



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELOVÁNÍ TOKU ODPADU V ČESKÉ REPUBLICE

MODELLING OF THE WASTE FLOW IN THE CZECH REPUBLIC

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Lucie Němcová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Radovan Šomplák, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání diplomové práce

| | |
|-------------------|------------------------------------|
| Ústav: | Ústav matematiky |
| Studentka: | Bc. Lucie Němcová |
| Studijní program: | Matematické inženýrství |
| Studijní obor: | bez specializace |
| Vedoucí práce: | Ing. Radovan Šomplák, Ph.D. |
| Akademický rok: | 2022/23 |

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Modelování toku odpadu v České republice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Efektivní využívání potenciálu skrytého v odpadech prostřednictvím přechodu na oběhové hospodářství se stává stále aktuálnějším tématem. Sběr dat a jeho vyhodnocení je základním kamenem pro tvorbu strategických koncepcí v této oblasti. Proto byly sestaveny indikátory odpadového hospodářství, které se každoročně vyhodnocují. V současnosti je možné sledovat vývoj těchto indikátorů pouze pro agregovaná data za ČR. Na nižších územních celcích to není možné, protože se odpadové toky spojují a zase rozdělují v průběhu celého zpracovatelského řetězce. Není tedy známa informace, jakým způsobem se nakládalo s odpadem od konkrétního producenta. Předmětem závěrečné práce bude vyvinout přístup pro modelování toků odpadů založený na optimalizaci a statistickém zpracování dat. Práce bude navazovat na výzkumné aktivity v projektu CEVOOH řešeného na Ústavu procesního inženýrství, FSI VUT v Brně. V rámci práce bude nutné vybrat vhodný softwarový nástroj pro implementaci optimalizačního modelu. Závěrečná práce bude v průběhu konzultována s expertem na tuto oblast (Ing. Jakub Kúdela, Ph.D.).

Cíle diplomové práce:

- Seznámení se s problematikou vykazování dat v odpadovém hospodářství.
- Prohloubení si teoretických a praktických poznatků předmětné oblasti optimalizace.
- Vytvoření optimalizačního modelu za pomoci reálných dat.
- Implementace modelu do vhodného softwarového nástroje.
- Testování modelu a prezentace výsledků.

Seznam doporučené literatury:

WILLIAMS, H. P. Model Building in Mathematical Programming. London School of Economics, UK: Wiley, 5th ed., 432, 2013. ISBN 978-1-118-44333-0.

VANDERBEI, R. J. Linear Programming: Foundations and Extensions. International Series in Operations Research & Management Science, Springer, 2007.

ŠOMPLÁK, R., NNEVRLÝ, V., SMEJKALOVÁ V., ŠMÍROVÁ Z., PAVLAS M. Bulky waste for energy recovery: Analysis of spatial distribution. Energy, 181, 827-839. 2019. DOI: 10.1016/j.energy.2019.05.175.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Strategické plánování je základem pro efektivitu a udržitelnost odpadového hospodářství. Pro efektivní plánování je zásadní sběr dat a jejich porozumění. Ke zhodnocení dosavadního nakládání s odpadem je důležitá informace o tocích odpadu. Tato informace byla dosud dostupná v České republice pouze agregovaně na státní úrovni. V této práci byl vytvořen přístup na rekonstrukci toků odpadu z dostupných dat i na nižším územním členění. Přístup je tvořen dvěma optimalizačními modely: dílčím a finálním. Dílčí model je založen na expertních předpokladech. Rekonstrukce toků odpadu dílčím modelem probíhá postupně po menších skupinách toků. Výpočet dílčího modelu je opakován s různým složením skupin toků optimalizovaných najednou. Při každém opakování jsou získána kandidátní řešení, která slouží jako vstupní data pro finální model. Konečná rekonstrukce toků odpadu je výsledkem finálního modelu. Vývoj a testování modelů probíhalo na testovacích úlohách založených na reálných datech z odpadového hospodářství České republiky.

KLÍČOVÁ SLOVA

odpadové hospodářství, rekonstrukce toků odpadu, lineární programování, smíšené celočíselné programování, vícekriteriální programování

ABSTRACT

Strategic planning is the basis for efficient and sustainable waste management. Data collection and its deep understanding are essential for effective planning. Waste flows are an important information to assess waste management to date. This information has so far been available only aggregated at national level in the Czech Republic. In this thesis, an approach has been developed to reconstruct the waste flows at a sub-national level from available data. The approach consists of two optimization models: partial and final. The partial model is based on expert assumptions. The reconstruction of the flows by the partial model is done sequentially in smaller groups of flows. The computation of the partial model is repeated with different composition of the groups of flows optimized at the same time. Each iteration results in a candidate solution which is used as an input data for the final model. The solution of the final model yields the final reconstruction of the waste flows. Model development and testing was carried out on problems simulated based on the real data from the waste management of the Czech Republic.

KEYWORDS

waste management, reconstruction of waste flows, linear programming, mixed-integer programming, multi-criteria programming

NĚMCOVÁ, Lucie. *Modelování toku odpadu v České republice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky, 2023, 77 s. Diplomová práce. Vedoucí práce: Ing. Radovan Šomplák, Ph.D.

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení autora: Bc. Lucie Němcová
VUT ID autora: 209444
Typ práce: Diplomová práce
Akademický rok: 2022/2023
Téma závěrečné práce: Modelování toku odpadu v České republice

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autorka uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědoma následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno
.....
podpis autorky*

*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala vedoucímu diplomové práce panu Ing. Radovanu Šomplákovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Dále bych chtěla poděkovat konzultantům Ing. Jakobovu Kůdelovi, Ph.D. a Ing. Jaroslavu Pluskalovi za věcné připomínky. V neposlední řadě chci poděkovat rodině za umožnění studia a podporu při studiu. Potřebná data z odpadového hospodářství byla poskytnuta projektem CEVOOH podpořeným Technologickou agenturou české republiky (SS02030008).

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 3 |
| 1 Vymezení problému | 4 |
| 1.1 Odpadové hospodářství v ČR | 4 |
| 1.2 Aplikace REVEDATO | 7 |
| 1.3 Definice problému | 11 |
| 2 Literární řešerše | 14 |
| 3 Matematický aparát | 17 |
| 3.1 Teorie grafů | 17 |
| 3.2 Optimalizace | 22 |
| 3.2.1 Lineární programování | 23 |
| 3.2.2 Celočíselné programování | 29 |
| 3.2.3 Vícekriteriální programování | 32 |
| 4 Vývoj matematického modelu | 35 |
| 4.1 Zadání testovací úlohy | 36 |
| 4.2 Řešení toku odpadu od jednoho producenta | 38 |
| 4.2.1 Minimalizace vzdálenosti | 39 |
| 4.2.2 Minimalizace počtu použitých hran | 42 |
| 4.2.3 Minimalizace počtu míst zpracování odpadu | 44 |
| 4.2.4 Kombinace více účelových funkcí | 45 |
| 4.3 Řešení toků odpadu od všech producentů | 46 |
| 4.3.1 Modely optimalizující toky odpadu od více producentů najednou | 47 |
| 4.3.2 Scénářový přístup | 52 |
| 4.3.3 Model na rekonstrukci toků odpadu | 55 |
| 4.3.4 Porovnávací kritéria | 58 |
| 5 Testování modelů | 60 |
| Závěr | 67 |
| Literatura | 68 |
| Seznam symbolů a zkratek | 74 |
| A Seznam příloh | 77 |

Úvod

Kvalitní odpadové hospodářství je klíčovým prvkem moderního světa, který umožňuje efektivně a udržitelně nakládat s odpady. Vzhledem k jeho důležitosti je snaha o neustálé zlepšování tohoto odvětví. Podstatnou součástí efektivního odpadového hospodářství je jeho monitorování. Sběr relevantních dat je nezbytný pro posouzení současné situace, identifikaci problémových oblastí a vytváření strategií a plánů do budoucna. V České republice jsou pod dohledem Ministerstva životního prostředí za tímto účelem shromažďována a uchovávána data z odpadového hospodářství. Nicméně, aby byla data přínosná a efektivně využitelná, je zásadní jejich korektnost a správná interpretace. Je žádoucí datům porozumět na hlubší úrovni a identifikovat souvislosti, které umožní přesněji určit slabá místa s potenciálem pro vylepšení nakládání s odpadem.

Jednou z klíčových informací je znalost toků odpadu mezi producenty a zpracovateli. Tato informace je v současné době dostupná pouze v agregované podobě na státní úrovni, což omezuje schopnost získat důkladný přehled o odpadovém hospodářství na nižší úrovni (např. v regionech). Díky identifikaci toků odpadu na nižším územním členění je možné získat lepší přehled o stavu odpadového hospodářství a konkrétněji identifikovat oblasti, ve kterých je třeba provést zlepšení. Na základě těchto informací lze efektivně implementovat konkrétně cílené změny. Je důležité si uvědomit, že i změny v regionech mohou zásadně ovlivnit stav odpadového hospodářství na vyšší úrovni.

Cílem této práce bylo proto vytvořit přístup založený na optimalizačních modelech, který dokáže rekonstruovat informace o tocích odpadu mezi producenty a zpracovateli na základě dostupných dat. Tento přístup umožní získat detailnější pohled na nakládání s odpadem na zvoleném územním členění, čímž poskytne cenné informace pro tvorbu efektivních a přesně cílených strategií. Přístup byl zvolen tak, aby umožňoval řešit i rozsáhlé úlohy, jako je např. rekonstrukce toků odpadu v rámci celé České republiky. Vzniklé modely v této práci byly testovány na simulačních úlohách generovaných na základě reálných dat.

1 Vymezení problému

1.1 Odpadové hospodářství v ČR

Odpadové hospodářství (OH) představuje multidisciplinární obor, který se zabývá zejména nakládáním s již existujícím odpadem, to zahrnuje využití a odstranění odpadních materiálů ze spotřeby nebo z výroby. Prioritním cílem je ale předcházení, případně omezení vzniku odpadu. Legislativním nástrojem zabývajícím se problémy vzniku odpadu a OH je Zákon o odpadech. V bývalém Československu byl poprvé přijat v roce 1991 (č. 238/1991 Sb.). Za posledních 30 let se v České republice (ČR) toto odvětví výrazně vyvíjelo a v souvislosti s tím vznikla řada novějších vyhlášek a zákonů souvisejících s OH. Poslední, tedy momentálně platný, je Zákon o odpadech, který byl přijat v roce 2020, konkrétně se jedná o zákon č. 541/2020 Sb. [1]. V dnešní době jde o jedno z hlavních témat, kterým se zabývá Ministerstvo životního prostředí (MŽP) ČR [2]. [3]

Vývoj OH v ČR silně ovlivňuje Evropská unie (EU). V roce 2020 Evropská komise představila Nový akční plán pro oběhové hospodářství (ObH), ve kterém vybízí země EU k rychlejšímu přechodu z lineárního OH na ObH. Lineárním hospodářstvím je myšlen přístup, ve kterém jsou primární suroviny přeměněny na výrobky, jenž jsou následně používány spotřebiteli. Po ukončení životnosti se z nich stává odpad, který často není nijak dále využit a končí na skládkách. Výrobek tedy slouží pouze k jednorázovému použití. V dnešní době je zřejmé, že tento přístup není již nadále udržitelný. [4]

ObH se snaží o efektivnější využití materiálů. Po konci životnosti je výrobek vytříděn a část, kterou lze znovu použít v libovolné formě, je recyklována. Suroviny, ze kterých byl výrobek původně vyroben, se tímto způsobem stávají součástí cyklu (viz schéma na obr. 1.1), ve kterém je minimalizován zbytkový odpad. Z hlediska finanční náročnosti je preferováno lineární hospodářství, protože v rámci ObH je nutné navíc vynaložit prostředky na sběr a recyklaci odpadu.

Nutnost urychleného opuštění od lineárního hospodářství je způsobena neustále se navyšující celosvětovou spotřebou materiálů, jako jsou kovy, nerostné suroviny, fosilní paliva a biomasa, přičemž růst je očekáván i v dalších desetiletích [5]. Těžba a zpracování těchto materiálů jsou často velmi energeticky náročné a nešetrné k životnímu prostředí. Výrazně přispívají k produkci skleníkových plynů a dnes aktuální problematice vysokých nákladů na spotřebovanou energii. Navíc je produkováno stále více odpadu, který často končí uložený v půdě, přitom odpad lze uplatnit jako sekundární surovinu, což je základní princip ObH [6]. [4]

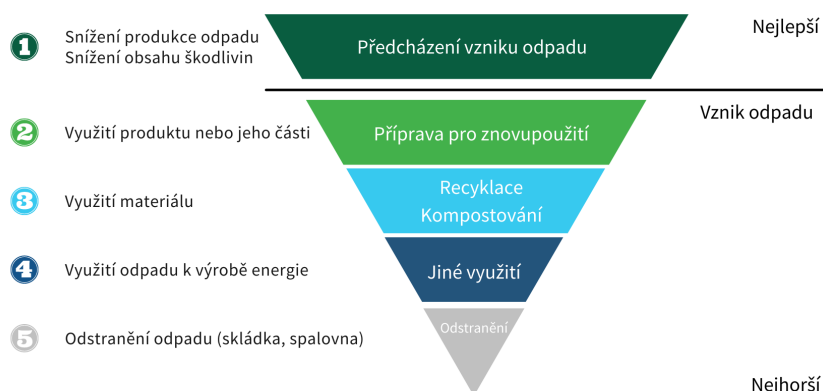
Ani přes mnohaleté úsilí EU produkce odpadu na jejím území neklesá, proto Nový akční plán pro ObH navrhuje změny v OH, které mají přispět zejména ke snížení nerecyklovaného komunálního odpadu do roku 2035 na maximálně 35 % celkové produkce. [4, 7]



Obr. 1.1: Schéma oběhového hospodářství [8]

V rámci cílů EU v oblasti OH je i ČR vedena k lepšímu nakládání s odpady a upřednostňování recyklace a znovupoužití materiálů, a to především na jejím území, případně na území EU. Podle Hierarchie nakládání s odpady navržené EU (viz schéma na obr. 1.2) je preferovaným způsobem zpracování odpadu materiálové využití, následuje energetické využití (tj. spalování odpadu za účelem vzniku energie) a nejméně žádané je uložení odpadu na skládky [9]. Dále EU požaduje dle Směrnice 2008/98/ES vytváření plánů pro nakládání s odpadem, které odrážejí strategii a cíle EU v této oblasti. V roce 2014 Česko představilo Plán odpadového hospodářství (POH) ČR, jehož účinnost končí v roce 2024. Základem pro správné vytvoření a vyhodnocení POH ČR je poskytnutí relevantních dat v této oblasti. Základní zdroj dat v ČR poskytuje Hlášení souhrnných údajů z průběžné evidence, které je na roční bázi doplňováno do databáze Informačního systému odpadového hospodářství (ISOH), viz níže. Tuto databázi zajišťuje a spravuje pro MŽP Česká informační agentura životního prostředí (CENIA). Dále jsou data od MŽP ČR poskytována Evropské komisi, která na jejich základě vyhodnocuje naplnění cílů EU Českem a uděluje případné finanční postihy. Proto je důležité nepodcenit sběr dat a ověřovat jejich správnost. Pro tvorbu nového POH je klíčové i porozumění dat, např. k navrhnutí konkrétních řešení pro regiony a jednotlivé obce. [10, 11]

HIERARCHIE NAKLÁDÁNÍ S ODPADY



Obr. 1.2: Schéma Hierarchie nakládání s odpadem dle EU [12]

Sběr dat v OH v ČR

Vykazování dat v oblasti OH se řídí Zákonem o odpadech č. 541/2020 Sb., Zákonem o výrobcích s ukončenou životností č. 542/2020 Sb. a Zákonem o obalech č. 477/2001 Sb. Konkrétní podoba evidence se od roku 2023 odvíjí také od Vyhlášky č. 273/2021 Sb., o podrobnostech nakládání s odpady, podle níž původci odpadu musí vést průběžnou evidenci o nakládání s odpady. Původci mají povinnost jednou ročně podat Hlášení souhrnných údajů z průběžné evidence, tato povinnost se podle nové vyhlášky vztahuje jen na subjekty, které splňují alespoň jednu z těchto podmínek:

- za rok vyprodukovaly nebo nakládaly s více než 600 kg nebezpečného odpadu,
- za rok vyprodukovaly nebo nakládaly s více než 100 t ostatních odpadů,
- vyprodukovaly nebo nakládaly s odpadem perzistentních organických znečišťujících látek vymezených ve vyhlášce,
- provozovaly zařízení určené pro nakládání s odpady.

K ohlašování slouží Integrovaný systém plnění ohlašovacích povinností (ISPOP), jehož provozovatelem je CENIA. Organizace CENIA následně data zanáší do databáze ISOH. Z této databáze je vytvořena pracovní varianta (PD ISOH) pro zpracování statistik. Z ní dále MŽP čerpá data, na jejichž základě vyhodnocuje naplnění cílů POH ČR, nebo poskytuje data EU. Agregovaná data jsou v omezené míře přístupná i veřejnosti prostřednictvím aplikace VISOH (Veřejné informace o produkci a nakládání s odpady). Kontrolu správnosti výkazů zajišťují obecní úřady obcí s rozšířenou působností (ORP) a krajské úřady, které odesílají informace MŽP (resp. CENIA). [2, 13, 14]

V rámci projektu CEVOOH (Centrum environmentálního výzkumu — odpadové a oběhové hospodářství a environmentální bezpečnost) je PD ISOH hlavním zdrojem dat o produkci a nakládání s odpady. Zmíněná databáze je využita i v této diplomové práci. PD ISOH obsahuje následující údaje:

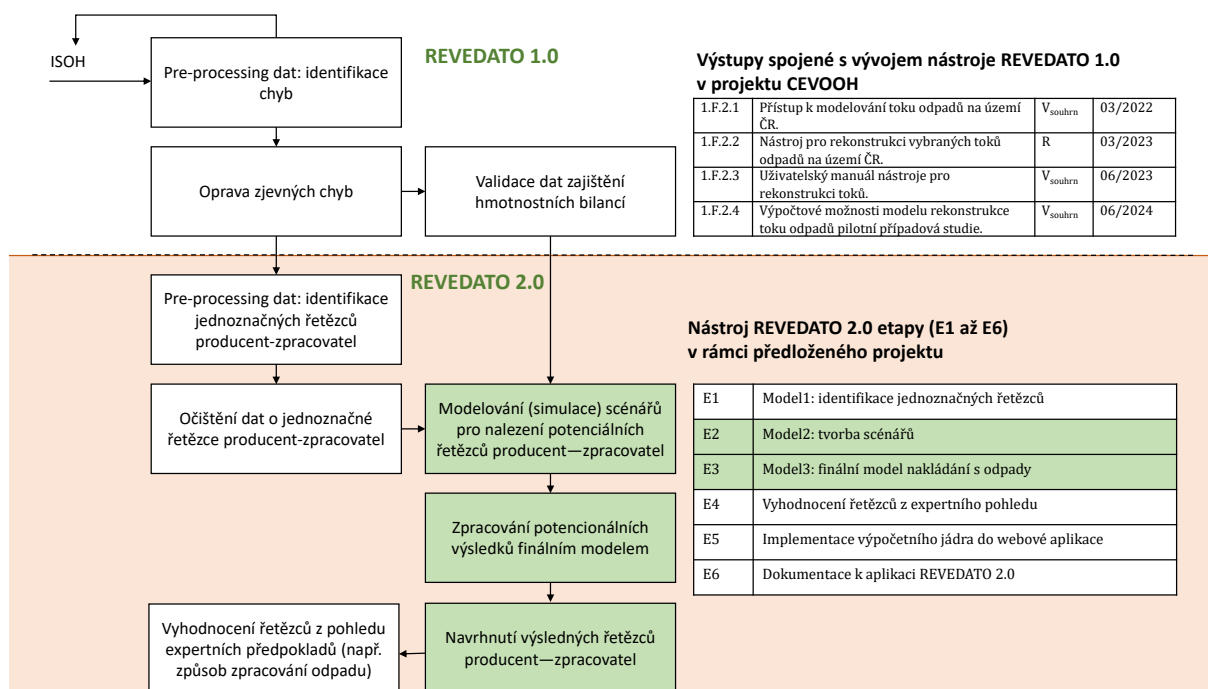
- **základní informace o evidentovi:** typ subjektu, kód a název základní územní jednotky (ZÚJ), kód a název ORP, kód a název kraje,
- **základní informace o nakládání s odpadem:** rok, množství odpadu v tunách, katalogové číslo odpadu (dle Katalogu odpadu na základě vyhlášky 8/2021), kód nakládání (dle způsobu nakládání s odpadem), příp. základní informace o příjemci odpadu.

1.2 Aplikace REVEDATO

CEVOOH je jedním z projektů, které vznikly za účelem výzkumu v oblasti OH a ObH. Hlavním cílem tohoto uskupení osmi výzkumných organizací a univerzit je poskytnout, zejména MŽP ČR, odborný a technologický základ, jenž se týká dosud nezkoumaných témat souvisejících s přechodem ČR z lineárního na ObH. Jedním z takových témat je i národní monitoring ObH. Konkrétním cílem řešitelů je vytvořit podpůrné materiály a nástroje, které jsou založené na hlubším porozumění dostupných dat, na jejichž základě lze plánovat budoucí strategii a směr, kterým se OH bude v ČR vyvíjet. [15]

V rámci projektu CEVOOH vznikl **nástroj REVEDATO 1.0**, který slouží k vyhodnocení správnosti dat v PD ISOH a případně zajišťuje jejich opravu. Tento nástroj využívá také nově vyvíjená **aplikace REVEDATO 2.0**, která vzniká v rámci výzkumné činnosti na Ústavu procesního inženýrství (ÚPI) Fakulta strojního inženýrství (FSI) VUT v Brně. Cílem REVEDATO 2.0 je vytvořit kompletní přehled dat o odpadech v ČR, tj. získání informací o toku odpadu a nakládání s ním na regionální a nižší úrovni územního členění. Tyto informace jsou přínosné pro MŽP ČR, které na jejich základě může lépe analyzovat současné nakládání s odpadem a plánovat strategii pro následující roky (například prostřednictvím nového POH ČR). Dosud byla dostupná informace o toku odpadu pouze agregovaně na státní úrovni [16]. Ovšem znalost toku odpadu i na nižší úrovni umožní navrhnout konkrétní změny v regionech a mikroregionech a sledovat plnění cílů POH ČR jednotlivými ZÚJ.

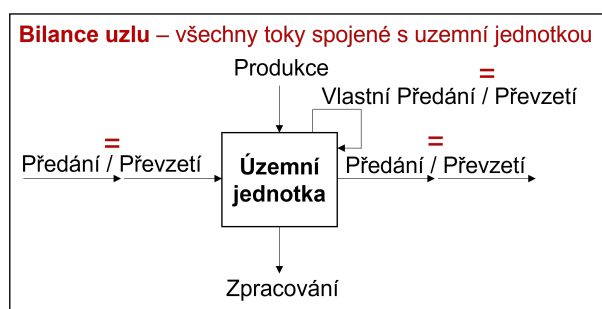
Schéma algoritmu REVEDATO 2.0, včetně jeho napojení na PD ISOH a využití nástroje REVEDATO 1.0, znázorňuje obr. 1.3, kde oranžový blok značí část aplikace, která je nově vyvíjena. Tato diplomová práce se zabývá bloky, které jsou v obr. 1.3 označeny zeleně.



Obr. 1.3: Schéma algoritmu aplikace REVEDATO 2.0

Nástroj REVEDATO 1.0 ověřuje, zda data splňují tzv. bilanční podmínky (viz obr. 1.4), kterými jsou:

- hmotnostní bilance v uzlu (platí pro libovolně zvolené územní členění), tj. součet množství produkovaného a převzatého odpadu musí být roven součtu množství zpracovaného a předaného odpadu,
- soulad výkazů mezi uzly, tj. pokud uzel A vykázal předání odpadu uzlu B, pak uzel B musí vykázat převzetí stejného množství od uzlu A, a naopak.



Obr. 1.4: Schéma hmotnostní bilance v uzlu a souladu výkazů mezi uzly

Bilanční podmínky by v teorii měly být splněny vždy, ovšem v praxi se stává, že některé subjekty vykazují odpad chybně, např. vykazáním nesprávného množství odpadu nebo uvedením jiného subjektu jako partnera transakce, v dalších případech záznamy o transakci úplně chybí. To je problematické, protože nesoulad v datech může zapříčinit jejich nesprávnou interpretaci. Obdobné nesoulady nástroj REVEDATO 1.0 nejprve identifikuje a poté navrhně jejich opravu.

Algoritmus nástroje REVEDATO 1.0 obsahuje čtyři základní kroky.

1. **Pre-processing:** analýza původních dat a identifikace chybných záznamů.
2. **Oprava zjevných chyb:** za zjevné chyby jsou považovány takové nesrovnalosti ve výkazech, u kterých lze s vysokou pravděpodobností jednoznačně identifikovat správný údaj. Jejich identifikace je založena na expertních názorech a podle zkušeností z praxe je pouze v minoritním počtu případů navrhovaná oprava mylná. Po opravě jsou tato data vyřazena ze seznamu chyb. Příklad nesouladu ve výkazech lze vidět v tabulce 1.1. Obec Kralice na Hané vykázala, že předala do Sebranice 1118,280 t odpadu. To se neshoduje s výkazem obce Sebranice, podle kterého totožné množství odpadu bylo převzato od Olomouce. Jedná se o zjevnou chybu, v tomto případě byla nesprávně uvedena Olomouc jako partner transakce, přitom skutečným dodavatelem odpadu byly Kralice nad Hanou. Návrh opravy je zvýrazněn v tabulce 1.2.

Tab. 1.1: Příklad nesouladu dat v PD ISOH

| Rok | Evident - název ZÚJ | Evident - název kraje | Partner - název ZÚJ | Partner - název kraje | Kód nakládání | Množství odpadu + (t) | Množství odpadu - (t) |
|------|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 2020 | Sebranice | Jihomoravský | Olomouc | Olomoucký kr | B00 | 1 118.280 | |
| 2020 | Sebranice | Jihomoravský | Sebranice | Jihomoravský | BR10 | | 1 118.280 |
| Rok | Evident - název ZÚJ | Evident - název kraje | Partner - název ZÚJ | Partner - název kraje | Kód nakládání | Množství odpadu + (t) | Množství odpadu - (t) |
| 2020 | Sebranice | Jihomoravský | Sebranice | Jihomoravský | BR10 | | 1 118.280 |
| 2020 | Kralice na Hané | Olomoucký kr | Sebranice | Jihomoravský | AN2 | | 1 118.280 |

Tab. 1.2: Návrh opravy výkazu uvedeného v tab. 1.1 nástrojem REVEDATO 1.0

| Rok | Evident - název ZÚJ | Evident - název kraje | Partner - název ZÚJ | Partner - název kraje | Kód nakládání | Množství odpadu + (t) | Množství odpadu - (t) |
|------|---------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 2020 | Sebranice | Jihomoravský | Kralice na Hané | Olomoucký kr | B00 | 1 118.280 | |
| 2020 | Sebranice | Jihomoravský | Sebranice | Jihomoravský | BR10 | | 1 118.280 |

3. **Bilanční algoritmus:** zbytek chybných záznamů je třeba řešit sofistikovaným optimalizačním modelem uvedeným v dizertační práci [18]. Model uvažuje například i věrohodnost obcí vzhledem k jejich historii vykazování.
4. **Oprava dat:** chybná data jsou upravena tak, aby splňovala výše zmíněné bilanční podmínky.

Na nástroj REVEDATO 1.0 navazuje vývoj aplikace REVEDATO 2.0, která je rozdělena do šesti bloků popsanych níže v textu (schématicky znázorněno na obr. 1.3 v oranžovém poli).

1. **Model I — identifikace jednoznačných řetězců:** při identifikaci jednoznačných toků se vychází z dat PD ISOH. Data jsou prohledávána systematicky algoritmem, který identifikuje takové toky odpadu, jenž se nerozdělují a vykazované hodnoty si odpovídají. Data jsou následně o tyto případy očištěna. V dalších krocích se pracuje pouze se zbylými daty (tj. bez jednoznačných toků), která jsou upravená nástrojem REVEDATO 1.0 tak, aby platily bilanční rovnice (viz obr. 1.4).

2. **Model II — dílčí model pro tvorbu scénářů:** model je založen na předpokladech, podle kterých se v praxi transport a zpracování odpadu řídí. Dle expertního názoru se jedná hlavně o předpoklady minimálního rozdělování a předávání toku odpadu. Tato i další kritéria jsou více popsána v kap. 1.3. Vzhledem k tomu, že použitý model (viz kap. 4.3.1) má charakter smíšeného celočíselného programování, je úloha řešena naráz pro skupinu tvořenou menším počtem uzlů. V případě řešení všech uzlů najednou by úloha byla příliš početně náročná. Je tedy zvolen přístup, při kterém se nejprve určí rozdělení uzlů (producentů odpadu) do skupin a pořadí, podle kterého jsou skupiny toků následně optimalizovány. Protože volba pořadí ovlivňuje výsledný tok, je třeba vzít v úvahu dostatečný počet různých pořadí a složení skupin. Konkrétní volbu lze považovat za scénář, pro který jsou hledány toky odpadu.
3. **Model III — finální model nakládání s odpady:** optimální toky pro jednotlivé scénáře se mohou lišit, proto je třeba potencionální výsledky vyhodnotit finálním modelem. Jedná se o lineární optimalizační model, který částečně vychází z modelu II. Jeho cílem je navrhnout výsledný tok odpadu tak, aby byly splněny všechny podmínky kladené na toky a zároveň, aby se co nejvíce blížil výsledkům získaným pro jednotlivé scénáře. V tomto případě jsou již řešeni všichni producenti odpadu naráz, což je přípustné díky tomu, že jde o lineární programování.
4. **Vyhodnocení řetězců z expertního pohledu:** navržené toky jsou vyhodnoceny z pohledu expertních předpokladů. Jedná se například o vyhodnocení způsobu zpracování odpadu. Na základě expertního názoru je očekáváno, že v případě více typů zpracování v uzlu je odpad transportovaný na větší vzdálenost zpracován kvalitnějším způsobem.
5. **Implementace výpočtového jádra do aplikace:** výpočetní jádro tvoří hlavně výše zmíněné modely, ty jsou implementovány v programovacích jazycích Julia a Python. Zejména Julia byla zvolena na tvorbu optimalizačních modelů, jelikož umožňuje efektivní zápis matematických modelů a obsahuje veřejně dostupné knihovny a řešiče pro řešení optimalizačních úloh. V dalším kroku je třeba zpřístupnit výsledky i běžným uživatelům bez nutnosti znalosti použitých modelů, proto je vyvíjena aplikace, která obsahuje i uživatelské prostředí. Cílem je tedy vytvořit aplikaci REVEDATO 2.0, která efektivně pracuje s daty a zároveň je uživatelsky přívětivá a intuitivní.
6. **Dokumentace k aplikaci REVEDATO 2.0:** k aplikaci je vytvořen detailní manuál, který seznámí uživatele s funkcionalitami a jejich vhodným použitím. Mimo to bude k dispozici i videonávod s komentovanou ukázkou využití REVEDATO 2.0.

Tato diplomová práce se věnuje pouze krokům 2 a 3. Vývoj modelů II a III je předveden na malých testovacích úlohách (viz kap. 4), přičemž bylo vytvořeno několik verzí modelu II. Následně jsou výpočty aplikovány na úlohu s více uzly, která je vytvořena na základě reálných dat z OH v ČR (viz kap. 5). Získané výsledky jsou vyhodnoceny kritérii definovanými v kap. 4.3.4 a na jejich základě je určena nejlepší verze modelu II. Modely i dílčí výpočty jsou naprogramovány v jazyce Julia. Tato práce se tak zabývá významnou

1.3 Definice problému

Před řešením samotné úlohy optimalizace toků odpadu je třeba vymezit, jaká data jsou k dispozici, jaký je cíl a nastínit, jak lze k tomuto problému přistoupit.

Všechna potřebná data jsou čerpána z PD ISOH. V této práci bude pro zjednodušení uvažován pouze jeden typ odpadu. V úloze se vyskytuje konečný počet uzlů, ve kterých je nakládáno s tímto typem odpadu. Uzlem může být myšlen region, ORP nebo např. ZÚJ, závisí na územním členění, které je v úloze uvažováno. Způsob nakládání je určen kódem nakládání. Kódů nakládání s odpadem je několik desítek, v zásadě je lze rozdělit do tří základních typů:

- produkce odpadu,
- transport odpadu: předání — převzetí,
- zpracování odpadu.

Rozdělení uvažovaných kódů nakládání s odpadem do těchto kategorií je uvedeno v příloze v souboru `kody_nakladani`.

V každém uzlu může docházet k nakládání s odpadem různými způsoby a množství, které je vyprodukováno, zpracováno či předáváno mezi uzly je známé. Další podstatná informace, kterou obsahuje kód nakládání, je typ původu odpadu. Lze rozlišit tři základní typy.

- **Typ A:** vlastní odpad — primární produkce evidentu. Původce odpadu je známý.
- **Typ B:** cizí odpad — primární produkce v jiném uzlu než je evident. Původce odpadu není známý. Specifickými případy u typu B jsou zpětné převzetí některých výrobků a tzv. sekundární produkce, tj. odpad vzniklý úpravou původního odpadu. Tyto případy jsou uvažovány jako produkce typu B.
- **Typ C:** vyskladněný odpad — produkce z minulých let, která byla uskladněná u evidentu. Není znám původce odpadu.

Odpad je veden jako typ A pouze v uzlu primární produkce. Vyprodukuje-li např. uzel 1 určité množství odpadu a poté jej předá uzlu 2, který s ním dále nakládá, uzel 1 vykazuje produkci a předání odpadu typu A, ovšem uzel 2 již vykazuje převzetí a následné nakládání s odpadem typu B. Tedy informace o původu odpadu je známá pouze do prvního předání odpadu (včetně), dále je odpad veden jako cizí (typ B) a tedy informace o jeho původu se ztrácí. Tudíž při zpracování dat z PD ISOH nejsou k dispozici informace o celém řetězci producent—zpracovatel.

Obdobně se vykazuje také odpad typu C, což je odpad, který byl u evidentu v předchozích letech uskladněn a v aktuálním roce byl vyskladněn a dále s ním bylo nakládáno. Evident je tedy brán v aktuálním roce jako původce tohoto odpadu a proto jeho produkci a předání vykazuje jako typ C. Ovšem uzel, který tento odpad převezme, jej následně vykazuje jako cizí (typ B). V rámci problému řešeného v této práci je k vyskladněnému odpadu přistupováno stejně jako k typu A.

Speciální případ je produkce, která je vedena jako typ B. Nejedná se totiž o skutečnou primární produkci (s výjimkou zpětného převzetí odpadu uváděného pod kódem nakládání BN30), ale o odpad, který je sekundární produkcí (po úpravách odpadu beze změny katalogového čísla), příp. import ze zahraničí. Nicméně z hlediska uvažovaného problému je tento odpad považován za samostatný proud odpadu, ke kterému je přistupováno podobně jako k produkci typu A, nebo C, proto je v rámci této práce vykazování zmíněných typů odpadu označováno jako produkce typu B. Ani u tohoto odpadu není známo, kde došlo k primární produkci. Vzhledem k tomu, že odpad typu A a C je po prvním předání veden jako typ B, mezi odpadem produkce typu B a předaným odpadem není rozlišováno a proto u tohoto typu produkce obecně nelze jednoznačně určit první předání (na rozdíl od produkce typu A a C).

Hlavním cílem v této práci je informaci o řetězci producent—zpracovatel rekonstruovat, tedy zjistit kudy byl odpad od producenta transportován do uzlů, ve kterých byl zpracován. Jinak řečeno hledá se tok odpadu od každého producenta, přičemž se rozlišuje odpad podle typu produkce. U produkce odpadu typu B a C je postačující zjistit tok od evidenta produkce těchto typů, nikoliv od primárního producenta odpadu.

Existují případy, kdy je tok odpadu jednoduše dohledatelný. Jedná se například o zpracování odpadu typu A, nebo typu C (bez předání). V tomto případě je zřejmé, že odpad byl zpracován přímo v místě primární produkce, resp. vyskladnění. Dalšími případy jsou toky, které se nerozdělují ani nespojují s jinými. Takové toky lze dohledat pomocí vyhledávacích algoritmů. Jak bylo naznačeno v kapitole 1.2, tyto toky lze označit za jednoznačné a v rámci aplikace REVEDATO 2.0 je vytvořen model na jejich hledání, který ovšem není součástí této práce. Před rekonstrukcí toků odpadu na reálných datech přístupem navrženým v této práci budou jednoznačné toky z úlohy vyjmuty.

Aby bylo možné dohledat toky odpadu ve složitějších případech, je žádoucí, aby používaná data, splňovala bilanční rovnice zmíněné v kapitole 1.2. Proto je před samotným hledáním toků použit nástroj REVEDATO 1.0, který nesoulady v datech opraví.

Při vykazování nakládání s odpadem se rozlišují různé typy zpracování odpadu, např. materiálové, energetické, spalování nebo skládkování. Některé způsoby zpracování jsou preferovány, protože jsou např. šetrnější k životnímu prostředí. Jejich preference, jak bylo popsáno v kap. 1.1, je určena Hierarchií nakládání s odpady, viz směrnice [17]. Nicméně tato práce se věnuje tvorbě samotných modelů na rekonstrukci toku odpadu, tedy všechny způsoby zpracování jsou zde považovány za ekvivalentní a není mezi nimi rozlišováno. Jak bylo popsáno v kapitole 1.2, v rámci aplikace REVEDATO 2.0 jsou řešeny různé typy zpracování až na závěr na základě expertního názoru, podle kterého je předpokládáno, že odpad transportovaný delší vzdálenost byl převážen za kvalitnějším zpracováním.

Aby bylo možné vytvořit model rekonstruující toky odpadu, je třeba si nejprve definovat principy, podle kterých je předpokládáno, že docházelo k transportu odpadu. Jak bylo zmíněno v kapitole 1.2, vychází se z názoru expertního týmu ÚPI FSI na VUT v Brně pod vedením dr. R. Šompláka, který se tématem OH a ObH dlouhodobě zabývá a patří mezi řešitele projektů CEVOOH.

Uvažované principy jsou:

1. Odpad je převážen na co nejkratší vzdálenosti.
2. Odpad z jednoho uzlu je předáván přes co nejmenší počet uzlů.
3. Odpad z jednoho uzlu je zpracováván v co nejmenším počtu uzlů, tj. tok odpadu je co nejméně rozdělován.

Zmíněné předpoklady se mohou, ale také nemusí, vylučovat. Ze zkušeností expertů plyne, že skutečný model se do jisté míry řídí všemi těmito principy naráz.

Před samotným návrhem řešení je provedena důkladná rešerše přístupů k obdobným problémům. Tyto přístupy, příp. jejich dílčí části, jsou posouzeny z pohledu možnosti využití u výše definovaného problému. Rešerše je zpracována v kapitole 2.

2 Literární rešerše

Literární rešerši lze rozdělit do tří částí. První část se věnuje problematice dostupnosti a správnosti dat v OH. Tento aspekt významným způsobem limituje následné analýzy a plánování předmětné oblasti. Druhá část je zaměřena na tok odpadu v rámci sledovaného systému (např. technologický proces, nebo geografické členění). Poslední část se věnuje opravě nesrovnalostí v datových strukturách.

Jedním z klíčových problémů při vytváření a aplikování strategií v OH je nedostatek spolehlivých dat. Zatímco data v reálném čase jsou důležitá pro dynamické modely sběru odpadu [19], kvalitní historická data nachází své využití při vytváření optimalizovaných infrastruktur např. pro recyklaci odpadu [20]. Ve studii [21] byla vytvořena klasifikace informačních a komunikačních technologií používaných při nakládání s komunálním odpadem. Jako jedno z hlavních omezení při plánování sběru odpadu byl označen nedostatek dat v reálném čase. Autoři jiné studie [22] vyvinuli indikátory OH na sledování a kvantifikaci možných dopadů na životní prostředí, přínosů a potenciálů, které pramení ze strategií OH použitých u různých toků odpadu. Jako jednu z největších překážek při počítání těchto indikátorů považují limitace vstupních dat, zejména šlo o duplicitní data a různé úrovně agregace mezi daty o produkci a zpracování odpadu. Ve článku [23] týkajícím se odpadu z těžebního průmyslu v Polsku se autoři věnovali datům dostupným na úrovni EU, která poskytují jednotlivé členské státy. Studie ukázala, že i přes četná doporučení a regulace vydané EU nejsou výkazy o implementaci opatření podporujících OH konzistentní a úplné.

V nedávném přehledu o budoucnosti OH v chytrých a udržitelných městech [24] popisují autoři nedostatky současných praktik OH a navrhují koncepční rámec centralizovaného systému OH. Autoři zkoumali tři vzájemně propojené komponenty: infrastrukturu sběru dat v průběhu celé životnosti produktů, soubor nových obchodních modelů založených na těchto datech s cílem prevence vzniku odpadu a inteligentní infrastrukturu využívající senzory k třídění a včasnému svozu odpadu. Aby se tyto pokroky mohly prosadit, je zásadní správné využití a inkorporace technologií založených na konceptu Internetu věcí [25]. Další studie [26] zhodnotila současné strategie a nástroje ke sledování OH a vyzdvihla několik inovativních strategií na dosažení inteligentního a efektivního plánování v OH.

K určení potenciálních příležitostí ObH k snižování, opětovnému použití a recyklaci odpadu, je důležitá znalost a porozumění materiálových toků. Tu je možné získat pomocí analýzy materiálových toků (MFA — Material Flow Analysis), což je metoda modelování toků materiálů antroposférou [27]. Z hlediska OH je MFA relevantní zejména v kontextu životního cyklu produktu. Což pokrývá zkoumání toku daného materiálu od jeho použití při výrobě produktu, přes využívání produktu až po fázi, kdy je produkt (a tedy i materiál) považován za odpad. MFA byla uplatněna při hodnocení přechodu na ObH u plastů v Irsku [28], dále při vývoji udržitelného systému nakládání s elektronickým odpadem v Indii [29], modelování možných scénářů OH v Srbsku [30], nebo při modelování prognóz vývoje obalového odpadu v Belgických domácnostech [31]. Na celosvětové úrovni byla MFA použita

k vytvoření koncepcí cílených na udržitelnost v oblasti plastových výrobků a odpadů [32]. Autoři mimo jiné identifikovali čtyři slabiny dostupných dat o zásobách a tocích plastového materiálu. Uvádí mezi nimi chybějící informace, nekonzistentní klasifikaci, vzájemně si odporující data a nepřesné údaje.

Problém identifikace zdrojů vzniku odpadu byl řešen pomocí různorodých modelů [33]. Většinu z těchto modelů lze popsat čtyřmi specifickými kritérii: úrovní zaměření (domácnosti, regiony, nebo stát), typem modelovaných toků odpadu (např. materiálový tok, podíl odpadu domácností), předpokládanými nezávislými proměnnými a použitou metodou modelování (např. korelační analýza, regresní analýza, analýza časových řad, nebo dynamické systémy). Studie [33] ukázala, že ve většině případů byly nejpřínosnější korelační a regresní analýza a skupinová porovnání. Na některé specifické problémy (např. pro predikci krátkodobé sezónní produkce odpadu) byla vhodnější analýza časových řad. Autoři studie [34] zjistili, že na produkci odpadu v domácnostech má největší vliv jejich velikost, výška příjmů a úroveň vzdělání. Johnson a kol. [35] použili deset let stará data o odpadech a recyklaci k vytvoření prognózy o produkci odpadu v hustě obydlené oblasti města New York. Jejich regresní model založený na rostoucím gradientu dokázal identifikovat určité pravidelnosti v produkci odpadu, včetně krátkodobých odchylek, které souvisely se specifickými událostmi, jako jsou prázdniny, nebo sezónní výkyvy. Různé modely využívající strojové učení (rozhodovací stromy a neuronové sítě) byly použity na modelování produkce odpadu v Kanadě na regionální a obecní úrovni [36]. Predikce byla založena na socioekonomických datech, jako je podíl obyvatel nad 45 let, medián příjmů, nebo míra nezaměstnanosti.

Spolehlivá detekce, vyhodnocení a upravení nesrovnalostí a chyb v datech týkajících se OH je často zkoumaná oblast po teoretické i po aplikační stránce. V kontextu MFA studie [37] popsala různé zdroje nejistoty ve výsledcích MFA a současné postupy při řešení těchto problémů. Bylo zjištěno, že zatímco matematicky jednodušší koncepty zaměřené na charakterizaci nejistoty dat byly vhodné nástroje pro deskriptivní MFA, různé statistické přístupy umožňovaly přesnější hodnocení nejistoty a modelovaly citlivost explorační MFA. Také se ukázalo, že bez ohledu na úroveň sofistikovanosti představuje nedostatek informací o datech MFA jeden z hlavních problémů při relevantní analýze nejistoty. Volně dostupný software STAN, který podporuje MFA s ohledem na nejistotu v datech byl vyvíjen v článku [38]. Tento software dokáže narovnat nelineární data za pomoci vážené metody nejmenších čtverců a šíření chyb. Nový přístup k charakterizaci nejistoty v datech MFA byl představen ve studii [39]. Tento přístup spočíval v posouzení kvality dat jako základu pro odhady nejistoty vstupních dat. Výsledky případové studie toku plastů v Rakousku ukázaly, že způsob odhadování nejistoty v materiálových tocích měl větší vliv na rozsahy nejistot výsledných toků než uvažované předpoklady o rozděleních pravděpodobnosti. Nelineární optimalizace nejmenších čtverců byla vytvořena v [40] k hledání toků oceli v USA.

Základní myšlenka narovnání dat spočívá ve vypořádání se s rozdíly v datech jejich upravením tak, aby splňovaly určité předpoklady (např. předpoklad, že nejistotu dat lze

popsat některým pravděpodobnostním rozdělením). V článku [41] byl navrhnout obecný rámec na vyrovnání dat nenormálně rozdělených dat na základě bayesovského přístupu. Ve studii [42] byla uvedena zobecněná nelineární metoda nejmenších čtverců založená na nelineárním optimalizačním modelu. Dubois a kol. [43] představili narovnání dat na principu fuzzy množin. Uvedený postup, dle autorů, umožňuje obecnější a flexibilnější přístup pro výběr odhadovaných hodnot, který je méně závislý na obtížně obhajitelném předpokládaném rozdělení. Autoři studie [44] navrhli vícekriteriální model založený na dodavatelském řetězci pro toky objemných odpadů, které byly energeticky využitelné. Matematický model pro predikci prostorových dat s nejistotou byl představen v článku [45]. Ve studii [46] byl vytvořen smíšený celočíselný kvadratický optimalizační model pro odhad množství odpadu, které bylo vyseparováno ze směsného komunálního odpadu.

Z provedené rešerše metody MFA vyplývá, že uvedené studie z oblasti OH jsou obvykle zaměřené na jeden uzel (příp. jednotky uzlů). Ty představují konkrétní proces např. továrnu, nebo agregované geografické území. Tato struktura neodpovídá problému, který je řešen v této diplomové práci, kde je řešeno velké množství uzlů a hran.

V rámci této diplomové práce je vyvinut nový přístup kombinující tokovou úlohu ve smyslu MFA s technikami vyrovnání dat, které jsou inspirovány přístupy uvedenými v třetí části této rešerše. Celý přístup je koncipován tak, aby byl řešitelný i pro velké množství uzlů za rozumný výpočtový čas.

3 Matematický aparát

V této kapitole je uveden matematický aparát, který je dále v práci využíván. Jedná se o vybrané poznatky z teorie grafů, lineárního, celočíselného a vícekritériálního programování.

3.1 Teorie grafů

V této části je citováno z [47], pokud není uvedeno jinak.

Základní pojmy

DEFINICE 3.1.1. *Neorientovaný graf* je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná neprázdná množina prvků zvaných vrcholy a E je množina neuspořádaných dvojic $\{u, v\}$, kde u, v jsou vrcholy z V .

DEFINICE 3.1.2. *Orientovaný graf* je uspořádaná trojice $G = (V, E, \epsilon)$, která je tvořena konečnou neprázdnou množinou vrcholů (nebo také uzlů) V , konečnou množinou orientovaných hran E a zobrazením $\epsilon : E \rightarrow V^2$, které se nazývá *vztah incidence*. Každé hraně $e \in E$ zobrazení ϵ přiřazuje uspořádanou dvojici vrcholů (x, y) . Hrana e se nazývá *incidentní* s vrcholy x, y . Vrchol $x \in V$ se nazývá *počáteční vrchol hrany e* , zavede se označení $Pv(e)$. Vrchol $y \in V$ se nazývá *koncový vrchol hrany e* s označením $Kv(e)$. Jestliže $x = y$, pak se hrana e nazývá orientovaná *smyčka*.

DEFINICE 3.1.3. Orientovaný graf $G = (V, E, \epsilon)$ spolu se zobrazením $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *ohodnocený orientovaný graf* a značí se (G, w) . Obrazu $w(e)$ hrany $e \in E$ se říká *ohodnocení hrany w* . Pokud je $w(e) > 0, e \in E$, jedná se o hranu s kladným ohodnocením.

Podobně lze definovat i ohodnocený neorientovaný graf.

DEFINICE 3.1.4. Nechť $G = (V, E, \epsilon)$ je orientovaný graf a $x, y \in V$ jsou dva libovolné vrcholy. Potom lze zavést následující pojmy:

- *výstupní okolí vrcholu x* :
 $E_G^+(x) = \{e \in E | Pv(e) = x\}$ (tj. množina hran s počátečním vrcholem x),
- *vstupní okolí vrcholu x* :
 $E_G^-(x) = \{e \in E | Kv(e) = x\}$ (tj. množina hran s koncovým vrcholem x),
- *okolí vrcholu x* :
 $E_G(x) = E_G^+(x) \cup E_G^-(x)$ (tj. množina hran incidentních s vrcholem x),
- *násobnost hrany (x, y)* :
 $m_G^+(x, y) = |E_G^+(x) \cap E_G^-(y)|$ (tj. počet hran s počátečním vrcholem x a koncovým vrcholem y),
- *výstupní stupeň vrcholu x* :
 $d_G^+(x) = |E_G^+(x)|$ (tj. počet hran vycházejících z vrcholu x),

- vstupní stupeň vrcholu: x
 $d_G^-(x) = |E_G^-(x)|$ (tj. počet hran vedoucích do vrcholu x),
- stupeň vrcholu x :
 $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$ (tj. počet incidentních hran vrcholu x).

DEFINICE 3.1.5. Necht $G = (V, E, \epsilon)$ je orientovaný graf. Jestliže má každá hrana $e \in E$ násobnost nejvýše 1, pak je G orientovaný *prostý graf*. Jestliže existuje alespoň jedna hrana $e \in E$ s násobností vyšší než jedna, pak se G nazývá orientovaný *multigraf*.

DEFINICE 3.1.6. Necht $G = (V, E, \epsilon)$ je orientovaný graf. Necht $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ a $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$. Potom posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ ($k > 0$) se nazývá:

- orientovaný *sled* mezi vrcholy v_0 a v_k , jestliže $\epsilon(e_i) = (v_{i-1}, v_i), i = 1, \dots, k$,
- orientovaný *tah* mezi vrcholy v_0 a v_k , jestliže je sledem a navíc každé dvě hrany jsou různé,
- orientovaná *cesta* mezi vrcholy v_0 a v_k , jestliže je sledem a navíc každé dva vrcholy jsou různé,
- *neorientovaná cesta* mezi vrcholy v_0 a v_k , jestliže každé dva vrcholy jsou různé a $\epsilon(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}, i = 1, \dots, k$,
- orientovaný *cyklus*, jestliže je sledem, $v_0 = v_k$ a pro ostatní vrcholy i všechny hrany platí, že jsou po dvou různé.

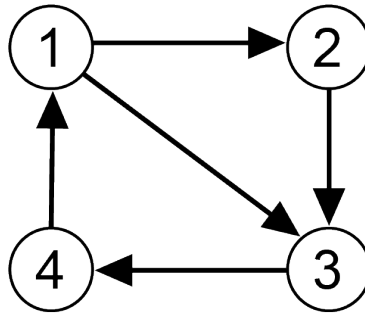
Pozn.: dále v práci je pod názvem graf označován orientovaný graf, případně orientovaný multigraf.

DEFINICE 3.1.7. Graf $G = (V, E, \epsilon)$ je *souvislý*, jestliže mezi jeho každými dvěma různými vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje neorientovaná cesta. Graf $G = (V, E, \epsilon)$ je *silně souvislý*, jestliže mezi jeho každými dvěma různými vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje orientovaná cesta z v_i do v_j a také z v_j do v_i .

DEFINICE 3.1.8. *Řezem* v souvislém grafu $G = (V, E, \epsilon)$ se nazývá množina $D \subseteq E$, jestliže graf G přestane být souvislým po odstranění hran z množiny D . *Minimálním řezem* grafu G je množina $D \subseteq E$, která je řezem a zároveň žádná její vlastní podmnožina řezem není.

Reprezentace grafů

Existuje několik způsobů, jak lze reprezentovat grafy. Prvním způsobem je reprezentace pomocí obrázku, kde orientované hrany jsou znázorněny pomocí šipek mezi příslušnými vrcholy. Příklad takto zadaného grafu je na obr. 3.1. Tento graf je orientovaný prostý graf se čtyřmi vrcholy, dále bude označován jako graf G_1 . Problém tohoto způsobu reprezentace je v případě rozsáhlých grafů nebo grafů s velkým množstvím hran, protože potom obrázek ztrácí na přehlednosti.



Obr. 3.1: Graf G_1 zadaný pomocí obrázku.

Druhý způsob, jak reprezentovat graf, je pomocí výčtu vrcholů a hran. Graf G_1 by zadaný tímto způsobem vypadal:

Vrcholy: 1, 2, 3, 4.
Hrany: (1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,1).

Další způsoby reprezentace jsou např. pomocí matice sousednosti, nebo matice incidence.

DEFINICE 3.1.9. Nechť $G = (V, E, \epsilon)$ je orientovaný graf, kde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pak tomuto grafu lze přiřadit *matici sousednosti* $M_G^+ = [m_{ij}^+]_{i,j=1}^n$, která je definována pomocí násobnosti hran následovně:

$$m_{ij}^+ = m^+(v_i, v_j).$$

Matice sousednosti je čtvercová matice typu $(n \times n)$. Tento typ reprezentace je vhodný zejména pro grafy s vyšším počtem hran, v opačném případě by matice sousednosti byla řídká. Způsob, jakým je matice definována, umožňuje i zadávání multigrafů. Matice sousednosti grafu G_1 je

$$M_{G_1}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINICE 3.1.10. Nechť $G = (V, E, \epsilon)$ je orientovaný graf bez smyček, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Pak tomuto grafu lze přiřadit *matici incidence* $Q_G = [q_{ij}]_{i,j}$ typu $(n \times m)$, která je definována následovně:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže hrana } e_j \text{ má počáteční uzel } v_i, \\ -1, & \text{jestliže hrana } e_j \text{ má koncový uzel } v_i, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že v každém sloupci jsou pouze dva nenulové prvky, je matice incidence z definice řídká pro větší počet vrcholů a hran. Kvůli úspoře počítačové paměti je v takových případech vhodné ji ukládat ve formátu určeném pro řídké matice. Využívá

se například v síťových tocích. Graf G_1 je možné zadat pomocí matice incidence například takto:

$$Q_{G_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Algoritmy na hledání nejkratší cesty v grafu

Jedním ze základních problémů v teorii grafů je *hledání nejkratší cesty v grafu*. Obvykle se tento problém řeší v *ohodnoceném grafu* (G, w) . Délkou cesty $dist(u, v)$ mezi vrcholy u a v je myšlen součet ohodnocení hran cesty. Tedy délka cesty $(u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k = v)$ je

$$dist(u, v) = \sum_{i=1}^k w(e_k).$$

V případě, že graf není ohodnocený, položí se $w(e) = 1$ pro všechny hrany, $dist(u, v)$ potom představuje počet hran cesty. Cílem hledání nejkratší cesty v grafu je najít takovou cestu mezi danými vrcholy, která má nejmenší délku. Tento problém lze řešit např. pomocí *Dijkstrova algoritmu*. Ten dokáže nalézt nejkratší cestu mezi dvěma konkrétními vrcholy, ale také od jednoho vrcholu do všech ostatních vrcholů (pokud mezi nimi existuje orientovaná cesta) v grafu s kladným ohodnocením u všech hran. [48]

Dijkstrův algoritmus (pro neorientovaný graf) [48]:

1. Inicializace: $a_1 = 0$, pro $j = 2, \dots, n$ se položí $a_j = w(e_{1j})$, jestliže existuje hrana $e_{1j} = (v_1, v_j)$, jinak $a_j = \infty$. Dále se vytvoří množina „navštívených“ uzlů $P = \{v_1\}$ a „nenavštívených“ uzlů $T = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$.
2. Nalezne se $v_k \in T$ tak, že $a_k = \min\{a_j\}$.
Aktualizují se množiny T a P : $T = T \setminus \{v_k\}$, $P = P \cup \{v_k\}$.
Pokud $T = \emptyset$, výpočet končí a $dist(v_1, v_j) = a_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.
3. Aktualizuje se $a_j = \min\{a_j, a_k + w(e_{kj})\}$, $\forall j \in T$, pro která existuje hrana $e_{kj} = (v_k, v_j)$.
Pokračuje se krokem 1.

Uvedený algoritmus hledá nejkratší cesty z vrcholu v_1 do všech ostatních vrcholů v_2, \dots, v_n s předpokladem, že se jedná o neorientovaný souvislý prostý graf s kladným ohodnocením. Algoritmus lze upravit i pro orientovaný graf, taková modifikace je uvedena např. v [47] na str. 101. Další algoritmus hledající nejkratší cesty je *Floydův–Warshallův algoritmus*, který lze použít i v grafu se záporným ohodnocením za podmínky, že neobsahuje cyklus se zápornou délkou. Tento algoritmus najde nejkratší cesty mezi každými dvěma vrcholy v neorientovaném souvislém grafu.

Floydův–Warshallův algoritmus [49]:

1. Necht matice $A^0 = [a_{ij}^0]_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij}^0 = w(e_{ij})$, pokud existuje hrana $e_{ij} = (v_i, v_j)$, jinak $a_{ij}^0 = \infty$.
2. Pro $k = 1, 2, \dots, n$ provede se krok 3.

3. Pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$ provede se krok 4.

4. Pro $j = i + 1, i + 2, \dots, n$ provede se:

$$a_{ij}^k = \min\{a_{i,j}^{k-1}, a_{i,k}^{k-1} + a_{k,j}^{k-1}\}.$$

5. $dist(v_i, v_j) = a_{i,j}^n$

Existuje velké množství algoritmů na hledání nejkratších cest, ovšem Dijkstrův a Floydův–Warshallův patří mezi nejnámější. Další algoritmy lze nalézt např. v [47] nebo [49].

Toky v síti

Orientovaný graf (G, c) lze považovat za *síť*, ve které je distribuováno nějaké zboží (příp. látka, informace apod.). Kladné ohodnocení hran c představuje maximální *kapacitu*, která omezuje shora převážené množství zboží na hraně. Případně je možné přidat omezení zdola ohodnocením $l : E \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ představujícím minimální kapacitu. Pokud není minimální kapacita explicitně určena, je uvažována nulová. *Tokem na hraně* $f(e), e \in E$ se nazývá skutečné množství zboží převážené přes hranu, které musí být v rozmezí kapacit, tj. $f(e) \in \langle l(e), c(e) \rangle$. V každém vrcholu musí platit, že množství, které „vtéká“ do vrcholu, je rovno množství, které „vytéká“ z tohoto vrcholu. Tato podmínka se nazývá *balance* ve vrcholech a matematicky ji lze zapsat:

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e). \quad (3.1.1)$$

Zdroj se nazývá vrchol, ve kterém vzniká zboží. *Spotřebič* je potom vrchol, ve kterém stejné množství zboží zaniká. Zdroj a spotřebič jsou jediné vrcholy, ve kterých je umožněna akumulace, podmínka balance je tedy v těchto uzlech modifikována. U zdroje je třeba k levé straně rovnice (3.1.1) přičíst vyprodukované množství. U spotřebiče se k pravé straně rovnice (3.1.1) přičte zpracované množství zboží. [47, 49]

Nejnámějším problémem, který se týká toků v síti, je úloha o maximálním toku. Cílem je nalézt přípustný tok f v síti od zdroje s ke spotřebiči t tak, aby bylo z s do t převezeno co největší množství zboží. Tento problém lze řešit pomocí *Fordova—Fulkersonova algoritmu*. K jeho formulaci je nejprve třeba zavést několik pojmů.

DEFINICE 3.1.11. Nechtě prostý orientovaný graf $G = (V, E, \epsilon)$ je síť s maximální kapacitou $c(e)$ pro všechny hrany $e \in E$ a nechtě s je zdroj a t spotřebič.

- *Reziduální kapacitou* hrany $e = (u, v)$ je číslo $c_f(e) = c(e) - f(e)$, kde $f(e)$ je tok na hraně e .
- *Reziduální síť* je uspořádaná čtveřice $S_f = (G_f, s, t, c_f)$, kde G_f je prostý orientovaný graf, pro který platí $a(G_f) = \{e | c_f(e) > 0, e \in E\}$. G_f se nazývá *reziduální graf*.
- *Reziduální kapacita cesty* $P = (s, e_1, v_1, \dots, e_k, t)$ se definuje

$$c_f(P) = \min_{i=1, \dots, k} \{c_f(e_i)\}.$$

- Cesta mezi s a t se nazývá *zlepšující cesta*, jestliže $c_f(P) > 0$.
- *Kapacitou řezu* $D \subseteq E$ je $c(D) = \sum_{e \in D} c(e)$.

VĚTA 3.1.12. *Nechť G je síť s tokem f . Potom tok f je maximální právě tehdy, když G neobsahuje žádnou zlepšující cestu.*

Důkaz věty je uveden v [49] na str. 168.

VĚTA 3.1.13. *V libovolné síti je maximální tok roven kapacitě minimálního řezu $c(D)$.*

Fordův—Fulkersonův algoritmus [49]:

1. Inicializace: pro každé $e \in E$ se položí $f(e) = 0$.
2. Pro každé $e \in E$ se spočítá reziduální kapacita $c_f(e) = c(e) - f(e)$ a sestaví se reziduální graf G_f .
3. Hledá se zlepšující cesta v reziduálním grafu G_f .
Pokud žádná taková cesta neexistuje, pak je algoritmus ukončen. Tok f je maximální.
V opačném případě se vytvoří zlepšující cesta $P = (s, e_1, v_1, \dots, e_k, t)$ a pokračuje se ve výpočtu.
4. Spočítá se reziduální kapacity cesty P .
Položí se $f(e_i) = f(e_i) + c_f(P)$, $i = 1, 2, \dots, k$.
Pokračuje se krokem 2.

Tento pseudokód Fordova—Fulkersonova algoritmu je spíše nástin výpočtu, který postačí k pochopení myšlenky. Není v něm ale například uvedeno, jak nalézt zlepšující cestu. Celý algoritmus je uveden např. v [49] na str. 170.

Pokud se v síti vyskytuje více druhů převáženého zboží, pak se mluví o *multikomoditních tocích*. Problémy týkající se multikomoditních toků se většinou řeší pomocí optimalizačních modelů.

3.2 Optimalizace

Obecná formulace optimalizačních úloh je

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

$$\text{za podmínky } g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2.1)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.2.2)$$

Často se používá také kompaktnější maticový zápis:

$$\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Funkce $f(\mathbf{x})$ se nazývá *účelová funkce*, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je vektor *proměnných*. Omezení kladené na \mathbf{x} se standardně zadávají pomocí rovnic (3.2.1) a (3.2.2). V případě, že je třeba zadat podmínku $g_k \geq 0$, pak ji lze vynásobením číslem -1 převést na tvar $-g_k \leq 0$. Často se uvádí navíc podmínka $\mathbf{x} \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, tuto podmínku lze ovšem zapsat v rámci omezení (3.2.1) a (3.2.2).

Pokud vektor proměnných \mathbf{x} splňuje podmínky (3.2.1) a (3.2.2), mluví se o *přípustném řešení*. Předmětem optimalizace je nalézt řešení \mathbf{x} tak, aby hodnota účelové funkce byla co nejmenší a zároveň řešení bylo přípustné, takovému řešení se říká *optimální* a značí se \mathbf{x}^* . V případě, že je cílem funkci $f(\mathbf{x})$ maximalizovat, lze úlohu přeformulovat na minimalizační: $\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x}} -f(\mathbf{x})$. [50]

Jestliže jsou všechny funkce $f, g_k, k = 1, \dots, m, h_j, j = 1, \dots, p$ lineární v proměnné \mathbf{x} , pak se jedná o *lineární programování*. Jestliže je alespoň jedna z těchto funkcí nelineární, jde o *nelineární programování*.

Pozn.: všechny vektory uváděné v této kapitole jsou považovány za sloupcové.

3.2.1 Lineární programování

V této části je citováno z [50].

Základní pojmy

Před uvedením základního tvaru úlohy lineárního programování je nejprve definováno několik základních pojmů, které se v optimalizaci využívají.

DEFINICE 3.2.1. Necht $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Řekne se, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}^* \in X$:

- *globální minimum*, jestliže $\mathbf{x} \in X \Rightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$,
- *globální maximum*, jestliže $\mathbf{x} \in X \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$,
- *lokální minimum*, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že pro $\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$,
- *lokální maximum*, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že pro $\mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$,
- *ostré globální minimum*, resp. *maximum*, jestliže $\mathbf{x} \in X \Rightarrow f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$, resp. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ (obdobně by se definovalo i *ostré lokální minimum*, resp. *maximum*).

DEFINICE 3.2.2. Necht $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Jestliže f má ve vnitřním bodě \mathbf{x} množiny X všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$, potom vektor

$$\nabla_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)^T$$

se nazývá *gradient* v bodě \mathbf{x} .

DEFINICE 3.2.3. Neprázdná množina $X \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní*, jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a všechna $\lambda \in (0, 1)$ platí $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in X$.

DEFINICE 3.2.4. Množina, kterou lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq k\}$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ a $k \in \mathbb{R}$, se nazývá *uzavřený poloprostor*.

DEFINICE 3.2.5. Množina $X \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *konvexní polyedrická*, jestliže je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů.

DEFINICE 3.2.6. Necht $X \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Potom bod $\mathbf{a} \in X$ je *krajní bod množiny* X , jestliže $\nexists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ a $\alpha \in (0, 1)$ tak, aby $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}$. Množina všech krajních bodů množiny X se bude značit $ext(X)$.

DEFINICE 3.2.7. Necht $X \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Vektor $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *směr množiny* X , jestliže pro všechna $\mathbf{x} \in X, \forall \lambda \geq 0$ platí $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in X$. Směr \mathbf{d} je *krajním směrem* množiny X , jestliže $\nexists \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in X, \mathbf{d}_1 \neq \alpha \mathbf{d}_2, \forall \alpha \geq 0$ tak, že $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$ platí $\mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{d}_1 + \lambda_2 \mathbf{d}_2$. [52]

DEFINICE 3.2.8. Necht $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní*, jestliže $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a $\forall \lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y})$. Funkce f je *konkávní*, jestliže funkce $-f$ je konvexní funkce.

VĚTA 3.2.9. Necht funkce $g_k, k = 1, \dots, m$ jsou konvexní a funkce $h_j, j = 1, \dots, p$ jsou lineární. Potom množina všech řešení soustavy nerovnic (3.2.1) a (3.2.2) je konvexní.

Důkaz viz [50] str. 15.

VĚTA 3.2.10. Necht $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Potom každé lokální minimum funkce f na X je také jejím globálním minimem na X .

Z toho vyplývá, že pokud jsou splněny podmínky věty 3.2.9 a navíc je účelová funkce f konvexní, pak je dostatečné nalézt lokální minimum a toto minimum bude zároveň globálním.

Lineární úlohu je možné zapsat maticově ve standardním tvaru

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad (3.2.3)$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. V případě, že je nutné formulovat podmínku $\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, zavedou se nové proměnné $s_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ a podmínka se vyjádří po složkách $\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i - s_j = b_j$. Pokud některá proměnná může nabývat i záporných hodnot, tedy např. $x_i \in \mathbb{R}$, pak ji lze rozdělit na dvě proměnné představující kladnou x_i^+ a zápornou část x_i^- a nahradit proměnnou x_i těmito dvěma proměnnými následovně $x_i = x_i^+ - x_i^-$, kde $x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$. Tedy i takové úlohy lze zapsat ve standardním tvaru.

VĚTA 3.2.11. Množina přípustných řešení lineární úlohy ve standardním tvaru $M = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ je konvexní polyedrická množina.

Důkaz: množina M je průnikem konečného počtu uzavřených poloprostorů, z toho vyplývá, že to je konvexní polyedrická množina.

VĚTA 3.2.12. (Existence optimálního řešení): Lineární úloha ve standardním tvaru (3.2.3) má optimální řešení právě tehdy, když množina přípustných řešení M je neprázdná a $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq 0$ pro všechna $\mathbf{y} \in \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \}$.

Má-li úloha (3.2.3) optimální řešení, pak účelová funkce nabývá svého minima na M v některém z krajních bodů M .

VĚTA 3.2.13. Obecně lineární úloha ve standardním tvaru má buď právě jedno, nekonečně mnoho, nebo žádné řešení. Navíc, pokud existuje právě jedno řešení, pak jím je jeden z krajních bodů množiny přípustných řešení M . [49]

Algoritmy řešení

Lineární úlohu ve standardním tvaru lze řešit *simplexovým algoritmem*.

Simplexový algoritmus [51]:

1. Inicializace: nalezení přípustného řešení a počáteční báze lineární úlohy ve standardním tvaru (3.2.3).

Nechť $J = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina indexů, počáteční báze je reprezentována indexy v množině J_B tak, že platí $J = J_B \cup J_N$, $J_B \cap J_N = \emptyset$, $|J_B| = m$, $|J_N| = n - m$. Potom se vytvoří matice $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_j]_{j \in J_B}$ s hodnotami m a matice $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_j]_{j \in J_N}$. A z \mathbf{c}^T se vytvoří $\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T$.

Pokud počáteční báze není dána, lze využít dvoufázový simplexový algoritmus, viz [50] na str. 29.

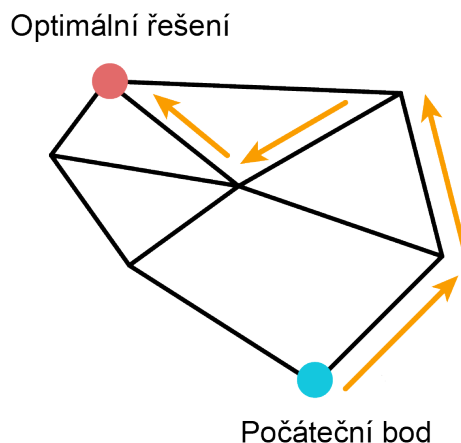
Pokud žádné přípustné řešení neexistuje, pak úloha nemá řešení. Algoritmus se ukončí.

2. Řeší se soustava lineárních rovnic $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, její řešení je tvaru $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ a musí platit $\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$. Položí se $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ a spočítá se $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.
3. Řeší se lineární soustava $\mathbf{w}^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$, její řešení je ve tvaru $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$. Spočítá se pro všechna $j \in J_N : z_j - c_j = \mathbf{w}^T \mathbf{a}_j - c_j$. Hledá se takový index k z množiny J_N , pro který platí: $z_k - c_k = \max\{z_j - c_j | j \in J_N\}$.

Jestliže $z_k - c_k \leq 0$, pak bylo nalezeno optimální řešení. Algoritmus se ukončí.

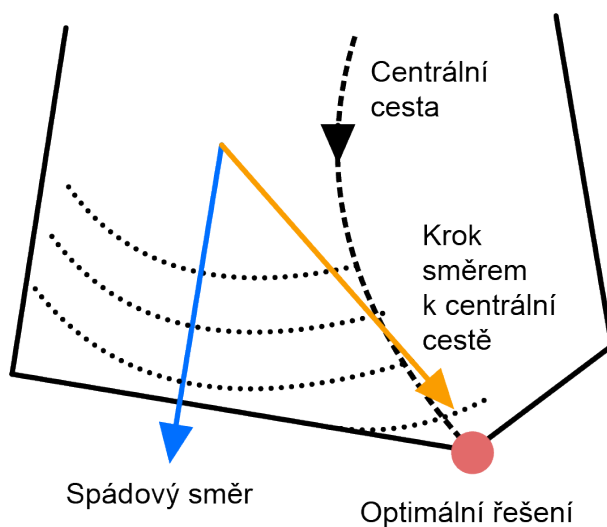
4. Řeší se soustava lineárních rovnic $\mathbf{B}\mathbf{y}_k = \mathbf{a}_k$, její řešení je tvaru $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$. Jestliže $\mathbf{y}_k \leq \mathbf{0}$, potom úloha je zespodu neomezená a směr, ve kterém hodnota účelové funkce klesá je $(-\mathbf{y}_k^T, \mathbf{e}_k^T)^T$. Algoritmus se ukončí.
5. Řeší se $\frac{b_r}{y_{rk}} = \min_{i \in J_B} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} | y_{ik} > 0 \right\}$. Potom $J_B = J_B \setminus \{r\} \cup \{k\}$, $J_N = J_N \setminus \{k\} \cup \{r\}$. Aktualizují se matice $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_j]_{j \in J_B}$, $\mathbf{N} = [\mathbf{a}_j]_{j \in J_N}$ a pokračuje se krokem 2.

Simplexová metoda se často řeší ve formě simplexové tabulky, jako je to uvedeno např. v [52] na str. 80-82. Při řešení lineárního programování pomocí simplexové metody se může v degenerovaných případech výpočet zacyklit. Lze se tomu ale vyhnout implementací určitých procedur, jako je např. Blandovo pravidlo, které je uvedeno v [53]. Podstatou simplexové metody je, že se pomocí krajních směrů množiny přípustných řešení M z nějakého přípustného řešení postupuje do krajních bodů M , dokud není nalezen krajní bod s nejmenší hodnotou účelové funkce (jako je to zobrazeno na obrázku 3.2), případně je nalezen krajní směr, ve kterém hodnota účelové funkce klesá.



Obr. 3.2: Myšlenka simplexové metody (upraveno) [54]

Jiný přístup k hledání řešení mají algoritmy, které se souhrnně nazývají *metody vnitřního bodu*. Jedná se o iterační metody, které začínají v nějakém vnitřním bodě množiny přípustných řešení M a postupně se posouvají touto množinou tak, aby se zlepšovala hodnota účelové funkce směrem na hranici M . Tato myšlenka je zobrazena na obr. 3.3. Tyto metody využívají k nalezení optimálního řešení *spádové metody*, mezi něž patří například *metoda největšího spádu*. Více o metodách vnitřního bodu je např. v [55].



Obr. 3.3: Myšlenka metod vnitřního bodu (upraveno) [56]

Nechť je uvažována úloha

$$\min\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in M\}. \quad (3.2.4)$$

DEFINICE 3.2.14. Směr $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ z bodu x množiny přípustných řešení M úlohy (3.2.4) se nazývá *přípustný*, jestliže platí: $\mathbf{d}^T \nabla f(\mathbf{x}) < 0$ a $\exists \lambda_0 > 0$ tak, že $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in M$ pro $\forall \lambda \in \langle 0, \lambda_0 \rangle$.

Přípustný směr je tedy takový, ve kterém hodnota účelové funkce klesá.

VĚTA 3.2.15. *Necht je funkce f konvexní, množina přípustných řešení konvexní a v bodě $\mathbf{x}^* \in M$ neexistuje žádný přípustný směr, potom \mathbf{x}^* je optimální řešení úlohy (3.2.4).*

Princip spádových metod:

1. Zvolí se počáteční bod $\mathbf{x}^{(0)}$ v množině přípustných řešení M , položí se $t = 0$.
2. V iteraci t se nově určí přípustný směr $\mathbf{d}^{(t)}$ z bodu $\mathbf{x}^{(t)}$.
Jestliže přípustný směr neexistuje, pak algoritmus končí. Optimální řešení je $\mathbf{x}^{(t)}$.
3. Generuje se nové řešení $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \lambda^{(t)} \mathbf{d}^{(t)}$, kde $\lambda^{(t)}$ je řešení jednorozměrné úlohy

$$\min\{f(\mathbf{x}^{(t)} + \lambda \mathbf{d}^{(t)}) \mid \mathbf{x}^{(t)} + \lambda \mathbf{d}^{(t)} \in M, \lambda \geq 0\}.$$

Položí se $t = t + 1$ a pokračuje se krokem 2.

Pokud je přípustný směr zvolen jako $\mathbf{d}^{(t)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(t)})$, pak se jedná o metodu největšího spádu. Využívá toho, že gradient představuje směr nejvyššího vzrůstu hodnot funkce. Spádové metody řeší i úlohy, které jsou nelineární, pokud je splněno, že f je konvexní a také množina přípustných řešení je konvexní.

Příklad optimalizační úlohy z teorie grafů

V této práci je využíváno toho, že některé úlohy v teorii grafů jsou svým charakterem optimalizační úlohy, stačí je pouze přeformulovat. Např. hledání nejkratší cesty v grafu, nebo hledání maximálního toku v síti patří mezi optimalizační úlohy. Proto je lze zapsat ve tvaru typického pro optimalizační úlohy a řešit algoritmy určenými pro optimalizaci. Například úlohu hledání maximálního toku v síti lze zapsat jako úlohu lineárního programování následovně:

$$\min f \tag{3.2.5}$$

$$\text{za podmíněk } \sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = -f, \quad \text{pro } i = s, \tag{3.2.6}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \text{pro } i \neq s, t, \tag{3.2.7}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} - \sum_{j=1}^n x_{ij} = f, \quad \text{pro } i = t, \tag{3.2.8}$$

$$x_{ij} \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.2.9}$$

$$x_{ij} \geq l_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{3.2.10}$$

Minimalizuje se celkový tok f (3.2.5) za splnění několika omezení. Proměnné x_{ij} představují tok z uzlu i do uzlu j po hraně $e = (i, j)$. Tok je shora omezen kapacitou c_{ij} nerovnicí (3.2.9), která je nulová, pokud hrana neexistuje. Navíc je tok omezen minimální kapacitou, což je dáno nerovnicí (3.2.10). Podmínky bilance v uzlech jsou dány rovnicemi (3.2.6), (3.2.7) a (3.2.8). Tyto rovnice říkají, že celkový tok, který do uzlu „vteče“, musí být roven toku, který z uzlu „vyteče“. U zdrojového uzlu s je navíc na pravé straně člen $-f$, který

představuje produkci v uzlu s . Obdobně ve spotřebiči t je na pravé straně rovnice člen f , který říká, že v uzlu je zpracován tok f . [48]

Příklad optimalizace z regresní analýzy

Jsou-li k dispozici nějaká naměřená data (obecně označená b_1, b_2, \dots, b_m) a cílem je tato data popsat, je možné využít výběrový průměr, který je definovaný

$$\bar{b} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i.$$

Ovšem problém výběrového průměru je, že jej velmi ovlivňují odlehle hodnoty. Proto je v některých případech vhodnější místo toho určit jejich medián \hat{b} , což je takové měření, které při seřazení měření podle velikosti je přímo uprostřed (přesná definice je uvedena v [57] na str. 25). Tyto dvě statistiky lze formulovat i jako minimalizační problém. Výběrový průměr je totiž optimální řešení minimalizace součtů kvadrátů odchylek od všech měření, tj.

$$\bar{b} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m (b_i - x)^2.$$

Medián je zase optimální řešení minimalizace součtů odchylek od všech měření v absolutní hodnotě, tj.

$$\hat{b} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m |b_i - x|.$$

Jinými slovy, pokud se celková odchylka od vektoru měření minimalizuje v euklidovské normě definované

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

na druhou, pak je řešením výběrový průměr. Pokud je to v součtové (manhattanské) normě, která je definovaná

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

pak je řešením medián. [55]

Toho se využívá v regresní analýze, jež je součástí statistiky, ovšem jedná se také o aplikaci optimalizace. V lineární regresní analýze se předpokládá, že naměřené hodnoty $b_i, i = 1, \dots, m$ závisí na několika faktorech $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ a náhodné fluktuaci ϵ , která má standardní normální rozdělení. Snaha je najít koeficienty x_1, \dots, x_n tak, aby predikované hodnoty $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, i = 1, \dots, m$ byly co nejbližší naměřeným hodnotám, přičemž význam vzdálenosti záleží na zvolené normě. Maticově lze tento problém zapsat:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_p,$$

jestliže $p = 2$, pak se hledá řešení, které je průměrem a jehož tvar je $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Pokud je $p = 1$, pak se hledá medián. Úloha sice není lineární, ale je možné ji linearizovat

pomocí zavedení nových proměnných Δ_i následujícím způsobem

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^m \Delta_i \\ \text{za podmíněk} & \quad -\Delta_i \leq b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, & i = 1, 2, \dots, m, \\ & \quad b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \Delta_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ & \quad \Delta_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Tento problém již je lineární.[55]

Obdoby ukázaného přístupu ve zmíněných ukázkových příkladech jsou využity v rámci vývoje matematického modelu pro řešení problém uvedený v kap. 4.

3.2.2 Celočíselné programování

Optimalizačním úlohám obsahujícím proměnné, které nabývají pouze hodnot z množiny celých čísel (většinou jen kladných), se říká *celočíselné programování*. Pokud se v úloze navíc vyskytují i reálné proměnné, mluví se o *smíšeném celočíselném programování*. Jestliže proměnná nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, pak se jí říká *binární proměnná*. Je jasné, že množina přípustných řešení u úlohy s celočíselnými proměnnými obecně není konvexní. Úlohou celočíselného programování je např. problém obchodního cestujícího, který patří k základním problémům teorie grafů. Cílem obchodního cestujícího je projet všechna města (uzly) právě jednou tak, aby cestu dokončil co možná nejdříve. V tomto příkladě se vyskytují binární proměnné x_{ij} , které říkají, zda obchodník cestuje přímo mezi městy i a j . Pokud ano, pak je $x_{ij} = 1$, v opačném případě $x_{ij} = 0$. Tento problém je uveden pro představu, jaký význam mohou binární proměnné mít, podrobněji je řešen v [58]. [59]

Následující definice a věty jsou čerpány z [59].

Úlohu celočíselného programování lze obecně zapsat

$$\max\{c(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}.$$

Minimalizační problém by se definoval obdobně.

DEFINICE 3.2.16. Problém $z^R = \max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$ se nazývá *relaxace* problému $z = \max\{c(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$, jestliže je splněno, že $X \subseteq T$ a $f(\mathbf{x}) \geq c(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X$.

DEFINICE 3.2.17. Lineární úloha $z^{LP} = \max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P\}$, kde $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, je *relaxace lineárním programováním* celočíselné úlohy $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$.

VĚTA 3.2.18. *Jestliže relaxace celočíselného problému nemá přípustná řešení, pak ani původní celočíselný problém nemá přípustná řešení.*

VĚTA 3.2.19. Necht \mathbf{x}^* je optimální řešení relaxace. Jestliže $\mathbf{x}^* \in X$ a $f(\mathbf{x}^*) = c(\mathbf{x}^*)$, potom \mathbf{x}^* je optimální řešení i původního celočíselného problému.

Důkazy obou vět jsou uvedeny v [59] na str. 26.

DEFINICE 3.2.20. Matice \mathbf{A} se nazývá *totálně unimodulární*, jestliže každá její čtvercová submatice, která vznikla vynecháním určitých řádků a sloupců v matici \mathbf{A} , má determinant roven 1, -1 nebo 0.

VĚTA 3.2.21. Matice \mathbf{A} je *totálně unimodulární*, jestliže platí $\forall i, j$ je $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, každý sloupec obsahuje maximálně dva nenulové prvky a existuje dělení (M_1, M_2) množiny řádků M tak, že každý sloupec j obsahující dva nenulové prvky splňuje $\sum_{i \in M_1} a_{ij} = \sum_{i \in M_2} a_{ij}$.

Věta 3.2.21 formuluje postačující podmínky, aby matice \mathbf{A} byla totálně unimodulární. Pozn.: matice incidence grafu ze své podstaty splňuje první dvě postačující podmínky. Stačí tedy ověřit, že je splněna i poslední, pak je matice incidence totálně unimodulární.

VĚTA 3.2.22. Lineární problém $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq 0\}$, kde \mathbf{b} je celočíselný vektor, má celočíselné optimální řešení právě tehdy, když \mathbf{A} je totálně unimodulární.

Metody řešení celočíselného programování

Branch & bound metody patří mezi klasické přístupy řešení celočíselného programování. Myšlenkou tohoto přístupu je, že teoreticky každý celočíselný problém s omezenou množinou přípustných řešení lze řešit vyčíslením účelové funkce pro každé přípustné řešení, protože jich je konečně mnoho. Ovšem prakticky by toto vyčíslení často trvalo déle, než je přijatelné. Využije se tedy principu rozděl a panuj, díky kterému je dostatečné vyčíslení úlohu explicitně pouze pro malý počet přípustných řešení. [60]

Princip branch and bound metody je uveden na lineární celočíselné úloze ve tvaru

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \subseteq \mathbb{Z}^n, \mathbf{x} \geq 0\}, \quad (3.2.11)$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Množina přípustných řešení se označí M_C , dále se označí $M = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq 0\}$ a necht $C = \{1, 2, \dots, n\}$. **Algoritmus branch & bound:** BranchAndBound(M):

1. Vyřeší se lineární úloha $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in M\}$.

Jestliže tato úloha nemá optimální řešení, pak ani úloha (3.2.11) nemá řešení.

Jestliže optimální řešení \mathbf{x}^* náleží množině M_C , pak bylo nalezeno optimální řešení původní úlohy (3.2.11). Algoritmus se ukončí.

2. Jinak se zvolí $k \in C$ tak, že $x_k^* \notin \mathbb{Z}$ a definují se dvě konvexní polyedrické množiny

$$M_1 := \{\mathbf{x} \in M \mid x_k \leq \lfloor x_k^* \rfloor\},$$

$$M_2 := \{\mathbf{x} \in M \mid x_k \leq \lfloor x_k^* \rfloor + 1\},$$

kde $\lfloor x_k^* \rfloor$ představuje zaokrouhlení dolů.

Rekurzivně se řeší dvě podúlohy: $\text{BranchAndBound}(M_1)$ a $\text{BranchAndBound}(M_2)$, přičemž pokud je optimální hodnota relaxace podúlohy menší nebo rovna $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$, pak úlohu není třeba řešit. Vzniknou tak maximálně dvě kandidátní řešení a poté se vybere to lepší z nich.

Touto metodou lze řešit i smíšené celočíselné programování. Existují různé verze, které algoritmus zrychlují zmíněné např. v [59]. Dalšími klasickými metodami je řešení celočíselného programování pomocí *sečných nadrovin*, nebo *přístup pomocí teorie grup*, které jsou zmíněné např. v [60].

Celočíselné programování se řeší také pomocí *heuristických metod*. Používají se zejména k nalezení dostatečně dobrého přibližného řešení, ovšem není zaručeno, že vždy takové řešení najdou. Často se používají v kombinaci s klasickými metodami například k nalezení dolních mezí optimální hodnoty (u maximalizační úlohy). Přístupy, které se k řešení celočíselného, ale také smíšeného celočíselného programování používají jsou: lokální prohledávání, tabu search a genetické algoritmy. Princip *lokálního prohledávání* je, že se nejprve najde počáteční přípustné řešení a potom se toto řešení lokálně vylepšuje. Problém lokálního prohledávání je, že se algoritmus zastaví i při nalezení lokálního optima. Heuristika *tabu search* se tomuto problému snaží vyhnout. Nejprve se vytvoří prázdný *tabu list* a najde se počáteční přípustné řešení. Potom se prochází mezi přípustnými sousedními řešeními, která *tabu list* neobsahuje. *Tabu list* je následně aktualizován tak, že obsahuje dříve nalezené lokální optimální hodnoty, a postup se opakuje. Tím se algoritmus snaží předejít zacyklení výpočtu. *Genetické algoritmy* považují přípustná řešení za populaci, ve které má každý jedinec nějaké kódování. Navíc je umožněno, aby vznikali noví jedinci na základě tří principů: křížení (kombinace kódů dvou jedinců), mutace (změna v kódu jedince) a přírodního výběru (výběr nejlepšího jedince). Konkrétní implementace závisí na uvažovaném problému. [59, 60]

Softwarové řešiče celočíselného programování

Obvykle není nutné celé metody řešení optimalizačních úloh programovat, protože je možné využít dostupné softwary, které metody řešení již mají implementované. V této práci je používán zejména softwarový balíček CPLEX od společnosti ILOG, kterou vlastní společnost IBM. CPLEX se využívá na řešení lineárního a smíšeného celočíselného programování. Dále je v této práci používán volně dostupný software HiGHS pod MIT licenci. HiGHS se využívá zejména na rozsáhlé řídké lineární, nebo smíšené celočíselné problémy.

Řešič je softwarový program, kterému jsou uživatelem zadány vstupní informace, na jejichž základě potom uživateli vrátí nějaký výstup (např. v podobě optimálního řešení). Díky algebraickému modelovacímu jazyku je možné efektivně formulovat model, zadat vstupní data řešiči a následně od řešiče získat výstupní data. Prvním krokem, který řešiče dělají je příprava vstupních dat. Tomuto kroku se říká pre-processing. Díky pre-

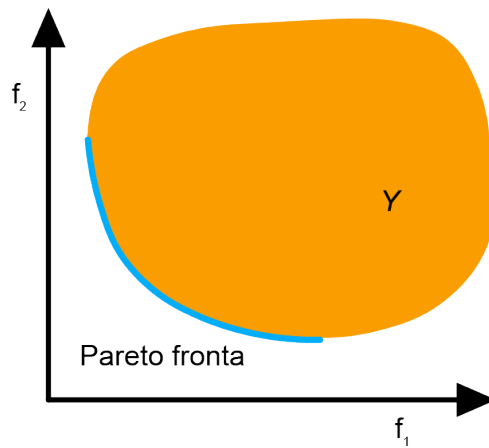
processingu je následný výpočet rychlejší a spolehlivější. CPLEX a jemu podobné softwary implementují většinou simplexový algoritmus a na něm založené branch & bound metody, často v kombinaci s heuristickými metodami tak, aby byl výpočet co nejefektivnější. Některé řešiče jsou dostupné volně, jako například zmíněný HiGHS, Ipopt nebo GLPK. Jiné jsou komerční, příkladem komerčních řešičů je Gurobi, CPLEX nebo MOSEK, za jejichž licence se platí, ale bývají efektivnější. Navíc například k CPLEX jsou akademické licence poskytnuty zdarma. [60]

3.2.3 Vícekriteriální programování

Dosud byly uvažovány pouze úlohy optimalizující jednu účelovou funkci, neboli jedno kritérium. Ovšem při modelování reálných úloh je často třeba optimalizovat několik kritérií najednou, jedná se tedy o úlohy *vícekriteriálního programování*.

Pareto optimum

Nechť je uvažována úloha minimalizující m kritérií $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x} může nabývat hodnot z množiny všech přípustných řešení M . Problém je, že většinou neexistuje takové přípustné řešení, pro které by všechna kritéria f_1, f_2, \dots, f_m zároveň nabývala minimální hodnoty. V takových případech je otázka, jaké řešení je považováno za optimální. Často používaný přístup je hledání *Paretova optima*, které lze v rámci optimalizace popsat jako stav, ve kterém nelze vylepšit hodnotu žádného z kritérií, aniž by přitom došlo ke zhoršení hodnoty jiného kritéria. Dvě přípustná řešení \mathbf{x} a $\bar{\mathbf{x}}$ se porovnávají v rámci *Paretovy dominance*. Řekne se, že řešení \mathbf{x} *dominuje* řešení $\bar{\mathbf{x}}$, jestliže platí nerovnost $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}})$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a zároveň je tato nerovnost ostrá pro některé z i . Tedy žádné z kritérií pro \mathbf{x} nenabývá horších hodnot než pro $\bar{\mathbf{x}}$ a alespoň jedno kritérium nabývá lepší hodnoty. Nicméně tímto způsobem nelze porovnat všechna řešení mezi sebou, taková řešení se nazývají *navzájem nedominovaná*. Přípustné řešení \mathbf{x} se považuje za *Pareto optimální*, jestliže neexistuje žádné přípustné řešení $\bar{\mathbf{x}}$, které by dominovalo \mathbf{x} . Množina Pareto optimálních řešení se označuje jako *Pareto fronta*. Na obrázku 3.4 lze vidět příklad Pareto fronty při optimalizaci dvou kritérií, kde Y označuje obor hodnot, kterých nabývá vektorová funkce $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))^T$ pro přípustná \mathbf{x} . [61]



Obr. 3.4: Zobrazení Pareto fronty při optimalizaci kritérií f_1 a f_2 (upraveno) [61]

Metoda omezení

Na hledání Pareto fronty existuje několik metod. Jednou z takových metod je *metoda omezení*, která minimalizuje najednou pouze jednu z účelových funkcí a hodnoty ostatních účelových funkcí jsou omezeny konstantami. Řeší se tedy problém

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } f_1(\mathbf{x}) \leq c_1, \\ & \quad f_2(\mathbf{x}) \leq c_2, \\ & \quad \vdots \\ & \quad f_{i-1}(\mathbf{x}) \leq c_{i-1}, \\ & \quad f_{i+1}(\mathbf{x}) \leq c_{i+1}, \\ & \quad \vdots \\ & \quad f_m(\mathbf{x}) \leq c_m, \\ & \quad \mathbf{x} \in M. \end{aligned}$$

Volením různých hodnot konstant $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m$ lze najít Pareto frontu. Výhoda metody omezení je, že dokáže najít Pareto frontu i v případě, že obor hodnot vektorové funkce $(f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ je nekonvexní. [61]

Lexikografická metoda

Při použití *lexikografické metody* k hledání Pareto optimálních řešení se nejprve kritéria seřadí podle důležitosti na $f_{(1)}, f_{(2)}, \dots, f_{(m)}$. Potom se postupně řeší úlohy

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_{(1)}(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{x} \in M, \end{aligned}$$

optimální hodnota $f_{(1)}$ se označí c_1^* . Dále se hledá řešení modelu

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_{(2)}(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } f_{(1)}(\mathbf{x}) \leq c_1^*, \\ & \mathbf{x} \in M. \end{aligned}$$

Získá se optimální hodnota c_2^* a obdobně se postupuje dále, dokud se nevyřeší model

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f_{(m)}(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } f_{(1)}(\mathbf{x}) \leq c_1^*, \\ & \quad f_{(2)}(\mathbf{x}) \leq c_2^*, \\ & \quad \vdots \\ & \quad f_{(m-1)}(\mathbf{x}) \leq c_{m-1}^*, \\ & \mathbf{x} \in M. \end{aligned}$$

Řešení nalezené lexikografickou metodou závisí na zvoleném pořadí kritérií. [61]

Metoda váženého součtu

Princip *metody váženého součtu* je převedení vícekritériálního problému na model s jednou účelovou funkcí, která je vytvořena lineární kombinací všech kritérií s vektorem vah $(w_1, w_2, \dots, w_m)^T$, tj.

$$f(\mathbf{x}) = w_1 f_1(\mathbf{x}) + w_2 f_2(\mathbf{x}) + \dots + w_m f_m(\mathbf{x}).$$

Potom se řeší model

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ & \text{za podmíněk } \mathbf{x} \in M. \end{aligned}$$

Váhy musí být nezáporné a určují se tak, aby jejich součet byl roven jedné. Řešením tohoto modelu pro různé vektory vah se získají body Pareto fronty. Na rozdíl od metody omezení metoda váženého součtu neumí najít Pareto frontu, pokud obor hodnot vektorové funkce $(f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ není konvexní. Prostor tvořený možnými hodnotami váhového vektoru W lze omezit v závislosti na expertním názoru. [61]

Přístupů, jak vybrat reprezentativní řešení z Pareto fronty, existuje několik. Například řešením modelu

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in M} \max_{\mathbf{w} \in W} \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x}).$$

Tím se zvolí takový váhový vektor, pro nějž je hodnota lineární kombinace kritérií nejhorší. [61]

Více o vícekritériálním programování lze najít např. v knize [62].

4 Vývoj matematického modelu

Před samotným vývojem modelů je krátce nastíněn přístup k řešení úlohy. Transport odpadu mezi obcemi lze chápat jako tok v síti. Data zadaná ve formě tabulky lze převést do formy orientovaného multigrafu, ve kterém jsou vrcholy tvořeny uzly, představujícími regiony, ORP, příp. ZÚJ (dle uvažovaného územního členění). Transport odpadu mezi nimi se znázorní hranami, přičemž převážené množství odpadu udává kapacitu hrany. Hrany jsou orientovány z uzlu předání do uzlu převzetí.

V kapitole 1.3 byly definovány principy, podle kterých v praxi probíhá nakládání s odpadem. Tyto principy tvoří základ dílčích modelů pro rekonstrukci řetězců producent—zpracovatel. První princip vede na účelovou funkci, která minimalizuje délku transportu odpadu mezi uzlem produkce a uzlem (příp. uzly) zpracování. V názvosloví teorie grafů lze analogicky mluvit o hledání nejkratší cesty v grafu. Vzhledem k předpokládanému rozsahu reálné úlohy je preferováno řešení za pomoci optimalizačního modelu, klasické algoritmy pro hledání nejkratší cesty v grafu (definované v kap. 3.1) nejsou dostatečné a musely by být modifikovány, aby pokryly všechny nároky kladené na model. Druhý princip se v matematickém modelu projeví minimalizací počtu cest, po kterých je převezeno nenulové množství odpadu. Analogicky jde o minimalizaci počtu nenulových hran (tj. hran s nenulovým tokem). Třetí princip je reflektován v účelové funkci, která minimalizuje počet míst zpracování nenulového množství odpadu. Místem zpracování je myšlen uzel, ve kterém je odpad zpracován. Druhý a třetí princip vedou na model s výskytem spojitých i binárních proměnných, jde tedy o smíšené celočíselné programování. Použití optimalizačních modelů k řešení úloh spojených s toky v síti je vhodný postup u složitějších problémů, protože je univerzálnější a často i efektivnější než použití klasických algoritmů.

V této kapitole je představeno hned několik modelů, které představují různé verze dílčího modelu II v rámci aplikace REVEDATO 2.0 (viz kap. 1.2). Nejprve jsou definovány modely, které jsou založeny pouze na jednom ze zmíněných principů. Další modely principy kombinují. Matematické modely jsou vyvíjeny na testovacích úlohách, u kterých je k dispozici správné řešení transportu odpadu. Díky tomu je možné získaný tok odpadu vyhodnotit, což je důležité k určení nejvhodnější verze dílčího modelu. Pro jednoduchost vysvětlení jsou nejprve modely formulovány pouze pro optimalizaci toku odpadu od jednoho producenta (viz kap. 4.2). Dále jsou rozvíjeny tak, aby optimalizovaly toky několika producentů najednou (viz kap. 4.3.1). V kapitole 4.3 je uveden algoritmus, díky kterému jsou postupně rekonstruovány toky od všech producentů. Modely jsou uzpůsobeny tak, aby byly schopné řešit problém formulovaný v kap. 1.3 na datech z celého Česka, tedy pro vysoký počet uzlů. Jedná se o rozsáhlou úlohu a to přináší výpočetní komplikace, proto byl zvolen tzv. scénářový přístup uvedený v kap. 4.3.2. Ten vyžaduje následné zhodnocení výsledků jednotlivých scénářů a navrhnutí finálního výsledku. K tomuto účelu je v kap. 4.3.3 představen finální model odpovídající modelu III z kap. 1.2.

4.1 Zadání testovací úlohy

Cílem testovací úlohy je na menší ukázkové úloze vytvořit, otestovat a vysvětlit matematické modely a konkrétní přístup k úloze. Testovací úloha je vytvořena tak, že jsou k dispozici obdobné údaje, které jsou poskytnuty i v reálném případě.

Úloha obsahuje pouze malý počet uzlů (v tomto případě obcí), mezi nimiž dochází ke transportu odpadu, přičemž jsou rozlišovány tři typy odpadu dle původu: A, B a C (viz kap. 1.3). Také je uvažováno, že v každém uzlu může docházet k produkci odpadu typu A („primární produkce“), typu B i typu C („vyskladnění“) a zpracování odpadu. Jediný typ zpracování, který je v testovací úloze uvažován, je zpracování cizího odpadu (typ B). Při zpracování vlastního (typ A) nebo vyskladněného (typ C) odpadu se jedná o jednoznačný tok. Takové toky budou z případové studie na datech z PD ISOH odstraněny před řešením modelů na rekonstrukci toků. Nicméně v testovací úloze se některé druhy jednoznačných toků vyskytovat mohou, ale je s nakládáno jako se zbytkem toků.

I přestože testovací úloha neobsahuje reálná data, zadaný transport mezi uzly není vytvořen náhodně, ale tak, aby do jisté míry splňoval všechny předpoklady zmíněné v kap. 1.3.

Generování testovací úlohy

1. Hodnoty parametrů (viz tab. 4.1) byly voleny jednotlivě s ohledem na charakter řešených úloh v dalších kapitolách.

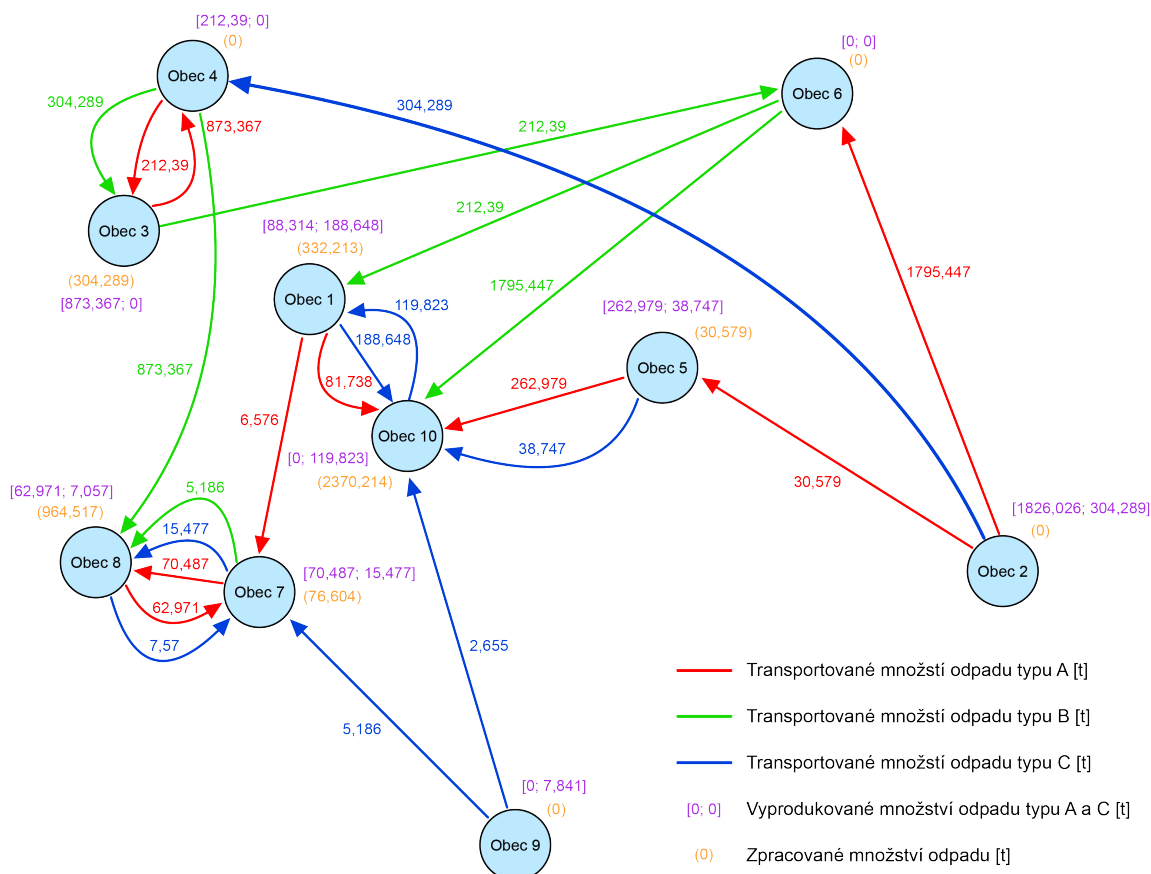
Tab. 4.1: Parametry testovací úlohy

| Parametr | Popis |
|------------|--|
| N | Celkový počet uzlů |
| N_s | Počet malých uzlů |
| N_m | Počet středně velkých uzlů |
| N_l | Počet velkých uzlů |
| N_A | Počet uzlů s produkcí odpadu typu A |
| N_B | Počet uzlů s produkcí odpadu typu B |
| N_C | Počet uzlů s produkcí odpadu typu C |
| ϵ | Exponent určující důležitost délky transportu |
| p_i | Pravděpodobnost rozdělení toku odpadu u producenta |
| p_r | Pravděpodobnost rozdělení toku odpadu při předání |
| p_d | Pravděpodobnost předání odpadu dál |
| r | Snížení pravděpodobnosti p_d po každém předání |

2. Náhodně bylo vygenerováno umístění N uzlů a velikost každého uzlu tak, aby N_s uzlů bylo malých, N_m středních a N_l velkých.
3. V N_A náhodně vybraných uzlech byla vygenerována produkce odpadu typu A tak, že vyprodukované množství odpovídá velikosti uzlu. Obdobně byla vygenerována v N_B uzlech produkce odpadu typu B a v N_C uzlech typu C.

4. Tok odpadu byl určen iterativně. V každém uzlu byly řešeny tři kroky:
- nejprve se rozhodlo, zda bude tok odpadu rozdělen, přičemž pravděpodobnost rozdělení toku je u producenta p_i , v ostatních uzlech je potom p_r .
 - Dále byl určen uzel, kterému se odpad předá. Pravděpodobnost každého uzlu (kromě aktuálního), že bude vybrán, byla rovna převrácené hodnotě vzdálenosti od aktuálního uzlu umocněného na exponent ϵ a to celé se vynormalovalo přes všechny uzly. Čím vyšší byla hodnota ϵ , tím vyšší pravděpodobnost vybrání měly bližší uzly.
 - Posledním krokem bylo rozhodnutí, zda bude v uzlu, do něž byl odpad transportován, odpad zpracován (a tedy tok zde bude končit) nebo bude odpad poslán dál (a tyto kroky budou opakovány). Pravděpodobnost, že bude odpad předán dál, je po prvním předání rovna p_d . Po každém předání se pravděpodobnost p_d sníží o redukci r .

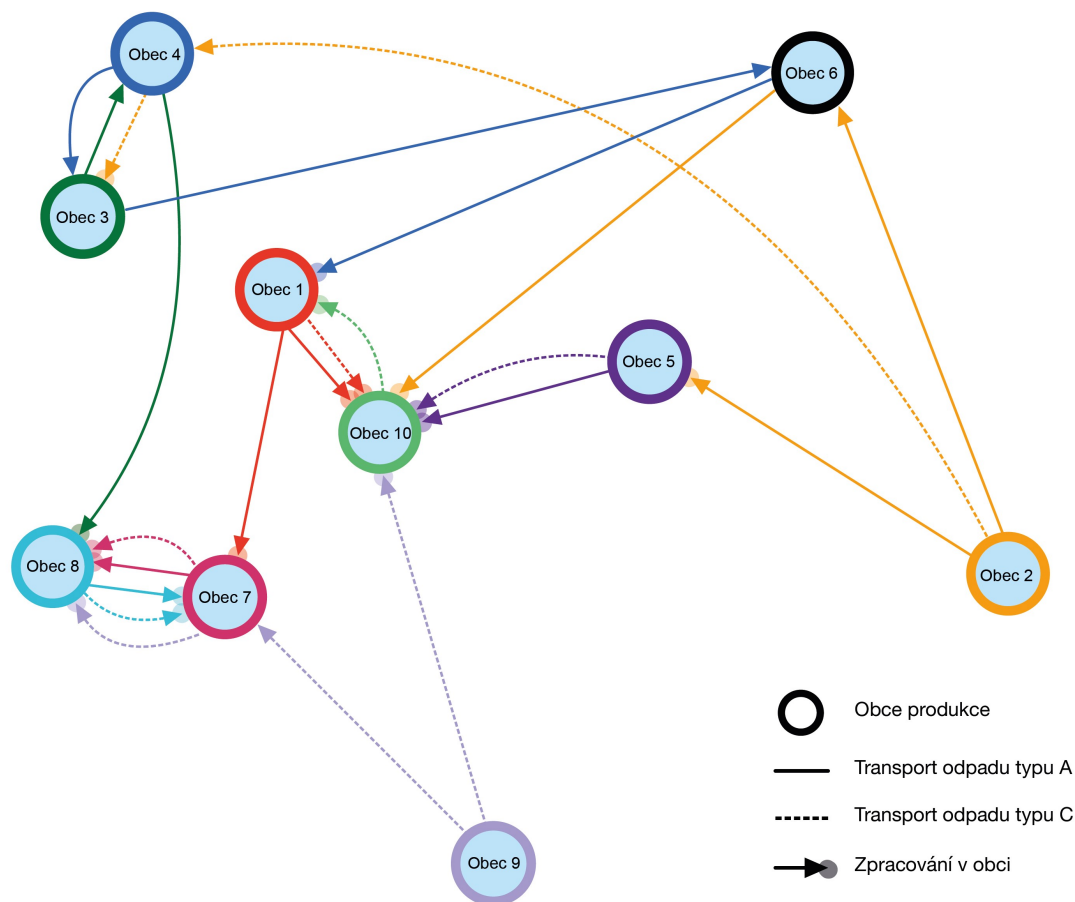
Příklad testovací úlohy (dále označován jako testovací úloha 1) s deseti uzly je zadán grafem na obr. 4.1, ve kterém jsou barevně odlišeny hrany dle typu transportovaného odpadu mezi uzly. V této úloze je pro jednoduchost a přehlednost uvažována pouze produkce typu A a C.



Obr. 4.1: Zadání testovací úlohy 1

Kromě zadání testovací úlohy je k dispozici také její řešení. To je znázorněno v podobě

grafu bez konkrétních čísel na obr. 4.2, ve kterém jsou jednotlivé toky rozlišeny barevně dle uzlu produkce. Řešení testovací úlohy zde slouží k posouzení relevantnosti výsledků získaných pomocí matematických modelů definovaných níže. Celé zadání i řešení testovací úlohy 1 je k dispozici v příloze v souboru `test_1`.



Obr. 4.2: Řešení testovací úlohy 1

4.2 Řešení toku odpadu od jednoho producenta

Přístup k úloze je nejprve vysvětlen na základních modelech, které řeší tok vyprodukovaného a vyskladněného odpadu pouze od jednoho producenta. Později v této kapitole (viz část 4.3.1) jsou tyto modely rozšířeny tak, aby řešili toky odpadu od více producentů. Modely využívají principy zmíněné v kapitole 1.3, nejdříve jsou uvažovány jednotlivě a poté je formulován model, který je kombinuje. Výsledky modelů jsou představeny na testovací úloze 1.

4.2.1 Minimalizace vzdálenosti

Cílem této optimalizační úlohy je minimalizovat vzdálenost mezi místem produkce a zpracování odpadu od jednoho producenta. Počet uzlů se označí N a každému uzlu je přiřazeno přirozené číslo od 1 do N tak, aby byly tímto číslem určeny jednoznačně. Obdobně se označí čísla od 1 do M všechny hrany mezi uzly, po kterých dle zadání úlohy probíhá transport odpadu alespoň jednoho typu (A, B nebo C). Číslo M značí počet všech hran vyskytujících se v úloze.

Pro vytvoření matematického modelu je třeba zavést označení i ostatních parametrů a proměnných:

množiny a indexy:

- $O = \{1, 2, \dots, N\}$ množina všech uzlů,
- $H = \{1, 2, \dots, M\}$ množina všech hran,
- $i \in O$ index uzlu, jehož tok odpadu je optimalizován,
- $k \in O$ index uzlu, v němž je odpad zpracován,
- $j \in H$ index hrany,
- $p \in \{a, b, c\}$ index odpadu podle typu — A, B, nebo C,

parametry:

- d_j délka j -té hrany [km],
- s_{pk} množství odpadu typu $p \in \{a, b, c\}$ produkovaného v k -tém uzlu [t],
- t_{pj} celkové množství odpadu typu $p \in \{a, b, c\}$ transportovaného přes hranu j [t],
- z_k celkové množství zpracovaného odpadu typu B v uzlu k [t],
- Q incidenční matice.

proměnné:

- x_{ipj} množství odpadu převezeného po j -té hraně od producenta i (produkce typu $p \in \{a, b, c\}$) [t],
- X_{ipk} množství odpadu zpracované v k -tém uzlu od producenta i (produkce typu $p \in \{a, b, c\}$) [t].

Incidenční matice Q je matice typu $(N \times M)$, která je definována:

$$[Q_{ij}]_{i \in O, j \in H} = \begin{cases} -1, & \text{pokud hrana } j \text{ má počáteční uzel } i, \\ 1, & \text{pokud hrana } j \text{ má koncový uzel } i, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Z incidenční matice Q tedy lze vyčíst směr hran a jejich incidentní uzly. Dále je třeba zadefinovat pomocnou množinu $J_i \subseteq H$ jako množinu všech hran, které vedou z uzlu i , tj. $J_i = \{j \in H | Q_{ij} = -1\}$.

Následující optimalizační model, který hledá nejkratší cestu mezi producentem a místy zpracování, je řešen pouze pro jednoho konkrétního producenta. Tento producent je označen indexem i . Index i je tomto v matematickém modelu neměnný a mohl by být vynechán. Nicméně s ohledem na konzistenci s budoucími modely, které řeší více producentů najednou, je v tomto modelu ponechán. Proměnné x_{ipj} a X_{ipk} pro daný uzel i popisují

celý řetězec producent(i)—zpracovatel pro odpad, který byl v místě produkce veden jako typ p . Zmíněný model je definován následovně

$$\min \sum_{j=1}^M d_j \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \right) \quad (4.2.1)$$

$$\text{za podmínek } s_{pi} + \sum_{j=1}^M Q_{ij} x_{ipj} - X_{ipi} = 0, \forall p \in \{a, b, c\}, \quad (4.2.2)$$

$$\sum_{j=1}^M Q_{kj} x_{ipj} - X_{ipk} = 0, \quad \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O \setminus \{i\}, \quad (4.2.3)$$

$$t_{pj} \leq x_{ipj}, \quad \forall p \in \{a, c\}, \forall j \in J_i, \quad (4.2.4)$$

$$0 \leq x_{ipj}, \quad \forall p \in \{a, c\}, \forall j \in H \setminus J_i, \quad (4.2.5)$$

$$0 \leq x_{ibj}, \quad \forall j \in H, \quad (4.2.6)$$

$$\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq \sum_{p \in \{a,b,c\}} t_{pj}, \quad \forall j \in J_i, \quad (4.2.7)$$

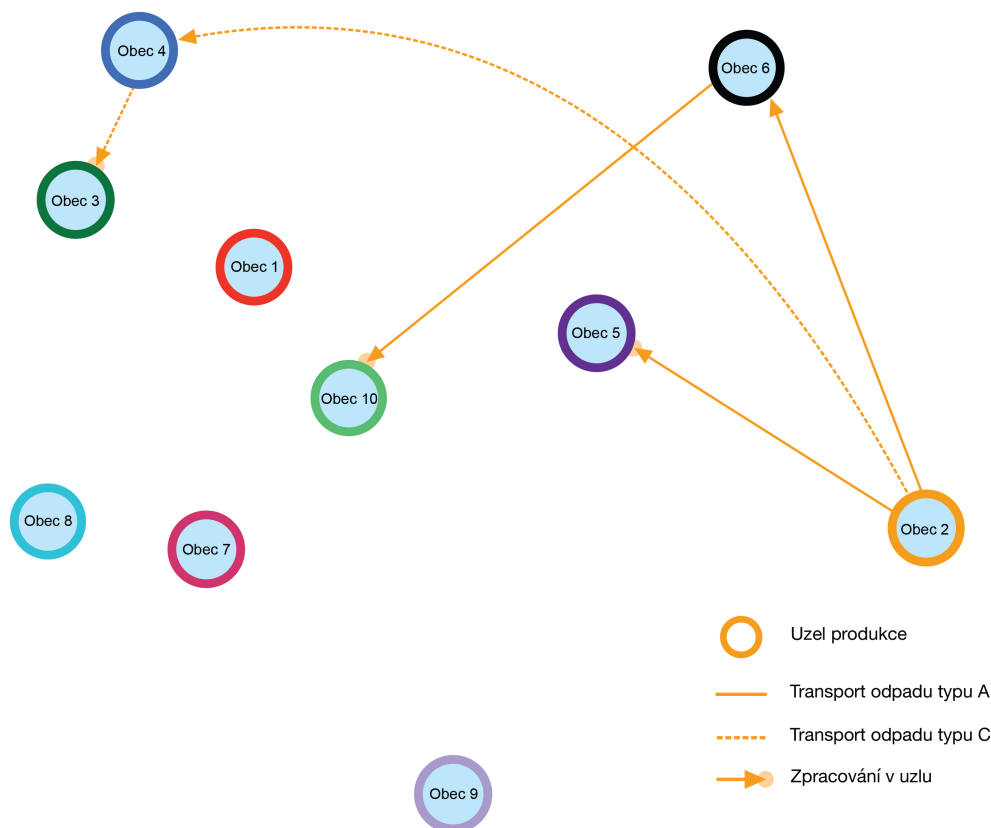
$$\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq t_{bj}, \quad \forall j \in H \setminus J_i, \quad (4.2.8)$$

$$0 \leq X_{ipk}, \quad \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O, \quad (4.2.9)$$

$$\sum_{p \in \{a,b,c\}} X_{ipk} \leq z_k, \quad \forall k \in O. \quad (4.2.10)$$

Model minimalizuje účelovou funkci (4.2.1), která představuje délku transportu odpadu všech tří typů z uzlu i násobenou převezeným množstvím odpadu. Cílem je převézt odpad na co nejkratší vzdálenost. Účelovou funkci (4.2.1) lze chápat jako celkové náklady na převoz odpadu. Podmínky (4.2.2) a (4.2.3) zaručují rovnováhu mezi produkcí, předáním, převzetím a zpracováním (viz bilanční podmínky na obr. 1.4) v každém uzlu. Rozdíl mezi těmito podmínkami je, že v podmínce (4.2.2) pro uzel i je přidán člen představující vyprodukované množství odpadu jednotlivých typů. Omezení (4.2.4) vynucuje první předání odpadu uzlem i , které je dáno vstupními daty u odpadu typu A a C z uzlu i . V případě ostatních hran (tj. nezačínajících v uzlu i) je vyžadováno pouze, aby transportované množství odpadu bylo nezáporné (viz omezení (4.2.5)). U odpadu produkce typu B je nezápornost požadovaná na všech hranách, protože první předání není známé (viz podmínka (4.2.6)). Nerovnice (4.2.7) a (4.2.8) omezují transportované množství na všech hranách shora kapacitou. I v tomto případě je třeba rozlišit mezi hranami vedoucími z uzlu i a ostatními hranami. Podmínky (4.2.9) a (4.2.10) omezují zpracování v uzlech zdola nulou a shora maximální kapacitou zpracování.

Výše definovaný model byl použit například na datech testovací úlohy 1 pro odpad z Obce 2, kde se nevyskytuje produkce odpadu typu B. Výsledky pro tok odpadu typu A a C z Obce 2 lze vidět na obr. 4.3. Při porovnání se správným řešením na obr. 4.2 je vidět, že model pro minimalizaci vzdálenosti určil oba toky odpadu identicky.



Obr. 4.3: Optimální nakládání s odpadem z Obce 2 při použití modelu pro minimalizaci vzdálenosti

V praxi nejsou náklady přímo úměrné přesné délce transportu, viz [63], proto dále nebude za d_j dosazována v účelové funkci (4.2.1) přesná délka hrany. Místo toho budou hrany rozděleny na tři kategorie s pevně definovanými „cenami“ $g(d_j)$:

- krátké hrany: $g(d_j) = 1$ pro $d_j \in \langle 0, 100 \rangle$ km,
- střední hrany: $g(d_j) = 3$ pro $d_j \in \langle 100, 300 \rangle$ km,
- dlouhé hrany: $g(d_j) = 9$ pro $d_j \geq 300$ km.

Z toho plyne, že tři krátké hrany jsou z hlediska účelové funkce ekvivalentní s jednou střední hranou. Dvě střední hrany jsou „výhodnější“ než jedna dlouhá hrana, ale tři už „výhodnější“ nejsou apod. Tento přístup byl zaveden, protože v praxi není rozdíl, jestli je odpad transportován do dalšího uzlu 15 km, nebo 20 km daleko. Navíc v praxi je výhodnější poslat odpad do uzlu přímo po jedné dlouhé trase (např. 200 km daleko) než jej transportovat např. přes 10 uzlů, kde každá hrana má 15 km, což by z hlediska délky transportu bylo výhodnější. Rozdělení hran do kategorií je třeba rozhodnout na základě konkrétní úlohy. Zde jsou uvedeny hodnoty pro testovací úlohy uvažované v této práci. V případě testovacích úloh jsou rozmezí mezi uzly výrazně větší než jsou reálné vzdálenosti v rámci ČR, proto při použití modelu na reálných datech by bylo třeba intervaly pro vzdálenosti upravit.

4.2.2 Minimalizace počtu použitých hran

Druhý matematický model se zaměřuje na hledání toku odpadu od jednoho producenta s cílem, aby byl odpad předáván přes co nejméně uzlů. Matematicky lze tento problém vyjádřit jako optimalizační úlohu, která minimalizuje počet hran, přes které je převáženo nenulové množství odpadu.

Problém je řešen ve dvou variantách:

- **v1:** všechny typy odpadu jsou brány jako jeden tok odpadu,
- **v2:** každý typ odpadu je brán jako jednotlivý tok odpadu.

V první variantě je tedy preferováno, aby byl odpad od jednoho producenta transportován po stejných hranách, nehmě na typ. V druhé variantě jde v podstatě o hledání tří toků odpadu najednou. Modely, které řeší minimalizaci počtu nenulových hran jsou podobné modelu optimalizujícímu vzdálenost, proto lze využít již zavedené značení proměnných a parametrů. Nově se definuje pouze jediná proměnná.

Doplňující proměnná:

δ_{ipj} je binární proměnná udávající, zda je odpad typu $p \in \{a, b, c\}$ z uzlu i převezen po j -té hraně.

Jde o proměnnou, která závisí na proměnných x_{ipj} a je rovna 0, pokud žádný odpad po hraně j není převezen, v opačném případě je rovna 1. V první variantě, kdy jsou oba odpady součástí jednoho toku, nebude δ_{ipj} záviset na indexu p , tuto proměnnou lze tedy označit δ_{ij} . Matematicky lze tuto proměnnou definovat:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} > 0, \\ 0 & \text{pokud } \sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq 0, \end{cases} \quad (4.2.11)$$

pro první variantu a

$$\delta_{ipj} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x_{ipj} > 0, \\ 0 & \text{pokud } x_{ipj} \leq 0, \end{cases}$$

pro druhou variantu. Díky nezápornosti x_{ipj} je doplňující proměnná rovna nule pouze v případě, že x_{ipj} je nulové.

Model zůstane stejný jako pro minimalizaci vzdáleností (viz kap.4.2.1) s drobnými úpravami.

Účelová funkce (4.2.1) je nahrazena funkcí:

$$\min \sum_{j=1}^M \delta_{ij},$$

která minimalizuje počet nenulových cest pro první variantu. Pro druhou vypadá účelová funkce následovně:

$$\min \sum_{j=1}^M \sum_{p \in \{a,b,c\}} \delta_{ipj}.$$

Dále je třeba přidat omezení závislosti δ_{ipj} na proměnných x_{ipj} . Ovšem protože cílem je, aby byl model pokud možno lineární, po částech definovaná funkce (4.2.11) je nahrazena

ekvivalentním lineárním omezením:

$$\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq W \delta_{ij}, \quad \forall j \in H,$$

respektive

$$x_{ipj} \leq W \delta_{ipj}, \quad \forall p \in \{a,b,c\}, \forall j \in H \quad (4.2.12)$$

pro variantu s dvěma toky. V obou případech je W dostatečně velké kladné číslo takové, aby shora neomezovalo proměnnou x_{ipj} , ale aby bylo vynuceno $\delta_{ipj} = 1$ pro případ, ve kterém je převezeno nenulové množství odpadu. Ostatní omezení zůstávají stejná.

Při použití modelu pro minimalizaci počtu použitých hran na datech testovací úlohy 1 vyšel tok odpadu z Obce 2 stejně pro obě varianty. Znamená to, že u této testovací úlohy nehrálo roli, jaká varianta je uvažována. Výsledné toky z Obce 2 jsou znázorněny v grafu na obr. 4.4. Tok pro produkovaný odpad je stejný, jako řešení (viz obr. 4.2), ovšem pro vyskladněný odpad se výsledek liší. Z pohledu účelové funkce tohoto modelu je totiž ekvivalentní, zda je použita hrana mezi Obcemi 4 a 8, nebo hrana mezi Obcemi 4 a 3, úloha má tedy nejednoznačné řešení.



Obr. 4.4: Optimální nakládání s odpadem z Obce 2 při použití modelu pro minimalizaci počtu použitých hran

4.2.3 Minimalizace počtu míst zpracování odpadu

Úloha, která minimalizuje počet míst zpracování odpadu vyprodukovaného v jednom uzlu, je principem velmi podobná úloze minimalizující počet použitých hran (viz kap. 4.2.2). V tomto případě se ovšem v modelu vyskytuje binární proměnná závislá na proměnných týkajících se zpracování odpadu (tj. X_{ipk}).

Doplňující proměnná:

γ_{ipk} je binární proměnná udávající, zda je odpad typu $p \in \{a, b, c\}$ z uzlu i zpracován v uzlu k .

Ta je definována:

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{p \in \{a, b, c\}} X_{ipk} > 0, \\ 0 & \text{pokud } \sum_{p \in \{a, b, c\}} X_{ipk} \leq 0, \end{cases}$$

pokud je uvažována první varianta (viz kap. 4.2.2). I tady lze uvažovat druhou variantu s rozdělenými toky, definice proměnné se změní následovně:

$$\gamma_{ipk} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } X_{ipk} > 0, \\ 0 & \text{pokud } X_{ipk} \leq 0. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Model lze i v tomto případě vytvořit úpravou modelu minimalizujícího vzdálenost (viz kap. 4.2.1).

Účelová funkce (4.2.1) (pro pevně zvolené i) se změní na:

$$\min \sum_{k=1}^N \sum_{p \in \{a, b, c\}} \gamma_{ipk},$$

tedy je minimalizován počet uzlů, ve kterých je odpad z uzlu i zpracován ve variantě 2, ve které jsou jednotlivé typy odpadu považovány za různé toky.

Závislost γ_{ipk} na proměnných X_{ipk} je třeba přidat do modelu použitím omezení:

$$X_{ipk} \leq W\gamma_{ipk}, \quad \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O. \quad (4.2.14)$$

I v tomto případě byl preferován zápis tak, aby úloha byla lineární, vzhledem k tomu, že se jedná o celočíselné programování. Nicméně úprava je ekvivalentní funkci (4.2.13).

Obdobně při uvažování varianty 1, kde binární proměnná závisí pouze na uzlu i a uzlu zpracování k , se účelová funkce (4.2.1) změní na:

$$\min \sum_{k=1}^N \gamma_{ik}$$

a omezení je upraveno na:

$$\sum_{p \in \{a, b, c\}} X_{ipk} \leq W\gamma_{ik}, \quad \forall k \in O.$$

Při minimalizaci počtu míst zpracování odpadu z Obce 2 na testovací úloze 1 vyšly výsledné toky stejně jako při minimalizaci vzdáleností (viz obr. 4.3). Ani zde nebyl rozdíl při uvažování první či druhé varianty, v obou případech byl výsledek totožný se správným řešením.

4.2.4 Kombinace více účelových funkcí

Dosud byly uvažovány principy z kapitoly 1.3 pouze jednotlivě, ovšem v praxi je žádoucí uvažovat všechny tyto principy najednou. K tomu je použit vícekriteriální model minimalizující lineární kombinaci účelových funkcí jednotlivých principů (viz modely výše). Je tedy použita metoda váženého součtu (viz kap. 3.2.3). Protože všechny tři principy jsou dle expertů přibližně stejně důležité, váhy jsou nastaveny tak, aby každý z principů přispíval do účelové funkce přibližně stejnou měrou. Najde se tak pouze jedno řešení z Pareto fronty, což je ovšem pro uvažovaný problém dostačující. Hledání dalších Pareto optimálních řešení by bylo příliš časově náročné. Konkrétní váhy jsou zvoleny jako převrácené optimální hodnoty jednotlivých účelových funkcí. Tím je příspěvek od každé účelové funkce „normován“, žádná tedy není dominantní. Takto zvolený váhový vektor je jednoduše interpretovatelný.

Postup je řešen ve čtyřech bodech:

1. vyřešení modelu optimalizující vzdálenost pro uzel i , uložení hodnoty účelové funkce do proměnné w_{dist}
2. vyřešení modelu optimalizující počet hran pro uzel i , uložení hodnoty účelové funkce do proměnné w_{hran}
3. vyřešení modelu optimalizující počet míst zpracování pro uzel i , uložení hodnoty účelové funkce do proměnné w_{zprac}
4. vyřešení modelu s účelovou funkcí:

$$\min \frac{\sum_{j=1}^M d_j \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \right)}{w_{dist}} + \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{p \in \{a,b,c\}} \delta_{ipj}}{w_{hran}} + \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \gamma_{ipk}}{w_{zprac}}$$

za podmíněk (4.2.2) až (4.2.10), včetně omezení (4.2.12) a (4.2.14).

Takto vypadá účelová funkce pro variantu 2. Při uvažování varianty 1 by se model v bodu 4 modifikoval obdobně jako modely v kap. 4.2.2 a 4.2.3, přičemž je důležité, aby v bodech 2, 3 a 4 byl přístup konzistentní.

Při optimalizování toku odpadu z Obce 2 na datech testovací úlohy 1 vícekriteriálním modelem byly výsledky stejné jako při minimalizaci vzdálenosti (viz obr. 4.3). Je tedy totožný se správným řešením. Vzhledem k výsledkům dílčích modelů (viz obr. 4.3 a 4.4), které byly totožné, případně správné řešení bylo alternativním výsledkem, to není překvapivé.

Porovnání výsledků jednotlivých modelů optimalizujících tok odpadu z Obce 2 (viz obr. 4.3, 4.4) ukázalo, že všechny modely nachází správná řešení, případně správné řešení je ekvivalentní alternativou z hlediska účelové funkce. Zdá se tedy, že všechny modely jsou v rámci úlohy relevantní. Ale pozorování toku odpadu pouze od jednoho vybraného producenta není dostatečné k vytvoření jednoznačného závěru. Z toho důvodu byly modely použity i pro rekonstrukci toků odpadu od ostatních producentů v testovací úloze 1. Následně numerické hodnoty výsledků byly porovnány se zadaným řešením. Porovnání je zobrazeno v tab. 4.2. Ve většině případů nebyl žádný rozdíl mezi zadaným a získaným řešením, to může být způsobeno mimo jiné malým rozměrem úlohy. Případy, kdy se řešení

lišila, lze rozdělit do dvou skupin. První jsou výsledky označené jako (ekv), které jsou sice rozdílné od zadaného řešení, ovšem v rámci uvažované účelové funkce je správné řešení alternativním řešením. Tudíž obě řešení jsou vůči účelové funkci ekvivalentní, na vině je nejednoznačnost řešení. K tomu došlo například u minimalizace počtu použitých hran toku odpadu od Obce 2. Druhá skupina je v tabulce označena (opt), protože získané výsledky nabývají nižší hodnoty účelové funkce než u zadaného řešení. K tomu došlo u optimalizace toků od Obce 4 nebo Obce 9 při použití většiny modelů. Důvodem je, že dosud uvedené modely neberou v úvahu ostatní toky odpadu, proto je možné, aby našly „lepší“ řešení, které ovšem není v souladu s ostatními toky. Proto jsou v následující kapitole modely upraveny tak, aby byly vyřešeny všechny toky odpadu, aniž by výsledky porušovaly bilanční, příp. jiné podmínky kladené na modely.

Tab. 4.2: Tabulka srovnání výsledků testovací úlohy 1 získaných jednotlivými modely se správným řešením

| | dist | hran - v1 | hran - v2 | zprac - v1 | zprac - v2 | komb - v1 | komb - v2 |
|--------|---------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|
| Obec1 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec2 | ✓ | × (ekv) | × (ekv) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec4 | × (opt) | × (opt) | × (opt) | ✓ | × (ekv) | × (opt) | × (opt) |
| Obec5 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec6 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec7 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec8 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Obec9 | × (opt) | × (opt) | × (opt) | ✓ | × (ekv) | × (opt) | × (opt) |
| Obec10 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

4.3 Řešení toků odpadu od všech producentů

Dalším krokem je zobecnění modelů definovaných v předchozí podkapitole tak, aby byly schopny rekonstruovat toky od všech producentů. Nejjednodušším postupem je upravení modelů, aby optimalizovaly všechny toky najednou. Ovšem tento přístup přináší několik úskalí. Zaprvé, protože je záměrem použít výsledný model na datech z celého Česka, tedy jedná se o velmi rozsáhlou úlohu, optimalizační model by obsahoval velmi vysoký počet proměnných. S tím je spojená vysoká časová náročnost řešení modelu. Navíc vzhledem k tomu, že se jedná převážně o smíšené celočíselné programování, přibývá problém s efektivitou nalezení řešení u úloh s velkým počtem proměnných. Tyto situace nastávají i přesto, že v posledních letech vznikají nové efektivnější metody řešení [64]. Druhý problém s optimalizací všech uzlů najednou je zvýšená pravděpodobnost nejednoznačnosti řešení.

Proto je v této kapitole navrhnout jiný přístup, který spočívá v postupné optimalizaci toků po skupinách s menším počtem producentů naráz. Protože výsledek záleží na pořadí

při optimalizaci, tento postup je třeba několikrát opakovat s různým složení skupin. Různá pořadí producentů při optimalizaci lze považovat za scénáře, proto tento přístup je v této práci označován jako scénářový. Na závěr je nutné výsledky získané pro jednotlivé scénáře vyhodnotit. Za tímto účelem byl vytvořen matematický model, který zajišťuje, aby výsledky byly relevantní v rámci zadané úlohy.

4.3.1 Modely optimalizující toky odpadu od více producentů najednou

Prvním krokem k rekonstrukci všech toků odpadu v úloze je přeformulování modelů, které byly definovány v kapitole 4.2 tak, aby řešili toky od více producentů najednou. Zmíněné modely byly definovány způsobem, aby změny byly spíše formálního charakteru bez velkých úprav. Nově je v této části přidána modifikace, která v aktuální fázi není nutná, ale její význam se projeví při opakování výpočtů v rámci scénářového přístupu (viz kap. 4.3.2). Tato modifikace je založena na doplňujících nezáporných proměnných h_j^+ , které slouží k navýšení kapacity hrany. To je v některých případech nutné, aby existovalo řešení, jak je konkrétněji vysvětleno v kap. 4.3.2. Zásadou je, že k navýšení kapacity má docházet pouze v případě, že neexistuje žádná dostupná cesta od producenta ke zpracovateli, proto je využití této možnosti zatíženo vysokou penalizací.

Model 1 - minimalizace vzdálenosti

V této části textu je upraven matematický model z kap. 4.2.1, který minimalizuje vzdálenost přepravy odpadu. Tento model je jako jediný potřeba modifikovat více. Intuitivně by úprava účelové funkce (4.2.1) měla vypadat následovně:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^M g(d_j) \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \right). \quad (4.3.1)$$

To lze interpretovat jako celkové náklady na transport odpadu sečtené pro všechny producenty z množiny I . V případě, že se optimalizují toky odpadu od všech producentů v úloze (tj. $I = O$), pak musí platit, že je využita každá hrana na svoji plnou kapacitu, aby byly splněny všechny podmínky (kromě ojedinělého případu, kdy hrany tvoří cyklus. V takovém případě není využita žádná hrana cyklu, ale princip zůstává stejný). To znamená, že platí rovnost:

$$\sum_{i \in O} \sum_{j=1}^M g(d_j) \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \right) = \sum_{j=1}^M g(d_j) \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} t_{pj} \right).$$

Problémem je, že pravá strana je konstantní a v důsledku toho je tedy nepodstatné, jakých hodnot proměnné x_{ipj} nabývají za předpokladu, že splní všechny podmínky modelu. Proto nedává smysl účelovou funkci (4.3.1) minimalizovat. A tedy takový model nepřináší žádnou užitečnou informaci.

Z tohoto důvodu je třeba najít jiný způsob, jak zanést do modelu informaci o délce transportu mezi producentem a zpracovatelem. Jako nejvhodnější varianta se nabízí zkombinování minimální vzdálenosti a minimálního počtu hran.

Takový model optimalizující toky od producentů z množiny $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = I \subseteq O$ je formulován následovně:

$$\min f_1 + \sum_{j=1}^M Vh_j^+ \quad (4.3.2)$$

$$f_1 = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^M g(d_j) \left(\sum_{p \in \{a,b,c\}} \delta_{ipj} \right)$$

$$\text{za podmínek } s_{pi} + \sum_{j=1}^M Q_{ij}x_{ipj} - X_{ipi} = 0, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \quad (4.3.3)$$

$$\sum_{j=1}^M Q_{kj}x_{ipj} - X_{ipk} = 0, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\} \forall k \in O \setminus \{i\}, \quad (4.3.4)$$

$$t_{pj} \leq x_{ipj}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, c\}, \forall j \in J_i, \quad (4.3.5)$$

$$0 \leq x_{ipj}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, c\}, \forall j \in H \setminus J_i, \quad (4.3.6)$$

$$0 \leq x_{ibj}, \quad \forall i \in I, \forall j \in H, \quad (4.3.7)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq \sum_{p \in \{a,b,c\}} t_{pj} + h_j^+, \forall j \in J_I, \quad (4.3.8)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq t_{bj} + h_j^+, \quad \forall j \in H \setminus J_I, \quad (4.3.9)$$

$$0 \leq X_{ipk}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O, \quad (4.3.10)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{p \in \{a,b,c\}} X_{ipk} \leq z_k, \quad \forall k \in O, \quad (4.3.11)$$

$$0 \leq h_j^+, \quad \forall j \in H, \quad (4.3.12)$$

$$x_{ipj} \leq W\delta_{ipj}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall j \in H, \quad (4.3.13)$$

$$\delta_{ipj} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall j \in H. \quad (4.3.14)$$

Účelová funkce (4.3.2) obsahuje součet dvou členů. První člen vyjadřuje náklady na transport odpadu sečtený pro producenty z množiny I , přičemž cena transportu je určena funkcí $g(d_j)$ (definovanou viz kap. 4.2.1), která závisí na délce hrany. Na rozdíl od účelové funkce (4.3.1) zde není důležité, jaké množství odpadu je po hraně převezeno. Minimalizace tohoto členu způsobí, že model hledá řešení tak, aby bylo využito co nejméně hran u každého toku odpadu. Zároveň všechny hrany nejsou rovnocenné, nejvýhodnější je využívat (i několika producenty najednou) krátké hrany. Druhý člen se týká navýšení kapacity hrany s penalizací V , kde V je velké kladné číslo.

Podmínky (4.3.3) a (4.3.4) jsou obdobami podmínek (4.2.2) a (4.2.3), které zajišťují rovnováhu a návaznost předávek v uzlech. Podobně podmínka (4.3.5) vynucující první transport u odpadu typu A a C je nezměněná oproti podm. (4.2.4). Nezápornost transportovaného množství odpadu je dále zajištěna podmínkami (4.3.6) a (4.3.7). Nerovnice

(4.3.8) a (4.3.9) jsou obdoby podmínek (4.2.7) a (4.2.8) s přidáním možnosti navýšení kapacity pomocí proměnné h_j^+ . V této souvislosti množinou J_I je myšlena množina takových hran, které vychází z libovolného uzlu patřícího do množiny I (tj. $J_I = \{j \in H \mid Q_{ji} = -1 \text{ pro alespoň jedno } i \in I\}$). Podmínky (4.3.10) a (4.3.11) ovlivňují výši zpracování. Omezení (4.3.12) zajišťuje nezápornost proměnné h_j^+ a (4.3.13) závislost mezi x_{ipj} a proměnnými δ_{ipj} , které jsou binární, což vyjadřuje (4.3.14). W je stejně jako v případě (4.2.12) velké nezáporné číslo.

Model 2 - minimalizace počtu hran

Druhým modelem je obdoba modelu definovaného v kapitole 4.2.2, který minimalizuje počet použitých hran. Protože předchozí model vychází ze stejného principu, jediný rozdíl je v účelové funkci.

Na rozdíl od modelu 1 v tomto případě nezáleží na délce hrany. Všechny hrany si jsou z hlediska účelové funkce rovnocenné. V účelové funkci (4.3.2) je f_1 nahrazeno

$$f_2 = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^M \sum_{p \in \{a,b,c\}} \delta_{ipj}, \quad (4.3.15)$$

omezení (4.3.3)—(4.3.14) zůstávají stejná.

Model 3 - minimalizace počtu míst zpracování

Třetí matematický model je založen na minimalizaci počtu míst, ve kterých je odpad zpracován. Obdobně jako v případě optimalizace toku od jednoho producenta v kap. 4.2.3 k definování tohoto modelu stačí modifikovat některá omezení a účelovou funkci modelu minimalizujícího počet hran. Vychází se tedy z modelu 1, kde první člen účelové funkce f_1 v (4.3.2) je nahrazen

$$f_3 = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \gamma_{ipk}, \quad (4.3.16)$$

podmínky (4.3.3)—(4.3.12) zůstávají stejné a omezení (4.3.13) a (4.3.14) jsou modifikovány:

$$X_{ipk} \leq W \gamma_{ipk}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O, \quad (4.3.17)$$

$$\gamma_{ipk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall k \in O. \quad (4.3.18)$$

Model 4 - kombinace modelů 1, 2 a 3

Stejně jako v případě jednoho producenta v kap. 4.2.4 jsou definovány i modely kombinující účelové funkce zmíněné v této kapitole. Využije se stejný přístup, tedy novou účelovou funkcí je jejich lineární kombinace, přičemž váhy jednotlivých funkcí jsou nastaveny na převrácené optimální hodnoty těchto funkcí. Žádná z účelových funkcí díky tomu není dominantní.

Postup je následovný:

1. Vyřešení modelu 1 $\rightarrow f_1^*$ = optimální hodnota funkce f_1
2. Vyřešení modelu 2 $\rightarrow f_2^*$ = optimální hodnota funkce f_2
3. Vyřešení modelu 3 $\rightarrow f_3^*$ = optimální hodnota funkce f_3
4. Vyřešení modelu 4:

$$\min \frac{f_1}{f_1^*} + \frac{f_2}{f_2^*} + \frac{f_3}{f_3^*} + \sum_{j=1}^M Vh_j^+$$

za podmínek (4.3.3)—(4.3.14) a (4.3.17), (4.3.18),

kde f_1 je definováno viz (4.3.2), f_2 viz (4.3.15) a f_3 viz (4.3.16).

Model 5 - kombinace modelů 1 a 3

Model 4 kombinuje minimalizaci délky transportu, počtu hran a míst zpracování, tj. modely 1, 2 a 3. Ovšem model 1 je založen nejen na principu minimální vzdálenosti, ale částečně i na minimálním počtu použitých hran. Je tedy otázka, zda není člen f_2 v účelové funkci modelu 4 nadbytečný. Proto poslední model, který je v této části formulován, je kombinací pouze modelů 1 a 3.

Postup řešení modelu 5:

1. Vyřešení modelu 1 $\rightarrow f_1^*$ = optimální hodnota funkce f_1
2. Vyřešení modelu 3 $\rightarrow f_3^*$ = optimální hodnota funkce f_3
3. Vyřešení modelu 5:

$$\min \frac{f_1}{f_1^*} + \frac{f_3}{f_3^*} + \sum_{j=1}^M Vh_j^+$$

za podmínek (4.3.3)—(4.3.14) a (4.3.17), (4.3.18),

kde f_1 je definováno viz (4.3.2) a f_3 viz (4.3.16).

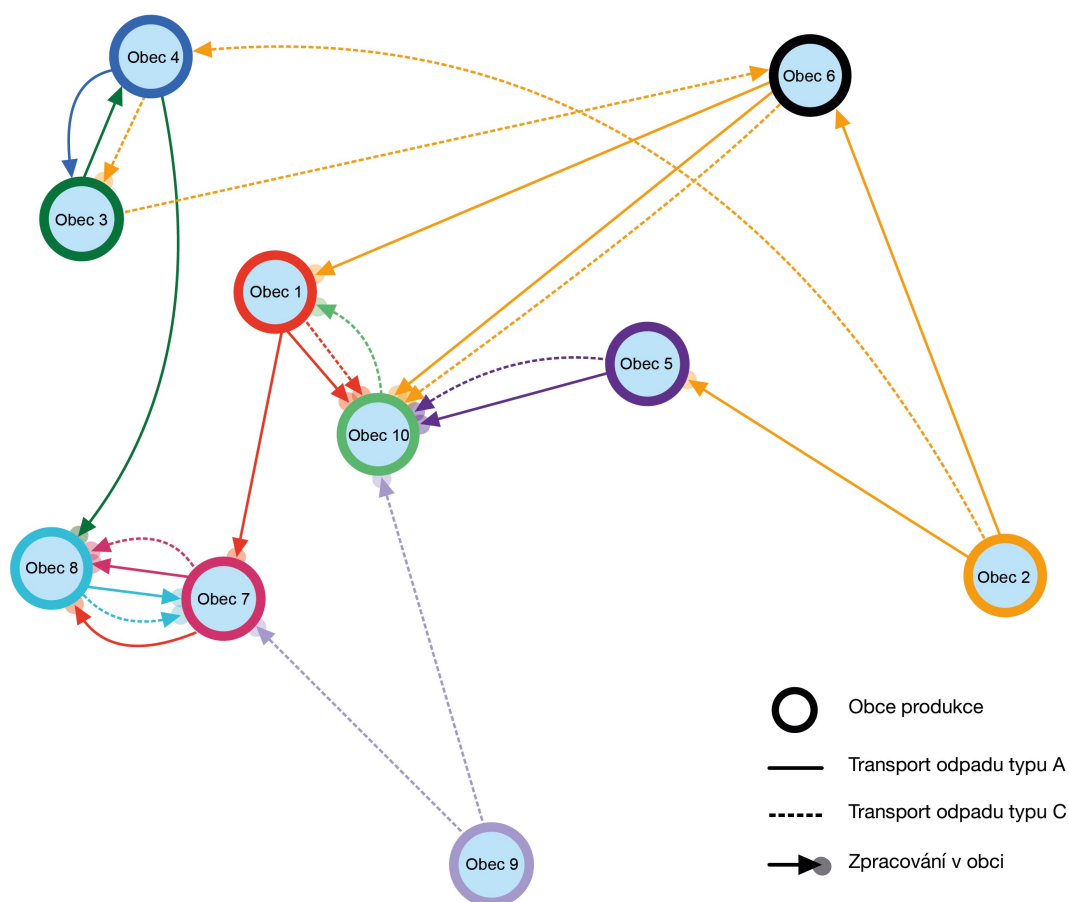
V kapitole 5 je uvedeno porovnání modelů, ze kterého je mimo jiné možné posoudit, zda je vhodnější model 4 nebo 5.

Zavedení variant

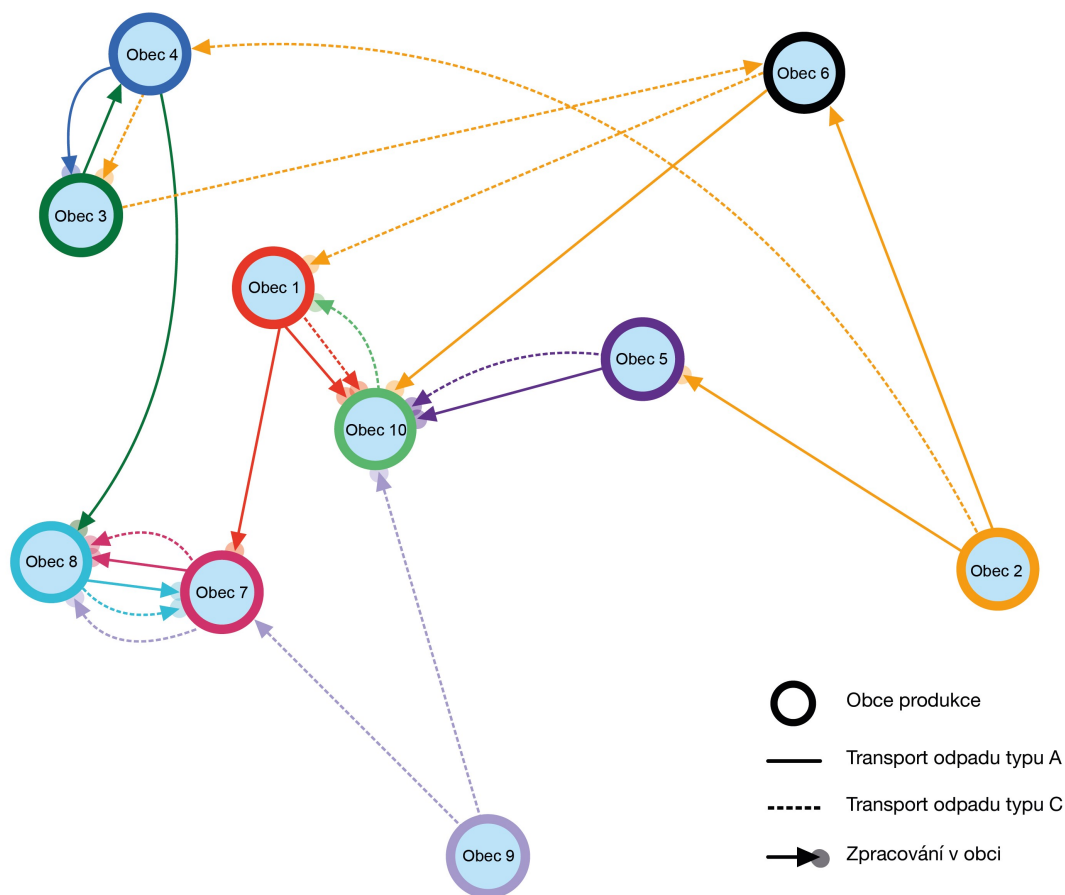
Stejně jako v kapitolách 4.2.2 a 4.2.3 byly u modelů 1 až 5 zavedeny dvě varianty podle toho, jestli tok odpadu všech typů je považován za jeden tok (varianta 1 — v1), nebo je dělen na tři toky dle typu A, B nebo C (varianta 2 — v2). Tak, jak jsou modely formulovány, je uvažována varianta 2. Při uvažování varianty 1 zůstávají modely stejné až na účelové funkce a omezení, ve kterých se objevuje proměnná δ_{ipj} nebo γ_{ipk} . Tyto

proměnné se nahradí novými proměnnými δ_{ij} , příp. γ_{ik} , které nezávisí na indexu určujícím typ odpadu. Změny jsou obdobné, jako bylo uvedeno v kap. 4.2.2 a 4.2.3, proto je není zde třeba uvádět znovu.

Vliv uvažované varianty je dobře vidět na obr. 4.5 a 4.6, na kterých je zobrazeno řešení testovací úlohy 1 zadané obr. 4.1 při optimalizaci toků od všech producentů najednou modelem 3 s uvažovanou variantou 1 a 2. Rozdíl v získaném řešení je způsoben uvažovanou variantou. Zatímco při uvažování varianty 1 je na obrázku 4.5 tok odpadu typu A vyprodukovaný v Obci 2 rozdělen v Obci 6, což způsobí, že na hraně mezi Obcí 6 a Obcí 10 je převážen odpad typu A a zároveň odpad typu C ze stejného uzlu. V případě použití varianty 2 jsou toky odpadu rozdílných typů od Obce 2 převáženy po různých hranách, jak je vidět na obrázku 4.6. Rozdíl je způsoben tím, že v případě uvažování varianty 1 jsou z pohledu účelové funkce obě řešení ekvivalentní. V porovnání se skutečným řešením na obr. 4.2 jsou obě nalezená řešení odlišná, ovšem z pohledu použitých účelových funkcí jsou se správným řešením ekvivalentní. To neplatí při uvažování varianty 2.



Obr. 4.5: Řešení testovací úlohy 1 získaný při uvažování varianty 1.



Obr. 4.6: Řešení testovací úlohy 1 získaný při uvažování varianty 2.

4.3.2 Scénářový přístup

Jak bylo výše zmíněno, jeden způsob, jak získat toky od všech producentů, je vyřešit výše zmíněné modely pro všechny producenty najednou, tj. $I = O$. Ovšem tento postup je na rozsáhlých úlohách časově i výpočetně náročný. V některých případech dochází k vyčerpání výpočetní paměti a úlohu nelze vyřešit. Proto je zvolen tzv. scénářový přístup, při kterém je najednou řešeno pouze určitá skupina producentů. Poté je úloha upravena tak, že nalezené toky jsou „vyjmuty“ a úloha je zmenšena. Tento postup je opakován, dokud nejsou rekonstruovány všechny toky odpadu.

Problémem tohoto přístupu je, že toky určené matematickými modely jsou ovlivněny pořadím, ve kterém jsou skupiny optimalizovány. Je-li tok řešen v první skupině a má-li úloha řešení, je získaný tok skutečně optimální s ohledem na účelovou funkci. Ovšem je-li stejný tok optimalizován v poslední skupině, jeho řešení je silně závislé na již provedené optimalizaci ostatních toků. Výsledek je tedy obecně horší než v případě, kdy je tok optimalizován jako první. Z toho plyne, že výsledek závisí na pořadí skupin producentů, což je obecně nežádoucí. Výhodné to je pouze v případě, kdy je známo, že některý z producentů má přednost. Potom je vhodné jej zařadit mezi první optimalizované. Ve většině případů

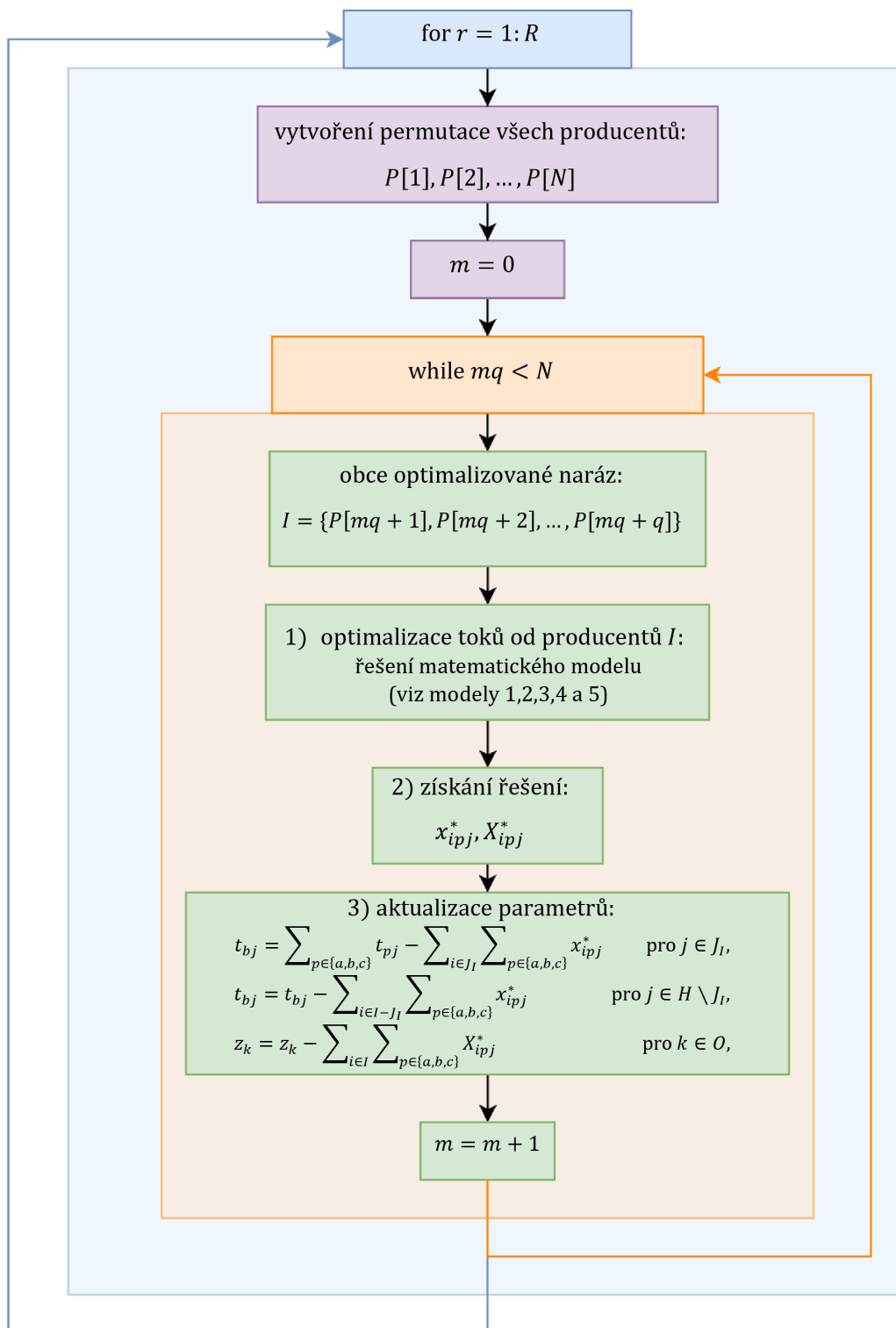
je ale snaha, aby tato závislost byla minimalizována. Toho lze docílit tím, že výpočet je několikrát opakován, přičemž příslušenství producentů do skupin při optimalizaci určí jejich náhodná permutace, která je při každém opakování nově vygenerována.

Celý algoritmus je schématicky zobrazen na obr. 4.7, kde R je zvolený počet opakování a q je počet optimalizovaných toků naráz. Poznámka ke schématu na obr. 4.7: pokud platí $mq + q > N$, pak $I = \{P_{mq+1}, P_{mq+2}, \dots, P_N\}$.

Jak bylo výše popsáno, algoritmus obsahuje dva cykly. Vnitřní cyklus hledá toky od všech producentů. Nejprve bylo určeno jejich pořadí náhodnou permutací, podle kterého byli zařazeni do skupiny I . Dále byl řešen model pro q producentů ze skupiny I najednou. V každém běhu po optimalizaci bylo nutné snížit kapacity hran t_{bj} podle toho, jak byly hrany využity. To zajistilo, že na konci cyklu nebyl součet transportovaného odpadu od všech producentů vyšší než zadaná kapacita na hraně. Obdobně byly aktualizovány také kapacity zpracování z_k . Kapacity t_{aj} a t_{cj} nebylo nutné aktualizovat, protože v cyklu byly využity vždy pouze jednou a to v okamžiku, kdy byl optimalizován tok odpadu z uzlu, odkud hrana vychází.

Právě kvůli průběžnému snižování kapacity hran je nutné definovat v modelu proměnnou h_j^+ , díky níž lze kapacitu hrany navýšit. Pokud by tato možnost nebyla, mohlo by se stát, že úloha nemá řešení. To by nastalo v případě, kdy neexistuje žádná cesta od producenta ke zpracovatelům s volnou kapacitou pro zpracování, protože hrany byly plně využité při transportu odpadu od jiných producentů v rámci předchozí optimalizace a tím blokují všechny potencionální cesty.

Vnější cyklus algoritmu značí opakování celé procedury R -krát, přičemž číslo R je vhodné zvolit dostatečně velké, aby výsledky byly relevantní. Vzhledem k tomu, že výstupem celého algoritmu je R výsledků pro každou hranu, dalším krokem je jejich vyhodnocení.

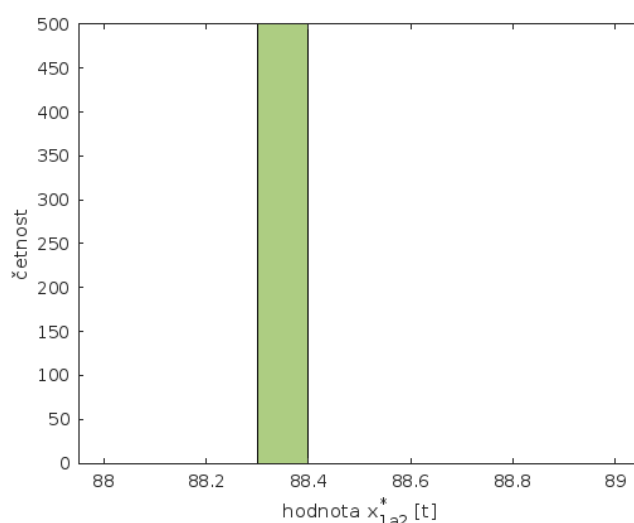


Obr. 4.7: Schéma algoritmu scénářového přístupu

4.3.3 Model na rekonstrukci toků odpadu

Charakter výsledků scénářů

Přístup k určení finálního řešení závisí na charakteru výsledků scénářů. Proto jsou výsledky scénářů nejprve zběžně zkoumány ze statistického hlediska. Používané statistické pojmy jsou definovány např. v [65], [66] nebo [57]. K určení charakteru výsledků je vhodné např. vykreslit jejich histogram. První příklad, jak může vypadat histogram výsledků jedné konkrétní proměnné (x_{1a2}^*) ovlivněné pořadím optimalizace toku, je zobrazen na obrázku 4.8. Je evidentní, že všechny výsledky jsou v úzkém intervalu bez ohledu na pořadí optimalizace. Při bližším prozkoumání bylo zjištěno, že výsledek vyšel ve všech případech 88,314 t pro $R = 500$. To znamená, že výsledek nezávisel na pořadí a tudíž lze prohlásit, že s vysokou pravděpodobností je správný výsledek právě 88,314 t.

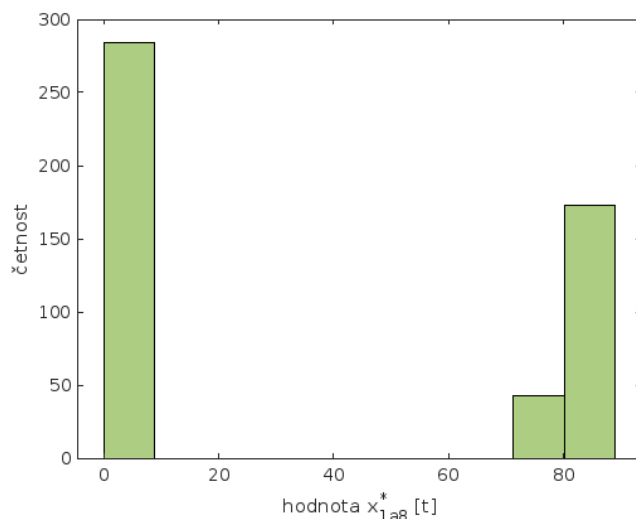


Obr. 4.8: Histogramu výsledků (x_{1a2}^*) při použití modelu 2 (v2) ($q = 3, R = 100$)

Tento případ, kdy je výsledek stejný bez ohledu na pořadí, je ideální a není nutné jej dále vyhodnocovat.

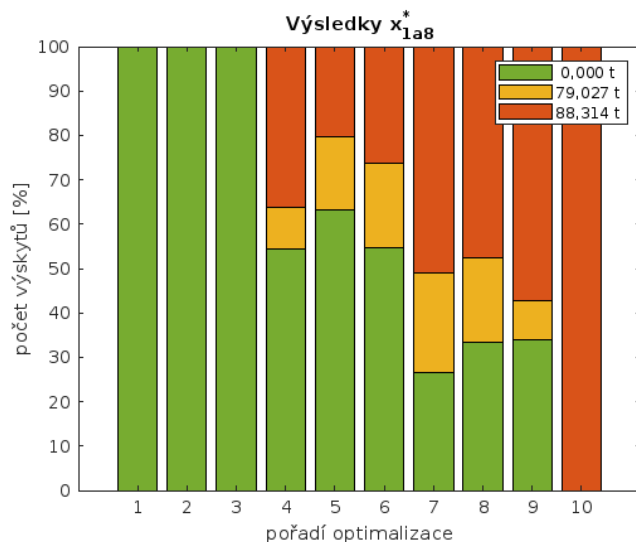
Oproti tomu vyhodnotit výsledky proměnné x_{1a8}^* na hraně 8 je složitější. Na této hraně vyšel ve 284 případech nulový tok, ovšem pro 43 případů bylo $x_{1a8}^* = 79,027$ t a ve 173 případech $x_{1a8}^* = 88,314$ t. Na této hraně je tedy nutné rozhodnout, který z výsledků je vhodné vybrat jako finální.

Z histogramu na obr. 4.9 je jasné, že výsledky nemají normální rozdělení. To potvrzuje také Kolmogorovův—Smirnovův test, který zamítl, že výsledky pochází z normálního rozdělení na hladině významnosti 0,05 (p-hodnota $\ll 0,05$).



Obr. 4.9: Druhý příklad histogramu výsledků (x_{1a8}^*) při použití modelu 2 (v2) ($q = 3, R = 100$)

Dále je zajímavé prozkoumat, jestli výsledek souvisí s pořadím, ve kterém byl tok producenta 1 optimalizován. Skutečně Spearmanův koeficient korelace vyšel 0,6743 a nezávislost byla na hladině významnosti 0,05 zamítnuta (p -hodnota $\ll 0,05$). Závislost mezi pořadím a výsledkem lze pozorovat i na obrázku 4.10, kde je zobrazeno v procentech, jaké vyšly výsledky vzhledem k pořadí optimalizace. V případech, kdy uzel byl optimalizován v prvních skupinách, v naprosté většině vyšel na hraně nulový tok. Zatímco při optimalizaci v posledních skupinách byl na hraně zpravidla nenulový tok.



Obr. 4.10: Procento výskytů výsledků proměnné x_{1a8}^* v závislosti na pořadí optimalizace toku od producenta 1 ($q = 3, R = 100$)

Obecně téměř v každém případě obsahuje množina výsledků na jedné hraně pouze několik hodnot (viz obr. 4.8 a 4.9). Kolmogorovův-Smirnovův test normality byl použit

na výsledky všech hran pro všechny toky testovací úlohy 1 a ve všech případech byla nulová hypotéza zamítnuta. Z toho lze usoudit, že obecně nelze předpokládat, že výsledky pochází z normálního rozdělení. Nelze tedy k jejich vyhodnocení využít konfidenční intervaly s použitím Studentova rozdělení. Naopak předchozí zjištění nasvědčují tomu, že výsledky pochází z nějakého diskrétního rozdělení. Vzhledem k tomu, že cílem je vybrat jedno finální řešení, je vhodnější zvolit jiný, než čistě statistický přístup.

Finální model

Lze využít toho, že na finální výsledek je kladen požadavek splnění podmínek toku v síti, které jsou definovány jako omezení (4.3.3) — (4.3.11) dílčích modelů. Místo statistického vyhodnocení scénářů se vytvoří optimalizační model, který tato omezení využije. Hlavní myšlenkou volby účelové funkce je, že množinu výsledků scénářů na jedné hraně lze považovat za kandidáty na řešení. Přičemž výsledek s větší četností je více pravděpodobný. Cílem tedy je najít takové řešení, které je co nejbližší mediánu kandidátů a zároveň splňuje omezení (4.3.3) — (4.3.11). Takový model lze definovat následovně:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M \sum_{r=1}^R |x_{ipj}^r - x_{ipj}|$$

za podmínek (4.3.3)—(4.3.11),

kde $I = O$ (tj. všechny toky jsou optimalizovány najednou) a nerovnice (4.3.8) a (4.3.9) lze hromadně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} x_{ipj} \leq \sum_{p \in \{a,b,c\}} t_{pj}, \quad \forall j \in H. \quad (4.3.19)$$

Jedná se o minimalizaci vzdáleností finálního řešení od jednotlivých kandidátů (označených x_{ipj}^r) v součtové (manhattanské) normě definované v kap. 3.2.1. Právě takto definovaná účelová funkce zařídí, aby řešení bylo blízko mediánu. Problém je, že tato funkce není kvůli absolutní hodnotě lineární, takže i přestože všechna omezení jsou lineární, nejedná se o úlohu lineárního programování. Je možné ovšem využít substituci stejně jako v příkladu regrese v součtové normě v kap. 3.2.1, díky níž se lze zbavit absolutní hodnoty. K tomu je třeba definovat novou proměnnou Δ_{ipj} , která označuje rozdíl mezi kandidátem a finálním řešením.

Linearizovaný finální model pro rekonstrukci toků odpadu tedy bude:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M \sum_{r=1}^R \Delta_{ipj} \quad (4.3.20)$$

za podmínek (4.3.3)—(4.3.7), (4.3.19), (4.3.10)—(4.3.11),

$$\Delta_{ipj} \leq x_{ipj}^r - x_{ipj}, \quad \forall i \in O, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall j \in H, \quad (4.3.21)$$

$$-(x_{ipj}^r - x_{ipj}) \leq \Delta_{ipj}, \quad \forall i \in O, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall j \in H, \quad (4.3.22)$$

$$0 \leq \Delta_{ipj}, \quad \forall i \in O, \forall p \in \{a, b, c\}, \forall j \in H. \quad (4.3.23)$$

Nevýhodou této substituce je přidání nových proměnných Δ_{ipj} do modelu, což rozšiřuje úlohu o $3NM$ proměnných. Navíc se model rozšíří o omezení (4.3.21), (4.3.22) a (4.3.23).

V účelové funkci lze použít i jinou metriku k vypočítání vzdálenosti finálního řešení od kandidátních výsledků. V případě Euklidovské metriky by řešení inklinovalo ke střední hodnotě kandidátů. Ovšem to není příliš žádoucí, protože kandidátní řešení se od sebe mohou velmi lišit (viz histogram na obr. 4.9) a střední hodnota by v takových případech byla výrazně vzdálená od všech kandidátních řešení. Například střední hodnota pro kandidátní řešení zobrazených v histogramu na obr. 4.9 je 37,3530 t, což není příliš blízko ani k jednomu z kandidátů. Proto hledat finální řešení blízké střední hodnotě kandidátů není v tomto případě vhodné a tento přístup není dále uvažován.

4.3.4 Porovnávací kritéria

Aby bylo možné jednotlivé dílčí modely porovnat a vyhodnotit výsledky finálního modelu, je nejprve nutné definovat vhodná porovnávací kritéria. Prvním zvoleným kritériem je obdoba 0-1 ztrátové funkce (která se často používá ve statistice např. k vyhodnocení klasifikace). Pro optimální řešení x_{ipj}^* získané finálním modelem (4.3.20) až (4.3.23) a zadané skutečné řešení \hat{x}_{ipj} je definováno

$$L(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{3NM} \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M \mathcal{I}(\hat{x}_{ipj}, x_{ipj}^*), \text{ kde}$$

$$\mathcal{I}(\hat{x}_{ipj}, x_{ipj}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \hat{x}_{ipj} \neq x_{ipj}^*, \\ 1 & \text{pro } \hat{x}_{ipj} = x_{ipj}^*. \end{cases}$$

V případě, že všechny toky určené modelem odpovídají skutečným tokům, pak je $L = 1$. Pokud se ani jeden výsledek neshoduje se zadaným řešením, pak je $L = 0$. Vyšší hodnota L tedy značí lepší výsledek.

Kritérium L je relativně přísné, proto lze uvažovat i jeho mírnější podobu

$$\tilde{L}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{3NM} \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M \tilde{\mathcal{I}}(\hat{x}_{ipj}, x_{ipj}^*), \text{ kde}$$

$$\tilde{\mathcal{I}}(\hat{x}_{ipj}, x_{ipj}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \text{sgn}(\hat{x}_{ipj}) \neq \text{sgn}(x_{ipj}^*), \\ 1 & \text{pro } \text{sgn}(\hat{x}_{ipj}) = \text{sgn}(x_{ipj}^*). \end{cases}$$

V tomto případě nejsou srovnávány konkrétní hodnoty výsledků, ale pouze zda je tok odpadu na hraně nulový či ne. Toto kritérium je zajímavé hlavně v porovnání s kritériem L , přičemž vždy platí $L \leq \tilde{L}$. Pokud jsou jejich hodnoty podobné, znamená to, že modelem nesprávně určené toky odpadu jsou posílány po jiných hranách, než by měly být. V případě, že jsou toky odpadu posílány po stejných hranách a pouze se liší množství poslaného odpadu, pak je \tilde{L} (na rozdíl od L) rovno 1.

Abyste informace o rozdílech mezi skutečným a získaným řešením byla kompletní, jsou použita také kritéria, která tuto odchylku kvantifikují. Prvním takovým kritériem je střední absolutní chyba MAE (z anglického Mean Absolute Error), která je definována

$$\text{MAE} = \frac{1}{3NM} \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M |x_{ipj}^* - \hat{x}_{ipj}|.$$

Toto kritérium lze interpretovat, jako průměrný rozdíl mezi získaným a skutečným řešením v absolutní hodnotě. Nevýhoda MAE je, že závisí na uvažované škále. V rámci problému řešeném v této práci to tedy znamená, že MAE budou více ovlivňovat toky odpadu od producentů s velkou produkcí. Proto jsou rozdíly ve výsledcích hodnoceny i dalším kritériem, kterým je symetrická střední absolutní procentuální chyba SMAPE (z anglického Symmetric Mean Absolute Percentage Error):

$$\text{SMAPE} = \frac{100}{3NM} \sum_{i=1}^N \sum_{p \in \{a,b,c\}} \sum_{j=1}^M \frac{|x_{ipj}^* - \hat{x}_{ipj}|}{\frac{1}{2}(|x_{ipj}^*| + |\hat{x}_{ipj}|)} [\%].$$

SMAPE představuje procentuální průměrnou chybu v absolutní hodnotě, která je podělena průměrnou hodnotou mezi získaným a skutečným řešením. Pokud jsou tedy výsledky stejné, pak je jeho hodnota 0 %. Je-li některá z hodnot x_{ipj}^* , nebo \hat{x}_{ipj} nulová, pak SMAPE nabývá maximální hodnoty 200 %. SMAPE není závislý na škále, ale problém nastává v případě, že obě porovnávané hodnoty jsou nulové, to by zapříčinilo dělení nulou a tedy pro takové hodnoty nelze toto kritérium spočítat. Tento problém lze vyřešit vynecháním takových výsledků, popřípadě pro ně lze nastavit chybu na 0 %. Další nevýhodou SMAPE je, že pro malé hodnoty x_{ipj}^* a \hat{x}_{ipj} je toto kritérium nestabilní. Nicméně tento problém by při evaluaci nalezených toků odpadu neměl nastat, protože množství transportovaného odpadu na hranách nebývá menší než 1 t. Ze vzorců MAE a SMAPE vyplývá, že je žádoucí, aby jejich hodnoty byly co nejmenší.

Existuje velké množství metrik a kritérií na srovnávání získaných výsledků se skutečnými hodnotami. Zmíněná kritéria byla zvolena, protože jejich hodnoty jsou snadno interpretovatelné a jejich kombinace výsledky komplexně popisuje.

5 Testování modelů

Vzhledem k tomu, že u reálných dat není k dispozici informace o skutečných tocích odpadu, nelze je použít pro vyhodnocení vytvořených modelů. Proto je vyhodnocení výsledků provedeno na datech testovacích úloh. Aby byly výsledky relevantní, testovací úlohy by měly odrážet skutečná data. Proto při jejich generování byly hodnoty parametrů (viz tab. 4.1) založené na reálných datech z OH ČR. Parametry byly navíc upraveny tak, aby se v úloze vyskytovalo 100 uzlů. I přestože reálná úloha rekonstrukce toků odpadu v ČR obsahuje několik tisíc uzlů, byl zvolen menší počet, aby byla přijatelná časová náročnost s ohledem na nutnost opakování výpočtu pro několik vygenerovaných testovacích úloh. Použité hodnoty parametrů jsou uvedeny v tabulce 5.1.

Tab. 5.1: Hodnoty parametrů testovací úlohy založené na reálných datech z OH ČR

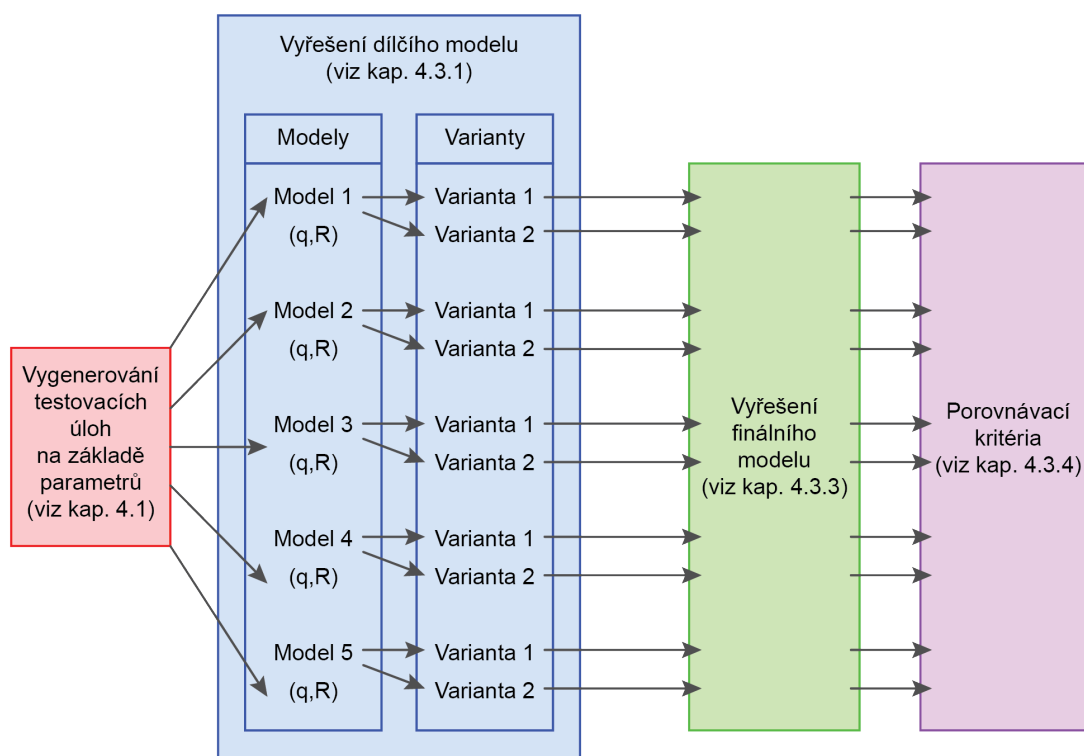
| Parametr | Hodnota |
|------------|---------|
| N | 100 |
| N_s | 89 |
| N_m | 8 |
| N_l | 3 |
| N_A | 90 |
| N_B | 5 |
| N_C | 10 |
| ϵ | 4 |
| p_i | 0.3 |
| p_r | 0.1 |
| p_d | 0.15 |
| r | 0.075 |

Kromě určení kvality výsledků získaných postupem navrženým v této práci (viz schéma na obr. 5.1) je třeba odpovědět na několik otázek, které vyvstaly při vývoji modelů.

- Který z definovaných dílčích modelů 1 až 5 je nejvhodnější k rekonstrukci toku odpadu?
- Kolik toků najednou je nejlepší optimalizovat (tj. volba q)?
- Kolik scénářů je třeba uvažovat (tj. volba R)?
- Ovlivňuje uvažovaná varianta modelu (v1 nebo v2) správnost výsledků?

K zodpovězení těchto otázek posloužila kritéria definovaná v kap. 4.3.4. Z těchto kritérií byla největší pozornost věnována kritériu L , protože nejvýstižněji popisuje chybuvost při rekonstrukci toků odpadu. Výpočty byly na jednotlivých testovacích úlohách několikrát opakovány, aby byly k dispozici finální řešení získané různými dílčími modely (modely 1 až 5) pro různé hodnoty q a R . Testované hodnoty q byly zvoleny tak, aby všechny skupiny naráz optimalizovaných toků obsahovaly stejné množství producentů, konkrétně $q \in \{5, 10, 20, 50, 100\}$. R bylo voleno z množiny $\{20, 50, 100\}$ pro $q < 100$

a $R = 10$ pro $q = 100$. Průměrné hodnoty kritérií, které jsou níže prezentované, byly vypočteny ze získaných finálních a správných řešení patnácti testovacích úloh se 100 uzly vygenerovaných na základě parametrů s hodnotami uvedenými v tab. 5.1. Množství 15 testovacích úloh bylo zvoleno, protože konfidenční intervaly hodnot kritérií se od testování na 10 testovacích úlohách téměř nelišily. Navíc rekonstrukci toků je třeba opakovat pro každou kombinaci hodnot q a R , všech dílčích modelů při uvažování obou variant. Výpočet pro jednu takovou kombinaci trvá několik minut, proto není žádoucí provádět testování na více úlohách než je nutné.



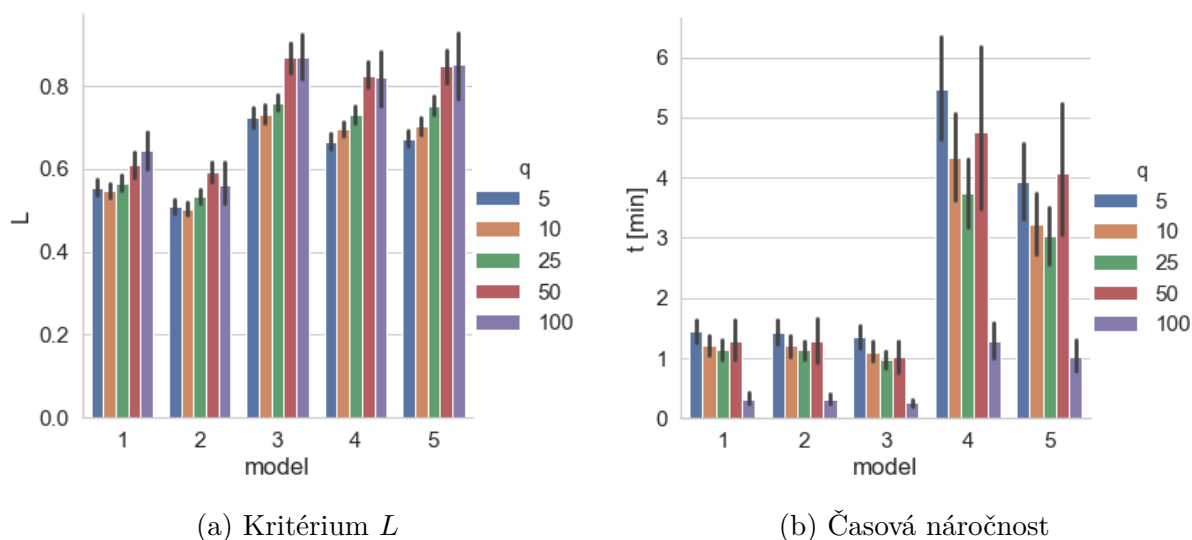
Obr. 5.1: Schéma testování modelů na rekonstrukci toků odpadů

Při výpočtu kritéria L tak, jak bylo definováno v kap. 4.3.4, se zjistilo, že hodnota L je vyšší než 0.99 pro všechny kombinace volených hodnot s dílčími modely. To znamená, že výsledky finálního modelu a správného řešení se v 99 % neliší. Ovšem je nutné podotknout, že většinu výsledků tvoří nuly, protože odpad jednotlivých typů od každého producenta nebývá transportován přes více než tři hrany. Při bližším prozkoumání výsledků se ukázalo, že finální model byl schopný v naprosté většině určit správně právě nulové výsledky. Nicméně při prozkoumání ostatních výsledků se ukázalo, že mezi nimi byl výskyt chyb mnohem častější. Ovšem protože poměr nenulových výsledků vůči nulovým je nízký, nemají příliš velký vliv na hodnotu kritéria L . Proto jsou dále všechna kritéria počítána pouze z těchto nenulových hran a navíc pouze na hranách, u nichž transport není vynucen omezením (4.3.5). L je tedy upraveno na

$$L(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*) = \frac{1}{|M^*|} \sum_{(i,p,j) \in M^*} \mathcal{I}(\hat{x}_{ipj}, x_{ipj}^*),$$

kde $M^* = \{(i, p, j) | \hat{x}_{ipj} > 0, i \in \{1, 2, \dots, N\}, p \in \{a, b, c\}, j \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus J_i\}$ a $|M^*|$ značí mohutnost této množiny (počet prvků). Obdobně se upravila kritéria \tilde{L} , MAE a SMAPE.

Vliv dílčích modelů 1 až 5 a zvoleného q na hodnoty kritéria L je zobrazen na obr. 5.2a včetně 95% intervalu spolehlivosti pro L vytvořeného za pomoci bootstrapu ($n = 1000$). Z obrázku vyplývá, že nejpřesnější rekonstrukce toků byla provedena za použití modelu 3, následovaného modelem 5 a dále modelem 4. V kombinaci s $q = 50$ nebo $q = 100$ byla shoda se správnými výsledky více než 85 % na zkoumaných hranách, což je přijatelný výsledek. Při použití modelů 1 a 2 byla rekonstrukce výrazně méně přesná. Z toho plyne, že nejdůležitějším uvažovaným principem byla minimalizace počtu míst zpracování a při přidání dalších principů se rekonstrukce toků odpadu zhoršila. Tento výsledek je překvapivý, protože na základě expertního názoru bylo očekáváno, že modely kombinující více principů budou rekonstruovat toky nejlépe. Nicméně pravděpodobné vysvětlení tohoto výsledku lze najít v charakteru testovací úlohy. Při generování testovací úlohy není nijak omezen počet míst zpracování. Místa zpracování jsou určena pouze parametrem p_d (viz tab. 4.1), což ale způsobuje, že je velký počet míst zpracování a v každém místě je zpracován odpad pouze od malého počtu producentů. Tedy v budoucím výzkumu by bylo vhodné přidat omezení počtu míst zpracování jako parametr testovací úlohy, aby testovací data více odpovídala reálné situaci. Při srovnání modelů z hlediska časové náročnosti vychází nejhůře model 4 a poté model 5 (viz obr. 5.2b). Tento výsledek je očekávatelný, vzhledem k tomu, že při řešení těchto modelů je nejprve třeba najít váhy pro lineární kombinaci. A tedy před jejich samotným řešením se nejprve počítají dílčí modely 1 a 3, příp. 2. Stejné trendy jsou pozorovatelné i na obr. 5.3a a 5.3b.

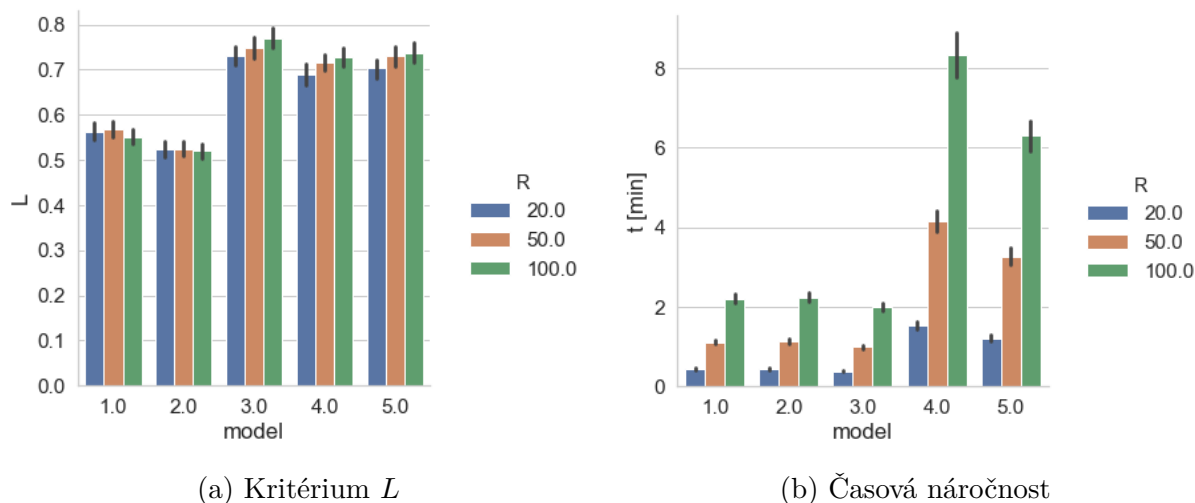


Obr. 5.2: Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritérium L a časovou náročnost

Co se týče volby q , tj. počtu toků odpadu, které se optimalizují zároveň, z obr. 5.2a a 5.4a vyplývá, že obecně při vyšším q bylo dosaženo lepších výsledků. Pro $q = 50$ a $q = 100$ (tj. optimalizace všech toků zároveň) je procento správných výsledků v podstatě

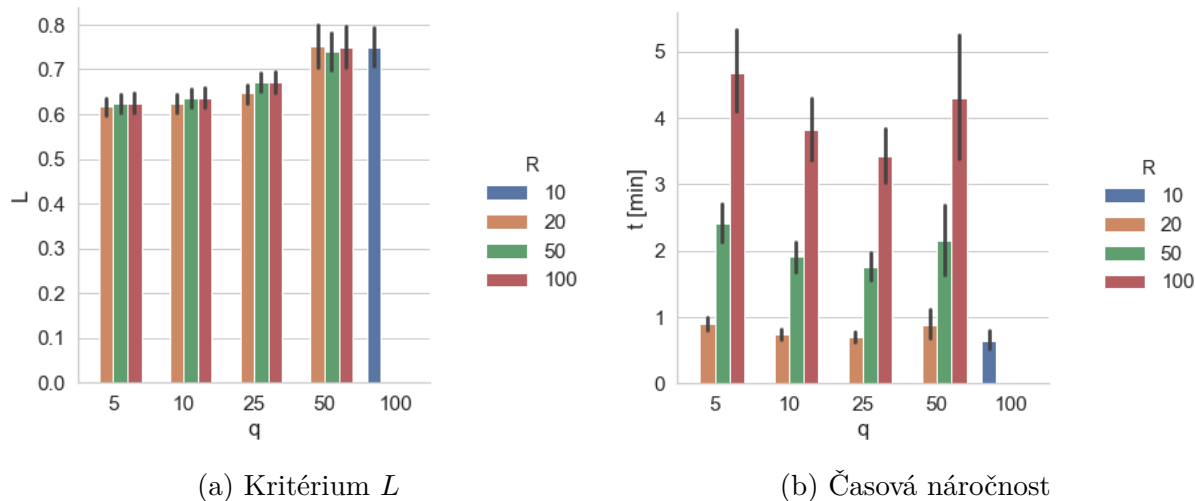
totožné. Při zvolení nízkého q nalezené toky více závisí na pořadí skupin, ve kterých byly optimalizovány, proto přesnost rekonstrukce je nižší. Navíc u nízké hodnoty parametru q v některých případech došlo k tomu, že dílčí model neměl pro určité scénáře (tj. pro konkrétní složení skupin toků optimalizovaných najednou) řešení. V těchto případech i přes přidání proměnné h_j^+ do modelů došlo k tomu, že již provedená optimalizace předchozích skupin toků omezila možnosti zbylých toků natolik, že neexistovalo přípustné řešení. Tyto případy byly ojedinělé, proto byly problémové scénáře při optimalizaci dílčího modelu nahrazeny jinými (bezproblémovými) scénáři. Nicméně v budoucím vývoji dílčího modelu by bylo vhodné tyto případy vyřešit sofistikovanějším způsobem.

Na druhou stranu při volbě q je třeba brát v úvahu časovou náročnost, která je vykreslena na obr. 5.2b a 5.4b. Pro $q = 5$ je nejvyšší, což je způsobeno výpočtem malé úlohy pro velký počet skupin, právě toto opakované počítání malého modelu je časově náročné. Vyšší časová náročnost výpočtů pro $q = 50$ má opačný důvod. V tomto případě jsou pouze dvě skupiny, ovšem obě obsahují 50 producentů a tedy rozsah úlohy je výrazně vyšší. Pro ještě vyšší q se dá předpokládat, že by časová náročnost výrazně narůstala a tedy předčila i délku výpočtu pro $q = 5$. Důvodem, proč délka výpočtu pro $q = 100$ je výrazně nižší, je nízký počet uvažovaných scénářů ($R = 10$). Počet scénářů R byl takto zvolen, protože při optimalizování všech toků najednou by měla být optimální hodnota účelové funkce unikátní. Avšak řešení může být nejednoznačné, proto je výpočet opakován desetkrát s různými startovacími hodnotami. Tento případ není relevantní pro hodnocení R , proto není uveden na obr. 5.3a a 5.3b. Závěr, že je nejefektivnější optimalizovat všechny toky najednou a vůbec nepoužívat scénářový přístup s finálním modelem, by byl ovšem nesprávný. Toto platí pouze pro malé úlohy, jako jsou testovací úlohy, které obsahují pouze 100 uzlů, díky čemuž výpočet není příliš dlouhý. Ovšem reálná úloha může obsahovat i několik tisíc uzlů, tedy počet proměnných a omezení by byl velmi vysoký a časová náročnost nepřijatelná.



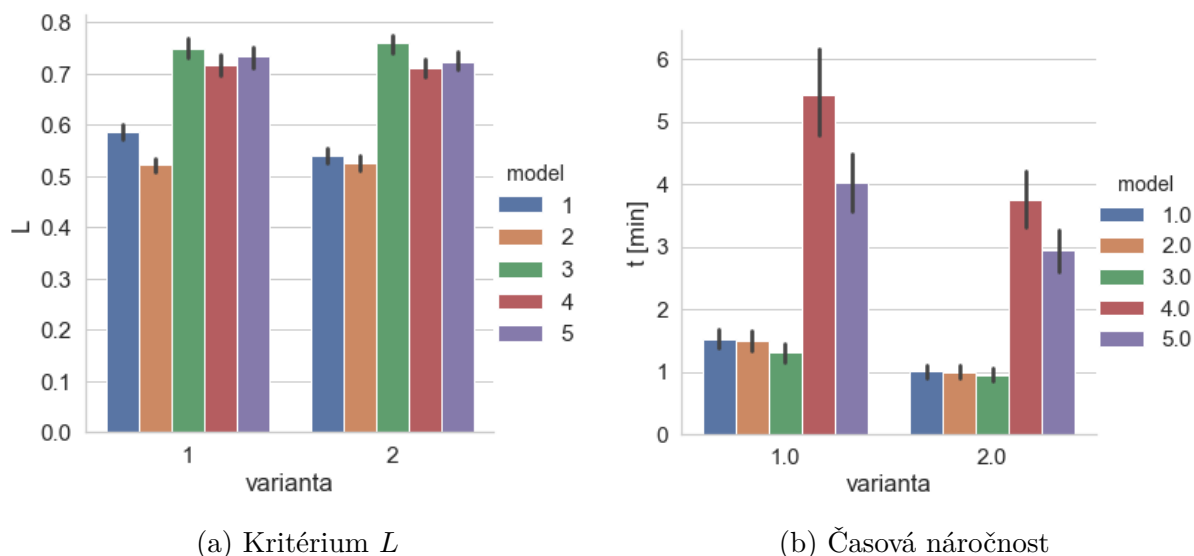
Obr. 5.3: Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru R na kritérium L a časovou náročnost

Ze sloupcových grafů na obr. 5.3a a 5.4a lze vyvodit, že počet scénářů nemá statisticky významný vliv na hodnotu L , protože se 95% intervaly spolehlivosti pro různé hodnoty R překrývají. Na druhou stranu R výrazně ovlivňuje rychlost výpočtu, jak je vidět na obr. 5.3b a 5.4b. S počtem scénářů přibližně lineárně narůstá časová náročnost. To je způsobeno tím, že každý scénář znamená jedno opakování rekonstrukce všech toků dílčím modelem.



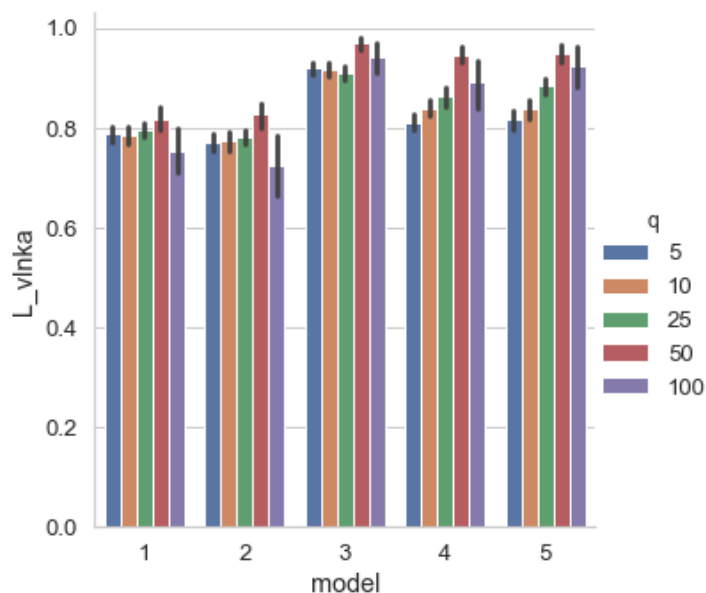
Obr. 5.4: Vykreslení vlivu parametrů q a R na kritérium L a časovou náročnost

Dále je třeba určit vliv varianty na kritérium L . Z obr. 5.5a lze usoudit, že uvažovaná varianta na jeho hodnotu vliv nemá. Z časového hlediska je výhodnější použít variantu 2 (viz obr. 5.5b), což je pravděpodobně způsobeno lépe optimalizovaným kódem. Dle expertního názoru realitě více odpovídá varianta 1, tedy pro uzly je výhodnější posílat odpad různých typů po stejných hranách. Z tohoto důvodu je vhodnější v rámci této práce vybrat jako finální variantu 1.



Obr. 5.5: Vykreslení vlivu zvolené varianty a dílčího vlivu na kritérium L a časovou náročnost

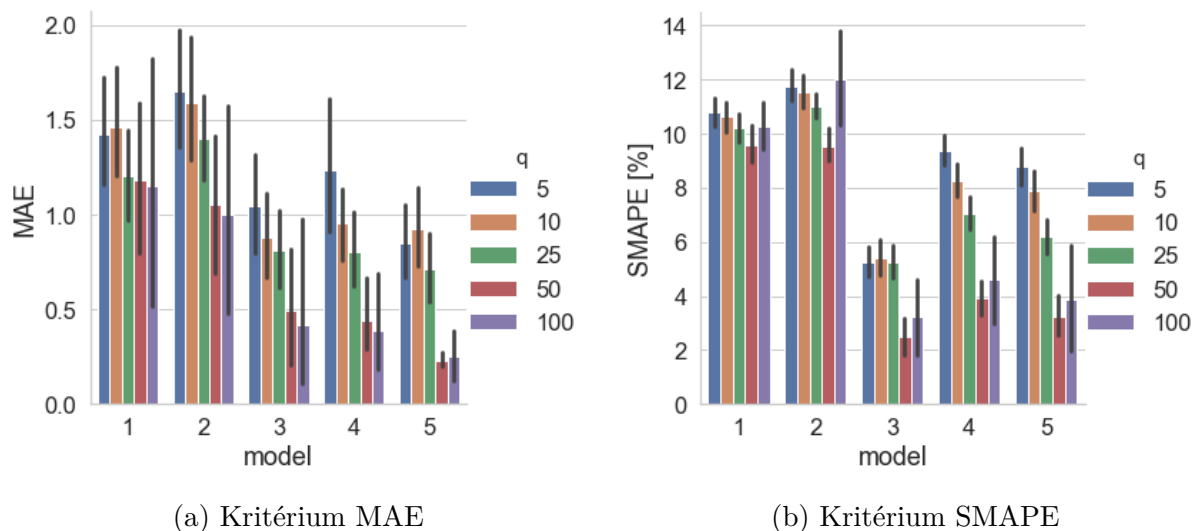
Protože přesnost výsledků nejvíce ovlivňuje volba dílčího modelu a parametr q , jsou hodnoty ostatních kritérií zobrazeny pouze na jejich závislosti. Průměrné hodnoty kritéria \tilde{L} jsou téměř o 20 % vyšší než pro L , viz obr. 5.6. To znamená, že často se nalezená řešení neshodují v transportovaném množství, ale shodují se ve výběru hran použitých k transportu. Také trendy jsou velmi podobné, až na $q = 100$, které v porovnání s $q = 50$ nevykazuje tak vysoké hodnoty \tilde{L} .



Obr. 5.6: Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritérium \tilde{L}

Průměrné hodnoty kritérií MAE a SMAPE jsou vykresleny na obr. 5.7a, resp. 5.7b. Trendy jsou opačné než u kritéria L , což je žádoucí, protože nejlepší výsledky značí nízké

hodnoty. Na rozdíl od L je hodnota MAE mírně lepší pro model 5 (oproti modelu 3), ovšem u kritéria SMAPE je trend opačný. Proto dílčí model 3 lze považovat za nejvhodnější k rekonstrukci toků odpadu. Co se týče vlivu q závěr zůstává stejný jako u kritéria L . Obecně jsou hodnoty MAE a SMAPE relativně nízké. Znamená to, že v případech, kdy výsledek byl nesprávný, rozdíl mezi správným a získaným výsledkem nebyl velmi výrazný.



Obr. 5.7: Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritéria MAE a SMAPE

Předchozí zjištění na základě kritérií definovaných v kap. 4.3.4 lze shrnout následovně.

- Nejlepší rekonstrukce odpadů byla získána modelem 3, ovšem může to být zapříčiněno způsobem generování testovací úlohy.
- Pro vyšší q byly získány lepší výsledky, nejlepší byly konkrétně pro $q = 50$ a $q = 100$.
- Počet scénářů R nemá zásadní vliv na správnost výsledků, ale velmi ovlivňuje časovou náročnost. Proto je vhodné zvolit nízké R . Ovšem je třeba přihlídnout na zvolené q a celkový počet uzlů v úloze, aby byly výsledky relevantní. Z dílčích analýz doporučuje autorka tohoto textu volit parametr q alespoň 50 a parametr R okolo 20. S ohledem na výpočetní čas se doporučuje zvyšovat hodnoty parametru q .
- Uvažovaná varianta neovlivňuje správnost řešení. Na základě expertního názoru je preferována varianta 1.

Závěr

V diplomové práci byl formulován přístup na rekonstrukci toků odpadu z dostupných dat. Informace o tocích odpadu byla dosud v ČR dostupná pouze na státní úrovni. Přístup navržený v diplomové práci umožňuje získat tuto informaci na menších územních celcích. Což je podstatné pro identifikování konkrétních míst resp. uzlů s potenciálem zvýšení efektivity nakládání s odpadem. Zvolený přístup se skládá ze dvou optimalizačních modelů: dílčího a finálního.

V rámci dílčího modelu je uvažováno, že odpad je převážen na co nejkratší vzdálenosti, dále že je předáván přes co nejmenší počet uzlů a zpracován v co nejméně uzlech (viz kap. 1.3). Na základě těchto tří principů bylo vytvořeno několik verzí dílčího modelu na hledání toků odpadu (viz kap. 4.3.1). První tři verze dílčího modelu uvažují principy jednotlivě. Další dvě verze dílčího modelu jsou založeny na kombinaci principů. Jedná se o smíšené celočíselné programování a protože záměrem je mít možnost použít modely na rozsáhlé reálné úloze, byl zvolen tzv. scénářový přístup (popsaný v kap. 4.3.2). Ten spočívá v postupném řešení dílčího modelu pouze pro část toků odpadu najednou. Protože výsledky závisí na pořadí optimalizace toků, byly výpočty opakovány v různém složení a pořadí toků, které představují jednotlivé scénáře. Tímto postupem byla získána kandidátní řešení, která slouží jako vstupní data pro finální model. Finální model má lineární charakter (viz kap. 4.3.3), proto je možné jej použít na rekonstrukci všech toků zároveň. Jeho princip spočívá v hledání takového řešení, které je blízko mediánu kandidátních řešení.

Vývoj a testování modelů probíhalo na malých testovacích úlohách, u kterých bylo k dispozici správné řešení. Díky tomu bylo možné verze dílčích modelů na základě kritérií (definovaných v kap. 4.3.4) porovnat a vyhodnotit, který z principů dává nejlepší řešení. Při testování na simulačních úlohách se 100 uzly, které byly generovány na základě parametrů zvolených podle reálných dat z OH ČR, bylo zjištěno, že nejlepší dílčí model byl založen na principu minimalizace počtu míst zpracování odpadu (viz kap. 5). Přičemž při použití tohoto dílčího modelu a optimalizaci toků od 50 producentů najednou se výsledky získané finálním modelem shodovaly ve více než 85 % se zadaným řešením.

Závěr, že nejvhodnějším dílčím modelem je model založený pouze na minimalizaci počtu míst zpracování, byl překvapující. Důvodem je pravděpodobně způsob generování testovacích úloh, při kterém není nijak omezen počet míst zpracování odpadu. V budoucnu by bylo vhodné toto omezení při generování testovacích úloh přidat a zjistit, jestli bude změna v generování mít vliv na určení nejvhodnějšího dílčího modelu. Dále by se mohly detailně prozkoumat toky odpadu, které jsou finálním modelem nesprávně určeny. Na základě této analýzy by byly přidány další principy do dílčího modelu.

Modely k rekonstrukci toků odpadu vytvořené v diplomové práci představují významnou část výpočtového jádra aplikace REVEDATO 2.0. Tato aplikace je vyvíjena na ÚPI FSI VUT v Brně pod záštitou projektu CEVOOH.

Literatura

- [1] Předpis 541/2020 Sb. *Poslanecká sněmovna parlamentu České republiky* [online]. Praha: Parlament České republiky, Kancelář Poslanecké sněmovny, c1995-2021 [cit. 2022-11-11]. Dostupné z: <https://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=541&r=2020>
- [2] Odpadové hospodářství. *Ministerstvo životního prostředí* [online]. c2008-2022 [cit. 2022-10-31]. Dostupné z: https://www.mzp.cz/cz/odpadove_hospodarstvi
- [3] KURAŠ, Mečislav. *Odpadové hospodářství*. Chrudim: Ekomonitor, 2008. ISBN 978-80-86832-34-0.
- [4] *COM(2020) 98 final: A new Circular Economy Action Plan For a cleaner and more competitive Europe*. Brussels: EUROPEAN COMMISSION, 2020.
- [5] *Global Material Resources Outlook to 2060: Economic Drivers and Environmental Consequences* [online]. Paris: OECD Publishing, 2019 [cit. 2022-11-13]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1787/9789264307452-en>
- [6] WHAT A WASTE 2.0: A Global Snapshot of Solid Waste Management to 2050. In: *The World Bank* [online]. Washington, D.C.: The World Bank Group, c2022 [cit. 2022-11-13]. Dostupné z: https://datatopics.worldbank.org/what-a-waste/trends_in_solid_waste_management.html
- [7] Oběhové hospodářství: Díky novým pravidlům zaujme EU celosvětové přední místo v oblasti nakládání s odpady a recyklace. In: *Evropská komise* [online]. Brusel: Evropská unie, c1995-2022, 22. květen 2018 [cit. 2022-11-21]. Dostupné z: https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/cs/IP_18_3846
- [8] Co je ZEVO: Energetické využití odpadů. In: *Skupina ČEZ* [online]. Praha: ČEZ, c2022 [cit. 2022-11-13]. Dostupné z: <https://www.cez.cz/cs/zevo/co-je-zevo>
- [9] Waste hierarchy. *EUR-Lex: Access to European Union Law* [online]. Luxembourg: Publications Office of the European Union, c1998-2022 [cit. 2022-11-21]. Dostupné z: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=LEGISSUM:waste_hierarchy
- [10] Odpady a recyklace. *Evropská komise* [online]. Brusel: Evropská unie, c1995-2022 [cit. 2022-11-13]. Dostupné z: https://environment.ec.europa.eu/topics/waste-and-recycling_cs
- [11] *Plán odpadového hospodářství: České republiky pro období 2015 — 2024 s výhledem do roku 2035*. Aktualizace leden 2022. Praha: Ministerstvo životního prostředí, 2014.
- [12] Co jsou cirkulární byznys modely a jaké ekonomické výhody přinášejí firmám?. In: *Společně udržitelně* [online]. Praha: Komerční banka, c2022, 24.9.2022 [cit. 2022-11-13]. Dostupné z: <https://www.komerčníbanka.cz/spolecne-udrizitelne>

- 2022-11-13]. Dostupné z: <https://spolecne-udrzitelne.cz/aktuality/inspirace/co-jsou-cirkularni-byznys-modely-a-jake-ekonomicke-vyhody-prinaseji-firmam>
- [13] Povinnosti měst a obcí v roce 2022 dle nové odpadové legislativy — 2. část. *EKOKOM* [online]. Praha: EKO-KOM, c2011 - 2022 [cit. 2022-11-14]. Dostupné z: <https://www.ekokom.cz/povinnosti-mest-a-obci-v-roce-2022-dle-nove-odpadove-legislativy-2-cast/>
- [14] Informační systém odpadového hospodářství ISOH. *CENIA* [online]. Praha: Česká informační agentura životního prostředí, c2022 [cit. 2022-11-14]. Dostupné z: <https://www.cenia.cz/odpadove-a-obehove-hospodarstvi/isoh/>
- [15] CEVOOH. *CEVOOH* [online]. c2022 [cit. 2022-10-31]. Dostupné z: <https://cevooh.cz>
- [16] JAKUBUS, Monika Beata a Bohdan STEJSKAL. Municipal solid waste management systems in Poland and the Czech Republic. A comparative study. *Environment Protection Engineering*. 2020, **46**(3), 61-78. Dostupné z: doi:10.37190 /epe200304
- [17] *Směrnice Evropského parlamentu a Rady (ES) č. 98/2008 ze dne 19. listopadu 2008 o odpadech a o zrušení některých směrnic (Text s významem pro EHP)*. Dostupné také z: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/?uri=celex%3A32008L0098>
- [18] PLUSKAL, Jaroslav. *Pokročilé síťové modely v oblasti oběhového hospodářství*. Brno, 2023. Dizertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav procesního inženýrství. Vedoucí práce Martin Pavlas.
- [19] ANAGNOSTOPOULOS, Theodoros, Kostas KOLOMVATSOS, Christos ANAGNOSTOPOULOS, Arkady ZASLAVSKY a Stathes HADJIEFTHYMIADES. Assessing dynamic models for high priority waste collection in smart cities. *Journal of Systems and Software*. 2015, **110**, 178-92. Dostupné z: doi:10.1016/j.jss.2015.08.049
- [20] WANG, Z., L. HUANG a C.X. HE. A multi-objective and multi-period optimization model for urban healthcare waste-s reverse logistics network design. *Journal of Combinatorial Optimization*. 2021, **42**(4), 785-812. Dostupné z: doi:10.1007/s10878-019-00499-7
- [21] HANNAH, M.A., Md. ABDULLA AL MAMUN, Aini HUSSAIN, Hassan BASRI a R.A. BEGUM. A review on technologies and their usage in solid waste monitoring and management systems: Issues and challenges. *Waste Management*. 2015, **43**, 509-23. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2015.05.033
- [22] MANFREDI, Simone a Malgorzata GORALCZYK. Life cycle indicators for monitoring the environmental performance of European waste management. *Resources, Conservation and Recycling*. 2013, **81**, 8-16. ISSN 09213449. Dostupné z: doi:10.1016/j.resconrec.2013.09.004

- [23] KULCZYCKA, Joanna, Ewa DZIOBEK a Anita SZMIŁYK. Challenges in the management of data on extractive waste-the Polish case. *Mineral Economics*. 2020, **33**(3), 341-347. ISSN 2191-2203. Dostupné z: doi:10.1007/s13563-019-00203-5
- [24] ESMAELIAN, Behzad, Ben WANG, Kemper LEWIS, Fabio DUARTE, Carlo RATTI a Sara BEHDAD. The future of waste management in smart and sustainable cities: A review and concept paper. *Waste Management*. 2018, **81**, 177-195. ISSN 0956053X. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2018.09.047
- [25] SHYAM, Gopal Kirshna, Sunilkumar S. MANVI a Priyanka BHARTI. Smart waste management using Internet-of-Things (IoT). *2017 2nd International Conference on Computing and Communications Technologies (ICCCCT)*. IEEE, 2017, 2017, 199-203. ISBN 978-1-5090-6221-8. Dostupné z: doi:10.1109/ICCCCT2.2017.7972276
- [26] KUNDARIYA, Nidhi, Swayansu Sabyasachi MOHANTY, Sunita VARJANI, et al. A review on integrated approaches for municipal solid waste for environmental and economical relevance: Monitoring tools, technologies, and strategic innovations. *Bioresource Technology*. 2021, **342**. ISSN 09608524. Dostupné z: doi:10.1016/j.biortech.2021.125982
- [27] BRUNNER, Paul H. a Helmut RECHBERGER. *Handbook of Material Flow Analysis* [online]. In: . CRC Press, 2016, 2016-12-19 [cit. 2023-04-07]. ISBN 9781315313450. Dostupné z: doi:10.1201/9781315313450
- [28] MEHTA, Neha, Eoin CUNNINGHAM, Martin DOHERTY, Peter SAINSBURY, Ife BOLAJI, Behnam FIROOZI-NEJAD a Beatrice M SMYTH. Using regional material flow analysis and geospatial mapping to support the transition to a circular economy for plastics. *Resources, Conservation and Recycling*. 2022, **179**. ISSN 09213449. Dostupné z: doi:10.1016/j.resconrec.2021.106085
- [29] WATH, Sushant B., Atul N. VAIDYA, P.S. DUTT a Tapan CHAKRABARTI. A roadmap for development of sustainable E-waste management system in India. *Science of The Total Environment*. 2010, **409**(1), 19-32. ISSN 00489697. Dostupné z: doi:10.1016/j.scitotenv.2010.09.030
- [30] NESKOVIC MARKIC, Dragana, Hristina STEVANOVIC CARAPINA, Drazenko BJELIC, Ljiljana STOJANOVIC BJELIC, Predrag ILIC, Zeljka SOBOT PESIC a Olivera KIKANOVIC. Using Material Flow Analysis for Waste Management Planning. *Polish Journal of Environmental Studies*. 2019, **28**(1), 255-265. ISSN 1230-1485. Dostupné z: doi:10.15244/pjoes/78621
- [31] KLEINHANS, Kerstin, Michelle HALLEMANS, Sophie HUYSVELD, et al. Development and application of a predictive modelling approach for household packaging waste flows in sorting facilities. *Waste Management*. 2021, **120**, 290-302. ISSN 0956053X. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2020.11.056

- [32] WANG, Chunyan, Yi LIU, Wei-Qiang CHEN, Bing ZHU, Shen QU a Ming XU. Critical review of global plastics stock and flow data. *Journal of Industrial Ecology*. 2021, **25**(5), 1300-1317. ISSN 1088-1980. Dostupné z: doi:10.1111/jiec.13125
- [33] BEIGL, Peter, Sandra LEBERSORGER a Stefan SALHOFER. Modelling municipal solid waste generation: A review. *Waste Management*. 2008, **28**(1), 200-214. ISSN 0956053X. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2006.12.011
- [34] KOLEKAR, K.A., T. HAZRA a S.N. CHAKRABARTY. A Review on Prediction of Municipal Solid Waste Generation Models. *Procedia Environmental Sciences*. 2016, **35**, 238-244. ISSN 18780296. Dostupné z: doi:10.1016/j.proenv.2016.07.087
- [35] JOHNSON, Nicholas E., Olga IANIUK, Daniel CAZAP, Linglan LIU, Daniel STAROBIN, Gregory DOBLER a Masoud GHANDEHARI. Patterns of waste generation: A gradient boosting model for short-term waste prediction in New York City. *Waste Management*. 2017, **62**, 3-11. ISSN 0956053X. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2017.01.037
- [36] KANNANGARA, Miyuru, Rahul DUA, Leila AHMADI a Farid BENSEBAA. Modeling and prediction of regional municipal solid waste generation and diversion in Canada using machine learning approaches. *Waste Management*. 2018, **74**, 3-15. ISSN 0956053X. Dostupné z: doi:10.1016/j.wasman.2017.11.057
- [37] LANER, David, Helmut RECHBERGER a Thomas ASTRUP. Systematic Evaluation of Uncertainty in Material Flow Analysis. *Journal of Industrial Ecology*. 2014, **18**(6), 859-870. ISSN 10881980. Dostupné z: doi:10.1111/jiec.12143
- [38] CENCIC, Oliver. Nonlinear data reconciliation in material flow analysis with software STAN. *Sustainable Environment Research*. 2016, **26**(6), 291-298. ISSN 24682039. Dostupné z: doi:10.1016/j.serj.2016.06.002
- [39] LANER, David, Julia FEKETITSCH, Helmut RECHBERGER a Johann FELLNER. A Novel Approach to Characterize Data Uncertainty in Material Flow Analysis and its Application to Plastics Flows in Austria. *Journal of Industrial Ecology*. 2016, **20**(5), 1050-1063. ISSN 10881980. Dostupné z: doi:10.1111/jiec.12326
- [40] ZHU, Yongxian, Kyle SYNDERGAARD a Daniel R. COOPER. *Mapping the Annual Flow of Steel in the United States*. 2019, **53**(19), 11260-11268. ISSN 0013-936X. Dostupné z: doi:10.1021/acs.est.9b01016
- [41] CENCIC, Oliver a Rudolf FRÜHWIRTH. *A general framework for data reconciliation-Part I: Linear constraints*. 2015, **75**, 196-208. ISSN 00981354. Dostupné z: doi:10.1016/j.compchemeng.2014.12.004

- [42] KOPEC, Grant M., Julian M. ALLWOOD, Jonathan M. CULLEN a Daniel RALPH. A General Nonlinear Least Squares Data Reconciliation and Estimation Method for Material Flow Analysis. *Journal of Industrial Ecology*. 2016, **20**(5), 1038-1049. ISSN 10881980. Dostupné z: doi:10.1111/jiec.12344
- [43] DUBOIS, Didier, Hélène FARGIER, Meïssa ABABOU a Dominique GUYONNET. A fuzzy constraint-based approach to data reconciliation in material flow analysis. *International Journal of General Systems*. 2014, **43**(8), 787-809. ISSN 0308-1079. Dostupné z: doi:10.1080/03081079.2014.920840
- [44] ŠOMPLÁK, Radovan, Vlastimír NEVRLÝ, Veronika SMEJKALOVÁ, Zlata ŠMÍDOVÁ a Martin PAVLAS. Bulky waste for energy recovery: Analysis of spatial distribution. *Energy*. 2019, **181**, 827-839. ISSN 03605442. Dostupné z: doi:10.1016/j.energy.2019.05.175
- [45] PAVLAS, Martin, Radovan ŠOMPLÁK, Veronika SMEJKALOVÁ, Vlastimír NEVRLÝ, Lenka ZAVÍRALOVÁ, Jakub KŮDELA a Pavel POPELA. Spatially distributed production data for supply chain models - Forecasting with hazardous waste. *Journal of Cleaner Production*. 2017, **161**, 1317-1328. ISSN 09596526. Dostupné z: doi:10.1016/j.jclepro.2017.06.107
- [46] ŠOMPLÁK, R., V. SMEJKALOVÁ a J. KŮDELA. Mixed-integer quadratic optimization for waste flow quantification. *Optimization and Engineering*. 2022, **23**(4), 2177-2201. ISSN 1389-4420. Dostupné z: doi:10.1007/s11081-022-09762-z
- [47] DEMEL, Jiří. *Grafy a jejich aplikace*. Praha: Academia, 2002. ISBN 80-200-0990-6.
- [48] LAWLER, Eugene. *Combinatorial optimization: networks and matroids*. Mineola: Dover Publications, 2001. ISBN 0-486-41453-1.
- [49] KOCAY, William a Donald L. KREHER. *Graphs, algorithms, and optimization*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, c2005. ISBN 1-58488-396-0.
- [50] DUPAČOVÁ, Jitka a Petr LACHOUT. *Úvod do optimalizace*. Praha: Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-176-7.
- [51] POPELA, Pavel. Simplex method. In: *Optimization I*. Brno: Brno University of Technology, 2021, s. 32-34.
- [52] BAZARAA, M. S., Hanif D. SHERALI a C. M. SHETTY. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2006. ISBN 978-0-471-48600-8.
- [53] GRIVA, Igor, Stephen G. NASH a Ariela SOFER. *Linear and nonlinear optimization*. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, c2009. ISBN 978-0-898716-61-0.

- [54] LEAL-TAIXÉ, Laura. *Multiple object tracking with context awareness*. Hannover, 2014, 33.
- [55] VANDERBEI, Robert J. *Linear Programming*. 5th ed. Princeton: Springer, 2020. ISBN 978-3-030-39415-8.
- [56] JEREMY, Bleyer. Advances in the simulation of viscoplastic fluid flows using interior-point methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017, (330).
- [57] WASSERMAN, Larry. *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004. ISBN 978-0-387-21736-9.
- [58] LAPORTE, Gilbert. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research* [online]. 1992, **59**(2), 231-247 [cit. 2023-04-05]. ISSN 0377-2217. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(92\)90138-Y](https://doi.org/10.1016/0377-2217(92)90138-Y)
- [59] WOLSEY, Laurence A. *Integer programming*. Second edition. Hoboken, NJ: Wiley, 2021. ISBN 9781119606536.
- [60] CHEN, Der-San, Robert G. BATSON a Yu DANG. *Applied integer programming: modeling and solution*. Hoboken, N.J.: John Wiley, c2010. ISBN 978-0-470-37306-4.
- [61] KOCHENDERFER, Mykel J. a Tim A. WHEELER. *Algorithms for optimization*. Cambridge: The MIT Press, [2019]. ISBN 9780262039420.
- [62] MIETTINEN, Kaisa. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. ISBN 978-1-4615-5563-6.
- [63] GREGOR, Jiří, Radovan ŠOMPLÁK a Martin PAVLAS. Transportation Cost as an Integral Part of Supply Chain Optimisation in the Field of Waste Management. *Chemical Engineering Transactions*. 2017, (56), 1927–32. Dostupné z: [doi:10.3303/CET1756322](https://doi.org/10.3303/CET1756322)
- [64] KLOTZ, Ed a Alexandra M. NEWMAN. Practical guidelines for solving difficult mixed integer linear programs. *Surveys in Operations Research and Management Science* [online]. 2013, **18**(1-2), 18-32 [cit. 2023-01-26]. ISSN 18767354. Dostupné z: [doi:10.1016/j.sorms.2012.12.001](https://doi.org/10.1016/j.sorms.2012.12.001)
- [65] ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika*. 2. vyd. Praha: SNTL-ALFA, 1978.
- [66] CRAMÉR, Harald. *Mathematical Methods of Statistics*. Vol. 9. Princeton: Princeton University Press, 1999. ISBN 9780691005478.

Seznam symbolů a zkratk

| | |
|----------------|--|
| CENIA | Česká informační agentura životního prostředí |
| CEVOOH | Centrum enviromentálního výzkumu - odpadové a oběhové hospodářství a enviromentální bezpečnost |
| ČR | Česká republika |
| EU | Evropská unie |
| FSI | Fakulta strojního inženýrství |
| ISOH | Informační systém odpadového hospodářství |
| ISPOP | Integrovaný systém plnění ohlašovacích povinností |
| MFA | Analýza materiálových toků |
| MŽP | ministerstvo životního prostředí |
| ObH | oběhové hospodářství |
| OH | odpadové hospodářství |
| ORP | obec s rozšířenou působností |
| PD ISOH | pracovní databáze ISOH |
| POH | Plán odpadového hospodářství |
| ÚPI | Ústav procesního inženýrství |
| ZÚJ | základní územní jednotka |

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Schéma oběhového hospodářství [8] | 5 |
| 1.2 | Schéma Hierarchie nakládání s odpadem dle EU [12] | 6 |
| 1.3 | Schéma algoritmu aplikace REVEDATO 2.0 | 8 |
| 1.4 | Schéma hmotnostní bilance v uzlu a souladu výkazů mezi uzly | 8 |
| 3.1 | Graf G_1 zadaný pomocí obrázku. | 19 |
| 3.2 | Myšlenka simplexové metody (upraveno) [54] | 26 |
| 3.3 | Myšlenka metod vnitřního bodu (upraveno) [56] | 26 |
| 3.4 | Zobrazení Pareto fronty | 33 |
| 4.1 | Zadání testovací úlohy 1 | 37 |
| 4.2 | Řešení testovací úlohy 1 | 38 |
| 4.3 | Optimální nakládání s odpadem — minimalizace vzdálenosti | 41 |
| 4.4 | Optimální nakládání s odpadem — minimalizace počtu použitých hran | 43 |
| 4.5 | Řešení testovací úlohy 1 získaný při uvažování varianty 1. | 51 |
| 4.6 | Řešení testovací úlohy 1 získaný při uvažování varianty 2. | 52 |
| 4.7 | Schéma algoritmu scénářového přístupu | 54 |
| 4.8 | Histogramu výsledků (x_{1a2}^*) | 55 |
| 4.9 | Histogramu výsledků (x_{1a8}^*) | 56 |
| 4.10 | Procento výskytů výsledků proměnné x_{1a8}^* v závislosti na pořadí optimalizace toku | 56 |
| 5.1 | Schéma testování modelů na rekonstrukci toků odpadů | 61 |
| 5.2 | Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritérium L a časovou náročnost | 62 |
| 5.3 | Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru R na kritérium L a časovou náročnost | 64 |
| 5.4 | Vykreslení vlivu parametrů q a R na kritérium L a časovou náročnost | 64 |
| 5.5 | Vykreslení vlivu zvolené varianty a dílčího vlivu na kritérium L a časovou náročnost | 65 |
| 5.6 | Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritérium \tilde{L} | 65 |
| 5.7 | Vykreslení vlivu dílčích modelů a parametru q na kritéria MAE a SMAPE | 66 |

Seznam tabulek

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Příklad nesouladu dat v PD ISOH | 9 |
| 1.2 | Návrh opravy výkazu uvedeného v tab. 1.1 nástrojem REVEDATO 1.0 | 9 |
| 4.1 | Parametry testovací úlohy | 36 |
| 4.2 | Tabulka srovnání výsledků získaných modely | 46 |
| 5.1 | Hodnoty parametrů testovací úlohy založené na reálných datech z OH ČR | 60 |

A Seznam příloh

Seznam příloh, které jsou obsaženy v `prilohy.zip`:

| | |
|----------------------------------|--|
| <code>generator_test.xlsm</code> | soubor na generování testovacích úloh |
| <code>kody</code> | složka obsahující kódy s naprogramovanými modely v programovacím jazyce Julia, program lze spustit souborem <code>Main.jl</code> |
| <code>kody_nakladani.xlsx</code> | rozdělení uvažovaných kódů nakládání na produkci, transport (předání—převzetí) a zpracování |
| <code>obrazky</code> | složka obsahující všechny obrázky použité v diplomové práci |
| <code>test_1.xlsx</code> | zadání a řešení testovací úlohy 1 |