

Katedra optiky  
Přírodovědecká fakulta  
Univerzita Palackého v Olomouci

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Metody numerického vyhodnocení rotujícího bodového  
obrazu



2019

Vedoucí práce:  
Mgr. Michal Baránek, Ph.D.

Bc. Barbora Žádníková

Studijní obor: Digitální a přístrojová  
optika, prezenční forma

## **Bibliografické údaje**

Autor: Bc. Barbora Žádníková  
Název práce: Metody numerického vyhodnocení rotujícího bodového obrazu  
Typ práce: diplomová práce  
Pracoviště: Katedra optiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci  
Rok obhajoby: 2019  
Studijní obor: Digitální a přístrojová optika, prezenční forma  
Vedoucí práce: Mgr. Michal Baránek, Ph.D.  
Počet stran: 54  
Přílohy: 1 CD/DVD  
Jazyk práce: český

## **Bibliographic info**

Author: Bc. Barbora Žádníková  
Title: Methods for numerical evaluation of rotating point spread function  
Thesis type: master thesis  
Department: Department of Optics, Faculty of Science, Palacký University Olomouc  
Year of defense: 2019  
Study field: Digital and Instrumental Optics, full-time form  
Supervisor: Mgr. Michal Baránek, Ph.D.  
Page count: 54  
Supplements: 1 CD/DVD  
Thesis language: Czech

## Anotace

*Rotující bodový obraz je efektivní nástroj, který lze získat umístěním speciálního optického prvku do zobrazovacího systému. Pomocí obrazu rotujícího v závislosti na rozostření lze například určit podélnou pozici sledovaného mikroobjektu v trojrozměrném prostoru. Pro plné využití potenciálu rotujícího bodového obrazu je nutné mít k dispozici účinné numerické metody pro vyhodnocení úhlu rotace dvoulaločné difrakční stopy. Cílem práce je analýza vybraných postupů pro určování úhlu rotace bodového obrazu.*

## Synopsis

*The rotating point spread function (PSF) is an effective tool with various applications in the modern optics. In the optical system with the established rotating PSF, the point-like object is imaged as a rotationally asymmetrical diffractive spot and the longitudinal object translation is transformed to the image rotation. The rotating PSF can be implemented to a standard imaging system by a specially designed mask composed of annular apertures with a spiral phase modulation and the resulting rotation effect is achieved by a superposition of the generated optical vortices. Obviously, a numerical algorithm enabling evaluation of the PSF angular orientation plays the key role in the digital processing of the detected rotating PSF. The aim of this work is an analysis of selected numerical methods for the rotating point spread function evaluation.*

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu Mgr. Michalu Baránkovi, Ph.D. za trpělivost při stavbě experimentální sestavy, podnětné diskuze a cenné rady při zpracovávání dat.

*Prohlašuji, že jsem celou práci včetně příloh vypracovala samostatně a za použití pouze zdrojů citovaných v textu práce a uvedených v seznamu literatury.*

datum odevzdání práce

podpis autora

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Teoretická část</b>	<b>9</b>
2.1	Princip generace rotujícího obrazu bodu . . . . .	9
2.2	Algoritmy pro určení úhlu otočení obrazu bodu . . . . .	17
A	Použití funkce základní Matlab knihovny . . . . .	17
B	Numerická metoda založená na hledání středů laloků . . .	18
C	Modifikace metody B pro vícelaločné struktury . . . . .	18
D	Využití křížové korelace pro vyhodnocení úhlu rotace . . .	19
<b>3</b>	<b>Vyhodnocení obrazů generovaných simulací</b>	<b>21</b>
3.1	Porovnání s teoretickým vztahem . . . . .	21
3.2	Využití uměle pootočených snímků . . . . .	24
3.3	Proložení dat aproximační přímkou . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Vyhodnocení experimentálních obrazů</b>	<b>41</b>
4.1	Experimentální sestava . . . . .	41
4.2	Vyhodnocení experimentálních dat . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Diskuze výsledků</b>	<b>52</b>
	<b>Závěr</b>	<b>53</b>
	<b>Literatura</b>	<b>54</b>

## Seznam obrázků

1	Princip generace rotujícího obrazu bodu [8] . . . . .	9
2	Amplitudová propustnost masky, $N = 2$ . . . . .	13
3	Modulační masky; a) $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ ; b) $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ ; c) $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	14
4	PSF; a) $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ ; b) $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ ; c) $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	15
5	PSF s parametry $\Delta l = 5, l_1 = -1, N = 2$ při rozostřování . . . . .	16
6	Princip funkce <i>regionprops('Orientation')</i> [10] . . . . .	18
7	Princip metody B; PSF s parametry $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	18
8	Princip metody C; PSF s parametry $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	19
9	Ukázka metody C na PSF s parametry $\Delta l = 4, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	19
10	Odchylky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	22
11	Odchylky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	23
12	Odchylky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	23
13	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	25
14	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	25
15	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	26
16	PSF; a) $\Delta l = 2, l_1 = 1, N = 2$ ; b) $\Delta l = 3, l_1 = 1, N = 2$ ; c) $\Delta l = 4, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	26
17	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 2, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	27
18	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 3, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	28
19	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 4, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	28
20	PSF; a) $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 3$ ; b) $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 3$ ; c) $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	29
21	Test metody B; PSF s parametry $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	29
22	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	30
23	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	30
24	Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	31
25	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	33

26	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	34
27	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	34
28	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 2, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	35
29	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 3, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	36
30	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 4, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	36
31	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	37
32	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	38
33	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 3$ . . . . .	38
34	Schéma experimentální sestavy pro záznam rotující PSF . . . . .	41
35	Maska zobrazená na aktivním displeji prostorového modulátoru . . . . .	42
36	Srovnání simulace a experimentu; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ ; a) simulace; b) experiment . . . . .	44
37	Srovnání simulace a experimentu; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ ; a) simulace; b) experiment . . . . .	45
38	Srovnání simulace a experimentu; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ ; a) simulace; b) experiment . . . . .	45
39	Srovnání simulace a experimentu; $\Delta l = 3, l_1 = 1, N = 2$ ; a) simulace; b) experiment . . . . .	46
40	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, ex- perimentální data; $\Delta l = 2, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	47
41	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, ex- perimentální data; $\Delta l = 3, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	47
42	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, ex- perimentální data; $\Delta l = 4, l_1 = -1, N = 2$ . . . . .	48
43	Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, ex- perimentální data; $\Delta l = 3, l_1 = 1, N = 2$ . . . . .	49

## Seznam tabulek

1	Vyhodnocení testů využívajících uměle pootočené obrazy . . . . .	32
2	Vyhodnocení testů využívajících aproximativní referenci . . . . .	39
3	Vyhodnocení experimentálních dat . . . . .	50

# 1 Úvod

Bodová rozptylová funkce (PSF z anglického Point Spread Function) je jednou ze základních charakteristik optických systémů. Jedná se o obraz bodového předmětu, tedy o odezvu optického systému na dokonalý bodový objekt v předmětové rovině. Z tohoto obrazu bodu je pak možné zjistit například rozlišení soustavy nebo jeho funkci optického přenosu [1]. Podrobnější analýza může poskytnout informaci o podélné pozici bodového objektu.

Nejčastějším projevem podélného posunu je rozšíření PSF, ze kterého se přesná podélná pozice určuje jen obtížně. Pro tyto účely může být užitečná cílená úprava PSF, díky které lze pak získat o pozici více informací. Takovým případem může být optická soustava s cíleně zavedeným astigmatismem, ve které pak informaci o podélné pozici nese eliptický tvar PSF [2]. Stejně tak spirální modulace svazku může pomoci určit podélnou pozici [3].

Znalost podélné pozice předmětu přitom může být v mnoha případech užitečná. Zmíněné metody mohou být využity například při topografii povrchů [4], v lokalizační mikroskopii [5] nebo při analýze tekoucích polí v biomedicínských aplikacích [6].

Pomocí vhodné spirální modulace lze vytvořit optické pole, které odpovídá superpozici vírových svazků [7]. Výsledná rotačně nesymetrická PSF má tu vlastnost, že se její stopa na statickém stínítku při pohybu bodového předmětu otáčí. Zjištění podélné pozice předmětu je pak pouze otázkou analýzy obrazu a jeho natočení, čímž se právě zabývá tato práce.

Standardně se v těchto optických systémech používá dvoulaločná PSF. Tato práce ale přináší informace také o jiných typech PSF, které mohou uvedenou metodou vzniknout a které mohou mít oproti zmíněné základní PSF různé výhody. Těmi výhodami může být například celková větší propustnost systému nebo přesnější určení podélné pozice.



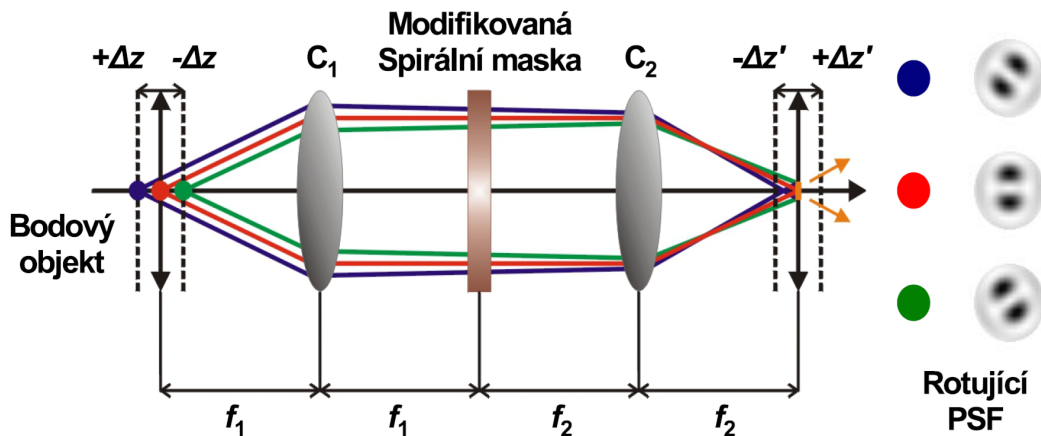
## 2 Teoretická část

### 2.1 Princip generace rotujícího obrazu bodu

PSF rotující v závislosti na rozostření je možné docílit filtrací prostorového spektra ve fourierovské rovině (obrázek 1). Základní systém je tedy tvořen třemi optickými prvky, tedy čočkami  $C_1$  a  $C_2$  s ohniskovými vzdálenostmi  $f_1$  a  $f_2$ , které tvoří 4-f systém, a fázovou maskou umístěnou ve společné ohniskové rovině za první čočkou.

Čočka  $C_1$  provádí Fourierovu transformaci předmětové roviny do své ohniskové roviny. Z této roviny pak provede zpětnou Fourierovu transformaci čočka  $C_2$ . Ve společné ohniskové rovině obou čoček je pak možné vhodnými prvky měnit prostorové spektrum předmětu [1].

Na obrázku 1 jsou znázorněny tři svazky, které odpovídají světlu vyzářenému v různých pozicích bodového předmětu  $z = f_1 + \Delta z$ . Těmto pozicím pak odpovídají různá natočení PSF ve společné obrazové rovině. Vzdálenost obrazové roviny od druhé čočky je  $z' = f_2 + \Delta z'$ .



Obrázek 1: Princip generace rotujícího obrazu bodu [8]

Uvedenou soustavu (obrázek 1) je možné matematicky popsat pomocí komplexních amplitud a jejich transformací funkcemi propustnosti čoček a modulační masky. Tímto způsobem je možné získat předpis pro rychlost otáčení PSF a analytický popis PSF v obrazové rovině.

Komplexní amplitudu elektromagnetické vlny na výstupu 4-f systému, v obrazové rovině,  $u'(x', y')$  lze popsat difrakčním integrálem ve Fresnelově aproximaci [1]

$$\begin{aligned}
u'(x', y') &= -\frac{i}{\lambda z'} \cdot \exp[-ikz'] \cdot \exp\left[-i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z'}\right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{t}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \exp\left[-i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\lambda z'}\right] \\
&\times \exp\left[i2\pi \frac{\bar{x}x' + \bar{y}y'}{\lambda z'}\right] d\bar{x}d\bar{y}, \tag{1}
\end{aligned}$$

kde  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$  je světlo dopadající na čočku  $C_2$  a  $\bar{t}(\bar{x}, \bar{y})$  je funkce propustnosti čočky

$$\bar{t}(\bar{x}, \bar{y}) = \exp\left[i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\lambda f_2}\right]. \tag{2}$$

Komplexní amplitudu  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$  v rovině čočky můžeme obdobně jako komplexní amplitudu v rovině obrazu popsat difrakčním integrálem

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{i}{\lambda f_2} \cdot \exp[-ikf_2] \cdot \exp\left[-i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\lambda f_2}\right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot u(x, y) \cdot \exp\left[-i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_2}\right] \\
&\times \exp\left[i2\pi \frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{\lambda f_2}\right] dx dy. \tag{3}
\end{aligned}$$

Tentokrát jde o šíření z roviny fázové masky, která má funkci propustnosti  $S(x, y)$ , tedy fourierovské roviny 4-f systému, do roviny čočky  $C_2$ . Po dosazení (2) a (3) do (1) a elementární úpravě získáme vztah pro komplexní amplitudu v obrazové rovině jako

$$\begin{aligned}
u'(x', y') &= -\frac{1}{\lambda^2 z' f_2} \cdot \exp[-ik(z' + f_2)] \cdot \exp\left[-i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z'}\right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot u(x, y) \cdot \exp\left[-i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_2}\right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\pi \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\lambda z'}\right] \cdot \exp\left[i2\pi \frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{\lambda f_2}\right] \\
&\times \exp\left[i2\pi \frac{\bar{x}x' + \bar{y}y'}{\lambda z'}\right] d\bar{x}d\bar{y} dx dy. \tag{4}
\end{aligned}$$

Nyní je potřeba provést integraci přes souřadnice  $d\bar{x}d\bar{y}$ . V tomto kroku je užitečné využít Fourierovy transformace, neboť součin dvou posledních členů v (4) lze přepsat na fourierovské jádro do tvaru

$$\begin{aligned} \exp \left[ i2\pi \frac{x\bar{x} + y\bar{y}}{\lambda f_2} \right] \cdot \exp \left[ i2\pi \frac{\bar{x}x' + \bar{y}y'}{\lambda z'} \right] &= \exp \left[ i2\pi \left[ \bar{x} \left( \frac{x}{\lambda f_2} + \frac{x'}{\lambda z'} \right) + \bar{y} \left( \frac{y}{\lambda f_2} + \frac{y'}{\lambda z'} \right) \right] \right] \\ &= \exp [i2\pi(\bar{x} \cdot P + \bar{y} \cdot Q)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Provedením této Fourierovy transformace dostaneme komplexní amplitudu ve tvaru

$$\begin{aligned} u'(x', y') &= -\frac{1}{\lambda^2 z' f_2} \cdot \exp[-ik(z' + f_2)] \cdot \exp \left[ -i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda z'} \right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot u(x, y) \cdot \exp \left[ -i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f_2} \right] \cdot i\lambda z' \\ &\quad \times \exp [i\pi(P^2 \lambda z' + Q^2 \lambda z')] \, dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Zpětným dosazením za  $P$  a  $Q$  a úpravou výrazu nabývá komplexní amplituda  $u'(x', y')$  tvaru

$$\begin{aligned} u'(x', y') &= -\frac{i}{\lambda f_2} \cdot \exp[-ik(z' + f_2)] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot u(x, y) \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{i2\pi}{\lambda f_2} (xx' + yy') \right] \cdot \exp \left[ \left( \frac{i\pi z'}{\lambda f_2^2} - \frac{i\pi}{\lambda f_2} \right) \cdot (x^2 + y^2) \right] \\ &\quad \times \exp \left[ \left( \frac{i\pi}{\lambda z'} - \frac{i\pi}{\lambda z'} \right) \cdot (x'^2 + y'^2) \right] \, dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Užitečnější je získat závislost komplexní amplitudy na posunu obrazu  $\Delta z'$ , proto je potřeba uplatnit vztah  $\Delta z' = z' - f_2$ . Tím dostáváme

$$\begin{aligned} u'(x', y') &= -\frac{i}{\lambda f_2} \cdot \exp[-ik(z' + f_2)] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \cdot u(x, y) \\ &\quad \times \exp \left[ \frac{i2\pi}{\lambda f_2} (xx' + yy') \right] \cdot \exp \left[ \frac{i\pi \Delta z'}{\lambda f_2^2} \cdot (x^2 + y^2) \right] \, dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Nyní je nutné dosadit za komplexní amplitudu v rovině modulační masky  $u(x, y)$ . Uvažujeme-li osový předmětový bod, je možné tuto komplexní amplitudu zapsat jako [1]

$$u(x, y) = -\frac{i}{\lambda f_1} \cdot \exp[-ik(f_1 + z)] \cdot \exp \left[ i\pi \frac{\Delta z(x^2 + y^2)}{\lambda f_1^2} \right]. \quad (9)$$

Dosadíme-li (9) do (8), získáme vztah pro komplexní amplitudu v obrazové rovině

$$\begin{aligned}
u'(x', y') &= -\frac{1}{\lambda^2 f_1 f_2} \cdot \exp[-ik(z' + z + f_1 + f_2)] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda}(x^2 + y^2) \cdot \left(\frac{\Delta z}{f_1^2} + \frac{\Delta z'}{f_2^2}\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda f_2}(xx' + yy')\right] dx dy. \tag{10}
\end{aligned}$$

Komplexní amplituda v obrazové rovině je tedy získána Fourierovou transformací součinu funkce propustnosti fázové masky a kvadratického členu, který představuje rozostření. Vztah lze zjednodušit zavedením parametru rozostření [8]

$$\Delta\Phi_R = \frac{\Delta z}{f_1^2} + \frac{\Delta z'}{f_2^2} \tag{11}$$

a zanedbáním členů bez závislosti na příčných souřadnicích na

$$\begin{aligned}
u'(x', y') &\propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda}\Delta\Phi_R(x^2 + y^2)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda f_2}(xx' + yy')\right] dx dy. \tag{12}
\end{aligned}$$

Vzhledem ke tvaru fázové masky a rotační symetrii ostatních optických prvků, bude výhodná transformace do cylindrických souřadnic podle vztahů

$$x' = r' \cdot \cos(\phi') \tag{13}$$

$$y' = r' \cdot \sin(\phi'). \tag{14}$$

Obdobnou transformaci lze provést také u souřadnic  $x$  a  $y$  v rovině modulační masky. Tím získáme komplexní amplitudu v obrazové rovině ve tvaru

$$\begin{aligned}
u'(r', \phi') &\propto \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \cdot S(r, \phi) \cdot \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda}\Delta\Phi_R r^2\right] \\
&\times \exp\left[i2\pi \frac{rr'}{\lambda f_2} \cos(\phi' - \phi)\right] dr d\phi. \tag{15}
\end{aligned}$$

Souřadnice  $r$  je vzdálenost od optické osy,  $\phi$  úhel od osy  $y$  ve fourierovské rovině. Obdobně  $r'$  a  $\phi'$  jsou souřadnice v obrazové rovině. Dále je zde výhodná transformace do Besselových funkcí pomocí identity [9]

$$\exp[i\rho \cos(\vartheta)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \cdot J_m(\rho) \cdot \exp[im\vartheta] \tag{16}$$

na

$$u'(r', \phi') \propto \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \cdot S(r, \phi) \cdot \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda} \Delta \Phi_R r^2 \right] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \cdot J_m \left( 2\pi \frac{rr'}{\lambda f_2} \right) \times \exp [im(\phi' - \phi)] d\phi dr. \quad (17)$$

V dalším kroku je potřeba dosadit za modulační masku ve fourierovské rovině. Optimální modulační masku lze podle [8] ve válcových souřadnicích zapsat jako

$$S(r, \phi) = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{\delta(r - r_n)}{r_n} \cdot \exp [i l_n \phi + i\psi_n], \quad (18)$$

kde  $l_n$  je topologický náboj v  $n$ -tém prstenci,  $\psi_n$  je konstantní fázový posun v  $n$ -tém prstenci,  $r_n$  poloměr  $n$ -tého prstence a  $N$  počet prstenců masky. Topologický náboj charakterizuje vírovou vlnoplochu a udává počet změn fáze od 0 do  $2\pi$  v plném úhlu  $360^\circ$ .

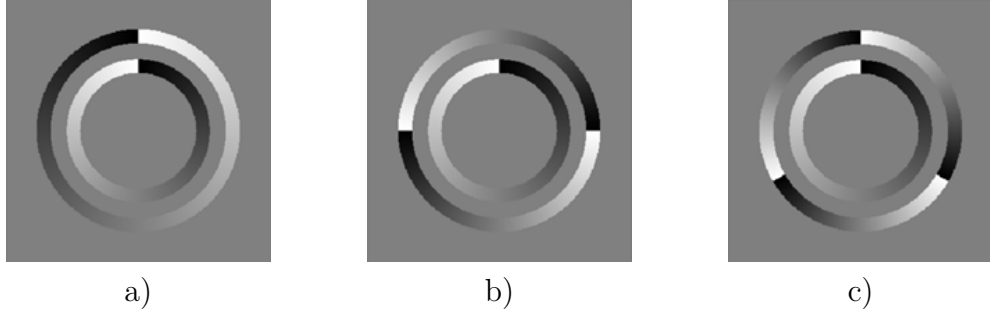
Maska má prstencovou amplitudovou propustnost (obrázek 2). Matematický zápis předpokládá nekonečně malou šířku prstenců, ale reálně je tato šířka nenulová.



Obrázek 2: Amplitudová propustnost masky,  $N = 2$

Fázová propustnost v jednotlivých prstencích odpovídá spirální modulaci. Příklady fázové propustnosti jsou na obrázku 3. Superpozicí těchto vírových svazků pak vzniká požadovaná světelná vlna v obrazovém prostoru.

Hlavními parametry modulačních masek jsou topologický náboj v prvním prstenci  $l_1$ , rozdíl topologických nábojů v sousedních prstencích  $\Delta l$ , ten přímo určuje počet laloků PSF, a počet prstenců  $N$ . Na obrázku 3 vidíme tedy masky s počtem prstenců  $N = 2$ , topologickým nábojem prvního prstence  $l_1 = -1$ . Rozdíl topologických nábojů sousedních prstenců je pak  $\Delta l = 2$ ,  $\Delta l = 3$  a  $\Delta l = 4$ .



Obrázek 3: Modulační masky; a)  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ; b)  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ; c)  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Po dosazení (18) do (17) a přeuspořádání členů dostaneme

$$u'(r', \phi') \propto \int_0^\infty r \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda} \Delta \Phi_R r^2 \right] \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\delta(r - r_n)}{r_n} \cdot \exp [i l_n \phi + i \psi_n] \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \cdot J_m \left( \frac{2\pi r r'}{\lambda f_2} \right) \cdot \exp [im(\phi' - \phi)] d\phi dr. \quad (19)$$

Využitím vztahu

$$\int_0^{2\pi} \exp [i(u - v)\phi] = 2\pi \delta(u, v), \quad (20)$$

kde  $\delta_{u,v}$  je Kroneckerovo delta, dostaneme

$$u'(r', \phi') \propto \sum_{n=1}^N i^{l_n} \exp [i\phi' l_n] \exp [i\psi_n] \int_0^\infty r \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda} \Delta \Phi_R r^2 \right] \frac{\delta(r - r_n)}{r_n} \times J_{l_n} \left( \frac{k r r'}{f_2} \right) \cdot 2\pi dr. \quad (21)$$

Diracova delta funkce v integrálu zapříčiní posun  $r$  na  $r'$ . Po úpravách získáme komplexní amplitudu v obrazové rovině finálně jako

$$u'(r', \phi') \propto \sum_{n=1}^N \exp [i\pi/2 l_n] \exp [i\phi' l_n] \exp [i\psi_n] \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda} \Delta \Phi_R r_n^2 \right] \times J_{l_n} \left( \frac{k r_n r'}{f_2} \right) dr. \quad (22)$$

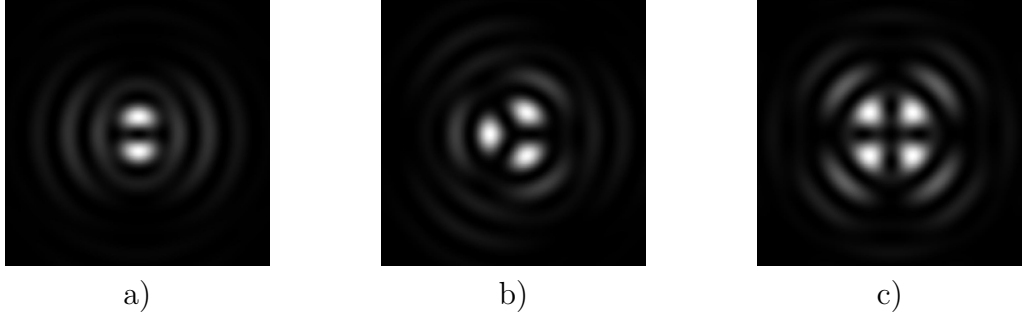
Intenzita v obrazové rovině podle vztahu

$$I'(r', \phi') \propto |u'(r', \phi')|^2 \quad (23)$$

je po dosazení a úpravě

$$I'(r', \phi') \propto \sum_{n=1}^N J_{l_n}^2\left(\frac{kr_n r'}{f_2}\right) + \sum_{n=1}^N \sum_{n'=n+1}^N J_{l_n}\left(\frac{kr_n r'}{f_2}\right) \cdot J_{l_{n'}}\left(\frac{kr_{n'} r'}{f_2}\right) \cdot 2 \\ \times \cos\left[\frac{\pi}{2}(l_n - l_{n'}) + \phi'(l_n - l_{n'}) + \frac{\pi}{\lambda} \Delta \Phi_R(r_n^2 - r_{n'}^2) + \psi_n - \psi_{n'}\right]. \quad (24)$$

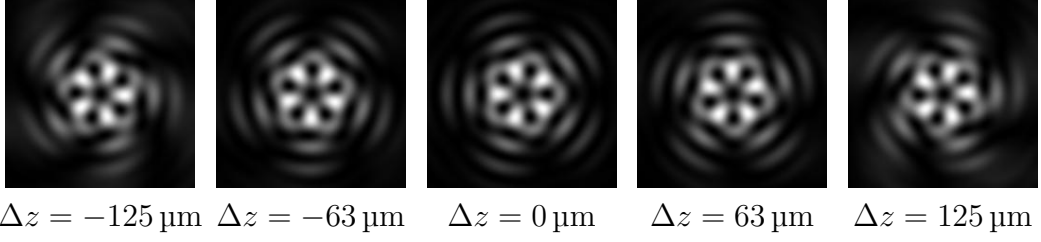
Tvar obrazu bodového předmětu vychází z analýzy argumentu funkce *cosinus* v azimutální souřadnici, která je v součinu s rotačně symetrickými Besselovými funkcemi. Argument této funkce, pomíneme-li rozostření a konstantní posun, závisí pouze na rozdílu topologických nábojů sousedních prstenců  $\Delta l$  a azimutální souřadnici  $\phi'$ . Rozdíl topologických nábojů v sousedních prstencích  $\Delta l$  v součinu se souřadnicí  $\phi'$  zapříčiní smršťení periody kosinusoidy na  $2\pi/\Delta l$ . Tím vzniknou lokální minima, která vytvoří členitou rotačně nesymetrickou stopu, která má tolik vzájemně oddělených částí, laloků, jaký je rozdíl topologických nábojů v sousedních prstencích. Na obrázku 4 jsou obrazy bodových předmětů, které odpovídají modulačním maskám na obrázku 3.



Obrázek 4: PSF; a)  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ; b)  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ; c)  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Počtem těchto laloků je dán také úhlový rozsah pro otáčení a tím i podélný rozsah posunu. Je totiž možné se pohybovat pouze v takovém úhlovém rozmezí, aby bylo možné úhel jednoznačně určit. Například u dvoulalokné PSF se můžeme pohybovat od  $-90^\circ$  do  $90^\circ$ , u trojlalokné od  $-60^\circ$  do  $60^\circ$ .

V argumentu funkce *cosinus* figuruje také člen, který odpovídá rozostření. Tento člen je v součtu se členem, který obsahuje souřadnici  $\phi'$ , jeho důsledkem je proto posun v azimutálním směru, tedy rotace. Na obrázku 5 je ukázka rotace PSF s parametry  $\Delta l = 5$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  při rozostřování.



Obrázek 5: PSF s parametry  $\Delta l = 5$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  při rozostřování

Výsledná intenzitní stopa v obrazové rovině je dána součtem příspěvků všech vzájemných kombinací jednotlivých prstenců. Pro zajištění stabilní stopy se musí tyto příspěvky otáčet stejně rychle [8]. Pro pozice maxim funkce *cosinus* při zanedbání konstantního posunu platí

$$2\pi m = \phi'_{MAX}(l_n - l_{n'}) + \frac{\pi}{\lambda} \Delta\Phi_R(r_n^2 - r_{n'}^2), \quad (25)$$

kde  $m$  je celé číslo. Po přeuspořádání členů a diferenciaci vztahu můžeme psát

$$d\phi'_{MAX} = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{r_n^2 - r_{n'}^2}{l_n - l_{n'}} d\Delta\Phi_R. \quad (26)$$

Podmínka stability stopy je tedy

$$\frac{d\phi'_{MAX}}{d\Delta\Phi_R} = \frac{-\pi}{\lambda} \frac{r_n^2 - r_{n'}^2}{l_n - l_{n'}} = konst. \quad (27)$$

To je splněno, pokud prstence tvoří Fresnelovu zonální destičku, což je difraktivní prvek odpovídající čočce, tedy pokud platí

$$r_n = R\sqrt{\frac{n}{N}} \quad (28)$$

a při konstantním rozdílu topologických nábojů v sousedních prstencích  $\Delta l$  [8]

$$l_n = l_1 + (n - 1)\Delta l. \quad (29)$$

Dosazením (11) po diferenciaci, (28) a (29) do (27) a zavedením numerické apertury jako

$$A = \frac{R}{\sqrt{f_1^2 + R^2}} \quad (30)$$

je získán vztah pro rychlost otáčení při posunu předmětu a fixní obrazové rovině

$$\frac{d\phi'}{d\Delta z'} = -\pi \frac{A^2}{N\lambda\Delta l(1 - A^2)}. \quad (31)$$

Mezi rotací PSF a podélným posunem předmětu je tedy lineární závislost. Rychlost rotace pak závisí na parametrech soustavy  $A$ ,  $\lambda$ , a na parametrech modulační masky  $\Delta l$ ,  $N$ .



## 2.2 Algoritmy pro určení úhlu otočení obrazu bodu

Existuje několik základních přístupů k vyhodnocení rotující PSF. Je možné například založit hledání úhlu natočení na pozici maxim intenzit laloků nebo na geometrii stopy (pozice geometrických těžišť, tvar stopy). Dále lze pro hledání úhlu využít například křížové korelace, tedy porovnávat obraz s obrazem se známou rotací, radiálních řezů, nebo Radonovy transformace. V sinogramu, tedy v obraze, který vznikne Radonovou transformací původního obrazu, je úhel transformován na lineární souřadnici.

Je tedy zřejmé, že realizovatelných metod je nepřehledné množství. Níže uvedené metody byly vybrány pro své univerzální využití a dobrou přesnost.

Všechny algoritmy byly vytvořeny v prostředí Matlab a byly nejprve testovány na obrazech vytvořených simulací a následně také na zaznamenaných obrazech z provedeného experimentu.

Tři z uvedených algoritmů pracují s binárním obrazem. V těchto případech se tento obraz vytvoří tak, že se stanoví binarizační hranice, která určí, které pixely budou mít hodnotu nula a které jedna. Pixely, které měly v původním obraze hodnotu nižší než je tato hranice, budou mít v binarizovaném obraze hodnotu nula, ostatní jedna. U metod, kterým binarizace předchází, je potřeba kontrolovat, zda binarizace proběhla korektně. Ideálně by měla odstranit vedlejší maxima a hlavní část obrazu ponechat. Může se ovšem stát, že binarizace vedlejší maxima neodstraní a naopak je zvýrazní. Proto je potřeba kontrolovat, zda se binarizací objevilo právě tolik bílých ploch, kolik předpokládáme laloků a případně dodatečně určit, které bílé plochy odpovídají hlavní části PSF. Obvykle se jedná o největší bílé plochy nebo o plochy, které měly v původním obraze největší intenzitu.

Nastavení binarizační hranice je proces, který by měl předcházet každému experimentu. Hranici je totiž nutné nastavit optimálně pro každou PSF a každou optickou soustavu tak, aby se plocha laloků zbytečně nezmenšovala, ale zároveň tak, aby se binarizací nezvýraznily vedlejší maxima či vady obrazu.

V této práci byly binarizovány všechny obrazy při zpracování všemi metodami, u kterých to bylo nutné, s binarizační hranicí 60 % maximální intenzity v obraze.

### A Použití funkce základní Matlab knihovny

K nalezení úhlu natočení obrazce je možné přímo využít matlabovskou funkci *regionprops('Orientation')*. Tato funkce vyhodnotí přímo orientaci binárního obrazu tak, že okraje bílých částí obrazu přibližně nahradí vhodně natočenou elipsou, a vypočítá orientaci hlavní osy této elipsy (obrázek 6) [10].

Před použitím této funkce je nejprve nutné binarizovat obraz, neboť funkce *regionprops* potřebuje jako vstup obraz černobílý.

Tuto metodu lze použít pouze pro dvoulaločné struktury, neboť ty vykazují dostatečnou kruhovou nesymetrii.

Tato numerická metoda bude dále v textu označována písmenem A.

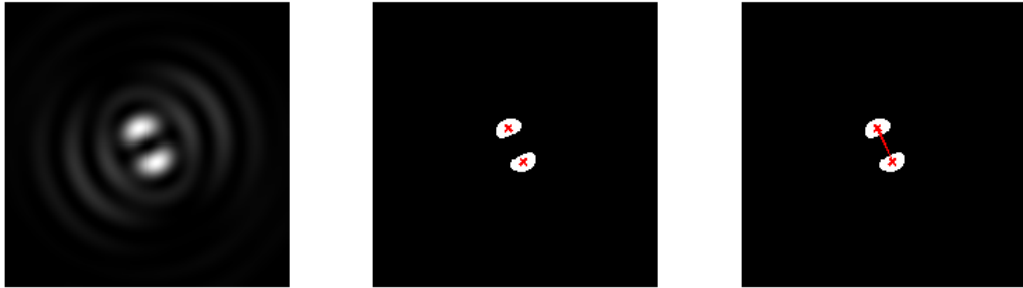


Obrázek 6: Princip funkce *regionprops('Orientation')* [10]

## B Numerická metoda založená na hledání středů laloků

Tato metoda (dále jen metoda B) je založena na předpokladu, že osa dvo-  
laločné struktury protíná geometrická těžiště obou laloků, a je tedy použitelná  
pouze pro případ dvoulaločné PSF. V prvním kroku je provedena binarizace ob-  
razu. Následně je nutné najít těžiště obou laloků, k čemuž byla využita matlabov-  
ská funkce *regionprops('Centroid')*. Uprostřed mezi těmito nalezenými středy la-  
loků se nachází střed celé PSF a tedy příčná pozice obrazu. Spojnice nalezených  
bodů udává úhel rotace.

Ukázka této metody je na obrázku 7.



Obrázek 7: Princip metody B; PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

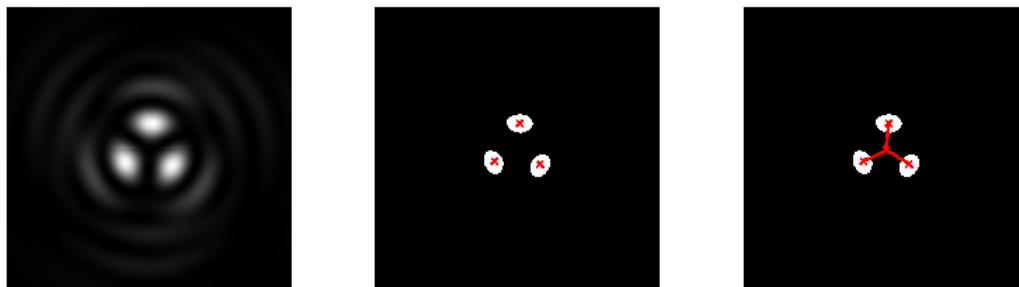
Obdobně by se dalo využít těžišť, která by brala v úvahu intenzitní rozložení  
v lalocích [11]. Tento postup byl inspirací pro metodu B. Při vynulování nízkých  
hodnot intenzity namísto binarizace by se neztrácela informace obsažená v po-  
loze bodu s maximální intenzitou světla, ale zároveň by byl výsledek náchylnější  
k lokálním vadám obrazu, jako jsou prachové částice a parazitní světlo.

Výhodou této metody je snadné nalezení také příčné pozice, nevýhodou je  
omezení pouze na dvoulaločné PSF.

## C Modifikace metody B pro vícelaločné struktury

Metodu B lze snadno upravit pro vícelaločné PSF. Použití této metody opět  
předchází binarizace. Změna je pak pouze v hledání středu mezi body, které  
odpovídají středům jednotlivých laloků (obrázek 8), namísto pouhého hledání  
středu spojnice dvou bodů. Výhodou této metody je možnost použití pro vícela-

ločné struktury a tedy určení úhlu z více bodů, to zvyšuje přesnost určení úhlu rotace.



Obrázek 8: Princip metody C; PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Na obrázku 9 je ukázka práce metody C s PSF, která vznikla použitím dvou-prstencové masky s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = 1$  a rozdílem topologických nábojů v sousedních prstencích  $\Delta l = 4$ .



Obrázek 9: Ukázka metody C na PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

Při použití masek s vyšším topologickým nábojem v prvním prstenci mohou vedlejší maxima nabývat na významu a je potřeba algoritmus doplnit příkazy pro kontrolu binarizovaného obrazu. V tomto případě binarizací s hranicí 60 % vzniklo osm bílých oblastí, ačkoliv byl předpoklad čtyři. Proto musel algoritmus přistoupit k doplňujícímu vyhodnocení a následně se zabývat těmi většími bílými oblastmi.

Tento algoritmus bude dále označován jako metoda C.

## D Využití křížové korelace pro vyhodnocení úhlu rotace

Křížová korelace je operace, kterou je možné využít při rozpoznávání obrazu. Obecněji se jedná o způsob, jak vyhodnotit podobnost dvou signálů. Pro vyhodnocení úhlu natočení je využito principu tzv. přizpůsobeného filtru [1]. V tomto případě jsou vstupy křížové korelace PSF, kterou vyhodnocujeme, a vzorová

PSF, se kterou vyhodnocovaný obraz porováváme. Postupně provedeme porovnání pro různá natočení vzorové PSF, pootočené vzory vytvoříme za pomoci matlabovské funkce *imrotate*, a vyhodnotíme, kdy byly obrazy nejpodobnější.

Křížová korelace je prováděna jako násobení fourierovských obrazů, přičemž obraz vzorové PSF je nejprve středově převrácen, a zpětná Fourierova transformace [1]. Tento postup je opakován postupně pro všechna natočení vzorové PSF. Jako vzorovou PSF při vyhodnocování experimentálních dat je možné využít přímo snímek z experimentu, kdy předmět musí být v základní referenční pozici, nebo také obraz vytvořený simulací s vhodnými parametry. Vzorová PSF by měla být co nejpodobnější té vyhodnocované. Pro účely této práce byl použit obraz ze simulace v základní pozici jako vzor.

Přizpůsobený filtr funguje na principu fourierovské filtrace maskou, která je Fourierovou transformací středově převráceného vzorového signálu [1].

Dále bude tato metoda označována v textu písmenem D.

### 3 Vyhodnocení obrazů generovaných simulací

Uvedené metody byly testovány v prvním kroku na obrazech ze simulací. Tyto simulace odpovídají Fraunhoferově aproximaci šíření, čočkové Fourierově transformaci. V druhém kroku pak byly všechny numerické metody konfrontovány se snímky získanými z provedeného experimentu.

Základními typy PSF jsou dvoulaločné, třílaločné a čtyřlaločné, s topologickým nábojem v prvním prstenci  $-1$  nebo  $1$ , s modulační maskou ze dvou nebo tří prstenců.

Z (31) je zřejmé, že čím větší je rozdíl topologických nábojů  $\Delta l$ , tím menší je rychlost otáčení PSF při rozostřování. Zároveň se ale vyšším rozdílem topologických nábojů zmenšuje použitelný rozsah otáčení. Tyto jevy se vzájemně kompenzují, takže se použitelný podélný rozsah rozostření při změně rozdílu topologických nábojů  $\Delta l$  nemění.

Naproti tomu PSF, které vznikly použitím modulační masky s více prstenci, se při rozostřování otáčí pomaleji, ale použitelný úhlový rozsah se nemění. Tím se zvětšuje použitelný podélný rozsah, ale také nároky na přesnost určení natočení úhlu.

#### 3.1 Porovnání s teoretickým vztahem

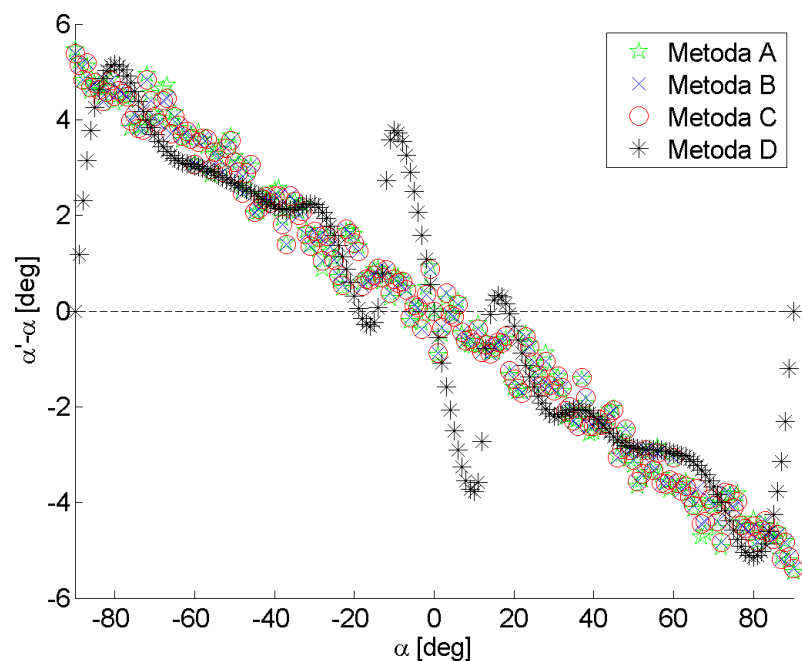
Pro vyhodnocení přesnosti jednotlivých metod bylo nutné najít vhodnou referenci. První možností je využití teoretického vztahu (31). Byly tedy vygenerovány snímky s vypočítaným rozostřením, které by mělo způsobit rotaci PSF o daný úhel. Tento snímek byl následně analyzován a výsledek této analýzy porovnán s úhlem, který odpovídá teoretickému vztahu.

Ukazuje se, že tento postup není vhodný. Uvedený vztah totiž předpokládá nekonečně malou šířku prstenců, se kterou ale v praxi počítat nelze. Díky tomuto zjednodušení vztah neplatí přesně.

Tato odchylka od teorie je zřejmá z obrázku 10, znázornění odchylek při testu na datech ze simulace. Parametry modulační masky této simulace jsou  $\Delta l = 2$ ,  $N = 2$ ,  $l_1 = -1$ . Jedná se tedy o dvoulaločnou PSF (obrázek 4 a), která je často využívaná [4] [5] [11]. Na vodorovné ose je předpokládáný úhel podle teorie a na svislé ose je rozdíl úhlu, který byl určen uvedenými numerickými metodami, a teoretického úhlu.

Také je na obrázku vidět, že se všechny metody přibližně shodují, ale trend určených hodnot je významně odchylen od teoretické hodnoty, tedy v grafu odchylek od nuly. Maximální odchylka nabývá hodnoty  $5,46^\circ$ , což není přípustné.

Dále je na grafu zajímavá zřejmě systematická odchylka metody D, obzvláště ve středu na krajích zobrazeného intervalu. Za zmínku stojí také shoda metody B a C. Ta je ale očekávatelná z důvodu stejného principiálního základu metod.

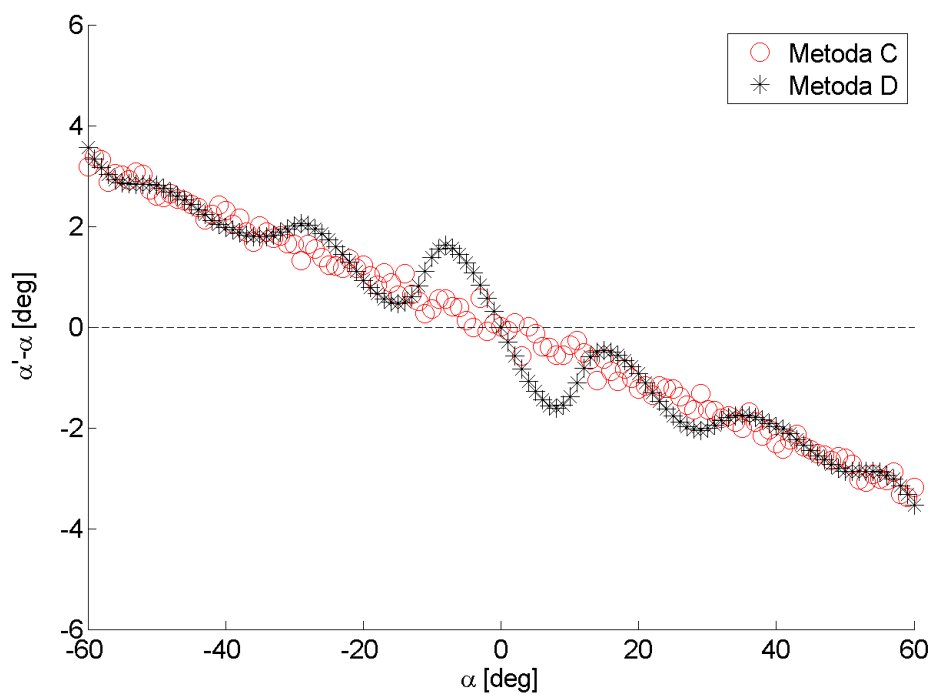


Obrázek 10: Odchylky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

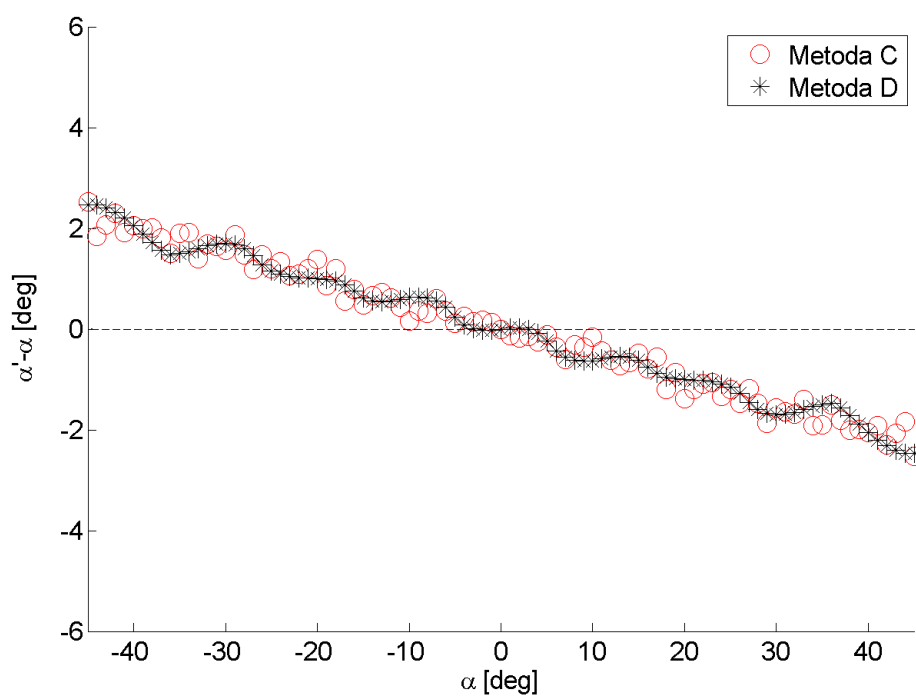
Obdobné chování vykazují i testy na dalších PSF. Na obrázku 11 jsou znázorněny odchylky od teorie trojlaločné PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $N = 2$ ,  $l_1 = -1$  (obrázek 4 b)). Tuto PSF je možné vyhodnotit pouze metodami C a D. V tomto případě je maximální odchylka  $3,56^\circ$ , což je stále velmi významné. Metoda D vykazuje obdobné chování jako v předchozím případě.

Testováním čtyřlaločné PSF (obrázek 4 c)) stejným způsobem, tedy porovnáním s teoretickým vztahem, získáme obrázek 12. Oscilace numerické metody D jsou u této PSF méně výrazné.

Obrázky 10, 11 a 12 demonstrují systematickou odchylku zjištěných úhlů od teoreticky vypočítaných úhlů natočení PSF. Je tedy zřejmé, že není možné tímto způsobem korektně vyhodnotit přesnost předmětných numerických metod.



Obrázek 11: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$



Obrázek 12: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od teoretických hodnot;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

### 3.2 Využití uměle pootočených snímků

Vzhledem k tomu, že lineární vztah mezi úhlem natočení PSF a posunem předmětu je pouze aproximativní, bylo nutné testovat metody jiným způsobem než porovnáváním s tímto vztahem. K tomuto účelu byla využita matlabovská funkce *imrotate*. Byl tedy vytvořen obraz při nulové hodnotě rozostření a ten byl poté pootočen funkcí *imrotate* o přesnou hodnotu úhlu, který byl následně referencí pro posouzení přesnosti testované funkce. Takto lze testovat metody zcela nezávisle na charakteru závislosti úhlu otočení na posunu předmětu. Tento postup předpokládá, že se obraz při defokusaci pouze otáčí, ale nemění se jeho tvar (to ve skutečnosti neplatí). Jedná se tedy o silné zjednodušení, které se například nedá využít pro analýzu aberovaných PSF.

Testování s využitím uměle pootočených snímků je rozděleno do tří částí. V každé části proběhne test na dvoulaločné ( $\Delta l = 2$ ), třílaločné ( $\Delta l = 3$ ) a čtyřlaločné PSF ( $\Delta l = 4$ ). V první části půjde o PSF vzniklé použitím dvouprstencové masky ( $N = 2$ ) s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = -1$ . Tato skupina PSF je nejčastěji používaná. Ve druhé části bude mít maska dva prstence ( $N = 2$ ) a topologický náboj v prvním prstenci  $l_1 = 1$ . Zde se dá očekávat rozšíření stopy a zpřesnění výsledků oproti předchozí skupině PSF. Třetí skupina PSF bude vytvořena maskou se třemi prstenci ( $N = 3$ ) a topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = -1$ . Použití takové PSF by mohlo být užitečné z důvodu větší celkové propustnosti.

Důležitým ukazatelem přesnosti dané metody je aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek

$$R = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\alpha'_m - \alpha_m|, \quad (32)$$

maximální zaznamenaná odchylka  $MAX$ , a střední kvadratická odchylka

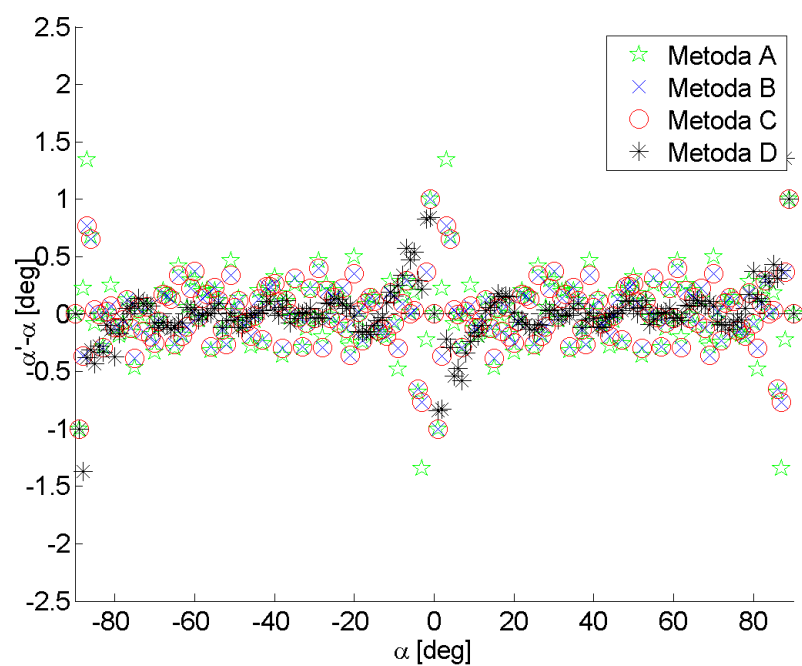
$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M (\alpha'_m - \alpha_m)^2}{M}}, \quad (33)$$

kde  $M$  je celkový počet testovacích snímků,  $\alpha'_m$  je určený úhel z  $m$ -tého snímku a  $\alpha$  je referenční úhel  $m$ -tého snímku.

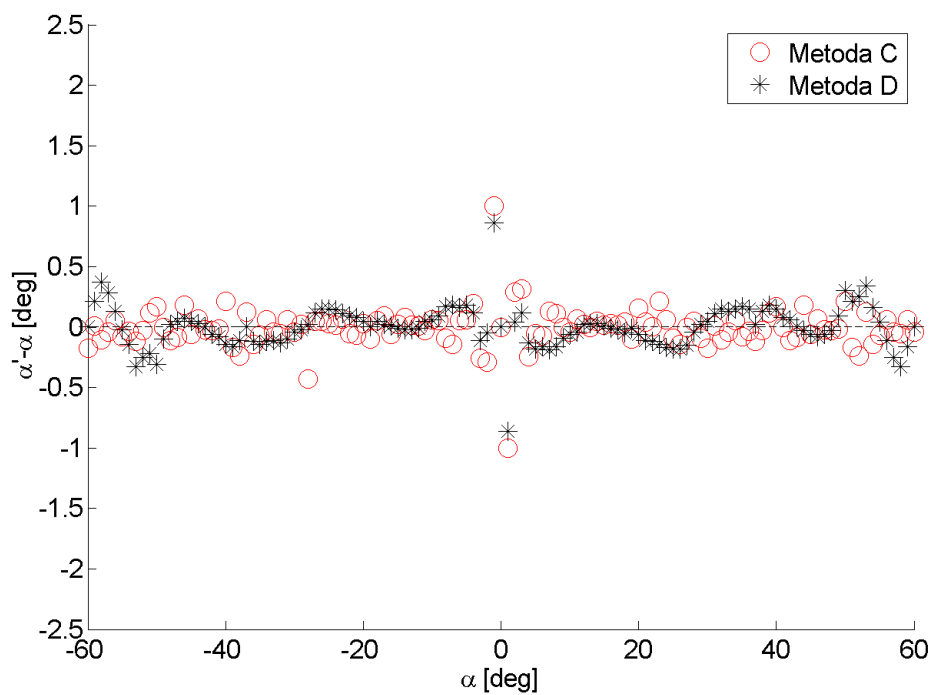
První testovaná PSF byla vytvořena maskou s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  a její stopa vytvořená simulací je na obrázku 4 a). Graf s odchylkami je na obrázku 13. Největší odchylka byla zaznamenaná u metody D a to  $1,37^\circ$ . Průměrná absolutní hodnota odchylky a střední kvadratická odchylka u všech metod byla pod  $0,5^\circ$ .

O něco přesnějšího určení úhlu bylo dosaženo u trojlaločné PSF (obrázek intenzitní stopy 4 b)) s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  (obrázek s odchylkami 14). Maximální zaznamenaná odchylka byla u metody C, nabyla hodnoty  $1,00^\circ$ . Střední kvadratické odchylky obou metod byly  $0,17^\circ$ . Jedná se tedy o významné zlepšení oproti předchozí dvoulaločné stopě.



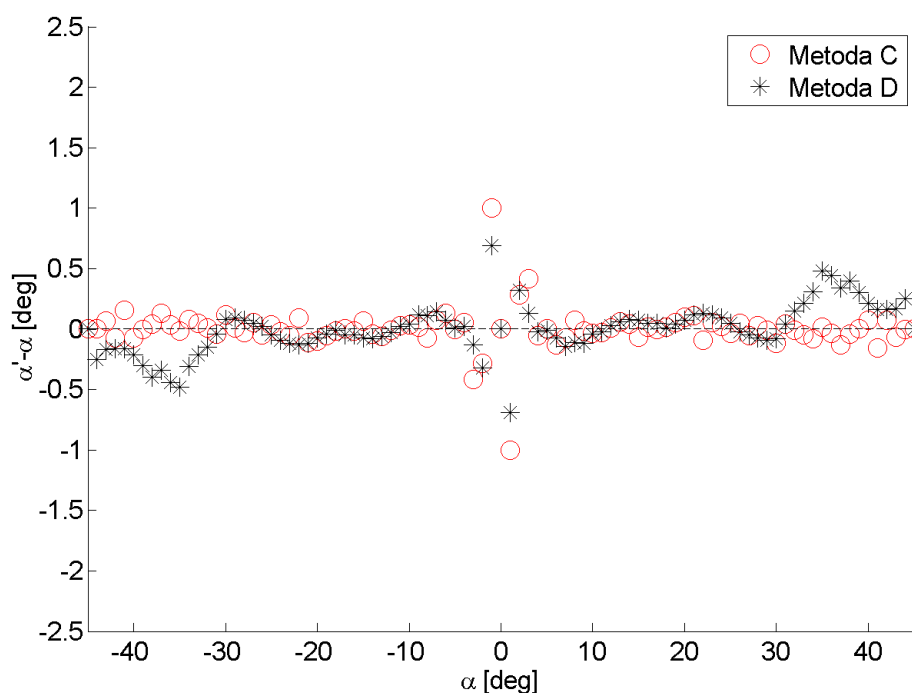


Obrázek 13: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$



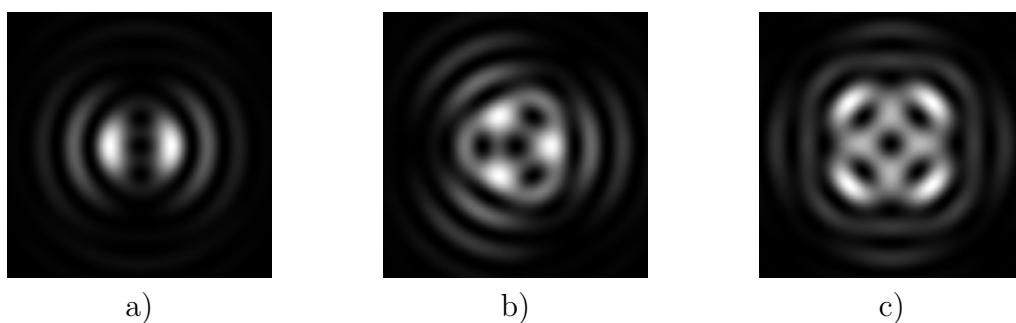
Obrázek 14: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

V případě čtyřlaločné PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  (obrázek intenzitní stopy 4 c)) došlo u metody C k mírnému zlepšení oproti předchozí třílaločné PSF, zatímco metoda D se v tomto případě z pohledu střední kvadratické odchylky a průměrné absolutní hodnotě odchylek zhoršila, přestože maximální odchylka klesla na  $0,69^\circ$ . Odchylky jsou graficky znázorněny v grafu na obrázku 15.



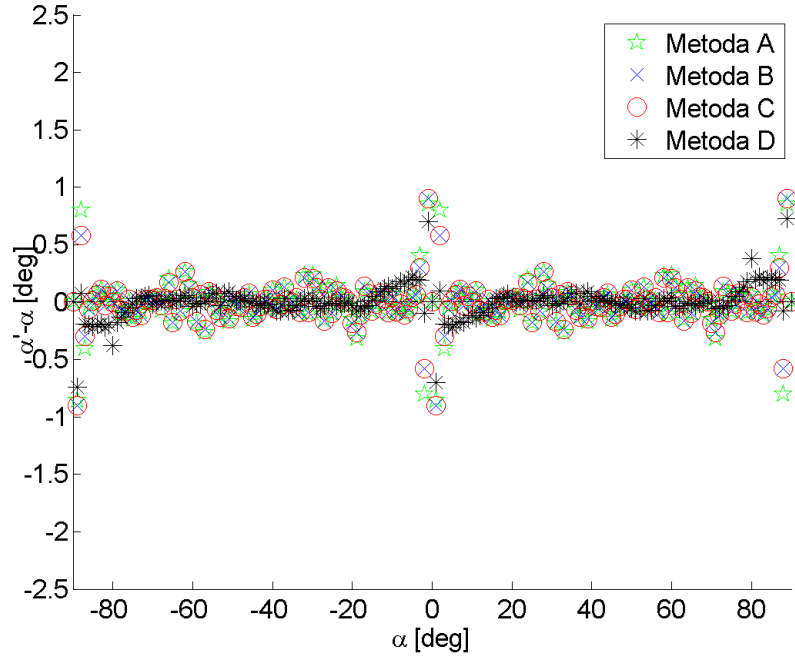
Obrázek 15: Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Dále budou uvedeny výsledky vyhodnocení metod na PSF s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = 1$ . Tyto PSF s počtem laloků  $\Delta l = 2, 3, 4$  při počtu prstenců  $N = 2$  jsou na obrázku 16. U těchto obrazů nabývají na významu vedlejší maxima, která mohou být pro metody B a C komplikací.



Obrázek 16: PSF; a)  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ ; b)  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ ; c)  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

Vyhodnocení PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  je zajímavé především nízkými odchylkami metody D v oblastech okolo diagonálního a antidiagonálního směru natočení PSF (natočení blízka směrům  $-45^\circ$  a  $45^\circ$ ), a vyššími odchylkami okolo kolmých směrů (natočení do směru  $-90^\circ$ ,  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ). Odchyly jsou zaznamenány na obrázku 17. U této metody byla sice zaznamenána vyšší maximální odchylka, ale průměrná absolutní hodnota odchylky a střední kvadratická odchylka se oproti všem předchozím případům snížila.

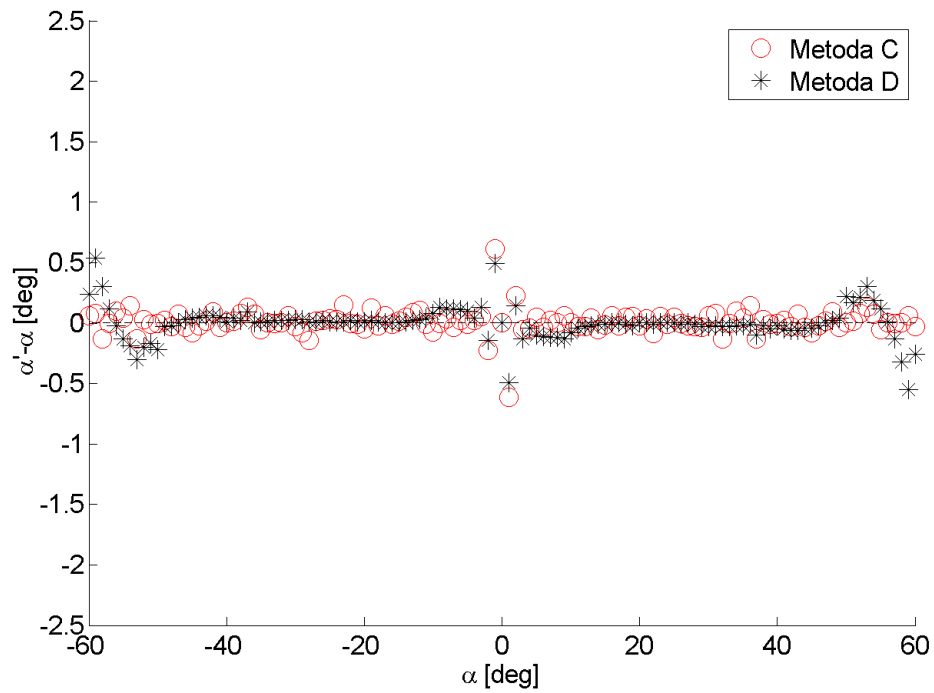


Obrázek 17: Odchyly určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

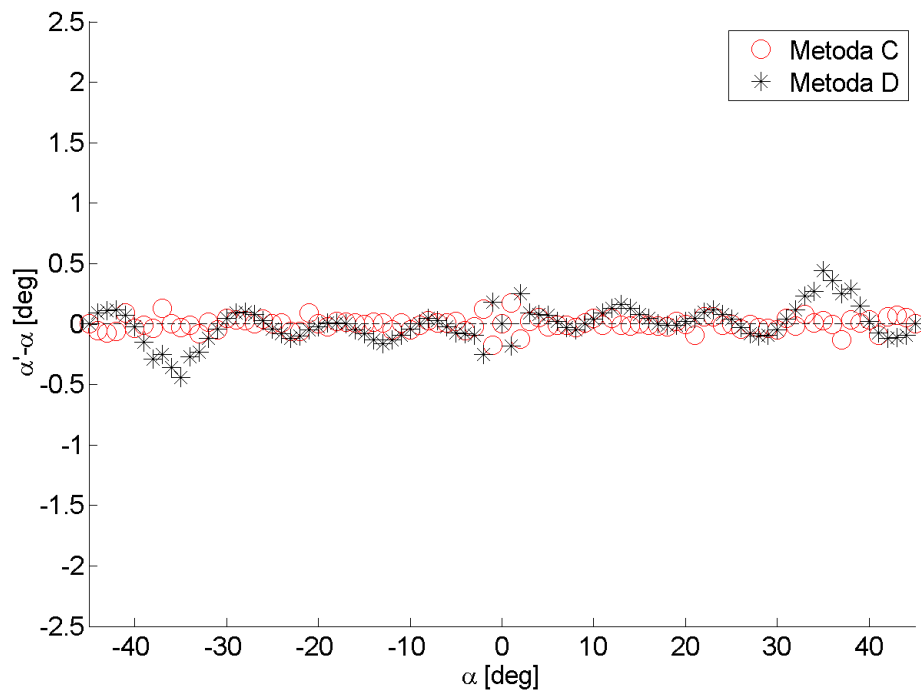
Obdobné chování bylo zaznamenáno také pro trojlaločnou PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  (obrázek 18). Metoda D se opět na okrajích a ve středu intervalu (směry  $-60^\circ$ ,  $0^\circ$  a  $60^\circ$ ) odchyluje od předpokládaných hodnot, zatímco mezi těmito oblastmi dosahuje dobrých výsledků.

Také u vyhodnocení další PSF (obrázek 19) s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  lze zaznamenat vyšší oscilace metody D ve středu a na okrajích intervalu (směry  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$  a  $45^\circ$ ). Avšak u této PSF je jistá, byť nižší, oscilace znatelná pro celý rozsah. Je ale potřeba uvést, že použitelný interval je pro čtyřlaločnou PSF značně kratší. To může být důvodem zesílení oscilací pro oblasti mimo střed a okraje intervalu. Například v případě dvoulaločné PSF (obrázek 17) zabírala oblast vysokých oscilací okolo nulového úhlu přibližně oblast od  $-20^\circ$  do  $20^\circ$  a obdobně také na okrajích intervalu. To je ale pro čtyřlaločnou PSF celý její použitelný rozsah.

Dále je nutné zmínit mimořádnou přesnost metody C pro tuto PSF. Její maximální odchylka je  $0,18^\circ$  a střední kvadratická odchylka  $0,05^\circ$ .

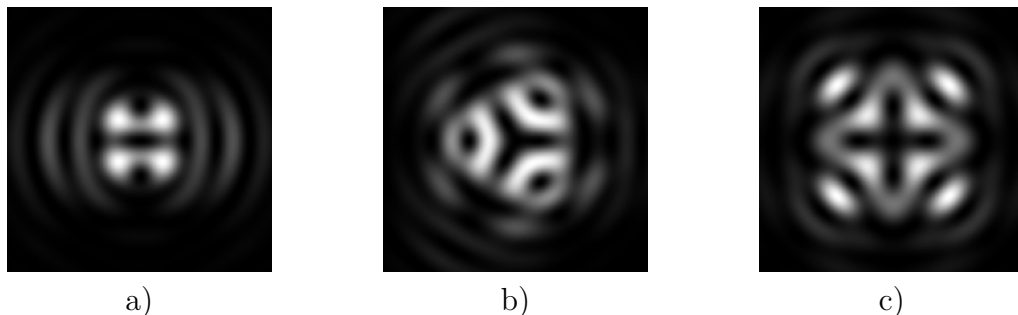


Obrázek 18: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$



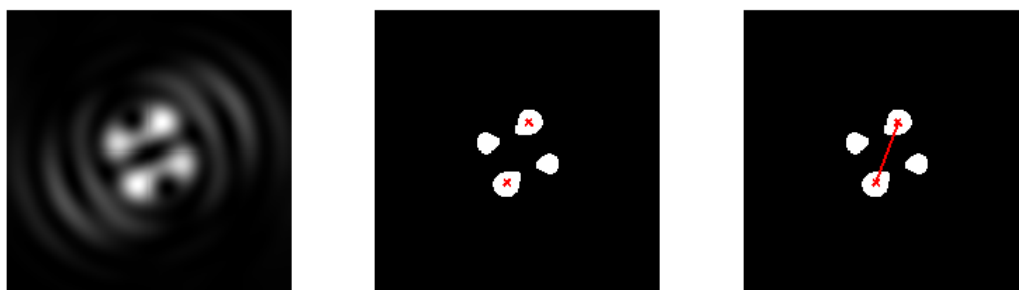
Obrázek 19: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

Třetí kategorií testovací obrazů jsou PSF vzniklé při použití masky se třemi prstenci (obrázek 20). Takovou maskou projde oproti dvouprstencové více světla, což je její hlavní výhodou. Druhou výhodou je pomalejší otáčení PSF při rozostřování, což sice klade vyšší nároky na přesnost určení úhlu, ale je díky tomu pokryt větší rozsah lineárního posunu v předmětovém prostoru.



Obrázek 20: PSF; a)  $\Delta l = 2$   $l_1 = -1$ ,  $N = 3$ ; b)  $\Delta l = 3$   $l_1 = -1$ ,  $N = 3$ ; c)  $\Delta l = 4$   $l_1 = -1$ ,  $N = 3$

S vyhodnocením PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$  měla metoda A významný problém. Přestože je PSF dvoulaločná, nevykazuje dostatečnou elipticitu a proto ji tato metoda nedokázala vyhodnotit. Také metody B a C měly s vyhodnocením potíže, neboť se tato PSF binarizací s binarizační hranicí 60 % rozpadla na čtyři laloky namísto dvou (obrázek 21).

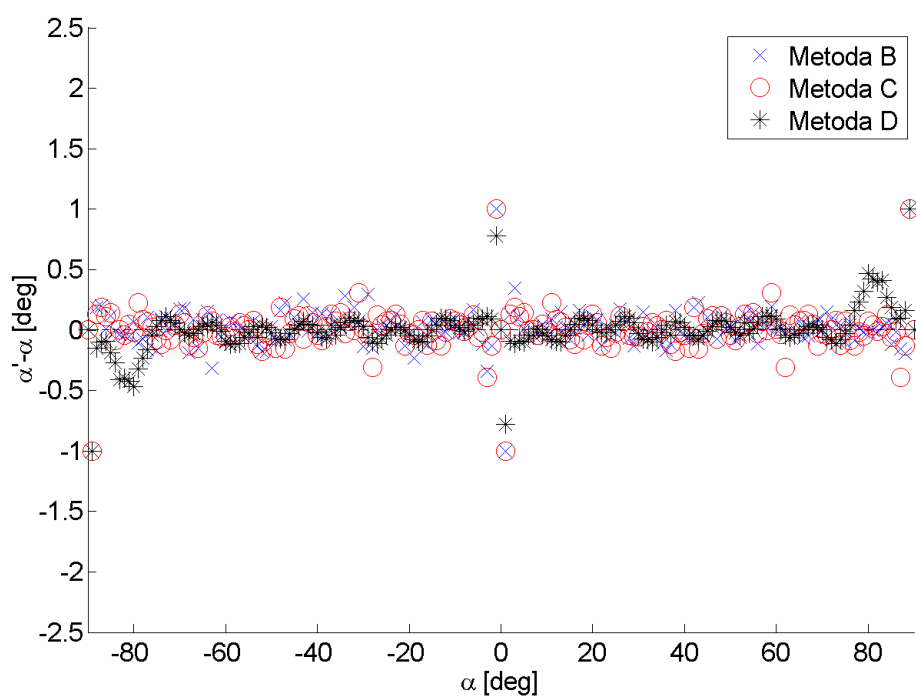


Obrázek 21: Test metody B; PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

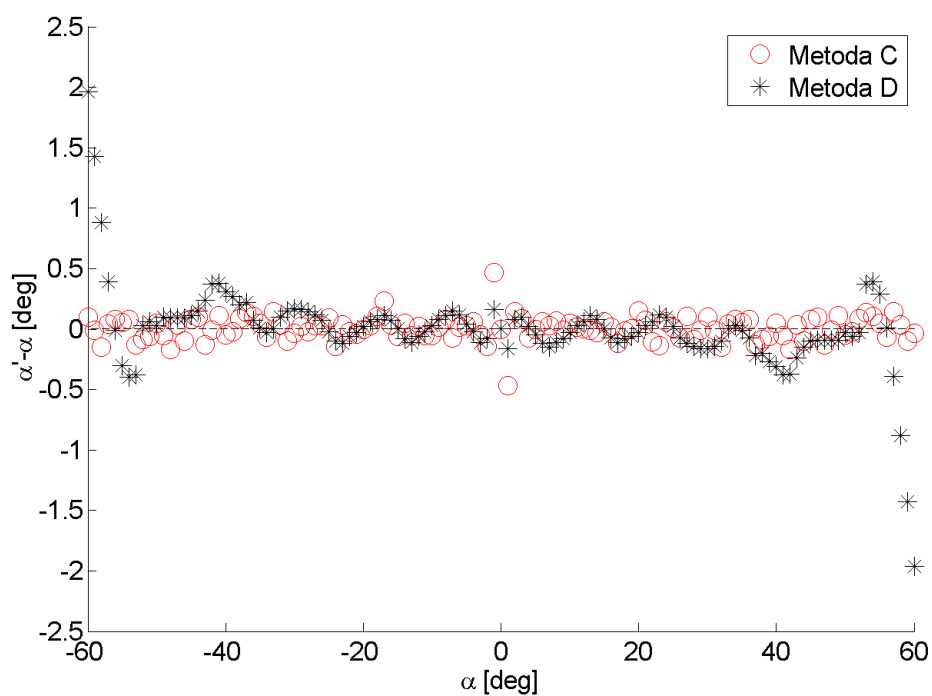
Přesto tyto metody vyhodnotily změnu úhlu korektně, pouze s posunem o  $45^\circ$ . Tento posun byl dodatečně odstraněn.

Graf odchylek je na obrázku 22. V grafu je zřejmá oscilace odchylek metody D. I přes výše uvedené problémy s binarizací a následným vyhodnocením se odchylky všech metod drží v přijatelných mezích pouze s úskoky ve středu a na krajích vyhodnocovaného intervalu.

Na obrázku 23 vidíme výsledky testu metod na PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$ . Oscilace na okrajích intervalu jsou u metody D velmi významné, dosahují hodnoty  $1,96^\circ$ .

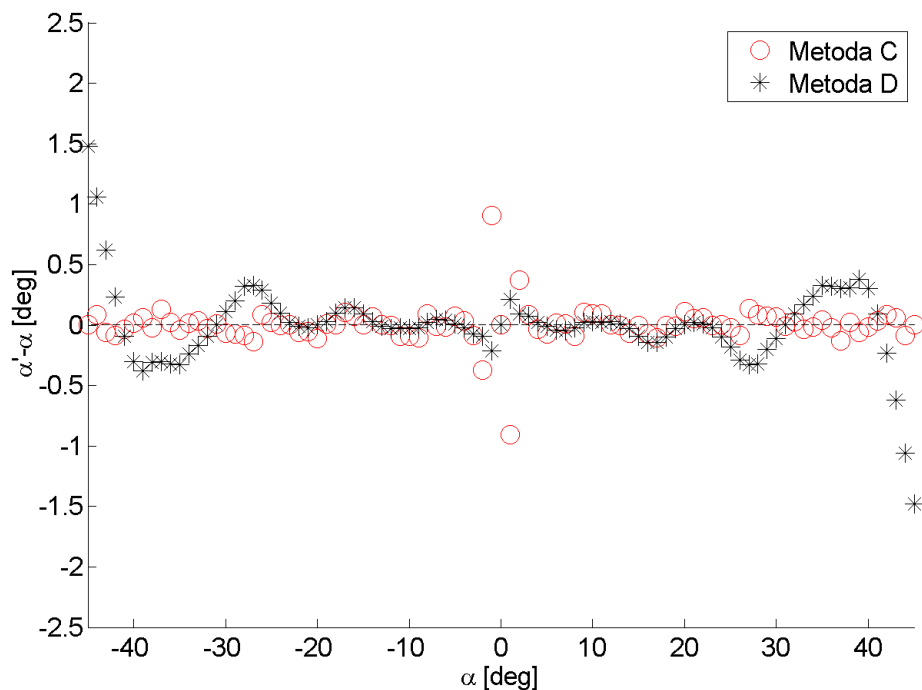


Obrázek 22: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$



Obrázek 23: Odchylyky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$

Poslední testovací PSF má parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$  a výsledky vyhodnocování jejího natočení je na obrázku 24. Maximální zaznamenaná odchylka v grafu je  $1,48^\circ$  u metody D a  $0,90^\circ$  u metody C.



Obrázek 24: Odchylky určení úhlu natočení PSF s využitím uměle pootočených obrazů;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$

Výsledky testování s využitím aproximativní referenční přímky jsou shrnuty v tabulce 1. V každém řádku je vyhodnocení testu na jiné PSF (podle parametrů v prvních třech sloupcích). Postupně jsou uvedeny ke každé metodě aritmetický průměr absolutních hodnot odchylek  $R$ , maximální zaznamenaná absolutní hodnota odchylky  $MAX$  a střední kvadratická odchylka  $RMS$ .

Tabulka 1: Vyhodnocení testů využívajících uměle pootočené obrázky

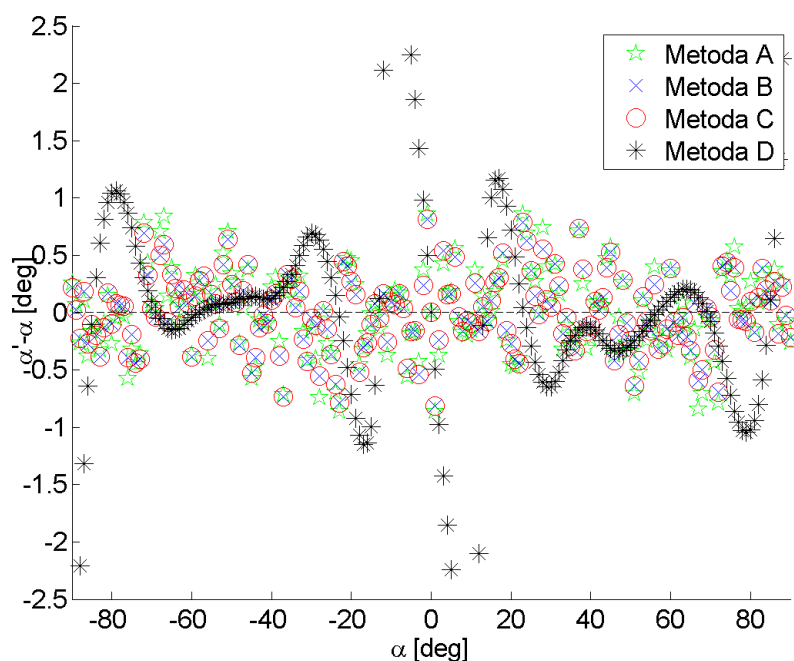
Parametry		Metoda A			Metoda B			Metoda C			Metoda D		
$l_1$	$\Delta l$	$R$	MAX	RMS	$R$	MAX	RMS	$R$	MAX	RMS	$R$	MAX	RMS
-1	2	0,24°	1,34°	0,34°	0,21°	1,00°	0,28°	0,21°	1,00°	0,28°	0,16°	1,37°	0,27°
-1	3	-	-	-	-	-	-	0,10°	1,00°	0,17°	0,12°	0,86°	0,17°
-1	4	-	-	-	-	-	-	0,08°	1,00°	0,18°	0,14°	0,69°	0,20°
-1	2	-	-	-	0,11°	1,00°	0,19°	0,10°	1,00°	0,18°	0,10°	1,00°	0,18°
-1	3	-	-	-	-	-	-	0,07°	0,46°	0,10°	0,19°	1,96°	0,37°
-1	4	-	-	-	-	-	-	0,08°	0,90°	0,16°	0,19°	1,48°	0,33°
1	2	0,12°	0,85°	0,21°	0,11°	0,90°	0,19°	0,11°	0,90°	0,19°	0,09°	0,74°	0,15°
1	3	-	-	-	-	-	-	0,06°	0,62°	0,10°	0,08°	0,55°	0,14°
1	4	-	-	-	-	-	-	0,04°	0,18°	0,05°	0,11°	0,44°	0,14°



### 3.3 Proložení dat aproximativní přímkou

Další možností, jak získané metody vyhodnotit, bylo konfrontovat je se simulačními daty, ale následně je neporovnávat s teoretickým vztahem, nýbrž s vypočítanou přímkou, kterou získané úhly budou proloženy. Předpokládáme tedy lineární vztah rozostření a rotace. Vyhodnocována bude odchylka od linearity. Tento postup zároveň odpovídá praxi, kdy se systém podobnou metodou kalibruje a to tak, že se z naměřených dat vypočítají parametry odpovídající přímky.

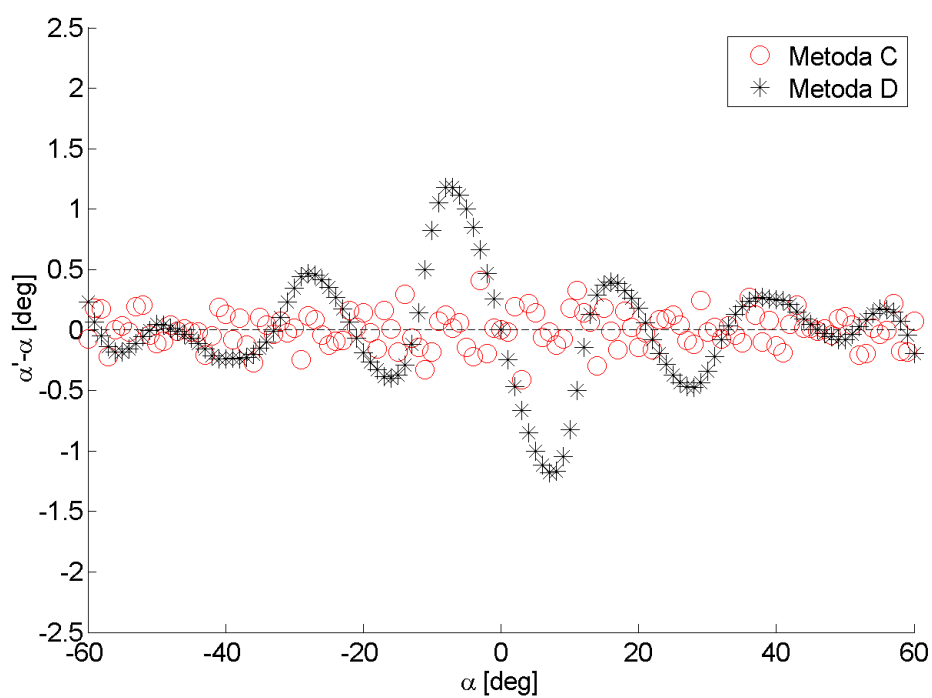
Na obrázku 25 vidíme odchylky od aproximativní přímky, přičemž pro každou metodu je tato přímka jiná, pro PSF s parametry  $\Delta l = 2$   $l_1 = -1$   $N = 2$  (obrázek intenzitní stopy 4 a). Jedná se o dvoulaločnou stopu, proto je možné použít všechny čtyři metody. Pro tuto PSF je z důvodu vysoké systematické chyby nevhodná metoda D.



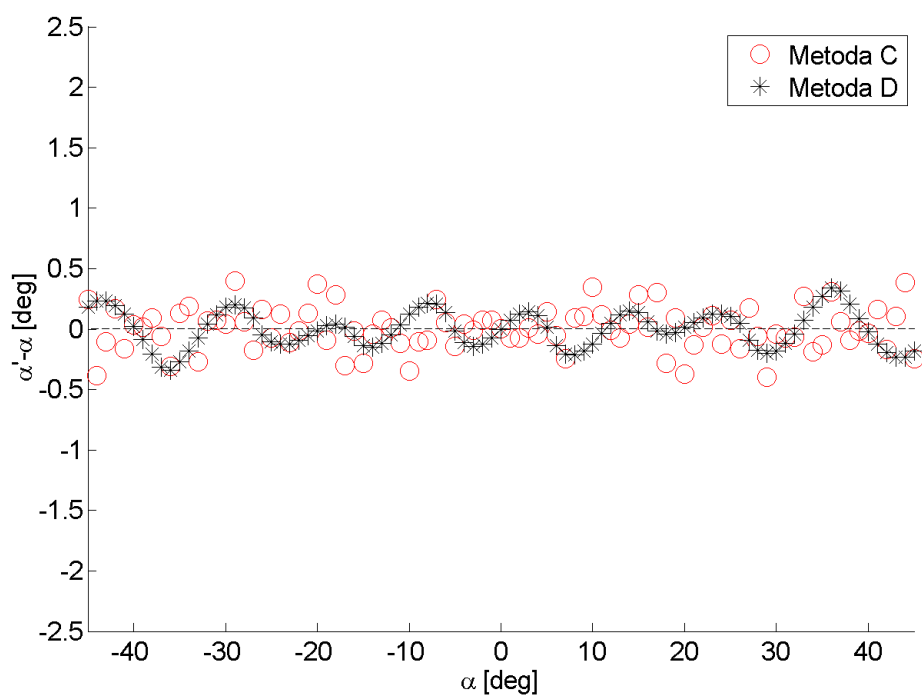
Obrázek 25: Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Vyhodnocení testu využívajícího aproximativní reference na PSF s parametry  $\Delta l = 3$   $l_1 = -1$   $N = 2$  (obrázek 4 b)) je znázorněno na obrázku 26. Zde je opět daleko přesnější metoda C než D a to i přesto, že maximální zaznamenaná odchylka metody D dosahuje hodnoty  $1,18^\circ$ , zatímco v předchozím případě to bylo  $4,63^\circ$ .

Zajímavý je případ PSF s parametry  $\Delta l = 4$   $l_1 = -1$   $N = 2$  (světelná stopa je na obrázku 4 c). Vyhodnocení je na obrázku 27. V tomto případě se naopak jeví být výhodné použití metody D. Dále stojí za zmínku, že se metoda D pro tuto PSF dostává přesností na úroveň ostatních metod u předchozích PSF.



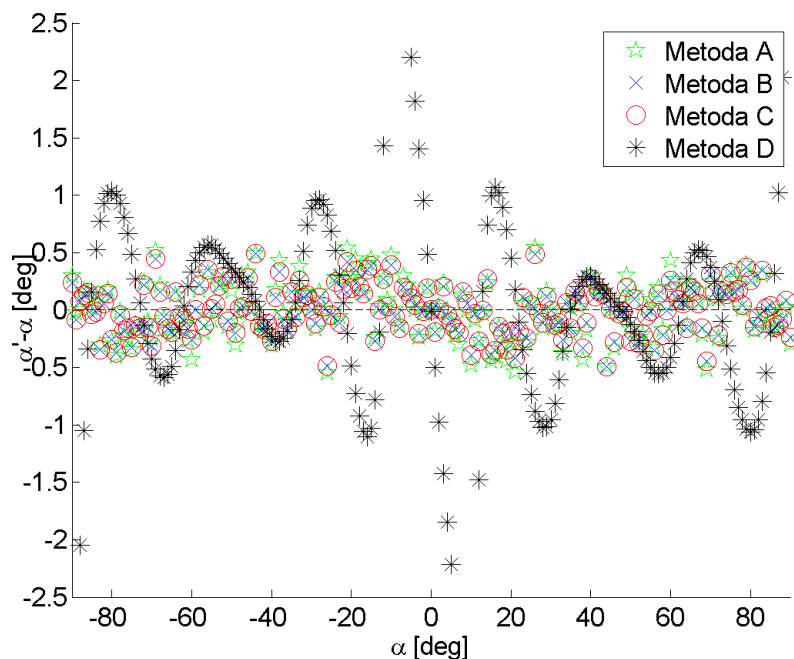
Obrázek 26: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$



Obrázek 27: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Zatímco dosud byly vyhodnocovány pouze PSF s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = -1$ , nyní se dostáváme k další kategorii.

Dvoulaločná PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  byla vyhodnocena o něco přesněji než dvoulaločná PSF s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = -1$  (obrázek 28). To je způsobeno pravděpodobně tím, že vyšší topologický náboj způsobil rozšíření celé stopy. Díky tomu stejná lineární odchylka představuje u PSF s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = 1$  menší úhlovou odchylku.

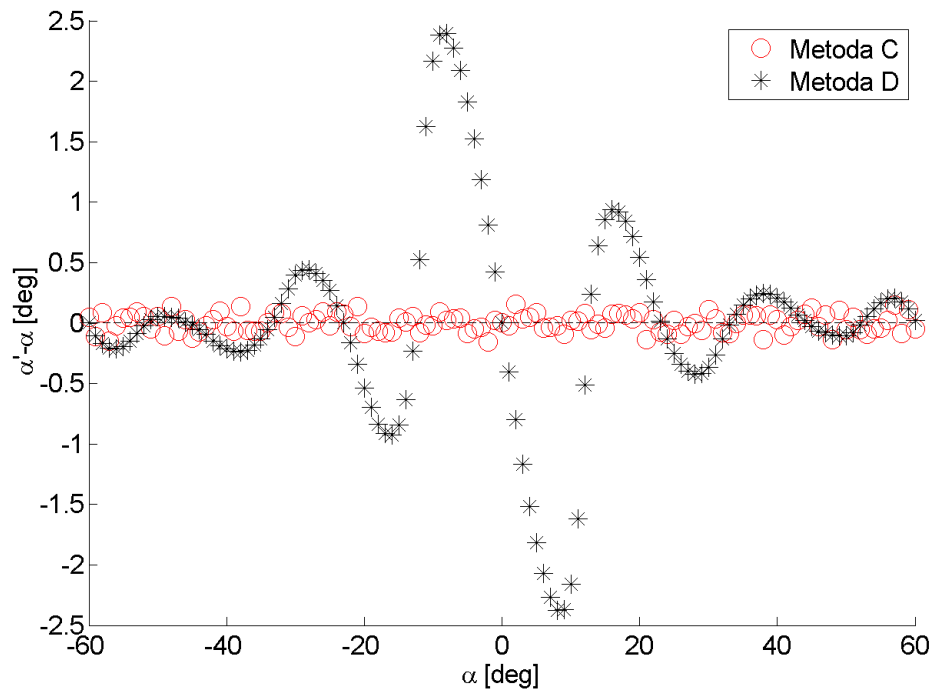


Obrázek 28: Odchylky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

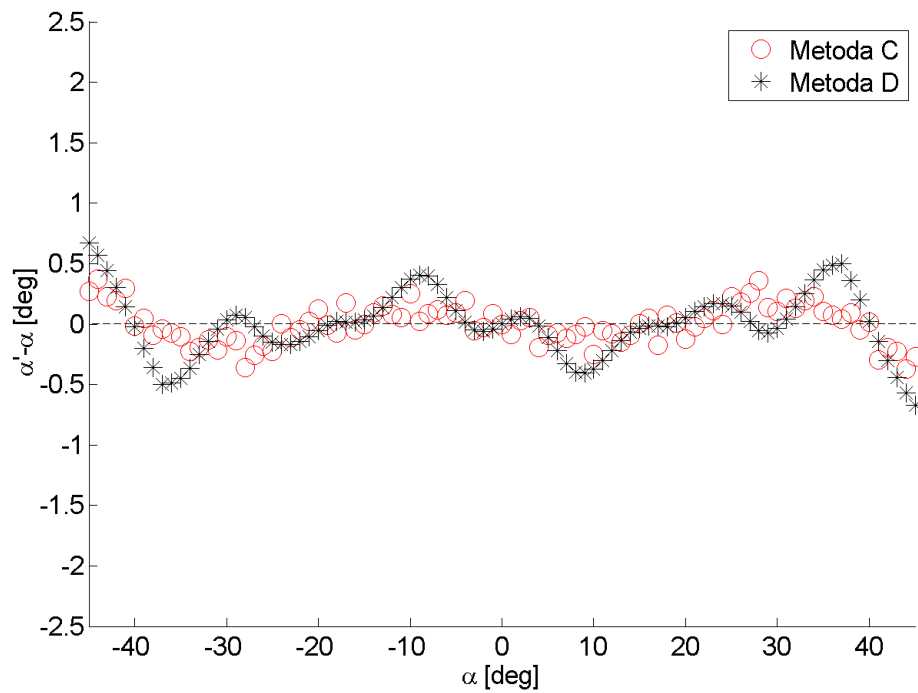
Nyní přichází na řadu druhá skupina testovacích obrazů s topologickým nábojem v prvním prstenci masky  $l_1 = 1$  a počtem prstenců  $N = 2$ . Bude se opět jednat o dvoulaločnou, třílaločnou a čtyřlaločnou PSF.

Obrázek 29 znázorňuje odchylku od lineární aproximace trojlaločné PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ . Opět je velmi markantní oscilace metody D s maximální zaznamenanou odchylkou  $2,39^\circ$ , která značně převyšuje odchylky metody C.

Odchylky čtyřlaločné PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  (obrázek 30) jsou významně vyšší u metody D. Maximální zaznamenaná odchylka je  $0,67^\circ$  u metody D a  $0,36^\circ$  u metody C.



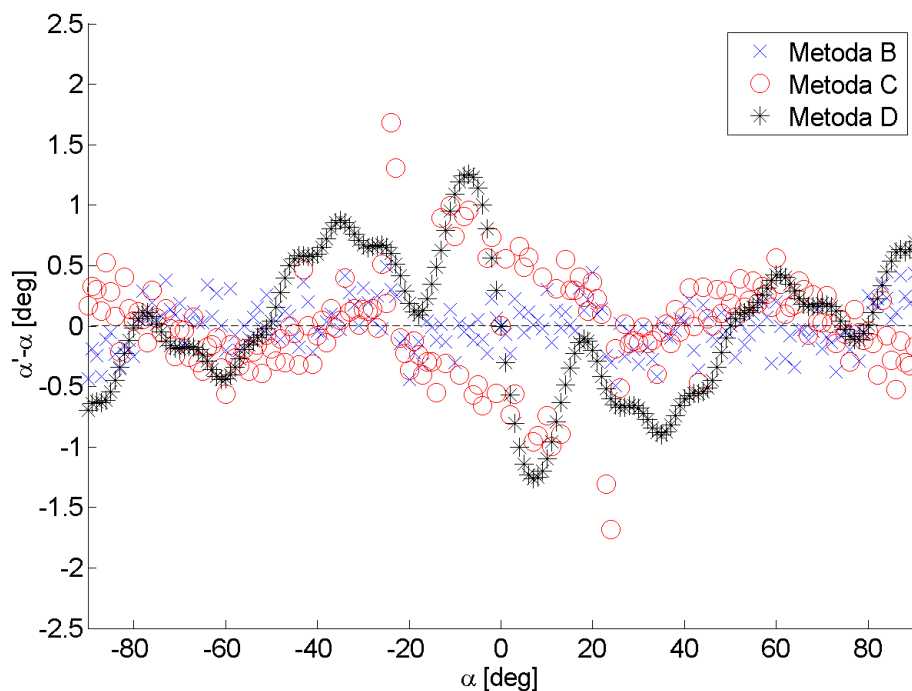
Obrázek 29: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$



Obrázek 30: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

Následuje vyhodnocení přesnosti metod na testovacích PSF vzniklých při použití tříprstencové modulační masky.

I přes problémy s binarizací (obrázek 21) testování na PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$  proběhlo s přijatelnou přesností (obrázek 31), maximální zaznamenaná odchylka byla u metody C  $1,68^\circ$ .



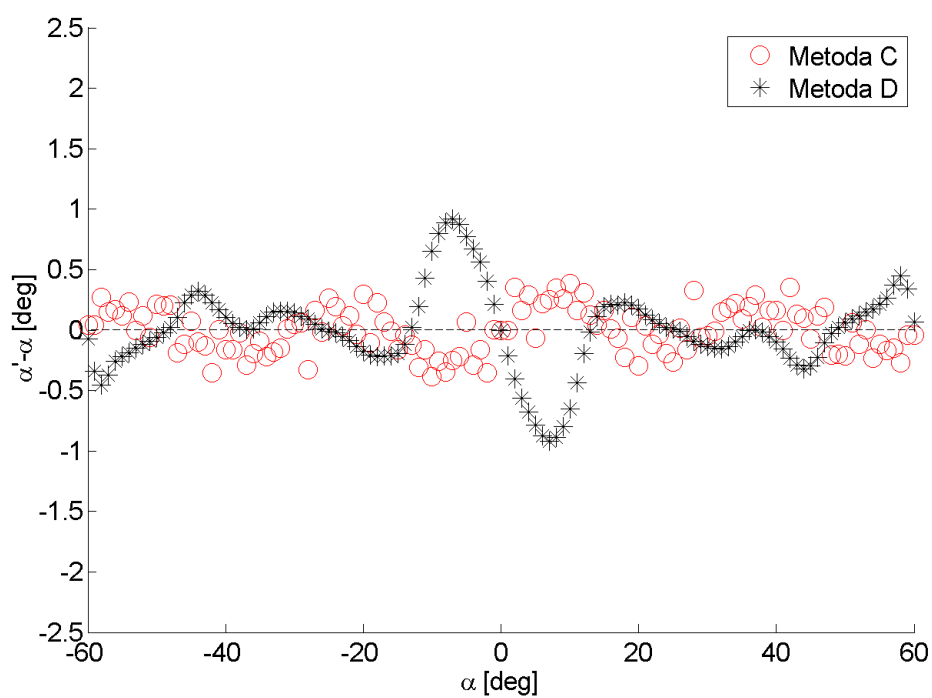
Obrázek 31: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$

Testování na trojlaločné PSF bylo, jako i v předchozích skupinách PSF, přesnější (obrázek 32). Maximální zaznamenaná odchylka byla u metody D  $0,92^\circ$  v oblasti nulového posunu, kde se vyskytovaly významné oscilace i na předchozích grafech u této metody.

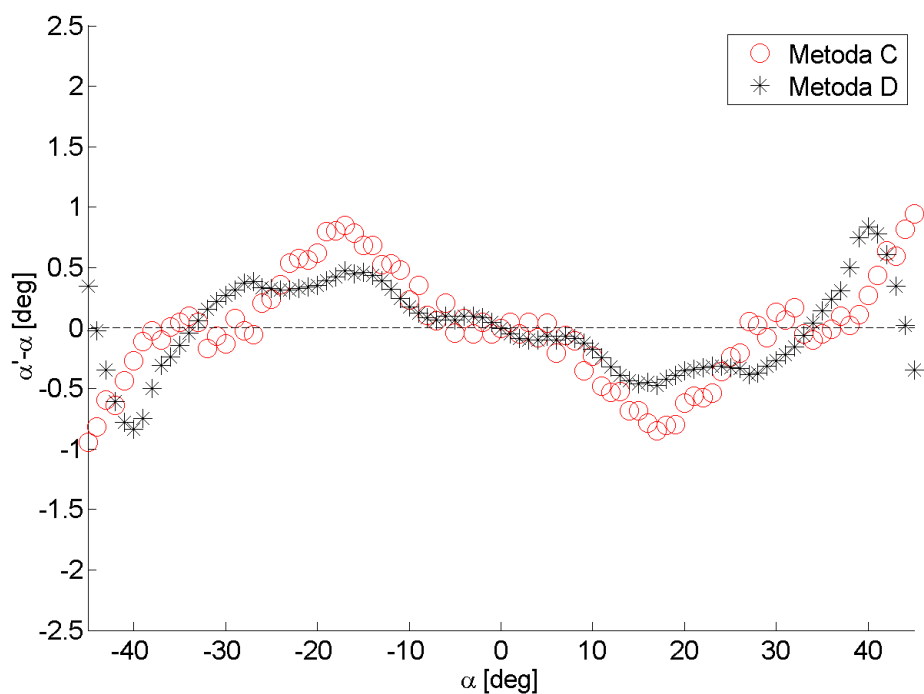
Obdobné přesnosti dosáhly uvedené numerické metody také při testování na PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$  (obrázek 33). Maximální zaznamenaná odchylka nabyla hodnoty  $0,95^\circ$  a to u metody C.

V tabulce 2 jsou uvedeny aritmetické průměry absolutních hodnot odchylek  $R$ , maximální zaznamenané odchylky  $MAX$  a střední kvadratické odchylky  $RMS$ .

Nejmenších odchylek obecně dosahovala metoda C, potažmo B, neboť obě metody dávají stejné výsledky. Výjimku tvoří případ dvoulaločné PSF tříprstencové masky, která měla problém s binarizací, jak bylo popsáno výše. Vyjme-li z vyhodnocení problematický případ PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$ , můžeme říct, že maximální zaznamenaná odchylka metody C je u všech PSF pod hranicí  $1^\circ$ . Pod touto hranicí zůstávají také odchylky metody A, ale tato metoda byla testována pouze na dvou PSF.



Obrázek 32: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$



Obrázek 33: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 3$

Tabulka 2: Vyhodnocení testů využívajících aproximační referenci

Parametry		Metoda A			Metoda B			Metoda C			Metoda D			
$l_1$	$\Delta l$	$N$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$
-1	2	2	0,29°	0,86°	0,36°	0,26°	0,81°	0,32°	0,26°	0,81°	0,32°	0,75°	4,63°	1,20°
-1	3	2	-	-	-	-	-	-	0,11°	0,41°	0,14°	0,31°	1,18°	0,43°
-1	4	2	-	-	-	-	-	-	0,14°	0,40°	0,18°	0,13°	0,34°	0,15°
-1	2	3	-	-	-	0,16°	0,49°	0,20°	0,30°	1,68°	0,42°	0,46°	1,26°	0,56°
-1	3	3	-	-	-	-	-	-	0,16°	0,38°	0,19°	0,24°	0,92°	0,33°
-1	4	3	-	-	-	-	-	-	0,33°	0,95°	0,44°	0,30°	0,84°	0,36°
1	2	2	0,20°	0,55°	0,24°	0,17°	0,49°	0,21°	0,17°	0,49°	0,21°	0,79°	4,37°	1,18°
1	3	2	-	-	-	-	-	-	0,06°	0,16°	0,07°	0,52°	2,39°	0,84°
1	4	2	-	-	-	-	-	-	0,13°	0,37°	0,16°	0,19°	0,67°	0,26°

Výsledky ukazují, že největší přesnosti bylo dosaženo při použití trojlaločných PSF. Nabízí se úvaha, že má vliv úhlová rozteč laloků, která v těchto případech není rovna násobku  $90^\circ$  a je tedy čtvercovou sítí lépe navzorkována. Nutno dodat, že podle teoretického vztahu pro rychlost otáčení PSF (31) by pro stejně přesné určení rozostření v předmětovém prostoru, musela být přesnost určení úhlu u trojlaločné PSF  $1,5\times$  větší oproti dvoulaločné PSF.

Také použití modulačních masek s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = 1$  se ukázalo být výhodné. Takovéto PSF mají těžiště laloků situovány dále od středu PSF, což způsobuje menší nepřesnost určení úhlu při stejné lineární nepřesnosti určení pozice tohoto těžiště.

Tříprstencové masky nelze pro vyhodnocení metodou C doporučit, neboť jejich PSF byly určeny nejméně přesně. Zato metoda D, pravděpodobně díky komplikovanému tvaru obrazců, dosahovala u dvoulaločných a třílaločných PSF u tříprstencových masek lepších výsledků než u dvouprstencových.

Celkově byla nejlépe vyhodnocena PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  a to metodou C. Tento závěr odpovídá předchozím tvrzením a obecně se to nevymyká předpokladům.

Systematická odchylka metody D zhoršuje významně její přesnost. Tato odchylka může být způsobena nepřesností použité funkce *imrotate*, která při pootočení obrazu musí vždy provést interpolaci a dopočítat hodnoty v místech nových pixelů. A také skutečností, že rozostřením se PSF nejen otáčí, ale také deformuje, kdežto vzor v podobě pootočené základní PSF se nijak nemění. Tomu, že problém způsobuje právě funkce *imrotate*, nasvědčuje i to, že popsané oscilace nejsou tak významné u grafů, které odpovídají vyhodnocení uměle natočených snímků. V těchto případech je vzor i vyhodnocovaný obraz vytvořený *imrotate* a tím se chyba nejspíš částečně kompenzuje. Tento problém by se dal při měření vyřešit použitím experimentálně vytvořených kalibračních snímků.



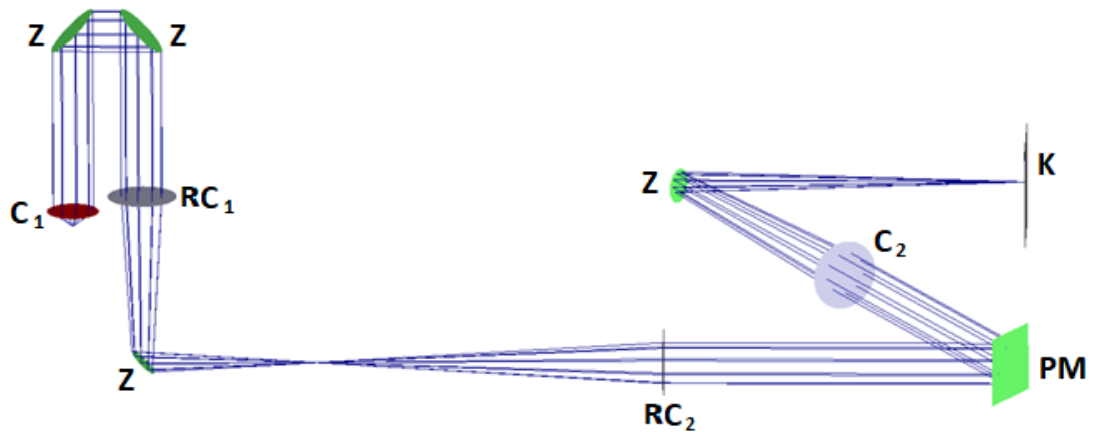
## 4 Vyhodnocení experimentálních obrazů

Finálním krokem bylo ověření teorie experimentálními metodami.

### 4.1 Experimentální sestava

Experiment v základu odpovídá schématu na obrázku 1. Jedná se tedy o 4-f systém. Celá optická soustava experimentu je znázorněna na obrázku 34.

Hlavními změnami v experimentální soustavě oproti původní teoretické sestavě jsou dvě čočky navíc a prostorový modulátor. Dvě přidané čočky  $RC_1$  a  $RC_2$  jsou nutné pro přezobrazení fourierovské roviny do větší vzdálenosti za objektiv  $C_1$ , neboť modulační maska byla z důvodu variability systému realizována prostorovým modulátorem, který nebylo možné umístit tak blízko za mikroskopový objektiv.



Obrázek 34: Schéma experimentální sestavy pro záznam rotující PSF  
 $C_1$  – mikroskopový objektiv,  $Z$  – zrcadla,  $RC_1$  – čočka,  $RC_2$  – čočka,  
 $PM$  – prostorový modulátor,  $C_2$  – čočka,  $K$  – kamera

Koncept sestavy počítá s dokonalým bodovým předmětem s nekonečně malými rozměry na vstupu, takový předmět ale není realizovatelný. Bylo tedy potřeba zajistit vhodnou náhradu. V první fázi byla použita dírková clona s průměrem  $1\ \mu\text{m}$ , ta se ale neukázala být vhodnou, neboť propouštěla příliš málo světla, a to i v případě předřazení objektivu, coby osvětlovací soustavy, čímž se komplikovala justáž a snižoval se podíl signálu a šumu. Proto bylo jako předmět použito přímo čelo optického vlákna s průměrem jádra  $4\ \mu\text{m}$  a numerickou aperturou  $A = 0,1$ , do kterého bylo navázáno světlo z helium-neonového laseru.

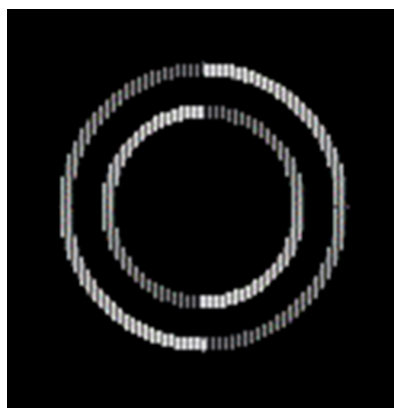
Jako první člen 4-f systému, na obrázku 34 čočka  $C_1$ , byl zvolen mikroskopový objektiv s ohniskovou vzdáleností  $f_1 = 9\ \text{mm}$  a numerickou aperturou  $A_{C_1} = 0,4$ . Mikroskopový objektiv byl vertikálně orientován, aby bylo soustavu možné jednoduše transformovat pro případné pozorování drobných částic rozptýlených v kapalině. Pro zalomení optické osy za objektivem do horizontálního směru byla použita tři zrcadla.

Mikroskopový objektiv vytvořil fourierovský obraz v příliš malé sečné vzdálenosti za objektivem, takže nebylo možné do této roviny modulátor umístit. Proto bylo potřeba fourierovskou rovinu přezobrazit do větší vzdálenosti. K tomuto přezobrazení byly využity dvě shodné čočky, na obrázku 34 označeny  $RC_1$  a  $RC_2$ , s ohniskovými vzdálenostmi 200 mm v sestavě dvoučlenného převraccího systému s rovnoběžným chodem paprsků mezi prvky. Vzájemná vzdálenost čoček byla zvolena 400 mm. Touto volbou bylo zajištěno zobrazení s příčným zvětšením  $-1$ .

Čočka  $RC_2$  vytvářela fourierovský obraz zdroje na prostorovém modulátoru. Čočka byla umístěna v takové vzdálenosti za předchozími optickými prvky, aby vytvářela rovnoběžný svazek paprsků. Také na soustavu čoček  $RC_1$  a  $RC_2$  se dá pohlížet jako na samostatný 4-f systém. Pokud totiž do objektivu  $C_1$  bude přicházet rovnoběžný svazek paprsků, bude se vytvářet reálný obraz v obrazové ohniskové rovině objektivu. Čočka  $RC_1$  pak vytvoří jeho fourierovský obraz ve své obrazové ohniskové rovině a čočka  $RC_2$  provede zpětnou Fourierovu transformaci.

Uvedenými prvky byl vytvořen obraz fourierovské roviny objektivu  $C_1$ . Do roviny fourierovského obrazu byl umístěn prostorový modulátor světla (na obrázku 34 označen jako  $PM$ ). V experimentu byl použit odrazný fázový prostorový modulátor světla Hamamatsu x10468 s aktivní plochou velkou  $800 \times 600$  pixelů při velikosti pixelu  $20 \times 20 \mu\text{m}$ . Prostorový modulátor byl pootočen tak, aby došlo k prostorové separaci dopadajícího a odraženého svazku. Z důvodu dosažení požadované amplitudové propustnosti byla k komplexní amplitudě modulační masky přidána také komplexní amplituda difrakční mřížky.

Fázový modulátor světla měl totiž za úkol vytvořit masku pro prostorovou filtraci jak ve fázi tak i v amplitudě. Amplitudové modulace bylo docíleno aplikací difrakční mřížky na ty části modulátoru, které odpovídaly propustným částem masky. Výsledná fázová mřížka s takto vytvořenou amplitudovou modulací je vidět na obrázku 35. Úrovně šedi odpovídají úrovním fázového zdvihu modulátoru.



Obrázek 35: Maska zobrazená na aktivním displeji prostorového modulátoru

Čočka  $C_2$  s ohniskovou vzdáleností 400 mm byla umístěna do takové pozice, při které ležel prostorový modulátor v její předmětové ohniskové rovině. Dále byla optická cesta zalomena zrcadlem, čímž byla usnadněna justáž kamery.

Posledním prvkem soustavy byla kamera Olympus F-view II umístěná v ohniskové rovině čočky  $C_2$ , tedy v obrazové rovině celé soustavy.

V prvním kroku sestavování experimentu bylo nutné sesouhlasit obrazovou ohniskovou rovinu mikroskopového objektivu  $C_1$  s předmětovou ohniskovou rovinou čočky  $RC_1$ . Toho bylo docíleno za pomoci kolimovaného svazku vstupujícího do mikroskopového objektivu  $C_1$  a následně do čočky  $RC_1$ . Vstupní kolimovaný svazek byl pro tento účel vytvořen mikroskopovým objektivem, do jehož ohniskové roviny bylo umístěno čelo optického vlákna vedoucího světlo z hélium-neonového laseru. Byla nalezena taková vzdálenost čočky od objektivu, při které za čočkou vznikl rovnoběžný svazek paprsků. Poté se opět vrátilo čelo vlákna reprezentující bodový zdroj do předmětové roviny soustavy. Mezi objektivem  $C_1$  a čočkou  $RC_1$  procházely tedy paprsky rovnoběžně a v obrazové ohniskové rovině čočky vytvářely škálovaný obraz zdroje. Pro nalezení správné polohy čočky  $RC_2$  byl využit požadavek na rovnoběžný chod paprsků za touto čočkou. Po upevnění čočky  $RC_2$  do soustavy byl opět model bodového zdroje vyměněn za kolimovaný svazek a prostorový modulátor světla byl umístěn do roviny, ve které vznikl obraz předmětu v nekonečnu. Pro další justáž bylo nutné na modulátoru zobrazit fázovou difrakční mřížku s periodou dvou pixelů modulátoru, aby směr odraženého světla odpovídal finálnímu použití s fázovou maskou, do které bylo nutné přidat periodickou mřížku. Kolimovaného svazku na vstupu celé soustavy bylo využito také pro nalezení pozice čočky  $C_2$ , kdy byl za čočkou požadován rovnoběžný svazek. Pozice kamery, tedy obrazová ohnisková rovina čočky  $C_2$ , byla určena za použití bodového zdroje světla v ohniskové rovině objektivu  $C_1$ . Pro doostření byl využit čarový test. Vytvoření ostrého obrazu na kameře bylo finálním krokem justáže.

## 4.2 Vyhodnocení experimentálních dat

U experimentálních dat lze očekávat větší odchylku určení úhlu rotace než u dat ze simulací. V případě experimentu máme totiž nejistotu posunutí v předmětovém prostoru a také nejistotu při zpracování obrazu a vyhodnocení úhlu. Tyto dvě nepřesnosti pak vyhodnocujeme společně, neboť není možné je spolehlivě odseparovat. Z tohoto důvodu je potřeba snížit nepřesnost posunu v předmětovém prostoru na minimum, s tím může pomoci využití prostorového modulátoru pro rozostření.

Technicky bylo rozostření realizováno metodou, která využívá prostorový modulátor světla a při které není potřeba mechanicky pohybovat čelem vlákna. Do komplexní amplitudy modulační masky byla kromě komplexní amplitudy pravoúhlé fázové periodické mřížky přidána kvadratická fáze rozostření

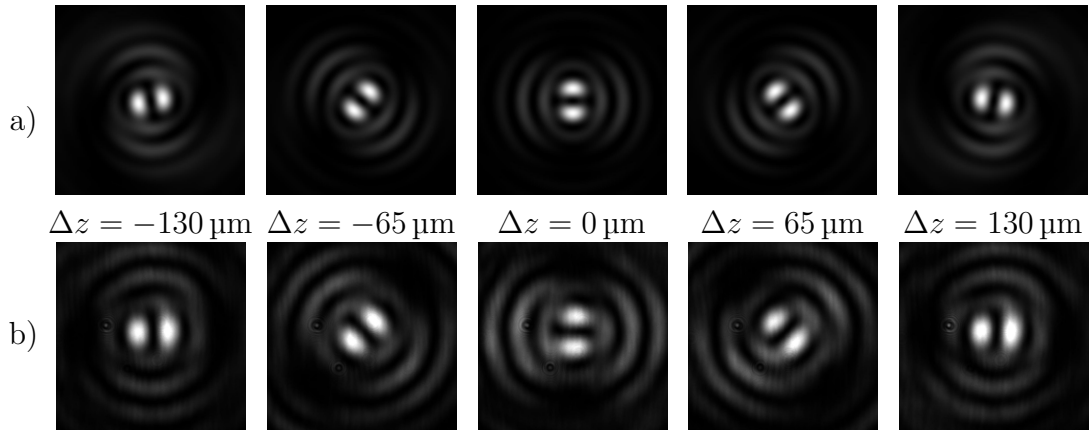
$$S_R(r, \phi) = \exp \left[ \Delta z \cdot \frac{i\pi r^2}{f_2^2 \lambda} \right] \cdot S_M(r, \phi), \quad (34)$$

kde  $S_M$  je modulační maska s periodickou mřížkou.

Experiment byl prováděn se čtyřmi modulačními maskami, které byly postupně zobrazeny prostorovým modulátorem. První použitá maska měla parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  a vytvářela dvouřadovou PSF, druhá  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  a vytvářela trojřadovou PSF, a třetí pro čtyřřadovou PSF  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ . Dále byla použita maska, jejíž vyhodnocení dosahovalo při použití snímků ze simulací nejlepších výsledků. Tato maska má parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  a výsledkem jejího použití je trojřadová PSF.

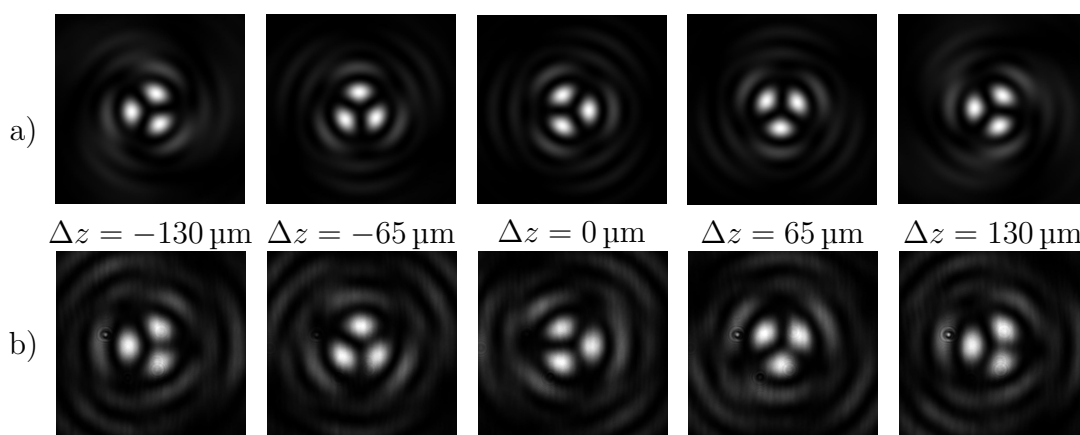
Na obrázcích 36, 37 a 38 jsou pro srovnání experimentální snímky intenzitních stop obrazů při topologickém náboji v prvním prstenci  $l_1 = -1$  a ekvivalentní obrazy ze simulací. Je zřejmá změna oproti simulačním obrazům. Laloky v PSF na obrázcích nejsou stejně velké a nedosahují stejné maximální intenzity. Také jsou patrná prachová zrna na detektoru.

Na obrázku 36 vidíme srovnání experimentu (obrázek 36 b) ) se simulací (obrázek 36 a) ) pro PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  při posunech  $\Delta z = -130 \mu\text{m}$ ,  $-65 \mu\text{m}$ ,  $0 \mu\text{m}$ ,  $65 \mu\text{m}$ ,  $130 \mu\text{m}$ . Je zde zřejmá nesouměrnost světelné stopy na experimentálních snímcích. Na některých snímcích jsou také v experimentu významná vedlejší difrakční maxima.



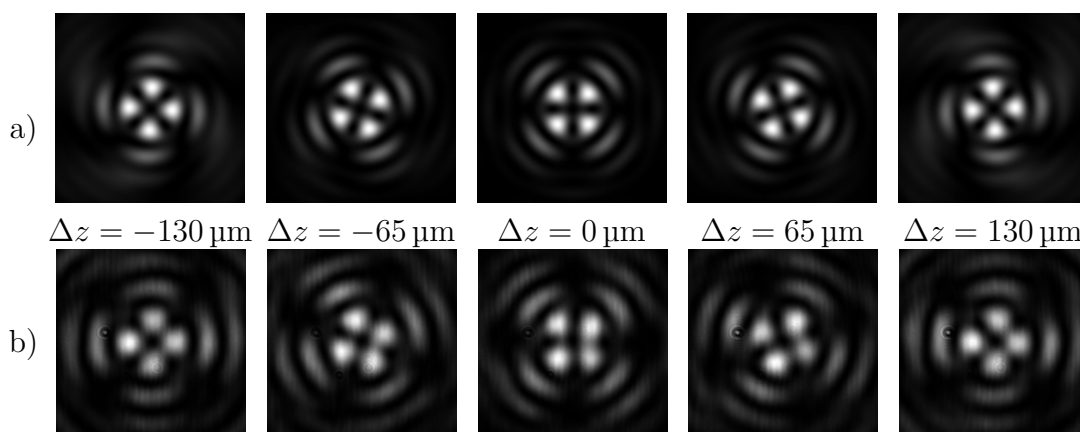
Obrázek 36: Srovnání simulace a experimentu;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ;  
a) simulace; b) experiment

Srovnání experimentálních snímků se simulací pro trojřadovou PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  vidíme na obrázku 37. Uvedené obrázky odpovídají rozostření  $\Delta z = -130 \mu\text{m}$ ,  $-65 \mu\text{m}$ ,  $0 \mu\text{m}$ ,  $65 \mu\text{m}$ ,  $130 \mu\text{m}$ . Nutno podotknout, že tyto experimentální snímky velmi dobře odpovídají simulaci a to jak tvarem samotné stopy, tak i stabilitou při rozostření a intenzitou vedlejších maxim.



Obrázek 37: Srovnání simulace a experimentu;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ;  
a) simulace; b) experiment

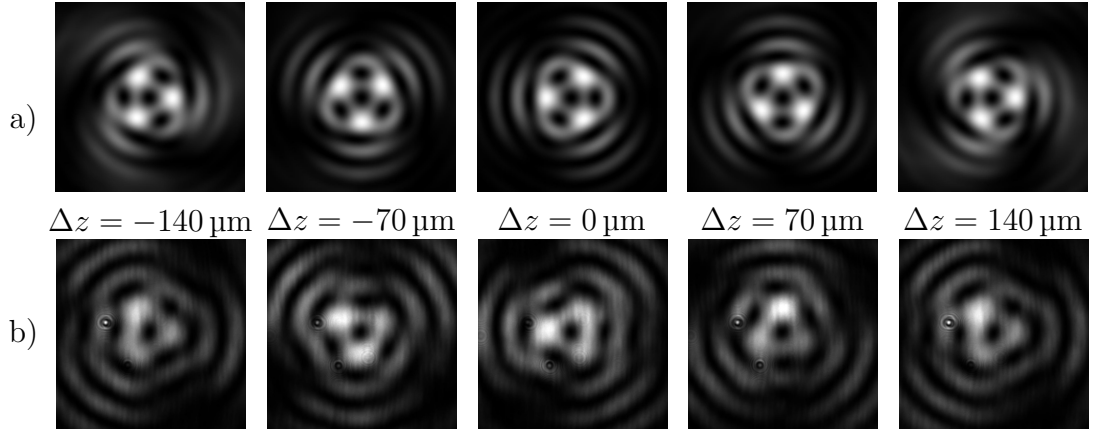
Čtyřlaločná PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  a rozostřením  $\Delta z = -130 \mu\text{m}$ ,  $-65 \mu\text{m}$ ,  $0 \mu\text{m}$ ,  $65 \mu\text{m}$ ,  $130 \mu\text{m}$  v experimentu příliš simulaci neodpovídá. PSF není souměrná, laloky nejsou stejně intenzivní a jsou deformované (obrázek 38).



Obrázek 38: Srovnání simulace a experimentu;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ ;  
a) simulace; b) experiment

Poslední PSF, se kterou probíhal experiment měla parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ . Jedná se tedy o třílaločnou stopu. V obrázku 39 vidíme snímky z experimentu a ze simulace s rozostřením  $\Delta z = -140 \mu\text{m}$ ,  $-70 \mu\text{m}$ ,  $0 \mu\text{m}$ ,  $70 \mu\text{m}$ ,  $140 \mu\text{m}$ . Je vidět významná změna tvaru experimentální stopy a její souměrnosti oproti simulaci. Experimentální PSF jsou významně zdeformovány.

Rozsah testování přibližně odpovídal maximálnímu použitelnému rozsahu. Krok rozostření byl zvolen  $5 \mu\text{m}$ . Postupně bylo pro všechny hodnoty rozostření sejmuta deset snímků. Následně byly na snímky aplikovány uvedené numerické metody, které měly za úkol zjistit úhel natočení PSF u všech získaných obrazů. Získané úhly byly poté proloženy lineární funkcí a od této aproximativní



Obrázek 39: Srovnání simulace a experimentu;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ ;  
a) simulace; b) experiment

přímky se pak odečítaly odchylky. Předpokládáme tedy lineární závislost rotace na rozostření. Postup je obdobný jako v kapitole 3.3, kde byly analyzovány obrázky ze simulací stejným postupem.

Na obrazech znázorňujících odchylky 40, 41, 42 a 43 vidíme pro každou zadanou hodnotu rozostření průměrnou hodnotu odchylky

$$R = \alpha' - \alpha = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} \alpha'_n - \alpha,$$

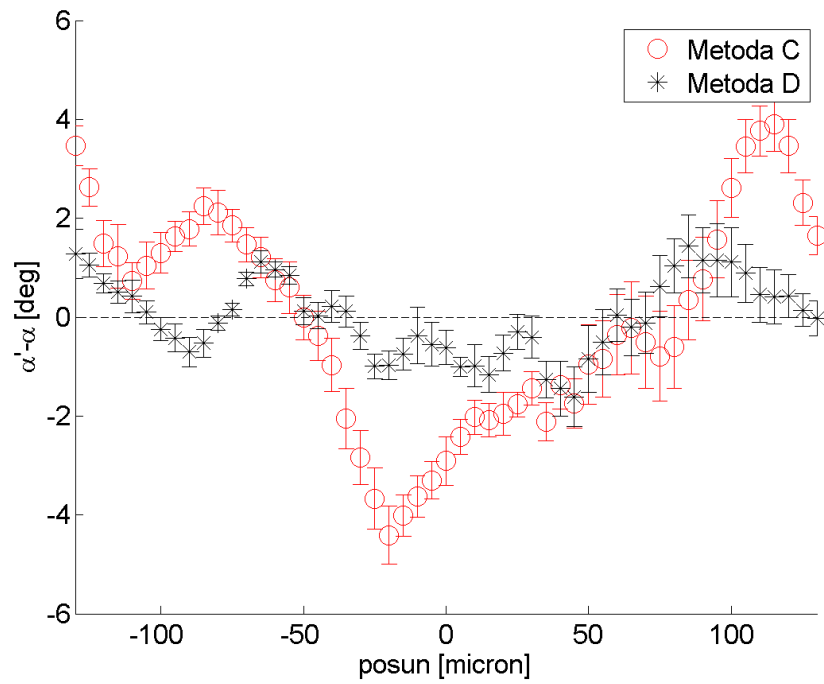
kteřá byla určena pomocí aproximativní referenční přímky, pro každou metodu zvlášť. Jako  $\alpha$  je označena referenční hodnota úhlu získaná aproximací všech získaných hodnot úhlů  $\alpha'_n$  pro všechna rozostření. Dále jsou v grafech zaznačeny chybové úsečky, které odpovídají střední kvadratické odchylce

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{10} (\alpha'_n - \alpha')^2}{10}}. \quad (35)$$

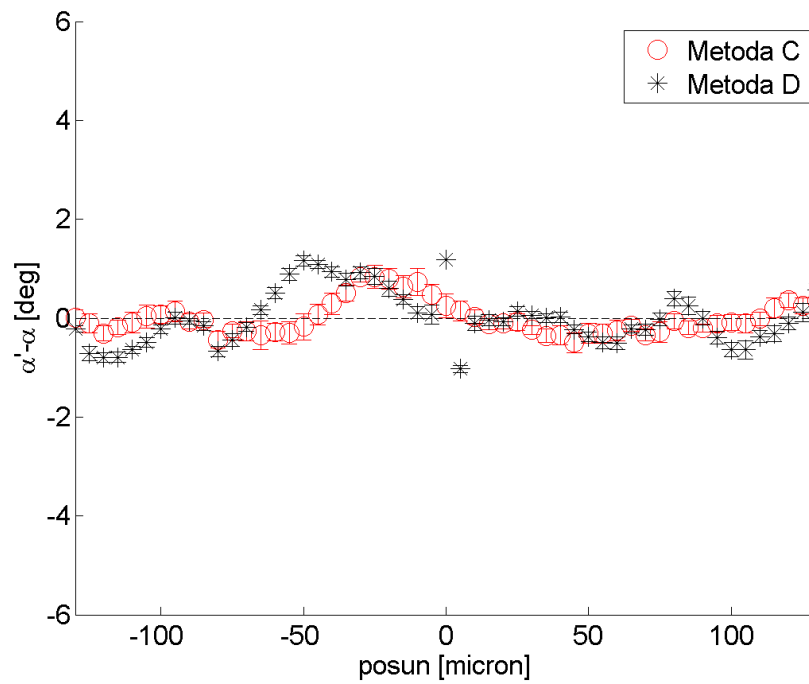
U mnohých obrázků jsou chybové úsečky menší než znaky, které znázorňují průměrné hodnoty.

Na obrázku 40 vidíme odchylky určení úhlu od aproximativních přímek pro PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ . S vyhodnocením rotace této PSF měly metody A a B velké potíže. U metody C byla největší zaznamenaná odchylka od linearity  $5,34^\circ$  a u metody D  $2,61^\circ$ .

Záznamy obrazu vytvořeného modulační maskou s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  byly vyhodnocovány pouze metodami C a D. Obě metody byly schopny rotaci PSF vyhodnotit s přijatelnou přesností (obrázek 41). Odchylka obou metod se pohybovala do  $1,5^\circ$ .

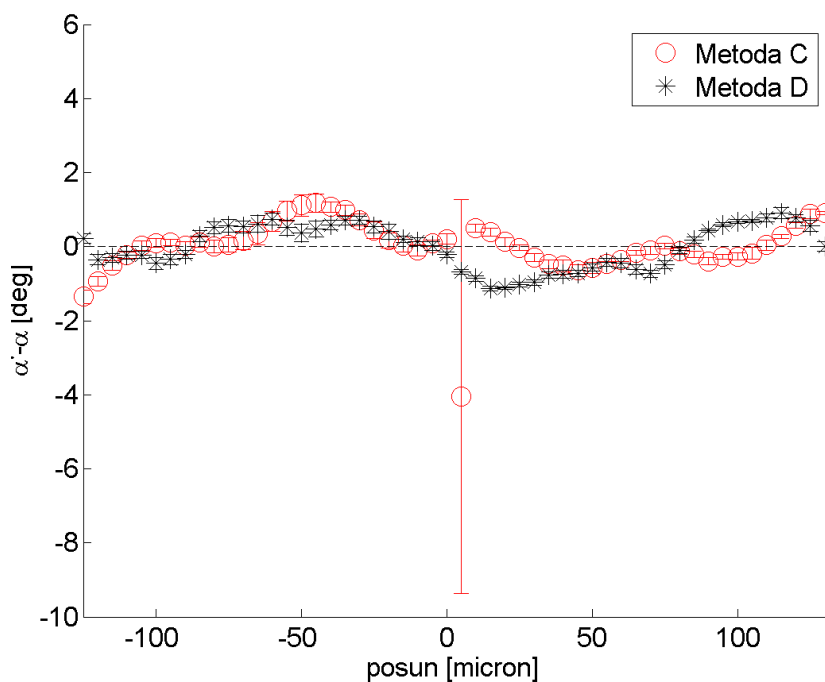


Obrázek 40: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, experimentální data;  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$



Obrázek 41: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, experimentální data;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Na následujícím grafu (obrázek 42) s vyhodnocením PSF s parametry  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  je zajímavá především výrazná odchylka téměř  $10^\circ$  pro jednu hodnotu rozostření, pro kterou rotaci s podobnou chybou vyhodnotila tato metoda dokonce pro více snímků s tímto rozostřením. V této pozici mohlo dojít k významnému ovlivnění tvaru a tím i pozice těžiště jednoho nebo obou laloků prachovou částicí, která pro ostatní úhly natočení neměla tak významný vliv na obraz.

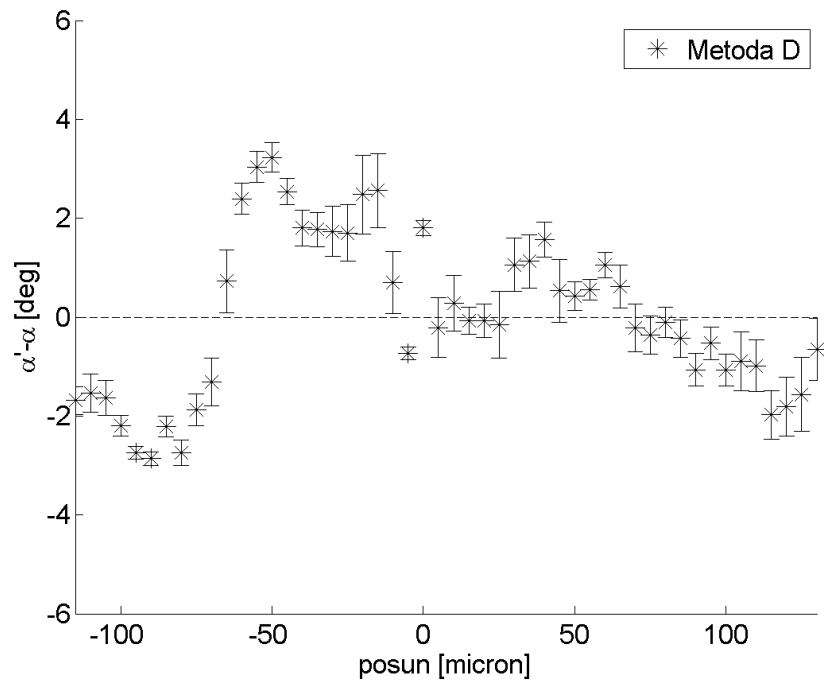


Obrázek 42: Odchytky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, experimentální data;  $\Delta l = 4$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$

Obraz poslední vyhodnocované PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ , u které byl předpoklad vysoké přesnosti určení úhlu natočení na základě dobrých výsledků simulací, nedosáhl v experimentu tak vysoké kvality obrazu jako PSF s jinými parametry. Obecně PSF s vyšším topologickým nábojem mohou být problematické z důvodu nízké stability obrazu a vysokých nároků na přesnost justáže sestavy. Na obrázku 43 jsou odchytky určení úhlu rotace obrazu pro metodu D. Metoda C nebyla pro tuto PSF použitelná, neboť binarizace neprobíhala korektně a nebyla schopna pro všechny snímky odseparovat tři laloky od pozadí.

Z grafů je zřejmá vyšší přesnost určení úhlu rotace u PSF s více než dvěma laloky. Také se na experimentálních datech projevila vyšší robustnost metody D oproti ostatním metodám, což je její hlavní výhodou. Metodu by bylo možné dále zpřesnit použitím snímků z experimentu jako reference.





Obrázek 43: Odchylyky určení úhlu natočení PSF od aproximativní přímky, experimentální data;  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$

V tabulce 3 jsou uvedeny průměry absolutních hodnot odchylek, střední kvadratické odchylky a maximální zaznamenané pro jednotlivé numerické metody a pro jednotlivé PSF. V tabulce jsou pro ilustraci zahrnuty také metody A a B u PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$ , byť metody nedosahovaly příliš dobrých výsledků.

Tabulka 3: Vyhodnocení experimentálních dat

Parametry		Metoda A			Metoda B			Metoda C			Metoda D			
$l_1$	$\Delta l$	$N$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$	$R$	$MAX$	$RMS$
-1	2	2	3,90°	43,87°	7,16°	4,73°	43,51°	8,80°	1,92°	5,34°	2,25°	0,72°	2,62°	0,89°
-1	3	2	-	-	-	-	-	-	0,30°	1,22°	0,38°	0,44°	1,32°	0,55°
-1	4	2	-	-	-	-	-	-	0,50°	10,71°	1,08°	0,53°	1,26°	0,61°
1	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,40°	3,93°	1,67°

Z tabulky a grafů je zřejmá vysoká stabilita a robustnost metody D, kterou lze použít pro všechny PSF bez ohledu na parametry, tvar stopy nebo kvalitu obrazu. Naopak metody A a B bylo možné použít pouze pro první dvoulaločnou PSF a i pro tu byly jejich výsledky spíše zklamáním. Dá se říct, že obecně dosahovala metoda C velmi dobrých výsledků, alespoň při porovnávání podle střední kvadratické a průměrné odchylky. Bohužel se ale lokálně silně odchylovala od aproximativní referenční přímky. Také nutná binarizace způsobovala potíže, díky kterým se algoritmus v některých případech nedá použít. Metoda D dosahovala podobné přesnosti jako metoda C, ale na rozdíl od ní dává metoda D stabilnější výsledky. Maximální zaznamenaná odchylka této metody byla  $3,93^\circ$ .

## 5 Diskuze výsledků

Nejpřesnější metodou byla podle simulačních dat metoda C, která určuje úhel natočení PSF z poloh těžišť jednotlivých laloků. Obrazy ze simulací byly metodou C přesněji určeny u PSF s topologickým nábojem  $l_1 = 1$  než u PSF s topologickým nábojem  $l_1 = -1$ . Dále byly metodou C daleko přesněji vyhodnoceny třílaločné PSF a to i s ohledem na přepočítání posunu předmětu. Stejný úhel rotace PSF odpovídá u třílaločné stopy  $3/2\times$  většímu posunu oproti stopě dvoulaločné.

Vyhodnocení algoritmů na obrazech ze simulace ukazovalo na mimořádně vysokou přesnost určení úhlu u třílaločné PSF s parametry modulační masky  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  metodou C. Proto byla tato PSF zařazena také do experimentu.

Experiment naproti tomu ukázal, že vedle přesnosti jednotlivých algoritmů je důležitá také robustnost a stabilita přesnosti. V experimentu byly využity masky, které odpovídají obvykle používaným případům a pak také simulačními testy nejlépe vyhodnocovaná PSF.

Metoda A, která prokládá obrys světelné stopy elipsou a vyhodnocuje pak natočení této elipsy, a metoda B, která úhel natočení PSF určuje z těžišť laloků dvoulaločné PSF, se ukázaly být nestabilní při použití na nedokonalých experimentálních obrazech. Naproti tomu metoda D, založená na principu přizpůsobeného filtru, se projevila jako mimořádně stabilní s minimálními nároky na jakost obrazu. U metody C se objevily mimořádné lokální odchylky.

Také se ukázalo, že PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ , jejíž úhel byl u simulovaných obrazů určen nejlépe, je náročnější na přesnost justáže optického systému než ostatní testované PSF. Potvrdila se vysoká přesnost určení úhlu rotace pro třílaločné stopy.

Z uvedených důvodů bylo nejpřesnější určení úhlu metodou C PSF  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$ . Ale je potřeba zároveň připomenout nízkou stabilitu této metody, která je částečně způsobena binarizací. Naproti tomu metoda D vyniká stabilitou, byť je to v některých případech na úkor přesnosti. To je její významnou výhodou. Zároveň základní dvoulaločná PSF s parametry  $\Delta l = 2$ ,  $l_1 = -1$ ,  $N = 2$  byla touto metodou vyhodnocena přesněji a poslední vyhodnocovaná PSF s parametry  $\Delta l = 3$ ,  $l_1 = 1$ ,  $N = 2$  byla schopna zpracovat pouze tato metoda. Jsou tedy zřejmé nesporné klady metody D.

Z hlediska maximální zaznamenané odchylky, která může mít velký význam při vyhodnocování obrazu, je nejlepší metoda D, která má zároveň nejširší použití vzhledem k typům PSF.

## Závěr

V této práci byly testovány čtyři algoritmy pro určení úhlu rotace PSF, ze které může být určena podélná pozice bodového předmětu. První metoda využívala matlabovské funkce pro práci s černobílým obrazem. Druhá a třetí metoda určovala úhel rotace podle pozice geometrických těžišť. Čtvrtá metoda byla založena na principu přizpůsobeného filtru. Testy byly prováděny na různých PSF.

Pro vyhodnocení algoritmů byly nejprve použity PSF generované simulacemi. Byla předpokládána lineární závislost rotace na rozostření. V práci je ukázáno, že nelze použít teoreticky odvozeného vztahu jako reference. Proto jsou numerické metody testovány na obrazech uměle otočených o zadaný úhel, který je dále použit jako reference. V dalším kroku byly numerické metody testovány na simulovaných obrazech, ale jako reference byla využita aproximativní přímka, kterou byla data proložena. Byly tedy nalezeny odchylky od linearit úhlů rotace. Finálně byly numerické metody testovány na snímcích z experimentu.

Ukazuje se, že přesnost určení úhlu rotace silně závisí, kromě použitého vyhodnocovacího algoritmu, také na tvaru použité PSF. Výsledky vyhodnocení simulace a experimentu byly odlišné, s různou přesností určení úhlu rotace.

Nejpřesnější výsledky v případě testů na simulacích dávaly metody založené na hledání geometrických těžišť. U experimentu není vyhodnocení úspěšnosti algoritmů tak jednoznačné. Kromě metody založené na hledání geometrických těžišť dávala dobré výsledky také metoda vycházející z principu přizpůsobeného filtru. Tato metoda byla zároveň nejstabilnější při zhoršené kvalitě záznamu.

Při testování na obrazech ze simulací byla nejpřesněji vyhodnocena třílaločná PSF vytvořená dvouprstencovou maskou s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = 1$ . V případě experimentu se ale tato PSF neosvědčila. Z experimentu byla nejpřesněji vyhodnocena třílaločná PSF vytvořená dvouprstencovou maskou s topologickým nábojem v prvním prstenci  $l_1 = -1$ . Metoda pracující s geometrickými těžišti dávala obecně nejlepší výsledky u třílaločných PSF, zatímco metoda založená na principech přizpůsobeného filtru u PSF čtyřlaločných.

## Literatura

- [1] Joseph W. GOODMAN, Introduction to Fourier optics. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996. ISBN 00-702-4254-2.
- [2] H. Pin KAO and A.S. VERKMAN, Tracking of Single Fluorescent Particles in Three Dimensions: Use of Cylindrical Optics to Encode Particle Position. *Biophysical Journal* 67, 1291 (1994).
- [3] Adam GREENGARD, Yoav Y. SCHECHNER and Rafael PIESTUN, Depth from diffracted rotation. *Optics Letters* 31, 181 (2006).
- [4] Petr BOUCHAL, Lenka ŠTRBKOVÁ, Zbyněk DOSTÁL and Zdeněk BOUCHAL, Vortex topographic microscopy for full-field reference-free imaging and testing. *Optics Express* 25, 21428 (2017).
- [5] Ginni GROVER, Keith DELUCA, Sean QUIRIN, Jennifer DELUCA and Rafael PIESTUN, Super-resolution photon-efficient imaging by nanometric double-helix point spread function localization of emitters (SPINDLE). *Optics Express* 20, 26681 (2012).
- [6] Martin TEICH, Michael MATTERN, Jeremy STURM, Lars BÜTTNER and Jürgen W. CZARSKE, Spiral phase mask shadow-imaging for 3D- measurement of flow fields. *Optics Express* 24, 37371 (2016).
- [7] Zdeněk BOUCHAL, Optické víry – nový směr rozvoje singulární optiky. *Čs. čas. fyz.* 53, 11 (2003).
- [8] Michal BARÁNEK, Fyzikální vlastnosti, experimentální realizace a využití optických vírových polí. Olomouc, 2016. Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [9] George B. ARFKEN and Hans J. WEBER, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 2005.
- [10] MathWorks Documentation: regionprops [online]. [cit. 2018-09-20]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/images/ref/regionprops.html>
- [11] Petr BOUCHAL and Zdeněk BOUCHAL, Flexible non-diffractive vortex microscope for three-dimensional depth-enhanced super-localization of dielectric, metal and fluorescent nanoparticles: supplementary material. *Journal of Optics* 19, 105606 (2017).