$  rovnic, které můžeme přidat k  $3k_m + 2k_z = 96$  použitelným rovnicím rovnováhy jednotlivých styčnicků. Získali jsme tak potřebnou soustavu  $42 + 96 = 138$  rovnic pro výpočet normálových sil  $N_1 \dots N_{126}$  a dvanácti stykových sil  $F_{ax} \dots F_{dz}$  ve vazbách A, B, C, D.



Obr. 4.1 Schéma částečného uvolnění vnějších vazeb

Na schématu je znázorněna soustava staticky určitá. Můžeme si představit, jak by se dolů posunovali zeleně naznačené styčníky, pokud by byly zatíženy vertikální silou.

### 4.3 Postup řešení

#### 4.3.1 Sestavení rovnic rovnováhy

Pro výpočet neznámých parametrů je nejprve nutné uvolnit všech  $k = 36$  styčníků a sepsat pro ně všech 96 použitelných rovnic rovnováhy. Je zřejmé, že standardní „ruční“ sepisování rovnic rovnováhy by v tomto případě bylo velmi náročné a také náchylné na chyby, a to i přesto, že na některé styčníky působí prakticky stejné silové soustavy (stejný počet sil orientovaných ve stejných směrech, viz např. styčníky S7, S13, S19 a S25 na Obr. 3.4), což znamená, že rovnice rovnováhy těchto styčníků budou mít prakticky stejný tvar a budou se lišit jen čísly použitých normálových sil. Odvození rovnic je ale komplikováno prostorovostí soustavy, velkým počtem prutů stýkajících se v jednotlivých styčnicích a zejména pak tím, že soustava se směrem nahoru zužuje, což znamená, že některé pruty navázané na tentýž styčník spolu nesvírají pravý úhel. Za účelem zjednodušení celého procesu a minimalizování rizika vzniku chyb, byl proto celý proces tvorby rovnic algoritmizován s využitím softwaru Matlab, který umožňuje definovat všechny neznámé parametry jako symbolické proměnné, zapsat pomocí nich rovnice rovnováhy a efektivně s nimi dále pracovat.

Prvním krokem byla definice matice souřadnic  $\mathbf{M}$  typu  $k \times 3$ , která v  $k$  řádcích pod sebou obsahuje souřadnice jednotlivých styčníků. Dále byla definována matice konektivity  $\mathbf{C}$  typu  $p \times 2$ , která v  $p$  řádcích obsahuje čísla koncových styčníků jednotlivých prutů. Poté byly vytvořeny sloupcové vektory  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{S}$  o délce  $p$ , které obsahují délky prutů a plochy jejich příčných průřezů. Délky prutů bylo možné snadno vypočítat pomocí cyklu „for“ s využitím matic  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{C}$ . Z matice konektivity  $\mathbf{C}$  je totiž možné pro každý prut zjistit čísla jeho koncových styčníků a z matice  $\mathbf{M}$  následně souřadnice těchto styčníků. Odečtením souřadnic styčníků získáme vektor spojující oba styčnický a velikost tohoto vektoru je rovna délce prutu.

Všechny normálové síly a stykové síly ve vazbách byly definovány jako symbolické proměnné. Pro zápis rovnic rovnováhy byla vytvořena symbolická matice  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  typu  $k \times 3$ , která zpočátku obsahovala pouze nuly a do jejích jednotlivých polí byly následně v naprogramovaném cyklu (viz Obr. 4.2) přičítány jednotlivé členy rovnic rovnováhy. Cílem celého procesu bylo, aby se na pozici  $(i, j)$  matice  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  nacházela kompletní rovnice rovnováhy  $i$ -tého styčnicku pro  $j$ -tý směr. Na rozdíl od běžného postupu sestavování rovnic rovnováhy, kdy se postupuje po styčnicích a pro každý uvolněný styčnick se všechny 3 rovnice rovnováhy sestaví najednou, bylo v tomto případě postupováno po jednotlivých prutech a celkem tedy cyklus obsahoval  $p$  opakování (viz Obr. 4.2). Na začátku cyklu byly nejprve s využitím matice  $\mathbf{C}$  identifikovány koncové styčnický prutu a jejich čísla byla uložena do proměnných  $s_1$  a  $s_2$ . Následně byl ve 3. řádku cyklu s využitím matice  $\mathbf{M}$  a vektoru  $\mathbf{L}$  vyjádřena veličina  $(\mathbf{M}(s_2, :) - \mathbf{M}(s_1, :))/\mathbf{L}(i)$ , což je jednotkový vektor vycházející od styčnicku  $s_1$  směrem k  $s_2$ . Tři čísla, která tento jednotkový vektor obsahuje, jsou jeho souřadnice ve směrech  $x, y, z$ . Pokud vezmeme např. první z těchto souřadnic a vynásobíme s ní proměnnou  $\mathbf{N}(i)$ , představující hledanou normálovou sílu v  $i$ -tém prutu, získáme jeden z členů rovnice rovnováhy pro styčnick  $s_1$  ve směru  $x$ . Tento člen představuje průmět síly  $\mathbf{N}(i)$  do směru  $x$  a musí být přičten do pole  $(s_1, 1)$  matice  $\mathbf{r}\mathbf{r}$ . Pro zbývající směry jsou rovnice modifikovány obdobně, a proto je v cyklu na Obr. 4.2 celý proces proveden najednou v rámci 3. řádku. Analogicky jsou ve 4. řádku modifikovány rovnice rovnováhy pro styčnick  $s_2$  daného prutu.

```

rr = sym(zeros(k,3)); % 'k' styčnicků a pro každý 3 r.r.

for i=1:p % cyklus doplní do r.r. POUZE normálové síly
    s1 = C(i,1); % 1. styčnick i-tého prutu
    s2 = C(i,2); % 2. styčnick i-tého prutu
    rr(s1,1:3) = rr(s1,1:3) + (M(s2,:) - M(s1, :))/L(i)*N(i);
    rr(s2,1:3) = rr(s2,1:3) + (M(s1,:) - M(s2, :))/L(i)*N(i);
end

```

Obr. 4.2 Výřez kódu analytického řešení

Po proběhnutí navrženého cyklu se v matici  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  nacházejí všechny členy rovnic rovnováhy obsahující normálové síly. Zbývá tedy už jen doplnit do příslušných polí stykové síly ve vazbách a zatěžující síly v horních styčnicích, což již nepředstavuje významnou komplikaci. V každém poli takto vytvořené matice  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  se poté nachází výraz, který je ještě nutné položit roven nule. Teprve tím jsou členy matice přeměněny na rovnice rovnováhy. Pro snazší manipulaci s rovnicemi byla nakonec matice  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  přeměněna na sloupcový vektor, z něhož bylo ještě odstraněno 12 řádků obsahujících nepoužitelné rovnice tvaru  $0 = 0$ , které představují rovnice rovnováhy zelených styčnicků ve směru osy  $z$ . V konečné podobě tedy vektor  $\mathbf{r}\mathbf{r}$  obsahoval  $3k_m + 2k_z = 96$  použitelných rovnic rovnováhy.



### 4.3.2 Vyjádření deformačních podmínek

Deformační podmínky dle rovnic (4.10) a (4.11), vyjádřené pomocí Castiglianovy věty, je nutné rozepsat podle rovnice (1.17), v níž se ovšem vyskytují parciální derivace normálových sil podle sil získaných částečným uvolněním soustavy. Pro výpočet těchto derivací je nejprve nutné vyjádřit všechny normálové síly pouze v závislosti na zadaném zatížení (v našem případě síla  $F$ ) a na silách z částečného uvolnění (v našem případě 6 stykových sil z vnějšího uvolnění a 36 normálových sil z vnitřního uvolnění). Toto vyjádření bylo provedeno pomocí příkazu „solve“ na základě rovnic připravených ve vektoru  $\mathbf{rr}$ . Následně již bylo možné použít opět cyklus „for“ pro výpočet parciálních derivací všech normálových sil podle sil z částečného uvolnění. Vypočítané hodnoty byly uloženy do matice  $\mathbf{dNdF}$  typu  $p \times s = 126 \times 42$ . Poté již bylo možné s využitím vektoru proměnných  $\mathbf{N}$  a číselných vektorů  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{S}$  rozepsat deformační podmínky dle rovnic (4.10) a (4.11) podle rovnice (1.17). Obecně pro  $j$ -tou deformační podmínku tak byla získána rovnice ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{N}(i) \cdot \mathbf{L}(i)}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}(i)} \mathbf{dNdF}(i, j) = 0 \quad (4.12)$$

kde  $\mathbf{dNdF}(i, j)$  je hodnota derivace  $i$ -té normálové síly podle  $j$ -té síly z částečného uvolnění. Připojením 42 rovnic získaných z (4.12) k původním 96 rovnicím rovnováhy ( $\mathbf{rr}$ ) byla získána finální soustava 138 rovnic pro výpočet 138 neznámých parametrů. Z těchto rovnic byla pomocí příkazu „equationsToMatrix“ vygenerována matice soustavy  $\mathbf{A}$  a vektor pravých stran  $\mathbf{b}$ , ze kterých již bylo možné vypočítat vektor neznámých sil.

### 4.4 Prezentace a rozbor výsledků

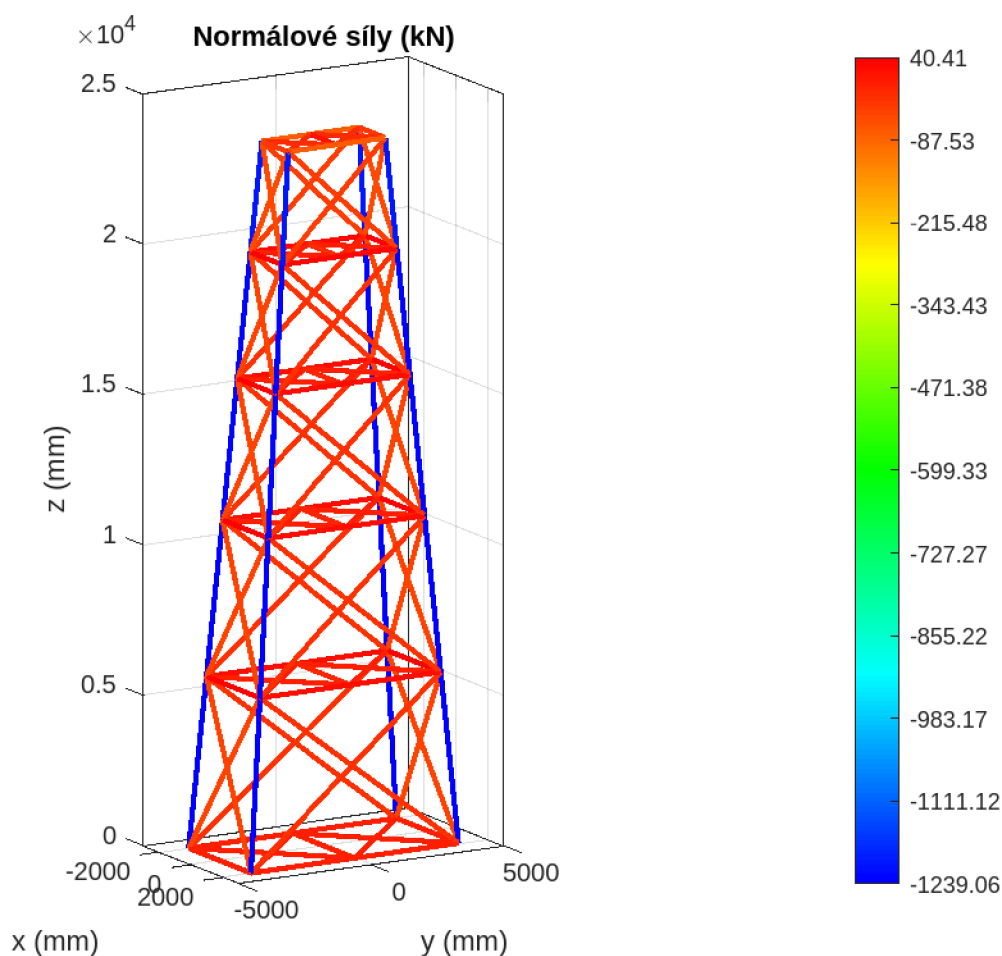
Analytickým modelem, který byl popsán v předchozí podkapitole, jsme byli schopni určit normálové síly v jednotlivých prutech a následně i velikosti napětí. Výsledky normálových sil byly sjednoceny do Tab. 4.1 po dvojicích sloupců, kdy vpravo je označení prutu „Č.“ a vlevo působící síla na daný prut „Síla [N]“.

Tab. 4.1 Výsledky normálových sil prutů analytického řešení

Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]
N1	0	N22	-19306	N43	-40961	N64	-18082	N85	-45352	N106	-1212435
N2	0	N23	-19306	N44	-40961	N65	-18082	N86	-45352	N107	-1212435
N3	0	N24	40414	N45	-16022	N66	-43295	N87	-17212	N108	-51381
N4	0	N25	24297	N46	-16022	N67	-43295	N88	-17212	N109	-51381
N5	0	N26	24297	N47	38705	N68	-18082	N89	-45352	N110	-37963
N6	0	N27	40414	N48	22644	N69	-18082	N90	-45352	N111	-37963
N7	0	N28	24297	N49	22644	N70	38725	N91	-17212	N112	-51381
N8	0	N29	24297	N50	38705	N71	23135	N92	-17212	N113	-51381
N9	0	N30	-6893	N51	22644	N72	23135	N93	39117	N114	-37963
N10	0	N31	4912	N52	22644	N73	38725	N94	34845	N115	-37963
N11	0	N32	4912	N53	-6498	N74	23135	N95	34845	N116	-29468
N12	-1236585	N33	4912	N54	4672	N75	23135	N96	39117	N117	-74632
N13	-1236585	N34	4912	N55	4672	N76	-6572	N97	34845	N118	-74632
N14	-1236585	N35	-1239064	N56	4672	N77	4777	N98	34845	N119	-29468
N15	-1236585	N36	-1239064	N57	4672	N78	4777	N99	-8528	N120	-74632

N16	-42586	N37	-1239064	N58	-1234815	N79	4777	N100	6286	N121	-74632
N17	-42586	N38	-1239064	N59	-1234815	N80	4777	N101	6286	N122	14653
N18	-19306	N39	-40961	N60	-1234815	N81	-1232723	N102	6286	N123	-10998
N19	-19306	N40	-40961	N61	-1234815	N82	-1232723	N103	6286	N124	-10998
N20	-42586	N41	-16022	N62	-43295	N83	-1232723	N104	-1212435	N125	-10998
N21	-42586	N42	-16022	N63	-43295	N84	-1232723	N105	-1212435	N126	-10998

Z Tab. 4.1 můžeme vyčíst skutečnost, že největší síly v prutech vychází tlakové, což je očekávané s ohledem na způsob zatížení. Tyto násobně vyšší síly působí na hlavní vertikální nosníky. Síly působící na ostatní pruty jsou řádově nižší. Další údaje, které nám tabulka nabízí, jsou symetrické výsledky ve všech sekcích pilíře. Například pruty N<sub>12</sub> až N<sub>15</sub> přenáší stejné normálové síly.



Obr. 4.3 Prostorový graf výsledků normálových sil

Na Obr. 4.3 jsou graficky znázorněny výsledky sil. Hlavní vertikální pruty byly zatíženy násobně vyšším napětím než ostatní pruty. Nejsme schopni okem rozlišit pruty zatížené menším tlakem a tahem, protože vertikální pruty byly zatíženy násobně větší silou než ostatní pruty.

Pro vyhodnocení bezpečnosti prutů soustavy byly pruty rozděleny do tří skupin. V první skupině byly pruty, které měly štíhlost prutu  $\lambda$  vyšší než kritickou štíhlost prutu  $\lambda_k$  (viz Tab. 3.2 zvýrazněny žlutě) a zároveň byly zatíženy tlakem. Tato skupina byla vyhodnocena vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability. Ve druhé skupině byly pruty, buď které měly



štíhlost prutu  $\lambda$  vyšší než kritickou štíhlost prutu  $\lambda_k$ , ale byly zatížené tahem, nebo pruty, které měly štíhlost prutu  $\lambda$  nižší než kritickou štíhlost prutu  $\lambda_k$  (není u nich kritický vzpěr). Tato skupina byla vyhodnocena vzhledem k meznímu stavu pružnosti. V poslední skupině byly pruty, které nejsou zatížené vůbec viz Tab. 4.1. Tyto pruty nebyly kontrolovány k žádnému meznímu stavu.

#### 4.4.1 Vzpěrná stabilita

Do Tab. 4.2 byly vyčleněny pruty z první skupiny, tedy pruty kontrolované na vzpěr. Pro porovnání axiální síly byla využita metoda popsaná v kapitole „Mezní stavy vzpěrné stability“. Pro kontrolu vzpěru byla nejprve vypočítána kritická síla. Výpočet obsahuje součinitel uložení prutu, který se pro prutové soustavy volí  $\alpha_v = \pi$ . Pro vzorový výpočet byl vybrán prut N<sub>16</sub>.

$$F_{V_{N16}} = \frac{\alpha_v^2 E J_{2N16}}{l_{N16}^2} = \frac{\pi^2 \cdot (210 \cdot 10^9 \text{ Pa}) \cdot (1\,779\,667 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4)}{(6,781 \text{ m})^2} = 80223 \text{ N} \quad (4.13)$$

Následně byla porovnána kritická síla se silou působící na pruty. Porovnáním byla získána bezpečnost k meznímu stavu vzpěrné stability, kterou byla určena bezpečnost prutu N<sub>16</sub>:

$$k_v = \frac{F_{V_{N16}}}{|N_{16}|} = \frac{80\,218 \text{ N}}{42\,586 \text{ N}} = 1,88 \quad (4.14)$$

Tab. 4.2 Výsledky bezpečnosti vzpěrné stability

Číslo prutů [-]	Štíhlost [-]	Normálová síla [N]	Kritická síla [N]	Bezpečnost k MSVS [-]
16, 17, 20, 21	278	-42585	80223	1,88
18, 19, 22, 23	382	-19294	42700	2,21
39, 40, 43, 44	250	-40968	99863	2,44
62, 63, 66, 67	222	-43301	126309	2,92
110, 111, 114, 115	224	-37993	123735	3,26
41, 42, 45, 46	338	-16052	54480	3,39
85, 86, 89, 90	195	-45333	162904	3,59
64, 65, 68, 69	297	-18057	70449	3,9
108, 109, 112, 113	170	-51378	215405	4,19
87, 88, 91, 92	259	-17199	92526	5,38
30	246	-6903	40444	5,86
123, 124, 125, 126	181	-10998	74998	6,82
53	209	-6463	55882	8,65
76	176	-6618	78885	11,92
99	146	-8505	114010	13,41

Tab. 4.2 zachycuje výsledky první skupiny kontrolované na vzpěr. U některých prutů u průřezu typu 4, byly výsledky bezpečnosti nižší, než je obvyklé u vzpěru. Pro standartní prutové soustavy se hodnota bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability volí okolo 3. Tyto pruty s nižší hodnotou bezpečnosti se nacházely ve stěnách pilíře jako diagonály. Hlavním důvodem nízkých hodnot bylo spojení právě těchto prutů uprostřed nýtem viz výkresová dokumentace, které výrazně ovlivní vzpěrnou stabilitu. Dalším aspektem je fakt, že byly použity průřezy

konstantní po celé délce, ale ve skutečnosti jsou spoje vyztuženy příložkami. Pokud by byly tyto příložky uvažovány při výpočtu, byla by zvýšena hodnota bezpečnosti.

#### 4.4.2 Mezní stav pružnosti

Pruty zařazeny do druhé skupiny vyhodnocování výsledků tedy ty, které nebyly řešeny k meznímu stavu vzpěrné stability, nebo byly zatíženy na tah. Tato skupina prutů byla vyhodnocena vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Výsledky byly rozděleny do dvou tabulek: Tab. 4.3 pruty zatížené na tah a Tab. 4.4 pruty zatížené na tlak s nízkou štíhlostí prutů. Pro určení bezpečnosti bylo nejprve nutné určit normálové napětí podílem normálové síly a příčného průřezu. V následující rovnici je určeno normálové napětí prutu  $N_{12}$ , které bylo vypočítáno pro ostatní pruty analogicky:

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{S_{12}} = \frac{(-1\,236\,585\text{ N})}{(564 \cdot 10^4\text{ mm}^2)} = -21,93\text{ MPa} \quad (4.15)$$

Následně jsme určili bezpečnost:

$$k_v = \frac{\sigma_k}{|\sigma_{12}|} = \frac{220\text{ MPa}}{21,93\text{ MPa}} = 10,03 \quad (4.16)$$

Tab. 4.3 Výsledky k MSP prutů zatížených na tah

Číslo prutů [-]	Napětí [MPa]	Bezpečnost k MSP [-]
<b>122</b>	12,43	17,7
24, 27	10,17	21,63
93, 96	9,89	22,25
70, 73	9,74	22,59
47, 50	9,72	22,64
94, 95, 97, 98	8,71	25,26
25, 26, 28, 29	6,13	35,92
71, 72, 74, 75	5,89	37,34
48, 49, 51, 52	5,65	38,94
100, 101, 102, 103	5,32	41,38
31, 32, 33, 34	4,17	52,72
77, 78, 79, 80	4,08	53,91
54, 55, 56, 57	3,94	55,82

Z Tab. 4.3 můžeme vyčíst, že pruty zatížené na tah mají vysokou bezpečnost k meznímu stavu pružnosti. Nejnížší hodnota vychází 17,7 pro prut  $N_{122}$ , tedy příčný prut v nejvyšší podstavě.

Tab. 4.4 Výsledky k MSP prutů s nízkou štíhlostí prutu

Číslo prutů [-]	Štíhlost [-]	Napětí [MPa]	Bezpečnost k MSP [-]
<b>35, 36, 37, 38</b>	38	21,97	10,01
12, 13, 14, 15	42	21,93	10,03
58, 59, 60, 61	34	21,89	10,05
81, 82, 83, 84	31	21,86	10,07
104, 105, 106, 107	27	21,5	10,23

117, 118, 120, 121	82	18,75	11,73
116, 119	73	7,45	29,52

Z Tab. 4.4 můžeme vyčíst, že žádný součinitel bezpečnosti nevychází nižší než 10. Nejnižší hodnoty vykazují hlavní vertikální pruty N<sub>35</sub>–N<sub>38</sub>. Podobné hodnoty bezpečnosti se objevují v prvních čtyřech řádcích, tedy u ostatních hlavních vertikálních prutů. Příčinou nejnižších hodnot bezpečnosti je směr zatěžujících sil, jejichž sklon se liší pouze o jednotky stupňů od směrů těchto prutů.

Z předchozích třech tabulek je patrné, že nejkritičtěji zatížené byly pruty N<sub>16</sub>, N<sub>17</sub>, N<sub>20</sub> a N<sub>21</sub>, vyhodnocené k meznímu stavu vzpěrné stability. Hodnoty bezpečnosti těchto prutů byly výrazně vyšší než 1. Tedy všechny pruty by vydržely působící zatížení. Tyto hodnoty byly zkontrolovány numerickým programem Ansys, viz kapitola „Numerické řešení“.

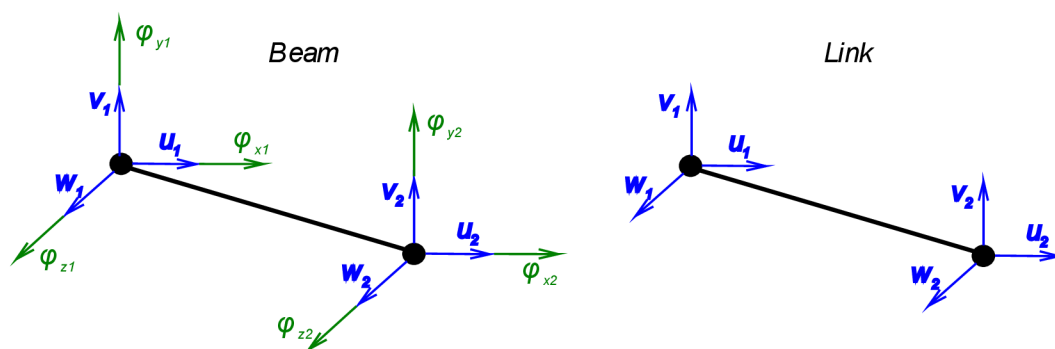
## 5. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Tato kapitola sloužila především pro verifikování výsledků normálových sil z analytického řešení. Dalším aspektem bylo vyhodnocení Varianty zatížení č. 2 a dílčích výsledků Varianty zatížení č. 1, které by se pro tuto příhradovou konstrukci řešilo analyticky velice obtížně.

### 5.1 Okrajové podmínky

Pro numerické řešení bylo nutné se nejprve rozhodnout, který prvek využijeme při výpočtu. V úvahu připadají dvě možnosti Link nebo Beam. V následující části si je blíže popíšeme:

1. Prvek Beam má dva uzly, z nich každý má šest stupňů volnosti tři posuvy a tři natočení, tedy vyhodnocuje i ohybové momenty v prvku. Je vhodné využít vazbu vetknutím, která lépe popisuje skutečné ukotvení pilíře. V řešeném pilíři se dá předpokládat, že při porovnání normálových sil numerického a analytického řešení, nebudou výsledky zcela totožné.
2. Prvek Link popisuje pouze posuvy koncových bodů, a proto více odpovídá analytickému řešení axiálních sil v prutové soustavě. Jelikož měla soustava 12 stupňů volnosti, nebylo vhodné ji řešit pomocí prvku Link. Při řešení numerickým systémem by výsledek nekonvergoval.



Obr. 5.1 Schéma možných typů prvků

Pro řešení bylo využito prvku Beam, který lépe vystihuje skutečnost. Pro řešení prvkem Link by bylo nutné upravit soustavu, aby měla  $0^\circ$  volnosti. Pro prvek Beam je nutné popsát, jak ovlivní dosažené výsledky.

#### Ohybové napětí:

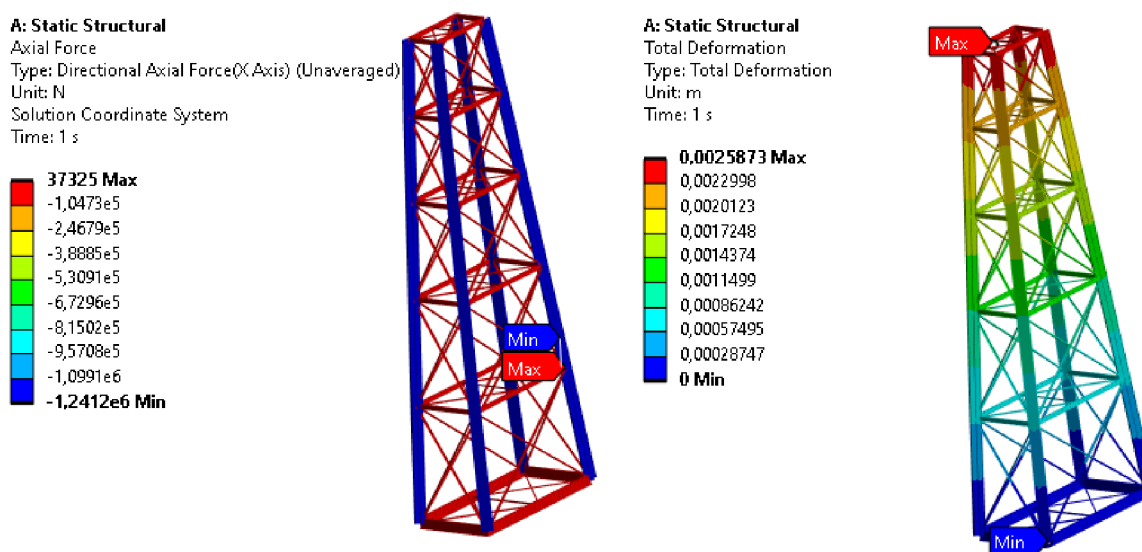
Pro řešení bylo nutné zahrnout vliv ohybového napětí vzniklé momentem, který nebylo v analytickém řešení zkoumáno. V numerickém řešení jsme schopni (v software Ansys) vykreslit ohybový moment i napětí a následně vyhodnotit, jak se budou lišit redukovaná napětí od normálových napětí a srovnat odchylku s analytickým výpočtem. Pro Variantu zatížení č. 1 byly ohybové momenty zanedbatelné, jelikož síly působí skoro ve stejném směru jako hlavní nosníky.

## 5.2 Varianta zatížení č. 1

Model je vytvořen v programu Spaceclaim. Při tvorbě se vycházelo z rozměrů prutů a průřezů z analytického řešení. Aby se při křížení pruty nerozdělily na části, bylo nutné vytvořit dvě komponenty (staticky určitá část a pruty, které byly částečně uvolněny). Pro řešení byl zvolen prvek Beam. Materiálové charakteristiky (modul pružnosti a Poissonova konstanta), byly použity podle materiálových vlastností svařkové oceli viz Tab. 3.1.

Oproti analytickému řešení byly v numerickém řešení zvoleny vazby vetknutím. Volba vyplývá především z reálného pilíře, kdy na pořízených fotkách lze vidět, že hlavní vertikální nosníky jsou zabetonovány v patce a zajištěny šrouby, proto tento model bude lépe vystihovat realitu. Dalším důvodem volby vazby vetknutím je výsledek kinematického rozboru. Důsledkem volby vazby vetknutím budou odlišné výsledky axiálních sil a napětí s analytickými výsledky. Silové zatížení zůstává totožné. Síť byla zvolena s délkou 0,3 m. Zvoleným softwarem jsou vykresleny:

- axiální síly – slouží k porovnání s analytickým řešením,
- redukované napětí – popisuje maximální napětí, které působí na nosník,
- ohybový moment – určíme, jak velké chyby se dopouštíme při analytickém řešení,
- celkovou deformaci – popisuje, jak se pilíř vertikálně posunul.



Obr. 5.2 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 1 – pilíře vlevo axiální síly a vpravo celková deformace

Na Obr. 5.2 vlevo jsou znázorněny axiální síly v prutech pilíře. Bylo použito stejné barevné spektrum jako v analytickém řešení. Při porovnání s Obr. 4.3 se výsledky podobají. Do Tab. 5.1 byly vloženy výsledky axiálních sil. Soustava je symetrická, a proto se výsledky stejně jako v analytickém řešení symetricky shodují. Při porovnání s analytickými výsledky se výsledné hodnoty liší v jednotkách procent. Důvodem odchylky je volba prvku Beam a s tím spojené složky sil, které se promítnou do ohybových momentů.

Na Obr. 5.2 vpravo jsou znázorněny celkové deformace pilíře. Výsledky ukazují, že maximální posuvy jsou ve vertikálním směru a zvyšují se od nejnižších částí pilíře. Maximální posuvy (4,4 mm) jsou v nejvyšších bodech pilíře. Tato hodnota není nijak vysoká, aby ovlivnila správnou

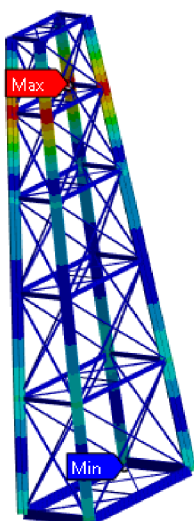
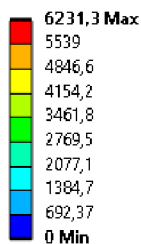


funkci mostu. Pokud deformaci přepočítáme na sklon kolejí na mostovce, hodnoty úhlu sklonu se pohybují v jednotkách minut.

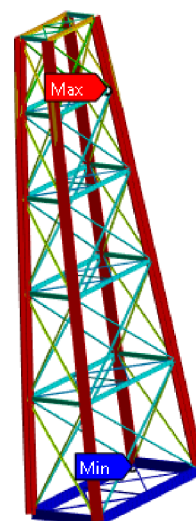
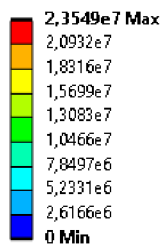
Tab. 5.1 Výsledky axiálních sil numerického řešení Ansys

Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]	Č.	Síla [N]
N1	0	N22	-18448	N43	-38763	N64	-16962	N85	-42808	N106	-1216100
N2	0	N23	-18448	N44	-38763	N65	-16962	N86	-42808	N107	-1216100
N3	0	N24	37325	N45	-15557	N66	-40838	N87	-16828	N108	-48367
N4	0	N25	22563	N46	-15557	N67	-40838	N88	-16828	N109	-48367
N5	0	N26	22563	N47	36842	N68	-16962	N89	-42808	N110	-36274
N6	0	N27	37325	N48	21709	N69	-16962	N90	-42808	N111	-36274
N7	0	N28	22563	N49	21709	N70	36728	N91	-16828	N112	-48367
N8	0	N29	22563	N50	36842	N71	23946	N92	-16828	N113	-48367
N9	0	N30	-6354	N51	21709	N72	23946	N93	36109	N114	-36274
N10	0	N31	4553	N52	21709	N73	36728	N94	30419	N115	-36274
N11	0	N32	4552	N53	-6176	N74	23946	N95	30419	N116	-30355
N12	-1239200	N33	4552	N54	4467	N75	23946	N96	36109	N117	-74218
N13	-1239200	N34	4553	N55	4467	N76	-6511	N97	30419	N118	-74217
N14	-1239200	N35	-1241200	N56	4467	N77	4770	N98	30419	N119	-30353
N15	-1239200	N36	-1241200	N57	4467	N78	4770	N99	-7503	N120	-74217
N16	-40153	N37	-1241200	N58	-1237700	N79	4770	N100	5597	N121	-74218
N17	-40153	N38	-1241200	N59	-1237700	N80	4770	N101	5597	N122	14486
N18	-18448	N39	-38763	N60	-1237700	N81	-1235400	N102	5596	N123	-11044
N19	-18448	N40	-38764	N61	-1237700	N82	-1235400	N103	5596	N124	-11044
N20	-40153	N41	-15557	N62	-40838	N83	-1235400	N104	-1216100	N125	-11006
N21	-40153	N42	-15557	N63	-40838	N84	-1235400	N105	-1216100	N126	-11006

A: Static Structural  
 Total Bending Moment  
 Type: Total Bending Moment (Unaveraged)  
 Unit: N·m  
 Time: 1 s



A: Static Structural  
 Equivalent Stress  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress  
 Unit: Pa  
 Time: 1 s



Obr. 5.3 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 1 – ohybových momentů vlevo a redukovaných napětí vpravo

V následujícím výpočtu bylo určeno maximální ohybové napětí. Do rovnice byl vložen maximální ohybový moment a modul průřezu v ohybu daného pilíře. Modul průřezu v ohybu

byl určen z podílu kvadratického momentu a vzdálenosti nejvzdálenějšího místa průřezu od neutrální osy:

$$W_o = \frac{J}{r} = \frac{(1\,064\,045\,000\text{ mm}^4)}{(360\text{ m})} = 2\,955\,681\text{ mm}^3 \quad (5.1)$$

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{(6\,231\,300\text{ N} \cdot \text{mm})}{(2\,955\,681\text{ mm}^3)} = 2,11\text{ MPa} \quad (5.2)$$

Na Obr. 5.3 jsou znázorněny ohybové momenty. Maximální moment je v nejvyšší části pilíře. Tyto ohybové momenty mají vliv na výsledné axiální síly a celkové napětí v celém pilíři. Rovnice (5.2) ukazuje, že maximální ohybový moment, v porovnání s normálovým napětím, dosahuje 10 procent redukovaného napětí.

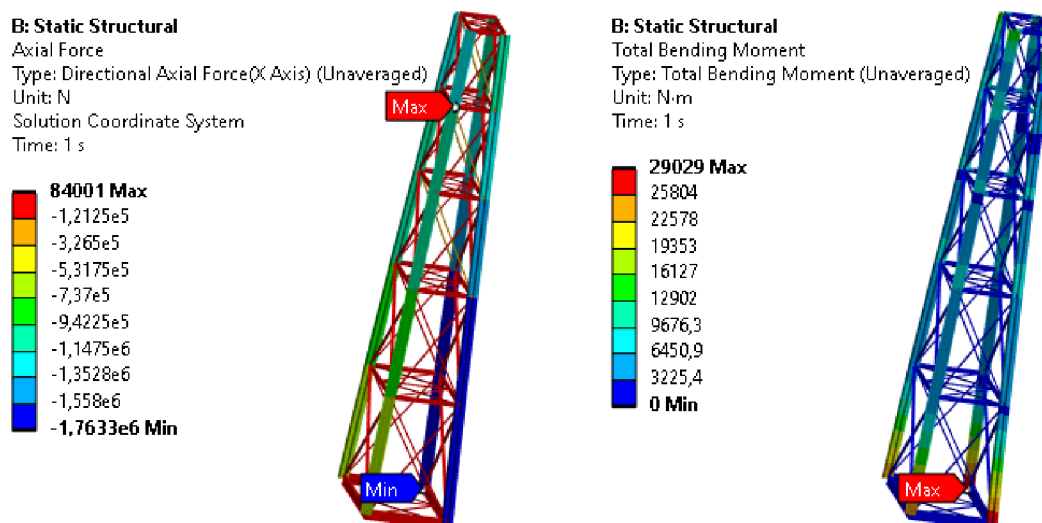
Redukované napětí dosahuje maximálních hodnot 23,5 MPa. Tímto napětím jsou namáhány vertikální nosníky, jejichž hodnoty se vzájemně liší o desetiny MPa. Pokud porovnáme redukované napětí na Obr. 5.3 s normálovým napětím v Tab. 4.3, liší se do 10 procent. Rozdíly jsou způsobeny zahrnutím ohybových napětí do numerických výsledků redukovaného napětí.

$$k_{V1} = \frac{\sigma_{Re}}{|\sigma_{N12}|} = \frac{(220\text{ MPa})}{(23,5\text{ MPa})} = 9,36 \quad (5.3)$$

Pokud hodnotu  $k_{V1}$  porovnáme s mezí kluzu, budeme se pohybovat na bezpečnosti násobně vyšší, než co vychází u bezpečnosti vzpěru. Porovnáním axiálních sil byly verifikovány další dosažené výsledky.

### 5.3 Varianta zatížení č. 2

U této varianty se vyhodnocovaly stejné výsledky jako u Varianty zatížení č. 1, s výjimkou celkových deformací, které jsou součástí zatížení. K vertikálnímu zatížení bylo přidáno boční zatížení způsobené teplotní roztažností mostovky. Teplotní zatížení bylo do Ansysu zadáno jako posuv o 11,3 mm (vypočítaný v rovnici (3.5)) v ose x, pro čtyři nejvyšší rohové styčnický.

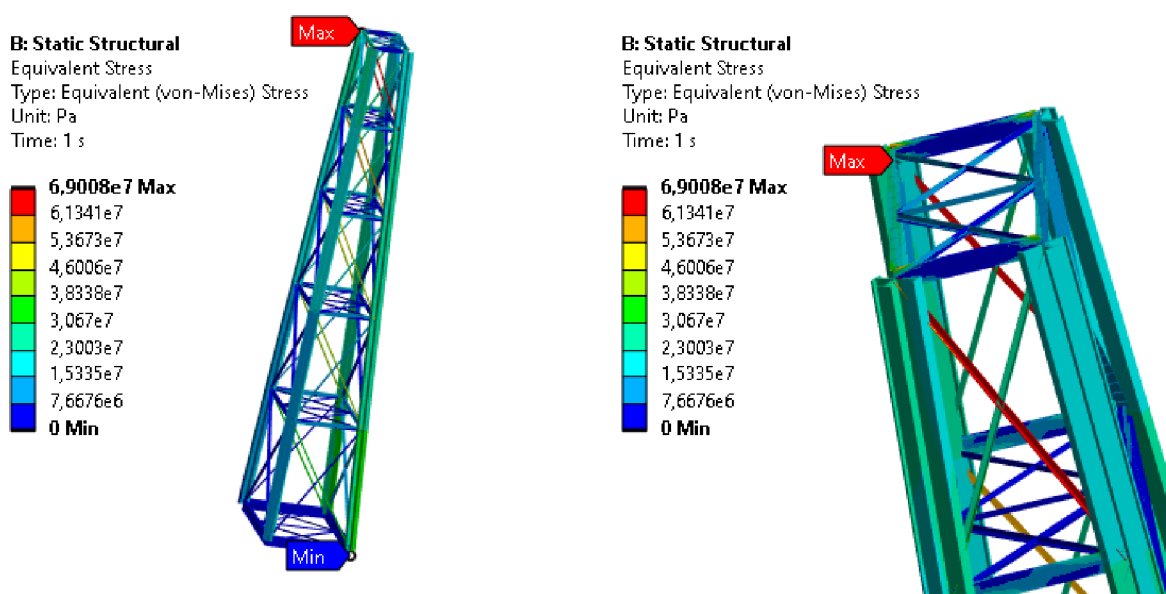


Obr. 5.4 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 2 – axiálních sil vpravo a ohybových momentů vlevo

Na Obr. 5.4 vlevo jsou znázorněny výsledky axiálních sil. Pokud je porovnáme s variantou č. 1, vidíme, že tlakové axiální síly působící na vertikální nosníky se zvýšily asi o 500 000 N na jedné straně pilíře, naopak na druhé straně se tlakové síly hlavních nosníků zmenšily. Zvýšilo se také tahové zatížení. Maximální zatížení je opět tlakové a nachází se v poslední části dvou vertikálních nosníků.

Na Obr. 5.4 vpravo je vykreslen ohybový moment. Při bočním zatížení se maximální ohybový moment nachází ve spodní části pilíře. Při výšce pilíře 26 m byl do software Ansys zadán posuv 11,3 mm, tím se ohybový moment zvýšil na hodnotu 29 029 N.m. Obr. 5.4 ukazuje, že v ostatních částech pilíře, jsou hodnoty ohybového momentu řádově nižší, až na místa maximálního ohybového momentu z Varianty zatížení č.1. Maximální ohybové napětí je vypočteno v následující rovnici:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{(29\,029\,000\text{ N} \cdot \text{mm})}{(2\,955\,681\text{ mm}^3)} = 9,82\text{ MPa} \quad (5.4)$$



Obr. 5.5 Numerické výsledky varianty č. 2 redukovaného napětí

Na Obr. 5.5 je vykresleno redukované napětí, kde hodnota maxima se nachází v diagonálním prutu v nejvyšší části pilíře blízko styčnicku. Hodnota maximálního redukovaného napětí je zhruba třikrát vyšší oproti výsledku u Varianty zatížení č. 1. Navýšení napětí můžeme přisuzovat navýšení ohybových momentů. Hodnota napětí dosahuje 69 MPa, kde zdaleka nedosahuje meze kluzu, ale i tak prudce klesla bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti při teplotním rozdílu 15 °C. Výpočet konkrétní kritické hodnoty bezpečnosti při druhé variantě zatížení v následující rovnici:

$$k_{V2} = \frac{\sigma_{Re}}{|\sigma_{N112}|} = \frac{(220\text{ MPa})}{(69\text{ MPa})} = 3,19 \quad (5.5)$$



## ZÁVĚR

Cílem práce bylo vytvořit napětovou analýzu pátého pilíře původního Ivančického viaduktu. Jednalo se o most překlenující údolí řeky Jihlavy. Tento most byl z velké části demontován. Jediné, co se dochovalo, je poslední pátý pilíř s částí mostovky.

Jedná se o prutovou příhradovou konstrukci s obdélníkovým půdorysem, která se kónicky zužuje k vrcholu. Pro tento typ úlohy byla využita teorie o prutových soustavách. Před samotným řešením bylo nutné zpracovat teoretickou rešerši, založenou především na poznatcích ze „statiky“ a „pružnosti a pevnosti“. Kapitola „Teoretický základ“ popisuje, jak je uvažováno prutové těleso a možnosti vazeb prutů soustavy. Dále určuje způsob kontroly bezpečnosti prutových těles z hlediska mezního stavu pružnosti a mezního stavu vzpěrné stability. Následně je v kapitole přiblíženo, jakým způsobem je řešena staticky neurčitá soustava.

V charakteristice řešené části bylo nejprve nutné zjednodušit úlohu na prutovou soustavu. Následně byly pruty rozděleny na dvě skupiny: kontrola na vzpěrnou stabilitu a kontrola k meznímu stavu pružnosti. Kritériem pro rozdělení prutů byl součinitel kritické štíhlosti. Pruty s vyšší štíhlostí, které byly zatíženy tlakem, byly kontrolovány na vzpěr a ostatní pruty k meznímu stavu pružnosti. Jako poslední krok před řešením byly vytvořeny dva modely zatížení: od vlakové soupravy a od vlakové soupravy s vlivem teplotní roztaženosti mostovky. Z historických poznatků bylo využito informace o zanesení a následné nepohyblivosti ložisek, z které byla vytvořena druhá varianta zatížení.

V kapitole „Analytické řešení“ je uveden statický rozbor, kterým byla určena statická neurčitost soustavy. Na základě stanovení statické neurčitosti byla použita Maxwell-Mohrova varianta Castiliánovy věty. Kinematický rozbor určil, že je soustava pohyblivá, ale pokud nebudou zatíženy prostřední styčníky, je soustava řešitelná. K řešení byl využit numerický řešič Matlab. Po výpočtu vycházely maximální axiální síly záporné pro vertikální pruty  $N_{35}$ - $N_{38}$ , maximální napětí pro  $N_{35}$ - $N_{38} = -21,97$  MPa a bezpečnost k meznímu stavu pružnosti  $k = 10,01$ . Vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability, byl nejvíce namáhán prut  $N_{16}$ , u kterého bezpečnost vyšla  $k_v = 1,88$ . Tato hodnota bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability je výrazně nižší než kritická hodnota bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti.

V numerickém řešení docházelo k nezanedbatelným odchylkám při vykreslení axiálních sil. Tyto odchylky způsobilo použití prvku Beam dovolující natočení koncových bodů, které ovlivnilo axiální síly v prutech. Redukované napětí dosahovalo asi o 10 % vyšších hodnot. Velikost hodnoty redukovaného napětí byla způsobena započítáním ohybových napětí, která dosáhla maximálních hodnot 23,5 MPa a bezpečnost k meznímu stavu pružnosti  $k_1 = 9,36$ .

Varianta zatížení č. 2 byla řešena pouze numericky. K Variantě zatížení č. 1 bylo uvažováno také zatížení od teplotní roztaženosti, které zvýšilo ohybové napětí na 9,82 MPa. Tím se zvýšila i hodnota redukovaného napětí na 69 MPa a bezpečnost k meznímu stavu pružnosti  $k_2 = 3,19$ .

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] FLORIAN, Zdeněk; PŘIKRYL, Karel a ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles - statika*. 6. přeprac. vyd., v Akademickém nakl. CERM 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003. ISBN 80-214-2491-5.
- [3] *Technická dokumentace Ivančického viaduktu*. Obecní úřad, získáno 17.7.2023.
- [4] AUTOR, Nenalezený. *Foto*. Online. Nenalezený vydavatel. Dostupné z: [https://www.parostroj.net/historie/foto/stare\\_foto.htm](https://www.parostroj.net/historie/foto/stare_foto.htm). [cit. 2024-02-12].
- [5] AUTOR, Nenalezený. *File: Ivančický viadukt v době stavby (1869).jpg*. Online. Wikimedia Commons. Dostupné z: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ivan%C4%8Dick%C3%BD\\_viadukt\\_v\\_dob%C4%9B\\_stavby\\_\(1869\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ivan%C4%8Dick%C3%BD_viadukt_v_dob%C4%9B_stavby_(1869).jpg). [cit. 2024-02-12].
- [6] KADLČÁK, Jaroslav a KYTÝR, Jiří. *Statika stavebních konstrukcí*. 2004. V Brně: VUTIUM, 2004 [i.e. 2007]. ISBN 80-214-3428-8.
- [7] AUTOR, Nenalezený. Online. Nenalezený vydavatel. Dostupné z: [https://pjpgk.rsd.cz/data/USR\\_001\\_2\\_8\\_TP/TP\\_42\\_n.pdf](https://pjpgk.rsd.cz/data/USR_001_2_8_TP/TP_42_n.pdf). [cit. 2024-02-26].
- [8] AUTOR, Nenalezený. *Lokomotivní depo Trutnov*. Online. Lokomotivní depo Trutnov. Dostupné z: <https://www.ld-trutnov.cz/vozidla/prehledy-vozidel/parni-lokomotivy/556-0/>. [cit. 2024-02-12].
- [9] AUTOR, Nenalezený. *Vozy Faccs*. Online. Nenalezený vydavatel. Dostupné z: [https://www.parostroj.net/katalog/nv/clanky/Faccs\\_Sas/Faccs\\_Sas.php3](https://www.parostroj.net/katalog/nv/clanky/Faccs_Sas/Faccs_Sas.php3). [cit. 2024-02-12].

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Veličina	Jednotka
A	Tažnost	[%]
E	Youngův modul pružnosti	[Pa]
$F_v$	Kritická síla	[N]
g	Gravitační zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$J_2$	Minimální kvadratický moment	$[\text{m}^4]$
k	Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti	[–]
$k_v$	Bezpečnost vůči meznímu stavu vzpěrné stability	[–]
l, L	Délka prutu	[m]
m	Hmotnost	[kg]
$M_o$	Ohybový moment	$[\text{N} \cdot \text{m}]$
N	Normálová síla	[N]
S	Obsah příčného průřezu	$[\text{m}^2]$
T	Teplota	$[\text{°C}]$
u	Posuv	[m]
W	Energie napjatosti	[J]
$W_o$	Modul průřezu v ohybu	$[\text{m}^3]$
$\alpha$	Součinitel teplotní délkové roztažnosti	$[\text{°C}^{-1}]$
$\alpha_v$	Součinitel uložení prutu	[–]
$\gamma$	Úhlová deformace	[–]
$\varepsilon$	Deformace	[–]
$\lambda$	Štíhlost prutu	[–]
$\lambda_k$	Kritická štíhlost	[–]
$\sigma$	Napětí	[Pa]
$\sigma_K$	Mez kluzu	[Pa]
$\sigma_o$	Ohybové napětí	[Pa]

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.1 Typy vazeb s omezujícími parametry .....	11
Obr. 1.2 Prutová napjatost elementárního prvku [1] .....	12
Obr. 1.3 Závislost tlačné síly na deformaci štíhlého prutu [1] .....	13
Obr. 1.4 Eulerova hyperbola [1] .....	13
Obr. 1.5 Způsoby prohnutí prutů při různých typech vazeb .....	14
Obr. 1.6 Prutová soustava zatížena silou $F$ .....	15
Obr. 2.1 Dobové foto celého Ivančického viaduktu [4] .....	19
Obr. 2.2 Historická fotografie ze stavby mostu [5] .....	20
Obr. 3.1 Výkres řešeného pilíře .....	21
Obr. 3.2 Detail uložení skutečného stavu mostu .....	22
Obr. 3.3 Detail vetknutí mostu.....	22
Obr. 3.4 Rozbor prutové soustavy statický neurčitý pilíře .....	24
Obr. 3.5 Typy použitých příčných průřezů .....	25
Obr. 3.6 Nákres lokomotivy použité ve výpočtu [8] .....	27
Obr. 3.7 Nákres tendru použitého při výpočtu [8] .....	27
Obr. 3.8 Nákres nákladního vagónu použitého při výpočtu [9].....	28
Obr. 3.9 Detail výkresu válečkového uložení .....	29
Obr. 3.10 Schématické zobrazení druhého typu zatížení.....	29
Obr. 4.1 Schéma částečného uvolnění vnějších vazeb .....	33
Obr. 4.2 Výřez kódu analytického řešení .....	34
Obr. 4.3 Prostorový graf výsledků normálových sil .....	36
Obr. 5.1 Schéma možných typů prvků .....	40
Obr. 5.2 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 1 – pilíře vlevo axiální síly a vpravo celková deformace.....	41
Obr. 5.3 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 1 – ohybových momentů vlevo a redukováných napětí vpravo .....	42
Obr. 5.4 Numerické výsledky Varianty zatížení č. 2 – axiálních sil vpravo a ohybových momentů vlevo.....	43
Obr. 5.5 Numerické výsledky varianty č. 2 redukováného napětí.....	44

## SEZNAM TABULEK

Tab. 3.1 Vlastnosti oceli řešeného pilíře [7] .....	25
Tab. 3.2 Tabulka průřezových charakteristik jednotlivých prutů .....	26
Tab. 4.1 Výsledky normálových sil prutů analytického řešení .....	35
Tab. 4.2 Výsledky bezpečnosti vzpěrné stability .....	37
Tab. 4.3 Výsledky k MSP prutů zatížených na tah .....	38
Tab. 4.4 Výsledky k MSP prutů s nízkou štíhlostí prutu .....	38
Tab. 5.1 Výsledky axiálních sil numerického řešení Ansys .....	42

## **SEZNAM PŘÍLOH**

- 1 Výpočtový kód v programu Matlab