

Česká zemědělská univerzita v Praze

Fakulta agrobiologie, potravinových a přírodních zdrojů

Katedra agroekologie a biometeorologie



**Projevy chaotického chování v časových řadách
koncentrací znečištění**

Diplomová práce

Autor práce: Radko Kříž

Vedoucí práce: doc. RNDr. Petr Pišoft, Ph.D.

© 2015 ČZU v Praze

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci " Projevy chaotického chování v časových řadách koncentrací znečištění " jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 10.4.2015

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval panu doc. RNDr. Petrovi Pišoftovi, Ph.D. za odborné konzultace a vedení při zpracování diplomové práce, pánům RNDr. Alešovi Raidlovi, Ph.D. a Mgr. Jiřímu Mikšovskému, Ph.D. z Katedry fyziky atmosféry, MFF, UK za odborné konzultace v oblasti nelineární analýzy časových řad. Dále děkuji Českému hydrometeorologickému ústavu za poskytnutí dat ze stanic automatického imisního monitoringu potřebných ke zpracování této práce.

Projevy chaotického chování v časových řadách koncentrací znečištění

Souhrn

Diplomová práce je zaměřena na projevy chaotického chování v časových řadách koncentrací znečištění. V předmluvě diplomové práce jsou stručně popsány problémy týkající se kvality ovzduší a jeho časového vývoje. Další kapitola je věnována teorii chaosu a jeho vlivu na vědecký výzkum. Deterministický chaos označuje typ komplexního chování deterministického dynamického systému. Otcem teorie chaosu byl Edward Lorenz, který ho objevil při vytváření modelu předpovědi počasí v roce 1963. Lorenz zjistil, že malé změny v počátečních podmínkách mohou vyvolat velké změny v budoucnosti. To byl revoluční objev, do této doby se vědecká komunita domnívala, že malá odchylka způsobí pouze malou změnu v předpovědi. Dlouhodobá předpověď je tedy z hlediska teorie chaosu nemožná.

Praktická část diplomové práce zahrnuje analýzu dat z Českého hydrometeorologického ústavu v Praze. Byla analyzována data z období 2011-2013 z měřicí stanice Praha-Libuš. Významná část práce se v teoretické i praktické rovině věnuje chaotickým deskriptorům, jako je míra vzájemné informace, největší Lyapunovův exponent, fraktální dimenze, entropie, Hurstův exponent. Je proveden odhad těchto chaotických deskriptorů z vybraných imisních řad koncentrací vybraných polutantů.

Pokud je Lyapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je pravděpodobně chaotický. Z vypočtených hodnot je možné učinit závěr, že zvolené časové řady jsou chaotické. Dále byl spočítán Hurstův exponent, který u chaotické časové řady identifikuje dlouhodobý paměťový cyklus. Závěr práce byl věnován predikcím. Jako nejúspěšnější metoda se jeví metoda globální nelineární predikce s využitím Gaussovské radiálně bazické funkce.

Klíčová slova: teorie chaosu, kvalita ovzduší, analýza časových řad, rekonstrukce fázového prostoru, nelineární predikce

Manifestations of chaotic behavior in the time series of pollution concentration

Summary

The diploma thesis is focused on manifestations of chaotic behavior in the time series of pollution concentration. In the foreword of the diploma thesis the air quality problems and its time evolutions are briefly described. The next chapters are devoted to chaos theory and its effect on the scientific research. Deterministic chaos denotes a type of complex behavior of a deterministic dynamical system. The father of the chaos theory was Edward Lorenz whose interest in chaos came about accidentally through his work on weather prediction in 1963. However Lorenz had discovered that small changes in initial conditions produced large changes in the long-term outcome. In view of the inevitable inaccuracy and incompleteness of weather observations, precise very long range forecasting would seem to be non-existent.

The practical part of the diploma thesis includes analysis of data from the Czech Hydrometeorological Institute in Prague. Data were analyzed from period 2011-2013 from background stations Prague-Libuš. The most important algorithms for data representation, prediction, phase space reconstruction, dimension, entropies, persistence and Lyapunov estimation are discussed here. At first, the time delay and the embedding dimension are estimated, which are needed for the Lyapunov exponent estimation and for the phase space reconstruction. If the correlation dimension is low, the largest Lyapunov exponent is positive and the Kolmogorov entropy has a finite positive value, chaos is probably present. From these estimations it can be concluded that chosen time series are chaotic. The Hurst exponent is used to evaluate the presence or absence of long-range dependence and its degree in a time-series. Finally we computed predictions using a Gaussian radial basis function to fit global nonlinear functions to the data. Considering all these findings, we recommend the Gaussian radial basis function to fit global non-linear functions as one of the methods used for prediction. As it may not be reliable under certain circumstances, it should be used in combination with other prediction methods.

Keywords: Chaos theory, Air quality, Time series analysis, Phase space reconstruction, Nonlinear prediction

Obsah

1 Úvod.....	9
2 Vědecká hypotéza a cíle	12
3 Teorie chaosu	13
3.1 Dynamický systém.....	15
3.2 Deterministický chaos	16
3.3 Logistická rovnice	17
3.4 Lorenzův model konvekce	20
4 Data	24
4.1 Koncentrace NO_x.....	25
4.2 Koncentrace O₃.....	27
4.3 Koncentrace SO₂	29
5 Chaotické deskriptory	31
5.1 Rekonstrukce fázového prostoru	31
5.1.1 Optimální hodnota časového zpoždění	32
5.1.2 Optimální dimenze vnoření	33
5.2 Invarianty systému.....	36
5.2.1 Fraktální dimenze	36
5.2.1.1 Kapacitní dimenze	36
5.2.1.2 Korelační dimenze	37
5.2.2 Entropie.....	39
5.2.3 Ljapunovy exponenty	39
5.3 Hurstův exponent.....	41
5.3.1 R/S analýza	42
5.3.2 Disperzionální analýza.....	43
6 Predikce.....	44
6.1 Lokální lineární modely	44
6.2 Globální modely	45
6.2.1 Radiálně bazická funkce	45
7 Výsledky	47
7.1 Chaotické deskriptory	47
7.1.1 Optimální hodnota časového zpoždění	47
7.1.2 Optimální hodnota dimenze vnoření.....	49
7.1.3 Korelační dimenze	51
7.1.4 Entropie.....	53

7.1.5	Maximální Ljapunovův exponent.....	53
7.1.6	Hurstův exponent.....	55
7.2	Predikce.....	56
8	Diskuze	57
9	Závěr.....	59
10	Literatura.....	60

1 Úvod

Vzduch představuje jedno ze základních složek životního prostředí. Bez jídla člověk vydrží přibližně měsíc, bez vody týden, ale bez vzduchu jen několik málo minut (Louda et al., 2013). Kvalita ovzduší je úroveň znečištění ovzduší, která může svými účinky ovlivňovat lidské zdraví, vegetaci, celé ekosystémy i materiály. Tato úroveň znečištění vnějšího ovzduší je způsobena vypouštěním znečišťujících látek do ovzduší z různých zdrojů především v důsledku antropogenních činností. Znečištění ovzduší kulminovalo v období průmyslové revoluce v souvislosti s masivním využíváním fosilních paliv. Špatná kvalita ovzduší je v současné době jedním z nejzávažnějších problémů ochrany životního prostředí (Vallero, 2008). Znečištěné ovzduší má nepříznivé účinky na lidské zdraví, znečišťující látky mohou způsobit širokou škálu zdravotních problémů od méně závažných až po smrtící. Konkrétním příkladem z historie je „Velký Londýnský smog“ z roku 1952, který způsobil přímé úmrtí několika tisíců lidí (Bell, et al., 2004). V současné době podle Ezzati et al. (2002) umírá celosvětově 2,4 mil. lidí ročně v důsledku vnitřního i vnějšího znečištění ovzduší. Některé znečišťující látky negativně působí i na vegetaci, mohou ovlivnit její růst a způsobit snížení výnosů zemědělských plodin a lesů. Jsou příčinou eutrofizace a acidifikace půdních a vodních ekosystémů a následné změny a snížení biodiverzity. Řada znečišťujících látek má navíc schopnost se v prostředí akumulovat a přecházet do potravního řetězce. Některé polutanty mají přímý nebo nepřímý vliv na klimatický systém Země. Znečišťující látky jsou po vypuštění ze zdroje přenášeny v atmosféře a mohou tak ovlivňovat kvalitu ovzduší nejen v nejbližším okolí samotného zdroje znečištění, ale také v poměrně vzdálených oblastech, v jiných státech i jiných kontinentech. Základním dokumentem, který upravuje sledování a posuzování kvality ovzduší v EU je směrnice 2008/50/ES o kvalitě vnějšího ovzduší a čistším ovzduší pro Evropu (EU, 2008b). Na úrovni ČR je sledování a hodnocení kvality ovzduší zastřešeno zákonem o ochraně ovzduší č. 201/2012 Sb., (Česko, 2012). Špatná kvalita ovzduší je již několik desetiletí závažným problémem, se kterým se Česká republika resp. Československo potýká. Česká republika spolu s dalšími zeměmi střední Evropy, patří mezi státy pověstné velmi špatnou kvalitou ovzduší. Toto území je někdy nazýváno „black triangle“. To je způsobené jejich geografickou polohou, tak i samotnými emisemi. K výraznému nárůstu emisí škodlivých látek do ovzduší dochází již od 50. let 20. století, ke kterému docházelo zpočátku zejména díky orientaci tehdejší ekonomiky na těžký průmysl, jehož energetické potřeby byly pokrývány spalováním uhlí. Zatímco emise SO₂ v 50. letech byly 1 mil. tun/rok, v 80. letech to byly již 3 mil. tun/rok. V 90. letech pak nastal prudký

pokles emisí v důsledku kombinace několika faktorů, mezi něž patřily např. nová environmentální legislativa, masivní investice do ochrany životního prostředí, především ovzduší, značný útlum těžkého průmyslu, ale i ústup domácností od vytápění pevnými palivy v důsledku tehdy probíhající plynofikace velké části obcí (Louda et al., 2013). Pokles emisí je zapříčiněn aplikací emisních limitů (nejvyšších přípustných koncentrací znečišťujících látek v odpadních plynech) na nejvýznamnějších zdrojích emisí a aplikací principu nejlepších dostupných technik (BAT - Best Available Techniques). Nejlepší dostupné techniky vycházejí ze směrnice EU 2008/1/ES o integrované prevenci a omezování znečištění (IPPC - Integrated Pollution Prevention and Control) (EU, 2008a). Nejlepší dostupné techniky jsou podle Česko (2002) nejúčinnější a nejpokročilejší stadium vývoje technologií a činností a způsobů jejich provozování, které ukazují praktickou vhodnost určitých technik navržených k předcházení, a pokud to není možné, tak k omezování emisí a jejich dopadů na životní prostředí. V posledních letech se však pokles emisí zastavil, u některých polutantů došlo naopak ke zvýšení emisí (Louda et al., 2013). Současná produkce emisí v kombinaci s meteorologickými a rozptylovými podmínkami jsou příčinou překračování imisních limitů v mnoha lokalitách ČR.

Dle ČHMÚ (2013) v současnosti představují v ČR největší problém ze sledovaných znečišťujících látek suspendované částice a na ně vázané polycyklické aromatické uhlovodíky. Globálně je v současné době, a to nejen v Evropě, jedním z nejvýznamnějších environmentálních problémů troposférický ozon viz Chattopadhyay et al. (2008) a Koçak et al. (2000). V letním období jsou na řadě lokalit překračovány imisní limity přízemního ozonu. Obecně platí, že lokální vytápění domácností tuhými palivy je významným zdrojem suspendovaných částic a polycyklických aromatických uhlovodíků. V oblastech zatížených dopravou se mohou vyskytovat zvýšené koncentrace oxidu dusičitého. Doprava je také významným zdrojem suspendovaných částic a polycyklických aromatických uhlovodíků. Významnými zdroji znečišťujících látek zůstávají i nadále veřejná a průmyslová energetika (ČHMÚ, 2013).

Základní podmínkou pro realizaci efektivních nápravných opatření je podrobná znalost výchozí situace, je tedy nutné znečištění ovzduší nějakým způsobem měřit a hodnotit. Monitoring a hodnocení kvality ovzduší na celém území České republiky zajišťuje Český hydrometeorologický ústav na základě pověření Ministerstva životního prostředí ČR (ČHMÚ, 2013). Není však možné získat imise v každém místě určitého prostoru. Proto se vyvíjejí různé matematické modely. Model je určité zjednodušení dané problematiky, které vystihuje základní charakteristiky a zanedbá ty nepodstatné. Modelování znečištění ovzduší je

matematická simulace šíření polutantů v ovzduší. Při modelování jsou zásadní dva faktory a to rozptyl a přenos polutantů v ovzduší. Modelování znečištění ovzduší může být definováno jako metoda pro získání informace o kvalitě ovzduší na základě znalosti emisí a procesů, které probíhají v atmosféře a které mohou vést k rozptylu, přenosu, chemickým změnám a odstranění znečišťujících látek z ovzduší. Tyto modely pak slouží k vyhodnocování imisní zátěže a především ke stanovení předpovědí. Existuje celá řada modelů a softwarových řešení pro předpovědi imisí znečišťujících látek. Velká skupina modelů vychází z fyzikální podstaty ovlivňující rozptyl zkoumaného polutantu. Asi nejznámější je Gaussovský model rozptylu znečišťujících příměsí v atmosféře, který vychází z analytického řešení difúzní rovnice. Jiný přístup je založen pouze na analýze časových řad. Analýza časových řad je také rozsáhlou kategorií, zahrnující klasické lineární metody, ale i nelineární techniky. Klasické statistické lineární metody dobře fungují v „klidných lineárních oblastech“, ale nejsou schopny předpovědět nebo namodelovat náhlé změny v časových řadách, se kterými se v reálných systémech setkáváme. Z těchto důvodů byly vyvinuty nelineární metody analýzy časových řad vhodné také pro koncentrace polutantů v ovzduší např. Abarbanel et al. (1993), Farmer et Sidorowich (1987), Fraser et Swinney (1986), Hegger et al. (1999), Henry et al. (2001), Kantz et Schreiber (2004), Kennel et al., (1992), Packard et al. (1980), Schreiber (1999) etc. Tato práce se zabývá nelineárními technikami analýzy časových řad, konkrétně metodami založenými na teorii chaosu.

Teorie chaosu nám říká, že pokud je systém chaotický, je možné učinit krátkodobé předpovědi. To je pozitivní zpráva, která sděluje, že předpovědi nejsou zcela vydány na pospas náhodě. Přístupy založené na teorii chaosu vycházejí z předpokladu, že pokud je známý systém a jeho počáteční podmínky, je možné předvídat budoucí stav tohoto systému. Z podstaty plyne, že úspěšná dlouhodobá předpověď není možná. Fenoménu této teorie je věnována samostatná kapitola „Teorie chaosu“. Moderní pojetí této teorie bylo poprvé pozorováno a následně použito pro modelování v meteorologii (Lorenz, 1963), kterou zásadně ovlivnila. Je rozumné předpokládat, pokud se teorie chaosu aplikuje v meteorologii, je možné ji použít při analýze imisních časových řad. Analýzu a predikci časových řad polutantů (O_3 , NO_x , SO_2 , PM_{10} etc.) založenou na teorii chaosu již provedla celá řada výzkumníků jako např. Chattopadhyay, et al. (2008), Chelani et al. (2005), Chen et al., (1998), Koçak (2000), Kříž (2014), Weng (2008), etc.

2 Vědecká hypotéza a cíle

Pro danou diplomovou práci bylo stanoveno několik cílů práce, které se opírají o dvě základní hypotézy.

Hypotézy:

1. Měřené koncentrace vybraných znečišťujících příměsí mají kvantifikovatelný chaotický projev.
2. Vývoj vybraných koncentrací lze predikovat pomocí hybridních modelů. Ty lze použít také k doplňování chybějících hodnot.

Cíle práce:

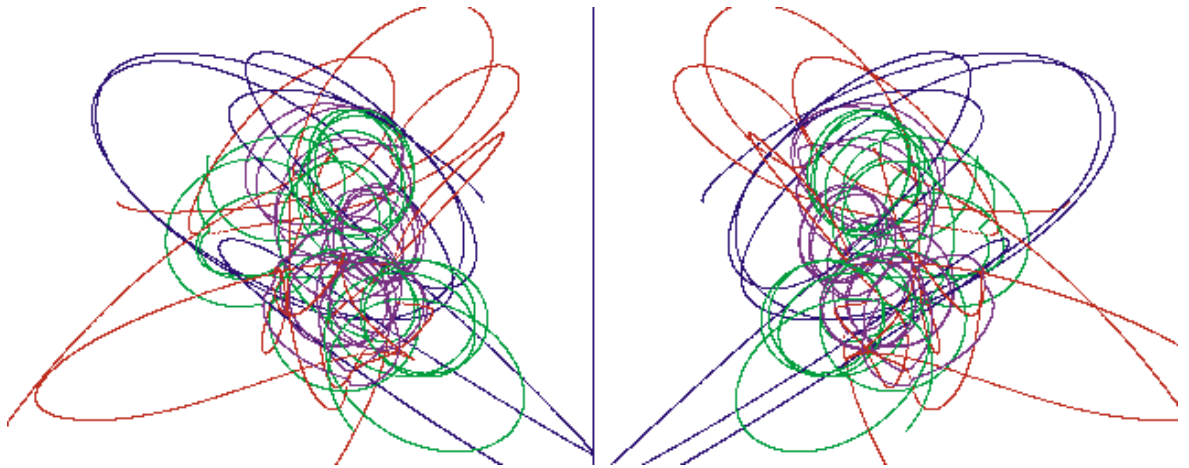
1. Prokázání kvantifikovatelných chaotických projevů měřených koncentrací vybraných znečišťujících příměsí.
2. Vyvinutí a otestování hybridního modelu určeného k predikci budoucího vývoje anebo k doplňování chybějících údajů.
3. Diskutovat získané výsledky s ohledem na další teoretické studie i možné praktické použití.

3 Teorie chaosu

Slovo chaos může být chápáno různě. Původně pochází z řecké mytologie a v kosmogonii znamená počátek všehomíra. Chaos (χάος) zde představoval primordinální božstvo, který své následovníky zplodil sám se sebou. Nejdříve vznikla temná noc Nyx a podsvětí Erebus na jedné straně a Země na straně druhé (Vítek et al., 2010). Poprvé slovo chaos použil řecký básník Hésiodos ve svém díle „O původu bohů“ (Theogoniá) v 7 st. př. n. l. Pojem chaos se vyskytuje v různých starověkých kulturách, u kterých tento pojem měl odlišnou tvářnost a odlišný obsah. V běžném slova smyslu v současné době je chaos intuitivně chápán jako zmatek, opak pořádku. V této práci se hovoří o deterministickém chaosu. Toto sousloví může znít jako oxymóron, neboť determinismus je spojený s řádem a chaos zní jako zmatek. Právě tento zdánlivý protimluv vystihuje podstatu teorie chaosu. Deterministický chaos je takové chování, které vypadá náhodně, ale má deterministickou povahu.

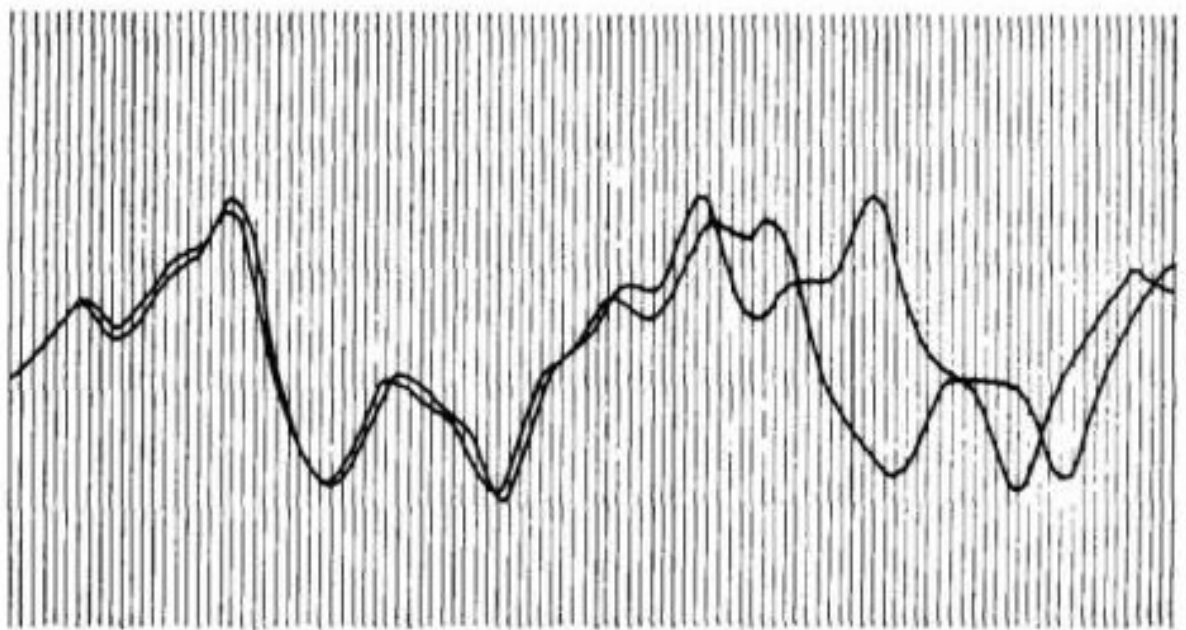
Již někteří starověcí myslitelé chápali chaos alespoň trochu ve smyslu deterministického chaosu. Jedním z nich byl i řecký filozof Anaxagorás v 5 st. př. n. l., který identifikoval soběpodobnost ve vesmíru a uvažoval o chaosu jako o informačním kanálu. Čínský mistr Zhuang Zhou ve 4 st. př. n. l. pojednával o chaosu a správně popsal jeho komplexní podstatu. Další řecký filozof Epikúros ze Samu poukázal na nestabilitu orbitů z kterých plyne citlivost na počáteční podmínky (Kaneko, et al., 2001).

Z moderních klasických vědců se nejbliže přiblížil teorii chaosu H. Poincaré. Poincaré (1890) při studiu problému tří těles dokázal, že v určité malé oblasti fázového prostoru existují trajektorie systému, které projdou touto malou oblastí nekonečněkrát často (Obr. 1). Poincaré ve své knize poznamenal: „Velice drobná příčina, která uniká naší pozornosti. Kdybychom přesně znali přírodní zákony a stav vesmíru v počátečním okamžiku, dokázali bychom přesně odpovědět, v jakém stavu se bude vesmír nacházet v následujícím okamžiku. Ale i kdyby pro nás přírodní zákony už nepředstavovaly žádné tajemství, stále bychom znali situaci jen přibližně. Kdybychom měli možnost se stejnou přesností předpovědět následující situaci, dosáhli bychom toho, co požadujeme a mohli bychom říci, že jsme daný jev předpověděli a že se řídí danými zákony. Ale tak tomu vždycky není; může se stát, že nepatrný rozdíl v počátečních podmínkách způsobuje velký rozdíl v konečných jevech. Malá chyba v podmínkách způsobí obrovskou chybu v jejich důsledcích. Předpověď se stává nemožnou ...“



Obr. 1. Problém tří těles: červené, modré, zelené a jejich trajektorie (Holmes, 1998)

Hadamardův biliard byl dalším příkladem chaotického chování. Hadamard (1898) dokázal nestabilitu všech trajektorií, neboli všechny trajektorie se exponenciálně rozcházejí od sebe (mají pozitivní Lyapunovův exponent). Oba vědci se velmi lehce dotkli problematiky chaosu, ale dále v ní nepokračovali. Je nutno poznamenat chaos nevědomky zahlédlo velké množství vědců, a také i obyčejných lidí, ale nikdo tomu nepřikládal důležitost. Následoval rozvoj ergodické teorie jako odvětví matematiky studující dynamické systémy.



Obr. 2. Objev citlivosti na počáteční podmínky (Lorenz, 1963)

Z hlediska vzniku teorie chaosu byl významný příspěvek matematika a meteorologa Lorenze (1963). Lorenz při simulaci počasí objevil, že malé změny v počátečních

podmínkách mohou vyvolat velké změny v budoucnosti. Lorenz pomocí jednoduchého počítače prováděl simulaci počasí. Chtěl vidět sled dat znovu a zároveň ušetřit čas, proto začal simulaci v polovině jeho průběhu (Obr. 2). Lorenz byl překvapen, že nová předpověď se výrazně liší od té předchozí. Začal to analyzovat a zjistil, že počítač pracoval s přesností na 6 desetinných míst, ale výtisk zaokrouhlí na 3 desetinná místa. To byl revoluční objev, že takto malá změna počátečních podmínek způsobí výraznou změnu v budoucnosti. Do této doby se vědecká komunita domnívala, že malá odchylka způsobí pouze malou změnu v předpovědi.

Přestože byl Lorenzův objev významný, na nějaký čas upadl v zapomnění, protože ho nikdo nehledal v „Journal of the atmospheric sciences“ (Lorenz, 1963). Výzkum v oblasti chaosu pokračoval nekoordinovaně, mnozí vědci na sobě objevovali to, co již někdo jiný objevil (Gleick, 1987). Nakonec se z původního ostychu k chaosu vyklubalo hnutí, které bylo v popředí vědeckého zájmu (Gleick, 1996). Dá se říci, že 20. století bylo charakterizováno třema významnými fyzikálními teoriemi: relativita, kvantová mechanika a chaos. Gleick (1996) uvádí slova jednoho fyzika: „Relativita zkoncovala s newtonovskou iluzí absolutního prostoru a času; kvantová teorie skoncovalo s newtonovským snem kontrolovaného procesu měření a chaos zkoncoval s laplaceovskou fantazií deterministické prediktability.“ Právě teorie chaosu je teorií, která nás pronásleduje doslova na každém kroku, stačí se jen podívat, podívat na přírodu, vodu, nebesa, ...

3.1 Dynamický systém

Dynamický systém je složen ze stavového prostoru, jehož souřadnic popisují stav systému v daném čase a z dynamických podmínek, které popisují změnu tohoto systému v čase. Stav systému je potom popsán vektorem, který celý leží ve stavovém prostoru. Dynamické podmínky jsou většinou zadány soustavou diferenciálních nebo diferenčních rovnic, které popisují změnu stavového vektoru v čase. Změna stavu dynamického systému se děje provedením těchto diferenciálních resp. diferenčních rovnic a nahrazením starého stavového vektoru vektorem novým.

Dynamickým systémem rozumíme trojici $\{Y, T, \Phi\}$, kde:

- Y je množina zvaná fázový nebo stavový prostor
- T je časová množina
- $\Phi: T \times Y \rightarrow Y, (t, y) \rightarrow \Phi_t(y)$ (1)

je druh zobrazení zvané tok nebo semi-tok, které splňuje:

$$- \Phi_0(y) = y, \forall y \in Y \quad (1)$$

$$- \Phi_s(\Phi_t(y)) = \Phi_{s+t}(y), \forall s, t \in T, \forall y \in Y \quad (2)$$

Dynamický systém je možné vyjádřit soustavou diferenciálních rovnic:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Diskrétní dynamický systém na množině Y je funkce:

$$\Phi : Y \rightarrow Y \quad (4)$$

Tato funkce, často nazývána zobrazení, může popisovat deterministickou evoluci nějakého systému: Jestliže se systém nachází ve stavu y v čase t , pak bude ve stavu $\Phi(y)$ v čase $t+1$. Studium časově diskrétního dynamického systému je založeno na iteracích zobrazení: sekvence

$$y, \Phi(y), \Phi^2(y), \dots \quad (5)$$

Tato práce se dále bude zabývat pouze nelineárními systémy. Nelineární systém je takový systém, u kterého neplatí princip superpozice a vstup není přímo úměrný výstupu. Říkáme tedy, že zobrazení f z vektorového prostoru do vektorového prostoru je lineární, jestliže platí:

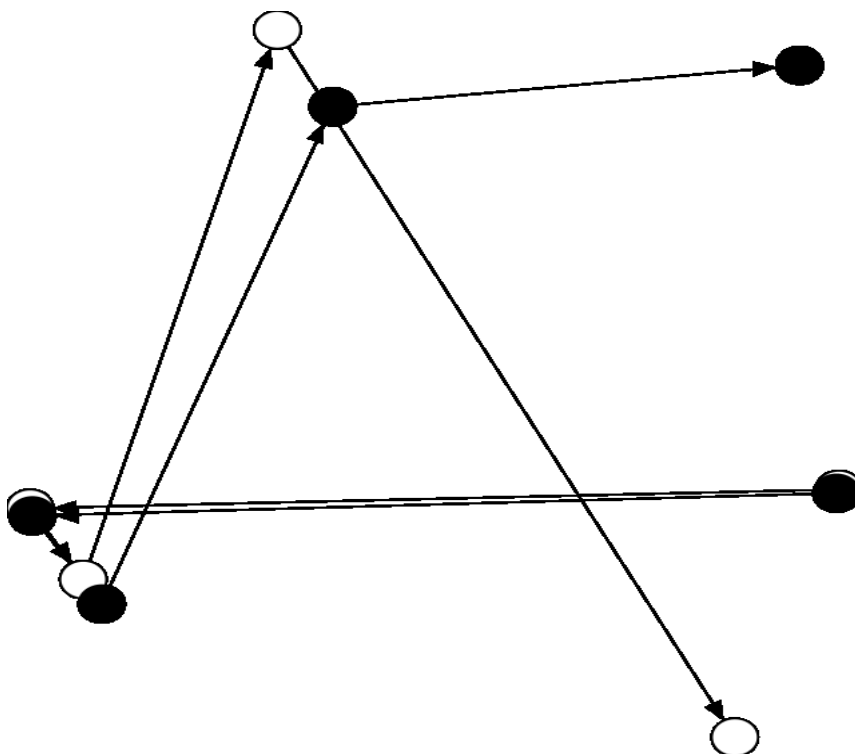
$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x) \\ f(x + y) &= f(x) + f(y) \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 Deterministický chaos

Existuje celá řada definic deterministického chasu. První a nejvíce matematická, chaos je ohraničený deterministický systém s kladným Lyapunovým exponentem. Více intuitivní definice pochází z Royal Society of London z roku 1986, kde je chaos definován jako stochastické chování vyskytující se v deterministickém systému. Chaos je z časového hlediska budoucí stav deterministického dynamického systému, který je nepředpověditelný v důsledku velké citlivosti na počáteční podmínky. Je to oproti běžnému významu slova chaos „dobrá zpráva“ v tom smyslu, že přívlastek deterministický říká, že jsme našli určitý řád, deterministické souvislosti v ději, který se dříve jevil jako nesrozumitelný (Pokorný, 2008).

Devaney (1989) definuje deterministický chaos (pro dynamický systém s diskretním časem) třemi podmínkami:

1. citlivá závislost na počátečních podmínkách (Obr. 3),
2. hustá množina periodických bodů,
3. tranzitivnost.



Obr.3. Citlivá závislost na počátečních podmínkách (Wikipedia, 2015)

Později se ukázalo, že z tranzitivnosti a husté množiny periodických bodů plyne citlivá závislost na počátečních podmínkách (Pokorný, 2008). Chaos se může, za předpokladu diskrétního času, objevit již v systému o jednom stupni volnosti. V případě spojitého času je minimální požadavek na přítomnost chaosu, systém o třech stupních volnosti.

3.3 Logistická rovnice

Jednodimenzionální diskrétní dynamické systémy jsou poměrně často využívány pro modelování, neboť jsou relativně jednoduché a jsou schopny demonstrovat komplexní dynamiku. Matematické vlastnosti jednodimenzionálního dynamického systému jsou dostatečné pro pochopitelné ve srovnání s vícedimenzionálními systémy.

Jednparametrové, diskrétní, jednodimenzionální zobrazení $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

$$x_{t+1} = f(x_t, r) \quad x \in \mathbf{R}, \quad r \in \mathbf{R} \quad (7)$$

Nechť x^* je fixním bod zobrazení, tj. $x^* = f(x^*, r)$. Asymptotická stabilita fixního bodu x^* závisí na sklonu zobrazení f , fixní bod leží mimo jednotkový kruh

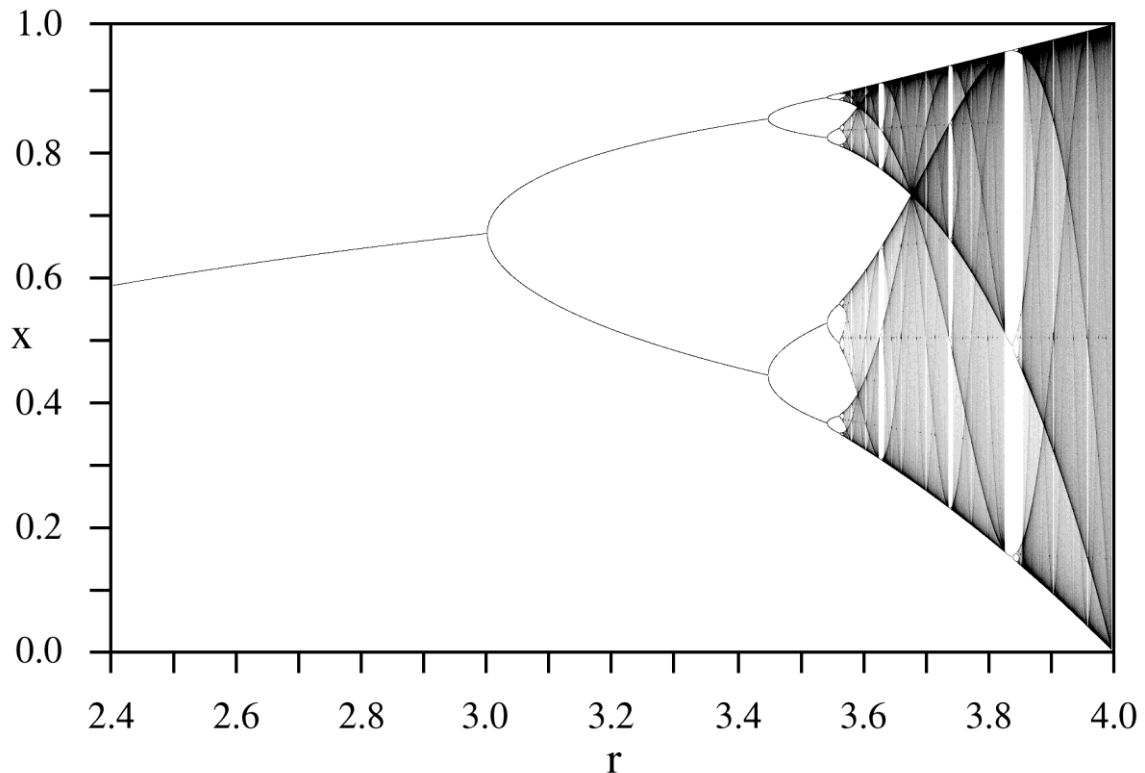
$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| = |\lambda| < 1 \quad (8)$$

Bifurkace, změna v kvantitativním chování zobrazení může nastat jenom, pokud vlastní hodnota λ nabývá hodnot $+1$ nebo -1 . Pojem bifurkace (zdvojení) v matematice poprvé zavedl Poincaré (1885). Bifurkace značí jev, při kterém dochází k velkým změnám vnitřního stavu systému v případě, malých plynulých změn vstupních parametrů. Je možné se setkat se systémy, u nichž po dosažení určitých kritických hodnot na vstupu dochází k náhlé, kvalitativní změně vnitřního stavu. Bifurkace značí zdvojení periody, což značí extrémní nestabilitu systému, kdy existují dvě se vzdalující řešení.

Typickým příkladem jednoduchého jednodimenzionálního diskrétního dynamického systému, který může být chaotický, je logistická rovnice.

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \quad (9)$$

Logistická rovnice byla využívána, především populačními biology, neboť se hodila k simulacím vývoje populace. Při studiu tohoto modelu si May (1976) všiml, výrazných změn v chování systému v závislosti na parametru r . Bude-li parametr nízký, systém se ustálí. Pokud parametr dále zvyšujeme, dojde k oscilaci mezi dvěma stavy. V případě, že je překročena hodnota řídicího parametru $3,5699\dots$ začne se systém chovat chaoticky. Přestože se jedná o velmi jednoduchou rovnici, může generovat neskutečnou složitost (Obr. 4).



Obr. 4. Bifurkační diagram logistické rovnice (Wikipedia, 2015)

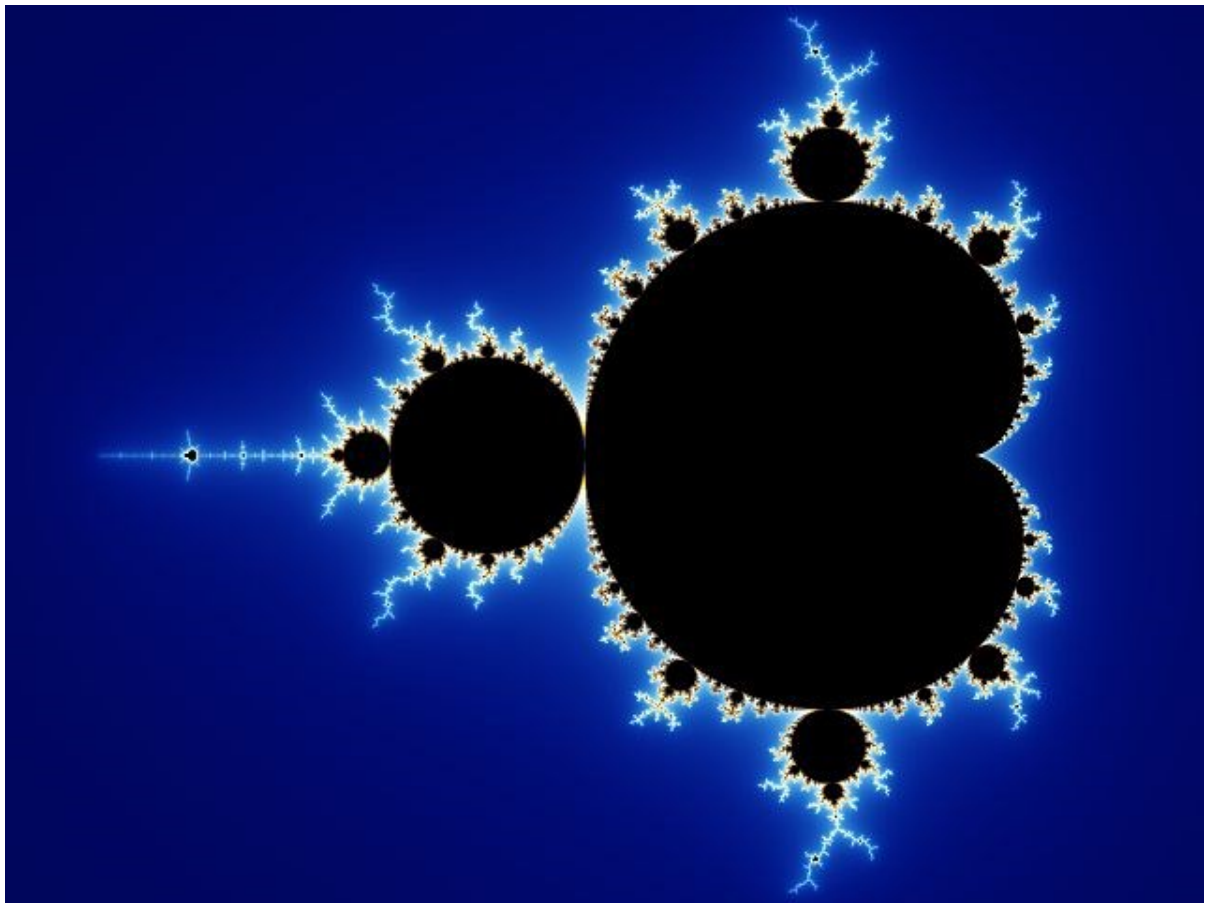
Detailní analýzu této rovnice provedl Feigenbaum (1978) a našel pravidelnost – měřítkovou strukturu. Vypočítal univerzální konvergenční konstantu chaosu, nazvanou Feigenbaumova konstanta:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n-1} - l_{n-2}}{l_n - l_{n-1}} = 4,669201609102990671... \quad (10)$$

Jedná se o limitu poměru mezi následnými bifurkacemi l_i . Zobecněním logistické rovnice do komplexní roviny dostaneme Mandelbrotovu množinu (Obr. 5).

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c \end{aligned} \quad (11)$$

Kde c je komplexní konstanta, které přiřadíme posloupnost komplexních čísel z_n .



Obr. 5. Mandelbrotova množina (Wikipedia, 2015)

3.4 Lorenzův model konvekce

Jak již bylo předesláno v úvodu, vliv Lorenza (1963) na utváření teorie chaosu byl zásadní. Do té doby se všeobecně věřilo, že klasická fyzika může předpovědět jakýkoliv stav vesmíru v budoucnosti. Vědci se do té doby chybně domnívali, že malá chyba v počátečních podmínkách může způsobit jen malou změnu v budoucnosti. Lorenz (1963) ukázal, že i tato malá změna může vést k dramatickým změnám v chování systému.

Modelování počasí vychází ze studia přenášení tepla v atmosféře. Následující popis, pokud není uvedeno jinak, vychází z (Raidl, 2015), (Horák, et al., 2003), (Prokšová, et. al., 2007). Uplatňují se zde tyto rozhodující fyzikální mechanismy: Archimedovské vztlakové síly a vnitřní tření v tekutině. Který proces převládne, závisí na fyzikálních vlastnostech tekutiny, okrajových podmínkách a především rozdílu teplot mezi spodní a svrchní vrstvou. V případě, že rozdíl teplot je velký, dochází k převaze vztlakových sil a teplo je přenášeno především konvekcí. K nerovnovážným dějům dochází při zahřívání kapaliny a následném konvekčním proudění uvnitř kapaliny. Jedná se o tzv. Rayleigh-Bénardovi konvekci, kterou lze popsat pomocí systému nelineárních rovnic, vyjadřujících v podstatě bilanci hmotnosti, hybnosti a energie. Jedná se o základní rovnice hydrodynamiky, tj. Navierova-Stokesova rovnice, rovnice kontinuity a rovnice vedení tepla:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \beta T \\ \nabla \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \kappa \nabla^2 T - (\mathbf{v} \nabla) T + Q\end{aligned}\tag{12}$$

kde \mathbf{v} je lokální rychlost toku, ν je kinematická viskozita, ρ_0 je objemová střední hustota tekutiny, p je tlak, T je termodynamická teplota. Sčítanec $\mathbf{g} \beta T$ je výslednicí vztlakové a gravitační síly působící na jednotku hmotnosti; \mathbf{g} je tíhové zrychlení, κ je koeficient tepelné vodivosti, β je tepelná roztažnost a Q je tepelná funkce. Využijeme Boussinesqovu aproximaci, která představuje zjednodušení příslušných modelových rovnic, kdy se změny hustoty vzduchu uvažují pouze v tom členu rovnic, který představuje archimedovské vztlakové síly, zatímco jinak se hustota vzduchu považuje za konstantní veličinu. Řešením této problematiky se zabýval Saltzman (1962), po kterém jsou pojmenovány rovnice. Tyto rovnice pocházejí ze studia kapaliny konstantní hloubky H s teplotním rozdílem horní a

spodní vrstvy $\square T$ a lineární změnou teploty. V případě, že nedochází ke změnám v ose y ; mají Saltzmanovy rovnice tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + g \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta &= -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \nabla^2 \theta\end{aligned}\quad (13)$$

kde ψ je proudová funkce pro dvoudimenzionální rychlost proudění, θ je teplotní odchylka od rovnovážného stavu a $g, \varepsilon, \nu, \kappa$ jsou konstanty gravitačního zrychlení, koeficientu teplotní roztažnosti, kinetické viskozity a tepelné vodivosti.

Řešení ve tvaru Fourierovy řady v bezrozměrných jednotkách (Saltzman, 1962):

$$\begin{aligned}\psi^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp \left[2\pi H i \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right] \\ \theta^*(x^*, z^*, t^*) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp \left[2\pi H i \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^* \right) \right]\end{aligned}\quad (14)$$

Lorenz (1963) vychází ze Saltzmanových rovnic konvekce a uvažuje pouze první členy řešení Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= -\sigma(X + Y) \\ \frac{\partial Y}{\partial \tau} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau} &= -XY - bZ\end{aligned}\quad (15)$$

V systému se nacházejí tři časové proměnné: X odpovídá intenzitě konvektivních toků (je úměrná úhlové rychlosti rotace konvektivní buňky v tekutině), Y udává teplotní rozdíl mezi stoupající a klesající kapalinou a Z je úměrná odchylce vertikálního teplotního profilu od linearity. Proměnné X a Y odpovídají členům Fourierova rozvoje teploty.

Kde τ je bezrozměrný čas, $\sigma = \nu / \kappa$ je Prandtlovo číslo, b udává míru disipace a r je redukované Rayleighovo číslo R_a , které je vztaženo ke své kritické hodnotě R_{ak} .

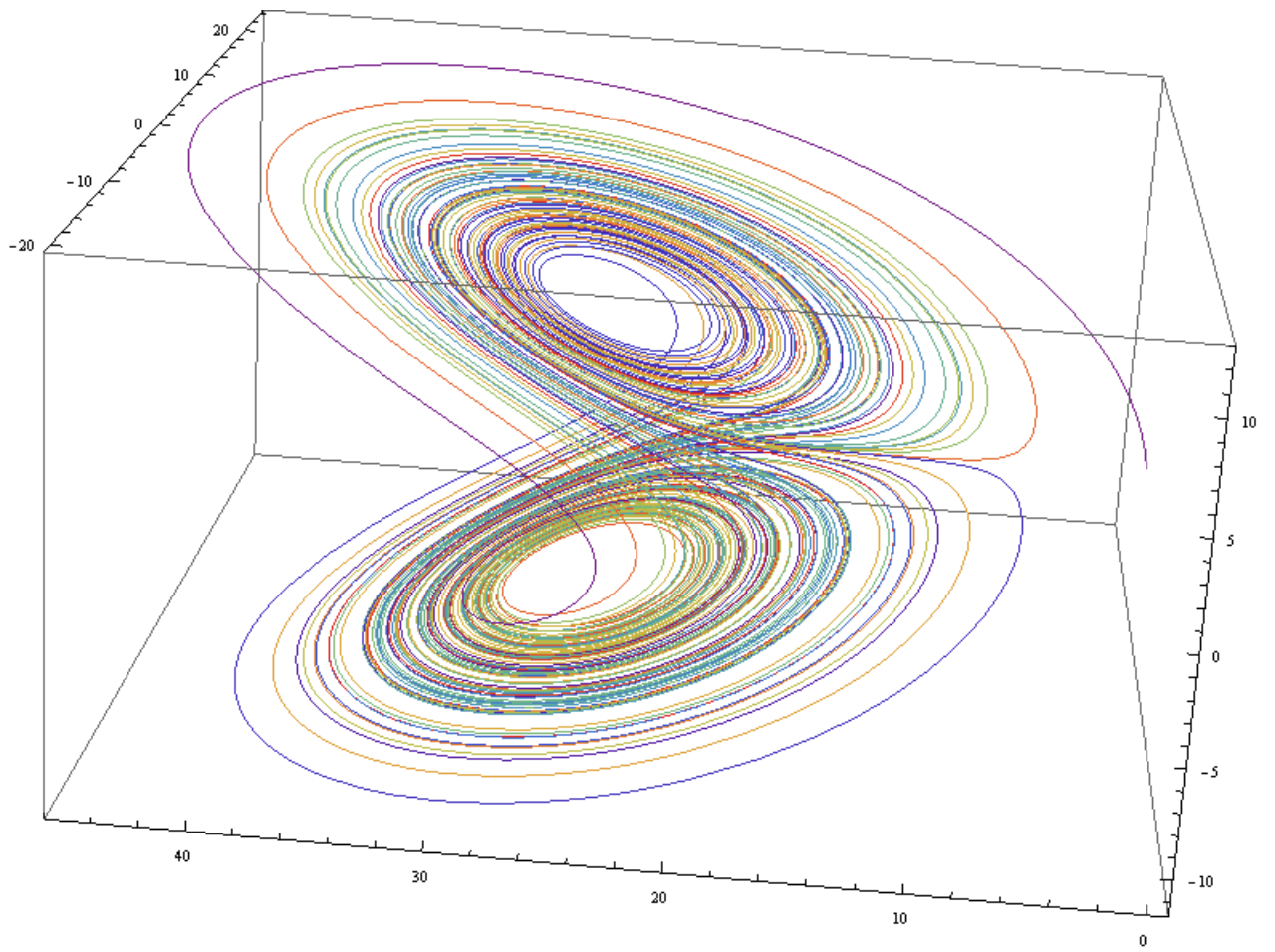
$$\tau = \frac{\pi^2 \left(1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2\right) \kappa}{H^2} t$$

$$b = \frac{4}{1 + \left(\frac{2H}{L}\right)^2} \tag{16}$$

$$R_a = \frac{\beta g H^3 \Delta T}{k \nu}$$

Lorenzův matematický model zachycuje základní vlastnosti konvektivního proudění v atmosféře, která je zahřívána povrchem ze spodu a ochlazována svrchu. Vzniká tak rotační pohyb částic vzduchu, kdy ohřátá částice stoupá, tím se ochlazuje a začne klesat, aby se opět zahřála a stoupala. Tento jev je známý jako Rayleighova-Bénárdova nestabilita (Uruba, 2009).

Chování Lorenzova systému je velice složité (Obr. 6). Obvyklé parametry pro atmosférické podmínky se uvažují $\sigma=10$ a $b=83$ a parametr r je proměnný. Pro hodnoty $r < 1$ se ustálí stacionární stav bez konvekce. Všechny trajektorie ve stavovém prostoru skončí v pevném nulovém bodě bez ohledu na počáteční podmínky. V intervalu hodnot $1 < r < 1,346$ začne nulový bod ztrácet stabilitu a odpuzovat trajektorie, ale v systému jsou nová stacionární řešení (pevné body) C^+ a C^- . V tomto případě se jedná o ustálenou konvekci s neproměnnými konvektivními útvary. V intervalu hodnot $1,346 < r < 24,74$ se v systému vyskytují tzv. spirální pevné body. Pro hodnoty $r > 24,74$ se objevuje legendární chaotický atraktor ve tvaru motýlích křídel. Nutno poznamenat, že i v oblasti pro hodnoty $r > 24,74$ dochází k výskytu periodických oblastí např. pro $r = 475$.



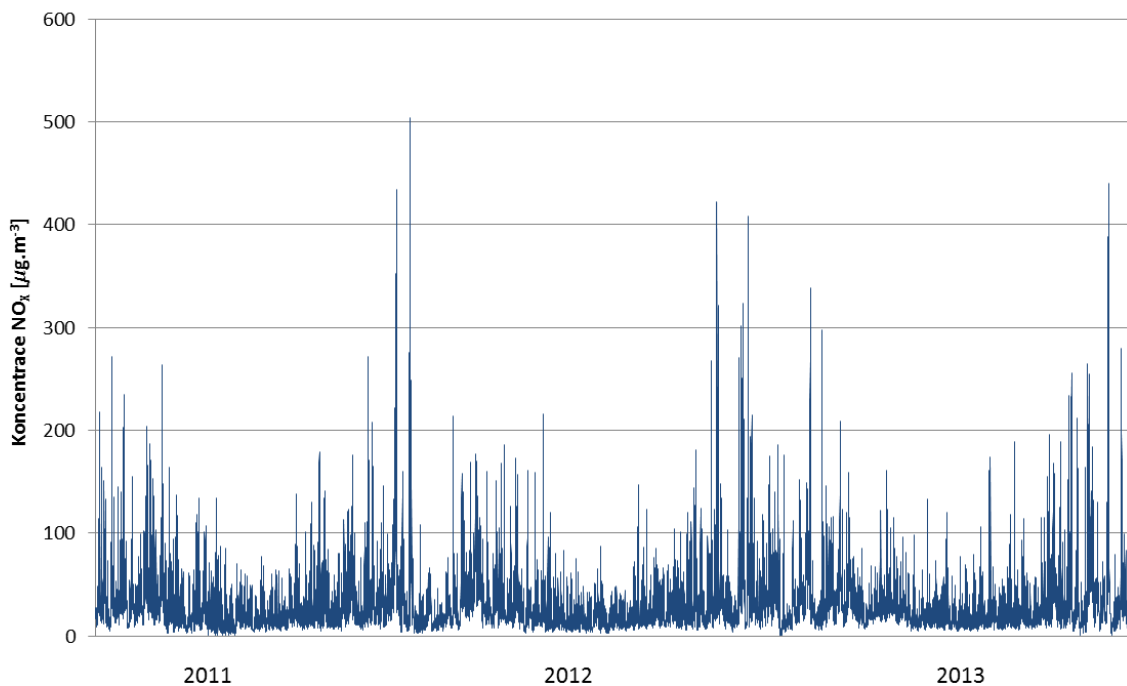
Obr. 6. Lorenzův atraktor

4.1 Koncentrace NO_x

Pod označením NO_x rozumíme oxidy dusíku. Mezi nejčastěji se vyskytující patří: oxid dusnatý (NO, bezbarvý plyn bez zápachu) a oxid dusičitý (NO₂, červenohnědý plyn štiplavého zápachu). Více než 90 % z celkových oxidů dusíku ve venkovním ovzduší je emitováno ve formě NO. NO₂ vzniká relativně rychle reakcí NO s přízemním ozonem nebo s volnými radikály (ČHMÚ, 2013). Emise oxidu dusíku jsou dnes velmi závažným problémem hlavně díky tomu, že jsou spojeny se spalováním i ušlechtilých paliv i biomasy. Emise oxidu dusíku mají navíc v dnešní době rostoucí charakter. Primárním zdrojem (vytvářejícím až 55% antropogenních NO_x) jsou i přes využívání katalyzátorů motorová vozidla. Při spalování ušlechtilých paliv v motorových vozidlech je dosahováno vysoké teploty hoření, a proto zde dochází k oxidaci vzdušného dusíku (N₂) na takzvané vysokoteplotní NO_x. NO_x jsou prekurzorem řady škodlivých sekundárních polutantů, především kyseliny dusičné a troposférického ozonu (WHO, 2003). Velmi závažným problémem je negativní synergetické působení NO_x s dalšími polutanty především PM a O₃ (WHO, 2003).

Dusík je jedním z biogenních prvků, tudíž je nezbytný pro život. V zemědělství je dodáván do půdy formou dusičnanů v umělých hnojivech. Vysoké koncentrace NO_x představují rizika pro růst rostlin i zdraví živočichů. NO_x reagují v atmosféře s vodou za vzniku kyseliny dusičné, která je jednou z hlavních složek kyselých dešťů, které mají negativní vliv na vegetaci a stavby. Množství dusíku, které se atmosférickou depozicí dostává do půdy, je v současné době srovnatelné s množstvím pocházejícím z průmyslových hnojiv. Dusičnany, které jsou potom v zeminách a vodách přítomny, sice působí příznivě na růst rostlin, avšak při vyšších koncentracích může docházet i k úhynu ryb a nežádoucímu nárůstu vodních rostlin (tzv. eutrofizace vod) (IRZ, 2015).

Analyzovaná data hodinových koncentrací NO_x jsou zobrazena na Obr. 8 a základní popisná charakteristika na Obr. 9. Nejnižší koncentrace NO_x jsou v letních měsících a lze vytušit jistý roční cyklus. Data obsahují, po vynechání chybějících hodnot, 24 698 hodnot. Chybějící hodnoty tvoří cca 6,2 % datového souboru, což průměrně odpovídá zhruba 2 chybějícím hodnotám za 3 dny. Průměrná hodnota koncentrací NO_x upraveného souboru je 30,25 μg.m⁻³ s poměrně vysokým rozptylem.



Obr. 8: Koncentrace NO_x Praha - Libuš

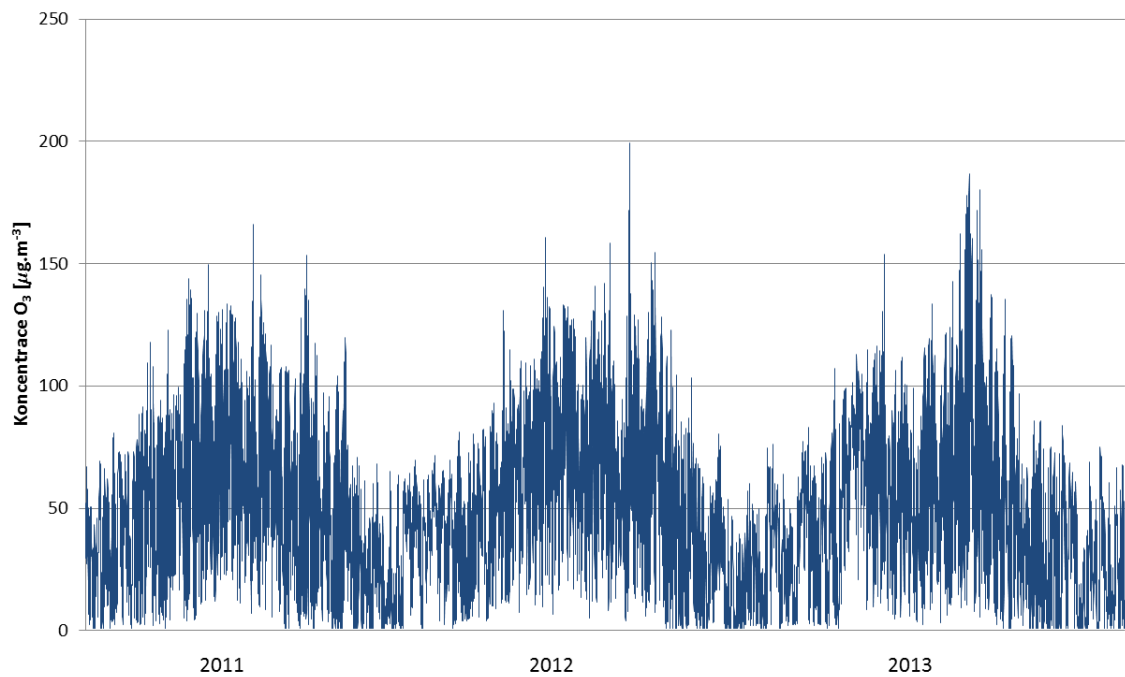
Obecná statistika	
Počet hodnot	24 696
Minimum	0,96
Maximum	504,24
Průměr	30,25
Rozptyl	938,53
Standartní odchylka	30,64
Šikmost	4,06
Špičatost	27,02

Obr. 9: Obecná charakteristika datového souboru koncentrací NO_x

4.2 Koncentrace O₃

Ozon O₃ je za normálních podmínek neviditelný plyn v obvyklých koncentracích v ovzduší jsou pod čichovým prahem člověka. S ozonem se můžeme setkat jednak ve stratosféře, kde tvoří tzv. ozonovou vrstvu, která absorbuje škodlivé ultrafialové záření a chrání život na Zemi před zhoubnými účinky biologicky aktivního ultrafialového záření Slunce. Dále pak v troposféře kde je považován za znečišťující látku, protože jako silné oxidační činidlo napadá dýchací cesty a ochranné komponenty oka, má škodlivé účinky na flóru a faunu (ČHMÚ, 2013). V této práci se analyzují koncentrace troposférického ozonu. Troposférický ozon se nazývá sekundárním polutantem, neboť nevzniká přímo, ale je výsledkem poměrně komplikovaného mechanismu, ve kterém hrají klíčovou roli oxidy dusíku a tzv. volné peroxilové radikály. Peroxilové radikály vznikají mimo jiné při rozkladu těkavých organických látek (VOC), které se do ovzduší dostávají v současné době především z antropogenních zdrojů a to zejména dopravy. Troposférický ozon je hlavní součástí tzv. letního smogu. Koncentrace přízemního ozonu jsou charakteristické ročním i denním chodem. Výrazně vyšší koncentrace přízemního ozonu se vyskytují v teplé polovině roku v odpoledních hodinách a jsou obvykle spojeny s vysokými teplotami, intenzivním slunečním zářením a malými rychlostmi větru. Epizody zvýšených koncentrací O₃ se vyskytují od dubna do poloviny září, tedy právě v době vegetačního období (ČHMÚ, 2013). Do rostlin proniká ozon otevřenými průduchy v listech nebo jehlicích. Díky své vysoké reaktivitě napadá buněčné stěny a jeho účinky se projevují výsevem světlých skvrn a v pozdějším stadiu bodovým až plošným rozpadem buněčné tkáně. Ozon tak narušuje procesy dýchání a fotosyntézy, snižuje výnosy zemědělských plodin a způsobuje poškození lesů. Velmi citlivé jsou na působení ozonu zejména pšenice, ječmen, žito, brambory a jetel, z lesních stromů pak modřín, borovice a buk (ČHMÚ, 2013).

Analyzovaná data hodinových koncentrací O₃ jsou zobrazena na Obr. 10 a základní popisná charakteristika na Obr. 11. Vidíme výrazný roční cyklus koncentrací O₃, kde výrazně vyšší koncentrace přízemního ozonu se vyskytují v teplé polovině roku. Data obsahují, po vynechání chybějících hodnot, 24 786 hodnot. Chybějící hodnoty tvoří cca 5,4 % datového souboru, což průměrně odpovídá zhruba 5 chybějícím hodnotám za 4 dny. Průměrná hodnota koncentrací O₃ upraveného souboru je 48,84 $\mu\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ s poměrně vysokým rozptylem.



Obr. 10: Koncentrace O₃ Praha - Libuš

Obecná statistika	
Počet hodnot	24 786
Minimum	1,00
Maximum	199,50
Průměr	48,84
Rozptyl	1021,17
Standartní odchylka	31,96
Šikmost	0,61
Špičatost	0,05

Obr. 11: Obecná charakteristika datového souboru koncentrací O₃

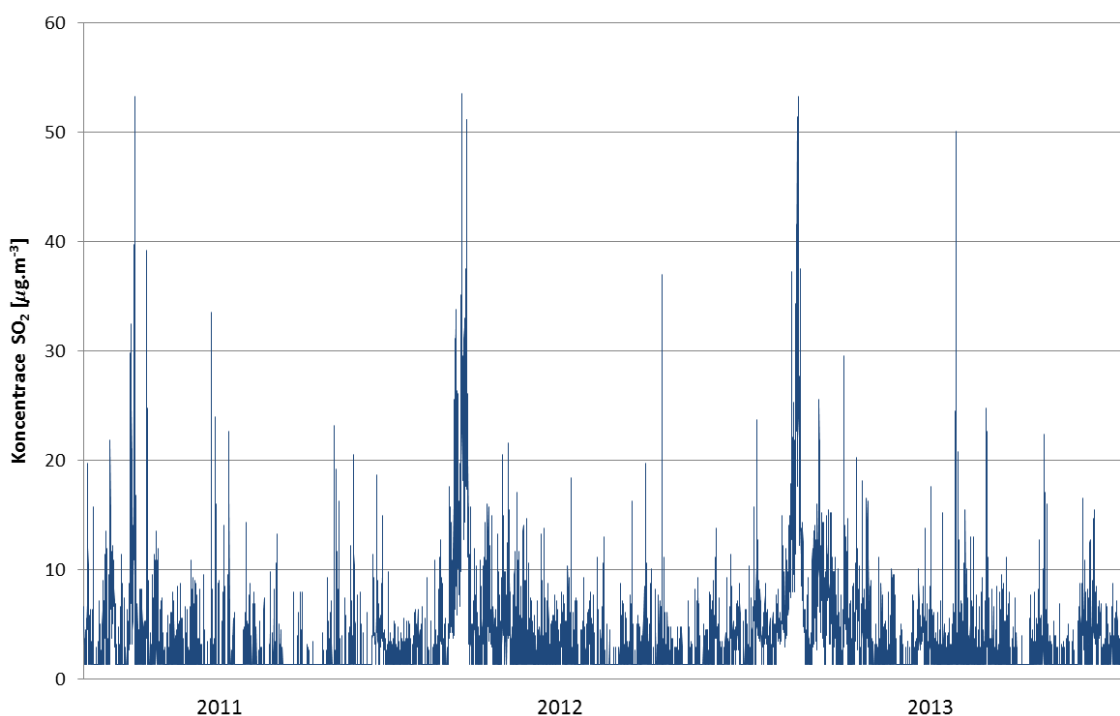
4.3 Koncentrace SO₂

Oxid siřičitý SO₂ je bezbarvý, štiplavě páchnoucí, jedovatý plyn. SO₂ se dostává do atmosféry jak přirozeným způsobem např. vulkanickou činností a požáry, tak v důsledku antropogenní činnosti. Nejvýznamnějším zdrojem je spalování paliv obsahující síru S. Jedná se především o fosilní paliva (uhlí, ropa), ale také o biomasu, která síru jako biogenní prvek obsahuje. Mechanismus škodlivého působení jak na životní prostředí, tak na zdraví člověka je u SO₂ je většinou podobný jako u NO_x, proto je řadíme do stejné skupiny polutantů. SO₂ je v atmosféře oxidován (fotochemicky nebo katalyticky) za vzniku kyselinotvorného oxidu SO₃, ze kterého po následné hydrolýze s atmosférickou vlhkostí vzniká kyselina sírová. Rychlost oxidace závisí na povětrnostních podmínkách, teplotě, slunečním svitu, přítomnosti katalyzujících částic atd. Kyselina sírová může reagovat s alkalickými částicemi prašného aerosolu za vzniku síranů. Síraný se postupně usazují na zemský povrch nebo jsou z ovzduší vymývány srážkami. Při nedostatku alkalických částic v ovzduší dochází k výraznému okyselení srážkových vod. Tímto způsobem oxidy síry společně s oxidy dusíku tvoří takzvané kyselé deště. Ty pak mohou být větrem transportovány na velké vzdálenosti a způsobit značná poškození lesních porostů i průmyslových plodin, uvolňují z půdy kovové ionty, poškozují mikroorganismy, znehodnocují vodu a mohou způsobit úhyn ryb (IRZ, 2015).

SO₂ se z velké míry podílí na tvorbě smogových situací londýnského typu. Emise SO₂ představují v dnešním průmyslovém světě značný problém. V ČR se ale situace zlepšuje. K výraznému nárůstu emisí škodlivých látek do ovzduší dochází již od 50. let 20. století, ke kterému docházelo zpočátku zejména díky orientaci tehdejší ekonomiky na těžký průmysl, jehož energetické potřeby byly pokrývány spalováním uhlí. Zatímco emise SO₂ v 50. letech byly 1 mil. tun/rok, v 80. letech to byly již 3 mil. tun/rok. V 90. letech pak nastal prudký pokles emisí v důsledku kombinace několika faktorů, mezi něž patřily např. nová environmentální legislativa, masivní investice do ochrany životního prostředí, především ovzduší, značný útlum těžkého průmyslu, ale i ústup domácností od vytápění pevnými palivy v důsledku tehdy probíhající plynofikace velké části obcí (Louda et al., 2013).

Značně toxický je oxid siřičitý pro rostliny, neboť reaguje s chlorofylem a narušuje tak fotosyntézu. Působí dráždivě zejména na horní cesty dýchací, dostavuje se kašel, v těžších případech může vzniknout až edém plic. Menší koncentrace vyvolávají záněty průdušek a astma. Chronická expozice oxidu siřičitému negativně ovlivňuje krevtvorbu, způsobuje rozedmu plic, poškozují srdeční sval, negativně působí na menstruační cyklus.

Analyzovaná data hodinových koncentrací SO₂ jsou zobrazena na Obr. 12 a základní popisná charakteristika na Obr. 13. U časové řady koncentrací SO₂ není vidět výrazný cyklus. Dá se říci, že maximální hodnoty jsou akumulovány na přelomu roku. Data obsahují, po vynechání chybějících hodnot, 24 712 hodnot. Chybějící hodnoty tvoří cca 5,5 % datového souboru, což průměrně odpovídá zhruba 4 chybějícím hodnotám za 3 dny. Průměrná hodnota koncentrací SO₂ upraveného souboru je 3,5 μg.m⁻³ s poměrně vysokým rozptylem.



Obr. 12: Koncentrace SO₂ Praha - Libuš

Obecná statistika	
Počet hodnot	24 712
Minimum	1,33
Maximum	53,53
Průměr	3,50
Rozptyl	17,51
Standartní odchylka	4,18
Šikmost	4,31
Špičatost	27,56

Obr. 13: Obecná charakteristika datového souboru koncentrací SO₂

5 Chaotické deskriptory

Cílem této kapitoly je uvést základní chaotické deskriptory vhodné k posouzení míry ztráty informace, nelinearity a chaotičnosti. Zároveň popsat algoritmy využívané pro samotný odhad těchto deskriptorů.

5.1 Rekonstrukce fázového prostoru

Užitečné informace o určité časové řadě nám dá její zobrazení ve fázovém prostoru. Toto zobrazení nám může ukázat skrytou podstatu dané časové řady. Fázový prostor je prostor všech možných fyzikálních stavů daného systému. To znamená, že každý bod fázového prostoru jednoznačně určuje stav uvažovaného systému. Každým bodem fázového prostoru tedy prochází jedna trajektorie popisující časový vývoj daného systému, který se nachází v daném bodě fázového prostoru. Dynamika systému může být vyšetřována dynamikou pohybu bodů ve fázovém prostoru bodů (Abarbanel et al., 1993). Všechny body fázového prostoru tedy určují všechny možné stavy, do kterých se systém může dostat. Je to tedy jakási vizualizace vývoje systému. Pokud je čas spojitý, vývojem systému vzniká ve fázovém prostoru křivka. V případě diskrétního času mluvíme o množině bodů. Křivka ve fázovém prostoru začne po určitém čase zvyrazňovat charakteristickou strukturu, která se nazývá atraktor. Pokud je atraktorem bod nebo uzavřená křivka, lze předpovědět chování tohoto systému na libovolně dlouhou dobu. Křivka se nazývá uzavřená, pokud je uzavřený i interval $I \in \mathbb{R} <a, b>$ a $k(a)=k(b)$, kde k je zobrazení z I do daného prostoru. Chaotické systémy vytvářejí chaotický atraktor, který je neuzavřený. Pro rekonstrukci fázového prostoru se nejčastěji využívá metody zpoždění vycházející z Takensovy věty (Takens, 1981).

Hlavním cílem nelineární analýzy časových řad je určit, zda je daná časová řada deterministické povahy. Pokud ano, potom jsou vhodné následující otázky: Jaký je rozměr fázového prostoru daného datového souboru? Je tento datový soubor chaotický? Klíč k odpovědi na tyto otázky, je metoda zvaná rekonstrukce fázového prostoru, která vychází z Takensovi věty (Takens, 1981). Takensova věta transformuje problém predikce z extrapolace v čase do interpolace ve fázovém prostoru. Takens ve svých úvahách došel k závěru, že lze z dané časové řady zjistit typické vlastnosti atraktoru tohoto systému, a případně tuto rekonstrukci použít k předpovědím. Základní myšlenkou této úvahy je, že charakteristické vlastnosti atraktoru jsou nezávislé na volbě fázového prostoru. Každý bod atraktoru je možné popsat nejméně d nezávisle proměnnými.

Nechť je dána časová řada x_1, x_2, \dots, x_N , která je vložena do m -dimenzionálního fázového prostoru skrze stavový vektor. Bod ve fázovém prostoru je dán následovně:

$$Y_n = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-1)\tau} \quad n = 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau, \quad (17)$$

kde τ je časové zpoždění a m dimenze vnoření. Veličina τ nám udává časovou vzdálenost mezi sousedními prvky a m udává celkovou dimenzi atraktoru. Veličiny τ a m jsou tedy parametry vnoření, na kterém je rekonstrukce fázového prostoru založena (Takens, 1985).

5.1.1 Optimální hodnota časového zpoždění

Existují různé metodiky stanovení optimální hodnoty časového zpoždění (Horák, 2003) a stanovená hodnota má přímý vliv na následnou rekonstrukci fázového prostoru. Pokud je stanovená hodnota příliš malá, rozdíl mezi jednotlivými stavy rekonstruovaného prostoru bude nepatrný a význam informací získaných tímto způsobem je pak malý. Naopak, pokud stanovená hodnota je příliš velká, může se stát, že jednotlivé stavy rekonstruovaného systému budou vnímány jako nezávislé. Neboli, volbou dlouhé časové vzdálenosti mezi jednotlivými stavy systému se ztratí souvislost jeho dynamiky a jako důsledek se takto rekonstruovaná trajektorie jeví jako stochastický proces (Kodera, 2009). To je důležité zejména pro chaotické systémy, které jsou vnitřně nepředvídatelné, čímž ztrácejí v průběhu času informaci o počátečním stavu (Kodba, 2005).

V současné době se jeví jako nejvýhodnější metody založené na teorii informace (Shannon, 1948). Informace je schopnost organizovat, nebo v organizovaném stavu udržovat (Beneš, 2010). Teorie informace je vychází z pravděpodobnostního přístupu. Nechť existují dvě množiny měřených hodnot $A = \{a_i\}$ a $B = \{b_j\}$. Množství informace, které získáme o měření b_j prostřednictvím měření a_i je dána vztahem

$$I_{AB}(a_i, b_j) = \ln \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)}, \quad (18)$$

kde $P_A(a_i)$ je pravděpodobnost pozorování hodnoty a_i z množiny A a obdobně $P_B(b_j)$ je pravděpodobnost pozorování hodnoty b_j z množiny B a $P_{AB}(a_i, b_j)$ je sdružená pravděpodobnost současného výskytu a_i i b_j .

Zprůměrováním tohoto výrazu přes všechna měření a_i a b_j získáme tzv. průměrnou míru množství vzájemné informace mezi množinami měření A a B :

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)}, \quad (19)$$

Analogicky získáme míru vzájemné informace mezi časovou řadou a časovou řadou posunutou o čas τ jako funkci tohoto časového posunutí τ , kterou označíme $I(\tau)$.

Konkrétní metodiku určování optimální hodnoty časového zpoždění vyvinuli Fraser et Swinney (1986). Necht' je dána časová řada $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$. Následně nalezneme minimální x_{min} a maximální x_{max} hodnotu této řady. Absolutní hodnota jejich rozdílu $|x_{max} - x_{min}|$ rozdělíme do j stejně velkých intervalů, kde j je dostatečně velké celé číslo. Fraser et Swinney (1986) následně spočítají míru vzájemné informace

$$I(\tau) = -\sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{h,k}(\tau) \ln \frac{P_{h,k}(\tau)}{P_h P_k}, \quad (20)$$

kde P_h a P_k označují pravděpodobnost výskytu hodnoty z množiny h a k , respektive, a $P_{h,k}(\tau)$ je sdružená pravděpodobnost současného výskytu x_i a $x_{i+\tau}$. Uvažujme následující limitní případ. V případě chaotického chování platí, že $I(\tau) \rightarrow 0$ a $(\tau) \rightarrow \infty$, protože veličiny x_i a $x_{i+\tau}$ již nejsou korelované a tedy $P_{h,k}(\tau)$ je rovna nule. Obecně nás tedy zajímá minimum funkce $I(\tau)$. První minimum $I(\tau)$ obsahuje největší množství informace, aniž bychom úplně ztratili korelaci mezi nimi. Z těchto důvodů Fraser et Swinney (1986) navrhuje použít první minimum $I(\tau)$ jako optimální hodnotu časového zpoždění. Je nutné však poznamenat, že tento postup není univerzální a v některých případech selhává viz. Martinerie et al. (1992).

5.1.2 Optimální dimenze vnoření

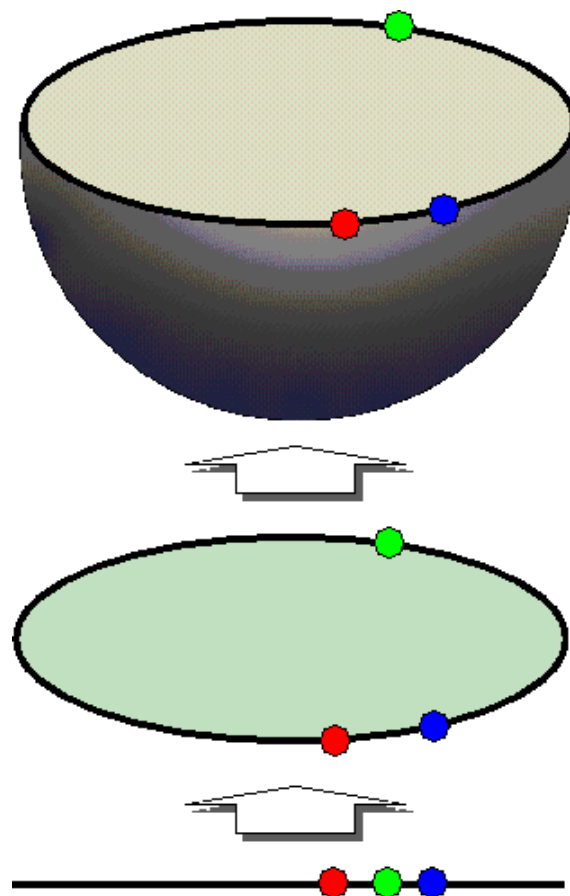
Vhodná dimenze vnoření m má zásadní význam na zobrazení atraktoru ve fázovém prostoru. Na problém se můžeme dívat také tak, že děláme projekci atraktoru o dimenzi d do prostoru o dimenzi m . Pokud hodnota m je dostatečně velká, je rekonstruovaná trajektorie vložení původní trajektorie. U volby dimenze vnoření platí postačující, ale nikoliv nutná podmínka $m > 2D_C$ (Raidl, 2015).

U chaotických systémů by měla mít vhodná dimenze vnoření poměrně ostrou dolní hranici, zhruba odpovídající dimenzi atraktoru dynamického systému. Dalším zvyšováním dimenze vnoření by se získané výsledky neměly moc měnit, respektive by se měly velmi pomalu zhoršovat v důsledku přítomnosti šumu a numerických chyb, příliš velká dimenze vnoření má také nevýhodu větší časové náročnosti výpočtů.

Existuje celá řada způsobů určení vhodné dimenze vnoření. Asi nejvhodnější se jeví metoda nejbližších falešných sousedů (Kennel, et al., 1992). Metoda nejbližších falešných sousedů (FNN) je založena na projekci trajektorie systému z originálního fázového prostoru

do prostoru s nižší dimenzí, při kterém dochází k tzv. překřížení této trajektorie se sebou samou. Kvůli tomuto překřížení vznikají tzv. falešní sousedé. Při zvyšování dimenze vnoření se počet těchto falešných sousedů postupně snižuje. Zcela vymizí v případě, že dimenze vnoření použitá při rekonstrukci je rovna skutečné dimenzi originálního fázového prostoru. Skuteční sousedé jsou blízko sebe při jakékoli dimenzi vnoření, samozřejmě i v původním fázovém prostoru. Metoda nejbližších falešných sousedů je potom založena na detekci jejich počtu při zvýšení dimenze vnoření (Kodera, et al., 2009).

Jednoduchá demonstrace metody nejbližších falešných sousedů je podle Bertenthal et al. (2015) uvedena na následujícím obrázku. Červené a zelené tečky se jeví jako nejbližší sousedé při promítnutí do jednoho rozměrného prostoru, ale při promítnutí ve vyšší dimenzi jsou již oba body (červený a zelený) značně vzdáleny. Naopak, červené a modré tečky jsou blízcí sousedé ve dvourozměrném prostoru a stále jsou blízcí sousedé i v trojrozměrném prostoru. A tak je možné zkoumat všechny body v závislosti na zvyšující se dimenzi, dokud se objevují falešní sousedé.



Obr.14. Schéma metody falešných nejbližších sousedů. Zdroj:(Bertenthal et al., 2015).

Necht' je dán rekonstruovaný stav v m -dimenzionálním prostoru:

$$y_m = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-2)\tau}, x_{n-(m-1)\tau} \quad (21)$$

K tomuto stavu je pak následující nejbližší soused:

$$y_m^{NN} = x_n^{NN}, x_{n-\tau}^{NN}, \dots, x_{n-(m-2)\tau}^{NN}, x_{n-(m-1)\tau}^{NN} \quad (22)$$

Pokud je tento nejbližší soused sousem falešným, potom při zvýšení dimenze vnoření dojde ke zvětšení vzdálenosti mezi těmito stavy natolik, že již nelze je považovat za sousedy. Zvýšení dimenze vnoření o jednu se souřadnice těchto dvou stavů změní na:

$$y_{m+1} = x_n, x_{n-\tau}, \dots, x_{n-(m-1)\tau}, x_{n-m\tau} \quad (23)$$

$$y_{m+1}^{NN} = x_n^{NN}, x_{n-\tau}^{NN}, \dots, x_{n-(m-1)\tau}^{NN}, x_{n-m\tau}^{NN} \quad (24)$$

Dále bude zkoumána vzdálenost mezi těmito stavy. Pro účely této práce je kalkulována euklidovská vzdálenost. Euklidovská vzdálenost těchto dvou stavů ve fázovém prostoru o dimenzi vnoření m je:

$$R_m = \|y_m - y_m^{NN}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{n-(i-1)\tau} - x_{n-(i-1)\tau}^{NN})^2} \quad (25)$$

Euklidovská vzdálenost těchto dvou stavů ve fázovém prostoru o dimenzi vnoření $m+1$ je:

$$R_{m+1} = \|y_{m+1} - y_{m+1}^{NN}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} (x_{n-(i-1)\tau} - x_{n-(i-1)\tau}^{NN})^2} \quad (26)$$

$$R_{m+1}^2 = R_m^2 + (x_{n-m\tau} - x_{n-m\tau}^{NN})^2 \quad (27)$$

Dále definujeme poměr r :

$$r = \sqrt{\frac{R_{m+1}^2 - R_m^2}{R_m^2}} = \frac{|x_{n-m\tau} - x_{n-m\tau}^{NN}|}{R_m} \quad (28)$$

Pokud hodnota poměru r překročí jistou prahovou hodnotu, budou sousedé považováni za falešné sousedy. Za dostatečnou dimenzi vnoření se bere hodnota, která snižuje počet falešných sousedu k nule.

5.2 Invarianty systému

Při analýze dynamických systémů je důležité určit invarianty systémů. Pro lineární systémy je invariantem Fourierova frekvence. Pro chaotické systémy je typická širokopásmová Fourierova frekvence, která je pro popis systému nevhodná. Z tohoto důvodu jsou pro popis chaotických systému nejčastěji používány dvě základní charakteristiky a to fraktální dimenze a Lyapunov exponenty.

5.2.1 Fraktální dimenze

Fraktální dimenze jsou charakteristiky plynoucí z geometrie atraktoru. Pojem dimenze je obvykle chápána v souvislosti s Euklidovským prostorem. Zjednodušeně řečeno, dimenze označuje počet parametrů, kterými je možné každý vektor daného lineárního vektorového prostoru jednoznačně popsat. Dimenzi lineárního vektorového prostoru lze definovat jako počet prvků báze. Např. dimenze přímky je 1, dimenze roviny je 2, dimenze prostoru je 3 atd.

5.2.1.1 Kapacitní dimenze

Jedním z příkladů fraktální dimenze je kapacitní dimenze. Kapacitní dimenze dané množiny je zobecněním pojmu dimenze následujícím způsobem (Pokorný, 2008): Necht' $N(\varepsilon)$ je nejmenší počet hyperkrychliček o hraně ε nutných pro pokrytí dané množiny. Např. pro pokrytí jednotkové úsečky úsečkami o délce ε je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (29)$$

těchto malých úseček. Říkáme, že úsečka má dimenzi 1. Pro pokrytí jednotkového čtverce malými čtverečky o délce hrany ε je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2, \quad (30)$$

těchto malých čtverečků. Říkáme, že čtverec má dimenzi 2. Pro pokrytí jednotkové krychle malými krychličkami o délce hrany ε je třeba alespoň

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3, \quad (31)$$

těchto malých krychliček. Říkáme, že krychle má dimenzi 3. Kapacitní dimenze je definována jako exponent ve vztahu mezi nutným počtem N malých hyperkrychliček o délce hrany ε a jejich hranou ε

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D = \varepsilon^{-D}, \quad (32)$$

tedy:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}, \quad (33)$$

Kapacitní dimenze je již reálné číslo. Neceločíselná dimenze je jednou z nutných, ale ne postačujících, podmínek chaotických systémů.

To ilustrují Mandelbrotovi (1967) úvahy o tom jakou má vlastně délku pobřeží Velké Británie. Mandelbrot navázal na práci Richardsona (1926), který se touto otázkou první vážně zabýval a po němž je pojmenován Richardsonův efekt, který je popsán níže. Na první pohled se může zdát, že se jedná o triviální otázku, ale při hlubším zamyšlení je problematika mnohem složitější, spjatá s měřítkem. Jedna z možných metod je změřit ostrov libovolným měřidlem. Výsledná hodnota však bude pouhou aproximací skutečné délky ostrova. Pokud celý proces zopakujeme s poloviční délkou měřidla, zjistíme, že výsledek je o něco větší. Podařilo se totiž zachytit mnohem více detailů. Teoreticky lze zmenšováním měřidla zachytit více detailů a tím dojít až k nekonečné délce jakéhokoliv geometricky nepravidelného ostrova.



Obr. 15. Závislost délky pobřežní linie na měřítku (Sande, 2015)

5.2.1.2 Korelační dimenze

Kapacitní dimenze je vhodná pro myšlenkovou abstrakci od euklidovské dimenze ke fraktální, ale její výpočet není vždy jednoduchý. Problém je především v konečném počtu dat,

nepřesnosti měření a chybou výpočtu. Proto byla vyvinuta metodika výpočtu korelační dimenze (Grassberger et Procaccia, 1983), která byla dále ještě zobecněna. Hlavní výhodou tohoto algoritmu je relativní přesnost výpočtu při omezeném množství dat.

Nechť je dán pro množinu dat délky M korelační integrál:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \Theta(\varepsilon - \|y_i - y_j\|) \quad (34)$$

kde Θ je Heavisidova funkce:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (35)$$

Pro výpočet je použita Euklidovská vzdálenost. Korelační integrál je spojen s korelační dimenzí pomocí mocninného zákona:

$$C(\varepsilon) \underset{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}}{\propto} \varepsilon^{D_C} \quad (36)$$

Pokud dolní limita existuje, můžeme definovat korelační dimenzi:

$$D_C = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \frac{\partial \ln(C(\varepsilon))}{\partial \ln(\varepsilon)} \quad (37)$$

Pro praktický výpočet je však tento vztah nevhodný, vzhledem k omezenému množství dostupných údajů. Z toho důvodu, se získává korelační dimenze vynesemím $\ln C(\varepsilon)$ vůči $\ln(\varepsilon)$. Sklon křivek pro různé dimenze vnoření m udávají různé hodnoty D_C . Tento proces je stochastický, pokud nedochází k saturaci korelační dimenze při zvyšování m . Saturace D_C od určité hodnoty m , ukazuje, že generující proces časové řady není náhodný, ale spíše deterministický (Hegger, et al., 1999).

Praktické určování korelační dimenze není jednoduchá věc, proto existuje mnoho přístupů jak ji odhadnout. Další možností je vynést do grafu na jedné ose poměr $\ln C(\varepsilon) / \ln(\varepsilon)$ vůči $\ln(\varepsilon)$. Korelační dimenze se určí ze střední oblasti, která by měla být vodorovná.

Korelační integrál $C(\varepsilon)$ je v podstatě průměrná hustota, kde je lokální hustota získaná pomocí skokového jádra transformace:

$$\Theta(\varepsilon - r) \quad (38)$$

Naskýtá se tedy možnost, zvláště pro malé množství dat, nahrazení skokového jádra jádrem spojitým o šířce ε . Vhodným kandidátem pro toto nahrazení je Gaussova funkce:

$$e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon^2}} \quad (39)$$

Takto upravený korelační integrál má stejné škálovací vlastnosti jako původní korelační integrál (Hegger, et al., 1999). Korelační integrál s Gaussovým jádrem se vypočítá z původního korelačního integrálu podle vztahu:

$$C_G(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^\infty d\tilde{\varepsilon} e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4\varepsilon^2}} \tilde{\varepsilon} C(\tilde{\varepsilon}) \quad (40)$$

Analogicky, pomocí mocninného zákona lze získat z korelačního integrálu s Gaussovým jádrem korelační dimenzi. Prakticky lze získat korelační dimenzi vynesáním $\ln C_G(\varepsilon)$ vůči $\ln(\varepsilon)$.

5.2.2 Entropie

Entropie nám obecně značí stupeň neuspořádanosti. Termín původně vznikl v termodynamice a následně ji Shannon (1948) uvedl i v informatice. Entropie nám udává množství informace potřebné k predikci další hodnoty při požadované přesnosti. Asi nejpopulárnější je Kolmogorov-Sinai entropie. Při analýzách časových řad je důležité určit vhodné časové zpoždění a dimenzi vnoření rekonstruovaného fázového prostoru. Závislost korelačního integrálu na dimenzi vnoření je dána výrazem:

$$C_q(m, \varepsilon) = \alpha m e^{-(q-1)h_q m} \varepsilon^{(q-1)D_q} \quad (41)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$
 $m \rightarrow \infty$

který definuje řád q entropie h_q . Entropie druhého řádu je nazývána Kolmogorov-Sinai entropie. Kolmogorov-Sinai entropie koresponduje s Shannonovou entropií:

$$h_S = k \sum_{i=1}^n p(i) \log p(i) \quad (42)$$

kde k je konstanta závislá na měřítku a $p(i)$ je pravděpodobnostní distribuce.

5.2.3 Ljapunovy exponenty

Ljapunovy exponenty jsou čísla, která popisují divergenci blízkých trajektorií. Zhruba řečeno, vzdálenost blízkých trajektorií je úměrná $e^{\lambda n}$ pro diskrétní čas, kde λ je Ljapunovův exponent (Pokorný, 2008). Kladné λ značí rozbíhání, záporné λ značí přibližování trajektorií. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky (pro zvolené počáteční podmínky a zvolené hodnoty parametrů).

Nechť je dán dynamický diskrétní systém:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (43)$$

lze časový vývoj odchylky vyjádřit diferenciálem:

$$dx_{n+1} = J(x_n)dx_n \quad (44)$$

kde

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (45)$$

je Jacobiho matice parciálních derivací zobrazení f . Potom

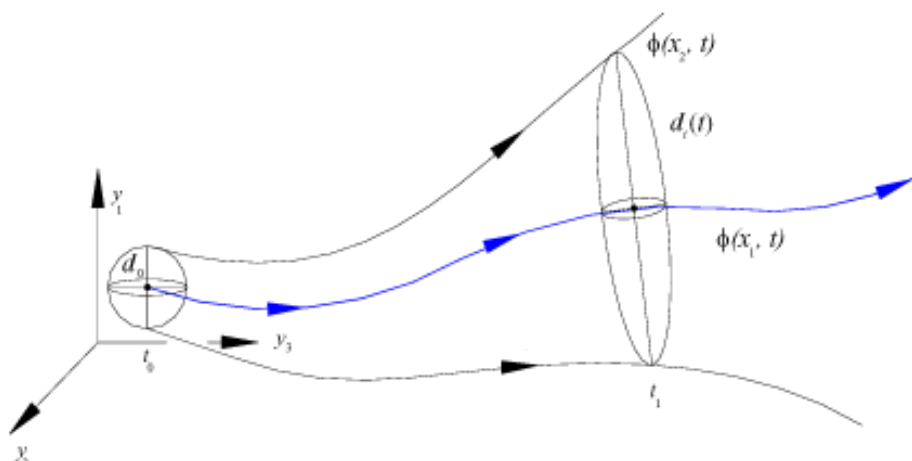
$$dx_n = \prod_{i=0}^{n-1} J(x_i)dx_0 \quad (46)$$

Tedy obrazem jednotkové koule je elipsoid. Ljapunovovy exponenty jsou střední hodnoty logaritmu rychlosti růstu jeho poloos

$$\lambda(dx_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_n}{dx_0} \right| \quad (47)$$

Ty závisí na volbě dx_0 . Pro různé volby dx_0 je možné získat tolik Ljapunovových exponentů, kolik je dimenze stavového prostoru (tolik poloos má výše zmíněný elipsoid).

$$dx_n \approx e^{\lambda n} |dx_0| \quad (48)$$



Obr. 16. Ljapunovy exponenty – schéma divergence blízkých trajektorií (Savi, 2005)

A největší Ljapunovův exponent je

$$\lambda_{\max} = \sup_{dx_0} \lambda(dx_0) \quad (49)$$

Největší Ljapunovův exponent hraje důležitou roli pro určení, zdali je systém chaotický nebo ne. Výpočet největšího Ljapunova exponentu přímo z definice je poměrně obtížné. Pro odhad největšího Ljapunova exponentu je použit Rosensteinův algoritmus (Rosenstein et al., 1993), který je obzvlášť výhodný pro malé množství dat.

$$\lambda(i) = \frac{1}{i\Delta t} \cdot \frac{1}{(M-i)} \sum_{j=1}^{M-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)} \quad (50)$$

kde Δt je vzorkovací čas, $d_j(i)$ je vzdálenost j -tého bodu k jeho nejbližšímu sousedovi po i časových krocích a M je počet rekonstruovaných bodů.

5.3 Hurstův exponent

Hurstův exponent H určuje míru chaotičnosti časové řady. Dokáže nejen rozlišit chaotickou a náhodnou časovou řadu, ale navíc je schopen u chaotické časové řady nalézt dlouhodobý paměťový cyklus („long-memory effects“). Hurstův exponent nabývá hodnot od 0 do 1 a stejně jako fraktální dimenze, uvádí charakter objektu. Časová řada se nazývá antipersistentní, pokud hodnota Hurstova exponentu je nižší než 0,5. Čistě stochastický proces má hodnotu 0,5. Pokud hodnota Hurstova exponentu je vyšší než 0,5 nazývá se časová řada persistentní a vykazuje dlouhodobou paměť. Hodnoty blízké se krajním bodům ukazují na deterministickou povahu procesu. Jinak řečeno, hodnota 0 prezentuje tzv. růžový šum; hodnota 0,5 Brownův šum a hodnota 1 černý šum. Tyto extrémní hodnoty se však většinou v reálných procesech nevyskytují. Uvádí se, že většina procesů v přírodě má charakter persistentních procesů. Což znamená, že je zde přítomna dlouhodobá paměť, která způsobuje trendy a cykly. Mandelbrot nazval tento jev Josefovým efektem podle biblické události. „Přichází sedm let hojnosti v celé egyptské zemi. Po nich však nastane hladu a všechna hojnost v egyptské zemi bude zapomenuta.“ Lze tedy předpokládat perzistenci i u časových řad koncentrací zkoumaných polutantů. Dále je možné se setkat v persistentních systémech s nenadálými skoky – diskontinuity, kdy se některá měnící se veličina může měnit téměř libovolnou rychlostí. Mandelbrot opět inspirovaný biblí nazval tyto katastrofy Noemovým jevem. Tyto dva jevy poukazují na skutečnost, že reálné procesy mají tendenci směřovat k setrvalému stavu, ale zároveň tyto tendence mohou velmi rychle zmizet a pak se zase objevit.

Pro popis procesů můžeme zavést pojem soběpodobnost. Soběpodobnost je charakteristika tvaru objektů, kdy libovolná část objektu má tvar, který je podobný tvaru téhož objektu při jiném rozlišení (zvětšení nebo zmenšení). Soběpodobný proces můžeme definovat následovně:

$$X(at) = a^H X(t) \quad (51)$$

kde a je kladná konstanta a H koeficient soběpodobnosti nabývajících hodnot 0 až 1. Označení H pak dal exponentu Mandelbrot (Mandelbrot et van Ness, 1968), kde ho definoval následovně:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y, t) dy = ct^{2H} \quad (52)$$

Dokonalá soběpodobnost se vyskytuje pouze v matematice u fraktálů. V přírodě, není soběpodobnost přesně geometrická, ale musí se chápat v pravděpodobnostním smyslu: změní-li se měřítko zobrazení, neboli škála, objekt zůstává v pravděpodobnostním smyslu totožný. Soběpodobnost nebo také soběpříbuznost nazýváme stav, kdy určitá část fraktálu je velmi podobná, ne však zcela shodná s původním motivem.

5.3.1 R/S analýza

R/S analýza je nejstarší a nejpoužívanější metoda výpočtu Hurstova exponentu, kterou vyvinul hydrolog Hurst (1951) při zkoumání průtoku na řece Nilu. Hurst se zabýval možností staveb na Nilu. Zcela zásadní je určit kapacitu přehrady, která je dána přítokem a odtokem. Hurst si povšimnul studiím historických dat, že tyto procesy nejsou náhodné. Zjistil, že po potopě větší než průměr, tak s velkou pravděpodobností bude následovat potopa ještě větší a opačně. Standartní dosud známé metody, žádnou souvislost neprokázaly. Z těchto důvodů vyvinul novou metodu, která je založena na normalizaci přepočteného rozpětí lokální směrodatnou odchylkou. Toto přeškálování umožňuje porovnávat hodnoty za různá období. Pro výpočet Hurstova exponentu je nutné odhadnout závislost přeškálovaného rozpětí na velikosti časového intervalu n pozorování. Je tedy nezbytné spočítat průměrné přepočtené rozpětí pro každou hodnotu n . Pro časovou řadu délky n , $Y=Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, je přeškálované rozpětí vypočteno následovně:

Řada odchylek od průměru daného úseku pro každý úsek je vypočtena následovně:

$$U_t = Y_t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, n \quad (53)$$

Řada akumulovaných odchylek pro každý úsek je vypočtena následovně:

$$V_t = \sum_{i=1}^n U_i \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

Přeškálované rozpětí R se spočítá pro každý úsek n , dle následujícího vztahu:

$$R(n) = \max(V_1, V_2, \dots, V_n) - \min(V_1, V_2, \dots, V_n) \quad (55)$$

Obdobně pro každý úsek n se spočítá směrodatná odchylka S :

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (56)$$

Očekávaná hodnota normalizovaného rozpětí směrodatnou odchylkou odpovídá mocninnému zákonu:

$$E\left[\frac{R(n)}{S(n)}\right] = Cn^H \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (57)$$

Mocninný zákon lze zjednodušeně definovat jako pravidlo, které vyjadřuje, jak závisí získaná informace na zvoleném měřítku. Odhad Hurstova exponentu je založen na využití regresní analýzy. Jednotlivé údaje $[R(n)/S(n)]$ jsou závislé proměnné a velikosti n nezávislé proměnné. Hurstův exponent může být interpretován jako sklon přímky získané pomocí metody nejmenších čtverců pro zlogaritmované hodnoty $[R(n)/S(n)]$ a n .

Odhad realizovaný pomocí R/S analýzy nemusí být věrohodný u heteroskedastické a antiperzistentní řady. Pro účely této práce je naopak tato metoda vhodná.

5.3.2 Disperzionální analýza

Disperzionální analýza je metoda výpočtu Hurstova exponentu, kterou poprvé představil Bassingthwaighte (1988). Podstata algoritmu spočívá v rozsekání dané časové řady na n nepřekrývajících se intervalů. Za každý interval je spočítán průměr a směrodatná odchylka (SD). Takto se spočítá směrodatná odchylka pro všechny možné délkové intervaly. Vztah mezi směrodatnou odchylkou a n je určen mocninným zákonem:

$$SD \propto n^{H-1} \quad (58)$$

6 Predikce

Obecně většinu vlastností chaotických systémů lze mnohem snadněji určit z rovnic, než z časových řad. Pokud by byly nalezeny odpovídající rovnice dané časové řady, dalo by se dokonce opustit analýzu časových řad a věnovat se analýze modelu. Ale tato situace je, kromě dobře kontrolovaných laboratorních experimentů, poměrně vzácná. Nicméně, analýzy samotného empirického modelu a analýzy dat generované tímto modelem, mohou otestovat konzistenci výsledků analýzy časových řad. V realitě, při vytváření modelu z dat, není záruka, že se výsledek blíží skutečné dynamice pozorovaného systému. Chaotické dynamické systémy obecně ukazují fenomén strukturální nestability. To znamená, že modely s velmi podobnými parametry mohou vykazovat kvalitativně odlišnou globální dynamiku.

V rekonstruovaném fázovém prostoru můžeme určit vztah mezi následujícím a současným stavem následovně:

$$X(t + T) = f(X(t)) \quad (59)$$

kde "T" představuje počet časových kroků dopředu předpovědi. Funkce f představuje aproximaci neznámého dynamického systému. Je ukázáno, že pro dostatečně velké hodnoty dimenze vnoření a jsou-li splněny některé další podmínky, zrekonstruovaná trajektorie má stejné topologické a geometrické vlastnosti jako fázový prostor trajektorie systému (Takens, 1981). To znamená, že pokud jsou splněny podmínky Takensovi věty, toto mapování zachycuje některé vlastnosti neznámého dynamického systému.

$$X(t + T) = f_p(X(t)) \quad (60)$$

Cílem je najít prediktor f_p , který by predikoval $x(t + T)$ na základě rekonstruované časové řady. V případě, že časová řada je chaotická, pak f_p je nutně nelineární. Existuje mnoho přístupů (lokálních i globálních) k nalezení vhodného prediktora f_p .

6.1 Lokální lineární modely

Tato skupina modelů zahrnuje případy, kdy dochází k lokální linearizaci. Podle Hegger et al. (1999) jsou lokální lineární modely vázané pouze na případ, že je dobrý důvod předpokládat, že následující vztah

$$\hat{s}_{n+1} = f(s_n) \quad (61)$$

je možné použít na experimentální data jako dobrou předem zvolenou aproximaci neznámé funkce f a zároveň f je hladká. Neznámá funkce f se nahradí prvním členem Taylorova rozvoje. Následně je tedy možné provést minimalizaci následujícího vztahu:

$$\sigma^2 = \sum_{s_j \in U_n} (s_{j+1} - a_n s_j - b_n)^2 \quad (62)$$

Predikce je následně dána:

$$\hat{s}_{n+1} = a_n s_n + b_n \quad (63)$$

6.2 Globální modely

Lokální modely jsou jistě zajímavé, ale v některých případech můžou špatně predikovat, zvláště v případech kdy vybrané body nejsou dostupné v dané dimenzi nebo neexistuje inverzní matice k danému problému. Velmi často se stává, že velké množství

$$\sigma^2 = \sum_n (s_{n+1} - f_p(s_n))^2 \quad (64)$$

kde f_p je nelineární funkce s parametrem p . Zásadním problémem je volba vhodné nelineární funkce f_p . Hegger et al. (1999) uvádí, že je možné použít přístupy založené na polynomiálních funkcích, radiálně bazických funkcích, neuronových sítí, ortogonálních polynomech atd. Výsledky predikce závisí na tom, jak vhodný byl vybrán prediktor f_p vhodný pro modelování neznámé nelineární funkce a na deterministické podstatě vůbec.

6.2.1 Radiálně bazická funkce

Funkce f_p v této práci je zvolena radiálně bazická funkce. Radiálně bazická funkce (RBF) je reálná funkce, jejíž hodnota závisí pouze na vzdálenosti od počátku, nebo alternativně na vzdálenosti od nějakého jiného bodu c , nazvaného centrum. RBF musí splňovat následující vztah:

$$\Phi(x) = \Phi(\|x\|) \quad (65)$$

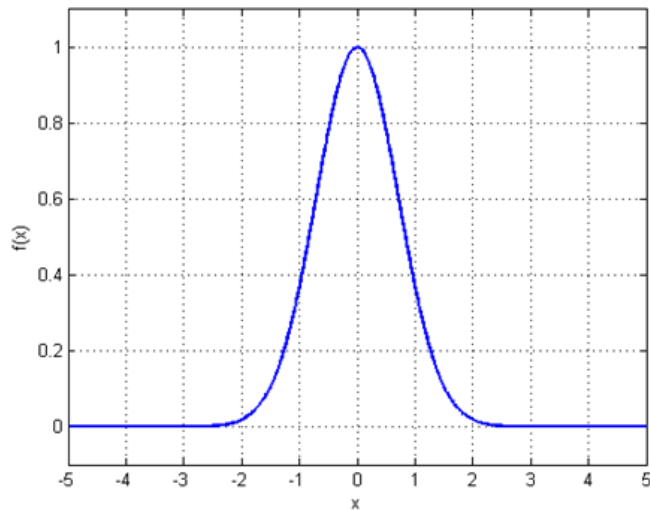
respektive:

$$\Phi(x, c) = \Phi(\|x - c\|) \quad (66)$$

Existuje celá řada radiálně bazických funkcí, které se prakticky používají pro reprezentaci jádra. V tomto modelovém případě je využito Gaussovské a polynomiální jádro.

Gaussovské jádro je dáno následovně (Obr. 17):

$$\Phi(x) = e^{-c^2 x^2} \quad (67)$$



Obr. 17. Gaussovské jádro

Rovnice prediktoru je dána následovně:

$$f_p = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \Phi(\|x - x_i\|) \quad (68)$$

Respektive, předpis pro predikci s využitím Gaussovské jádra RBF:

$$x_{t+1} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-(c\|x-x_i\|)^2} \quad (69)$$

Obdobně může být definován prediktor s využitím polynomiálních funkcí n -tého řádu:

$$f_p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (70)$$

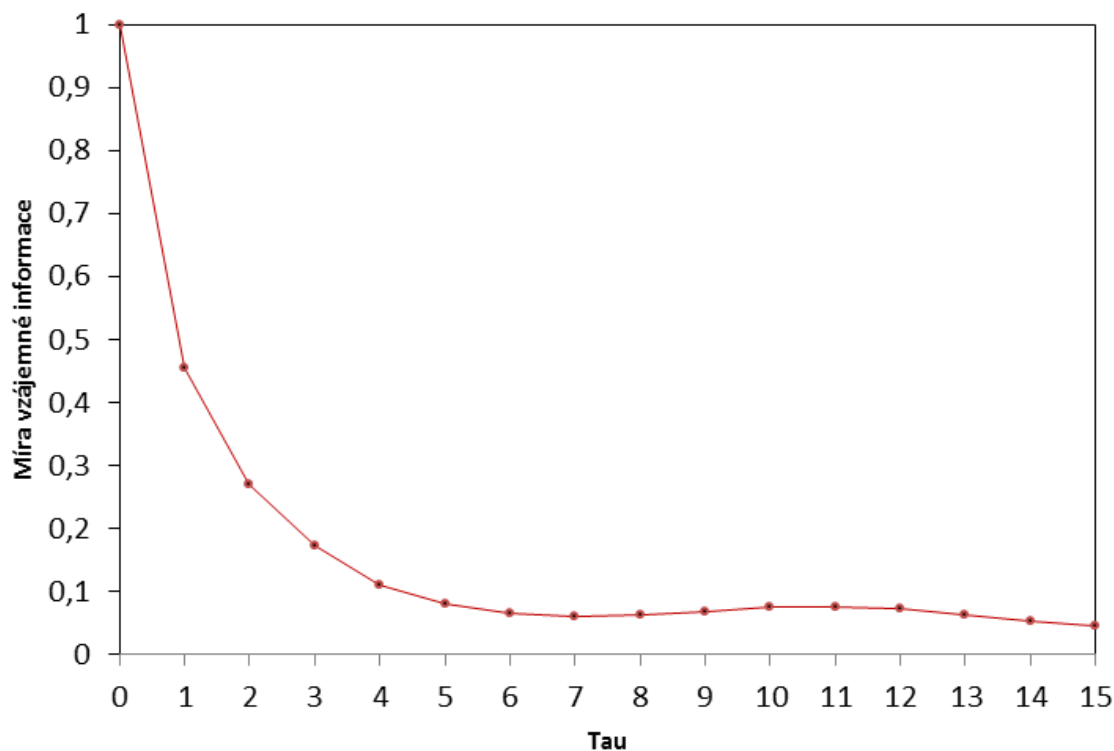
7 Výsledky

Výpočty a analýzy, včetně grafického zpracování, jsou provedeny v prostředí MATLAB, MATHEMATICA, TISEAN a MS EXCEL. TISEAN je softwarový projekt speciálně vyvinutý pro analýzu časových řad založený na teorii chaosu (Hegger, et al., 1999). Teoretickým podkladem pro tento software je práce Kanz et Schreiber (2004).

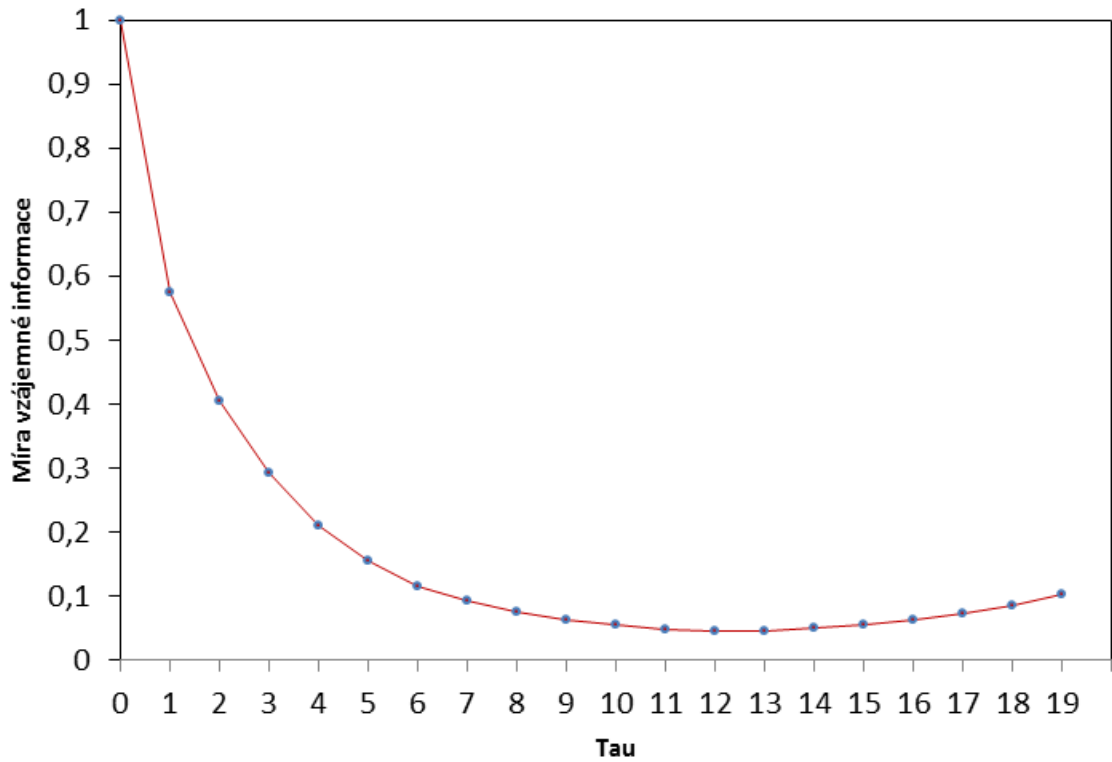
7.1 Chaotické deskriptory

7.1.1 Optimální hodnota časového zpoždění

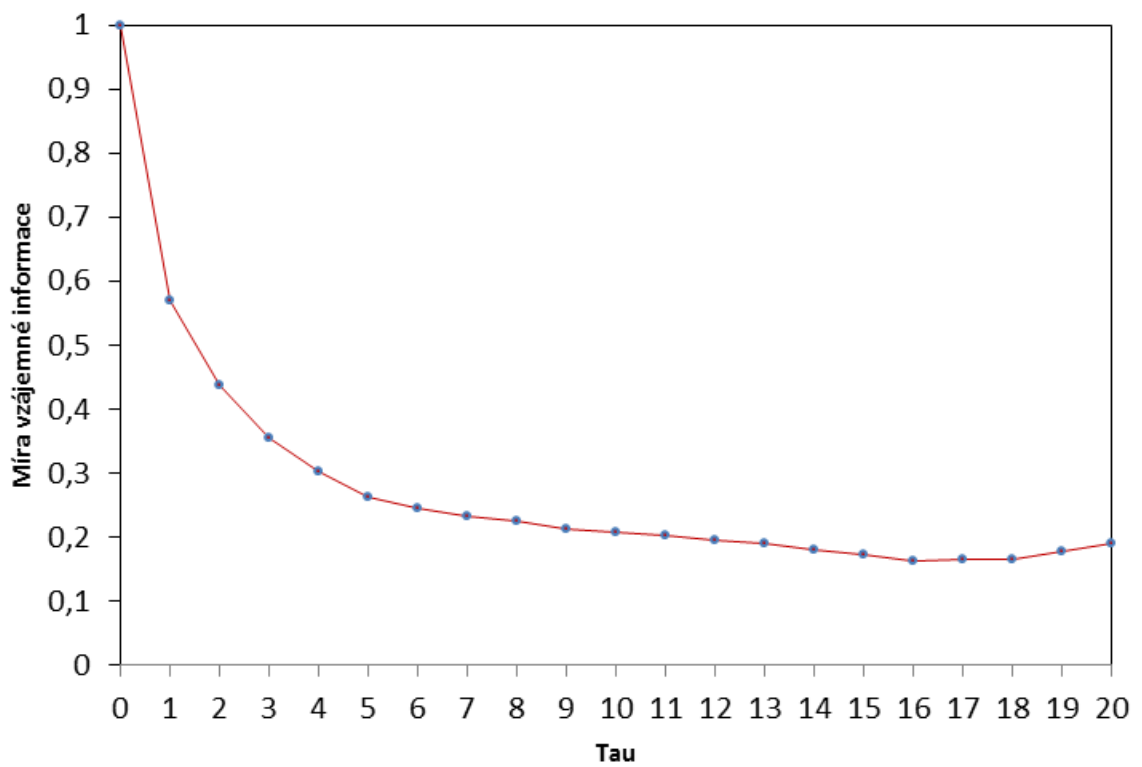
Optimální hodnota časového zpoždění byla vypočtena pomocí míry vzájemné informace. Na základě popsané metodiky je důležité zjistit první minimum funkce $I(\tau)$. První minimum $I(\tau)$ obsahuje největší množství informace, aniž bychom úplně ztratili korelaci mezi časovou řadou a časovou řadou posunutou o čas τ . Z průběhu funkce $I(\tau)$ bylo určena hodnota optimálního časového zpoždění $\tau = 7$ časové řady koncentrací NO_x . Stejným způsobem byla určena hodnota časového zpoždění $\tau = 13$ časové řady koncentrací O_3 a $\tau = 16$ časové řady koncentrací SO_2 .



Obr. 17. Míra vzájemné informace u časové řady koncentrací NO_x



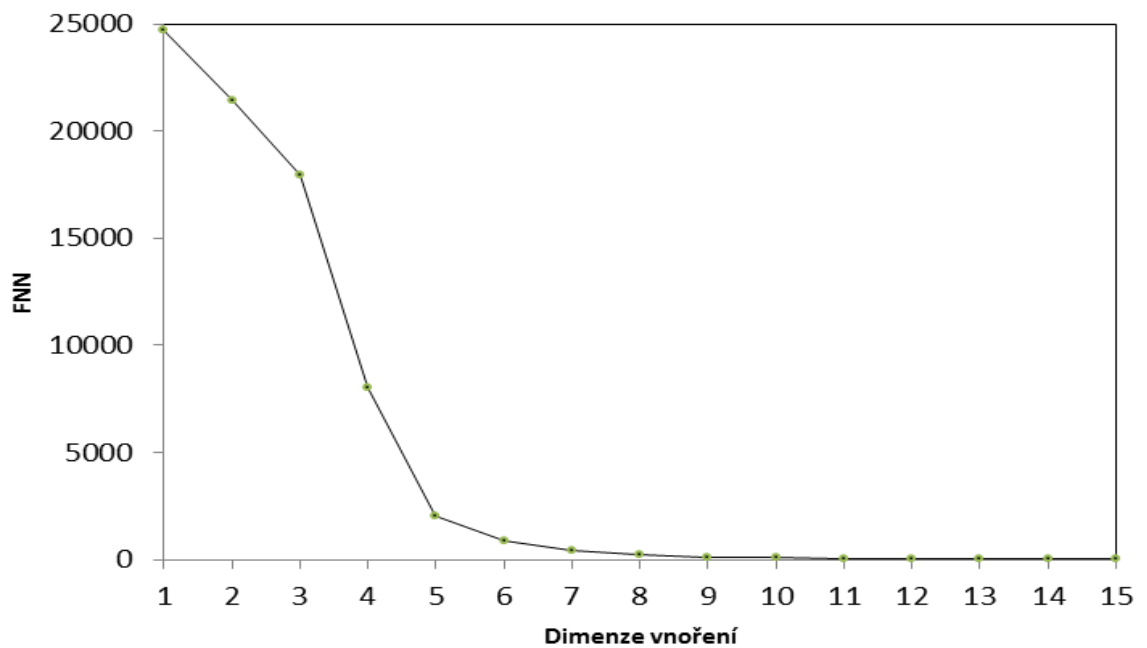
Obr. 18. Míra vzájemné informace u časové řady koncentrací O₃



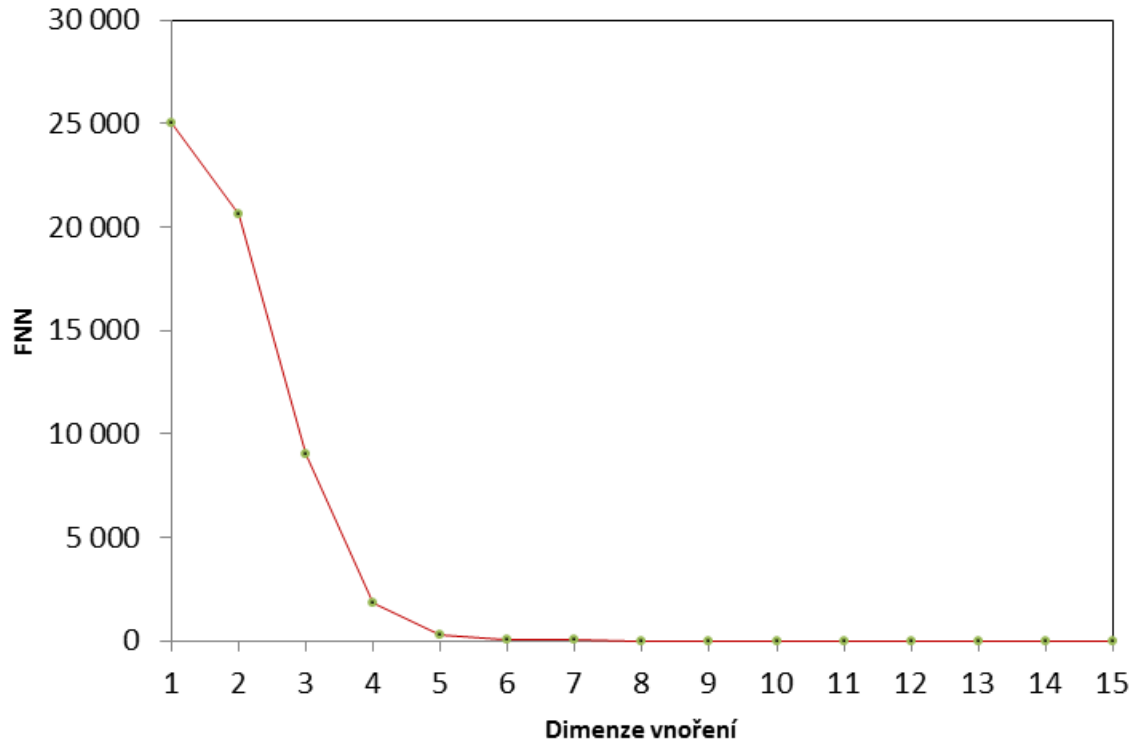
Obr. 19. Míra vzájemné informace u časové řady koncentrací SO₂

7.1.2 Optimální hodnota dimenze vnoření

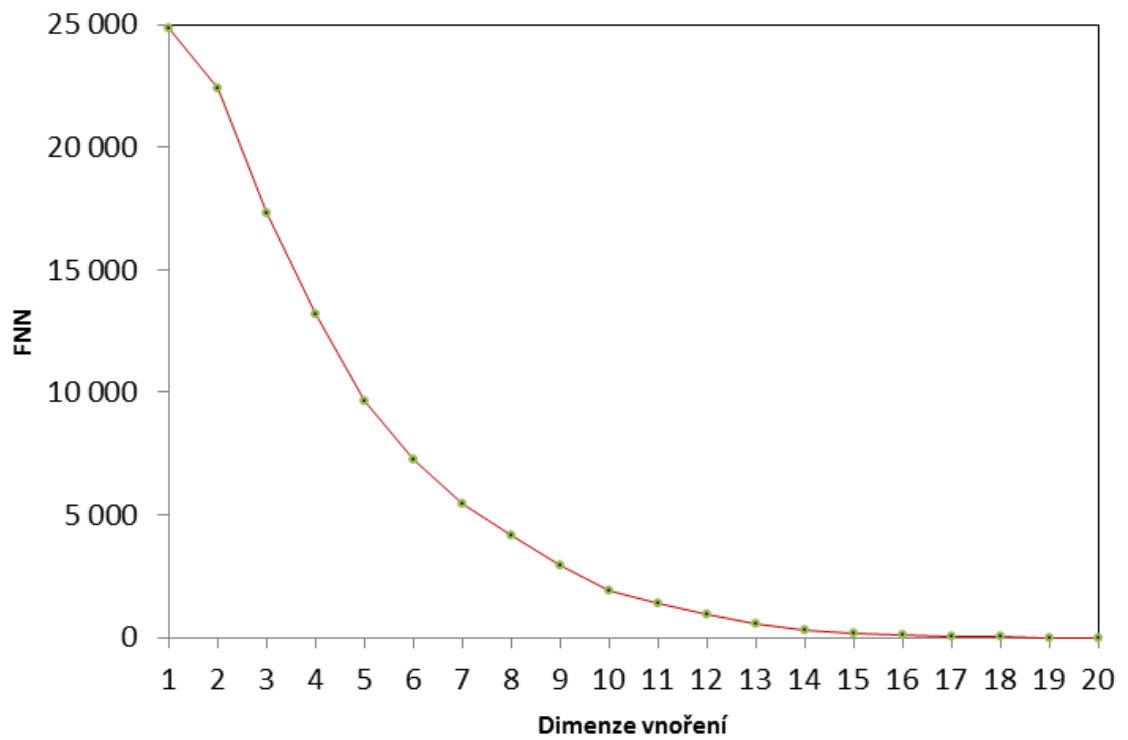
Optimální hodnota dimenze vnoření byla vypočtena pomocí metody nejbližších falešných sousedů. Podstatou metody je porovnání vzdálenosti dvou sousedů v určité dimenzi a v dimenzi o jednu větší. Pokud se jedná o falešné sousedy, bude jejich vzdálenost ve vyšší dimenzi tak velká, že již nebudou sousedy. Za dostatečnou dimenzi vnoření se bere hodnota, která snižuje počet falešných sousedů k nule. Dimenze vnoření je u časové řady koncentrací NO_x odhadnuta na 10, u u časové řady koncentrací O_3 na 7 a u časové řady koncentrací SO_2 na 16.



Obr. 20. Podíl nejbližších falešných sousedů u časové řady koncentrací NO_x



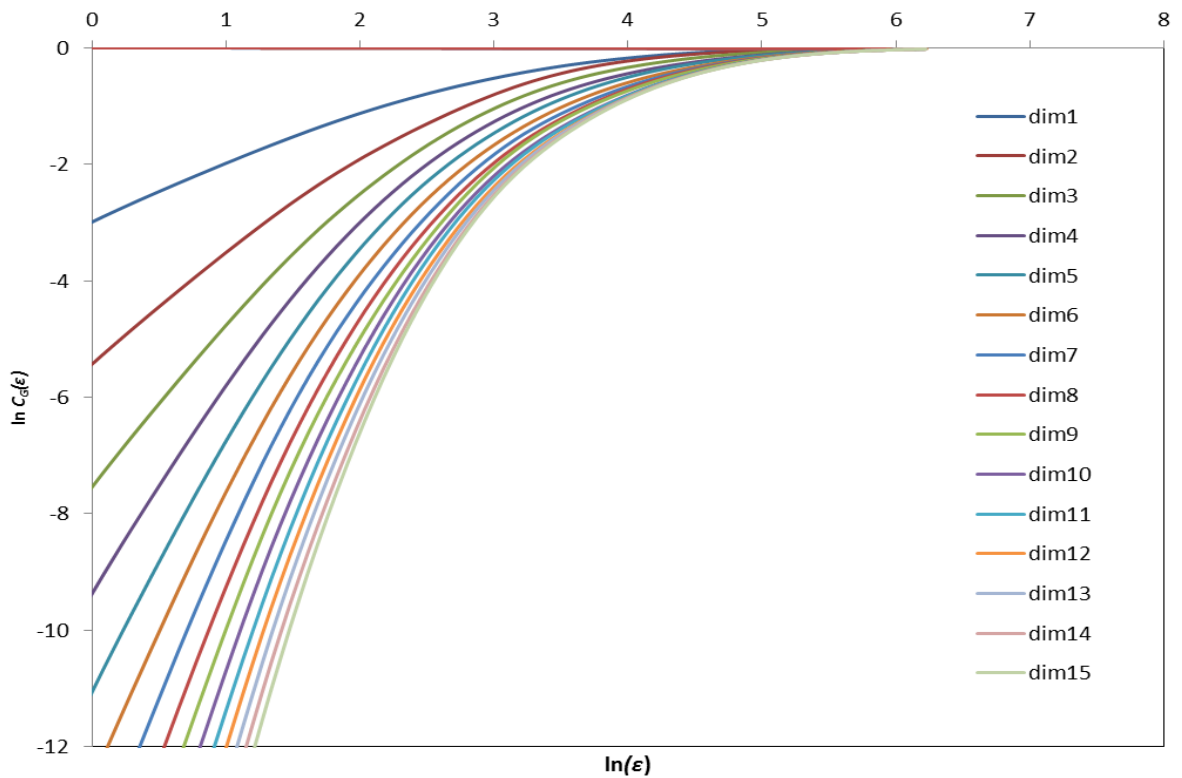
Obr. 21. Podíl nejbližších falešných sousedů u časové řady koncentrací O₃



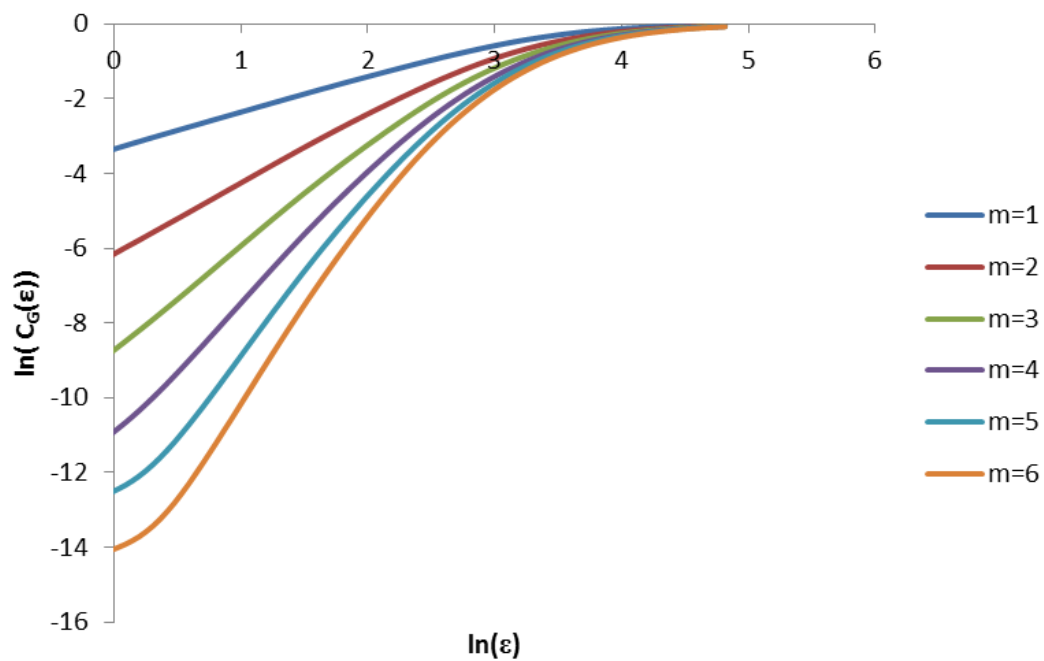
Obr. 22. Podíl nejbližších falešných sousedů u časové řady koncentrací SO₂

7.1.3 Korelační dimenze

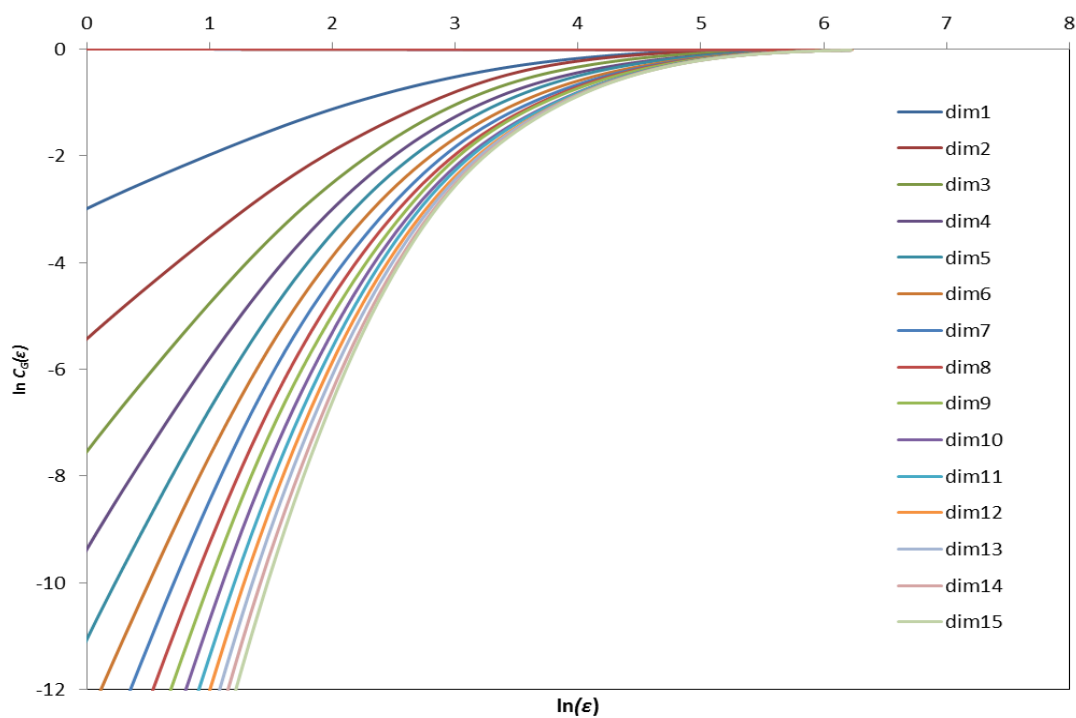
Výpočet korelační dimenze je založen na metodě vyvinuté Grassberger et Procaccia, (1983). Základem je výpočet korelačního integrálu $C(\varepsilon)$. Vzhledem k definici korelačního integrálu se nejedná o hladkou křivku, proto byl použit korelační integrál s Gaussovým jádrem $C_G(\varepsilon)$. Korelační dimenze se získá vynesemím $\ln C_G(\varepsilon)$ vůči $\ln(\varepsilon)$. Sklon křivek pro různé dimenze vnoření m udávají různé hodnoty korelační dimenze D_C .



Obr. 23. Vynesení $\ln C_G(\varepsilon)$ vůči $\ln(\varepsilon)$ u koncentrací NO_x



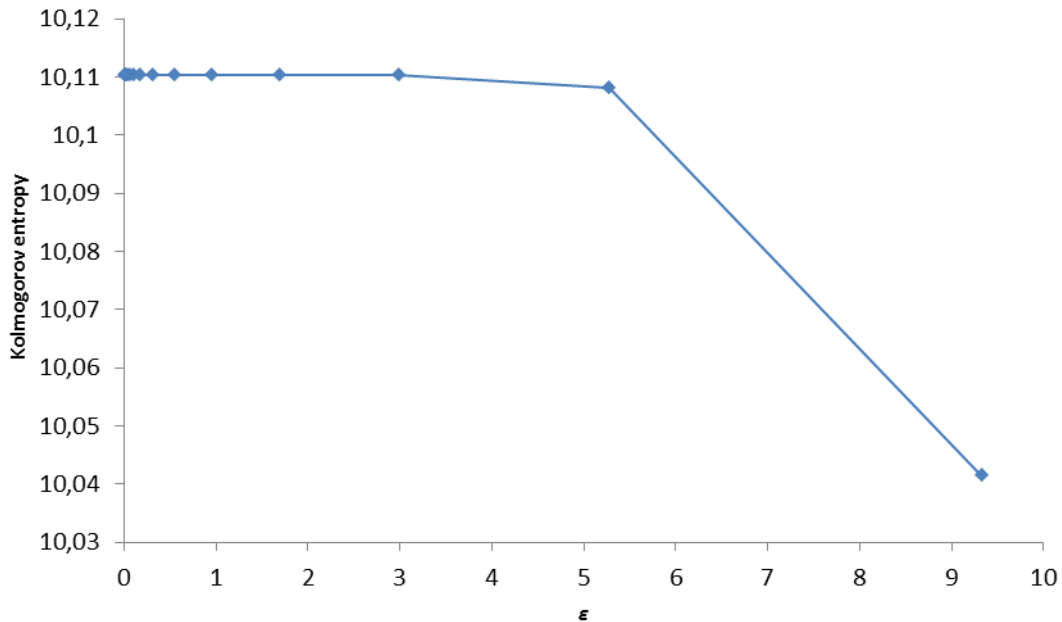
Obr. 24. Vynesení $\ln C_G(\epsilon)$ vůči $\ln(\epsilon)$ u koncentrací O_3



Obr. 25. Vynesení $\ln C_G(\epsilon)$ vůči $\ln(\epsilon)$ u koncentrací SO_2

7.1.4 Entropie

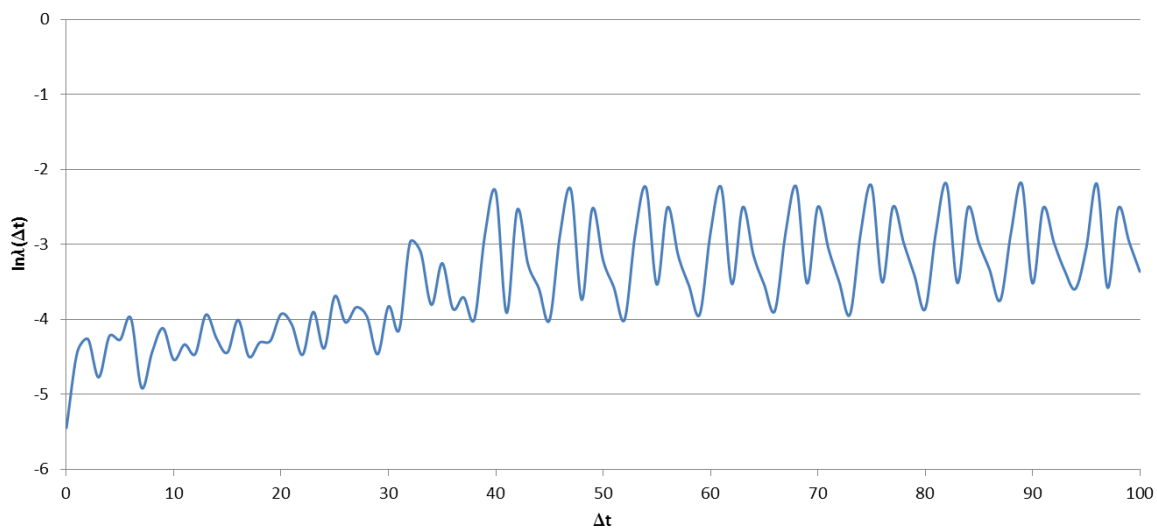
Obecně můžeme počítat entropie různého řádu. Běžně se používá Kolmogorov-Sinai entropie a Shannonova, neboli informační entropie. Shannonova entropie pro časovou řadu koncentrací NO_x je 3,3; u časové řady koncentrací O_3 je 7,8 a u časové řady koncentrací SO_2 je 2,3.



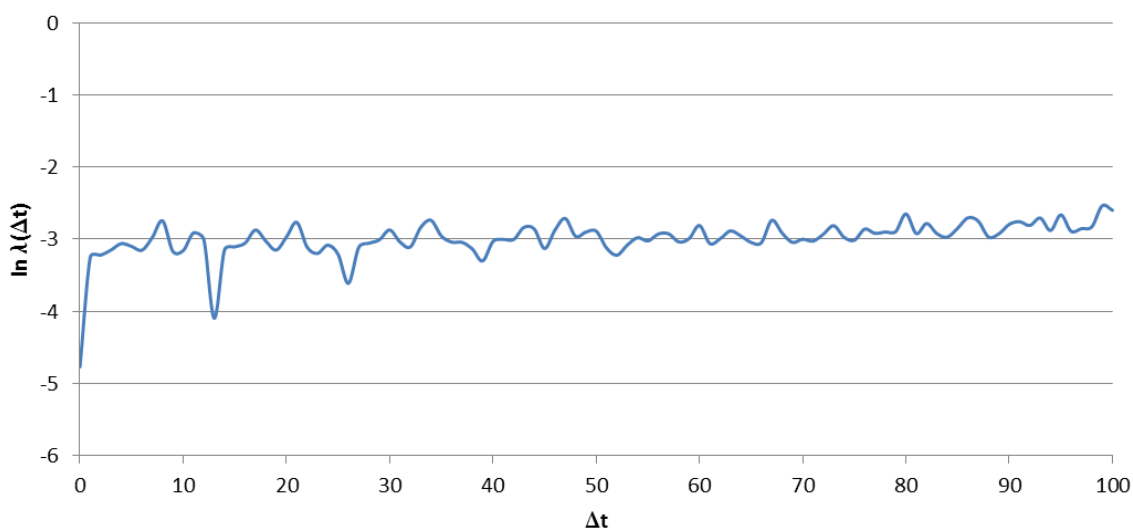
Obr. 26. Vynesení $\ln C_G(\epsilon)$ vůči $\ln(\epsilon)$ u koncentrací SO_2

7.1.5 Maximální Ljapunovův exponent

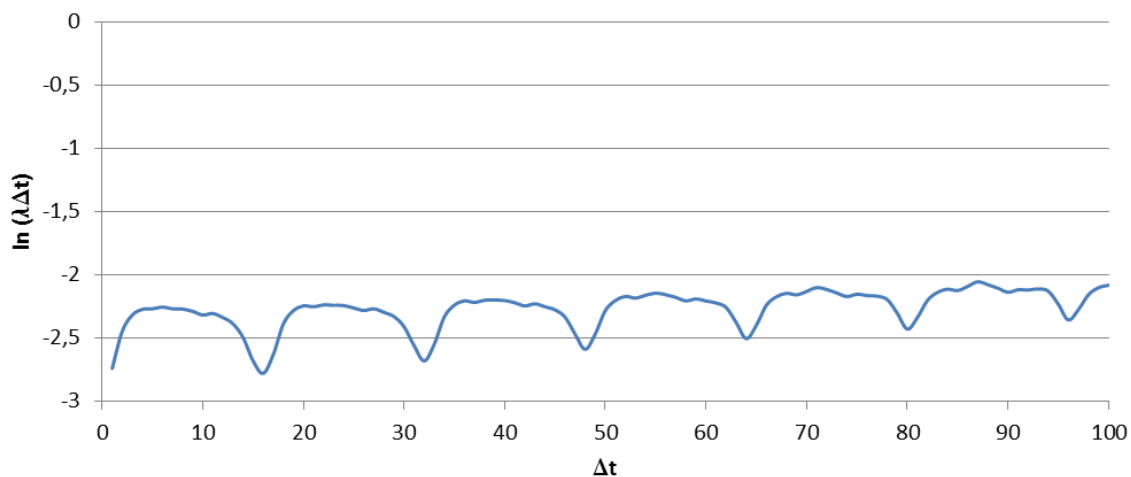
Ljapunovovy exponenty jsou čísla, která popisují divergenci blízkých trajektorií. Maximální Ljapunovův exponent hraje významnou roli v analýze dynamických systémů. Je-li alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, je to považováno za dostatečný signál, že se studovaný systém chová chaoticky. Pro odhad největšího Ljapunova exponentu je použit Rosensteinův algoritmus (Rosenstein, et al., 1993). Rosensteinův algoritmus je založen na lineární regresi metodou nejmenších čtverců v grafu logaritmu divergence a času. Maximální Ljapunovův exponent pro časovou řadu koncentrací NO_x byl odhadnut na 0,034; u časové řady koncentrací O_3 na 0,09 a u časové řady koncentrací SO_2 na 0,05. Hodnoty největšího Ljapunova exponentu u řad koncentrací O_3 a SO_2 jsou určeny pouze zhruba z důvodů nejednoznačnosti oblasti vhodnou pro proložení lineárního trendu. Jedná se však o všechno kladné hodnoty.



Obr. 27. Závislost logaritmu divergencece $\lambda(\Delta t)$ na Δt u koncentrací NO_x . Směrnice proložené přímkou v nesaturované oblasti udává největší Ljapunovův exponent



Obr. 28. Závislost logaritmu divergencece $\lambda(\Delta t)$ na Δt u koncentrací O_3 . Směrnice proložené přímkou v nesaturované oblasti udává největší Ljapunovův exponent



Obr. 29. Závislost logaritmu divergencece $\lambda(\Delta t)$ na Δt u koncentrací SO_2 . Směrnice proložené přímkou v nesaturované oblasti udává největší Ljapunovův exponent

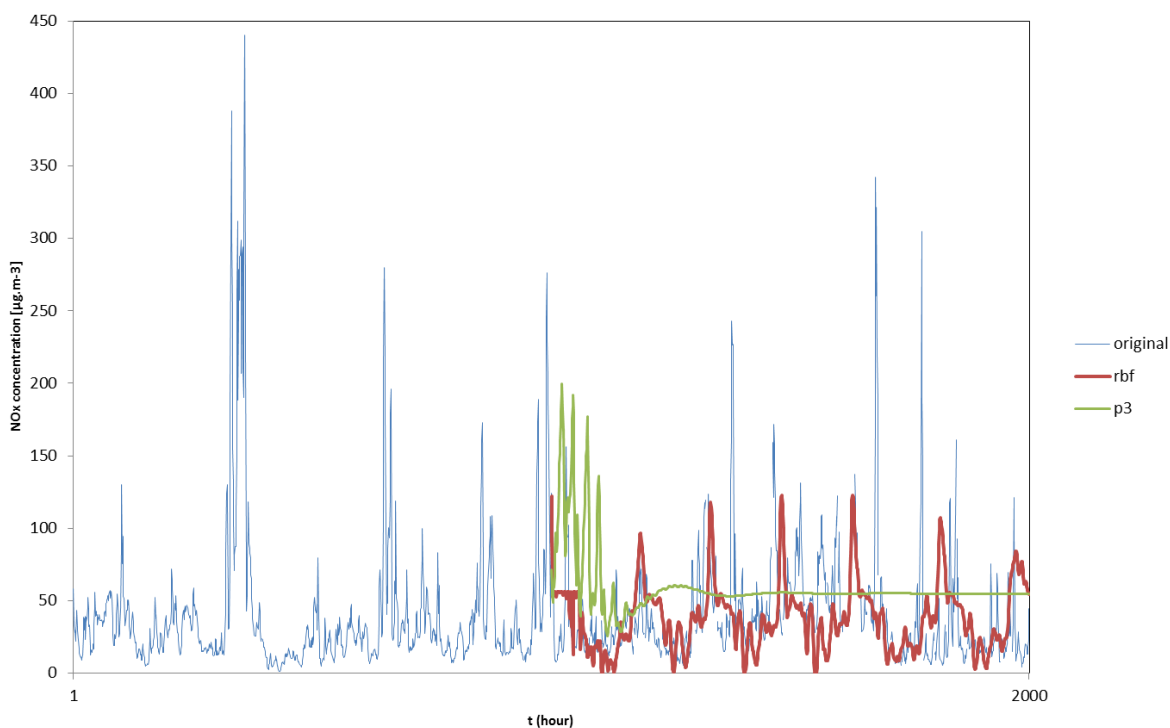
7.1.6 Hurstův exponent

Hurstův exponent nám udává perzistentnost procesů, neboli nám říká, zdali se jedná o časovou řadu s dlouhodobou pamětí. Hurstův exponent pro časovou řadu NO_x je 0,79; pro časovou řadu koncentrací O_3 je 0,87 a pro časovou řadu koncentrací SO_2 také 0,87.

7.2 Predikce

Nakonec byla provedena předpověď pomocí Gaussovy radiálně bazické funkce a polynomiální funkce. Na základě numerických simulací se nejlépe jevil polynom 3. Řádu, ale i ten je možné pouze pro predikci na maximálně 100 kroků, tedy 100 hodin. Předpovědi na 1000 hodin jsou zobrazeny na Obr. 27. Tento údaj jasně ukazuje, že RBF je mnohem lepší, než polynomiální fit.

Tato předpověď pomocí RBF pro prvních pár hodin je velmi dobrá, i když se jedná o oblast s vysokou volatilitou. V mnoha případech správně predikce odhaduje vrcholy a tendence NO_x koncentrace a času řad. Předpovědi pomocí RBF mohou být použity v dlouhodobém časovém horizontu.



Obr. 30. Predikce koncentrací NO_x pomocí Gaussovské RBF a polynomiální funkce

8 Diskuze

Pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je pravděpodobně chaotický. Provedená analýza potvrdila předpoklady pro přítomnost chaosu v časových řadách polutantů NO_x , O_3 a SO_2 . K podobným závěrům došli také např. Chattopadhyay et al. (2008), Chelani et al. (2005), Chen et al., (1998), Koçak et al. (2000), Kříž (2014), Weng (2008), etc.

Chattopadhyay et al. (2008) studují průměrné měsíční hodnoty ozonu ve městě Arosa (Švýcarsko) za 40 let a snaží se pochopit povahu tohoto dynamického systému. Studie popsané výše se pokusili pochopit. Zvolená metodika vykazuje přítomnost nízkodimenzionálního chaosu v této časové řadě. Identifikace chaotického charakteru dynamiky ozonu může být velmi užitečné pro vývoji nelineárních prediktivních modelů, jako jsou umělé neuronové sítě (Chattopadhyay et al., 2008).

Chen et al. (1998) popisuje novou metodiku, na základě teorie dynamických systémů, jak modelovat a předpovídat dynamiku ozonu. Model je konstruován v multidimenzionálním fázovém prostoru ze zjištěných koncentrací ozonu. Předpovědi jsou založeny na zkoumání trajektorie ve zrekonstruovaném fázového prostoru. Chen et al. (1998) dále ukazuje, že navrhovaný model může být použit pro identifikaci rozdílu mezi chybou měření a podstatou deterministické chaotické dynamiky. Chen et al. (1998) pro svou predikci využívá logistickou rovnici.

Koçak et al. (2000) využívá lokální metodu predikce k předpovědi koncentrace O_3 v různých stanicích centra Istanbulu. Zjištěné údaje jedné proměnné časové řady se používají k rekonstrukci atraktoru ve vícerozměrném prostoru. Následně, dynamický model pro generování atraktoru se odhaduje a změna trajektorie se předpokládá pomocí polynomicke aproximace. Jinými slovy, dynamika systému jsou popsány krok za krokem lokálně ve fázovém prostoru. Parametry potřebné k rekonstrukci fázový prostor, jsou časové zpoždění a dimenze vnoření. Koçak et al. (2000) volí hodnotu časového zpoždění na základě výpočtu prvního minima autokorelační funkce. Zde se tato diplomová práce rozchází s Koçak et al. (2000) a navrhuje provést výpočet na základě metodiky pánů Fraser et Swinney (1986). Dimenze vnoření odpovídá minimální relativní chybě mezi pozorovanými a vypočítanými hodnotami. Relativní chyba mezi výstupů modelu a pozorování je v rámci prakticky přijatelných mezích poukazující na to, že koncentrace O_3 se řídí vztahy teorie chaosu. Koçak et al. (2000) vypočítal hodnotu časového zpoždění $\tau=75$ a dimenzi vnoření $m=3$.

Weng et al. (2008) se zabývá analýzou přízemního ozonu ve městech Chaozhou a Zenwu v metropolitní oblasti Kaohsiung, Tchaj-wan. Weng et al. (2008) provedl BSD test, který potvrdil silnou nelinearitu obou časových řad v uvedených městech. Dále Weng et al. (2008) provedl R/S analýzu časové řady a vypočetl hodnotu Hurstova exponentu $H=0,75$, která ukazuje na perzistentnost procesu. Hodnota $H=0,87$ vypočtená v této diplomové práci je srovnatelná a ještě více ukazuje na perzistentnost procesu. To znamená, že se jedná o časovou řadu s dlouhodobou pamětí, kterou lze snadněji predikovat. Weng et al. (2008) kromě toho, dále identifikoval pomocí V statistiky současné tři cykly o délkách kolísání cyklu 32, 170 a 420 dnů.

Tato diplomová práce analyzovala data bez jakýchkoliv předchozích úprav mimo vyloučení chybějících hodnot, které bylo popsáno v kapitole „Data“. Obecně je doporučováno použít data bez výrazného trendu, což naše data splňovali a detrendování nebylo nutné. Další otázkou je přítomnost šumu v datech. Existuje celá řada metodik jak se zbavit šumu uvedených např. v Kanz et al. (2004). Nicméně je třeba podotknout, že každý takový zásah na druhou stranu může zasáhnout do výkyvů plynoucí ze samé podstaty zkoumaného systému. Tato diplomová práce se dále již nezabývala využitím umělých neuronových sítí, přestože by to byla pravděpodobně zajímavá možnost rozšíření a zpřesnění predikcí.

Ukazuje se, že správná aplikace metod založených na teorii chaosu může zaručit úspěšnější predikci než klasické metody.

9 Závěr

Diplomová práce analyzuje data poskytnutá Českým hydrometeorologickým ústavem. Data obsahují hodinové koncentrace jednotlivých polutantů (NO_x , O_3 a SO_2) z Prahy - Libuše od 1.1.2011 do 31.12.2013. Diplomová práce pracuje se dvěma základními hypotézami, které se potvrdily.

První hypotéza se zněla, zdali měřené koncentrace vybraných znečišťujících příměsí mají kvantifikovatelný chaotický projev. Byla provedena poměrně rozsáhlá analýza vybraných časových řad založená na metodách teorie chaosu, která prokázala chaotické chování. Pokud je Ljapunovův exponent kladný, korelační dimenze nabývá nízkých neceločíselných hodnot a Kolmogorova entropie je kladné konečné číslo, můžeme usuzovat, že daný systém je pravděpodobně chaotický. Provedená analýza potvrdila předpoklady pro přítomnost chaosu v časových řadách polutantů NO_x , O_3 a SO_2 . Tímto byl také splněn první cíl práce: Prokázání kvantifikovatelných chaotických projevů měřených koncentrací vybraných znečišťujících příměsí.

Druhá hypotéza se zabývala otázkou, zdali vývoj vybraných koncentrací lze predikovat pomocí hybridních modelů. Vzhledem k tomu, že chaos byl s velkou pravděpodobností prokázán, je vhodné pro predikci využít nelineárních metod. Jako nejúspěšnější metoda se jeví metoda globální nelineární predikce s využitím Gaussovské radiálně bazické funkce. Tímto byl také splněn druhý cíl práce: Vyvinutí a otestování hybridního modelu určeného k predikci budoucího vývoje anebo k doplňování chybějících údajů.

Poslední cíl práce „diskutovat získané výsledky s ohledem na další teoretické studie i možné praktické použití“ byl splněn v kapitole „Diskuze“.

10 Literatura

Abarbanel, H. D., Brown, R., Sidorowich, J. J., Tsimring, L. S. 1993. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of modern physics*. 65(4). 1331.

Abarbanel, H. D. I. 1996. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer. New York. p. 272. ISBN: 9780387983721.

Bassingthwaighte, J. B. 1988. Physiological heterogeneity: fractals link determinism and randomness in structures and functions. *Physiology*. 3(1). 5-10.

Bell, M. L., Davis, D. L., Fletcher, T. 2004. A retrospective assessment of mortality from the London smog episode of 1952: the role of influenza and pollution. *Environmental Health Perspectives*. 112(1). 6.

Beneš P. 2010. *Informace o informaci. BEN - technická literatura*, Praha. 123 s. ISBN 9788073002633.

Bertenthal, I. B., Boker, S. M., Rose J. L. Dynamical analyses of postural development. [online]. Department of Psychology, The University of Virginia. [cit. 2015-02-10]. Dostupné z <http://people.virginia.edu/~smb3u/NASPSPA9506a/node5.html>

ČESKO. 2002. Zákon o integrované prevenci a omezování znečištění č. 76/2002 Sb. Sbíрка zákonů České republiky.

ČESKO. 2012. Zákon o ochraně ovzduší č. 201/2012 Sb. Sbíрка zákonů České republiky.

ČHMÚ. 2013. *Znečištění ovzduší na území České republiky v roce 2012*. Praha.

Devaney R., L., 1989. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd ed. Addison-Wesley. New York. p. 336. ISBN: 9780813340852.

EU. 2008a. Directive 2008/1/EC of the European Parliament and of the Council of 15 January 2008 concerning integrated pollution prevention and control. *Official Journal of the European Union* L 24/ 8.

EU. 2008b. Directive 2008/50/EC of the European Parliament and of the Council of 21 May 2008 on ambient air quality and cleaner air for Europe. *Official Journal of the European Union* L 152/11.

Ezzati, M., Lopez, A. D., Rodgers, A., Vander Hoorn, S., Murray, C. J. 2002. Selected major risk factors and global and regional burden of disease. *The Lancet*. 360(9343), 1347-1360.

- Farmer, D. J., Sidorowich, J. J. 1987. Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 59. 85-848.
- Feigenbaum, M. J. 1978. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. *Journal of Statistical Physics.* 19. 25–52.
- Fraser, A. M., Swinney, H. L. 1986. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical review A.* 33(2). 1134.
- Gleick, J. 1987. *Chaos: Making a New Science.* Cardinal. London. ISBN 0813340853
- Gleick, J. 1996. *Chaos: vznik nové vědy.* Překlad: Sedlář, J., Kamenická, R. Ando Publishing. Brno. 349 s. ISBN 8086047040.
- Grassberger, P., Procaccia, I. 1983. Characterization of strange attractors. *Physical review letters.* 50(5). 346.
- Hadamard, J. 1898. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* 4. 27-73.
- Hegger, R., Kantz, H., Schreiber, T. 1999. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 9(2). 413-435.
- Henry, B., Lovell, N., Camacho, F. 2001. Nonlinear dynamics time series analysis. *Nonlinear biomedical signal processing: Dynamic analysis and modeling.* 2. 1-39.
- Holmes, K. 1998. The three-body problem. [online] The magazine of the Melbourne PC User Group. Australia. [citované 2015-02-10]. Dostupné z <http://www.melbpc.org.au/pcupdate/9812/9812article5.htm>
- Horák, J., Krlín, L., Raidl, A. 2003. *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace.* Academia. Praha. 437 s. ISBN: 9788020009104
- Hurst, H. E. 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.* 116. 770-808.
- Chattopadhyay, G., Chattopadhyay, S. 2008. A probe into the chaotic nature of total ozone time series by correlation dimension method. *Soft Computing.* 12(10), 1007-1012.
- Chelani, A. B., Singh, R. N., Devotta, S. 2005. Nonlinear dynamical characterization and prediction of ambient nitrogen dioxide concentration. *Water, air, and soil pollution.* 166(1-4). 121-138.

- Chen, J. L., Islam, S., Biswas, P. 1998. Nonlinear dynamics of hourly ozone concentrations: nonparametric short term prediction. *Atmospheric environment*. 11(32). 1839-1848.
- IRZ - integrovaný registr znečišťování [Online] 2015. [Citace: 10. 2 2015.] Dostupné z <http://www.irz.cz/>
- Kaneko, K., Tsuda, I. 2001. *Complex Systems: Chaos and Beyond: A Constructive Approach With Applications in Life Sciences*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. p. 273. ISBN: 9783540672029.
- Kantz, H. and Schreiber, T. 2004. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge. 388 p. ISBN: 9780521529020.
- Kennel, M. B., Brown, R., Abarbanel, H. D. 1992. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical review A*. 45(6). 3403.
- Koçak, K., Şaylan, L., Şen, O. 2000. Nonlinear time series prediction of O₃ concentration in Istanbul. *Atmospheric Environment*. 34(8). 1267-1271.
- Kodera, J., Van Quang, T. 2009. Vizuální nelineární rekurentní analýza a její aplikace na český akciový trh. *Politická ekonomie*. 3. 305.
- Kříž, R. 2014. Chaos in Nitrogen Dioxide Concentration Time Series and Its Prediction. In: Zelinka, I., Suganthan, P. N., Chen, G., Snasel, V., Abraham, A., Rössler, O. (eds.). *Nostradamus 2014: Prediction, Modeling and Analysis of Complex Systems*. Springer International Publishing. p. 365-376. ISBN: 9783319074009
- Li, T. Y., Yorke, J. A. 1975. Period three implies chaos. *American mathematical monthly*. 985-992.
- Lorenz, E. N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the atmospheric sciences*. 20(2). 130-141.
- Louda, J. Sobotka, L. Kříž, R. 2013. Pohled na ekonomiku opatření snižujících emise škodlivých látek v ovzduší. *Veřejná správa: čtrnáctideník vlády ČR*. 25(15). 18-20.
- Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*. 10(4). 422-437.
- Mandelbrot, B. B. (1967). How long is the coast of Britain. *Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. *Science*. 156(3775). 636-638.

- May, R. M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261(5560). 459-467.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Shaw, R. S. 1980. Geometry from a time series. *Physical review letters*. 45(9). 712.
- Poincaré, H. J. 1885. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*. 7(1). 259-380.
- Poincaré, H. J. 1890. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Divergence des séries de M. Lindstedt. *Acta Mathematica*. 13. 1-270.
- Pokorný, P. 2008. Deterministický chaos – plod počítačové fyziky. *Československý časopis pro fyziku*. 58. 328.
- Prokšová, J., Dušperk, J. 2007. Nerovnovážná termodynamika a její aplikace. [Online] 2007. [Citace: 10. 2. 2015.] Dostupné z <http://nelterm.kof.zcu.cz/nerterm/ntuvod/uvod.htm>.
- Raidl, A. 2015. Deterministický chaos. [Online] 2015. [Citace: 10. 2 2015.] Dostupné z <http://www.raidl.cz/clanky/deterministicky-chaos.html>.
- Richardson, L. F. 1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 709-737.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J., De Luca, C. J. 1993. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 65(1). 117-134.
- Sande, van de, A. Coastline paradox. [online]. [cit. 2015-02-10]. Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox
- Saltzman, B. 1962. Finite amplitude free convection as an initial value problem-I. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 19(4). 329-341.
- Schreiber, T. 1999. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics reports*. 308(1). 1-64.
- Savi, M. A. 2005. Chaos and order in biomedical rhythms. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 27(2). 157-169.

- Takens, F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand, D., Young, L., (eds.). Dynamical Systems and Turbulence. Springer Berlin Heidelberg. p. 366-381. ISBN: 9783540111719
- Uruba, V. 2009. Turbulence. Praha. ČVUT v Praze, Fakulta strojní. Praha. p. 141. ISBN: 9788001043301.
- Vallero, D. 2008. Fundamentals of air pollution. Ellsevier. London. p. 942. ISBN: 9780123736154.
- Vítek, T., Starý, J., Antalík, D. 2010. Řád a chaos v archaických kulturách. Svět archaických kultur. Herrmann & synové. Praha. 224 s. ISBN 9788087054260.
- WHO. 2003. Health Aspects of Air Pollution with Particulate Matter, Ozone and Nitrogen Dioxide: report on a WHO working group, Bonn. WHO World Health Organization Regional Office for Europe. Copenhagen. p. 94.
- Wikipedia. Chaos theory. [Online] 2015. [Citace: 10. 2 2015.] Dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory
- Weng, Y. C., Chang, N. B., Lee, T. Y. 2008. Nonlinear time series analysis of ground-level ozone dynamics in Southern Taiwan. Journal of environmental management. 87(3). 405-414.