UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Mocninné řady - sbírka příkladů

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:
Eva Složilová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 26. dubna 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce *Mocninné řady - sbírka příkladů* je určena především pro studenty předmětu Matematika 2 vyučovaného na katedře Matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Hlavním cílem práce je vytvořit pro studenty materiál, kde naleznou především dostatek příkladů i s postupem vedoucím k jejich řešení. Tato sbírka by jim měla pomoci pochopit učivo a může sloužit i jako pomůcka k přípravě na zápočtové a zkouškové testy. Sbírka je psaná s předpokladem, že studenti již mají znalosti z předmětu Matematika 1 a absolvovali přednášku ke kurzu Matematika 2.

Práce je rozdělena do pěti částí. V první kapitole se seznámíme s číselnými řadami a uvedeme základní pojmy a vlastnosti, které uplatníme při počítání jak s číselnými, tak i s mocninnými řadami. Druhá kapitola je věnována řešeným i neřešeným příkladům týkajících se číselných řad. Především se zaměříme na vyšetřování konvergence, resp. divergence číselných řad pomocí tzv. kritérií konvergence. Další kapitola se týká mocninných řad. Stejně jako u číselných řad si nejprve zavedeme základní pojmy teorie mocninných řad. Čtvrtá kapitola obsahuje opět příklady, ve kterých je především vysvětleno, jak postupovat při určování oboru konvergence a součtu mocninných řad. Nechybí ani příklady k procvičení. Poslední kapitola ukazuje, jak je možné si pomocí matematického softwaru Maple ověřit správnost výsledků získaných při řešení příkladů.

Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená množina reálných čísel
OK	obor konvergence
OAK	obor absolutní konvergence
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost reálných čísel
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost částečných součtů
$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost funkcí
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	nekonečná číselná řada
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$	nekonečná řada funkcí
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$	mocninná řada
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$	Taylorova řada fukce f v bodě x_0
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$	Maclaurinova řada
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
(a,b)	otevřený interval
$(a,b\rangle$	zprava uzavřený (zleva otevřený) interval
$\langle a,b)$	zleva uzavřený (zprava otevřený) interval
$\langle a,b\rangle$	uzavřený interval
sgn	funkce signum
$\doteq$	přibližně rovno

1. Číselné řady

Dříve než přistoupíme k samotnému tématu mocninných řad, musíme si uvést základní pojmy a vlastnosti týkající se řad číselných. Jejich znalost je totiž základem pro práci s mocninnými řadami. Všechny použité definice a věty jsou čerpány z [1], [2] a [8].

1.1. Základní pojmy

Definice 1.1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Číslo a_n se nazývá n-tý člen řady, n se nazývá sčítací index.

Definice 1.2. Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 1.3. Nechť je dána řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jí odpovídající posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a *má součet* s;
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, pak říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* k $\pm\infty$ a *má součet* $\pm\infty$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje (osciluje)* a *nemá součet.*

Poznámka 1. Nemůže se stát, že by řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ např. konvergovala a divergovala zároveň, protože každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

1.2. Základní vlastnosti

Následující věta nám udává *nutnou podmínku konvergence* řady.

Věta 1.1. *Jestliže řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka 2. Pozor! Obrácená věta neplatí. Ne každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou je splněna podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje.
V opačném případě, jestliže není splněna nutná podmínka konvergence, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 1.2. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$. *Pak je konvergentní i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t$.

Poznámka 3. Obrácená věta opět neplatí. To, že konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ještě neznamená, že konvergují i dílčí řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámka 4. V případě, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, bude divergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Věta 1.3. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naopak, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$, kde $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 5. Jestliže je ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je pro $k \neq 0$ divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$.

1.3. Významné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad \text{kde } a_1, q \in \mathbb{R}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ se nazývá *geometrická* s prvním členem a_1 a kvocientem q.

V případě, že

- $|q| \geq 1$, geometrická řada diverguje;
- $|q| < 1$, geometrická řada konverguje a má součet $s = \frac{a_1}{1-q}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mohou nastat tyto dva případy:

- řada konverguje pro $p > 1$;
- řada diverguje pro $0 < p \leq 1$.

Jestliže položíme $p = 1$ obdržíme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Tato řada se nazývá *harmonická řada* a diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ se nazývá *Grandiho řada* a osciluje.

1.4. Číselné řady s nezápornými členy

Definice 1.4. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *řada s nezápornými* (resp. *kladnými*) členy, je-li

$$a_n \geq 0 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \qquad (\text{resp. } a_n > 0 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}).$$

Věta 1.4. *Každá řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k ∞.*

Poznámka 6. Tato vlastnost plyne ze skutečnosti, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ u řad s nezápornými členy bude vždy neklesající. Tudíž tyto řady budou buď konvergovat nebo divergovat, ale nemohou nikdy oscilovat.

1.4.1. Kritéria konvergence a divergence

V mnoha případech bývá velice obtížné stanovit součet řady, pomocí kterého bychom rozhodli o konvergenci, resp. divergenci řady. Často se omezujeme pouze na informaci, zda řada konverguje či diverguje, aniž bychom tento součet určovali. K tomuto účelu používáme tzv. kritéria konvergence, které představují postačující podmínky pro konvergenci, resp. divergenci číselných řad.

Věta 1.5. Srovnávací kritérium
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť

$$a_n \leq b_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- *konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;*
- *diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Definice 1.5. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nazýváme *majorantní* řadou k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minorantní* řadou k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 1.6. Limitní srovnávací kritérium
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ a konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Je-li $L > 0$ a diverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 7. Ke srovnání budeme nejčastěji používat řady uvedené v kapitole 1.3, o nichž víme, zda konvergují či divergují.

Věta 1.7. Podílové kritérium - D'Alembertovo
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, *pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;*
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Věta 1.8. D'Alembertovo limitní podílové kritérium

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \textit{kde } q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
- $q > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje;*
- $q = 1$, *nelze o konvergenci řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *tímto kritériem rozhodnout - řada může konvergovat i divergovat.*

Věta 1.9. Odmocninové kritérium - Cauchyovo

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Platí-li nerovnost*

- $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *, pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
- $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$, *pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta 1.10. Cauchyovo limitní odmocninové kritérium

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde } q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*

- *$q > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;*

- *$q = 1$, nelze o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tímto kritériem rozhodnout - řada může konvergovat i divergovat.*

Věta 1.11. Limitní Raabeovo kritérium
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \qquad \textit{kde } q \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- *je-li $q > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;*

- *je-li $q < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Věta 1.12. Integrální kritérium
Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 8. Pokud se nám nepodaří rozhodnout o konvergenci řady pomocí zvoleného kritéria, musíme použít jiné, silnější kritérium. Při volbě kritéria musíme brát v úvahu tvar a_n.

1.5. Řady absolutně a relativně konvergentní

V této kapitole opustíme problematiku řad s nezápornými členy. Budeme se zabývat řadami s členy obecnými, tzn. řadami $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Tato řada může být tedy tvořena nejen kladnými, ale i zápornými, popř. nulovými členy. Při vyšetřování konvergence řad s obecnými členy budeme zároveň vyšetřovat i řady tvořené absolutními hodnotami jednotlivých členů. Mezi dvojicí řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ platí následující vztah.

Věta 1.13. *Konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 9. Opačné tvrzení neplatí. Proto je na místě pro řady s obecnými členy zavedení silnější vlastnosti než je konvergence.

Definice 1.6. Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada *konverguje relativně* .

Poznámka 10. U řad s nezápornými členy je pojem absolutní konvergence totožná s pojmem konvergence.

Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je řada s nezápornými členy, můžeme pro určování absolutní konvergence řad použít všechna kritéria z kapitoly 1.4.1.

1.5.1. Alternující řady

Speciálním případem řad s libovolnými členy jsou tzv. alternující řady neboli řady se střídavými znaménky.

Definice 1.7. Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 11. Alternující řady mohou mít tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \cdots ,$$

kde $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel.

O konvergenci alternujících řad rozhodujeme pomocí Leibnitzova kritéria konvergence.

Věta 1.14. Leibnitzovo kritérium
Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel, tj. $a_n \geq a_{n+1} > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2. Číselné řady - příklady

Tato kapitola je věnována řešeným i neřešeným příkladům týkajících se číselných řad. Většina příkladů je zaměřena na zjišťování konvergence, resp. divergence řad pomocí kritérií konvergence uvedených v kapitole 1.4.1. S výjimkou srovnávacího kritéria budeme používat pouze limitní kritéria, která jsou pro výpočty vhodnější. Dále budeme ověřovat splnění nutné podmínky konvergence a podmínek Leibnitzova kritéria. Nakonec se naučíme určovat, zda řada s obecnými členy konverguje absolutně nebo relativně.

2.1. Nutná podmínka konvergence

V předchozí kapitole jsme si uvedli, že platí následující věta.

Věta. *Jestliže řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka. V případě, že není splněna nutná podmínka konvergence, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 1. Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{(n+3)!\,n}.$$

Řešení:

Pro ověření musíme vypočítat limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)!}{(n+3)!\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!\,n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)(n+4)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{9}{n}+\frac{20}{n^2}\right)}{n} = \infty \neq 0.$$

Dokázali jsme, že nutná podmínka konvergence splněna není. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{(n+3)!n}$ diverguje.

Příklad 2. Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2-4}{7n^2+1}.$$

Řešení:

Pro ověření musíme vypočítat limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-4}{7n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(9-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(7+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{9}{7} \neq 0.$$

Dokázali jsme, že nutná podmínka konvergence splněna není. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2-4}{7n^2+1}$ diverguje.

Cvičení 1. Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence u řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2}{(16n+1)(n+3)}$ [není, diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!8n}{(2n)!}$ [není, diverguje]

2.2. Srovnávací kritérium

Věta. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť*

$$a_n \leq b_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$*. Potom platí:*

- *konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, pak konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
- *diverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, pak diverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Příklad 3. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{5n} \leq \frac{1}{5n-2}.$$

Protože minorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je řadou harmonickou, která diverguje, diverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$.

Příklad 4. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{25n^2-20n}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{25n^2-20n}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{25n^2-20n+4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{(5n-2)^2} =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zjevně platí nerovnost

$$\frac{1}{5n-2} \leq \frac{5n-2}{25n^2-20n}.$$

Z příkladu 3 víme, že minorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$ diverguje. Z toho plyne, že diverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{25n^2-20n}$.

Příklad 5. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+7}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+7}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n^3+7} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Protože majorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje, konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+7}$.

Příklad 6. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^7 + 2n^3 + 8}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^7+2n^3+8}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^7} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^5}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ zjevně platí nerovnost

$$\frac{n^2}{5n^7 + 2n^3 + 8} \leq \frac{1}{5n^5}.$$

Protože majorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^5} = \frac{1}{5} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konverguje, konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^7+2n^3+8}$.

Příklad 7. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n + 3}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n+3}$ budeme porovnávat s geometrickou řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{4^n}{5^n + 3} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Protože majorantní geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ konverguje, konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n+3}$.

Příklad 8. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(5n-2)}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(5n-2)}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{5n-2} \leq \frac{1}{\ln(5n-2)}.$$

Z příkladu 3 víme, že minorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-2}$ diverguje. Z toho plyne, že diverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(5n-2)}$.

Cvičení 2. Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1}$ [diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)}{16n^2-8n}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^5+3}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3}{8n^6+11n^2+5n}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{11^n}{3+15^n}$ [konverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(4n-1)}$ [diverguje]

2.3. Limitní srovnávací kritérium

Věta. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ *a konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $L > 0$ *a diverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *pak diverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 9. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^5 + 6n^2 + 7}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^5+6n^2+7}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, která konverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^5+6n^2+7}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^5 + 6n^2 + 7} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5}{n^5\left(1 + \frac{6}{n^3} + \frac{7}{n^5}\right)} =$$

$$= 2.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^5+6n^2+7}$ konverguje.

Příklad 10. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{11}{6^n - 8}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{11}{6^n-8}$ budeme porovnávat s geometrickou řadou $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{6^n}$, která konverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{11}{6^n-8}}{\frac{1}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{11}{6^n - 8} \cdot \frac{6^n}{1} = 11 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{6^n \left(1 - \frac{8}{6^n}\right)} = 11.$$

Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{11}{6^n-8}$ konverguje.

Příklad 11. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n + 3}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$ budeme porovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n + 3} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \left(4 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{4}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$ diverguje.

Příklad 12. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^2+4}}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^2+4}}$ budeme porovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{\sqrt{n^2+4}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n^2+4}} \cdot \frac{n}{1} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = 5.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^2+4}}$ diverguje.

Příklad 13. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n+\sqrt{n^2+3}}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n+\sqrt{n^2+3}}$ budeme porovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9}{n+\sqrt{n^2+3}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+\sqrt{n^2+3}} \cdot \frac{n}{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{n+n\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}\right)} = \frac{9}{2}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n+\sqrt{n^2+3}}$ diverguje.

Příklad 14. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^2+2)^2 \cdot 7^{n-2}}.$$

Řešení:

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^2+2)^2 \cdot 7^{n-2}}$ budeme porovnávat s geometrickou řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$, která konverguje.

Vypočítáme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4}{(n^2+2)^2 \cdot 7^{n-2}}}{\frac{1}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n^2+2)^2 \cdot 7^{n-2}} \cdot \frac{7^n}{1} =$$

$$= 49 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4\left(1 + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^4}\right)} = 49.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n^2+2)^2 \cdot 7^{n-2}}$ konverguje.

Cvičení 3. Pomocí limitního srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{11n^6+8n^3+4}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{7^n-2}$ [konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5n+2}$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n\sqrt{n+6}}$ [diverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n+\sqrt{n^2+6}}$ [diverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n\left(n^2+\frac{3}{n}\right)^2 \cdot 9^{n-1}}$ [konverguje]

2.4. D'Alembertovo limitní podílové kritérium

Věta. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
- $q > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje;*
- $q = 1$, *nelze o konvergenci řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *tímto kritériem rozhodnout - řada může konvergovat i divergovat.*

Příklad 15. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{8^{n+1}}.$$

Řešení:

Abychom vyšetřili konvergenci této řady, vypočítáme q z předchozí věty. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4(n+1)^2}{8^{n+2}}}{\frac{4n^2}{8^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{8^{n+2}} \cdot \frac{8^{n+1}}{4n^2} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n+4}{4n^2} = \frac{1}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{4n^2} = \\ &= \frac{1}{8} < 1. \end{aligned}$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{8^{n+1}}$ konverguje.

Příklad 16. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(n+2)!}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{3n^n}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^{n+1}}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{3n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^n(n+1)}{(n+3)(n+2)!} \cdot \frac{(n+2)!}{3n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n+1}{n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = e \cdot 1 = e > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(n+2)!}$ diverguje.

Příklad 17. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{n} \frac{1}{n\,2^n}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\binom{4n+4}{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{\binom{4n}{n}}{n\,2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{4n+4}{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n\,2^n}{\binom{4n}{n}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+4)!}{(n+1)!\,(3n+3)!\,(n+1)} \cdot \frac{n\,n!\;(3n)!}{(4n)!} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 \left(4 + \frac{4}{n}\right)\left(4 + \frac{3}{n}\right)\left(4 + \frac{2}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{n^5 \left(3 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{126}{27} > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{n} \frac{1}{n\,2^n}$ diverguje.

Příklad 18. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n+2}}{8^n}+\frac{4n!}{n\,5^n}\right).$$

Řešení:

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n+2}}{8^n}+\frac{4n!}{n\,5^n}\right)$ představuje součet řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{8^n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n!}{n\,5^n}$. Abychom určili její konvergenci, resp. divergenci, musíme vyšetřit každou řadu zvlášť.

a) Vyšetříme konvergenci, resp. divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{8^n}$. Platí

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+3}}{8^{n+1}}}{\frac{3^{n+2}}{8^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+3}}{8^{n+1}}\cdot\frac{8^n}{3^{n+2}}=\frac{3}{8}<1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{8^n}$ konverguje.

b) Vyšetříme konvergenci, resp. divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n!}{n\,5^n}$. Platí

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4(n+1)!}{(n+1)5^{n+1}}}{\frac{4n!}{n\,5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)!}{(n+1)5^{n+1}}\cdot\frac{n\,5^n}{4n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)n!}{(n+1)5^{n+1}}\cdot\frac{n\,5^n}{4n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5}=\infty>1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)!}{n\,5^n}$ diverguje.

Jedná se o součet konvergentní a divergentní řady, tudíž řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n+2}}{8^n}+\frac{4n!}{n\,5^n}\right)$ diverguje.

Příklad 19. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{\left(\sqrt{6}\right)^n}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+11}{(\sqrt{6})^{n+1}}}{\frac{4n+7}{(\sqrt{6})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+11}{(\sqrt{6})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{6})^n}{4n+7} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4n+11}{4n+7} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{4n(1+\frac{11}{4n})}{4n(1+\frac{7}{4n})} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{\left(\sqrt{6}\right)^n}$ konverguje.

Příklad 20. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n \cdot \left(\frac{9}{e}\right)^n.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1) \cdot \left(\frac{9}{e}\right)^{n+1}}{3n \cdot \left(\frac{9}{e}\right)^n} = \frac{9}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{3n} =$$

$$= \frac{9}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n(1+\frac{1}{n})}{3n} = \frac{9}{e} > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n \cdot \left(\frac{9}{e}\right)^n$ diverguje.

Příklad 21. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)^2(n+1)}{(4n)!}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[2(n+1)!]^2(n+2)}{(4n+4)!}}{\frac{(2n!)^2(n+1)}{(4n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)!]^2(n+2)}{(4n+4)!} \cdot \frac{(4n)!}{(2n!)^2(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)n!]^2(n+2)}{(4n+4)\cdots(4n+1)(4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{(2n!)^2(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(4n+4)\cdots(4n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{(4n+4)\cdots(4n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^4\left(4+\frac{4}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(4+\frac{2}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n!)^2(n+1)}{(4n)!}$ konverguje.

Cvičení 4. Pomocí limitního podílového kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n+2}}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^{n-2}}{10n\, 2^n}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{5n!3^n}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{5e^n}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^3}$ [diverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n 5^n}{n!}$ [diverguje]

2.5. Cauchyovo limitní odmocninové kritérium

Věta. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde } q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
- $q > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje;*
- $q = 1$, *nelze o konvergenci řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *tímto kritériem rozhodnout - řada může konvergovat i divergovat.*

Příklad 22. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{5 \arccos\left(\frac{1}{2n}\right)} \right]^n .$$

Řešení:

Abychom vyšetřili konvergenci této řady, vypočítáme q z předchozí věty. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{4}{5 \arccos\left(\frac{1}{2n}\right)} \right]^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5 \arccos\left(\frac{1}{2n}\right)} =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arccos\left(\frac{1}{2n}\right)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{8}{5}\pi < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{5 \arccos\left(\frac{1}{2n}\right)} \right]^n$ konverguje.

Příklad 23. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{8^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{8} \cdot e < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konverguje.

Příklad 24. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+6}}\right)^{n}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+6}}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+6}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+6}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2+6}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\sqrt{n^2+3n+4}+\sqrt{n^2+6}\right)}{n^2+3n+4-n^2-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+n\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}\right)}{3n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}\right)}{3n-2} = \frac{4}{3} > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n^2+3n+4}-\sqrt{n^2+6}}\right)^{n}$ diverguje.

Příklad 25. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{\frac{n^2+4n}{2}}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{\frac{n^2+4n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{\frac{n+4}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left[\frac{3n\left(1+\frac{4}{3n}\right)}{3n\left(1-\frac{2}{3n}\right)}\right]^n\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(e^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}}} = e > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{\frac{n^2+4n}{2}}$ diverguje.

Příklad 26. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\operatorname{arctg}^n(1+\frac{1}{n})}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\operatorname{arctg}^n(1+\frac{1}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\operatorname{arctg}(1+\frac{1}{n})} =$$

$$= \frac{3}{\operatorname{arctg} 1} = \frac{3}{\frac{\pi}{4}} = \frac{12}{\pi} > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\operatorname{arctg}^n(1+\frac{1}{n})}$ diverguje.

Příklad 27. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+4}{2n^2} \right)^n .$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n+4}{2n^2} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n+4}{2n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(6+\frac{4}{n}\right)}{2n^2} =$$

$$= \frac{3}{\infty} = 0 < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+4}{2n^2}\right)^n$ konverguje.

Příklad 28. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{6} = \frac{1}{6} < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n}$ konverguje.

Cvičení 5. Pomocí limitního odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3-1}{4n^3+2}\right)^n$ [diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, 2^n e^{-2n}$ [konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n^3+5}{3n^3+1}\right)^n$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(11\, \sqrt[n+1]{n+1} + 3\right)^n$ [diverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}\right)^n$ [konverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^n \operatorname{arctg}^n \left(\frac{n}{5}\right)$ [diverguje]

2.6. Limitní Raabeovo kritérium

Věta. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q, \qquad kde\ q\in\mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- *je-li* $q>1$, *pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;*
- *je-li* $q<1$, *pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad 29. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}.$$

Řešení:

Abychom vyšetřili konvergenci této řady, vypočítáme q z předchozí věty. Platí

$$q=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[1-\frac{\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}}{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[1-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{n^4+4n^3+4n^2-n^4-4n^3-6n^2-6n-1}{n^4+4n^3+4n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} -\frac{2n^3+4n^2+n}{n^4+4n^3+4n^2}=\lim_{n\to\infty} -\frac{n^3\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}=-\frac{2}{\infty}=0<1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}$ diverguje.

Příklad 30. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(n+5)(2n)}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{1}{(3n+5)(n+6)(2n+2)}}{\frac{1}{(3n+2)(n+5)(2n)}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{(3n+2)(n+5)(2n)}{(3n+5)(n+6)(2n+2)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{6n^3 + 52n^2 + 106n + 60 - 6n^3 - 34n^2 - 20n}{6n^3 + 52n^2 + 106n + 60}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{18n^2 + 86n + 60}{6n^3 + 52n^2 + 106n + 60}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{18n^3 + 86n^2 + 60n}{6n^3 + 52n^2 + 106n + 60} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^3\left(3 + \frac{43}{3n} + \frac{10}{n^2}\right)}{6n^3\left(1 + \frac{26}{3n} + \frac{53}{3n^2} + \frac{10}{n^3}\right)} = 3 > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(n+5)(2n)}$ konverguje.

Příklad 31. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^3}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n-1)^3}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}{n^3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 3n^2 + n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3} = 3 > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^3}$ konverguje.

Příklad 32. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{2}}{(n+4)(3n+5)}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{\frac{4^{n+2}}{2}}{(n+5)(3n+8)}}{\frac{\frac{4^{n+1}}{2}}{(n+4)(3n+5)}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{4^{n+2}}{2}}{(n+5)(3n+8)} \cdot \frac{(n+4)(3n+5)}{\frac{4^{n+1}}{2}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{12n^2+68n+80}{3n^2+23n+40}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{3n^2+23n+40-12n^2-68n-80}{3n^2+23n+40}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{9n^3+45n^2+40n}{3n^2+23n+40} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^3\left(9+\frac{45}{n}+\frac{40}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{23}{n}+\frac{40}{n^2}\right)} = -\infty < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{2}}{(n+4)(3n+5)}$ diverguje.

Příklad 33. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2n}{(n+3)!}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{(n+1)!(2n+2)}{(n+4)!}}{\frac{n!\,2n}{(n+3)!}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{(n+1)!(2n+2)}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n!\,2n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{(n+1)\,n!(2n+2)}{(n+4)(n+3)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n!\,2n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n^2+8n-2n^2-4n-2}{2n^2+8n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n}{2n^2+8n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 2 > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2n}{(n+3)!}$ konverguje.

Příklad 34. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Řešení:

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{7^{2n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{7^{2n-1}}{(2n+1)!}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{7^{2n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{7^{2n-1}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{7^{2n+1}}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{7^{2n-1}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{4n^2+10n+6-49}{4n^2+10n+6}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+10n^2-43n}{4n^2+10n+6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(4+\frac{10}{n}-\frac{43}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{10}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} = \infty > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n-1}}{(2n+1)!}$ konverguje.

Cvičení 6. Pomocí limitního Raabeova kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+5)^2}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n+1)(2n-1)}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+2}}{(n+2)!}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\left(5n^2\right)}{3^{n-1}}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+7}$ [diverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^2+3)(3n+1)}$ [konverguje]

2.7. Integrální kritérium

Věta. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Příklad 35. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot 4^{-n}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = 2x \cdot 4^{-x}$ je nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$.
Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace. Dostaneme

$$f'(x) = 2 \cdot 4^{-x} - 2x \cdot 4^{-x} \ln 4 = 2 \cdot 4^{-x} (1 - x \ln 4).$$

Protože je výraz $(1 - x \ln 4) \leq 0$ pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ je funkce $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí.
Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$\begin{aligned}
q &= \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} 2x \cdot 4^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t 2x \cdot 4^{-x}\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[-2x \cdot \frac{1}{4^x \ln 4} \right]_1^t + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{2}{4^x \ln 4}\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2\ln 4} - \frac{2t}{4^t \ln 4} \right] - \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\ln 4} \cdot \left[\frac{1}{4^x \ln 4} \right]_1^t = \\
&= \frac{1}{2\ln 4} - \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\ln 4} \cdot \left[\frac{1}{4^t \ln 4} - \frac{1}{4 \ln 4} \right] = \frac{1}{2\ln 4} + \frac{1}{2\ln^2 4} = \\
&= \frac{1}{2\ln 4} \cdot \left(1 + \frac{1}{\ln 4} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu $\int_1^t 2x \cdot 4^{-x} \mathrm{d}x$ jsme použili metodu per partes.

Pro výpočet limity $\lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{2t}{4^t \ln 4}\right)$ jsme použili L'Hospitalovo pravidlo.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n \cdot 4^{-n}$ konverguje.

Příklad 36. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+2n-3}{n^2+2n-8}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8}$ je nezáporná na intervalu $\langle 3, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace. Dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+2x-8)-(x^2+2x-3)(2x+2)}{(x^2+2x-8)^2} = \\ &= \frac{2x^3+6x^2-12x-16-2x^3-6x^2+2x+6}{(x^2+2x-8)^2} = -10\frac{x+1}{(x^2+2x-8)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 3, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$\begin{aligned} q &= \int_3^{\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = \int_3^{\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8} \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{x^2+2x-3-5+5}{x^2+2x-8} \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_3^t \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{5}{x^2+2x-8} \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_3^t \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \frac{5}{6} \int_3^t \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-2}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{t\to\infty} [x]_3^t + \lim_{t\to\infty} \frac{5}{6} \cdot [\ln|x+4| - \ln|x-2|]_3^t = \\ &= \lim_{t\to\infty} (t-3) + \lim_{t\to\infty} \left(\ln\left|\frac{t+4}{t-2}\right| - \ln|7|\right) = \infty + 0 - \ln|7| = \infty. \end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu $\int_3^t \frac{5}{x^2+2x-8} \mathrm{d}x$ jsme použili rozklad na parciální zlomky.

Řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+2n-3}{n^2+2n-8}$ diverguje.

Příklad 37. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ je nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace.

Dostaneme

$$f'(x) = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}} \leq 0.$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$q = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-\frac{1}{5}}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{5}{4} \cdot x^{\frac{4}{5}}\right]_1^t = \frac{5}{4} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(t^{\frac{4}{5}} - 1\right) = \frac{5}{4} \cdot (\infty - 1) = \infty.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ diverguje.

Příklad 38. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+3}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{5}{x^2+3}$ je nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace.

Dostaneme

$$f'(x) = -\frac{10x}{(x^2+3)^2} \leq 0.$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$q = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{5}{x^2+3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{5}{x^2+3}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to\infty} 5 \cdot \int_1^{t} \frac{1}{x^2+3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{5}{3} \cdot \int_1^{t} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{2\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi < \infty.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+3}$ konverguje.

Příklad 39. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+4)^3}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{1}{(6n+4)^3}$ je nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace. Dostáváme

$$f'(x) = -\frac{18}{(6n+4)^4} = -\frac{9}{8}\frac{1}{(3n+2)^4} \leq 0.$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$q = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{(6x+4)^3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{(6x+4)^3}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{rlrl} \text{sub.: } 6x+4 = & u & \text{meze } x = t & \to u = 6t+4 \\ 6\mathrm{d}x = & \mathrm{d}u & x = 1 & \to u = 10 \\ \mathrm{d}x = & \frac{\mathrm{d}u}{6} & & \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{6}\int_{10}^{6t+4}\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\right]_{10}^{6t+4} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{12}\left[\frac{1}{(6t+4)^2} - \frac{1}{100}\right] = -\frac{1}{12}\cdot\left(0 - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{1200} < \infty.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n+4)^3}$ konverguje.

Příklad 40. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+3}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{x^4}{x^5+3}$ je nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace.

Dostaneme

$$f'(x) = \frac{4x^3\left(x^5+3\right) - x^4 5x^4}{\left(x^5+3\right)^2} = \frac{4x^8 + 12x^3 - 5x^8}{\left(x^5+3\right)^2} = -\frac{x^8 - 12x^3}{\left(x^5+3\right)^2} \leq 0.$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$q = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{x^4}{x^5+3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{x^4}{x^5+3}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{rlrl} \text{sub.: } x^5+3 = & u & \text{meze } x = t & \to u = t^5+3 \\ 5x^4\mathrm{d}x = & \mathrm{d}u & x = 1 & \to u = 4 \\ \mathrm{d}x = & \frac{\mathrm{d}u}{5x^4} & & \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{5} \int_4^{t^5+3} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{5} \cdot [\ln|u|]_4^{t^5+3} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \left[\ln\left|t^5+3\right| - \ln|4|\right] = \frac{1}{5} \cdot \infty - \frac{1}{5} \cdot \ln|4| = \infty.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+3}$ diverguje.

Cvičení 7. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{6n^5}{n^6-1}$ [diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{(5n+2)^3}}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{4}{n^2-9}$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2-4n+13}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n \cdot e^{-n}$ [konverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ [diverguje]

2.8. Alternující řady

Věta. Leibnitzovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost kladných čísel, tj.* $a_n \geq a_{n+1} > 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak alternující řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *konverguje právě tehdy, když platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad 41. Ověřte splnění podmínek Leibnitzova kritéria u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{2n^2+4}.$$

Řešení:

1. $\left\{\frac{8}{2n^2+4}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2. $\left\{\frac{8}{2n^2+4}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \frac{8}{2n^2+4} &\geq \frac{8}{2n^2+4n+6}, \\ 2n^2+4n+6 &\geq 2n^2+4, \\ 4n+2 &\geq 0, \\ n &\geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Vzhledem k tomu, že n jde od 1, je podmínka splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{2n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^2\left(2+\frac{4}{n^2}\right)} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{2n^2+4}$ konverguje.

Příklad 42. Ověřte splnění podmínek Leibnitzova kritéria u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+4}{6n+3}.$$

Řešení:

1. $\left\{\frac{5n+4}{6n+3}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2. $\left\{\frac{5n+4}{6n+3}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{5n+4}{6n+3} \geq \frac{5n+9}{6n+9},$$
$$30n^2 + 69n + 36 \geq 30n^2 + 69n + 27,$$
$$9 \geq 0.$$

   Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+4}{6n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(5+\frac{4}{n}\right)}{n\left(6+\frac{3}{n}\right)} = \frac{5}{6} \neq 0.$$

Není splněna 3. podmínka. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+4}{6n+3}$ diverguje.

Příklad 43. Ověřte splnění podmínek Leibnitzova kritéria u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n}{(n+1)\,9^n}.$$

Řešení:

1. $\left\{\frac{5n}{(n+1)9^n}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2. $\left\{\frac{5n}{(n+1)9^n}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \frac{5n}{(n+1)\,9^n} &\geq \frac{5n+5}{(n+2)\,9^{n+1}}, \\ 45n^2 + 90n &\geq 5n^2 + 10n + 5, \\ 40n^2 + 80n - 5 &\geq 0. \end{aligned}$$

   Podmínka splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{(n+1)\,9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)9^n} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5n}{(n+1)9^n}$ konverguje.

Cvičení 8. Ověřte splnění podmínek Leibnitzova kritéria u řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+7}{3n+1}$ [3. podmínka není splněna, diverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{5n}{4n^2+3}$ [podmínky jsou splněny, konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{9n^2+6}}{\sqrt{16n^2-5}}$ [3. podmínka není splněna, diverguje]

2.9. Absolutní a relativní konvergence

Věta. *Konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice. Řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada *konverguje relativně.*

Příklad 44. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+2)^2}{e^{n+1}}$$

konverguje absolutně nebo relativně.

Řešení:

Nejprve vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{(n+2)^2}{e^{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{e^{n+1}}$$

pomocí limitního podílového kritéria. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+3)^2}{e^{n+2}}}{\frac{(n+2)^2}{e^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^2}{e^{n+2}} \cdot \frac{e^{n+1}}{(n+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6n+9}{n^2+4n+4} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{e} < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{e^{n+1}}$ konverguje, tzn., že alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+2)^2}{e^{n+1}}$ konverguje absolutně.

Příklad 45. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6n-1}$$

konverguje absolutně nebo relativně.

Řešení:

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{6n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$$

pomocí srovnávacího kritéria. Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{6n} \leq \frac{1}{6n-1}.$$

Protože minorantní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je řadou harmonickou, která diverguje, diverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6n-1}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně, což vyšetříme použitím Leibnitzova kritéria. Musíme ověřit, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

1. $\left\{\frac{1}{6n-1}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2. $\left\{\frac{1}{6n-1}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{6n-1} \geq \frac{1}{6n+5},$$

$$6n+5 \geq 6n-1,$$

$$6 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n-1} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6n-1}$ konverguje relativně.

Příklad 46. Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n(n+3)}$$

konverguje absolutně nebo relativně.

Řešení:

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n(n+3)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+3)}$$

pomocí limitního odmocninového kritéria.

Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+3)} = 0 < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+3)}$ konverguje, tzn., že alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n(n+3)}$ konverguje absolutně.

Cvičení 9. Rozhodněte, zda řada konverguje absolutně nebo relativně

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}$ [konverguje absolutně]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2n-1}$ [konverguje relativně]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\left(\frac{6n+2}{n}\right)^n}$ [konverguje absolutně]

3. Mocninné řady

V této části se budeme věnovat mocninným řadám, které představují zvláštní případ funkčních řad. Stejně jako v případě číselných řad si musíme uvést základní pojmy a vlastnosti, které budeme potřebovat při řešení příkladů. Všechny uvedené pojmy jsou čerpány z [1], [2] a [8].

3.1. Základní pojmy

Definice 3.1. Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{nebo} \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí.*

Definice 3.2. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a x_0 je libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou se středem v bodě* x_0 a *koeficienty* a_n rozumíme řadu funkcí ve tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Poznámka 12. Velmi častým případem mocninné řady, se kterou se můžeme setkat, je řada ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, jejíž střed $x_0 = 0$. Obecně každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ můžeme pomocí substituce $(x - x_0) = y$ převést na řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ se středem v počátku.

Definice 3.3. *Oborem konvergence* mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je množina všech bodů $\overline{x} \in \mathbb{R}$ takových, že číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{x} - x_0)^n$ konverguje.

Věta 3.1. *Každá mocninná řada konverguje ve svém středu a má součet* a_0.

Věta 3.2. *Ke každé mocninné řadě* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *existuje jediné číslo* $r \geq 0$ *takové, že*

- $r = 0$, *pokud řada konverguje pouze ve svém středu, tj. v bodě* $\{x_0\}$;
- $r = \infty$, *pokud řada konverguje pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;
- $r \in (0, \infty)$, *pokud řada absolutně konverguje pro všechna* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *a pro všechna* $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$ *diverguje.*

Definice 3.4. Číslo r z předchozí věty se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ se nazývá *interval absolutní konvergence.*

Poznámka 13. Podle věty 3.2 oborem konvergence mocninné řady může být:

- jednoprvková množina $\{x_0\}$;
- celá reálná osa, tj. $(-\infty, \infty)$;
- interval konečné délky $(x_0 - r, x_0 + r)$. Na tomto intervalu mocninná řada konverguje absolutně. V hraničních bodech $x_0 - r$ a $x_0 + r$ může ale řada konvergovat (absolutně/relativně) nebo divergovat. Proto chování v krajních bodech musíme vyšetřit zvlášť dosazením hodnot $x_0 - r$ a $x_0 + r$ za x.

Možné způsoby, jak určit poloměr konvergence, nám udává následující věta.

Věta 3.3. *Nechť je dána mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *a nechť existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda, \qquad \textit{resp.} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

Potom pro poloměr konvergence r *mocninné řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *platí*

$$r = \frac{1}{\lambda}.$$

Přitom pro $\lambda = \infty$ *klademe* $r = 0$ *a pro* $\lambda = 0$ *klademe* $r = \infty$*.*

3.2. Vlastnosti a součet mocninné řady

Věta 3.4. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$*. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu* $(x_0 - r, x_0 + r)$*.*

Věta 3.5. Abelova věta

Součet $s(x)$ *řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je funkce spojitá na intervalu* $(x_0 - r, x_0 + r)$*. Konverguje-li řada v koncovém bodě* $x_0 - r$ *(resp. v bodě* $x_0 + r$*), pak je funkce* $s(x)$ *spojitá v bodě* $x_0 - r$ *zprava (resp. v bodě* $x_0 + r$ *zleva), tj. platí*

$$\lim_{x\to x_0-r^+} s(x) = \lim_{x\to x_0-r^+}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n,$$

$$\left(\textit{resp.} \lim_{x\to x_0+r^-} s(x) = \lim_{x\to x_0+r^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right).$$

Věta 3.6. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* $r>0$ *a nechť funkce*

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

je její součet na intervalu (x_0-r, x_0+r). *Potom pro všechna* $x \in (x_0-r, x_0+r)$ *platí*

$$\int_{x_0}^{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\right]\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]'=s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(x-x_0)^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Obě mocninné řady na pravých stranách mají stejný poloměr konvergence r *jako původní řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, *ale již nemusí mít stejný obor konvergence.*

Poznámka 14. Povšimněme si, že za dolní mez integrálu budeme vždy dosazovat střed x_0 dané mocninné řady.

3.3. Rozvoj funkce v mocninnou řadu

Nechť je dána funkce $f(x)$. Při rozvoji se snažíme nalézt mocninnou řadu odpovídající této funkci, přičemž daná funkce představuje součet hledané mocninné řady. Navíc rozvoje funkcí se uplatňují v řadě aplikací.

Definice 3.5. Nechť má funkce f v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce* f *v bodě* x_0.

Je-li $x_0=0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*, která je tedy tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Poznámka 15. Jestliže se nám podaří rozvinout funkci f na nějakém intervalu I, uvnitř kterého leží i bod x_0, v mocninnou řadu se středem v bodě x_0, pak neexistuje žádná jiná mocninná řada, do které by bylo možné funkci f rozvést. Tento rozvoj je zároveň Taylorovým rozvojem funkce f.

Přehled rozvojů některých elementárních funkcí do Maclaurinovy řady.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1, 1),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a číslo

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

je *binomický koeficient*.

Uvedené rozvoje můžeme použít např. k

- přibližnému výpočtu funkčních hodnot,
- výpočtu limit,
- přibližnému výpočtu integrálů atd.

4. Mocninné řady - příklady

Na následujících příkladech se nejprve naučíme určovat obor konvergence a součet mocninných řad. Dále si odvodíme některé Maclaurinovy řady elementárních funkcí uvedených na straně 60. Nakonec si ukážeme, jak nám mohou mocninné řady pomoci při přibližném výpočtu integrálů, limit či při určování přibližných funkčních hodnot. Samozřejmě nechybí ani příklady k procvičení.

4.1. Obor konvergence a obor absolutní konvergence

Se zjištěním oboru konvergence a oboru absolutní konvergence souvisí i nalezení středu x_0 a poloměru konvergence r.
Při jejich určování budeme postupovat takto:

1. Nejprve určíme střed x_0 mocninné řady podle následující definice.

   Definice. Nechť je dána mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *střed* mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

2. Určíme poloměr konvergence r pomocí uvedené věty.

   Věta. *Nechť je dána mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a nechť existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda, \qquad \textit{resp.} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda.$$

   Potom pro poloměr konvergence r mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ platí

$$r = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Určíme interval absolutní konvergence $(x_0 - r, x_0 + r)$.

   Intervalem absolutní konvergence mocninné řady může být:

   - jednoprvková množina $\{x_0\}$, jestliže $r = 0$;
   - celá reálná osa, jestliže $r = \infty$;
   - interval konečné délky $(x_0 - r, x_0 + r)$, jestliže $r \in (0, \infty)$. Na tomto intervalu mocninná řada konverguje absolutně.

   V případě, že interval absolutní konvergence je jednoprvková množina nebo celá reálná osa, je tento interval zároveň oborem konvergence i oborem absolutní konvergence.

   Jestliže obdržíme interval konečné délky $(x_0 - r, x_0 + r)$, musíme ještě vyšetřit chování řady v krajních bodech $x_0 - r$ a $x_0 + r$, a to dosazením těchto bodů za x, tj. vyšetřujeme konvergenci číselných řad. V těchto hraničních bodech může řada konvergovat (absolutně/relativně) nebo divergovat.

4. Stanovíme obor konvergence a obor absolutní konvergence mocninné řady na základě výsledků získaných při vyšetřování chování řady v krajních bodech.

Příklad 47. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 0$, protože řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} (x-0)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{5^{n+1}}{(2+n)^2}}{\frac{5^n}{(1+n)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(2+n)^2} \cdot \frac{(1+n)^2}{5^n} =$$

$$= 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n}+1\right)^2}{n^2 \left(\frac{2}{n}+1\right)^2} = 5.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \frac{1}{5}.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = \frac{1}{5}$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$\left(0 - \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

   Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

   Dosazením bodu $x = \frac{1}{5}$ do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}.$$

Abychom zjistili konvergenci, resp. divergenci této číselné řady, použijeme např. limitní Raabeovo kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{1}{(2+n)^2}}{\frac{1}{(1+n)^2}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{(1+n)^2}{(2+n)^2}\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n^2+4n+4-n^2-2n-1}{n^2+4n+4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2n+3}{n^2+4n+4}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = 2 > 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ v bodě $x = \frac{1}{5}$ konverguje.

Dosazením bodu $x = -\frac{1}{5}$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ dostaneme alternující řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+n)^2}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{(1+n)^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2}.$$

S touto číselnou řadou jsme se již setkali při vyšetřování konvergence v bodě $x = \frac{1}{5}$ a zjistili jsme, že konverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+n)^2}$ konverguje absolutně, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ v bodě $x = -\frac{1}{5}$ absolutně konverguje.

4. Obor konvergence se rovná oboru absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ a je roven intervalu $\left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$.

Příklad 48. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}(x+1)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = -1$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}(x+1)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}\left[x-(-1)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{3^n}{(n+2)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{3^n} =$$
$$= 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+3)(n+2)!} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \infty.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}(x+1)^n$ je $(-\infty, \infty)$, tzn., že mocninná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Současně jsme obdrželi obor konvergence i obor absolutní konvergence mocninné řady.

Příklad 49. Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(4n)^{2n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} (x+2)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = -2$, protože řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n)^{2n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} (x+2)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n)^{2n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} \left[x-(-2)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n\,(4n)^{2n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\,(4n)^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} = \frac{1\cdot\infty}{e} = \infty.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 0.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n)^{2n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} (x+2)^n$ je jednoprvká množina $\{-2\}$, tzn., že mocninná řada konverguje pouze ve svém středu. Současně jsme obdrželi obor konvergence i obor absolutní konvergence mocninné řady.

Příklad 50. Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n12^n}(4x+4)^n .$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Abychom mohli určit střed x_0, musíme mocninnou řadu nejprve upravit tak, že z výrazu $(4x+4)^n$ vytkneme 4^n.

   Dostaneme

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{n12^n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n3^n}(x+1)^n .$$

   Střed této mocninné řady $x_0 = -1$, protože řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n3^n}(x+1)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n3^n}[x-(-1)]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

   $$\lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{n3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} =$$
   $$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}.$$

   Pro poloměr konvergence r platí:

   $$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 3.$$

   Upozornění. Za a_n jsme dosazovali $(-1)^n \frac{1}{n3^n}$.

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n12^n}(4x+4)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -1$ a $r = 3$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

   $$(-1-3, -1+3) = (-4, 2) .$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 2$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (8+4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obdrželi jsme harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně, což vyšetříme použitím Leibnitzova kritéria.

Musíme ověřit, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1},$$

$$n+1 \geq n,$$

$$1 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje relativně, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ v bodě $x = 2$ relativně konverguje.

Dosazením bodu $x = -4$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (-16+4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Opět jsme obdrželi harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Z toho plyne, že i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ v bodě $x = -4$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ je interval $(-4, 2\rangle$.

   Obor absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n12^n} (4x+4)^n$ je interval $(-4, 2)$.

Příklad 51. Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 6$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(3n+3)\cdot 4^{2n+3}}}{\frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n \cdot 4^{2n+1}}{(3n+3)\cdot 4^{2n+3}} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{16}.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 16.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 6$ a $r = 16$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(6 - 16, 6 + 16) = (-10, 22)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 22$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (22-6)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} 16^n = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obdrželi jsme harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Z toho plyne, že i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n$ v bodě $x = 22$ diverguje.

Dosazením bodu $x = -10$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (-10-6)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (-16)^n = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Opět jsme obdrželi harmonickou řadu, která diverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně.

Konvergenci této alternující řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ jsme vyšetřili již v příkladu 50 a zjistili jsme, že konverguje relativně.

Tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}} (x-6)^n$ v bodě $x = -10$ relativně konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}}(x-6)^n$ je interval $\langle -10, 22)$.

   Obor absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n \cdot 4^{2n+1}}(x-6)^n$ je interval $(-10, 22)$.

Příklad 52. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Abychom mohli určit střed x_0, musíme mocninnou řadu nejprve upravit tak, že z výrazu $(6x+3)^n$ vytkneme 6^n.

   Dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n 3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!} \left(x+\frac{1}{2}\right)^n.$$

   Střed mocninné řady $x_0 = -\frac{1}{2}$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6^n 3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!} \left(x+\frac{1}{2}\right)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6^n 3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!} \left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{6^{n+1}3^{n+2}(n+2)!}{(5n+7)(n+1)!}}{\frac{6^n 3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+1}\, 3^{n+2}(n+2)!}{(5n+7)(n+1)!} \cdot \frac{(5n+2)n!}{6^n\, 3^{n+1}(n+1)!} =$$

$$= 18 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+12n+4}{5n^2+12n+7} = 18 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{12}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = 18.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \frac{1}{18}.$$

Upozornění. Za a_n jsme dosazovali $\frac{6^n 3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}$.

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -\frac{1}{2}$ a $r = \frac{1}{18}$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{18}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right) = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{4}{9}\right).$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = -\frac{4}{9}$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}\left(-\frac{8}{3}+3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}.$$

Abychom zjistili konvergenci této číselné řady, použijeme limitní Raabeovo kritérium. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{\frac{3(n+2)!}{(5n+7)(n+1)!}}{\frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[1 - \frac{3(n+2)!}{(5n+7)(n+1)!} \cdot \frac{(5n+2)n!}{3(n+1)!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{15n^2+12n+7-15n^2-12n-4}{15n^2+12n+7}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{15n^2+12n+7}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2\left(15+\frac{12}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = 0 < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ v bodě $x = -\frac{4}{9}$ diverguje.

Dosazením bodu $x = -\frac{5}{9}$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}\left(-\frac{10}{3}+3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}.$$

S touto řadou jsme se již setkali při vyšetřování konvergence v bodě $x = -\frac{4}{9}$ a zjistili jsme, že diverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně, což vyšetříme použitím Leibnitzova kritéria.

Musíme ověřit, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!} \geq \frac{3(n+2)!}{(5n+7)(n+1)!},$$

$$5n^2 + 12n + 7 \geq 5n^2 + 12n + 4,$$

$$3 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(5+\frac{7}{n}\right)} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Poslední podmínka není splněna. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3(n+1)!}{(5n+2)n!}$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ v bodě $x=-\frac{5}{9}$ diverguje.

4. Obor konvergence se rovná oboru absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(5n+2)n!}(6x+3)^n$ a je roven intervalu $\left(-\frac{5}{9},-\frac{4}{9}\right)$.

Příklad 53. Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n!}{n^3}(x-4)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0=4$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+2}(n+1)!}{(n+1)^3}}{\frac{2^{n+1}n!}{n^3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+2}(n+1)!}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{2^{n+1}n!}\right|=$$

$$=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)n!}{(n+1)^3n!}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2(1+\frac{1}{n})^2}=\infty.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r=\frac{1}{\lambda},\qquad \text{odtud}\qquad r=0.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n!}{n^3}(x-4)^n$ je jednoprvková množina $\{4\}$, tzn., že mocninná řada konverguje pouze ve svém středu. Současně jsme obdrželi obor konvergence i obor absolutní konvergence mocninné řady.

Příklad 54. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n (3x+1)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Abychom mohli určit střed x_0, musíme mocninnou řadu nejprve upravit tak, že z výrazu $(3x+1)^n$ vytkneme 3^n.

   Dostaneme
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n 3^n \left(x + \frac{1}{3} \right)^n.$$

   Střed mocninné řady $x_0 = -\frac{1}{3}$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n 3^n \left(x + \frac{1}{3} \right)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n 3^n \left[x - \left(-\frac{1}{3} \right) \right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

   $$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n 3^n \right|} = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{11n+3}{5n^2+8} =$$
   $$= 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(11 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(5 + \frac{8}{n^2}\right)} = 0.$$

   Pro poloměr konvergence r platí
   $$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \infty.$$

   Upozornění. Za a_n jsme dosazovali $\left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n 3^n$.

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{11n+3}{5n^2+8} \right)^n (3x+1)^n$ je $(-\infty, \infty)$, tzn., že mocninná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Současně jsme obdrželi obor konvergence i obor absolutní konvergence mocninné řady.

Příklad 55. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} (x+2)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = -2$, protože řadu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} (x+2)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} [x-(-2)]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+6)9^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+4)9^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)9^n}{(2n+6)9^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{9}.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 9.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} (x+2)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -2$ a $r = 9$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(-2-9, -2+9) = (-11, 7).$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 7$ do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} (x+2)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n} (7+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+4}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+4}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+4}$$

pomocí limitního srovnávacího kritéria. Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$ budeme porovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje. Vyšetříme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2}.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$ diverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně, což vyšetříme použitím Leibnitzova kritéria.

Musíme ověřit, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{2n+4}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{2n+4}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{2n+4} \geq \frac{1}{2n+6},$$

$$2n+6 \geq 2n+4,$$

$$2 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+4} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+4}$ konverguje relativně, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ v bodě $x=7$ relativně konverguje.

Dosazením bodu $x=-11$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(-11+2)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+4}.$$

S touto řadou jsme se již setkali při vyšetřování konvergence v bodě $x=7$ a zjistili jsme, že diverguje. Z toho plyne, že i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ v bodě $x=-11$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ je interval $(-11,7\rangle$.

   Obor absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ je interval $(-11,7)$.

Příklad 56. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{8^n\cdot 3^n}(x+5)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0=-5$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{8^n\cdot 3^n}(x+5)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{8^n\cdot 3^n}\left[x-(-5)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}\right|} = \frac{4}{8\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 6.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(x+5)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -5$ a $r = 6$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(-5-6, -5+6) = (-11, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 1$ do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(x+5)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(1+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n} \cdot 6^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1.$$

Obdrželi jsme řadu jedniček, která diverguje.

Dosazením bodu $x = -11$ do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(x+5)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(-11+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n} \cdot (-6)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Obdrželi jsme Grandiho řadu, o které víme, že osciluje.

4. Obor konvergence se rovná oboru absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n \cdot 3^n}(x+5)^n$ a je roven intervalu $(-11, 1)$.

Příklad 57. Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} (x+4)^n.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = -4$, protože řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} (x+4)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} [x-(-4)]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{9^n}{\sqrt[3]{n+1} \cdot 27^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(n+1)^{\frac{1}{3n}} 27} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{3n}}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{3n}}} \right]^{n+1} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}} \right]^{\frac{n+1}{3n}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{3n} \cdot \ln \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}} = \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{3} \ln 1} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{1}{3}.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 3.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} (x+4)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -4$ a $r = 3$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(-4-3, -4+3) = (-7, -1).$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = -1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(x+4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(-1+4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} \cdot 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Abychom zjistili konvergenci této číselné řady, použijeme např. integrální kritérium.

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ je nezáporná na intervalu $\langle 0, \infty)$.

Zda je $f(x)$ na tomto intervalu také nerostoucí, vyšetříme pomocí první derivace. Dostáváme

$$f'(x) = \left[(x+1)^{-\frac{1}{3}}\right]' = -\frac{1}{3}\,(x+1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} \leq 0.$$

Funkce $f(x)$ je pro všechna $x \in \langle 0, \infty)$ nerostoucí.

Konvergenci, resp. divergenci řady zjistíme výpočtem integrálu

$$\begin{aligned}
q &= \int_0^{\infty} f\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{ll} \text{sub.: } x+1 = \ u & \text{meze } x = 0 \to u = 1 \\ \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}u & \qquad x = t \ \to u = t+1 \end{array} \right| = \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t+1} \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t+1} u^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}u = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}\right]_1^{t+1} = \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{3}{2}\left[(t+1)^{\frac{2}{3}} - 1\right] = \infty.
\end{aligned}$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(x+4)^n$ v bodě $x = -1$ diverguje.

Dosazením bodu $x = -7$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(x+4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(-7+4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} \cdot (-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

S touto řadou jsme se již setkali při vyšetřování konvergence v bodě $x = -1$ a zjistili jsme, že diverguje. Tzn., že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ nekonverguje absolutně, ale může konvergovat relativně, což vyšetříme použitím Leibnitzova kritéria.

Musíme ověřit, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}},$$

$$\sqrt[3]{n+2} \geq \sqrt[3]{n+1},$$

$$1 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ konverguje relativně, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}} (x+4)^n$ v bodě $x = -7$ relativně konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(x+4)^n$ je interval $\langle -7, -1)$.

   Obor absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{27^n \sqrt[3]{n+1}}(x+4)^n$ je interval $(-7, -1)$.

Příklad 58. Je dána řada

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)}(x-12)^{3n+1}.$$

Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

Řešení:

Nejdříve provedeme úpravu řady. Platí

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-12)^{3n+1}}{2^{3n+1}(2n^2+n)} = (x-12) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left[(x-12)^3\right]^n}{2^{3n+1}(2n^2+n)}.$$

Vidíme, že řada není zapsána v obvyklém tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, proto provedeme substituci

$$(x-12)^3 = y. \tag{1}$$

Obdržíme novou mocninnou řadu

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n,$$

u které budeme hledat střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence.

1. Střed mocninné řady $y_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} (y-0)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{2^{3n+4}\left[2(n+1)^2+(n+1)\right]}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n+1}(2n^2+n)}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+1}\left(2n^2+n\right)}{2^{3n+4}\left[2\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)\right]} = \frac{1}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{5}{2n}+\frac{3}{2n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{8}.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 8.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)}y^n$ obdržíme dosazením hodnot $y_0 = 0$ a $r = 8$ do intervalu $(y_0 - r, y_0 + r)$, tj.

$$(0-8, 0+8) = (-8, 8)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $y = 8$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)}y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8^n}{2^{3n+1}\left(2n^2+n\right)} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2+2n}.$$

Nejprve rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2+2n}\right| = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4n^2+2n}$$

pomocí srovnávacího kritéria. Řadu $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4n^2+2n}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, která konverguje. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{4n^2+2n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Protože majorantní řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje také řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4n^2+2n}$.

Tzn., že řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2+2n}$ konverguje absolutně, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$ v bodě $y = 8$ absolutně konverguje.

Dosazením bodu $y = -8$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-8)^n}{2^{3n+1}(2n^2+n)} = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4n^2+2n}.$$

S touto řadou jsme se již setkali při vyšetřování konvergence v bodě $y = 8$ a zjistili jsme, že konverguje.

Z toho plyne, že i mocninná řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$ v bodě $y = -8$ konverguje.

4. Obor konvergence se rovná oboru absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$ a je roven intervalu $\langle -8, 8 \rangle$.

Protože jsme doposud pracovali s mocninnou řadou $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} y^n$, týkají se získané výsledky proměnné y. Nás ale především zajímá, jaký bude střed, poloměr konvergence a obor konvergence vzhledem k proměnné x mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} (x-12)^{3n+1}$. Obdržíme je s využitím vztahu (1), a tedy

- střed mocninné řady $x_0 = 12$,
- poloměr konvergence $r = 2$,
- obor konvergence se rovná oboru absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{3n+1}(2n^2+n)} (x-12)^{3n+1}$ a je roven intervalu $\langle 10, 14 \rangle$.

Cvičení 10. Určete střed, poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence řady

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(n+1)^3}(x-2)^n$ $\quad [x_0 = 2, r = 1, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = \langle 1, 3\rangle]$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+5)^n(x-8)^n$ $\quad [x_0 = 8, r = 0, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = \{8\}]$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)!}{(4n)!}(x+7)^n$ $\quad [x_0 = -7, r = \infty, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = (-\infty, \infty)]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n4^n}(2x+3)^n$ $\quad \left[x_0 = -\frac{3}{2}, r = 2, \mathrm{OK} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \mathrm{OAK} = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n\cdot 5^{n-1}}(x-4)^n$ $\quad [x_0 = 4, r = 5, \mathrm{OK} = \langle -1, 9), \mathrm{OAK} = (-1, 9)]$

f) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(2n-6)n!}(\frac{x}{16}-1)^n$ $\quad [x_0 = 16, r = 4, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = (12, 20)]$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!n}{4^n n!}x^n$ $\quad [x_0 = 0, r = 0, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = \{0\}]$

h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4n+4}{n^2-1}\right)^n (5x-1)^n$ $\quad \left[x_0 = -\frac{1}{5}, r = \infty, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = (-\infty, \infty)\right]$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{(7n-2)5^n} (x-1)^n$ $\quad [x_0 = 1, r = 5, \mathrm{OK} = (-4, 6\rangle, \mathrm{OAK} = (-4, 6)]$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\,6^n} (3x-12)^n$ $\quad [x_0 = 4, r = 2, \mathrm{OK} = \langle 2, 6), \mathrm{OAK} = (2, 6)]$

k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}(\frac{3}{2}n+1)}{3^n(6n+4)}(x-1)^n$ $\quad \left[x_0 = 1, r = \frac{3}{2}, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\right]$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}(x+6)^{3n}$ $\quad [x_0 = -6, r = 1, \mathrm{OK} = \mathrm{OAK} = \langle -7, -5\rangle]$

4.2. Součet mocninné řady

Při určování součtu $s\,(x)$ mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ budeme nejprve postupovat podle kroků 1. až 4. popsaných na straně 62 a 63. Především nás bude zajímat interval absolutní konvergence (x_0-r, x_0+r) a obor konvergence. Obor absolutní konvergence stanovovat nebudeme.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Tuto funkci se snažíme postupným derivováním, resp. integrováním upravit tak, abychom obdrželi řadu, jejíž součet umíme určit. Někdy stačí, když tuto řadu upravíme na funkci, kterou umíme rozvinout v mocninnou řadu. Ve většině námi uvedených příkladů obdržíme geometrickou řadu, jejíž součet

$$S=\frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q|<1.$$

Takto získanou funkci $S(x)$ musíme zpětně integrovat, resp. derivovat a obdržíme výsledný součet $s(x)$.
Derivování a integrování můžeme provádět pouze na otevřeném intervalu (x_0-r, x_0+r), protože právě na něm právě na něm mocninná řada konverguje stejnoměrně.

Jestliže navíc při určování oboru konvergence zjistíme, že řada konverguje i v některém z krajních bodů x_0-r nebo x_0+r, pak je podle věty 3.5 součtová funkce $s\,(x)$ v těchto krajních bodech také spojitá (jednostranně). Pokud by například řada konvergovala v obou hraničních bodech, můžeme psát, že součtová funkce $s\,(x)$ platí na uzavřeném intervalu $\langle x_0-r, x_0+r\rangle$.

Příklad 59. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} (x-0)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\,5^{n+1}}}{\frac{1}{n\,5^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,5^n}{(n+1)\ 5^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{5}.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 5.$$

3. Interval absolutní kovergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = 5$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(0-5, 0+5) = (-5, 5)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 5$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obdrželi jsme harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Proto i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ v bodě $x = 5$ diverguje.

Dosazením bodu $x = -5$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} \left(-5\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Pro vyšetření konvergence alternující řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ použijeme Leibnitzovo kritérium.

Ověříme, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1},$$

$$n + 1 \geq n,$$

$$1 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in N$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ v bodě $x = -5$ konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ je interval $\langle -5, 5)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n.$$

Funkci $s\,(x)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$s'\,(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\,5^n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{x}{25} + \frac{x^2}{125} + \cdots .$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \frac{1}{5}$ a kvocientem $q = \frac{x}{5}$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S\,(x) = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{x}{5}} = \frac{1}{5-x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-5, 5)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Výsledný součet $s\,(x)$ mocninné řady vypočteme zpětným integrováním získané funkce $S\,(t) = \frac{1}{5-t}$ v mezích $x_0 = 0$ až x. Dostaneme

$$\begin{aligned} s\,(x) &= \int_0^x S\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{5-t}\mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \text{sub.: } 5-t = u & \text{meze } t = 0 \to u = 5 \\ \quad -\mathrm{d}t = \mathrm{d}u & \qquad t = x \to u = 5-x \\ \quad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u & \end{array} \right| = \\ &= \int_5^{5-x} -\frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\left[\ln|u|\right]_5^{5-x} = -\ln|5-x| + \ln|5| = \\ &= \ln\left|\frac{5}{5-x}\right|. \end{aligned}$$

Vypočítali jsme součet $s\,(x)$ pro $x \in (-5, 5)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodě $x = -5$, je funkce $s\,(x)$ v tomto bodě spojitá zprava.

Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ je funkce $s\,(x) = \ln\left|\frac{5}{5-x}\right|$ pro všechna $x \in \langle -5, 5)$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n = \ln\left|\frac{5}{5-x}\right|$.

Příklad 60. Určete součet řady

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n.$$

Řešení:

Řada $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ je až na změnu indexu $n = 4$ stejná jako v příkladu 59. Změna indexu ovlivní pouze výsledný součet. Obor konvergence zůstává stejný (vzhledem k způsobu výpočtu oboru konvergence). Můžeme tedy přejít rovnou na krok 5.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x) = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n.$$

Funkci $s(x)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$s'(x) = \left(\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n \right)' = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n\,5^n} x^{n-1} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{5^n} =$$
$$= \frac{x^3}{625} + \frac{x^4}{3125} + \frac{x^5}{15625} \cdots .$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \frac{x^3}{625}$ a kvocientem $q = \frac{x}{5}$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S(x) = \frac{\frac{x^3}{625}}{1 - \frac{x}{5}} = \frac{1}{125} \cdot \frac{x^3}{5-x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-5, 5)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Výsledný součet $s(x)$ mocninné řady vypočteme zpětným integrováním získané funkce $S(t) = \frac{1}{125} \cdot \frac{t^3}{5-t}$ v mezích $x_0 = 0$ až x. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{125} \cdot \frac{t^3}{5-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{125} \cdot \int_0^x \frac{t^3}{5-t}\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{llll} \text{sub.: } 5-t = u & & \text{meze } t = 0 \to u = 5 & \\ \qquad -\mathrm{d}t = \mathrm{d}u & & \qquad t = x \to u = 5-x & \\ \qquad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u & & & \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{125} \cdot \int_5^{5-x} \frac{(5-u)^3}{u}\mathrm{d}u = \\
&= -\frac{1}{125} \int_5^{5-x} \left(\frac{125}{u} - 75 + 15u - u^2 \right) \mathrm{d}u = \\
&= -\frac{1}{125} \left[125 \ln|u| - 75u + \frac{15}{2}u^2 - \frac{u^3}{3} \right]_5^{5-x} = \\
&= \ln\left|\frac{5}{5-x}\right| - \frac{1}{5}x - \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{375}x^3.
\end{aligned}
$$

Vypočítali jsme součet $s(x)$ pro $x \in (-5, 5)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodě $x = -5$, je funkce $s(x)$ v tomto bodě spojitá zprava.

Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ je funkce

$s(x) = \ln\left|\frac{5}{5-x}\right| - \frac{1}{375}x^3 - \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{5}x$ pro všechna $x \in \langle -5, 5)$,

tj. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n = \ln\left|\frac{5}{5-x}\right| - \frac{1}{5}x - \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{375}x^3$.

Poznámka 16. Obdrželi jsme velice rozumný výsledek, který jsme mohli očekávat. Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$ je totiž roven součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n$, akorát jsme od něj odečetli první tři členy řady.

Příklad 61. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ můžeme přepsat do tvaru $x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)\,(x-0)^{n}$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\,(n+3)}{(-1)^{n-1}\,(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = 1$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(0-1, 0+1) = (-1, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = -1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,(n+2)\,(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n+2.$$

Je zřejmé, že tato číselná řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} n+2 \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n+2$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ v bodě $x=-1$ diverguje.

Dosazením bodu $x=1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)\,1^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)\,.$$

Tato řada opět nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}(n+2)\neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ v bodě $x=1$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ je interval $(-1,1)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}.$$

Funkci $s(x)$ budeme nejprve integrovat. Výpočtem integrálu funkce $s(t)$ v mezích $x_0=0$ až x dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)t^{n+1}\mathrm{d}t=\\ &=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n+2}t^{n+2}\right]_0^x=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+2}=x^3-x^4+x^5-\cdots\,.\end{aligned}$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x^3$ a kvocientem $q = -x$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S(x) = \frac{x^3}{1+x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-1, 1)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Výsledný součet $s(x)$ mocninné řady vypočteme zpětným derivováním získané funkce $S(x) = \frac{x^3}{1+x}$. Dostaneme

$$s(x) = S'(x) = \left(\frac{x^3}{1+x}\right)' = \frac{3x^2(1+x) - x^3}{(1+x)^2} = \frac{3x^2 + 2x^3}{(1+x)^2}.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1}$ je funkce $s(x) = \frac{3x^2+2x^3}{(1+x)^2}$ pro všechna $x \in (-1, 1)$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+2)x^{n+1} = \frac{3x^2+2x^3}{(1+x)^2}$.

Poznámka 17. Všimněme si, že narozdíl od předchozích dvou příkladů jsme tuto mocninnou řadu nejprve integrovali, a až pak zpětně derivovali. Neexistuje žádné pravidlo, které by nám řeklo, jestli nejdříve derivovat nebo integrovat. Záleží pouze na vlastním uvážení, co nám pomůže.

Příklad 62. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 3$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}$ můžeme přepsat do tvaru $(x-3)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}\,(x-3)^{n}$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)!}}{\frac{1}{(n+1)n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+2)(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \infty.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}$ je $(-\infty, \infty)$, tzn., že mocninná řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Současně jsme obdrželi obor konvergence a přejdeme na krok 5.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}.$$

Funkci $s\,(x)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$s'\,(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)\,n!}\,(x-3)^{n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n}}{n!}.$$

Víme, že platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

a tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!} = e^{x-3} = s'(x).$$

Výsledný součet $s(x)$ vypočteme zpětným integrováním získané funkce $s'(t) = e^{t-3}$ v mezích $x_0 = 3$ až x. Dostaneme

$$\int_3^x s'(t)\,\mathrm{d}t = \int_3^x e^{t-3}\mathrm{d}t = \left[e^{t-3}\right]_3^x = e^{x-3} - e^0 = e^{x-3} - 1.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}$ je funkce $s(x) = e^{x-3} - 1$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$, tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1} = e^{x-3} - 1$.

Příklad 63. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 4$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 4$ a $r = 1$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(4-1, 4+1) = (3, 5)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 5$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(5-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Je zřejmé, že tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} n \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ v bodě $x = 5$ diverguje.

Dosazením bodu $x = 3$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(3-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n.$$

Tato řada opět nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n\, n \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ v bodě $x = 3$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ je interval $(3, 5)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n.$$

Nejprve z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ vytkneme výraz $(x-4)$. Tato operace nám v následujících krocích zjednoduší výpočet. Dostaneme

$$s\,(x) = (x-4)\sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^{n-1}.$$

Označme

$$\varphi\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^{n-1}.$$

Nyní budeme hledat součet funkce $\varphi\,(x)$ na intervalu $(3,5)$, kterou budeme nejdříve integrovat.

Vypočteme integrál funkce $\varphi\,(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(t-4)^{n-1}$ v mezích $x_0 = 4$ až x.

Dostaneme

$$\int_4^x \varphi\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_4^x \sum_{n=1}^{\infty} n(t-4)^{n-1}\mathrm{d}t = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(t-4)^n}{n}\right]_4^x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n = (x-4) + (x-4)^2 + (x-4)^3 + \cdots\,.$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x-4$ a kvocientem $q = x-4$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S\,(x) = \frac{x-4}{1-(x-4)} = \frac{x-4}{5-x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (3,5)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Součet $\varphi(x)$ mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^{n-1}$ vypočteme zpětným derivováním získané funkce $S(x) = \frac{x-4}{5-x}$. Dostaneme

$$\varphi(x) = S'(x) = \left(\frac{x-4}{5-x}\right)' = \frac{(5-x)-(x-4)(-1)}{(5-x)^2} = \frac{1}{(5-x)^2}.$$

Tento součet nesmíme zapomenout vynásobit výrazem $(x-4)$, abychom získali výsledný součet $s(x)$. Platí

$$s(x) = (x-4)\cdot\varphi(x) = (x-4)\frac{1}{(5-x)^2} = \frac{x-4}{(5-x)^2}.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n$ je funkce $s(x) = \frac{x-4}{(5-x)^2}$ pro všechna $x \in (3,5)$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n = \frac{x-4}{(5-x)^2}$.

Příklad 64. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6} x^{n+3}.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6} x^{n+3}$ můžeme přepsat do tvaru $x^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6} \left[x-(-0)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+7n+12}}{\frac{(-1)^n}{n^2+5n+6}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n^2+7n+12} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}\right)} = 1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = 1$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(0-1, 0+1) = (-1, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}1^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}.$$

Pro vyšetření konvergence alternující řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}$ použijeme Leibnitzovo kritérium.

Ověříme, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{n^2+5n+6}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{n^2+5n+6}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{n^2+5n+6} \geq \frac{1}{n^2+7n+12},$$

$$n^2 + 7n + 12 \geq n^2 + 5n + 6,$$

$$n \geq -3.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in N$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ v bodě $x = 1$ konverguje.

Dosazením bodu $x = -1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}(-1)^{n+3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}.$$

Abychom zjistili konvergenci této řady, použijeme např. srovnávací kritérium.

Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n^2+5n+6} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Protože majorantní řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje také řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$. Tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ v bodě $x = -1$ konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ je interval $\langle -1, 1\rangle$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}.$$

Funkci $s\,(x)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$s'\,(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}\right]' =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+3}{(n+3)\,(n+2)}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n+2}x^{n+2}.$$

Řada v tomto tvaru nám při určování součtu moc nepomohla, proto ji zkusíme na intervalu $(-1,1)$ derivovat ještě jednou.

Výpočtem derivace $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)'$ získáme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{n+1} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots\,.$$

Nyní jsme již obdrželi geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x$ a kvocientem $q = -x$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S\,(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-1,1)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Jelikož jsme dvakrát derivovali, musíme získanou funkci $S\,(x)$ zpětně dvakrát integrovat, abychom obdrželi výsledný součet $s\,(x)$. Výpočtem integrálu $\int_0^x \left(\int_0^u \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$ dostaneme

$$s\,(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln|1+x|\,(x+1)\,.$$

Vypočítali jsme součet $s\,(x)$ pro $x \in (-1,1)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodech $x = -1$ a $x = 1$, je funkce $s\,(x)$ v bodě $x = -1$

spojitá zprava a v bodě $x = 1$ spojitá zleva.

Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3}$ je funkce

$s\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + x - \ln\left|1+x\right|\left(x+1\right)$ pro všechna $x \in \left\langle -1, 1\right\rangle$,

tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+5n+6}x^{n+3} = \frac{x^2}{2} + x - \ln\left|1+x\right|\left(x+1\right)$.

Příklad 65. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}.$$

Řešení:

Nejdříve provedeme úpravu řady. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(x^2\right)^n.$$

Vidíme, že řada není zapsána v obvyklém tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, proto provedeme substituci

$$x^2 = y. \tag{2}$$

Obdržíme novou mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}y^n,$$

u které budeme hledat střed, poloměr konvergence a obor konvergence.

1. Střed mocninné řady $y_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}y^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(y-0\right)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = 0.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = \infty.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^n$ je $(-\infty,\infty)$, tzn., že mocninná řada konverguje pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Současně jsme obdrželi obor konvergence této mocninné řady.

Protože jsme doposud pracovali s mocninnou řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^n$, týkají se získané výsledky proměnné y. Nás ale především zajímá, jaký bude střed, poloměr konvergence a obor konvergence vzhledem k proměnné x mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}$. Obdržíme je s využitím vztahu (2), a tedy

- střed mocninné řady $x_0 = 0$,
- poloměr konvergence $r = \infty$,
- obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}$ je interval $(-\infty,\infty)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}.$$

Z řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n+1}$ nejdříve vytkneme výraz x. Tato operace nám v následujících krocích zjednoduší výpočet. Dostaneme

$$s(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Označme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.$$

Nyní budeme hledat součet funkce $\varphi(x)$ na intervalu $(-\infty, \infty)$, kterou budeme nejprve integrovat.

Vypočteme integrál funkce $\varphi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$ v mezích $x_0 = 0$ až x.

Dostaneme

$$\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n)!} x^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Víme, že platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

Součet $\varphi(x)$ mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ vypočteme zpětným derivováním získané funkce $\sin x$. Dostaneme

$$\varphi(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Tento součet nesmíme zapomenout vynásobit výrazem x, abychom obdrželi výsledný součet $s(x)$. Platí

$$s(x) = x \cdot \varphi(x) = x \cdot \cos x.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1}$ je funkce $s(x) = x \cdot \cos x$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$, tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1} = x \cdot \cos x$.

Příklad 66. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ můžeme přepsat do tvaru $x^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} (x-0)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+5}}{\frac{1}{n+4}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)} = 1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = 1$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(0-1, 0+1) = (-1, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} 1^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4}.$$

Abychom rozhodli o konvergenci, resp. divergenci této číselné řady, použijeme např. limitní srovnávací kritérium.

Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ budeme porovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje. Vyšetříme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ v bodě $x = 1$ diverguje.

Dosazením bodu $x = -1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{1}{n+4}.$$

Pro vyšetření konvergence alternující řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{1}{n+4}$ použijeme Leibnitzovo kritérium.
Ověříme, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{n+4}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{n+4}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{n+4} \geq \frac{1}{n+5},$$

$$n+5 \geq n+4,$$

$$1 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in N$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{1}{n+4}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ v bodě $x = -1$ konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ je interval $\langle -1, 1)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}.$$

Z řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2}$ nejdříve vytkneme výraz $\frac{1}{x^2}$. Tato operace nám v následujících krocích zjednoduší výpočet. Dostaneme

$$s(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+4}.$$

Označme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+4}.$$

Nyní budeme hledat součet funkce $\varphi(x)$ na intervalu $(-1, 1)$, kterou budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$\varphi'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+4} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n+4} x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = x^3 + x^4 + x^5 + \cdots .$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x^3$ a kvocientem $q = x$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S(x) = \frac{x^3}{1-x}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-1, 1)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Součet $\varphi(x)$ mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+4}$ vypočteme zpětným integrováním získané funkce $S(t) = \frac{t^3}{1-t}$ v mezích $x_0 = 0$ až x. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^3}{1-t}\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{rlr} \text{sub.: } 1-t &= u & \text{meze } t = 0 \to u = 1 \\ \mathrm{d}t &= -\mathrm{d}u & t = x \to u = 1-x \\ t^3 &= (1-u)^3 & \end{array} \right| = \\
&= \int_1^{1-x} -\frac{(1-u)^3}{u}\mathrm{d}u = \int_1^{1-x} \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u}\mathrm{d}u = \\
&= \int_1^{1-x} \left(u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{3u^2}{2} + 3u - \ln|u| \right]_1^{1-x} = \\
&= -\left(\ln|1-x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).
\end{aligned}
$$

Tento součet nesmíme zapomenout vynásobit výrazem $\frac{1}{x^2}$, abychom obdrželi výsledný součet $s(x)$. Platí

$$
s(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\ln|1-x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).
$$

Vypočítali jsme součet $s(x)$ pro $x \in (-1, 1)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodě $x = -1$, je funkce $s(x)$ v tomto bodě spojitá zprava. Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+6}$ je funkce

$s(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\ln|1-x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$ pro všechna $x \in \langle -1, 1)$,

tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^{n+2} = -\frac{1}{x^2} \left(\ln|1-x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$.

Příklad 67. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = -3$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)x^{n+2}$ můžeme přepsat do tvaru $(x+3)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)\left[x-(-3)\right]^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n^2+9n+20}{(-1)^n(n^2+7n+12)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+9n+20}{n^2+7n+12} = \lim_{n\to\infty} = \frac{n^2\left(1+\frac{9}{n}+\frac{20}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}\right)} = 1.$$

   Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -3$ a $r = 1$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(-3-1, -3+1) = (-4, -2)\,.$$

   Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

   Dosazením bodu $x = -2$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(-2+3)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12).$$

Je zřejmé, že tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^2 + 7n + 12 \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(n^2+7n+12\right)$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)x^{n+2}$ v bodě $x=-2$ diverguje.

Dosazením bodu $x=-4$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(-1)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}n^2+7n+12.$$

Tato řada opět nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} n^2+7n+12 \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2+7n+12$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ v bodě $x=-4$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ je interval $(-4,-2)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}.$$

Funkci $s\left(x\right)$ budeme nejprve integrovat. Výpočtem integrálu funkce $s\left(t\right)$

v mezích $x_0 = -3$ až x dostaneme

$$\int_{-3}^{x} s\left(t\right) \mathrm{d}t = \int_{-3}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 + 7n + 12)(t+3)^{n+2} \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)(n+4)}{n+3} (t+3)^{n+3} \right]_{-3}^{x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+4)(x+3)^{n+3}.$$

Řada v tomto tvaru nám při určování součtu moc nepomohla, proto ji zkusíme na intervalu $(-4, -2)$ integrovat ještě jednou. Dostaneme

$$\int_{-3}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+4)(u+3)^{n+3} \mathrm{d}u = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+4}{n+4} (u+3)^{n+4} \right]_{-3}^{x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+3)^{n+4} =$$

$$= (x+3)^4 - (x+3)^5 + (x+3)^6 - \cdots .$$

Nyní jsme již obdrželi geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = (x+3)^4$ a kvocientem $q = -(x+3)$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S\left(x\right) = \frac{(x+3)^4}{x+4}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-4, -2)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Jelikož jsme dvakrát integrovali, musíme získanou funkci $S\left(x\right)$ zpětně dvakrát derivovat, abychom obdrželi výsledný součet $s\left(x\right)$. Výpočtem druhé derivace funkce $S\left(x\right) = \frac{(x+3)^4}{x+4}$ dostaneme

$$s\left(x\right) = \frac{2\left(x+3\right)^2 \left(3x^2 + 26x + 57\right)}{\left(x+4\right)^3}.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}$ je funkce

$s\left(x\right)=\frac{2(x+3)^2\left(3x^2+26x+57\right)}{\left(x+4\right)^3}$ pro všechna $x\in(-4,-2)$,

tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+7n+12)(x+3)^{n+2}=\frac{2(x+3)^2\left(3x^2+26x+57\right)}{\left(x+4\right)^3}$.

Příklad 68. Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}\left(x+1\right)^{2n+2}.$$

Řešení:

Nedříve provedeme úpravu řady. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}\left(x+1\right)^{2n+2}=\left(x+1\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}\left[\left(x+1\right)^2\right]^n.$$

Vidíme, že řada není zapsána v obvyklém tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, proto provedeme substituci

$$\left(x+1\right)^2=y. \tag{3}$$

Obdržíme novou mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n,$$

u které budeme hledat střed, poloměr konvergence a obor konvergence.

1. Střed mocninné řady $y_0=0$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}\left(y-0\right)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{4\left(n+1\right)^2+6n+8}}{\frac{(-1)^n}{4n^2+6n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{4n^2+14n+12}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{14}{n}+\frac{12}{n^2}\right)}=1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2} y^n$ obdržíme dosazením hodnot $y_0 = 0$ a $r = 1$ do intervalu $(y_0 - r, y_0 + r)$, tj.

$$(0-1, 0+1) = (-1, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $y = 1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2} y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2}.$$

Pro vyšetření konvergence alternující řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2}$ použijeme Leibnitzovo kritérium.

Ověříme, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{4n^2+6n+2}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{4n^2+6n+2}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{4n^2+6n+2} \geq \frac{1}{4n^2+14n+8},$$

$$4n^2 + 14n + 8 \geq 4n^2 + 6n + 2,$$

$$n \geq -\frac{3}{4}.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in N$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2+6n+2} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$ v bodě $y=1$ konverguje.

Dosazením bodu $y=-1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+6n+2}.$$

Abychom zjistili konvergenci této řady, použijeme např. limitní srovnávací kritérium.
Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+6n+2}$ budeme porovnávat s řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, o které víme, že konverguje.
Vyšetříme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4n^2+6n+2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4}.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n^2+6n+2}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$ v bodě $y=-1$ konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$ je interval $\langle -1,1\rangle$.

Protože jsme doposud pracovali s mocninnou řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}y^n$, týkají se získané výsledky proměnné y. Nás ale především zajímá, jaký bude střed, poloměr konvergence a obor konvergence vzhledem k proměnné x mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2+6n+2}x^{2n+2}$. Obdržíme je s využitím vztahu (3), a tedy

- střed mocninné řady $x_0=-1$,

- poloměr konvergence $r = 1$,
- obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2} x^{2n+2}$ je interval $\langle -2, 0\rangle$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2}(x+1)^{2n+2}.$$

Funkci $s\left(x\right)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$\begin{aligned} s'\left(x\right) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2}(x+1)^{2n+2}\right]' = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+2}{(2n+2)\left(2n+1\right)}(x+1)^{2n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}(x+1)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Víme, že platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x,$$

a tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}(x+1)^{2n+1} = \operatorname{arctg}(x+1).$$

Výsledný součet $s\left(x\right)$ vypočteme zpětným integrováním funkce $\operatorname{arctg}(t+1)$ v mezích $x_0 = 0$ až x.

Dostaneme

$$
\begin{aligned}
s\,(x) &= \int_0^x \operatorname{arctg}(t+1)\mathrm{d}t = \\
&= \left| \begin{array}{ll} \text{sub.: } t+1 = u & \text{meze } t=0 \to u=1 \\ \qquad\quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}u & \qquad\quad t = x \to u = x+1 \end{array} \right| = \\
&= \int_1^{x+1} \operatorname{arctg} u \,\mathrm{d}u = [u \operatorname{arctg} u]_1^{x+1} - \int_1^{x+1} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \\
&= (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^{(x+1)^2} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}\mathrm{d}z = \\
&= (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+z|\right]_1^{(x+1)^2} = \\
&= (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+2x+2\right| - \ln|2|\right) = \\
&= (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x^2+2x+2}\right|.
\end{aligned}
$$

Pro výpočet integrálu $\int_1^{x+1} \operatorname{arctg} u \,\mathrm{d}u$ jsme použili metodu per partes.
Pro výpočet integrálu $\int_1^{x+1} \frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u$ jsme použili substituci

$$
\left| \begin{array}{lll} \text{sub.:} & u^2 = z & \text{meze } u = 0 \qquad \to z = 1 \\ & 2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}z & \qquad\quad u = x+1 \to z = (x+1)^2 \\ & \mathrm{d}u = \frac{1}{2u}\mathrm{d}z & \end{array} \right| .
$$

Vypočítali jsme součet $s\,(x)$ pro $x \in (-2, 0)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodech $x = -2$ a $x = 0$, je funkce $s\,(x)$ v bodě $x = -2$ spojitá zprava a v bodě $x = 0$ spojitá zleva.

Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n^2+6n+2}(x+1)^{2n+2}$ je funkce

$s\,(x) = (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2}{x^2+2x+2}\right|\right)$ pro všechna $x \in \langle -2, 0\rangle$,

tj. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2+6n+2}(x+1)^{2n+2} = (x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x^2+2x+2}\right|$.

Příklad 69. Určete součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n.$$

Řešení:

1. Střed mocninné řady $x_0 = 6$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n\,2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,2^n}{(n+1)\,2^{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 2.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 6$ a $r = 2$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(6-2, 6+2) = (4, 8)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $x = 8$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(8-6)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}2^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Obdrželi jsme harmonickou řadu, o které víme, že diverguje. Proto i mocninná řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ v bodě $x = 8$ diverguje.

Dosazením bodu $x = 4$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ dostaneme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(4-6)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}\,(-2)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\,\frac{1}{n}.$$

Pro vyšetření konvergence alternující řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\,\frac{1}{n}$ použijeme Leibnitzovo kritérium.

Ověříme, zda jsou splněny všechny tři podmínky Leibnitzova kritéria.

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je posloupnost kladných členů pro všechna $n \in N$.

b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nerostoucí posloupnost, tj. $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, což si ověříme následujícím způsobem

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1},$$

$$n+1 \geq n,$$

$$1 \geq 0.$$

Podmínka je splněna pro všechna $n \in N$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Všechny podmínky jsou splněny. Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\,\frac{1}{n}$ konverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ v bodě $x = 4$ konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ je interval $\langle 4, 8)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s\,(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-6)^n.$$

Funkci $s\left(x\right)$ budeme nejprve derivovat. Dostaneme

$$s'\left(x\right)=\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(x-6)^n\right]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n\,2^n}(x-6)^{n-1}=$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-6)^{n-1}=\frac{x-6}{4}+\frac{(x-6)^2}{8}+\frac{(x-6)^3}{16}+\cdots.$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1=\frac{x-6}{4}$ a kvocientem $q=\frac{x-6}{2}$, jejíž součet

$$S=\frac{a_1}{1-q}\qquad\text{pro}\qquad|q|<1,$$

tudíž

$$S\left(x\right)=\frac{\frac{x-6}{4}}{1-\frac{x-6}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-6}{x-8}.$$

Ověřením podmínky $|q|<1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x\in(4,8)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Výsledný součet $s\left(x\right)$ mocninné řady vypočteme zpětným integrováním získané funkce $S\left(t\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t-6}{t-8}$ v mezích $x_0=6$ až x. Dostaneme

$$s\left(x\right)=\int_6^x S\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_6^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{t-6}{t-8}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_6^x\frac{t-6}{t-8}\mathrm{d}t=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_6^x\frac{t-6-2+2}{t-8}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\int_6^x\mathrm{d}t+\int_6^x\frac{2}{t-8}\mathrm{d}t\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left([t]_6^x+[2\ln|u|]_{-2}^{x-8}\right)=$$
$$=-\frac{x}{2}+3-\ln|x-8|+\ln|-2|=\ln\left|\frac{-2}{x-8}\right|-\frac{x}{2}+3.$$

Pro výpočet integrálu $\int_6^x\frac{2}{t-8}\mathrm{d}t$ jsme použili substituci

$$\left|\begin{array}{rl}\text{sub.: } t-8=u & \text{meze } t=6\to u=-2\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u & \qquad t=x\to u=x-8\end{array}\right|$$

Vypočítali jsme součet $s(x)$ pro $x \in (4,8)$. Jelikož původní mocninná řada konverguje v bodě $x = 4$, je funkce $s(x)$ v tomto bodě spojitá zprava. Můžeme psát, že součet mocninné řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n$ je funkce $s(x) =$ $= \ln\left|\frac{-2}{x-8}\right| - \frac{x}{2} + 3$ pro všechna $x \in \langle 4,8)$, tj. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-6)^n = \ln\left|\frac{-2}{x-8}\right| - \frac{x}{2} + 3$.

Příklad 70. Určete součet řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} (3n+1)(x+2)^{3n}.$$

Řešení:

Nejdříve provedeme úpravu řady. Platí

$$\sum_{n=3}^{\infty} (3n+1)\left[(x+2)^3\right]^n.$$

Vidíme, že řada není zapsána v obvyklém tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, proto provedeme substituci

$$(x+2)^3 = y. \tag{4}$$

Obdržíme novou mocninnou řadu

$$\sum_{n=3}^{\infty} (3n+1)\,y^n,$$

u které budeme hledat střed, poloměr konvergence a obor konvergence.

1. Střed mocninné řady $y_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)\,y^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)(y-0)^n$.

2. Pro určení poloměru konvergence r, vypočítáme hodnotu λ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n+4}{3n+1} \right| = \frac{3n\left(1+\frac{4}{3n}\right)}{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)} = 1.$$

Pro poloměr konvergence r platí

$$r = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{odtud} \qquad r = 1.$$

3. Interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)\, y^n$ obdržíme dosazením hodnot $y_0 = 0$ a $r = 1$ do intervalu $(y_0 - r, y_0 + r)$, tj.

$$(0-1, 0+1) = (-1, 1)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Dosazením bodu $y = 1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)\, y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} (3n+1)\, 1^n = \sum_{n=3}^{\infty} 3n+1.$$

Je zřejmé, že tato řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} 3n+1 \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} 3n+1$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)\, y^n$ v bodě $y = 1$ diverguje.

Dosazením bodu $y = -1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (3n+1)\, y^n$ dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (3n+1)\,.$$

Tato řada opět nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n (3n+1) \neq 0.$$

Z toho plyne, že řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n(3n+1)$ diverguje, tudíž i mocninná řada $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)\,y^n$ v bodě $y=-1$ diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)\,y^n$ je interval $(-1,1)$.

Protože jsme doposud pracovali s mocninnou řadou $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)\,y^n$, týkají se získané výsledky proměnné y. Nás ale především zajímá, jaký bude střed, poloměr konvergence a obor konvergence vzhledem k proměnné x mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n}$. Obdržíme je s využitím vztahu (4), a tedy

- střed mocninné řady $x_0=-2$,
- poloměr konvergence $r=1$,
- obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n}$ je interval $(-3,-1)$.

5. Součet hledáme ve tvaru funkce

$$s(x)=\sum_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n}.$$

Funkci $s(x)$ budeme nejprve integrovat. Výpočtem integrálu funkce $s(t)$ v mezích $x_0=-2$ až x dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{x}s(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{x}\sum_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n}\mathrm{d}t = \\ &= \left[\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+1}{3n+1}(t+2)^{3n+1}\right]_{-2}^{x} = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}(x+2)^{3n+1} = (x+2)^{10}+(x+2)^{13}+(x+2)^{16}\cdots .\end{aligned}$$

Obdrželi jsme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = (x+2)^{10}$ a kvocientem $q = (x+2)^3$, jejíž součet

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro} \qquad |q| < 1,$$

tudíž

$$S(x) = \frac{(x+2)^{10}}{1-(x+2)^3}.$$

Ověřením podmínky $|q| < 1$ zjistíme, že tento součet platí pouze pro $x \in (-3,-1)$, tedy pro x patřící do intervalu absolutní konvergence, na kterém mocninnou řadu sčítáme.

Výsledný součet $s(x)$ mocninné řady vypočteme zpětným derivováním získané funkce $S(x) = \frac{(x+2)^{10}}{1-(x+2)^3}$. Dostaneme

$$s(x) = S'(x) = \left[\frac{(x+2)^{10}}{1-(x+2)^3}\right]' =$$

$$= \frac{10(x+2)^9\left[1-(x+2)^3\right] + \left[(x+2)^{10}\,3(x+2)^2\right]}{\left[1-(x+2)^3\right]^2} =$$

$$= \frac{(x+2)^9 \cdot \left[10 - 7\cdot(x+2)^3\right]}{\left[1-(x+2)^3\right]^2}.$$

Součet mocninné řady $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n}$ je funkce

$s(x) = \frac{(x+2)^9 \cdot \left[10-7\cdot(x+2)^3\right]}{\left[1-(x+2)^3\right]^2}$ pro všechna $x \in (-3,-1)$, tj.

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}(3n+1)(x+2)^{3n} = \frac{(x+2)^9 \cdot \left[10-7\cdot(x+2)^3\right]}{\left[1-(x+2)^3\right]^2}.$

Cvičení 11. Určete součet řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,7^n} x^n$ $\left[s\left(x\right) = \ln\left|\frac{7}{7-x}\right| \text{ pro } x \in \left\langle -7, 7\right)\right]$

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\,7^n} x^n$ $\left[s\left(x\right) = \ln\left|\frac{7}{7-x}\right| - \frac{x}{7} - \frac{x^2}{98} \text{ pro } x \in \left\langle -7, 7\right)\right]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \left(n-5\right) x^{n-6}$ $\left[s\left(x\right) = -\frac{(5x+4)}{x^5(1+x)^2} \text{ pro } x \in \left(-1, 1\right)\right]$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)n!} \left(x+4\right)^{n+1}$ $\left[s\left(x\right) = 2\left(e^{x+4} - 1\right) \text{ pro } x \in \left(-\infty, \infty\right)\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x - \frac{1}{3})^n$ $\left[s\left(x\right) = \frac{9x-3}{(4-3x)^2} \text{ pro } x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{1}{4n^2+8n+2} x^{2n+2}$

$\left[s\left(x\right) = \frac{x^2}{2} - x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln\left|1 + x^2\right| \text{ pro } x \in \left\langle -1, 1\right\rangle\right]$

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} 2nx^{2n-1}$ $\left[s\left(x\right) = -\frac{2x}{x^4+2x^2+1} \text{ pro } x \in \left(-1, 1\right)\right]$

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+3}$ $\left[s\left(x\right) = -x^2 \ln\left|1 - x\right| \text{ pro } x \in \left\langle -1, 1\right)\right]$

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1} \left(n^2 + 2n + 2\right) \left(x-2\right)^{n}$ $\left[s\left(x\right) = \frac{2}{(x-1)^3} \text{ pro } x \in \left(1, 3\right)\right]$

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+2}$ $\left[s\left(x\right) = x \cdot \sin x \text{ pro } x \in \left(-\infty, \infty\right)\right]$

k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)3^n} \left(x-5\right)^{n-1}$ $\left[s\left(x\right) = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{3}{8-x}\right| \text{ pro } x \in \left\langle 2, 8\right)\right]$

l) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \left(n-1\right) \left(x-7\right)^{n-2}$ $\left[s\left(x\right) = \frac{(x-7)(9-x)}{(8-x)^2} \text{ pro } x \in \left(6, 8\right)\right]$

4.3. Rozvoj funkce v mocninnou řadu

Definice. Nechť má funkce f v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0*.

Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*, která je tedy tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Příklad 71. Odvoďte Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = e^x.$$

Řešení:

Hledáme Maclaurinovu řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, jejíž $n-$tý koeficient $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Pro funkci $f(x) = e^x$ existují derivace všech řádů a platí

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x

Hodnoty derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou

$f(0)$	$f'(0)$	$f''(0)$	$f'''(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$	$f^{(6)}(0)$
1	1	1	1	1	1	1

Vyjádřením několika prvních členů dostaneme

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!},$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Vypočtený koeficient a_n dosadíme do řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Vyšetříme-li obor konvergence této řady, zjistíme, že konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = e^x$ je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 72. Odvoďte Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \sin x.$$

Řešení:

Hledáme Maclaurinovu řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, jejíž $n-$tý koeficient $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Pro funkci $f(x) = \sin x$ existují derivace všech řádů a platí

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$	$f^{(7)}(x)$	$f^{(8)}(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$

Hodnoty derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$	$f^{(7)}(x)$	$f^{(8)}(x)$
0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Vyjádřením několika prvních nenulových členů dostaneme

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!},$$

$$a_2 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3!},$$

$$a_3 = \frac{f^{(5)}}{5!} = \frac{1}{5!},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Vypočtený koeficient a_n dosadíme do řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vyšetříme-li obor konvergence této řady, zjistíme, že konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \sin x$ je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, pro $x \in \mathbb{R}$.

Poznámka 18. Obdobně bychom určili i Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \cos x$.

Příklad 73. Odvoďte Maclaurinův rozvoj funkce

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Řešení:

Hledáme Maclaurinovu řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, jejíž $n-$tý koeficient $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Pro funkci $f(x) = \ln(1 + x)$ existují derivace všech řádů a platí

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
$\ln(1+x)$	$(1+x)^{-1}$	$-(1+x)^{-2}$	$2(1+x)^{-3}$	$-6(1+x)^{-4}$	$24(1+x)^{-5}$

Hodnoty derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
0	1	-1	2	-6	24

Vyjádřením několika prvních nenulových členů dostaneme

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!},$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''}{3!} = \frac{2}{3!},$$

$$a_4 = \frac{f''''}{4!} = -\frac{6}{3!},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Vypočtený koeficient a_n dosadíme do řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Vyšetříme-li obor konvergence této řady, zjistíme, že konverguje pro všechna $x \in (-1, 1\rangle$.

Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \ln(1+x)$ je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, pro $x \in (-1, 1\rangle$.

4.4. Užití mocninných řad

Nyní si ukážeme, jak pomocí mocninných řad můžeme např. určit přibližnou hodnotu výrazů, integrálů nebo vypočítat limity.

4.4.1. Určení přibližné hodnoty

Příklad 74. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \qquad n = 5.$$

Řešení:
Jelikož výraz $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ můžeme přepsat do tvaru $e^{-\frac{1}{3}}$, jde vlastně o funkční hodnotu funkce e^x v bodě $x = -\frac{1}{3}$.
Použijeme tedy Maclaurinovu řadu funkce e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Obdržíme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 - \cdots.$$

Sečtením prvních pěti členů dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \doteq 0{,}7166.$$

Přibližná hodnota výrazu $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ pomocí prvních pěti nenulových členů je 0,7166.
Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto výrazu po zaokrouhlení 0,7165.

Příklad 75. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu

$$\sqrt[4]{1{,}674}, \qquad n = 4.$$

Řešení:

Jelikož výraz $\sqrt[4]{1{,}674}$ můžeme přepsat do tvaru $(1 + 0{,}674)^{\frac{1}{4}}$, jde vlastně o funkční hodnotu funkce $(1+x)^\alpha$ v bodě $x = 0{,}674$ a $\alpha = \frac{1}{4}$.

Použijeme tedy Maclaurinovu řadu funkce $(1+x)^\alpha$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Dosadíme $x = 0,674$ a $\alpha = \frac{1}{4}$. Obdržíme

$$\sqrt[4]{1{,}674} = (1 + 0{,}674)^{\frac{1}{4}} = 1 + \binom{\frac{1}{4}}{1}0,674 + \binom{\frac{1}{4}}{2}0,674^2 + \binom{\frac{1}{4}}{3}0,674^3 + \cdots\,.$$

Sečtením prvních čtyř členů dostaneme

$$\sqrt[4]{1{,}674} \doteq 1{,}1427.$$

Přibližná hodnota výrazu $\sqrt[4]{1,674}$ pomocí prvních čtyř nenulových členů je 1,1427.

Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto výrazu po zaokrouhlení 1,1375.

Příklad 76. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu

$$\ln\frac{4}{3}, \qquad n = 6.$$

Řešení:

Jelikož výraz $\ln\frac{4}{3}$ můžeme přepsat do tvaru $\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, jde vlastně o funkční hodnotu funkce $\ln(1+x)$ v bodě $x = \frac{1}{3}$.

Použijeme tedy Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Dosadíme $x = \frac{1}{3}$. Obdržíme

$$\ln\frac{4}{3} = \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \\ - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \cdots .$$

Sečtením prvních šesti členů dostaneme

$$\ln\frac{4}{3} \doteq 0{,}2876.$$

Přibližná hodnota výrazu $\ln\frac{4}{3}$ pomocí prvních šesti nenulových členů je 0,2876. Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto výrazu po zaokrouhlení 0,2877.

Cvičení 12. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu

a) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$, $\qquad n = 4$ $\qquad\qquad \left[\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \doteq 0{,}8187\right]$

b) $(1{,}832)^{0{,}3}$ $\qquad n = 3$ $\qquad\qquad \left[(1{,}832)^{0{,}3} \doteq 1{,}1769\right]$

c) $\ln\frac{7}{5}$, $\qquad n = 6.$ $\qquad\qquad \left[\ln\frac{7}{5} \doteq 0{,}3363\right]$

4.4.2. Přibližný výpočet integrálů

Příklad 77. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje přibližně vypočtěte

$$\int_{0{,}3}^{1} \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 4.$$

Řešení:

Použijeme Maclaurinovu řadu funkce e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,.$$

Využijeme první čtyři členy rozvoje. Dostaneme

$$\int_{0,3}^{1} \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x \doteq \int_{0,3}^{1} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} \right) \mathrm{d}x = \left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right]_{0,3}^{1} =$$
$$= 2{,}1855.$$

Odtud $\int_{0,3}^{1} \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x \doteq 2{,}1855$.

Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto integrálu po zaokrouhlení 2,1978.

Příklad 78. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje přibližně vypočtěte

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^5} \mathrm{d}x, \qquad n = 3.$$

Řešení:

Protože funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^5}$ můžeme přepsat do tvaru $f(x) = \left(1+x^5\right)^{-1}$, použijeme Maclaurinovu řadu funkce $(1+x)^\alpha$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1).$$

Dosadíme $x = x^5, \alpha = -1$. Obdržíme

$$\left(1+x^5\right)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1} x^5 + \binom{-1}{2} x^{10} + \binom{-1}{3} x^{15} + \cdots = 1 - x^5 - x^{10} - \cdots.$$

Využijeme první tři členy tohoto rozvoje. Dostaneme

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^5} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1+x^5\right)^{-1} \mathrm{d}x \doteq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^5 - x^{10}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[x - \frac{x^6}{6} - \frac{x^{11}}{11} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 0{,}4974.$$

Odtud $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^5} \mathrm{d}x \doteq 0{,}4974$.

Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto integrálu po zaokrouhlení 0,4974.

Příklad 79. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje přibližně vypočtěte

$$\int_{0,1}^{0,4} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} \mathrm{d}x, \qquad n = 4.$$

Řešení:

Použijeme Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Dosadíme $x = \sqrt{x}$. Obdržíme

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4} \cdots .$$

Využijeme první čtyři členy tohoto rozvoje. Dostaneme

$$\int_{0,1}^{0,4} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} \mathrm{d}x \doteq \int_{0,1}^{0,4} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{4} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{9}x\sqrt{x} - \frac{1}{8}x^2 \right]_{0,1}^{0,4} = 0{,}5129.$$

Odtud $\int_{0,1}^{0,4} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x} \mathrm{d}x \doteq 0{,}5129$.

Pro porovnání je skutečná hodnota tohoto integrálu po zaokrouhlení 0,5183.

Cvičení 13. Pomocí prvních n nenulových členů Maclaurinova rozvoje přibližně vypočtěte

a) $\int_{0,3}^{0,8} \frac{e^x}{x^2} \mathrm{d}x, \qquad n = 3$ $\qquad\left[\int_{0,3}^{0,8} \frac{e^x}{x^2} \mathrm{d}x \doteq 3{,}3142\right]$

b) $\int_{0,1}^{1} (1+\sqrt{x})^3 \,\mathrm{d}x, \qquad n = 4$ $\qquad\left[\int_{0,1}^{1} (1+\sqrt{x})^3 \,\mathrm{d}x \doteq 4{,}7205\right]$

c) $\int_{0}^{0,7} \ln(1+x^2) \,\mathrm{d}x, \qquad n = 5$ $\qquad\left[\int_{0}^{0,7} \ln(1+x^2) \,\mathrm{d}x \doteq 0{,}1007\right]$

4.4.3. Výpočet limit

Příklad 80. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{12}{x^9} \ln\left(1+x^3\right).$$

Řešení:

K vyjádření funkce $\ln(1+x^3)$ použijeme Maclaurinův rozvoj $\ln(1+x)$, kde položíme $x = x^3$. Obdržíme

$$\ln\left(1+x^3\right) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \cdots.$$

Dosazením do limity dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{12}{x^9} \ln\left(1+x^3\right) = \lim_{x\to 0} \frac{12}{x^9}\left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \cdots\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12}{x^6} - \frac{6}{x^3} + 4 - 3x^3 + \cdots = \infty.$$

Odtud $\lim\limits_{x\to 0} \frac{12}{x^9} \ln(1+x^3) = \infty$.

Příklad 81. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x}}{x}\right).$$

Řešení:

K vyjádření odmocnin $\sqrt{1+x^2}$ a $\sqrt[4]{1-x}$ použijeme Maclaurinovu řadu funkce $(1+x)^\alpha$. Obdržíme

$$\sqrt{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^4 + \cdots = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \cdots,$$

$$\sqrt[4]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{4}} = 1 - \binom{\frac{1}{4}}{1}x + \binom{\frac{1}{4}}{2}x^2 - \cdots = 1 - \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} - \cdots.$$

Dosazením do limity dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{x^2}{2}-\cdots\right)-\left(1-\frac{x}{4}-\cdots\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{4}+\frac{19x^2}{32}-\cdots\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}+\frac{19x}{32}-\cdots=\frac{1}{4}.$$

Odtud $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x}}{x}\right)=\frac{1}{4}$.

Příklad 82. Určete limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}.$$

Řešení:

Při výpočtu této limity si pomůžeme Maclaurinovou řadou funkce $\cos x$ a e^x. U funkce e^x položíme $x=x^2$. Obdržíme

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in(-\infty,\infty),$$

$$e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

Dosazením do limity dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)-\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^2}{2}-\frac{11x^4}{24}-\frac{19x^6}{120}-\cdots\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{3}{2}-\frac{11x^2}{24}-\frac{19x^4}{120}-\cdots=-\frac{3}{2}.$$

Odtud $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}}{x^2}=-\frac{3}{2}$.

Cvičení 14. Určete limitu

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^5} - x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$ $[-1]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt[3]{1+x}}{x}\right)$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\sin^3 x}{2x^3}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

5. Řešení příkladů s programem Maple

V této kapitole si na vybraných příkladech ukážeme, jak řešit určité typy úloh pomocí matematického softwaru Maple. Nebudeme si uvádět všechny možné způsoby, jak dojít ke správnému řešení. Jedná se pouze o nástin toho, co můžeme s řadou v Maplu dělat. Více se dočtete v [7], odkud jsou převzaty i níže použité příkazy a procedury. Použijeme některé již vyřešené příklady, na nichž si ověříme správnost výsledků.

5.1. Konvergence číselných řad

Zda číselná řada konverguje či diverguje vyšetříme v Maplu pomocí procedury `csum(e,n)`, která je součástí knihovny Maple Advisor Database a je nutné si ji nainstalovat. Uvedená procedura má dva povinné parametry. Parametr `e` představuje n-tý člen a_n řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, parametr `n` je proměnná. Procedura vrací hodnotu `true` - řada konverguje, `false` - řada diverguje, `FAIL` - nedokáže rozhodnout.

Příklad 83. Pomocí Maplu rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(n-2)!}.$$

Řešení:
Jedná se o číselnou řadu z příkladu 16, o které jsme pomocí podílového kritéria zjistili, že diverguje. Tento výsledek ověříme pomocí Maplu.
Pro n-tý člen řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(n-2)!}$ platí

$$a_n = \frac{3n^n}{(n-2)!}.$$

Procedura `csum(e,n)` bude vypadat následovně
> `csum(3 * n^n/(n - 2)!, n);`

a vrací hodnotu

$$\textit{false}.$$

Ověřili jsme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(n-2)!}$ diverguje.

V Maplu vypadá řešení takto:

```
> csum(3*n^n/(n-2)!,n);
```

$$false$$

Příklad 84. Pomocí Maplu rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+4)^3}.$$

Řešení:

Jedná se o číselnou řadu z příkladu 39, o které jsme pomocí integrálního kritéria zjistili, že konverguje. Tento výsledek ověříme pomocí Maplu.

Pro n-tý člen řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+4)^3}$ platí

$$a_n = \frac{1}{(6n+4)^3}.$$

Procedura `csum(e,n)` bude vypadat následovně

> `csum(1/(6 * n + 4)^3, n);`

a vrací hodnotu

$$true.$$

Ověřili jsme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n+4)^3}$ konverguje.

V Maplu vypadá řešení takto:

```
> csum(1/(6*n+4)^3,n);
```

$$true$$

5.2. Obor konvergence mocninných řad

Zjištění oboru konvergence předchází nalezení středu, poloměru konvergence a intervalu absolutní konvergence. Určení středu mocninné řady je početně poměrně jednoduché, tudíž si řešení v Maplu nebudeme uvádět. Budeme hledat pouze obor konvergence nikoli obor absolutní konvergence.

Příklad 85. Pomocí Maplu určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n.$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu z příkladu 47, jejíž obor konvergence je interval $\left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$. Tento výsledek si ověříme pomocí Maplu.

1. Je zřejmé, že střed $x_0 = 0$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} (x-0)^n$.

2. Poloměr konvergence r zjistíme výpočtem limity

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \qquad \text{kde } a_n = \frac{5^n}{(1+n)^2}.$$

   Tuto limitu v Maplu zadáme následovně

   > `limit(abs((5^n/(1+n)^2)/(5^(n+1)/(2+n)^2)),n=infinity);`

   a obdržíme výsledek

$$\frac{1}{5}.$$

   Z toho plyne, že $r = \frac{1}{5}$.

3. Interval absolutní kovergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = 0$ a $r = \frac{1}{5}$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$\left(0 - \frac{1}{5}, 0 + \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech. Krajní body dosazujeme v Maplu pomocí substituce, což zajistí procedura `subs(x=a,expr)`, která má opět dva povinné parametry, kde `x=a` je bod, který dosazujeme, tedy $x = \frac{1}{5}$ a $x = -\frac{1}{5}$, a `expr` je výraz, v našem případě mocninná řada, do které budeme bod x dosazovat. Po provedení substituce dostaneme číselné řady, jejichž konvergenci vyšetříme již známou procedurou `csum(e,n)`.

Nejdříve budeme do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ dosazovat bod $x = \frac{1}{5}$.

Použitím substituce

$> \mathtt{subs}(\mathtt{x} = \mathtt{1/5}, \mathtt{Sum}(\mathtt{5\hat{\ }n/(1+n)\hat{\ }2*x\hat{\ }n, n = 0..infinity}));$

dostaneme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \left(\frac{1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}.$$

Použijeme proceduru `csum(e,n)`, kde za `e` dosazujeme $\frac{5^n \left(\frac{1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}$.

$> \mathtt{csum}((\mathtt{5\hat{\ }n} * (\mathtt{1/5})\hat{\ }\mathtt{n})/(\mathtt{n}+\mathtt{1})\hat{\ }\mathtt{2}, \mathtt{n});$

$$true.$$

Zjistili jsme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \left(\frac{1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}$ konverguje, tudíž mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ v bodě $x = \frac{1}{5}$ také konverguje.

Nyní do mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ dosadíme bod $x = -\frac{1}{5}$.

Použitím substituce

$> \mathtt{subs}(\mathtt{x} = -\mathtt{1/5}, \mathtt{Sum}(\mathtt{5\hat{\ }n/(1+n)\hat{\ }2*x\hat{\ }n, n = 0..infinity}));$

dostaneme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \left(\frac{-1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}.$$

Použijeme proceduru `csum(e,n)`, kde za `e` dosazujeme $\frac{5^n \left(\frac{-1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}$.

$> \mathtt{csum}((\mathtt{5\hat{\ }n} * (-\mathtt{1/5})\hat{\ }\mathtt{n})/(\mathtt{n}+\mathtt{1})\hat{\ }\mathtt{2}, \mathtt{n});$

$$true.$$

Zjistili jsme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n\left(\frac{-1}{5}\right)^n}{(n+1)^2}$ konverguje, tudíž mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2}x^n$ v bodě $x = -\frac{1}{5}$ také konverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2}x^n$ je interval $\left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$.

V Maplu vypadají procedury, které jsme použily takto:

```
> limit(abs((5^n/(1+n)^2)/(5^(n+1)/(2+n)^2)), n=infinity);
```

$$\frac{1}{5}$$

```
> subs(x=1/5, Sum(5^n/(1+n)^2*x^n, n=0..infinity));
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n\left(\frac{1}{5}\right)^n}{(1+n)^2}$$

```
> csum((5^n *(1/5)^n )/(n+1)^2,n);
```

true

```
> subs(x=-1/5, Sum(5^n/(1+n)^2*x^n, n=0..infinity));
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n\left(\frac{-1}{5}\right)^n}{(1+n)^2}$$

```
> csum((5^n *(-1/5)^n )/(n+1)^2,n);
```

true

Příklad 86. Pomocí Maplu určete obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n.$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu z příkladu 55, jejíž obor konvergence je interval $(-11, 7\rangle$. Tento výsledek si ověříme pomocí Maplu.

1. Je zřejmé, že střed $x_0 = -2$, protože řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ můžeme přepsat do tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}\left[x-(-2)\right]^n$.

2. Poloměr konvergence r zjistíme výpočtem limity

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ kde } a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}.$$

Tuto limitu v Maplu zadáme následovně

> $\texttt{limit(abs((-1\^{}(n-1)/((2*n+4)*9\^{}n))/((-1\^{}n/((2*n+6)*}$
$\texttt{*9\^{}(n+1))))),n=infinity);}$

a obdržíme výsledek

$$9.$$

Z toho plyne, že $r = 9$.

3. Interval absolutní kovergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ obdržíme dosazením hodnot $x_0 = -2$ a $r = 9$ do intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$(-2-9, -2+9) = (-11, 7)\,.$$

Musíme vyšetřit konvergenci v krajních bodech.

Nejdříve budeme do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ dosazovat bod $x = 7$.

> $\texttt{subs(x=7,Sum(((-1)\^{}(n-1)/((2*n+4)*9\^{}n))*(x+2)\^{}n,}$
$\texttt{n=0..infinity));}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{2n+4}.$$

Použijeme proceduru `csum(e,n)`, kde za `e` dosazujeme $\frac{(-1)^{(n-1)}}{2n+4}$.

> $\texttt{csum((-1)\^{}(n-1)/(2*n+4),n);}$

$$\mathit{true}.$$

Zjistili jsme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{2n+4}$ konverguje, tudíž mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ v bodě $x = 7$ také konverguje.

Nyní do mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(1+n)^2} x^n$ dosadíme bod $x = -11$.

$> \texttt{subs}(\texttt{x} = -\texttt{11}, \texttt{Sum}(((-\texttt{1})\hat{\ }(\texttt{n} - \texttt{1})/((\texttt{2} * \texttt{n} + \texttt{4}) * \texttt{9}\hat{\ }\texttt{n})) * (\texttt{x} + \texttt{2})\hat{\ }\texttt{n},$
$\texttt{n} = \texttt{0..infinity}));$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}(-9)^n}{(2n+4)\,9^n}.$$

Použijeme proceduru `csum(e,n)`, kde za `e` dosazujeme $\frac{(-1)^{(n-1)}(-9)^n}{(2n+4)9^n}$.

$> \texttt{csum}(((-\texttt{1})\hat{\ }(\texttt{n} - \texttt{1}) * (-\texttt{9})\hat{\ }\texttt{n})/((\texttt{2} * \texttt{n} + \texttt{4}) * \texttt{9}\hat{\ }\texttt{n}), \texttt{n});$

$$\mathit{false}.$$

Zjistili jsme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}(-9)^n}{(2n+4)9^n}$ diverguje, tudíž mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ v bodě $x = -11$ také diverguje.

4. Obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+4)9^n}(x+2)^n$ je interval $(-11, 7\rangle$.

V Maplu vypadají procedury, které jsme použily takto:

```
> limit(abs((-1^(n-1)/((2*n+4)*9^n))/((-1^(n)/((2*n+6)*9^(n+1))
  ))), n=infinity);
```

$$9$$

```
> subs(x=7,
  Sum(((-1)^(n-1)/((2*n+4)*9^n))*(x+2)^n,n=0..infinity));
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{2\,n+4}$$

```
> csum((-1)^(n-1)/(2*n+4),n);
```

true

```
> subs(x=-11, Sum(((-1)^(n-1)/((2*n+4)*9^n))*(x+2)^n,
  n=0..infinity));
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}\,(-9)^n}{(2\,n+4)\,9^n}$$

```
> csum(((-1)^(n-1)  *(-9)^n)/((2*n+4)*9^n),n);
```

false

5.3. Součet mocninných řad

Součet mocninných řad určíme s využitím procedury `sum(f,k)`, která má dva povinné parametry. Parametr $\mathtt{f} = a_n(x - x_0)^n$ a `k` je sčítací index.

Příklad 87. Pomocí Maplu určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} x^n.$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu z příkladu 59, jejíž součet $s\,(x) = \ln\left|\frac{5}{5-x}\right|$ pro všechna $x \in \langle -5, 5)$. Výsledek si ověříme pomocí Maplu.

Pomocí procedur z kapitoly 5.2 bychom zjistili, že interval absolutní konvergence je $(-5, 5)$ a obor konvergence je $\langle -5, 5)$.

Proceduru $\mathtt{sum}(\mathtt{f}, \mathtt{k})$, kde $\mathtt{f} = \frac{1}{n5^n} x^n$ a za `k` dosazujeme $n = 1..\infty$, v Maplu zapíšeme následovně

$> \mathtt{sum}(\mathtt{1}/(\mathtt{n} * \mathtt{5\hat{~}n}) * \mathtt{x\hat{~}n}, \mathtt{n} = \mathtt{1..infinity});$

Obdržíme výsledný součet

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{5}x\right).$$

I když je způsob zápisu odlišný, oba součty se rovnají. Obdrželi jsme správný výsledek.

V Maplu vypadá řešení takto:

```
> sum(1/(n*5^n)*x^n,n=1..infinity);
```

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{5}x\right)$$

Příklad 88. Pomocí Maplu určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{n+1}.$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu z příkladu 62, jejíž součet $s(x) = e^{x-3} - 1$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$. Výsledek si ověříme pomocí Maplu.

Pomocí procedur z kapitoly 5.2 bychom zjistili, že interval absolutní konvergence a obor konvergence je $(-\infty, \infty)$.

Proceduru `sum(f,k)`, kde $\mathtt{f} = \frac{1}{(n+1)n!}(x-3)^{(n+1)}$ a za `k` dosazujeme $n = 0..\infty$, v Maplu zapíšeme následovně

`> sum(1/((n + 1) * n!) * (x − 3)^(n + 1), n = 0..infinity);`

Obdržíme výsledný součet

$$e^{(x-3)}(1 - e^{(-x+3)}).$$

I když je způsob zápisu odlišný, oba součty se rovnají. Obdrželi jsme správný výsledek.

V Maplu vypadá řešení takto:

```
> sum(1/((n+1)*n!)*(x-3)^(n+1),n = 0..infinity);
```

$$e^{(x-3)}(1 - e^{(-x+3)})$$

Poznámka 19. Bohužel ne všechny typy příkladů jsou řešitelné pomocí uvedených procedur. Může se stát, že obdržíme chybný výsledek. Nejlepší je se spoléhat na vlastní početní dovednosti a tento program používat pouze pro případnou kontrolu.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit sbírku příkladů týkajících se mocninných řad. Kromě mocninných řad jsme si uvedli i řady číselné, jejichž znalost je potřebná při počítání s mocninnými řadami. Kromě příkladů práce obsahuje i teorii, ve které jsme si zavedli potřebné základní pojmy, které postačují k pochopení dané problematiky.

Práce je rozdělena do pěti kapitol, které jsou dále členěny na podkapitoly. První dvě kapitoly pojednávají o číselných řadách. Nejdříve jsme si uvedli potřebnou teorii a druhá kapitola je věnována příkladům. Příklady jsou zaměřeny především na určení konvergence, resp. divergence číselných řad s nezápornými členy pomocí tzv. kritérií konvergence. Každému kritériu je věnována jedna podkapitola, kde je k dispozici stejný počet řešených i neřešených příkladů k procvičení. Mimo to jsme si ukázali, jak zjistit konvergenci tzv. alternujícíh řad nebo také určení absolutní či relativní konvergence. Třetí a čtvrtá kapitola je věnována mocninným řadám. Třetí teoretická kapitola opět obsahuje základní pojmy a vlastnosti, které se tentokrát vztahující k mocninným řadám. Příklady se nachází ve čtvrté kapitole. Převážná část příkladů se týká určení oboru konvergence a součtu mocninné řady, a to především proto, že takovýto typ úloh se nejčastěji objevuje při zápočtových a zkouškových testech. Okrajově jsme si nastínili způsob, jakým můžeme rozvinout funkci v mocninnou řadu a také využití mocninných řad např. při výpočtu limit či určování přibližné hodnoty integrálů. Poslední kapitola je pouze ukázkou toho, jak bychom si mohli výsledky některých příkladů zkontrolovat pomocí matematického softwaru Maple.

Pro vytvoření této práce byl použit systém LaTeX pro sazbu matematického textu a pro získání základních dovedností pro práci s tímto systémem jsem navštěvovala jednosemestrální předmět TeX pro začátečníky pod vedením Miroslava Závodného, RNDr.

Literatura

[1] Došlá, Z., Novák, V.: Nekonečné řady, 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2007.

[2] Potůček, R.: Úvod do číselných a funkčních řad, 1. vydání. Brno: Univerzita obrany, 2010.

[3] Brabec, J. a kol.: Matematická analýza I: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických, 2. upravené vydání. Praha: SNTL, 1989.

[4] Kojecká, J., Rachůnková, I.: Řešené příklady z matematické analýzy III., 2. vydání. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1992.

[5] Rybička, J.: LATEX pro začátečníky, 3. vydání. Brno: Konvoj, 2003.

[6] Lomtatidze, L., Plch, R.: Sázíme v LATEXu diplomovou práci z matematiky, 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2003.

[7] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P.: Nekonečné řady s programem Maple [online], dostupné z:
http://www.math.muni.cz/ plch/nkpm/hlavni.pdf, [citováno 14.4.2013].

[8] KMA/M2 Matematika 2. E-learningový portál Moodle [online], dostupné z:
http://elearning.math.upol.cz/course/view.php?id=107,
[citováno 12.3.2013].

[9] Základní vlastnosti. Operace s řadami [online], dostupné z:
http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/1/txc3ea1b.htm, [citováno 18.4.2013].

[10] Mocninné a Taylorovy řady [online], dostupné z:
http://ki.tix.cz/photos/MAT%20-%20matematika/M3kap3st.pdf, [citováno 18.4.2013].