UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DISERTAČNÍ PRÁCE

Diofantovské rovnice v matematických soutěžích

Katedra algebry a geometrie
Školitel: **prof. Mgr. Radomír Halaš, Dr.**
Vypracoval: **Mgr. Tomáš Riemel**
Studijní program: P1102 Matematika
Studijní obor: Didaktika matematiky
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci zpracoval samostatně pod vedením prof. Mgr. Radomíra Halaše, Dr. a RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Rád bych poděkoval prof. Mgr. Radomíru Halašovi, Dr. a RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc. za podněty, cenné rady a čas, který mi věnovali. Dále bych rád poděkoval Mgr. Lence Vítkové, Ph.D. a RNDr. Patriku Peškovi, Ph.D. za veškerou pomoc a podporu při studiu. Na závěr bych rád poděkoval své ženě a rodině, díky nimž jsem mohl tuto práci dokončit.

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	množina všech nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	množina všech celých čísel
$a \in T$	prvek a náleží množině T
$a \mid b$	celé číslo a dělí celé číslo b
$a \nmid b$	celé číslo a nedělí celé číslo b
$D(a, b)$	největší společný dělitel čísel a, b
$a \equiv b \pmod{c}$	číslo a je kongruentní s číslem b podle modulu c

Úvod

Diofantovské rovnice jsou rovnice o dvou a více neznámých, které se řeší v oboru celých čísel, či v jejich podmnožině. Diofantovské problémy obsahují zpravidla méně rovnic (podmínek) než neznámých, přičemž obor řešitelnosti je omezen na celá čísla. Tyto rovnice (systémy rovnic) často definují algebraické křivky, algebraické plochy nebo obecněji algebraické množiny. Jejich studium je částí algebraické geometrie, tzv. diofantovské geometrie.

Historie diofantovských rovnic sahá až do dob antického Řecka, kde v alexandrijské knihovně byla shromážděna svého času největší sbírka starověkého učení. Působil zde matematik *Diofantos*, po němž byly tyto rovnice pojmenovány. Společně s *Eukleidovými* „Základy“ tvořilo Diofantovo dílo „Aritmetika“ základní stavební kameny matematiky až do 17. století.

Úvodem připomeňme několik historicky významných diofantovských rovnic, které byly zkoumány a řešeny některými slavnými matematiky.

Mezi nejjednodušší diofantovské rovnice patří lineární diofantovské rovnice o dvou neznámých

$$ax + by = c,$$

kde a, b, c jsou daná celá čísla a x, y jsou celočíselné neznámé. Jedním z prostředků při jejich řešení je tzv. *Bézoutova věta*, tj. tvrzení, že největší společný dělitel celých čísel a, b lze vyjádřit pomocí lineární kombinace těchto čísel s celočíselnými koeficienty.

Dalšími důležitými diofantovskými (kvadratickými) rovnicemi jsou tzv. *Pellovy rovnice* (podle anglického matematika *Johna Pella*), tj. rovnice typu

$$x^2 - ny^2 = \pm 1,$$

kde x, y jsou celočíselné neznámé a n je dané přirozené číslo, které není druhou mocninou žádného přirozeného čísla.

Mezi historicky významné diofantovské rovnice lze rovněž zařadit rovnici

$$x^4 + y^4 + z^4 = w^4,$$

kde x, y, z, w jsou celočíselné neznámé. *Leonhard Euler* mylně předpokládal, že tato rovnice nemá žádné netriviální řešení. V roce 1988 dokázal americký matematik *Noam Elkies*, že netriviálních řešení existuje nekonečně mnoho, přičemž nejmenší z nich bylo nalezeno pomocí počítače ve tvaru

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

V roce 1948 byla formulována *Erdős–Straussova hypotéza*, která patří mezi dodnes nevyřešené matematické problémy z oblasti diofantovských rovnic, a podle níž pro každé kladné celé číslo $n > 1$ existují přirozená čísla x, y, z splňující rovnici

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

V neposlední řadě lze zmínit i slavnou Velkou Fermatovu větu, kterou na základě studia Diofantovy Aritmetiky vyslovil *Pierre de Fermat*. Její znění lze formulovat následovně: *Neexistují celá kladná čísla x, y, z a $n > 2$ splňující rovnici*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Je známo, že pro $n = 2$ existuje nekonečně mnoho řešení (x, y, z), tzv. *pythagorejských trojic*. Důkaz Velké Fermatovy věty odolával dlouhá staletí i největším matematikům. Až v roce 1995 *Andrew Wiles* zveřejnil kompletní důkaz této věty.

Pojem rovnice se prolíná studiem matematiky od základní školy až po vysokou, přičemž diofantovské rovnice lze využít v příkladech vyskytujících se v mnoha oblastech lidské činnosti. V rámci práce s matematicky nadanými žáky jde pak především o matematické soutěže (např. Matematická olympiáda, Matematický duel, Matematický klokan, Matematický Náboj) nebo zábavnou matematiku. Složitější diofantovské rovnice se občas vyskytují v nejvyšších kategoriích Matematické olympiády na národní i mezinárodní úrovni.

Cílem disertační práce bylo zpracování základních poznatků a vytvoření širšího uceleného materiálu týkajícího se diofantovských rovnic řešených výhradně za použití elementárních metod řešení, které lze aplikovat ve školské matematice. V České republice (Československu) dosud takový materiál s výjimkou starší publikace J. Vyšína [32] a kolektivu brněnských autorů [17] neexistuje, přičemž ze zahraniční literatury lze zmínit např. [1] a [5].

V této práci je kladen důraz především na metody řešení náročnějších typů diofantovských rovnic, konkrétně polynomicko-exponenciálních a exponenciálních. Ve čtyřech kapitolách jsou didakticky zpracovány, kategorizovány a sumarizovány úlohy, které jsou řešeny především za použití metody faktorizace, metody nerovností a odhadů, Eulerovy metody, metody číselných kongruencí a metody diskriminantu. Přínosem práce je mj. také sada řešených i neřešených vlastních (autorových) úloh. Příklady, u nichž je uveden odkaz či citace, jsou převzaty ze známých matematických soutěží, přičemž některá jejich řešení jsou v různém rozsahu modifikována. Většina úloh je zaměřena na diofantovské rovnice o dvou celočíselných neznámých. Výsledky této práce lze využít mj. také v oblasti péče o matematicky nadané žáky středních i základních škol či v rámci výběrových seminářů na gymnáziích.

První část práce je věnována základním metodám řešení diofantovských rovnic. Jedná se především o tzv. elementární metody, jež lze použít při řešení nejjednodušších typů diofantovských rovnic. Tyto metody jsou prezentovány i v dalších částech disertační práce.

Druhá kapitola se zabývá rovnicemi typu $x^2 + y^2 = n$, kde x, y jsou celočíselné neznámé a n je celé nezáporné číslo. Při jejich řešení se s výhodou využívá tzv. Gaussových celých čísel.

Třetí sekce je zaměřena na řešení polynomicko-exponenciálních diofantovských rovnic pomocí elementárních metod, tj. rovnic s celočíselnými neznámými x, y ve tvaru $P(x) = a^y$, kde $P(x)$ je daný polynom s celočíselnými koeficienty a $a > 1$ je přirozené číslo.

Závěrečná kapitola disertační práce je věnována některým exponenciálním diofantovským rovnicím $a^x - b^y = c$, kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel, $a, b > 1$ jsou daná přirozená čísla, c je dané celé nenulové číslo, a metodám jejich řešení. S exponenciálními diofantovskými rovnicemi se lze setkat v domácích i v zahraničních matematických soutěžích. Poslední část této kapitoly se zabývá speciálním typem exponenciálních diofantovských rovnic. Jedním z přínosů práce je také prezentace řešení určitého typu exponenciálních diofantovských rovnic pomocí elementárních metod.

Kapitola 1

Základní metody

V roce 1900 jeden z největších matematiků 20. století *David Hilbert* předložil ve své přednášce „Problémy matematiky“ na 2. mezinárodním kongresu matematiky v Paříži seznam 23 tzv. Hilbertových problémů, které představovaly největší nevyřešené matematické problémy té doby. Většina z nich je již vyřešena kompletně či alespoň částečně, přičemž jejich řešení velmi ovlivnilo matematiku 20. století.

V pořadí 10. Hilbertův problém se věnoval diofantovským rovnicím a lze jej formulovat následovně: *Existuje algoritmus, který by byl schopen rozhodnout o řešitelnosti libovolné diofantovské rovnice?* Odpovědí na tento problém se stala tzv. *Matiyasevichova* věta o neexistenci algoritmu, který by v konečném čase rozhodl, zda daná diofantovská rovnice má řešení v oboru přirozených (nebo celých) čísel viz např. [18].

Ačkoliv neexistuje univerzální způsob řešení diofantovských rovnic, přesto pro některé z nich existuje řada základních metod, jak nalézt řešení dané rovnice. Mnohé z těchto metod lze využít i v matematických soutěžích národního i mezinárodního významu. Více o těchto metodách a jejich řešení lze nalézt např. v [25].

V úvodní části je prezentováno pět elementárních metod (viz např. [1]), které je možné využít při řešení mnoha typů diofantovských rovnic vyskytujících se v matematických soutěžích.

1.1. Diofantovské rovnice 1. stupně

V rámci školské matematiky se lze obvykle setkat s rovnicemi o více neznámých. Nejjednodušším typem jsou diofantovské rovnice 1. stupně neboli lineární diofantovské rovnice (viz následující definice), které je možné řešit elementárními metodami. V této části jsou prezentovány dvě elementární metody, které jsou detailněji popsány např. v [20, 25].

Definice 1

Rovnice ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde n je přirozené číslo ($n \geq 2$) a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ ($a_i \neq 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$), se nazývá *diofantovská rovnice* 1. *stupně* (též *lineární diofantovská rovnice*) o celočíselných neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je známo, že lineární diofantovská rovnice $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ je řešitelná, právě když největší společný dělitel $D(a_1, \ldots, a_n)$ dělí b. Daná rovnice má nekonečně mnoho řešení, která závisí na $n-1$ nezávislých celočíselných parametrech.

1.1.1. Eulerova metoda

První uvedená metoda je tzv. Eulerova metoda (někdy taktéž zvaná metoda vyjádření nejmenšího koeficientu), která je zde prezentována při řešení konkrétního příkladu. Tato metoda je elementární metodou řešení zejména lineárních diofantovských rovnic. Princip Eulerovy metody spočívá ve vyjádření neznámé s nejmenším koeficientem (v absolutní hodnotě) ve tvaru zlomku, přičemž daný zlomek musí být opět celým číslem. Detailnější popis Eulerovy metody, která se opírá o princip Eukleidova algoritmu, lze nalézt např. v [3, 20, 32].

Příklad 1

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$64x - 71y = 2\,024.$$

Řešení: Jelikož $1 = D(64, 71) \mid 2\,024$, je daná rovnice řešitelná a její řešení bude záviset na jednom celočíselném parametru. Koeficient před neznámou x je menší než koeficient (v absolutní hodnotě) před y, tj. $64 < 71 = |-71|$. Ze zadání úlohy lze tedy vyjádřit neznámou x ve tvaru

$$x = \frac{2\,024 + 71y}{64} = y + 31 + \frac{40 + 7y}{64}.$$

Číslo x je celým číslem, tudíž i zlomek $\dfrac{40+7y}{64}$ musí být celočíselný. Tedy

$$40 + 7y = 64t,$$

kde t je celočíselný parametr. Dále je možné vyjádřit z výše uvedené rovnice neznámou y ve tvaru

$$y = \frac{64t - 40}{7} = 9t - 5 + \frac{t-5}{7}.$$

Analogicky s předchozím postupem se snadno vidí, že zlomek $\dfrac{t-5}{7}$ musí být *nutně* celočíselný, jelikož y je celým číslem. Platí

$$t - 5 = 7s,$$

kde $s \in \mathbb{Z}$. Pomocí parametru s je možné vyjádřit t ve tvaru

$$t = 7s + 5.$$

Neznámá y vyjádřená v závislosti na parametru s je rovna

$$y = 9(7s+5) - 5 + \frac{(7s+5)-5}{7} = 40 + 64s.$$

Finálně neznámá x přejde do tvaru

$$x = (40 + 64s) + 31 + \frac{40 + 7(40+64s)}{64} = 76 + 71s.$$

ZÁVĚR: Daná úloha má nekonečně mnoho řešení závisejících na jednom celočíselném parametru s ve tvaru $(x, y) = (76 + 71s; 40 + 64s)$.

POZNÁMKA: Z hlediska analytické geometrie lze předchozí úlohu přeformulovat na hledání všech tzv. mřížových bodů (bodů s celočíselnými souřadnicemi) ležících na přímce $y = (64x - 2\,024)/71$.

1.1.2. Metoda číselných kongruencí

Druhá prezentovaná metoda je metoda číselných kongruencí, kterou lze použít při řešení mnoha typů diofantovských rovnic. Stěžejním pojmem této metody je číselná kongruence:

Definice 2

Nechť n je přirozené číslo ($n \geq 2$) a dále nechť a, b jsou celá čísla. Řekneme, že číslo a je *kongruentní* s číslem b podle modulu n (modulo n), právě když $n \mid (a - b)$ a píšeme symbolicky

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Tento vztah se nazývá *číselná kongruence.* Čísla a, b budeme nazývat *levou a pravou stranou číselné kongruence.*

V následující úloze je prezentována metoda číselných kongruencí při řešení lineární diofantovské rovnice o čtyřech neznámých.

Princip řešení lineárních diofantovských rovnic pomocí číselných kongruencí spočívá v převedení dané lineární rovnice na tzv. *kongruenční rovnici* 1. *stupně*. Např. lineární diofantovská rovnice o dvou neznámých $5x+8y = 3$ lze převést do tvaru kongruenční rovnice $5x \equiv 3 \pmod{8}$ nebo $8y \equiv 3 \pmod{5}$. Více o číselných kongruencích a kongruenčních rovnicích je možné nalézt např. v [4, 17, 20, 25].

Příklad 2

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3a + 11b - 6c + 23d = 8.$$

Řešení: Jelikož $1 = D(3, 11, 6, 23) \mid 8$, je daná rovnice řešitelná a její řešení bude záviset na třech nezávislých celočíselných parametrech. S využitím číselných kongruencí lze úlohu vyjádřit ve tvaru kongruenční rovnice

$$2b + 2d \equiv 2 \pmod{3},$$

neboť $3 \equiv 0 \pmod{3}$, $11 \equiv 2 \pmod{3}$, $6 \equiv 0 \pmod{3}$, $23 \equiv 2 \pmod{3}$ a $8 \equiv 2 \pmod{3}$. Uvedenou kongruenční rovnici je možné dále upravit

$$b \equiv 1 - d \pmod{3}.$$

Tedy $b = 1 - d + 3t$, kde t je celočíselný parametr. Dosazením do zadání úlohy obdržíme po úpravě rovnici

$$a - 2c + 4d = -1 - 11t.$$

Dále opět s využitím číselných kongruencí lze výše uvedenou rovnici upravit na kongruenční rovnici

$$a \equiv 1 + t \pmod{2},$$

neboť $-2 \equiv 0 \pmod 2$, $4 \equiv 0 \pmod 2$, $-1 \equiv 1 \pmod 2$, $-11 \equiv 1 \pmod 2$. Tedy $a = 1 + t + 2s$, kde t, s jsou celočíselné parametry. Dosazením vztahů za neznámé a a b do zadání úlohy se po úpravě získá rovnice

$$c - 2d = 1 + 6t + s.$$

Analogicky s předchozím postupem se opět využijí číselné kongruence a obdržíme tak

$$c \equiv 1 + s \pmod 2,$$

jelikož $-2 \equiv 0 \pmod 2$ a $6 \equiv 0 \pmod 2$. Neznámou c je tedy možné vyjádřit ve tvaru $c = 1+s+2r$, kde s, r jsou celočíselné parametry. Dosazením vztahů za neznámé a, b a c do zadání úlohy lze po snadné úpravě získat

$$d = -3t + r.$$

Závěr: Daná úloha má nekonečně mnoho řešení závisejících na třech celočíselných parametrech s, t, r ve tvaru uspořádaných čtveřic

$$(a, b, c, d) = (1 + t + 2s; 1 + 6t - r; 1 + s + 2r; -3t + r).$$

Poznámka: Uvedený postup není jediný možný. Úlohu lze řešit i jinak a získat tak zcela odlišný parametrický systém řešení, jelikož těchto parametrických systémů je nekonečně mnoho.

1.2. Diofantovské rovnice 2. stupně

Ve středoškolské matematice se žáci v rámci učiva o analytické geometrii seznamují s rovnicemi vyššího stupně než jsou jen lineární rovnice o dvou neznámých. Konkrétně jsou to rovnice, které reprezentují rovnice kuželoseček. Tyto rovnice se občas vyskytují i v matematických soutěžích, kde je úkolem nalézt tzv. *mřížové body*, tj. body s celočíselnými souřadnicemi, ležící na konkrétních kuželosečkách. Jedná se o rovnice typu uvedené v následující definici.

Definice 3

Rovnice ve tvaru

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{1.1}$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ (aspoň jedno z čísel a, b, c je nenulové) se nazývá *diofantovská rovnice 2. stupně* o dvou celočíselných neznámých x, y.

Poznámka: Pokud v rovnici (1.1) jsou oba koeficienty $a, c \neq 0$, nazývá se tato rovnice *kvadratická diofantovská rovnice* o dvou neznámých x, y.

V dalších třech částech se budeme zabývat třemi elementárními metodami řešení diofantovských rovnic 2. stupně. Tyto metody znají mnozí žáci středních škol a lze je využít při řešení rovnic dané typu i mnoha jiných úloh z matematických soutěží.

1.2.1. Metoda nerovností a odhadů

Další použitelnou metodou je metoda nerovností a odhadů, která v této disertační práci bude ještě několikrát využita například v sekci 2.1 a v poslední sekci 4.2. Tato metoda je zde prezentována při řešení konkrétního příkladu a podobné úlohy lze nalézt např. v [1, 17].

Příklad 3

Určete všechny trojice přirozených čísel splňující rovnici

$$x^2 + y^2 + 2x(y + 2) + 6y + 11 = z^2.$$

Řešení: Zadání úlohy lze po snadné úpravě upravit do tvaru

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 6y + 11 = z^2.$$

Dále je možné si všimnout, že platí

$$\begin{aligned}(x + y + 2)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4,\\ (x + y + 4)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 8y + 16.\end{aligned}$$

Platí tedy následující nerovnost

$$(x + y + 2)^2 < z^2 < (x + y + 4)^2,$$

z které bezprostředně plyne $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 6y + 11 = (x + y + 3)^2$. To ovšem implikuje $x = 1$ a $y = t$, kde t je libovolné přirozené číslo. Po dosazení neznámých do zadání úlohy obdržíme

$$t^2 + 8t + 16 = (t + 4)^2 = z^2.$$

Závěr: Všechny uspořádané trojice splňující danou rovnici jsou ve tvaru $(x, y, z) = (1; t; t + 4)$, kde t je přirozené číslo.

Metoda faktorizace je v pořadí čtvrtou uvedenou elementární metodou, která se hojně využívá v mnoha jiných oblastech školské matematiky. Žáci již na základní škole často používají tuto metodu například při převodu kvadratické rovnice do součinového (faktorizovaného) tvaru.

1.2.2. Metoda faktorizace

Metoda faktorizace (součinového tvaru rovnice) patří mezi elementární metody řešení mnoha typů rovnic (nejen diofantovských) a je známá pro většinu žáků středních škol. I v této práci je metodě faktorizace věnována značná pozornost, přičemž je využívána při řešení diofantovských rovnic například v kapitole 3. Pro ukázku dané metody jsou zde uvedeny tři následující příklady, které jsou speciálními případy diofantovské rovnice 2. stupně, kde $a, c = 0$. Více o této metodě lze nalézt např. v [1, 17].

Příklad 4

Určete všechny dvojice celých čísel splňující

$$xy - 2x + 3y - 10 = 0.$$

Řešení: Daná rovnice po snadné úpravě přejde do tvaru

$$(x+3)(y-2) = 4.$$

Jelikož číslo 4 lze rozložit na součin dvou celých čísel čtyřmi způsoby, a to $4 = 1 \cdot 4 = (-1) \cdot (-4) = 2 \cdot 2 = (-2) \cdot (-2)$, je nutné vyřešit následujících šest soustav lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x+3&=1, \\ y-2&=4, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x+3&=4, \\ y-2&=1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+3&=-1, \\ y-2&=-4, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x+3&=-4, \\ y-2&=-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+3&=2, \\ y-2&=2, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x+3&=-2, \\ y-2&=-2. \end{aligned}$$

Obdržíme tak postupně dvojice celých čísel $(x, y) \in \{(-2; 6), (1; 3), (-4; -2), (-7; 1), (-1; 4), (-5; 0)\}$, které jsou řešením dané úlohy.

Daná úloha lze řešit i jiným způsobem, který je vhodný pro geometrickou interpretaci řešení. Zadání úlohy je možné upravit následovně

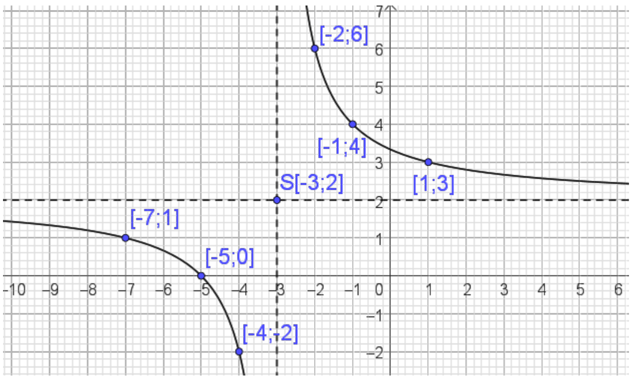
$$y(x+3) = 2x + 10.$$

Výše uvedenou rovnici lze dělit číslem $x+3$, neboť $x \neq -3$. V opačném případě se dostane $0 = 4$, což je spor. Tedy

$$y = \frac{2x+10}{x+3} = \frac{(2x+6)+4}{x+3} = 2 + \frac{4}{x+3}.$$

Z pohledu analytické geometrie se jedná o rovnici rovnoosé hyperboly se středem $S[-3; 2]$ viz obr. 1.

Jelikož y je celé číslo, musí mít *nutně* celočíselnou hodnotu i zlomek $4/(x+3)$. Za neznámou x lze dosazovat pouze hodnoty z množiny $\{-7; -5; -4; -2; -1; 1\}$. Postupným dosazením jednotlivých hodnot x do původní rovnice se získají příslušné hodnoty druhé neznámé y.



Obr. 1

ZÁVĚR: Daná úloha má právě 6 řešení, a to

$$(x, y) \in \{(-7; 1), (-5; 0), (-4; -2), (-2; 6), (-1; 4), (1; 3)\}.$$

Příklad 5

Určete všechny dvojice celých čísel splňující

$$xy - x - y + 3 = 0.$$

ŘEŠENÍ: Zadání úlohy je diofantovská rovnice 2. stupně dle definice 3, kde koeficienty $a, c = 0$. Tuto rovnici lze dále upravit do tvaru

$$(x-1)(y-1) = -2.$$

Stačí tedy vyřešit následující soustavy rovnic, jelikož $-2 = -1 \cdot 2 = 1 \cdot (-2)$:

$$\begin{aligned} x - 1 &= -1, \\ y - 1 &= 2, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x - 1 &= 2, \\ y - 1 &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 1 &= 1, \\ y - 1 &= -2, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x - 1 &= -2, \\ y - 1 &= 1. \end{aligned}$$

Získají se tak postupně uspořádané dvojice celých čísel $(x, y) \in \{(0; 3), (3; 0), (2; -1), (-1; 2)\}$.

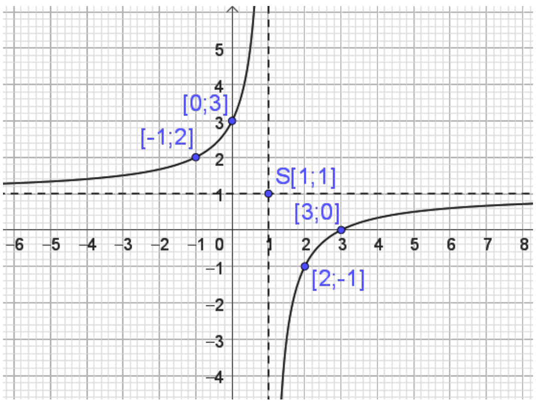
Analogicky s předchozím příkladem lze přepsat danou rovnici do tvaru

$$y(x-1) = x - 3.$$

Tato rovnice je dělitelná číslem $x - 1$, neboť $x \neq 1$. Jinak by platilo $0 = -2$, což není možné. Tedy

$$y = \frac{x-3}{x-1} = \frac{(x-1)-2}{x-1} = 1 - \frac{2}{x-1}.$$

Z grafického hlediska lze danou úlohu přeformulovat na hledání mřížových bodů ležících na rovnoosé hyperbole se středem $S[1; 1]$ viz obr. 2.



Obr. 2

ZÁVĚR: Uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(-1; 2)\ (0; 3), (2; -1), (3; 0)\}$ jsou řešením dané úlohy.

Příklad 6

Určete všechny dvojice celých čísel splňující

$$xy - 2x + y = 15.$$

ŘEŠENÍ: Tato rovnice je diofantovská rovnice 2. stupně, kde koeficienty a a c jsou rovny nule. Zadání úlohy lze snadno přepsat do tvaru

$$(x+1)(y-2) = 13.$$

Jelikož číslo 13 je prvočíslo, existují pouze dva způsoby rozložení čísla 13 na součin dvou celých čísel. Získají se následující dvě soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1, \\ y - 2 &= 13, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x + 1 &= 13, \\ y - 2 &= 1, \end{aligned}$$

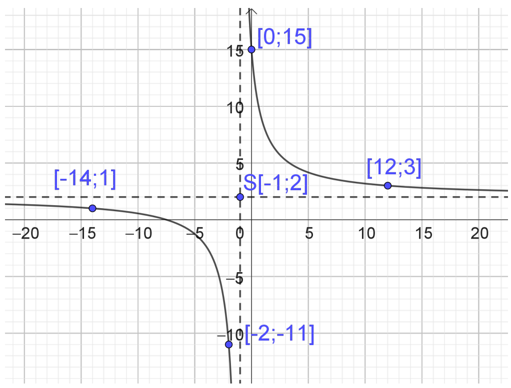
$$\begin{aligned} x + 1 &= -1, \\ y - 2 &= -13, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x + 1 &= -13, \\ y - 2 &= -1. \end{aligned}$$

Obdržíme tak dvojice celých čísel $(x, y) \in \{(0; 15),\ (12; 3),\ (-2; -11),\ (-14; 1)\}$, které jsou řešením dané úlohy.

Jelikož číslo $x + 1$ je *nutně* nenulové celé číslo, je možné upravit danou rovnici do tvaru

$$y = \frac{2x + 15}{x + 1} = \frac{(2x + 2) + 13}{x + 1} = 2 + \frac{13}{x + 1}.$$

(Jedná se o rovnici rovnoosé hyperboly se středem $S[-1; 2]$ viz obr. 3.)



Obr. 3

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy jsou dvojice $(x, y) \in \{(-14; 1), (-2; -11), (0; 15), (12; 3)\}$.

Další elementární metodou, kterou se budeme zabývat, je metoda diskriminantu (viz např. v [30]). S pojmem diskriminant se žáci seznamují často již na základní škole při řešení kvadratických rovnic v množině reálných čísel.

1.2.3. Metoda diskriminantu

V tomto odstavci se budeme zabývat kvadratickou rovnicí $ax^2+bx+c=0$ o neznámé x s celočíselnými koeficienty a, b, c ($a \neq 0$). O počtu řešení této rovnice lze snadno rozhodnout pomocí jejího diskriminantu. Má-li mít daná kvadratická rovnice alespoň jeden celočíselný kořen, je *nutné*, aby diskriminant $D = b^2-4ac$ byl nejen nezáporný, ale aby byl současně druhou mocninou celého čísla.

Příklad 7

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovující rovnici

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 100.$$

Řešení: Daná úloha lze přepsat do tvaru kvadratické rovnice o neznámé x s celočíselným parametrem y

$$3x^2 + 2xy + (3y^2 - 100) = 0.$$

Zřejmě diskriminant $D = 1200 - 32y^2$ této kvadratické rovnice musí být nutně nezáporný a zároveň je i druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Získá se tak po úpravě nerovnice $2y^2 \leq 75$. Celočíselný parametr y může nabývat pouze hodnot z množiny $\{0; \pm 1; \pm 2 \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6\}$.

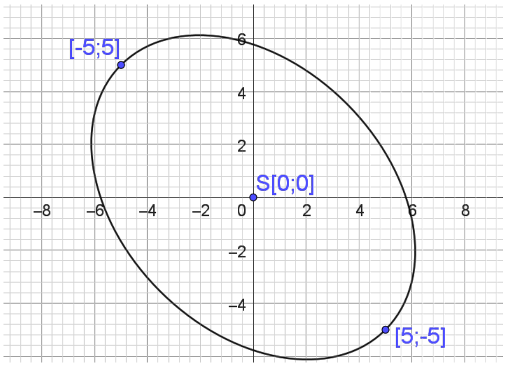
Postupným dosazováním jednotlivých hodnot parametru y do původní rovnice obdržíme kvadratickou rovnici s neznámou x s celočíselným kořenem jen ve dvou případech ($y = 5$ a $y = -5$).

Pro $y = 5$ se získá kvadratická rovnice $3x^2+10x-25 = 0$, která má právě jeden celočíselný kořen $x = -5$.

Druhý případ $y = -5$ implikuje kvadratickou rovnici $3x^2 - 10x - 25 = 0$ s právě jedním celočíselným kořenem $x = 5$.

Snadno se ověří, že v obou dvou případech je diskriminant daných kvadratických rovnic $D = 400 = 20^2$. Nutná podmínka je tedy splněna.

Z pohledu analytické geometrie je rovnice v zadání úlohy rovnicí elipsy (viz klasifikace kuželoseček např. v [15] str. 214). Danou úlohu lze tak přeformulovat na hledání všech mřížových bodů ležících na elipse v otočené souřadnicové soustavě se středem v bodě $S[0; 0]$ viz obr. 4.



Obr. 4

Závěr: Daná úloha má právě dvě řešení ve tvaru $(x, y) \in \{(-5; 5), (5; -5)\}$.

Příklad 8

Určete všechny dvojice (x, y) *celých čísel vyhovující rovnici*

$$x^2 - x + 1 = y^2.$$

Řešení: Zadání úlohy je možné zapsat ve tvaru kvadratické rovnice o neznámé x s celočíselným parametrem y ve tvaru

$$x^2 - x + (1 - y^2) = 0.$$

Zřejmě diskriminant $D = 4y^2 - 3$ výše uvedené kvadratické rovnice je pro každý nenulový celočíselný parametr y vždy kladný. K tomu, aby daná kvadratická rovnice měla řešení, musí být hodnota diskriminantu druhou mocninou některého přirozeného čísla. Tedy $4y^2 - 3 = m^2$, kde $m \in \mathbb{N}$. Po snadné úpravě se získá rovnice

$$4y^2 - m^2 = (2y - m)(2y + m) = 3.$$

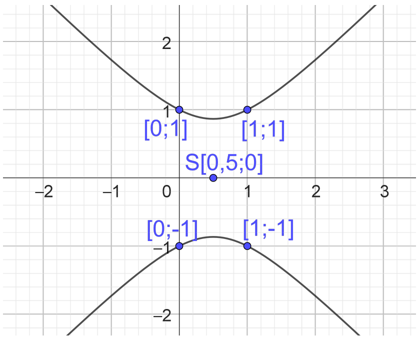
Jelikož číslo 3 je prvočíslem, obdržíme tak pouze dvě možnosti, jak jej rozložit na součin $3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3)$. Vzhledem k tomu, že nutně $2y - m < 2y + m$, pak stačí vyřešit následující dvě soustavy lineárních rovnic o neznámých y a m.

$$\begin{aligned} 2y - m &= 1, \\ 2y + m &= 3, \end{aligned} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} 2y - m &= -3, \\ 2y + m &= -1. \end{aligned}$$

První z nich má řešení $y = 1$, $m = 1$. Dosazením hodnoty $y = 1$ do zadání úlohy obdržíme kvadratickou rovnici $x^2 - x = 0$, která má celočíselné kořeny $x = 0$ a $x = 1$.

Analogicky řešením druhé soustavy lineárních rovnic je dvojice $y = -1$ a $m = 1$. Dosazením $y = -1$ do zadání úlohy se získá stejná kvadratická rovnice jako v předchozím případě s kořeny 0 a 1.

Daná úloha reprezentuje z hlediska analytické geometrie rovnici hyperboly (viz např. v [15] str. 214) se středem $S[0{,}5; 0]$ viz obr. 5.



Obr. 5

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy lze zapsat ve tvaru uspořádaných dvojic $(x, y) \in \{(0; -1), (0; 1), (1; -1), (1; 1)\}$.

Následující úloha je typickým příkladem soutěžní úlohy, kterou lze s výhodou řešit metodou faktorizace.

Příklad 9 (50. Běloruská MO – 2000)
Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

ŘEŠENÍ: Danou diofantovskou rovnici lze upravit do tvaru kvadratické rovnice

$$yx^2 + (y^2 - 36)x + y(y - 6)^2 = 0$$

s neznámou x a s celočíselným parametrem y. Pro $y = 0$ obdržíme ze zadání úlohy $x = 0$, tedy dvojice $(x, y) = (0; 0)$ je řešením dané úlohy.

Pokud $y \neq 0$, pak diskriminant dané kvadratické rovnice je *nutně* nezáporný a přitom musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Platí navíc

$$D = (y^2 - 36)^2 - 4y^2(y - 6)^2 = (y - 6)^2[(y + 6)^2 - 4y^2] = 3(y - 6)^2(6 - y)(y + 2).$$

Odtud plyne, že buď $y = 6$ nebo součin $3(6-y)(y+2)$ musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Řešením kvadratické nerovnice $(6-y)(y+2) \geq 0$ se zjistí, že y musí být celým číslem z intervalu $\langle -2, 6 \rangle$. Postupným dosazením všech devíti možných celočíselných hodnot y do výrazu $3(6-y)(y+2)$ se získají pouze tři možnosti, pro něž je daný výraz druhou mocninou celého nezáporného čísla. Konkrétně jsou to čísla -2; 4 a 6. Obdržíme tak další čtyři celočíselná řešení dané rovnice, tj. uspořádané dvojice $(-8;-2)$, $(0;6)$, $(1;4)$ a $(4;4)$.

Závěr: Všechna celočíselná řešení dané diofantovské rovnice jsou ve tvaru uspořádaných dvojic $(x, y) \in \{(-8;-2), (0;0), (0;6), (1;4), (4;4)\}$.

Čtvrtá uvedená úloha se vyskytuje v [30] jako neřešený příklad 8.

Příklad 10

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel splňujících rovnici

$$x^2 + y^2 = xy + 3.$$

Řešení: Nejprve si všimněme, že záměnou neznámých x a y se zadání úlohy nezmění. Pokud tedy uspořádaná rovnice (x, y) bude řešením dané úlohy, je řešením úlohy i dvojice (y, x). Zadání úlohy lze dále zapsat ve tvaru kvadratické rovnice

$$x^2 - xy + (y^2 - 3) = 0$$

s neznámou x a celočíselným parametrem y. Z grafického hlediska se jedná o nalezení mřížových bodů ležících na (otočené) elipse se středem $S[0;0]$ viz následující obr. 6. Pokud má mít daná kvadratická rovnice řešení, pak její diskriminant $D = 12 - 3y^2$ musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla a zároveň musí platit nerovnice $12 - 3y^2 \geq 0$, tj. $y^2 \leq 4$. Číslo y tedy nabývá pouze hodnot z množiny $\{-2;-1;0;1;2\}$.

Postupným dosazením těchto hodnot y do zadání obdržíme řešení dané úlohy.

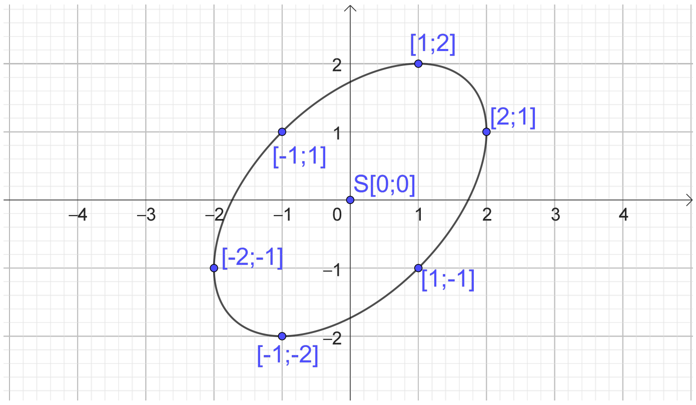
Je-li $y = -2$, diskriminant je roven 0. Získáme tak kvadratickou rovnici $x^2 + 2x + 1 = 0$ s celočíselným kořenem $x = -1$.

Pro $y = -1$ nabývá výraz $12 - 3y^2$ hodnoty 9 a obdržíme kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + x - 2 = 0$. Tato kvadratická rovnice má dva celočíselné kořeny $x = -2$ a $x = 1$.

Pro $y = 0$ nabývá výraz $12 - 3y^2$ hodnoty 12, což není druhou mocninou celého čísla. Tento případ žádné celočíselné řešení neposkytuje.

Pro $y = 1$ opět nabývá daný výraz hodnoty 9 a analogicky získáme kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$. Řešením této kvadratické rovnice jsou $x = -1$ a $x = 2$.

Je-li $y = 2$, hodnota diskriminantu je opět rovna 0. Kvadratická rovnice přejde do tvaru $x^2 - 2x + 1 = 0$, přičemž jejím řešením je $x = 1$.



Obr. 6

Závěr: Všechna celočíselná řešení dané úlohy vzhledem k symetrii úlohy jsou dvojice $(x, y) \in \{(-2; -1), (-1; -2), (-1; 1), (1; -1), (1; 2), (2; 1)\}$.

Kapitola 2

Gaussova celá čísla při řešení diofantovských rovnic

S rovnicemi o více neznámých, které řešíme v oboru celých čísel - tzv. diofantovskými, se žáci mohou setkat např. již na základní škole. Druhá kapitola této disertační práce se zabývá kvadratickou diofantovskou rovnicí

$$x^2 + y^2 = n, \tag{2.1}$$

kde x, y jsou celočíselné neznámé a n je dané celé nezáporné číslo. Z pohledu analytické geometrie se jedná o určení všech *mřížových bodů* (tj. bodů s oběma celočíselnými souřadnicemi x, y), které leží na kružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a poloměrem $\sqrt{n}$.

Cílem této kapitoly je prezentace tzv. *Gaussových celých čísel* při řešení problémů uvedeného typu. Od čtenáře se přitom očekávají základní znalosti z oblasti komplexních čísel.

Přestože výše uvedená problematika není vyloženě školská, úlohy podobného typu se poměrně často vyskytují v matematických soutěžích. Tato část disertační práce je mj. vhodná pro učitele, kteří se věnují péči o matematicky talentované žáky, pro žáky samotné a další zájemce o tuto problematiku.

Pro malá (celá nezáporná) n lze při řešení dané úlohy postupovat užitím metody nerovností a odhadů, která je prezentována při řešení následujícího příkladu.

Příklad 11

V oboru celých čísel řešte rovnici

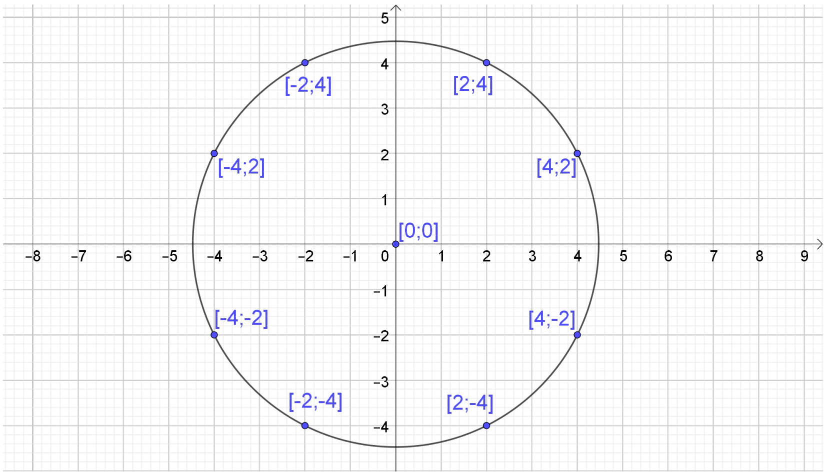
$$x^2 + y^2 = 20.$$

Řešení: Pokud je nějaká dvojice celých čísel (m, n) řešením této úlohy, je jejím řešením také dvojice (n, m). Dalšími řešeními jsou také dvojice $(-m, n)$, $(m, -n)$, $(-m, -n)$, $(-n, m)$, $(n, -m)$, $(-n, -m)$.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $x^2 \leq y^2$. Pak

$$0 \leq 2x^2 \leq x^2 + y^2 = 20,$$

odkud plyne $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$, a tedy x je *nutně* celé číslo, pro něž platí $-3 \leq x \leq 3$. Dosazením těchto hodnot za x^2 v dané úloze lze postupně obdržet $y^2 = 20$, $y^2 = 19$, $y^2 = 16$, $y^2 = 11$.
Celočíselné řešení se získá pouze v případě $y^2 = 16$, tj. $y = \pm 4$.



Obr. 7

Závěr: Daná úloha má právě 8 řešení, a to $(x, y) \in \{(\pm 2; \pm 4), (\pm 4; \pm 2)\}$.

Z řešení uvedeného příkladu je patrné, že pro velká přirozená čísla n není metoda nerovností a odhadů dostatečně efektivní. V takových případech je vhodné použít tzv. *Gaussova celá čísla*.

Definice 4

Komplexní čísla $\alpha = x + y\mathrm{i}$, kde x, y jsou celá čísla, se nazývají *Gaussova celá čísla.*

Množina všech Gaussových celých čísel, která se označuje $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, je rozšířením množiny celých čísel (tj. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$).

Definice 5

Gaussovo celé číslo α, pro které existuje $\tau \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ splňující $\alpha \cdot \tau = 1$, nazveme *jednotkou*.

Definice 6

Norma $N(\alpha)$ Gaussova celého čísla $\alpha = x + y\mathrm{i}$ je definována předpisem $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = x^2 + y^2$, kde $\overline{\alpha} = x - y\mathrm{i}$ je komplexně sdružené číslo s α.

Norma Gaussova celého čísla je analogií s pojmem absolutní hodnota celého čísla a má přitom následující vlastnosti:

a) Pro libovolná dvě Gaussova celá čísla α, β platí $N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

b) Gaussovo celé číslo α je jednotka, právě když $N(\alpha) = 1$, přičemž v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ jsou jednotkami pouze ± 1 a $\pm \mathrm{i}$.

Lemma 1

Je-li zbytek při dělení přirozeného čísla n čtyřmi roven 3, pak rovnice $x^2 + y^2 = n$ nemá řešení v oboru celých čísel.[1]

DŮKAZ: Libovolné nezáporné celé číslo p, které je dělitelné 2, lze zapsat ve tvaru $p = 2l$, kde l je vhodné nezáporné celé číslo. Proto $p^2 = (2l)^2 = 4l^2$ je dělitelné čtyřmi. Podobně každé liché přirozené číslo q lze zapsat ve tvaru $q = 2r + 1$, kde r je vhodné nezáporné celé číslo. Pak $q^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1$ dává po dělení čtyřmi zbytek 1. Výraz $x^2 + y^2$ tedy může nabývat po dělení čtyřmi pouze zbytků $0, 1$ a 2, nikoliv však 3. Tím je důkaz ukončen.

Z lemmatu 1 plyne, že například diofantovská rovnice $x^2 + y^2 = 2\,023$ nemá žádné celočíselné řešení, neboť $2\,023$ dává při dělení čtyřmi zbytek 3.

Následující věta je uvedena pouze informativně (bez důkazu). Ten je možné dohledat např. v [12].

Věta 1

Přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin celých čísel ($n = x^2+y^2$), právě když n je normou Gaussova celého čísla, tj. $n = N(x+y\mathrm{i})$.

[1] Z uvedeného lemmatu automaticky neplyne, že rovnice $x^2+y^2 = n$ má vždy celočíselné řešení pro n, jenž po dělení čtyřmi dává zbytek $0, 1$ nebo 2.

Podle věty 1 lze problém o součtu druhých mocnin celých čísel přeformulovat na úlohu o hledání všech Gaussových celých čísel α splňujících vlastnost $N(\alpha) = n$. Z aritmetiky přirozených čísel je známo, že každé přirozené číslo $n \geq 2$ je možné vyjádřit jako součin prvočísel. Stručnou odpověď na otázku, která prvočísla jsou normami Gaussových celých čísel, poskytuje následující lemma.

Lemma 2

a) *Platí* $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$.

b) *Pro každé prvočíslo* p *dávající po dělení čtyřmi zbytek* 1 *lze nalézt Gaussovo celé číslo* α *splňující* $p = N(\alpha)$.

c) *Pro každé prvočíslo* p *dávající zbytek* 3 *po dělení čtyřmi neexistuje žádné Gaussovo celé číslo* β *splňující* $p = N(\beta)$.

Důkaz lze nalézt např. v [11].

Dále si je možné všimnout, že komplexně sdružená Gaussova celá čísla mají vždy stejnou normu a zároveň pro každé prvočíslo p platí $p^2 = N(p)$.

Definice 7

Gaussovo celé číslo $\alpha = x + y\mathrm{i}$ nazveme *Gaussovým prvočíslem*, pokud platí následující podmínka: Jestliže $\alpha = \tau \cdot \psi$, kde τ, $\psi \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, pak buď τ, nebo ψ je jednotka.

Jinak řečeno, Gaussova prvočísla jsou právě ta Gaussova celá čísla, která nelze v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ netriviálně rozložit na součin dvou Gaussových celých čísel.

Poznámka: Některá prvočísla jsou v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ rozložitelná a jiná ne. Například pro prvočíslo 5 platí $5 = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$, tudíž 5 není Gaussovým prvočíslem. Naopak prvočíslo 3 je v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ nerozložitelné, a tedy je zároveň Gaussovým prvočíslem. Podobně jako v aritmetice celých čísel lze každé nenulové Gaussovo celé číslo, které není jednotkou, jednoznačně vyjádřit (až na pořadí, násobení jednotkami a komplexně sdruženými čísly) jako součin Gaussových prvočísel.

Věta 2 (L. Euler)
Číslo ve tvaru $4l + 1$, *kde* l *je přirozené číslo, je prvočíslem, právě když jej lze jednoznačně vyjádřit jako součet dvou druhých mocnin nesoudělných přirozených čísel.*

Následující věta dává vyčerpávající odpověď na otázku řešitelnosti a celkového počtu řešení původního problému (2.1).

Věta 3

a) *Přirozené číslo n lze vyjádřit jakou součet dvou druhých mocnin celých čísel ($n = x^2 + y^2$), právě když prvočíselný rozklad čísla n lze vyjádřit ve tvaru*

$$n = 2^a p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k} r_1^{2c_1} \cdot \ldots \cdot r_l^{2c_l},$$

kde a, b_i, c_j jsou nezáporná celá čísla, každé p_i dává zbytek 1 po dělení čtyřmi a každé r_j dává zbytek 3 po dělení čtyřmi.

b) *Nechť $t = (b_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (b_k + 1)$. Pak je počet všech různých vyjádření čísla n ve tvaru součtu dvou druhých mocnin celých čísel s ohledem na pořadí prvků a znaménka roven $4t$. Bez ohledu na pořadí prvků a znaménka je tento počet roven $\frac{1}{2}t$ pro t sudé a $\frac{1}{2}(t + 1)$ pro t liché.*

S výše uvedenými výsledky včetně důkazů se může čtenář detailněji seznámit např. v [11, 12, 14, 16].

Jiné řešení příkladu 1. Platí $20 = 2^2 \cdot 5$ a $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$ a prvočíslo 5 dává po dělení čtyřmi zbytek 1, přičemž $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$. Tedy

$$20 = 2^2 \cdot 5 = N(k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm\mathrm{i}$. Musí se tedy vyřešit všechny rovnice $x + y\mathrm{i} = k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i})$. Z věty 3 plyne, že daná úloha má celkem 8 řešení. Bez ohledu na pořadí prvků a a znaménka lze obdržet dle věty 3 pouze 1 možnost. Stačí uvažovat o řešení jediné rovnice, např.

$$x + y\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^2(2 + \mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(2 + \mathrm{i}) = -2 + 4\mathrm{i},$$

odkud $x = -2$, $y = 4$. Ostatní řešení se získají záměnou x, y a znamének.

Příklad 12

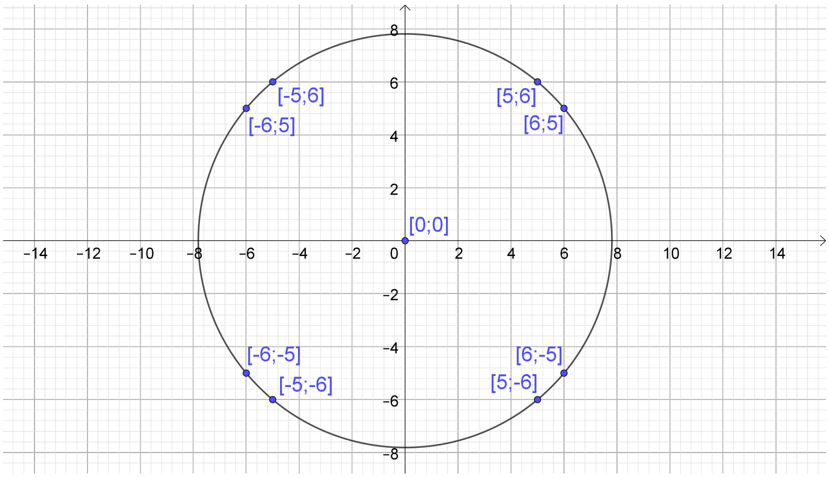
Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = 61.$$

Řešení: Číslo 61 je prvočíslo, které při dělení číslem 4 dává zbytek 1. Podle lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo, jehož normou je 61. Např. $61 = N(6 \pm 5\mathrm{i})$. Tedy

$$61 = N(k(6 \pm 5\mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm\mathrm{i}$. Je třeba nalézt všechna řešení rovnic $x + y\mathrm{i} = k(6 \pm 5\mathrm{i})$. Analogicky s předchozím příkladem (dle



Obr. 8

věty 3) stačí vzít do úvahy jedinou rovnici, např. $x + y\mathrm{i} = 6 + 5\mathrm{i}$. Další řešení obdržíme záměnou x, y a znamének.

Závěr: Řešeními dané úlohy jsou dvojice $(x, y) \in \{(\pm 5; \pm 6), (\pm 6; \pm 5)\}$.

Z řešení následujícího příkladu je zřejmé výhodnější použití Gaussových celých čísel ve srovnání s metodou nerovností a odhadů.

Příklad 13 (viz [16] - 2. úloha)

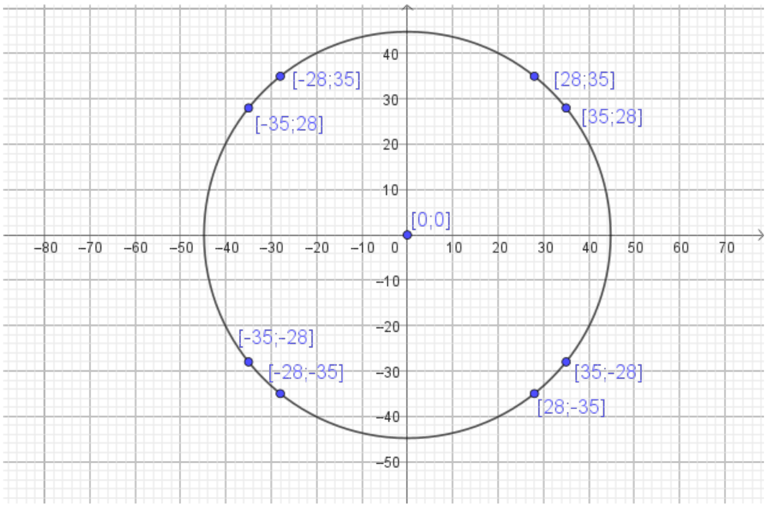
V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,009.$$

Řešení: Nejprve se vytvoří prvočíselný rozklad čísla 2 009, tj. $2\,009 = 7^2 \cdot 41$. Z lemmatu 2 plyne, že existuje Gaussovo celé číslo, pro které je prvočíslo 41 normou. Např. $41 = N(5 \pm 4\mathrm{i})$. Pro prvočíslo 7 takové Gaussovo celé číslo neexistuje, neboť 7 dává zbytek 3 po dělení čtyřmi. Prvočíslo 7 se ovšem vyskytuje v prvočíselném rozkladu v druhé mocnině, proto $7^2 = N(7)$. Platí tedy

$$2\,009 = 7^2 \cdot 41 = N(7k(5 \pm 4\mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm \mathrm{i}$. Hledá se proto řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = 7k(5 \pm 4\mathrm{i})$. Daná úloha má podle věty 3 právě 8 řešení. Stačí přitom řešit pouze rovnici $x + y\mathrm{i} = 7(5 + 4\mathrm{i}) = 35 + 28\mathrm{i}$, odtud $x = 35$ a $y = 28$. Zbývající řešení lze získat záměnou x, y a znamének.



Obr. 9

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy jsou $(x, y) \in \{(\pm 35; \pm 28), (\pm 28; \pm 35)\}$.

Příklad 14

Řešte diofantovskou rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,020$$

v oboru celých čísel.

ŘEŠENÍ: V prvním kroku se vytvoří prvočíselný rozklad čísla 2 020, tj. $2\,020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Z lemmatu 2 plyne, že pro prvočísla 5 a 101 existují Gaussova celá čísla, pro která jsou tato čísla normami. Např. $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$, $101 = N(10 \pm \mathrm{i})$. Pro prvočíslo 2 dle lemmatu 2 je norma ve tvaru $N(1 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

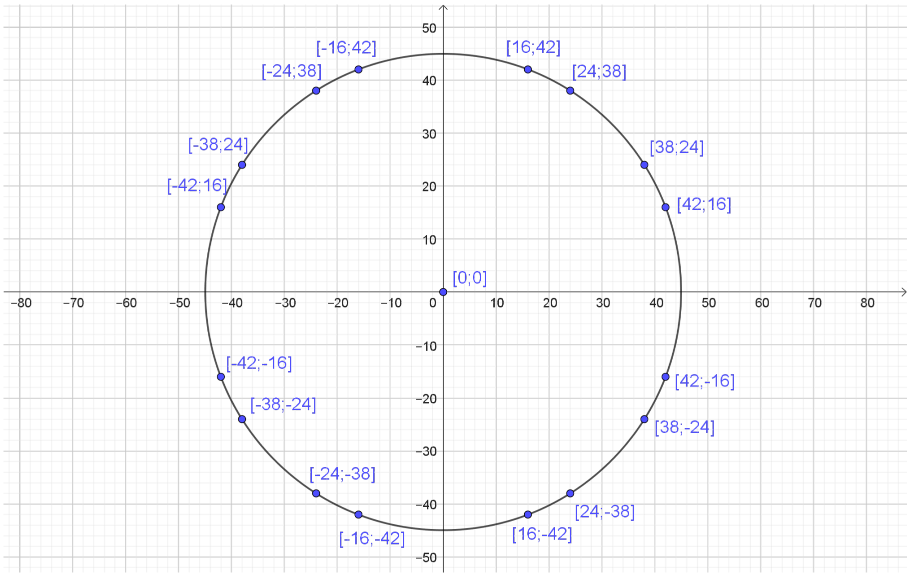
$$2\,020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = N(k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i})(10 \pm \mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. ± 1 nebo $\pm \mathrm{i}$. Hledá se proto řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = k(1 \pm \mathrm{i})^2(2 \pm \mathrm{i})(10 \pm \mathrm{i})$. Podle věty 3 má daná úloha dvě různá řešení bez ohledu na pořadí prvků a znaménka. Do úvahy stačí tedy vzít například tyto dva případy:

a) $x + y\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^2(2 + \mathrm{i})(10 + \mathrm{i}) = -24 + 38\mathrm{i}$,

b) $x + y\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^2(2 + \mathrm{i})(10 - \mathrm{i}) = -16 + 42\mathrm{i}$.

Z první možnosti plyne řešení $(x, y) = (-24; 38)$ a z druhé $(x, y) = (-16; 42)$. Ostatní řešení získáme záměnou x, y a změnou znamének.



Obr. 10

Závěr: Daná úloha má právě 16 řešení, tj. $(x, y) \in \{(\pm 16; \pm 42), (\pm 24; \pm 38), (\pm 38; \pm 24), (\pm 42; \pm 16)\}$.

Následující příklad lze (po užití substituce) řešit opět metodou Gaussových celých čísel.

Příklad 15

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 = 2\,006(x - y).$$

Řešení: Ze zadání se snadno vidí, že levá strana rovnice je součtem dvou celých nezáporných čísel, tedy i pravá strana musí být celé nezáporné číslo. Jelikož $2\,006$ je přirozené číslo, musí platit $x \geq y$. Dále si lze všimnout, že uspořádaná dvojice $(x, y) = (0; 0)$ je řešením úlohy. Po snadné úpravě se obdrží daná rovnice ve tvaru

$$(x - 1\,003)^2 + (y + 1\,003)^2 = 2\,012\,018.$$

Užitím substituce $z = x - 1\,003$, $u = y + 1\,003$ lze po úpravě získat modifikovanou úlohu (2.1)

$$z^2 + u^2 = 2\,012\,018,$$

kde $2\,012\,018 = 2 \cdot 17^2 \cdot 59^2$. Platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$. Podle lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo s normou 17. Např. $17 = N(4 \pm \mathrm{i})$. Dle téhož lemmatu neexistuje Gaussovo celé číslo s normou 59, ovšem prvočíslo 59 se vyskytuje v daném rozkladu v druhé mocnině, přičemž $59^2 = N(59)$. Platí tedy

$$2\,012\,018 = N(59k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})^2) = N(z + u\mathrm{i}) = z^2 + u^2,$$

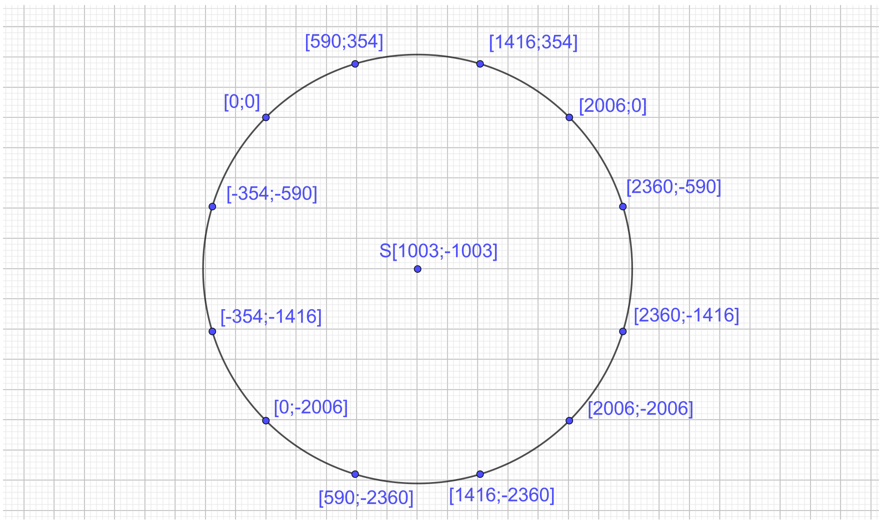
kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Na základě věty 3 má úloha celkem $4 \cdot 3 = 12$ celočíselných řešení, přičemž bez ohledu na pořadí prvků a znaménka stačí vyřešit následující dvě rovnice o neznámých z a u:

a) $z + u\mathrm{i} = 59(1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})^2 = 413 + 1\,357\mathrm{i}$,

b) $z + u\mathrm{i} = 59(1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 1\,003 + 1\,003\mathrm{i}$.

Další řešení se získají záměnou složek z, u a změnou znamének. Obdržíme tak celkem 12 řešení ve tvaru $(z, u) \in \{(\pm 413; \pm 1\,357), (\pm 1\,003; \pm 1\,003), (\pm 1\,357; \pm 413)\}$. Dosazením do vztahů $z = x - 1\,003$, $u = y + 1\,003$ lze získat řešení původní úlohy.

Řešením úlohy jsou z grafického hlediska mřížové body na kružnici, která nemá střed v počátku, viz obr. 11.



Obr. 11

Závěr: Úloha má právě 12 řešení, a to dvojice $(x, y) \in \{(-354; -1\,416), (-354; -590), (0; -2\,006), (0; 0), (590; -2\,360), (590; 354), (1\,416; -2\,360), (1\,416; 354), (2\,006; -2\,006), (2\,006; 0), (2\,360; -1\,416), (2\,360; -590)\}$.

Příklad 16

Určete všechny uspořádané dvojice (x, y) celých čísel, které splňují rovnici

$$x^2 + y^2 = 21.$$

ŘEŠENÍ: Z prvočíselného rozkladu $21 = 3 \cdot 7$ se zjistí, že pro prvočísla 3 a 7 neexistují Gaussova celá čísla, jejichž normami by byla daná prvočísla. Jelikož se 3 (ani 7) nevyskytuje v sudé mocnině v prvočíselném rozkladu 21, nemá daný příklad podle věty 3 celočíselné řešení. Tuto skutečnost lze snadno ověřit i pomocí metody nerovností a odhadů.

ZÁVĚR: Daná úloha *nemá řešení* v oboru celých čísel.

Příklad 17

Určete všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 1\,105.$$

ŘEŠENÍ: V prvním kroku se vytvoří prvočíselný rozklad čísla 1 105, tj. $1\,105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$. Z lemmatu 2 plyne, že pro prvočísla 5, 13 a 17 existují Gaussova celá čísla, která jsou jejich normami, kde $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$, $13 = N(3 \pm 2\mathrm{i})$, $17 = N(4 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$1\,105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = N(k(2 \pm \mathrm{i})(3 \pm 2\mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. $k = \pm 1$ nebo $k = \pm \mathrm{i}$. Je proto třeba hledat řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = k(2 \pm \mathrm{i})(3 \pm 2\mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})$. Celkový počet řešení dle věty 3 je $4 \cdot 2^3 = 32$. Není ovšem nutné řešit všechny rovnice daného typu. Stačí vyřešit pouze čtyři případy:

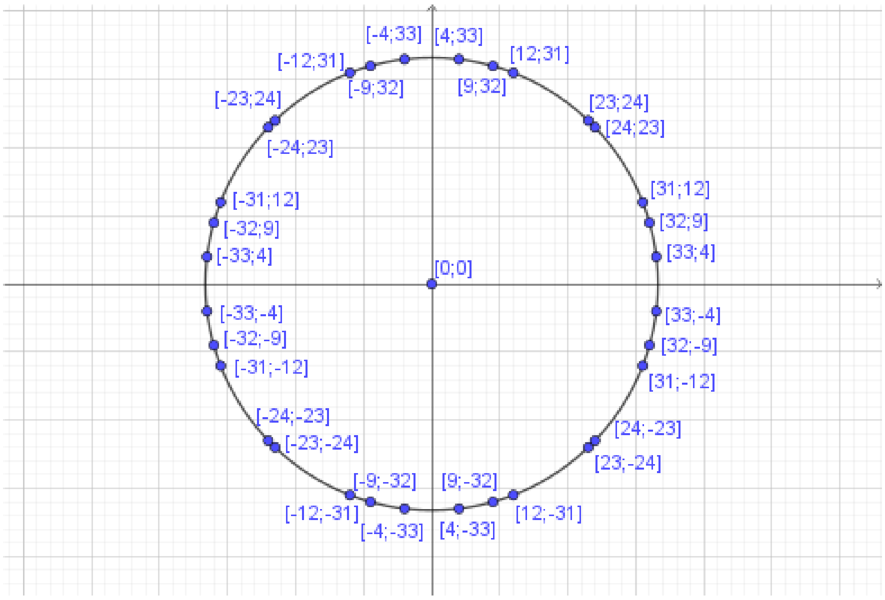
a) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 9 + 32\mathrm{i}$,

b) $x + y\mathrm{i} = (2 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 31 + 12\mathrm{i}$,

c) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 33 + 4\mathrm{i}$,

d) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = 23 + 24\mathrm{i}$.

Odtud se získají následující čtyři řešení $(x, y) \in \{(9; 32), (31; 12), (33; 4), (23; 24)\}$. Další řešení obdržíme záměnou x, y a změnou znamének.



Obr. 12

ZÁVĚR: Všech 32 celočíselných řešení daného příkladu lze zapsat ve tvaru $(x, y) \in \{(\pm 4; \pm 33), (\pm 9; \pm 32), (\pm 12; \pm 31), (\pm 23; \pm 24), (\pm 24; \pm 23), (\pm 31; \pm 12), (\pm 32; \pm 9), (\pm 33; \pm 4)\}$.

Příklad 18

Určete všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 4\,225.$$

ŘEŠENÍ: Nejprve se vytvoří prvočíselný rozklad čísla $4\,225$, tj. $4\,225 = 5^2 \cdot 13^2$. Z lemmatu 2 plyne, že pro prvočísla 5 a 13 existují Gaussova celá čísla, pro která jsou daná čísla normami. Např. $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$, $13 = N(3 \pm 2\mathrm{i})$. Platí tedy

$$4\,225 = 5^2 \cdot 13^2 = N(k(2 \pm \mathrm{i})^2(3 \pm 2\mathrm{i})^2) = N(x + y\mathrm{i}) = x^2 + y^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, tj. ± 1 nebo $\pm \mathrm{i}$. Je tedy třeba určit řešení všech rovnic $x + y\mathrm{i} = k(2 \pm \mathrm{i})^2(3 \pm 2\mathrm{i})^2$. Analogicky s předchozími příklady (na základě věty 3) není nutné řešit všechny rovnice daného typu, postačí vyřešit pouze pět případů:

a) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})^2(3 + 2\mathrm{i})^2 = -33 + 56\mathrm{i}$,

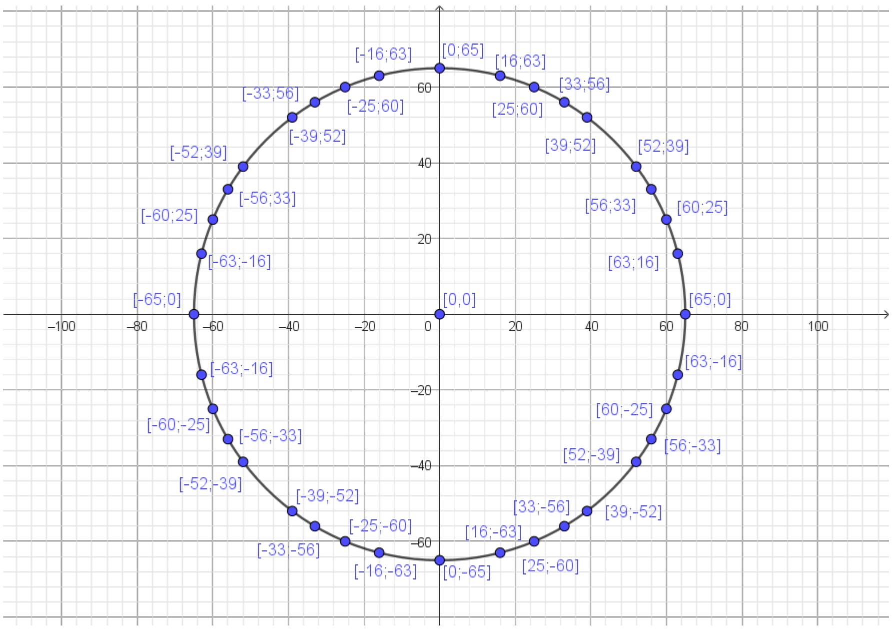
b) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})^2 = 25 + 60\mathrm{i}$,

c) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})^2(3 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i}) = 39 + 52\mathrm{i}$,

d) $x + y\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i}) = 65 + 0\mathrm{i}$,

e) $x + y\mathrm{i} = (2 - \mathrm{i})^2(3 + 2\mathrm{i})^2 = 63 + 16\mathrm{i}$.

Získají se tak řešení ve tvaru $(x, y) \in \{(33; 56), (25; 60), (39; 52), (65; 0), (63; 16)\}$. Zbývající řešení obdržíme záměnou x, y a změnou znamének.



Obr. 13

Závěr: Daná úloha má celkem 36 celočíselných řešení ve tvaru $(x, y) \in \in \{(0; \pm 65), (\pm 16; \pm 63), (\pm 25; \pm 60), (\pm 33; \pm 56), (\pm 39; \pm 52), (\pm 52; \pm 39), (\pm 56; \pm 33), (\pm 60; \pm 25), (\pm 63; \pm 16), (\pm 65; 0)\}$.

Následující úloha je z 55. ročníku Matematické olympiády (MO) a lze ji řešit pomocí metody Gaussových celých čísel.

Příklad 19 (MO 55–A–I–6)

Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2\,005(x - y).$$

Řešení: Pro nalezení řešení lze využít metodu Gaussových celých čísel, díky níž se tato úloha vyřeší dokonce v oboru celých čísel. Po snadné úpravě je možné danou rovnici přepsat do tvaru

$$(2x - 2\,005)^2 + (2y + 2\,005)^2 = 8\,040\,050.$$

Zavedením substituce $u = 2x - 2\,005$, $v = 2y + 2\,005$ se získá modifikovaná úloha (2.1)

$$u^2 + v^2 = 8\,040\,050.$$

(Z pohledu analytické geometrie lze původní zadání úlohy převést na hledání všech mřížových bodů, které leží v prvním kvadrantu, nikoliv ani na jedné ze souřadnicových os a současně náležící kružnici se středem $S[\frac{2\,005}{2}; -\frac{2\,005}{2}]$ a poloměrem $\sqrt{\frac{4\,020\,025}{2}}$.)

V dalším kroku se vytvoří prvočíselný rozklad čísla $8\,040\,050 = 2 \cdot 5^2 \cdot 401^2$. Platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$. Jelikož obě prvočísla 5 a 401 dávají po dělení čtyřmi zbytek 1, pak dle lemmatu 2 existují Gaussova celá čísla, pro která jsou tato čísla normami. Např. $5 = N(2 \pm \mathrm{i})$, $401 = N(20 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$8\,040\,050 = N(k(1 \pm \mathrm{i})(2 \pm \mathrm{i})^2(20 \pm \mathrm{i})^2) = N(u + v\mathrm{i}) = u^2 + v^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Analogicky s předchozími příklady (dle věty 3) stačí vyřešit pouze následujících pět možností:

a) $u + v\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})^2(20 + \mathrm{i})^2 = -679 + 2\,753\mathrm{i}$,

b) $u + v\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(20 + \mathrm{i})^2 = 1\,795 + 2\,195\mathrm{i}$,

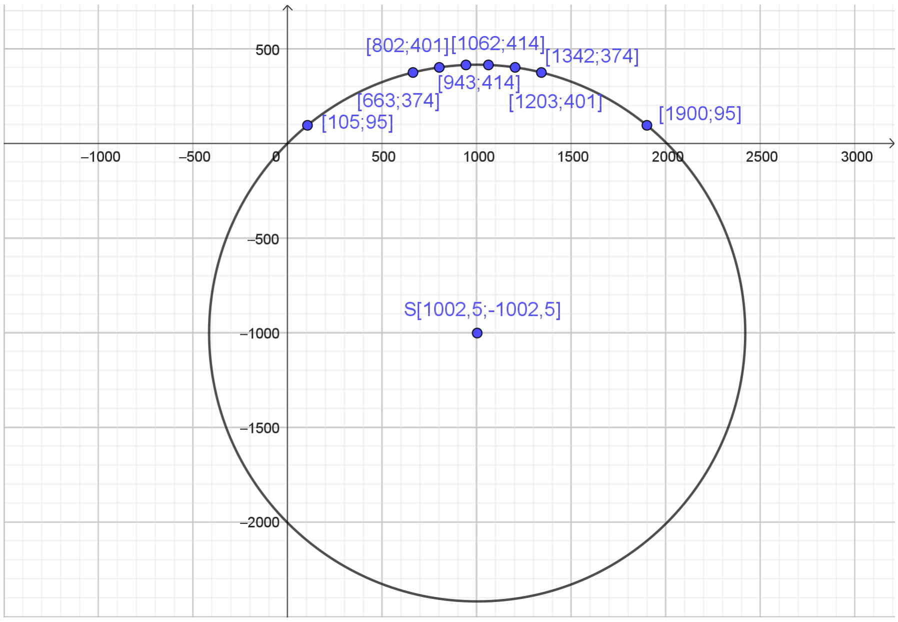
c) $u + v\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})^2(20 + \mathrm{i})(20 - \mathrm{i}) = -401 + 2\,807\mathrm{i}$,

d) $u + v\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(20 + \mathrm{i})(20 - \mathrm{i}) = 2\,005 + 2\,005\mathrm{i}$,

e) $u + v\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})^2(20 + \mathrm{i})^2 = 2\,833 - 119\mathrm{i}$.

Další řešení lze získat záměnou u, v a změnou znamének. Obdržíme tak celkem 36 řešení $(u, v) \in \{(\pm119; \pm2\,833), (\pm401; \pm2\,807), (\pm679; \pm2\,753), (\pm1\,795; \pm2\,195), (\pm2\,005; \pm2\,005), (\pm2\,833; \pm119), (\pm2\,807; \pm401), (\pm2\,753; \pm679), (\pm2\,195; \pm1\,795)\}$.

Dosazením do vztahů $u = 2x - 2\,005$, $v = 2y + 2\,005$ se získá celkem 36 celočíselných řešení, přičemž právě 8 z nich leží v oboru přirozených čísel.



Obr. 14

ZÁVĚR: Existuje právě 8 řešení dané úlohy ve tvaru uspořádaných dvojic $(x, y) \in \{(105; 95), (663; 374), (802; 401), (943; 414)\ (1\,062; 414), (1\,203; 401), (1\,342; 374), (1\,900; 95)\}$.

Závěrem je zde uvedena následující úloha, kterou lze řešit kombinací metody nerovností a odhadů s metodou Gaussových celých čísel. Zadání této úlohy bylo uvedeno jako problém 3 v roce 2010 viz [19].

Příklad 20

Kolik uspořádaných trojic celých čísel (x, y, z) *splňuje rovnici*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 34?$$

ŘEŠENÍ: Zde se jedná o nalezení všech mřížových bodů v prostoru, které leží na kulové ploše se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $\sqrt{34}$.

Dále si lze všimnout, že záměnou neznámých se daná úloha nezmění. Bez újmy na obecnosti je tedy možné předpokládat, že x^2 je nejmenší z hodnot x^2, y^2, z^2, neboli $x^2 \leq y^2$ a $x^2 \leq z^2$. K řešení úlohy se využívá v prvním kroku metoda nerovností a odhadů a posléze metoda Gaussových celých čísel. Podle výše uvedeného předpokladu tak platí

$$0 \leq 3x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 34.$$

Z čehož plyne $x^2 \leq 11$, neboli $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. V dalším kroku jsou postupně rozebrány tyto 4 možnosti s použitím metody Gaussových celých čísel:

a) Pro $x = 0$ ze zadání úlohy obdržíme rovnice ve tvaru $y^2 + z^2 = 34$. Prvočíselný rozklad čísla 34 je roven $2 \cdot 17$. Jelikož prvočíslo 17 dává zbytek 1 po dělení čtyřmi, pak podle lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo, pro které je 17 normou, například $N(4 \pm \mathrm{i})$. Pro číslo 2 platí $2 = N(1 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$34 = N(k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i})) = N(y + z\mathrm{i}) = y^2 + z^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Hledají se proto celočíselná řešení všech rovnic

$$y + z\mathrm{i} = k(1 \pm \mathrm{i})(4 \pm \mathrm{i}).$$

Na základě věty 3 stačí vyřešit pouze rovnici

$$y + z\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 3 + 5\mathrm{i},$$

z níž ihned plyne $(y, z) = (3; 5)$. Zbývající řešení získáme záměnou y, z a znamének. Obdržíme tak trojice $(x, y, z) \in \{(0; \pm 3; \pm 5), (0; \pm 5; \pm 3)\}$, které jsou řešením dané rovnice.

b) Je-li $x = \pm 1$, pak se získá rovnice $y^2 + z^2 = 33$. Tato rovnice nemá tedy na základě věty 3 celočíselné řešení, neboť v prvočíselném rozkladu čísla 33 se prvočíslo 3 vyskytuje v liché mocnině.

c) Je-li $x = \pm 2$, dostane se rovnice $y^2 + z^2 = 30$. Ta opět nemá celočíselné řešení na základě věty 3, protože v rozkladu čísla 30 na prvočísla se prvočíslo 3 vyskytuje v liché mocnině.

d) Pro $x = \pm 3$ lze získat rovnici $y^2 + z^2 = 25$. Prvočíselný rozklad čísla 25 je roven 5^2. Na základě lemmatu 2 existuje Gaussovo celé číslo s normou 5, např. $N(2 \pm \mathrm{i})$. Platí tedy

$$25 = N(k(2 \pm \mathrm{i})^2) = N(y + z\mathrm{i}) = y^2 + z^2,$$

kde k je jednotka v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Podle věty 3 stačí určit y a z v následujících rovnicích

$$y + z\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i}$$

a

$$y + z\mathrm{i} = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = 5 + 0\mathrm{i}.$$

Jejich řešením jsou dvojice $(y, z) = (3; 4)$ a $(y, z) = (5; 0)$. Dvojice $(5; 0)$ však nevyhovuje podmínkám úlohy. Zbývající řešení získáme záměnou y, z a změnou znamének. Řešeními dané rovnice jsou pouze následující trojice: $(x, y, z) \in \{(\pm 3; \pm 3; \pm 4),\ (\pm 3; \pm 4; \pm 3)\}$.

Bez užití předpokladu x^2 je nejmenší (jedna z nejmenších hodnot) lze celkový počet řešení dané úlohy stanovit pomocí počtu všech permutací složek řešení. V uspořádané trojici $(x, y, z) = (0; \pm 3; \pm 5)$ je možné 0 umístit na tři pozice (vzhledem k symetrii) a u ostatních prvků měnit znaménka $2^2 = 4$ způsoby, z čehož plyne $3 \cdot 4 = 12$ možností. Dalších 12 možností se získá analogicky z trojice $(x, y, z) = (0; \pm 5; \pm 3)$. Dále si lze uvědomit, že v uspořádané trojici $(x, y, z) = (\pm 3; \pm 3; \pm 4)$ je možné číslo ± 4 umístit na tři pozice a zároveň měnit znaménka u všech prvků celkově $2^3 = 8$ způsoby. Obdržíme tak $3 \cdot 8 = 24$ možností.

ZÁVĚR: Existuje tedy právě 48 řešení dané úlohy viz předchozí odstavec.

K procvičení metody Gaussových celých čísel jsou zde uvedeny následující neřešené příklady.

Příklad 21

V oboru celých čísel řešte rovnice

a) $x^2 + y^2 = 41$,
[ŘEŠENÍ: $(x, y) \in \{(\pm 4; \pm 5), (\pm 5; \pm 4)\}$]

b) $x^2 + y^2 = 674$,
[ŘEŠENÍ: $(x, y) \in \{(\pm 7; \pm 25), (\pm 25; \pm 7)\}$]

c) $x^2 + y^2 = 2\,024$,
[ŘEŠENÍ: *neexistuje*]

d) $x^2 + y^2 = 2\,022(x - y)$,
[ŘEŠENÍ: $(x, y) \in \{(-378; -1\,350),\ (-378; -672),\ (0; -2\,022),\ (0; 0),\ (672; -2\,400),\ (672; 378),\ (1\,350; -2\,400),\ (1\,350; 378),\ (2\,022; -2\,022),\ (2\,022; 0),\ (2\,400; -1\,350),\ (2\,400; -672)\}$]

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 52$.
[ŘEŠENÍ: $(x, y, z) \in \{(0; \pm 4; \pm 6),\ (0; \pm 6; \pm 4),\ (\pm 4; 0; \pm 6),\ (\pm 4; \pm 6; 0),\ (\pm 6; 0; \pm 4),\ (\pm 6; \pm 4; 0)\}$]

V následující podkapitole se budeme dále věnovat řešení obecnějšího typu kvadratických diofantovských rovnic.

2.1. Kvadratické rovnice $ax^2 + by^2 + c = 0$

V této části práce se budeme zabývat kvadratickými diofantovskými rovnicemi o dvou celočíselných neznámých x, y ve tvaru $ax^2 + by^2 + c = 0$, kde a, b jsou různá přirozená čísla a c je dané záporné celé číslo. Tento typ diofantovských rovnic navazuje na předchozí části práce a lze jej řešit pomocí metody nerovností a odhadů. Z pohledu analytické geometrie se jedná o rovnice elips se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic a osami, které jsou osami souřadnic.

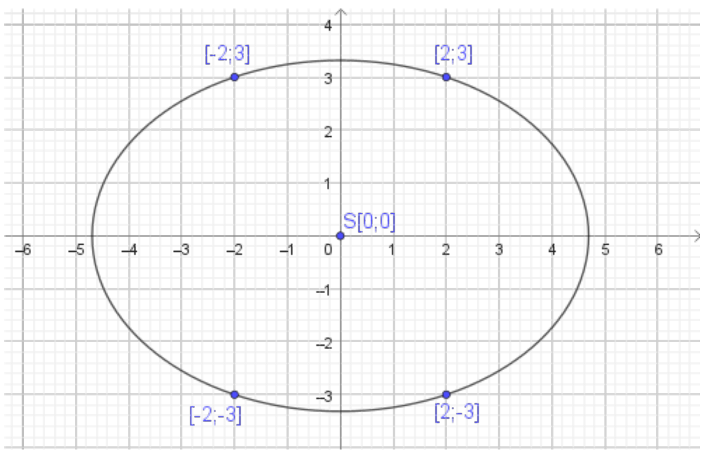
Speciálně pro $a = 1$, $b = 2$ a $c = -22$ je zde uvedena následující úloha.

Příklad 22

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 2y^2 = 22$.

ŘEŠENÍ: Pokud existuje řešení dané úlohy ve tvaru (x, y), pak jsou řešením i dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$. Dále je možné zadání úlohy přepsat do tvaru $x^2 = 2(11 - y^2)$. Z čehož plyne, že $2 \mid x^2$. Číslo x^2 je *nutně* sudé, a proto je sudým číslem i x. Tj. $x = 2k$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Po snadné úpravě lze zadání úlohy přepsat do tvaru $y^2 = 11 - 2k^2$. Jelikož y^2 je celé nezáporné číslo, platí tedy $11 - 2k^2 \geq 0$. Číslo k musí nabývat pouze hodnot z množiny $\{0; \pm 1; \pm 2\}$. Postupným dosazením jednotlivých hodnot za k obdržíme $y^2 = 11$, $y^2 = 9$ a $y^2 = 3$. Celočíselné y se získá jen v jednom případě, a to konkrétně $y = \pm 3$. Z čehož ihned plyne $x = \pm 2$, viz obr. 15.



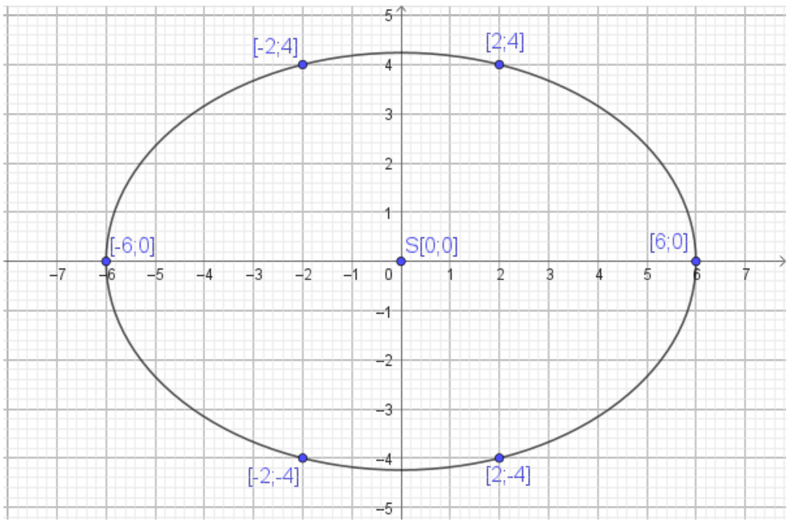
Obr. 15

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy jsou ve tvaru $(x, y) = (\pm 2; \pm 3)$.

Příklad 23

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 2y^2 = 36$.

Řešení: Po snadné úpravě lze zadání úlohy přepsat do tvaru $x^2 = 2(18-y^2)$. Odtud plyne, že $2 \mid x^2$. Číslo x^2 je sudé a taktéž i číslo x. Tedy $x = 2k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Analogicky podle předchozí úlohy je možné zadání úlohy přepsat ve tvaru $y^2 = 18 - 2k^2$. Jelikož opět $y^2 \geq 0$, pak také $18 - 2k^2 \geq 0$, tj. $9 \geq k^2$. Snadno se vidí, že číslo k musí nabývat pouze hodnot z množiny $\{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$. Postupným dosazením za k se získají rovnice $y^2 = 18$, $y^2 = 16$, $y^2 = 10$ a $y^2 = 0$. Celočíselné řešení přitom obdržíme pouze ve dvou případech, viz obr. 16.



Obr. 16

Závěr: Řešeními dané úlohy jsou všechny dvojice ve tvaru

$$(x, y) \in \{(\pm2; \pm4), (\pm6; 0)\}.$$

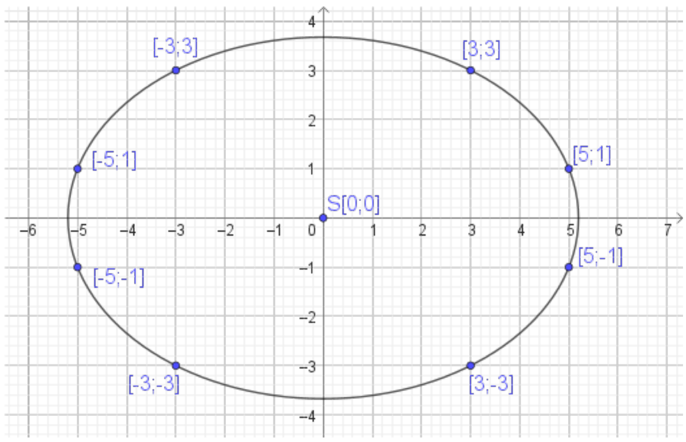
Příklad 24

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 2y^2 = 27$.

Řešení: Zadání úlohy se snadno upraví do tvaru $2y^2 = 27 - x^2$. Zřejmě $2 \mid (27 - x^2)$, a proto x^2 je liché celé číslo. Rovněž i x musí být lichým číslem, tj. $x = 2k + 1$, kde k je celé číslo (dokonce stačí brát do úvahy pouze celá nezáporná čísla). Nyní lze daná úloha zapsat ve tvaru $2y^2 = 27 - 4k^2 - 4k - 1$. Po snadné úpravě se získá rovnice

$$y^2 = 13 - 2k(k + 1).$$

Odtud je zřejmé, že levá strana rovnice je celé nezáporné číslo, a tudíž musí být celým nezáporným číslem i strana pravá. Platí tedy $13 \geq 2k(k+1)$. Pro číslo k stačí brát do úvahy pouze hodnoty z množiny $\{0; 1; 2\}$. Analogicky s předchozími příklady postupně obdržíme $y^2 = 13$, $y^2 = 9$ a $y^2 = 1$. Celočíselných hodnot y lze získat jen ve dvou případech, viz obr. 17.



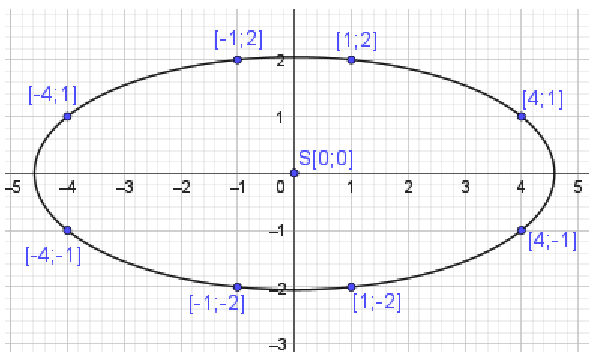
Obr. 17

ZÁVĚR: Všechna řešení jsou dvojice ve tvaru $(x, y) \in \{(\pm 3; \pm 3), (\pm 5; \pm 1)\}$.

Příklad 25

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 5y^2 = 21$.

ŘEŠENÍ: Jelikož x^2 je *nutně* celé nezáporné číslo, pak musí platit nerovnost $21 - 5y^2 \geq 0$. Tedy $\frac{21}{5} \geq y^2$. Číslo y^2 musí nabývat pouze hodnot z množiny $\{0; 1; 4\}$. Postupným dosazením přípustných hodnot za y^2 lze získat rovnice $x^2 = 21$, $x^2 = 16$ a $x^2 = 1$. Celočíselné hodnoty obdržíme pouze ve dvou případech, viz obr. 18.



Obr. 18

ZÁVĚR: Všechna celočíselná řešení jsou dvojice $(x, y) \in \{(\pm 1; \pm 2), (\pm 4; \pm 1)\}$.

Příklad 26

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 2y^2 = 2\,022$.

Řešení: Snadno se vidí, že daná úloha lze přepsat do tvaru $x^2 = 2(1\,011 - y^2)$. Z čehož *nutně* $2 \mid x^2$, tj. x^2 je sudé číslo a je možné jej zapsat ve tvaru $x = 2k$, kde k je celé číslo. Zadání úlohy po snadné úpravě přejde do tvaru

$$2k^2 = 1\,011 - y^2.$$

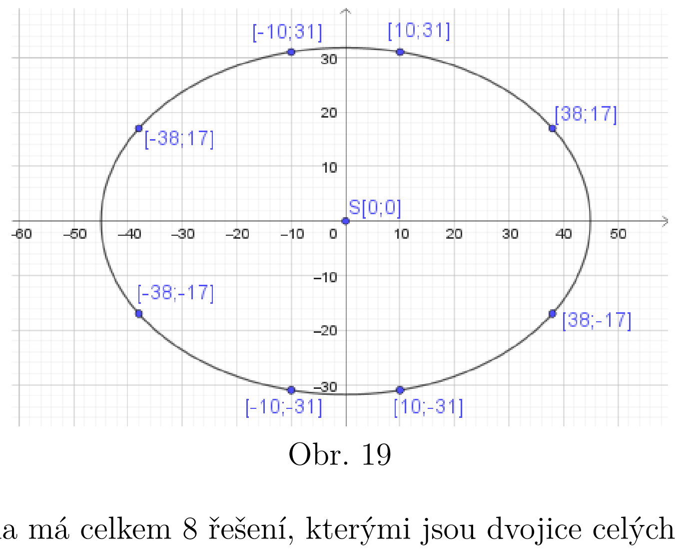
Odtud plyne, že y musí být lichým číslem. Tedy $y = 2l + 1$, kde l je celé číslo (dokonce lze brát do úvahy pouze celá nezáporná čísla l). Daná úloha přejde po úpravě do tvaru

$$k^2 = 505 - 2l(l+1).$$

Jelikož levá strana rovnice je nezáporné celé číslo, pak jím musím být i pravá strana. Získá se tak nerovnost

$$\frac{505}{2} \geq l(l+1).$$

Z výše uvedené nerovnosti plyne, že číslo l musí nabývat hodnot z množiny $\{0; 1; 2; 3; \ldots; 14; 15\}$. Z 16 možností čísla l se obdrží celočíselné k jen ve dvou případech, a to pro $l = 8$ a $l = 15$. Získají se tak rovnice $k^2 = 361$ a $k^2 = 25$, z nichž ihned plyne $k = \pm 19$ a $k = \pm 5$. Dosazením výše určených dvou možností hodnot za k a l do vztahů $x = 2k$ a $y = 2l + 1$ se snadno dostanou všechna řešení dané úlohy, viz obr. 19.



Obr. 19

Závěr: Úloha má celkem 8 řešení, kterými jsou dvojice celých čísel

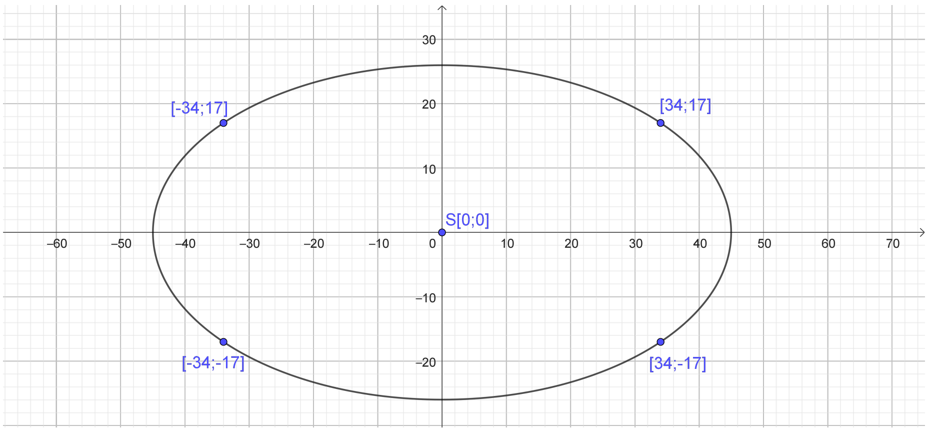
$$(x, y) \in \{(\pm 38; \pm 17), (\pm 10; \pm 31)\}.$$

Příklad 27

V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + 3y^2 = 2\,023$.

ŘEŠENÍ: Danou úlohu je možné přepsat do tvaru $x^2 = 2\,023 - 3y^2$. Jelikož x^2 je *nutně* celé nezáporné číslo, musí být celým nezáporným číslem i $2\,023 - 3y^2$, tj. $2\,023 - 3y^2 \geq 0$.

Z výše uvedené nerovnosti plyne, že číslo y musí nabývat hodnot z množiny $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots; \pm 24; \pm 25\}$. Dosazením jednotlivých hodnot za y obdržíme celočíselné x jen v jednom případě, a to $x = \pm 34$ pro $y = \pm 17$, viz obr. 20.



Obr. 20

ZÁVĚR: Všechna řešení jsou uspořádané dvojice ve tvaru $(x, y) = (\pm 34; \pm 17)$.

Závěrem se zabývejme případem $a = 2$, $b = 3$ a $c = -35$ viz následující úloha.

Příklad 28

Určete všechny dvojice (x, y) *celých čísel splňujících rovnici*

$$2x^2 + 3y^2 = 35.$$

ŘEŠENÍ: Pokud existuje řešení dané úlohy ve tvaru (x, y), pak jsou řešením i dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$. Vzhledem k této skutečnosti stačí hledat řešení dané úlohy pouze v množině celých nezáporných čísel. (Ostatní řešení lze nalézt pomocí záměny znamének u jednotlivých neznámých.)
Zadání úlohy je možné po snadné úpravě převést do tvaru

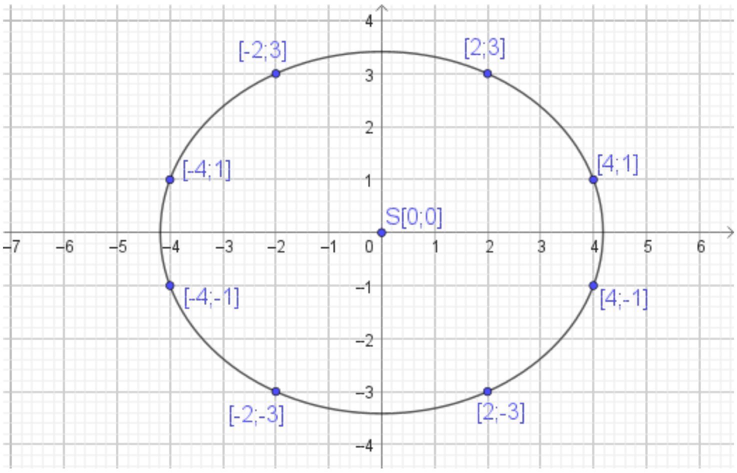
$$3y^2 - 3 = 32 - 2x^2.$$

Z levé strany rovnice lze vytknout číslo 3 a z pravé strany rovnice se snadno vidí, že je možné vytknout číslo 2. Daná rovnice přejde do tvaru

$$3(y^2 - 1) = 2(16 - x^2).$$

Pro $y = 0$ se získá rovnice ve tvaru $-3 = 2(16 - x^2)$, která nemá řešení, jelikož $2 \nmid -3$.

Pro $y \geq 1$ platí, že $3(y^2 - 1) \geq 0$, a proto i $2(16 - x^2) \geq 0$. Tedy $x^2 \leq 16$. Neznámá x může nabývat pouze hodnot z množiny $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. Postupným dosazením příslušných hodnot za x do zadání úlohy obdržíme řešení $(x, y) = (2; 3)$ a $(x, y) = (4; 1)$, viz obr. 21.



Obr. 21

Závěr: Daná úloha má 8 řešení, kterými jsou uspořádané dvojice

$$(x, y) \in \{(\pm 2; \pm 3), (\pm 4; \pm 1)\}.$$

Kapitola 3

Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice

Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice jsou rovnice, v nichž mají celočíselné neznámé zpravidla charakter proměnných daného polynomu s celočíselnými koeficienty a exponentů dané exponenciální funkce s celočíselným základem $a > 1$. Tato část disertační práce se zaměřuje zejména na *metodu faktorizace* (daného polynomu), kterou lze s výhodou využít při řešení nejjednodušších rovnic uvedeného typu, tj. rovnic s celočíselnými neznámými x, y ve tvaru

$$P(x) = a^y,$$

kde $P(x)$ je daný polynom s celočíselnými koeficienty a a je přirozené číslo větší než 1.

Příklad 29

Určete všechny dvojice (x, y) *celých čísel, které vyhovují rovnici*

$$x^2 = 2^y.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak i dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Zřejmě platí, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně rovnice nabývá výhradně nezáporných celočíselných hodnot. Tedy $x = 2^k$, kde k je *vhodné* celé nezáporné číslo. Platí tudíž

$$x^2 = (2^k)^2 = 2^{2k} = 2^y,$$

a $y = 2k$. Zkouškou se lze snadno přesvědčit, že všechny uspořádané dvojice $(x, y) = (2^k; 2k)$, kde k je *libovolné* celé nezáporné číslo (jedná se o tzv.

jednoparametrický systém řešení), vyhovují dané rovnici.

ZÁVĚR. Řešením dané úlohy jsou všechny dvojice celých čísel ve tvaru

$$(x, y) = (\pm 2^k; 2k),$$

kde k je libovolné celé nezáporné číslo.

Příklad 30

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3x^2 = 2^{y+4} - 2^{y+2}.$$

ŘEŠENÍ: Ze zadání je patrné (podobně jako v příkladu 29), že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak také dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Vytknutím 2^{y+2} na pravé straně rovnice a následnou úpravou lze bezprostředně obdržet rovnici ve tvaru

$$x^2 = 2^{y+2}.$$

Zavedením substituce $z = y + 2$ je možné získat analogickou rovnici jako v předešlé úloze. S ohledem na její řešení a vzhledem k použité substituci ($y = z - 2$) jsou řešením dané rovnice všechny dvojice $(x, y) = (\pm 2^k; 2k - 2)$, kde k je celé nezáporné číslo, neboli

$$(x, y) = (\pm 2^{k+1}; 2k),$$

kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1.

ZÁVĚR. Řešením dané úlohy jsou tedy všechny dvojice ve tvaru

$$(x, y) = (\pm 2^{k+1}; 2k),$$

kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1.

Při řešení následujících úloh je využívána metoda faktorizace daného polynomu $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, která byla prezentována v první kapitole této disertační práce.

Příklad 31

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

ŘEŠENÍ: Podobně jako v úloze 29 a 30 se snadno vidí, že x a y jsou celá nezáporná čísla, neboť výraz na levé straně rovnice musí nabývat nezáporných celočíselných hodnot. Levou stranu rovnice lze přepsat do součinového (faktorizovaného) tvaru $(1+x)(1+x^2)$. Daná rovnice přejde do tvaru

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y = 2^m \cdot 2^n,$$

kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m+n=y$. Zřejmě platí $0 < 1+x \leq 1+x^2$, tudíž $1+x=2^m$, $1+x^2=2^n$, a tedy neúplný kvadratický trojčlen $1+x^2$ musí být dělitelný dvojčlenem $1+x$. Platí tak

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{(x^2-1)+2}{x+1} = x-1+\frac{2}{x+1}.$$

Odtud plyne, že zlomek $2/(x+1)$ musí *nutně* nabývat celočíselné hodnoty. Přípustnými hodnotami x jsou pak hodnoty z množiny $\{-3;-2;0;1\}$. Postupným dosazením za x do rovnic $1+x=2^m$, $1+x^2=2^n$ lze získat dvě řešení $(m,n)=(0;0)$ pro $x=0$ a $(m,n)=(1;1)$ pro $x=1$.

ZÁVĚR. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x,y) \in \{(0;0),(1;2)\}$.

Podobně je možné řešit i následující úlohu.

Příklad 32

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = 2^y.$$

ŘEŠENÍ: Postupnými úpravami lze danou rovnici přepsat do tvaru

$$(1+x+x^2+x^3)+(x^4+x^5+x^6+x^7) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) =$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y.$$

Zřejmě platí, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně rovnice je celé číslo. Platí tedy $0 < 1+x \leq 1+x^2 \leq 1+x^4$ a daná rovnice přejde do tvaru

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y = 2^p \cdot 2^q \cdot 2^r,$$

kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla, $p \leq q \leq r$ a $p+q+r=y$. Proto $1+x=2^p$, $1+x^2=2^q$, $1+x^4 = 2^r$ a výraz $1+x^2$ musí být dělitelný dvojčlenem $1+x$ (dále výraz $1+x^4$ musí být dělitelný dvojčlenem $1+x$ a rovněž neúplným kvadratickým trojčlenem $1+x^2$). Tedy, opět jako v předchozím příkladě, stačí vzít do úvahy podíl $(x^2+1)/(x+1)$, který nabývá celočíselných hodnot x

pouze pro čísla z množiny $\{-3; -2; 0; 1\}$. Postupným dosazením jednotlivých hodnot x do rovnic $1 + x = 2^p$, $1 + x^2 = 2^q$, $1 + x^4 = 2^r$ obdržíme dvě řešení $(p, q, r) = (0; 0; 0)$ pro $x = 0$ a $(p, q, r) = (1; 1; 1)$ pro $x = 1$.

ZÁVĚR. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x, y) \in \{(0; 0), (1; 3)\}$.

Příklad 33 (XVIII. Matematický duel – 2010)

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel splňující rovnici

$$9^a = b^2 + 17.$$

ŘEŠENÍ: Daná rovnice lze postupně přepsat do tvaru

$$9^a - b^2 = 3^{2a} - b^2 = (3^a)^2 - b^2 = (3^a - b)(3^a + b) = 17.$$

Protože $3^a + b > 0$, platí

$$3^a - b = 1, \tag{3.1}$$

$$3^a + b = 17, \tag{3.2}$$

neboť $3^a - b < 3^a + b$. Odečtením (3.1) od (3.2) bezprostředně plyne $b = 8$ a následně $a = 2$.

ZÁVĚR. Úloha má tedy jediné řešení $(a, b) = (2; 8)$.

Příklad 34 (VI. Matematický duel – 1998)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^3 + 14x^2 - 51x = 10^y.$$

ŘEŠENÍ: Po snadné úpravě daná rovnice přejde do tvaru

$$x(x + 17)(x - 3) = 2^y \cdot 5^y.$$

Stejně jako v příkladu 32 se snadno vidí, že x a y jsou celá nezáporná čísla. Výraz $(x + 17)(x - 3)$ má jinou paritu než x. Musí tudíž nastat právě jedna z možností:

(i) $x = 5^m$, kde m je celé číslo, $m \leq y$

(ii) $(x + 17)(x - 3) = 5^n$, kde n je celé číslo, $n \leq y$

ad (i) Pokud $x = 5^m$, pak čísla $x + 17 = 5^m + 17$ a $x - 3 = 5^m - 3$ nejsou dělitelná 5. Musí tedy platit $(x + 17)(x - 3) = 2^y$ a současně $x = 5^y$. Pro každé celé číslo x navíc platí $x + 17 > x - 3$, *nutně* tedy musí být dvojčlen $x + 17$ dělitelný dvojčlenem $x - 3$. Platí tak

$$\frac{x+17}{x-3} = \frac{(x-3)+20}{x-3} = 1 + \frac{20}{x-3}.$$

Číslo x může proto nabývat celočíselných hodnot pouze pro čísla z množiny $\{-17; -7; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 13; 23\}$. Současně musí být x mocninou čísla 5. Vyhovují tedy pouze čísla 1 a 5. Dosazením $x = 1$ a $x = 5$ do vztahu $(x + 17)(x - 3) = 2^y$ se však nezíská žádné vyhovující celé číslo y.

ad (ii) Podobně jako v případu (i) plyne, že x může nabývat pouze hodnot z množiny $\{-17; -7; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8; 13; 23\}$. Jelikož 5 je prvočíslo, výrazy $x + 17$ a $x - 3$ musí být mocninami čísla 5. Uvedeným podmínkám vyhovuje pouze jedno číslo x, tj. $x = 8$ a jemu odpovídá $y = 3$. (Zkouška byla provedena, podobně jako v předešlých příkladech, postupným dosazováním.)

ZÁVĚR. Jediným řešením dané úlohy je dvojice $(x, y) = (8; 3)$.

Diofantovské rovnice v polynomicko-exponenciálním tvaru se vyskytují i na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO), příkladem je následující úloha z roku 2006.

Příklad 35 (IMO 2006 - Problem $N1$)
Nalezněte všechny uspořádané celočíselné dvojice (x, y) vyhovující rovnici

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

ŘEŠENÍ: Ze zadání je patrné, že $x \geq 0$. Pokud existuje řešení dané rovnice ve tvaru (m, n), pak řešením je i dvojice $(m, -n)$. Pro $x = 0$ lze získat rovnici $y^2 = 4$, z níž plynou řešení $(0; 2), (0; -2)$.

Dále nechť se hledá řešení (x, y), kde $x > 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $y > 0$. Danou úlohu je tedy možné přepsat do tvaru

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1).$$

Z této rovnice plyne, že výrazy $y-1$ a $y+1$ jsou dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, která musí být navíc dělitelná 2^x. Z čehož vyplývá, že oba zmiňované výrazy musí být sudá čísla, navíc právě jedno z nich je dělitelné 4. Proto $x \geq 3$ a platí, že právě jeden z výrazů $y-1$ a $y+1$ je dělitelný 2^{x-1}, ale již není dělitelný 2^x. Tedy $y = 2^{x-1}k + l$, kde k je liché přirozené číslo a $l = \pm 1$. Po dosazení do původní rovnice obdržíme

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}k + l)^2 - 1 = 2^{2x-2}k^2 + 2^x kl.$$

Po následných úpravách přejde daná rovnice postupně do tvaru

$$\begin{aligned} 1 + 2^{x+1} &= 2^{x-2}k^2 + kl, \\ 1 - kl &= 2^{x-2}(k^2 - 8). \end{aligned}$$

Pro $l = 1$ plyne $0 \geq 1 - k = 2^{x-2}(k^2 - 8)$. Jelikož $2^{x-2} > 0$, pak $k^2 - 8 \leq 0$. Tedy $k = 1$, což ovšem nevyhovuje výše popsaným vztahům.

Pro $l = -1$ lze získat odhad $1 + k = 2^{x-2}(k^2 - 8) \geq 2(k^2 - 8)$, neboli $2k^2 - k - 17 \leq 0$. Tj. $k \leq 3$. Jelikož k je liché přirozené číslo a možnost $k = 1$ nevyhovuje, zřejmě $k = 3$. Po dosazení přejde původní rovnice do tvaru

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = (3 \cdot 2^{x-1} - 1)^2.$$

Zavedením substituce $z = 2^{x-1}$ a po následné úpravě se získá rovnice ve tvaru $z(z-8) = 0$. Z čehož plyne $z = 8$, tj. $x = 4$. ($z = 0$ není možné, neboť $x \geq 3$.) A tedy $y = \pm 23$.

ZÁVĚR. Všechna řešení dané úlohy jsou $(x, y) \in \{(0; 2), (0; -2), (4; 23), (4; -23)\}$.

Následující dva příklady z mezinárodních matematických soutěží jsou zde uvedeny, jelikož je lze řešit elementárními metodami. První úloha je opět z Mezinárodní matematické olympiády (IMO) z roku 2014.

Příklad 36 (IMO 2014 - Problem $N2$)

Určete všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel vyhovující rovnici

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

ŘEŠENÍ: Ze zadání plyne symetrie úlohy, neboť záměnou x, y se daná rovnice nezmění. Pokud tedy (x, y) je řešením úlohy, pak je řešením i dvojice (y, x). Pro $x = y$ lze danou rovnici přepsat do tvaru $x^{\frac{2}{3}} = 1$, z čehož plyne $x = 1$. Dvojice $(x, y) = (1; 1)$ je řešením úlohy.

Nechť $x \neq y$ a zároveň $x > y$ (v opačném případě vzhledem k symetrii stačí zaměnit x, y, přičemž se postup nezmění). Existuje tedy přirozené číslo $n = x - y$ a zadání úlohy je možné zapsat ve tvaru

$$\sqrt[3]{7(y+n)^2 - 13(y+n)y + 7y^2} = n + 1.$$

Umocněním dané rovnice a následnou úpravou lze získat rovnici

$$y^2 + yn = n^3 - 4n^2 + 3n + 1.$$

Vynásobením celé rovnice 4 a přičtením n^2 k oběma stranám rovnice obdržíme

$$(2y+n)^2 = 4n^3 - 15n^2 + 12n + 4 = (n-2)^2(4n+1). \tag{3.3}$$

Jelikož případy $n = 1$ a $n = 2$ nedávají smysl, pak *nutně* $n > 2$. Dále musí platit, že $4n+1$ je druhou mocninou racionálního čísla $(2y+n)/(n-2)$. Jelikož číslo $4n+1$ je liché číslo, musí být druhá mocnina daného racionálního čísla lichá. *Nutně* tedy existuje celé nezáporné číslo k splňující $4n+1 = (2k+1)^2$, tj. $n = k^2 + k$. Vzhledem k nerovnosti $n > 2$ platí $k \geq 2$. Dosazením za n do rovnice (3.3) plyne

$$(2y + k^2 + k)^2 = (k^2 + k - 2)^2(2k+1)^2 = (2k^3 + 3k^2 - 3k - 2)^2. \tag{3.4}$$

Jelikož platí $2k^3 + 3k^2 - 3k - 2 = (k-1)(2k^2 + 5k + 2) > 0$, lze rovnice (3.4) odmocnit (na obou stranách rovnice jsou kladná čísla). Po snadné úpravě obdržíme

$$y = k^3 + k^2 - 2k - 1.$$

Vzhledem k nerovnosti $k \geq 2$ je zřejmé, že $y = (k^3 - 1) + (k-2)k$ je přirozené číslo a tedy i x, tj. $x = y + n = y + k^2 + k = k^3 + 2k^2 - k - 1$.

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy jsou $(x, y) \in \{(1; 1),\ (k^3 + 2k^2 - k - 1; k^3 + k^2 - 2k - 1),\ (k^3 + k^2 - 2k - 1; k^3 + 2k^2 - k - 1)\}$, kde k je přirozené číslo větší než 1.

Následující příklad je převzat ze Středoevropské matematické olympiády (MEMO), přičemž při řešení úlohy jsou použity elementární metody řešení.

Příklad 37 (MEMO 2021 – Problem $T-7$)

Určete všechny uspořádané dvojice (n, p) přirozených čísel, kde p je prvočíslo a platí

$$1 + 2 + \ldots + n = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + p^2).$$

Řešení: Jelikož pro libovolné přirozené číslo l platí $1+2+\ldots+l=\frac{l(l+1)}{2}$ a $1^2+2^2+\ldots+l^2=\frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$,[1] lze zadání úlohy přepsat do tvaru

$$n(n+1)=p(p+1)(2p+1). \tag{3.5}$$

Z rovnice (3.5) plyne, že p dělí n nebo $n+1$.

V prvním případě $n=kp$, kde $k\in\mathbb{N}$. A tedy rovnice (3.5) přejde do tvaru $k(kp+1)=(p+1)(2p+1)$. Z rovnice navíc plyne

$$k\equiv 1 \pmod p,$$

tj. $p\mid(k-1)$ a zároveň je možné tuto rovnici snadno přepsat jako kvadratickou rovnici s neznámou p

$$2p^2+(3-k^2)p+(1-k)=0.$$

Diskriminant dané kvadratické rovnice je $D=(k^2-3)^2+8(k-1)$. Pokud $k=1$, pak $n=p$. Z této možnosti neplyne žádné řešení. Pro $k>1$ platí $D>(k^2-3)^2$. Vzhledem k tomu, že D musí být druhou mocninou celého nezáporného čísla, platí $D\geq(k^2-2)^2$. Lze tak získat nerovnici

$$(k^2-3)^2+8(k-1)\geq(k^2-2)^2.$$

Z této nerovnice plyne $2(k-2)^2\leq 5$, což platí pouze pro $k\in\{1;2;3\}$. Případ $k=1$ je již vyřešen. Pro $k=2$ musí platit $p\mid(2-1)=1$, což je spor. Pro $k=3$ platí $p\mid 2$, tedy $p=2$. Dvojice $(k,p)=(3;2)$ ovšem nevyhovuje.

V druhém případě, kdy $p\mid(n+1)$, tedy platí $n+1=kp$, kde k je přirozené číslo. Daná rovnice přejde do tvaru $k(kp-1)=(p+1)(2p+1)$. Analogicky s prvním případem platí tentokrát $p|(k+1)$ a zároveň je možné rovnici přepsat na kvadratickou rovnici s neznámou p

$$2p^2+(3-k^2)p+1+k=0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice $D=(k^2-3)^2-8(k+1)$ musí být ostře menší než $(k^2-3)^2$, tedy $D\leq(k^2-4)^2$. Z čehož plyne $2(k-2)^2\leq 23$, což je splněno pro $k\leq 5$. Jelikož navíc $p\mid(k+1)$, p musí dělit jedno z čísel $2;3;4;5;6$. Vzhledem k tomu, že p je prvočíslo, pak $p\in\{2;3;5\}$. Postupným dosazením do rovnice (3.5) obdržíme pouze jedno řešení.

Závěr: Daná úloha má jediné řešení $(n,p)=(5;2)$.

[1] Platnost těchto vzorců lze dokázat například principem matematické indukce.

Úlohy, které je možné řešit elementárními metodami, lze také najít v české Matematické olympiádě (MO) v kategoriích A a B, jak ilustrují následující čtyři příklady.

Příklad 38 (MO 59–B–S–3)
Určete všechny dvojice celých kladných čísel m a n, pro něž platí

$$37 + 27^m = n^3.$$

ŘEŠENÍ: Nejprve se daná rovnice upraví do tvaru $37 = n^3 - 27^m$. Dále lze rozdíl třetích mocnin na pravé straně rovnice rozložit na součin

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Jelikož na levé straně rovnosti je prvočíslo 37 a na pravé straně je součin dvou celých čísel (druhý činitel je větší než 1), platí

$$n - 3^m = 1 \tag{3.6}$$

a

$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{3.7}$$

Pro $m \geq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$. Tedy *nutně* $m = 1$. Z rovnice (3.6) plyne $n = 1 + 3^m = 4$. Zkouškou se lze snadno přesvědčit, že $37 + 27^1 = 4^3$, nebo stačí ověřit, že dvojice $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje rovnici (3.7).

ZÁVĚR: Daná úloha má jediné řešení $(m, n) = (1; 4)$.

Příklad 39 (MO 59–A–III–1)
Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

ŘEŠENÍ: Z dané rovnice plyne, že b^2 je sudé číslo větší než 4^a. Tedy b je sudé číslo větší než sudé číslo 2^a. Platí $b \geq 2^a + 2$, odkud

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

Z čehož bezprostředně plyne $a^2 \geq 2^a$, tedy $a \leq 4$. Dále se dokáže pomocí matematické indukce, že opačná nerovnost $a^2 < 2^a$ platí pro každé celé $a \geq 5$.

Pro $a = 5$ obdržíme nerovnost $25 < 35$. Dále je možné předpokládat, že platí $a^2 < 2^a$ pro některé $a \geq 5$. Po vynásobení dané nerovnice dvěma se získá $2a^2 < 2^{a+1}$. Kýžená nerovnost $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je důsledkem nerovnosti $(a+1)^2 < 2a^2$, která je ekvivalentní s nerovností $1 < a(a-2)$. Poslední uvedená nerovnost platí pro libovolné $a \geq 5$. Tím je důkaz indukcí hotov.

Z výše uvedeného odstavce plyne, že v každé hledané dvojici celých kladných čísel (a, b) musí platit $a \leq 4$. Postupným dosazením hodnot $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ obdržíme dvě řešení.

ZÁVĚR: V oboru celých kladných čísel má daná úloha právě dvě řešení, a to $(a, b) \in \{(2; 6), (4; 18)\}$.

Příklad 40 (MO 68–A–II–2)

Najděte všechna celá čísla m a n, pro která platí $n^{n-1} = 4m^2 + 2m + 3$.

ŘEŠENÍ: Ze zadání úlohy si lze všimnout, že obě strany dané rovnice jsou celá čísla. Navíc číslo n^{n-1} má zřejmě stejnou paritu jako číslo n. Číslo $4m^2+2m+3$ je vždy liché, tudíž i n musí být liché. Tedy číslo $n-1$ je sudé. Číslo n^{n-1} je proto druhou mocninou lichého čísla (ze dvou možných základů je možné vzít ten kladný). Zavedením substituce $n^{n-1} = k^2$, kde k je kladné liché číslo, se získá rovnice

$$k^2 = 4m^2 + 2m + 3. \tag{3.8}$$

Pravá strana rovnice (3.8) snadnou úpravou přejde do tvaru

$$k^2 = \left(2m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Následným vynásobením rovnice číslem čtyři obdržíme rovnici, kde na obou stranách rovnice jsou celá čísla:

$$4k^2 = (4m+1)^2 + 11.$$

Tuto rovnici je možné upravit do součinového tvaru:

$$(2k - 4m - 1)(2k + 4m + 1) = 11.$$

Součin celých čísel $a = 2k - 4m - 1$ a $b = 2k + 4m + 1$ je roven 11, přitom jejich součet $a + b = 4k$ je číslo kladné. Tedy i obě čísla a a b jsou kladná. Jelikož 11 je prvočíslo, pak $\{a, b\} = \{1; 11\}$. Zřejmě tedy $4k = 12$ neboli

$k = 3$. Z rovnosti $a = 5 - 4m$ pak pro $a = 1$ plyne $m = 1$. Pro $a = 11$ žádné celočíselné m neexistuje. Následně z rovnice $n^{n-1} = k^2 = 9$ plyne $n = 3$.

ZÁVĚR: Daná úloha právě jedno řešení, a to $(m, n) = (1; 3)$.

Příklad 41 (MO 66–A–I–1)

Najděte všechna prvočísla p, pro něž existuje přirozené číslo n takové, že $p^n + 1$ je třetí mocninou některého přirozeného čísla.

ŘEŠENÍ: Podle zadání úlohy lze předpokládat, že pro přirozené číslo a platí $p^n + 1 = a^3$ (zřejmě $a \geq 2$). Tato rovnost se dále upraví tak, aby bylo možné jednu stranu rovnice rozložit na součin:

$$p^n = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1).$$

Odtud pro $a > 2$ plyne, že čísla $a - 1$ i $a^2 + a + 1$ jsou mocninami prvočísla p (s kladnými celočíselnými exponenty).

Pro $a > 2$ tak platí $a - 1 = p^k$ neboli $a = p^k + 1$, kde k je kladné celé číslo. Po dosazení do trojčlenu $a^2 + a + 1$ lze získat hodnotu $p^{2k} + 3p^k + 3$. Jelikož $a - 1 = p^k < a^2 + a + 1$, je určená hodnota trojčlenu $a^2 + a + 1$ vyšší mocninou prvočísla p. Platí tedy

$$p^k \mid p^{2k} + 3p^k + 3 \quad \text{neboli} \quad p^k \mid 3.$$

Z čehož plyne $p = 3$ a $k = 1$, a tedy $a = p^k + 1 = 4$. Číslo $a^2 + a + 1 = 21$ však není mocninou tří, tudíž pro $a > 2$ neexistuje žádné prvočíslo p vyhovující podmínkám úlohy pro jakékoliv přirozené číslo n.

Pro $a = 2$ se získá rovnice $p^n = 7$, z které plyne $p = 7$.

ZÁVĚR: Existuje právě jedno prvočíslo vyhovující podmínkám úlohy, a to $p = 7$.

Následující úloha je soutěžního typu a lze ji řešit metodou faktorizace.

Příklad 42

Řešte rovnici

$$n^3 + 8 = 2^m,$$

kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Řešení: Zřejmě platí, že m je celé nezáporné číslo, jelikož levá strana dané rovnice je celým číslem. Rovnici lze snadnou úpravou převést do tvaru

$$(n+2)(n^2-2n+4) = 2^p \cdot 2^q = 2^m,$$

kde p, q jsou celá nezáporná čísla, pro něž platí $p+q=m$. Jelikož platí $n^2-2n+4=(n-1)^2+3$ a zároveň číslo n^2-2n+4 musí být mocninou čísla 2, pak *nutně* n je sudým číslem. Tj. $n=2a$, kde $a \in \mathbb{Z}$. Daný výraz je možné přepsat do tvaru

$$n^2-2n+4=(n-1)^2+3=(2a-1)^2+3=4a^2-4a+4=2^2\cdot(a^2-a+1)=2^p.$$

Z výše uvedené rovnosti plyne, že výraz a^2-a+1 musí být rovněž mocninou čísla 2. Toho lze dosáhnout jen v případě, kdy $a^2-a+1=2^0=1$, neboť platí $a^2-a+1=a(a-1)+1$. (Jelikož je součin dvou po sobě jdoucích celých čísel sudý, je daný výraz lichým číslem.) Řešením rovnice $a^2-a+1=1$ obdržíme dvě možnosti $a=0$ nebo $a=1$.

Pro $a=0$ je $n=0$ a po dosazení do zadání úlohy se získá řešení $(m,n)=(3;0)$.

Analogicky pro $a=1$ je $n=2$, přičemž opětovným dosazením do zadání obdržíme řešení $(m,n)=(4;2)$.

Závěr: Daná úloha má právě dvě řešení ve tvaru $(m,n)\in\{(3;0),(4;2)\}$.

K procvičení problematiky polynomicko-exponenciálních diofantovských rovnic je zde dále uvedena dvojice neřešených úloh, které navazují na řešení předcházejících úloh; lze je opět řešit užitím metody faktorizace.

Příklad 43

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=2^y.$$

[Řešení: $(x,y)=(0;0)$.]

Příklad 44 (KöMaL, Vol 69/5, 2019, C. 1546)

Řešte rovnici

$$x^2-18x+80=2^y,$$

kde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Návod: Rovnici lze přepsat do tvaru $(x-8)(x-10)=2^y$ a dále ji řešit podobně jako příklad 32.

[Řešení: $(x,y)\in\{(6;3),(12;3)\}$.]

Kapitola 4

Exponenciální diofantovské rovnice

Čtvrtá část disertační práce je věnována exponenciálním diofantovským rovnicím, které se mj. občas vyskytují v různých matematických soutěžích. Exponenciální diofantovské rovnice jsou takové rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají charakter exponentů daných exponenciálních funkcí s celočíselnými základy většími než 1. V této části práce jsou zkoumány některé typy exponenciálních diofantovských rovnic o dvou neznámých ve tvaru

$$a^x - b^y = c, \tag{4.1}$$

kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel, $a, b > 1$ jsou daná přirozená čísla, a c je dané celé číslo ($c \neq 0$).

Z historického hlediska se zkoumání těchto exponenciálních rovnic datuje až do roku 1343 k matematikovi *Levi ben Gershonovi.*

4.1. Catalanova hypotéza

Pro $c = 1$ vyslovil již v roce 1844 belgický matematik *Eugene Charles Catalan* zajímavou hypotézu, kterou dokázal až v roce 2002 rumunský matematik *Preda Mihăilescu* (od té doby se nazývá též Mihăilescuova věta). Tato hypotéza obsahuje tvrzení, že jediné dvě po sobě jdoucí mocniny přirozených čísel jsou 2^3 a 3^2. Roku 1974 *Robert Tijdeman* aplikoval metodu z teorie transcendentních čísel, aby ukázal, že existuje konstanta c taková, že exponenty po sobě jdoucích mocnin jsou menší než c. Vzhledem k tomu, že další výsledky práce matematiků ukázaly, že parametr c je vázán na zmíněné exponenty, byla vyslovena domněnka, že rovnice (4.1) má řešení jen v omezeném počtu případů parametru c.

Věta 4 (E. Ch. Catalan)
Diofantovská rovnice ve tvaru

$$a^x - b^y = 1,$$

kde a, b, x, y *jsou hledaná přirozená čísla větší než* 1*, má právě jedno řešení, a to* $(a, b, x, y) = (3; 2; 2; 3)$.

Problematikou těchto rovnic a rovnic jim podobných se zabývalo mnoho dalších matematiků, zejména *S. S. Pillai*[1] a *M. A. Bennett*[2]. Důležitým výsledkem v této oblasti je následující věta publikovaná v [6] a zmíněná např. v [26] a [33].

Věta 5
Nechť a, b *jsou daná přirozená čísla větší než* 1*, pak diofantovská rovnice* (4.1)*, kde* x, y *jsou neznámé z oboru přirozených čísel a* c *je dané celé nenulové číslo, má nejvýše dvě řešení.*

Speciálně pak pro $a = b + 1$ platí následující věta.

Věta 6 (M. A. Bennett, 2003, viz [7])
Nechť b, c *jsou daná přirozená čísla,* $b \geq 2$*, pak diofantovská rovnice*

$$|(b+1)^x - b^y| = c, \tag{4.2}$$

má v oboru přirozených čísel nejvýše jedno řešení s výjimkou

$$(b, c) \in \{(2; 1), (2; 5), (2; 7), (2; 13), (2; 23), (3; 13)\}.$$

V prvních dvou případech má rovnice (4.2) *právě* 3 *řešení, v posledních čtyřech případech má právě* 2 *řešení.*

Důkaz této věty je možno nalézt v [7]. V této kapitole jsou dále uvedeny *elementární metody* řešení některých speciálních exponenciálních diofantovských rovnic ve tvaru $3^x - 2^y = c$, resp. $2^y - 3^x = c$, kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel a c je dané přirozené číslo. Tyto rovnice lze zapsat souhrnně ve tvaru (4.2) pro $b = 2$, tj.

$$|3^x - 2^y| = c.$$

Při řešení této a následujících úloh se využívá především metody faktorizace (součinového tvaru rovnice) a číselných kongruencí.

---

[1] *Subbayya Sivasankaranarayana Pillai* (1901 – 1950) - indický matematik, zaměřující se na teorii čísel. Jeho příspěvek k Waringovu problému popsal v roce 1950 K. S. Chandrasekharan jako téměř jistě jeho nejlepší dílo a jeden z nejlepších úspěchů v indické matematice od doby Ramanujana.

[2] *Michael A. Bennett* (1965 – dosud) - kanadský matematik zabývající se diofantovskými aproximacemi a teorií čísel.

Příklad 45

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 1.$$

Řešení: Daná rovnice lze zapsat ve tvaru

$$3^x - 1 = 2^y. \tag{4.3}$$

Pro $x = 1$ plyne $y = 1$.

Je-li $x \geq 2$, pak $y \geq 3$. Levou stranu rovnice (4.3) je dále možné upravit podle známého vzorce

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

pro libovolná reálná čísla A, B (zde $A = 3$, $B = 1$) a libovolné přirozené číslo n.

$$(3 - 1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1) = 2^y,$$

tj.

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1 = 2^{y-1}. \tag{4.4}$$

Vzhledem k tomu, že výraz na pravé straně (4.4) je dělitelný dvěma, musí být dělitelná dvěma i levá strana. To nastane, pokud je na levé straně (4.4) sudý počet sčítanců. *Nutně* platí $x = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Rovnice (4.3) lze pak upravit do tvaru

$$3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1) = 2^y.$$

Zřejmě $3^k + 1 = 2^m$ a $3^k - 1 = 2^n$, kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m > n$ a $m + n = y$. Zároveň ale platí $(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$. Takže $3^k + 1 = 4$ a $3^k - 1 = 2$, tj. $k = 1$, neboli $x = 2$ a z rovnice (4.3) plyne $y = 3$. Zkouškou (je zde součástí řešení) se lze přesvědčit o správnosti získaného řešení.

Závěr: Daná rovnice, jejíž řešení bylo hledáno v oboru přirozených čísel, má právě dvě řešení, tj. $(x, y) \in \{(1; 1), (2; 3)\}$. Nalezený výsledek je tedy ve shodě s větou 5.

Podobně je možné řešit také následující úlohu.

Příklad 46

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 1.$$

Řešení: Nejprve se daná rovnice upraví do tvaru

$$3^x = 2^y - 1. \tag{4.5}$$

Pro $y = 1$ nemá daná úloha řešení v oboru přirozených čísel. Jestliže $y \geq 2$, pak $x \geq 1$.

Po úpravě pravé strany rovnice (4.5) se získá

$$3 \mid (2^{y-1} + 2^{y-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1).$$

Tedy $3 \mid (2^{y-1} + 2^{y-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1)$, z čehož (podobně jako v příkladu 45) *nutně* $y = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. S ohledem na tuto podmínku je možné přepsat rovnici (4.5) do tvaru

$$3^x = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1).$$

Další postup je analogický jako v příkladu 45. Čísla $2^k + 1$ a $2^k - 1$ jsou tedy mocninami čísla 3 a zároveň je jejich rozdíl roven 2. Platí tudíž $2^k + 1 = 3$ a $2^k - 1 = 1$. Zkouškou se snadno přesvědčí, že nalezená dvojice $(1; 2)$ je řešením úlohy.

Závěr: Daná rovnice má právě jedno řešení v oboru přirozených čísel, a to ve tvaru $(x, y) = (1; 2)$.

První dva příklady lze souhrnně považovat za rovnici $|3^x - 2^y| = 1$, pro niž v oboru přirozených čísel existují právě 3 řešení, a to $(x, y) \in \{(1; 1), (1; 2), (2; 3)\}$, což je ve shodě s tvrzením věty 6.

Následující příklad názorně ukazuje, že zkoumané exponenciální diofantovské rovnice tvaru (4.2) nemají řešení v oboru přirozených čísel při volbě některých hodnot celého čísla c na její pravé straně.

Příklad 47

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 2. \tag{4.6}$$

Řešení: Daná rovnice po úpravě přejde do tvaru $3^x = 2^y + 2$. Jelikož $y \geq 1$, lze rovnici přepsat do tvaru

$$3^x = 2(2^{y-1} + 1),$$

avšak $2 \nmid 3^x$ pro každé přirozené x, což znamená, že rovnice (4.6) *nemá řešení* v oboru přirozených čísel.

Poznámka: Výsledek příkladu 47 lze zobecnit volbou čísla $c = 2k$ v rovnici $|3^x - 2^y| = c$, kde k je dané přirozené číslo. Analogicky se dá postupovat i pro $c = 3k$. Ve všech těchto případech nemá daná rovnice řešení v oboru přirozených čísel.

Dále jsou v této kapitole uvedeny diofantovské rovnice $3^x - 2^y = 5$ a $2^y - 3^x = 5$, tj. rovnice $|3^x - 2^y| = 5$.

Příklad 48

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3^x = 2^y + 5.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že exponenty x, y v dané rovnici jsou celá nezáporná čísla. Dále lze rovnici přepsat do tvaru

$$3^x - 1 = 2^y + 4. \tag{4.7}$$

Odtud plyne, že $3^x > 5$, tj. $x \geq 2$. Platí tudíž

$$2^y + 4 = 3^x - 1 \geq 3^2 - 1 = 8,$$

tedy $2^y \geq 4$, tj. $y \geq 2$.

Protože $(3^x - 1) = (3-1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1)$, rovnice (4.7) následně přejde do tvaru

$$2\,(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1) = 2^y + 4 = 2^2(2^{y-2} + 1),$$

tudíž $2 \mid (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1)$, a tedy n musí být sudé číslo ($x = 2k$, kde k je přirozené číslo). Rovnici (4.7) je nyní možné přepsat do tvaru

$$3^{2k} - 1 = 2^y + 4 = 2^2(2^{y-2} + 1)$$

a po úpravě

$$3^{2k} - 1 = (3^2 - 1)\left((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1\right) = 4(2^{y-2} + 1).$$

Po další (snadné) úpravě lze získat rovnici

$$2\left((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1\right) = 2^{y-2} + 1. \tag{4.8}$$

Odtud plyne, že levá strana rovnice (4.8) je dělitelná dvěma. Totéž musí splňovat i pravá strana. To však nastane, právě když $y = 2$, a tedy $x = 2$.

Závěr. Úloha má jediné řešení, a to

$$(x, y) = (2; 2).$$

Příklad 49

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 5.$$

Řešení: Daná rovnice po snadné úpravě přejde do tvaru

$$3^x = 2^y - 5. \tag{4.9}$$

Výraz 3^x na levé straně (4.9) nabývá kladných hodnot, tudíž $2^y - 5 > 0$, a tedy $y \geq 3$. Nyní lze rovnici (4.9) upravit do tvaru

$$3^x - 3 = 2^y - 8. \tag{4.10}$$

Protože $y \geq 3$, platí

$$3^x - 3 = 2^3(2^{y-3} - 1).$$

Je tedy $2^3 \mid (3^x - 3)$, tj. $2^3 \mid 3(3^{x-1} - 1)$. Jelikož $2^3 \nmid 3$, pak $2^3 \mid (3^{x-1} - 1)$. Je-li $x = 1$, z rovnice (4.10) plyne řešení $(x, y) = (1; 3)$. V případech, kdy $x \geq 2$ a tedy $y \geq 4$, se na obou stranách rovnice (4.10) vyskytuje přirozené číslo. Nechť $2^3 = 3^{x-1} - 1$, tedy $x = 3$. Z rovnice (4.9) se získá $y = 5$. Existuje tudíž další řešení ve tvaru $(x, y) = (3; 5)$. Konečně, jestliže $x \geq 4$, pak lze rovnici (4.9) upravit do tvaru

$$3^x - 81 = 2^y - 86. \tag{4.11}$$

Dále se rovnice (4.11) upraví do tvaru

$$81(3^{x-4} - 1) = 2^y - 86.$$

Tedy $81 \mid 2^y - 86 = 2(2^{y-1} - 43)$. Jelikož $81 \nmid 2$, pak $81 \mid (2^{y-1} - 43)$. Nejmenší mocnina čísla 2, která vyhovuje poslední podmínce o dělitelnosti číslem 81, je $y - 1 = 22$. Dále pak vyhovují čísla 76; 130; 184; atd. Platí tedy $y = 23 + 54k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Zároveň je možné rovnici (4.11) upravit do tvaru

$$3^x - 81 = 2(2^{y-1} - 43).$$

Číslo 2 dělí $3^x - 81 = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $2 \nmid 81$, platí $2 \mid 3^{x-4} - 1$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Dále pak 2; 4; 6; atd. Pak tedy $x = 4 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnice $2^y - 3^x = 5$ lze tedy přepsat do tvaru

$$2^{23+54k} - 3^{4+2l} = 2^{23} \cdot 2^{54k} - 81 \cdot 3^{2l} = 2^{23} \cdot (2^{54})^k - 81 \cdot 9^l = 5. \tag{4.12}$$

Z kongruencí

$$\begin{aligned} 2^{23} &\equiv 3 \pmod 5, \\ 2^{54} &\equiv -1 \pmod 5, \\ 81 &\equiv 1 \pmod 5, \\ 9 &\equiv -1 \pmod 5 \end{aligned}$$

a jejich využitím v (4.12) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$3 \cdot (-1)^k \equiv 1 \cdot (-1)^l \pmod 5. \tag{4.13}$$

Jelikož pro všechna celá nezáporná čísla n platí, že $(-1)^n$ nabývá pouze hodnot 1 a -1, nemá kongruenční rovnice (4.13), a tedy ani rovnice (4.12) v oboru přirozených čísel, řešení. Daná úloha má v oboru přirozených čísel právě 2 řešení, což je v souladu s větou 5.

ZÁVĚR: Daná úloha má právě dvě řešení v oboru přirozených čísel, a to $(x, y) \in \{(1; 3), (3; 5)\}$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 5$ má tedy v oboru přirozených čísel celkem tři řešení $(x, y) \in \{(1; 3), (2; 2), (3; 5)\}$, což je opět v souladu s větou 6.

Příklad 50

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 7.$$

ŘEŠENÍ: Ze zadání je patrné, že $x \geq 2$, a tedy $y \geq 1$. Danou rovnici lze tedy upravit do tvaru

$$3^x - 9 = 2^y - 2. \tag{4.14}$$

Pokud $x = 2$, pak se snadno získá řešení, kterým je dvojice $(x, y) = (2; 1)$.

V případech, kdy $x \geq 3$, přejde rovnice do tvaru

$$3^x - 27 = 2^y - 20. \tag{4.15}$$

Z rovnice (4.15) plyne, že $y \geq 5$. Dále se tato rovnice upraví do tvaru

$$27(3^{x-3} - 1) = 2^y - 20.$$

Tedy $27 \mid 2^y - 20 = 4(2^{y-2} - 5)$. Jelikož $27 \nmid 4$, pak $27 \mid 2^{y-2} - 5$. Nejmenší mocnina čísla 2 vyhovující této podmínce je $y - 2 = 5$. Dále pak 23; 41; 59;

atd. Proto $y = 7 + 18k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici (4.15) je možné upravit do tvaru

$$3^x - 27 = 4(2^{y-2} - 5).$$

Číslo 4 dělí $3^x - 27 = 27(3^{x-3} - 1)$. Protože $4 \nmid 27$, platí $4 \mid 3^{x-3} - 1$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je zde $x - 3 = 0$. Dále pak 2; 4; 6; atd. Odtud $x = 3 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici $3^x - 2^y = 7$ lze nyní přepsat do tvaru

$$3^{3+2l} - 2^{7+18k} = 27 \cdot 3^{2l} - 128 \cdot 2^{18k} = 27 \cdot 9^l - 128 \cdot 262\,144^k = 7. \tag{4.16}$$

Z kongruencí

$$\begin{aligned} 27 &\equiv -1 \pmod 7, \\ 9 &\equiv 2 \pmod 7, \\ 128 &\equiv 2 \pmod 7, \\ 262\,144 &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

a jejich využitím v (4.16) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$(-1) \cdot 2^l - 2 \cdot 1^k \equiv 0 \pmod 7. \tag{4.17}$$

Podmínkou pro řešení kongruenční rovnice (4.17) je splnění kongruence $2^l \equiv 5 \pmod 7$. Jelikož však pro všechna celá nezáporná čísla n dávají čísla 2^n při dělení sedmi pouze zbytky $1; 2; 4$, nemá kongruenční rovnice (4.17), ani rovnice (4.16), řešení v oboru přirozených čísel.

Závěr: Řešením dané úlohy je tedy jediná dvojice $(x, y) = (2; 1)$.

Příklad 51

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 7.$$

Řešení: Zřejmě $y \geq 3$, přitom pro $y = 3$ nemá rovnice řešení v oboru přirozených čísel.

Pro $y \geq 4$ lze danou rovnici upravit do tvaru

$$2^y - 16 = 3^x - 9. \tag{4.18}$$

Levá strana rovnice (4.18) je evidentně větší nebo rovna 0, a tudíž $x \geq 2$. Pro $y = 4$ obdržíme řešení $(x, y) = (2; 4)$.

Jestliže $y \geq 5$, pak ze zadání plyne $x \geq 3$. Pro $x = 3$ však neexistuje přirozené číslo y splňující rovnici $2^y - 3^x = 7$. Je-li $x \geq 4$, lze rovnici (4.18) upravit do tvaru

$$2^y - 88 = 3^x - 81. \qquad (4.19)$$

Dále rovnice (4.19) přejde do tvaru

$$2^y - 88 = 81(3^{x-4} - 1).$$

Tedy $81 \mid 2^y - 88 = 8(2^{y-3} - 11)$. Jelikož $81 \nmid 8$, pak $81 \mid 2^{y-3} - 11$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 2 je $y - 3 = 13$. Dále pak 67; 121; 178; atd. *Nutně* tedy $y = 16 + 54l$, kde l je dané celé nezáporné číslo. Zároveň lze rovnici (4.19) upravit do tvaru

$$8(2^{y-3} - 11) = 3^x - 81.$$

Tedy $8 \mid 3^x - 81 = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $8 \nmid 81$, tak $8 \mid 3^{x-4} - 1$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Další možné mocniny jsou pak 2; 4; 6; 8; atd. Proto $x = 4 + 2k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnice $2^y - 3^x = 7$ přejde do tvaru

$$2^{16+54l} - 3^{4+2k} = 4^{8+27l} - 9^{2+k} = (2^{8+27l} - 3^{2+k})(2^{8+27l} + 3^{2+k}) = 7.$$

Jelikož $2^{8+27l} + 3^{2+k}$ je přirozené číslo (větší než 2), je také $2^{8+27l} - 3^{2+k}$ přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že 7 je prvočíslo, platí $2^{8+27l} + 3^{2+k} = 7$ a $2^{8+27l} - 3^{2+k} = 1$. Odečtením těchto dvou rovnic obdržíme rovnici $3^{2+k} = 3$. Tedy pro exponent $2+k$ platí $2+k = 1$. Protože zároveň $x = 4+2k = 2(2+k)$, pak $x = 2$, což je však ve sporu s předpokladem $x \geq 4$.

ZÁVĚR: Řešením dané úlohy v oboru přirozených čísel je jediná uspořádaná dvojice $(x, y) = (2; 4)$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 7$ má právě 2 řešení v oboru přirozených čísel, tj. řešení ve tvaru $(x, y) \in \{(2; 1), (2; 4)\}$, což je opět v souladu s větou 6.

Dále jsou v této kapitole uvedeny příklady exponenciálních diofantovských rovnic (příklady 52 – 54) tvořící tzv. *gradovaný řetězec úloh* (viz např. [27]), které byly využity v 62. ročníku (v roce 2013) MO v kategorii B. Ukazuje se tak, že uvedená problematika je vhodná také pro přípravu matematicky nadaných žáků.

Příklad 52

Určete všechny trojice (a,b,c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[ŘEŠENÍ: $(a,b,c) = (6n-4; 3n-2; 2n-1)$, kde n je libovolné přirozené číslo]

Příklad 53

Dokažte, že žádná z rovnic

$$3^{2x} + 6^y = 2013,$$
$$|3^{2x} - 6^y| = 2013$$

nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Příklad 54

Určete všechny trojice (a,b,c) přirozených čísel, pro něž platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

[ŘEŠENÍ: $(a,b,c) = (2t; t; 2t+1)$, kde t je libovolné přirozené číslo]

Podobné úlohy se vyskytují v posledních letech i v zahraničních matematických soutěžích. Dokladem toho je mj. následující úloha, která je řešena v oboru celých nezáporných čísel. K nalezení jejího řešení lze přitom využít elementárních metod popsaných v předcházejících částech této disertační práce.

Příklad 55 (Srbská MO – 2019)

Určete všechny dvojice (x,y) nezáporných celých čísel splňující rovnici

$$2^x = 5^y + 3.$$

ŘEŠENÍ: Danou rovnici lze převést pomocí ekvivalentní úpravy na rovnici

$$2^x - 4 = 5^y - 1. \tag{4.20}$$

Pravá straná rovnice (4.20) je větší nebo rovna 0, tudíž pro levou stranu musí platit nerovnost $2^x - 4 \geq 0$, tj. $x \geq 2$. Jestliže $x = 2$, pak z dané rovnice plyne $y = 0$. Existuje tedy řešení $(x,y) = (2;0)$. Je-li $x \geq 3$, je možné zadání úlohy přepsat ve tvaru

$$2^x - 8 = 5^y - 5. \tag{4.21}$$

Levá strana rovnice (4.21) po úpravě přejde do tvaru:

$$8(2^{x-3} - 1) = 5^y - 5. \tag{4.22}$$

Pro $x = 3$ je levá strana rovnice (4.22) rovna nule, pak $5^y - 5 = 0$, neboli $y = 1$. Druhé řešení dané úlohy je $(x, y) = (3; 1)$. V ostatních případech, kdy $x \geq 4$, a tedy $y \geq 1$, z rovnice (4.22) plyne $8 \mid 5^y - 5 = 5(5^{y-1} - 1)$. Protože $8 \nmid 5$, musí $8 \mid 5^{y-1} - 1$. Tedy $5^{y-1} - 1 = 8k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nejmenší možné přirozené k, pro které existuje celočíselné y, je $k = 3$, pro něž $y = 3$. Po dosazení do rovnice (4.20) obdržíme $x = 7$. Třetím řešením úlohy je tak uspořádaná dvojice $(x, y) = (7; 3)$. Z věty 5 pak plyne, že další řešení daná úloha mít nemůže.

ZÁVĚR: Řešeními dané úlohy v oboru celých nezáporných čísel jsou uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(2; 0), (3; 1), (7; 3)\}$.

Příklad 56 (IMO 2008 - Problem $N1$)

Nechť n je dané celé číslo a p je prvočíslo. Dokažte, že pro a, b, c, které jsou celá čísla vyhovující rovnicím

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa,$$

platí $a = b = c$.

ŘEŠENÍ: Ze zadání úlohy je zřejmé, že pokud dvě čísla z celých čísel a, b, c jsou si rovna, pak jsou si rovna všechna tři. Lze předpokládat, že $a \neq b \neq c \neq a$. Po snadné úpravě prvních dvou rovnic platí $a^n - b^n = -p(b - c)$. Analogicky vzhledem k symetrii úlohy se získají cyklické rovnice. Vynásobením těchto rovnic pak obdržíme rovnici

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{b^n - c^n}{b - c} \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} = -p^3. \tag{4.23}$$

Pokud n je liché číslo, pak výrazy $a^n - b^n$ a $a - b$ musí mít stejné znaménko. Jejich podíl musí být kladné číslo, což je spor s výrazem $-p^3$, který je *nutně* záporný. Tedy $n = 2k$, kde k je vhodné celé číslo.

Dále je možné předpokládat, že p je liché prvočíslo. Výraz

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$$

tudíž musí být taktéž lichým číslem. Platí $n = 2k$ a daný součet je liché číslo, právě když a, b jsou různé parity. Analogický výsledek platí po cyklické záměně i pro dvojice b, c a c, a. Tedy a, b, c, a musí být střídavě různé parity, což je zřejmě nemožné.

Pro $p = 2$ ze zadání úlohy plyne, že a, b, c musí být stejné parity. Proto lze rovnice (4.23) dělit výrazem $p^3 = 2^3$. Rovnici (4.23) je možné zapsat ve tvaru

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a^k - b^k}{a - b} \cdot \frac{b^k + c^k}{2} \cdot \frac{b^k - c^k}{b - c} \cdot \frac{c^k + a^k}{2} \cdot \frac{c^k - a^k}{c - a} = -1. \tag{4.24}$$

Každý z činitelů v rovnici (4.24) *nutně* musí být roven ± 1. Tedy $a^k + b^k = \pm 2$. Pokud by bylo k sudé číslo, pak $a^k + b^k = 2$, z čehož $|a| = |b| = 1$. Platí tedy $a^k - b^k = 0$, což je spor s rovnicí (4.24). Číslo k je tudíž liché. Součet $a^k + b^k = \pm 2$ je dělitelný ± 2. Jelikož a, b mají stejnou paritu, proto $a + b = \pm 2$. Cyklicky se získá $b + c = \pm 2$ a $c + a = \pm 2$. Ve dvou z těchto uvedených rovnic musí být stejná znaménka, proto alespoň dvě čísla a, b, c si musí být rovna. Což je spor s prvotním předpokladem, že $a \neq b \neq c \neq a$.

ZÁVĚR: Důkaz, že pro celá čísla a, b, c v daných rovnicích platí $a = b = c$, je tímto ukončen.

Následující dvě úlohy jsou převzaty z české Matematické olympiády.

Příklad 57 (MO 71–A–S–3)

Určete všechny dvojice kladných celých čísel a a b, pro něž platí $a^{a-b} = b^a$.

ŘEŠENÍ: Vynásobením dané rovnosti číslem a^b/b^a lze získat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a = a^b.$$

Mocnina na levé straně takto upravené rovnosti je celým číslem, právě když je její základ $k = a/b$ celé (dokonce kladné) číslo. Po dosazení $a = kb$ přejde rovnost do tvaru $k^{kb} = (kb)^b$. Odtud po vydělení exponentů číslem b obdržíme $k^k = kb$ neboli $b = k^{k-1}$, tudíž $a = kb = k^k$.

ZÁVĚR: Všechna řešení dané úlohy jsou ve tvaru $(a, b) = (k^k; k^{k-1})$, kde $k \geq 1$ je libovolné celé číslo.

Příklad 58 (MO 71–A–III–5)

Najděte všechna celá čísla n, pro která je číslo $2^n + n^2$ druhou mocninou nějakého celého čísla.

Řešení: Ze zadání úlohy plyne, že v případě celého $n < 0$ není číslo $2^n + n^2$ celé, natož druhou mocninou celého čísla.

Pro $n = 0$ platí $2^n + n^2 = 1 = 1^2$. Tedy $n = 0$ splňuje podmínky dané úlohy.

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ lze zadání úlohy přepsat do tvaru rovnice

$$2^n + n^2 = m^2,$$

kde m je hledané celé číslo. Tuto rovnici je možné po snadné úpravě přepsat do součinového tvaru

$$2^n = (m - n)(m + n). \tag{4.25}$$

Odtud zřejmě $m > n \geq 1$. Z rovnice (4.25) plyne, že $m-n = 2^a$ a $m+n = 2^b$, kde a, b jsou celá čísla splňující $0 \leq a < b$ a $a + b = n$. Původní neznámé m a n lze vyjádřit ve tvaru

$$m = \frac{2^b + 2^a}{2} \quad \text{a} \quad n = \frac{2^b - 2^a}{2}.$$

Zřejmě $a \neq 0$, jinak by oba zlomky měly liché čitatele a čísla m, n by tak nebyla celá. Dosazením $n = (2^b - 2^a)/2$ do rovnosti $a + b = n$ obdržíme ekvivalentní rovnici s rovnicí (4.25)

$$2a + 2b = 2^b - 2^a \tag{4.26}$$

pro nové celočíselné neznámé a a b splňující nerovnost $1 \leq a < b$.

Dále se dokáže, že v případě $b \geq 6$ rovnost (4.26) nelze splnit. Z nerovnosti $a < b$ plyne $2a+2b < 4b$ a zároveň $2^b-2^a \geq 2^b-2^{b-1} = 2^{b-1}$. Stačí tedy ukázat, že $4b < 2^{b-1}$ pro každé celé $b \geq 6$. Důkaz se provede matematickou indukcí. Pro $b = 6$ se získá pravdivá nerovnost $24 < 32$. Dá se tedy předpokládat, že pro nějaké $b \geq 6$ platí $4b < 2^{b-1}$. Vynásobením dvěma obdržíme nerovnost $8b < 2^b$, odkud s přihlédnutím ke zřejmé nerovnosti $4(b + 1) < 8b$ lze získat dokazovanou nerovnost pro hodnotu $b + 1$.

Stačí tedy prověřit zbývajících 10 případů, kdy platí $1 \leq a < b \leq 5$. Postupným dosazením do rovnice (4.26) se získá pouze jedno celočíselné řešení $(a, b) = (2; 4)$, kterému odpovídá dvojice $(m, n) = (10; 6)$.

Závěr: Všechna řešení dané úlohy jsou $n \in \{0; 6\}$.

4.2. Speciální exponenciální diofantovská rovnice

Exponenciálními diofantovskými rovnicemi v této části disertační práce rozumíme diofantovské rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají zpravidla charakter exponentů daných exponenciální funkcí se základem x a y, kterými jsou navzájem různá přirozená čísla větší než 1, tj. ve tvaru

$$x^m = y^n + a,$$

kde a je dané přirozené číslo a m, n jsou celočíselné neznámé. Tato podkapitola se zaměřuje na speciální typ exponenciálních diofantovských rovnic, který je řešen pomocí elementárních metod na jednotlivých příkladech. Jedním z přínosů disertační práce je zobecnění řešení tohoto typu exponenciálních diofantovských rovnic.

Uvedené příklady 59 – 61 jsou řešeny pomocí metody faktorizace. Příklad 59 byl uveden v předchozí podkapitole jako příklad 48. Pro ucelenost problematiky speciálního typu exponenciálních diofantovských rovnic je zde opět uveden s mírně pozměněným řešením.

Příklad 59

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3^m = 2^n + 5,$$

kde $m, n \in \mathbb{Z}$*.*

Řešení: Ze zadání je patrné, že exponenty m, n v dané rovnici jsou celá nezáporná čísla. Dále lze rovnici přepsat do tvaru

$$3^m - 1 = 2^n + 4. \tag{4.27}$$

Odtud plyne, že $3^m > 5$, tj. $m \geq 2$. Platí tudíž

$$2^n + 4 = 3^m - 1 \geq 3^2 - 1 = 8,$$

tedy $2^n \geq 4$, tj. $n \geq 2$.

Protože $3^m - 1 = (3 - 1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3 + 1)$, rovnice (4.27) se následně upraví do tvaru

$$2\,(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3 + 1) = 2^n + 4 = 2^2(2^{n-2} + 1),$$

tudíž $2 \mid (3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3 + 1)$. Jednotlivé sčítance daného součtu nejsou dělitelné číslem 2, ovšem po dvojicích (ke každému v pořadí zprava lichému sčítanci přičteme v pořadí následující sudý sčítanec) je již daný součet dělitelný číslem 2. Tedy m musí být sudé číslo. Vytknutím největší možné mocniny čísla 3 z každé dvojice se získá číselný výraz $3+1=4$. Tzn. z každé dvojice daného součtu lze vytknout 4. Rovnice (4.27) se nyní přepíše do tvaru

$$2\,(4 \cdot 3^{m-2} + 4 \cdot 3^{m-4} + \ldots + 4 \cdot 3^2 + 4) = 2^2(2^{n-2} + 1).$$

Po snadné úpravě přejde rovnice do tvaru

$$2\,(3^{m-2} + 3^{m-4} + \ldots + 3^2 + 1) = 2^{n-2} + 1. \tag{4.28}$$

Odtud plyne, že levá strana rovnice (4.28) je dělitelná dvěma. Totéž musí splňovat i pravá strana. To však nastane, právě když $n = 2$, a tedy $m = 2$.

Závěr. Úloha má jediné řešení, a to

$$(m, n) = (2; 2).$$

Příklad 60

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$9^m = 2^n + 65,$$

kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Řešení: Podobně jako v příkladu 59 je patrné, že exponenty m, n v dané rovnici jsou celá nezáporná čísla. Dále lze rovnici přepsat do tvaru

$$9^m - 1 = 2^n + 64. \tag{4.29}$$

Zřejmě platí $9^m > 65$, tj. $m \geq 2$. Platí tudíž

$$2^n + 64 = 9^m - 1 \geq 9^2 - 1 = 80,$$

tedy $2^n \geq 16$, tj. $n \geq 4$.

Další postup je analogický jako v příkladu 59. Výraz $9^m - 1$ lze zapsat ve tvaru $(9-1)\cdot(9^{m-1}+9^{m-2}+\ldots+9+1)$ a 2^n+64 ve tvaru $2^4\cdot(2^{n-4}+4)$. Rovnice (4.29) přejde do tvaru

$$(9-1) \cdot (9^{m-1} + 9^{m-2} + \ldots + 9 + 1) = 2^4 \cdot (2^{n-4} + 4),$$

tudíž *nutně* platí $2 \mid (9^{m-1}+9^{m-2}+\ldots+9+1)$. Podobně jako v příkladu 59 lze vytknout z jednotlivých dvojic sčítanců číslo $9+1=10$, a tedy výraz $9^{m-1}+9^{m-2}+\ldots+9+1$ přejde do tvaru $9^{m-2}\cdot 10+\ldots+9^2\cdot 10+10$. Po vytknutí čísla 10 se získá rovnice (4.29) ve tvaru

$$10\cdot(9^{m-2}+\ldots+9^2+1)=2\cdot(2^{n-4}+4). \tag{4.30}$$

Z tohoto tvaru rovnice (4.30) ovšem plyne $5 \mid (2^{n-4}+4)$, neboli 2^{n-4} musí dávat zbytek 1 při dělení číslem 5. První možná celočíselná mocnina n, kde $n\geq 4$, je $n=4$. Dále pak $n=8$, $n=12$, atd. Číslo n musí být ve tvaru $n=4k$, kde $k\in\mathbb{N}$.

Pokud navíc $n\geq 5$, lze danou rovnici (4.30) přepsat do tvaru:

$$5\cdot(9^{m-2}+\ldots+9^2+1)=2\cdot(2^{n-5}+2)$$

Jelikož $2\nmid 5$, pak *nutně* $2\mid(9^{m-2}+\ldots+9^2+1)$. Z tohoto vztahu plyne, že výraz obsahující sčítance sudých mocnin čísla 9 lze přepsat do tvaru $9^{m-4}\cdot 82+$ $+\ldots+9^4\cdot 82+82$. Po vytknutí čísla 82 se získá rovnice (4.30) ve tvaru

$$82\cdot 5\cdot(9^{m-4}+\ldots+9^4+1)=2\cdot(2^{n-5}+2). \tag{4.31}$$

Úpravou rovnice (4.31) obdržíme $41\cdot 5\cdot(9^{m-4}+\ldots+9^4+1)=2^{n-5}+2$, neboli $41\mid(2^{n-5}+2)$. Číslo 2^{n-5} dává zbytek 39 při dělení číslem 41. První možná celočíselná mocnina je $n=16$. Dále pak $n=36$, $n=56$, atd. Číslo n musí být ve tvaru $n=20l+16$, kde $l\in\mathbb{N}_0$. Zároveň $n=4k$, tzn. $4k=20l+16$. Tedy $k=5l+4$.

Pokud navíc $n\geq 6$, je možné danou rovnici (4.31) zapsat ve tvaru

$$41\cdot 5\cdot(9^{m-4}+\ldots+9^4+1)=2\cdot(2^{n-6}+1). \tag{4.32}$$

Jelikož $2\nmid 5$, $2\nmid 41$ pak *nutně* $2\mid(9^{m-4}+\ldots+9^4+1)$. Na základě předchozího postupu lze přepsat výraz $9^{m-4}+\ldots+9^4+1$ do tvaru $9^{m-8}\cdot 6\,562+\ldots+$ $+9^8\cdot 6\,562+6\,562$. Po vytknutí čísla 6 562 se získá rovnice (4.32) ve tvaru

$$6\,562\cdot 41\cdot 5\cdot(9^{m-8}+\ldots+9^8+1)=2\cdot(2^{n-6}+1). \tag{4.33}$$

Po snadné úpravě přejde rovnice (4.33) do tvaru $17\cdot 193\cdot 41\cdot 5\cdot(9^{m-4}+\ldots+$ $+9^4+1)=2^{n-6}+1$, neboli $17\mid(2^{n-6}+1)$. Číslo 2^{n-6} dává zbytek 16 při dělení číslem 17. První možná celočíselná mocnina je $n=10$. Dále pak $n=18$, $n=26$, atd. Číslo n musí být ve tvaru $n=8p+10$, kde $p\in\mathbb{N}_0$. Zároveň $n=4k$ a $k=5l+4$, tzn. $4\cdot(5l+4)=8p+10$. Jelikož $4\mid 8$ a $4\nmid 10$, obdržíme spor. Tedy mocnina n může být nejvýše číslo 5.

Stačí prověřit dvě možnosti:

a) Jestliže $n = 4$, pak po dosazení do zadání úlohy plyne $m = 2$.

b) Jestliže $n = 5$, pak neexistuje žádná celočíselná hodnota m splňující zadání úlohy.

Závěr. Úloha má pouze jedno řešení, tj. uspořádanou dvojici $(m, n) = (2; 4)$.

Příklad 61

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$33^m = 2^n + 1\,025,$$

kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Řešení: Stejně jako v příkladu 59 a 60 je zřejmé, že exponenty m, n jsou v dané rovnici celá nezáporná čísla. Dále se rovnice přepíše do tvaru

$$33^m - 1 = 2^n + 1\,024. \tag{4.34}$$

Zřejmě platí $33^m > 1\,025$, tj. $m \geq 2$. Platí tudíž

$$2^n + 1\,024 = 33^m - 1 \geq 33^2 - 1 = 1\,088,$$

tedy $2^n \geq 64$, tj. $n \geq 6$.

Další postup je analogický s postupy v příkladech 59 a 60. Výraz $33^m - 1$ lze zapsat ve tvaru $(33 - 1) \cdot (33^{m-1} + 33^{m-2} + \ldots + 33 + 1)$ a $2^n + 1\,024$ ve tvaru $2^6 \cdot (2^{n-6} + 16)$. Rovnice (4.34) přejde do tvaru

$$(33 - 1) \cdot (33^{m-1} + 33^{m-2} + \ldots + 33 + 1) = 2^6 \cdot (2^{n-6} + 16),$$

tudíž *nutně* $2 \mid (33^{m-1} + 33^{m-2} + \ldots + 33 + 1)$. Podobně jako v příkladech 59 a 60 lze vytknout z jednotlivých dvojic sčítanců $33 + 1 = 34$ a tedy výraz $33^{m-1} + 33^{m-2} + \ldots + 33 + 1$ se přepíše do tvaru $33^{m-2} \cdot 34 + \ldots + 33^2 \cdot 34 + 34$. Po vytknutí čísla 34 se získá rovnice (4.34) ve tvaru

$$34 \cdot (33^{m-2} + \ldots + 33^2 + 1) = 2 \cdot (2^{n-6} + 16). \tag{4.35}$$

Z rovnice (4.35) ovšem plyne, že $17 \mid (2^{n-6} + 16)$, neboli 2^{n-6} dává zbytek 1 při dělení číslem 17. První možná celočíselná mocnina n, kde $n \geq 6$, je $n = 6$.

Dále pak $n = 14$, $n = 22$, $n = 30$, atd. Číslo n musí být ve tvaru $n = 8k + 6$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

Pokud navíc $n \geq 7$, je možné danou rovnici (4.35) přepsat do tvaru:

$$17 \cdot (33^{m-2} + \ldots + 33^2 + 1) = 2 \cdot (2^{n-7} + 8)$$

Jelikož $2 \nmid 17$ pak *nutně* $2 \mid (33^{m-2} + \ldots + 33^2 + 1)$. Z tohoto vztahu plyne, že výraz $33^{m-2} + \ldots + 33^2 + 1$ přejde do tvaru $(33^{m-4} \cdot 1\,090 + \ldots + 33^4 \cdot 1\,090 + 1\,090)$. Po vytknutí čísla $1\,090$ se získá rovnice (4.35) ve tvaru

$$1\,090 \cdot 17 \cdot (33^{m-4} + \ldots + 33^4 + 1) = 2 \cdot (2^{n-7} + 8). \tag{4.36}$$

Po snadné úpravě přejde rovnice (4.36) do tvaru $17 \cdot 5 \cdot 109 \cdot (33^{m-4} + \ldots + +33^4 + 1) = 2^{n-7} + 8$, neboli $5 \mid (2^{n-7} + 8)$. Číslo 2^{n-7} dává zbytek 2 při dělení číslem 5. Nejmenší vyhovující celočíselná mocnina je $n = 8$. Dále pak $n = 12$, $n = 16$, $n = 20$, atd. Číslo n musí být ve tvaru $n = 4l + 8$, kde $l \in \mathbb{N}_0$. Zároveň $n = 8k + 6$ a $n = 4l + 8$, tzn. $8k + 6 = 4 \cdot (l + 2)$. Jelikož $4 \mid 8$ a $4 \nmid 6$, získáme spor. Mocnina n tedy může být nejvýše číslo 6.

Dosazením $n = 6$ do zadání úlohy obdržíme $m = 2$.

ZÁVĚR. Úloha má pouze jedno řešení, tj. uspořádanou dvojici $(m, n) = (2; 6)$.

Na základě příkladů $59 - 61$ lze daný typ úlohy zobecnit a provést zobecněné odhady pro exponenty m a n.

ZOBECNĚNÍ: Nechť $x^m - 1 = 2^n + 2^{4k+2}$, kde x je liché přirozené číslo $(x \geq 3)$ a $x - 1 = 2^{2k+1}$, k je dané nezáporné celé číslo a exponenty m, n jsou celá čísla vystupující v dané rovnici jako neznámé.

V takto zobecněné úloze si lze všimnout, že m, n jsou vždy celá nezáporná čísla (dokonce přirozená čísla). Zřejmě tedy platí

$$x^m - 1 \geq 2^{4k+2},$$

neboli

$$x^m \geq 2^{4k+2} + 1.$$

Po snadné úpravě plyne

$$m \geq \log_x (2^{4k+2} + 1).$$

Jelikož $m \in \mathbb{N}_0$ a zároveň platí $x = 2^{2k+1} + 1$, pak

$$1 < \log_x (2^{4k+2} + 1) < 2.$$

Tedy $m \geq 2$.

Na základě odhadu pro m platí nerovnost $x^2 - 1 \leq 2^n + 2^{4k+2}$, kterou je možné upravit do tvaru $x^2 - 1 - 2^{4k+2} \leq 2^n$. Jelikož $n \in \mathbb{N}_0$, pak

$$n \geq \log_2 (x^2 - 1 - 2^{4k+2}).$$

Platí $x = 2^{2k+1} + 1$, tudíž

$$n \geq \log_2 (2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1 - 2^{4k+2} - 1),$$

$$n \geq \log_2 2^{2k+2}.$$

Tedy $n \geq 2k + 2$.

Z příkladů 59 − 61 lze dokonce vyvodit následující tvrzení, které je jedním z přínosů této disertační práce, včetně důkazu za použítí pouze elementárních prostředků.

TVRZENÍ: *Zobecněná úloha $x^m - 1 = 2^n + 2^{4k+2}$, kde x je liché přirozené číslo ($x \geq 3$) a $x - 1 = 2^{2k+1}$, k je dané nezáporné celé číslo a exponenty m, n jsou celá čísla vystupující v dané rovnici jako neznámé, má právě jedno řešení ve tvaru $(m, n) = (2; 2k + 2)$.*

DŮKAZ: Důkaz tvrzení je rozdělen na dvě části. V první části se dokáže, že uspořádaná dvojice $(m, n) = (2; 2k+2)$ je řešením zobecněné úlohy. V druhé části se posléze ukáže, že toto řešení je jediné možné.

Dosazením m, n do zadání úlohy se ověří, zda je uspořádáná dvojice $(2; 2k + 2)$ řešením zobecněné úlohy pro libovolné nezáporné celočíselné k. Získá se tak rovnice

$$x^2 - 1 = 2^{2k+2} + 2^{4k+2}. \tag{4.37}$$

Pomocí jednoduché úpravy ($x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$) obdržíme rovnici (4.37) ve tvaru

$$(x - 1)(x + 1) = 2^{2k+1}(2 + 2^{2k+1}).$$

Jelikož platí $x-1=2^{2k+1}$, je možné rovnici (4.37) upravit do finálního tvaru

$$2^{2k+1}(2+2^{2k+1}) = 2^{2k+1}(2+2^{2k+1}).$$

První část důkazu, že vždy existuje řešení dané rovnice, je tímto dokázána. V následující části se dokáže, že toto nalezené řešení je jediné možné.

Lze předpokládat, že existují další řešení ve tvaru:

a) Nechť $(m,n)=(2;2k+z)$ je řešením, kde z je přirozené číslo a $z\geq 3$. Po dosazení do zobecněné rovnice a následnými úpravami pak platí

$$\begin{aligned}
x^2-1 &= 2^{2k+z}+2^{4k+2},\\
(x-1)(x+1) &= 2^{2k+1}(2^{z-1}+2^{2k+1}),\\
2^{2k+1}(2+2^{2k+1}) &= 2^{2k+1}(2^{z-1}+2^{2k+1}),\\
2+2^{2k+1} &= 2^{z-1}+2^{2k+1},\\
2 &= 2^{z-1}.
\end{aligned}$$

Přičemž rovnost nastane, právě když $z=2$. To je ovšem spor s tím, že $z\geq 3$.

b) Nechť $(m,n)=(y;2k+2)$ je řešením, kde y je přirozené číslo a $y\geq 3$. Dosazením do zobecněné rovnice a následnými úpravami lze získat rovnice

$$\begin{aligned}
x^y-1 &= 2^{2k+2}+2^{4k+2},\\
(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1) &= 2^{2k+1}(2+2^{2k+1}),\\
2^{2k+1}(x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1) &= 2^{2k+1}(2+2^{2k+1}),\\
x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1 &= 2+2^{2k+1},\\
x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x+1 &= x+1.
\end{aligned}$$

Rovnost nastane, právě když $y=2$. To je ovšem spor s předpokladem, že $y\geq 3$.

c) Nechť je řešením i uspořádáná dvojice $(m,n)=(y;2k+z)$, kde $y>2$ a zároveň $2k+z>2k+2$. Platí tedy následující dvě rovnice

$$x^y-1 = 2^{2k+z}+2^{4k+2}, \tag{4.38}$$
$$x^2-1 = 2^{2k+2}+2^{4k+2}. \tag{4.39}$$

Odečtením rovnice (4.39) od rovnice (4.38) obdržíme rovnici

$$x^y-x^2 = 2^{2k+z}-2^{2k+2}. \tag{4.40}$$

Postupnými úpravami rovnice (4.40) se získá

$$\begin{aligned}
x^2(x^{y-2}-1) &= 2^{2k+1}(2^{z-1}-2),\\
x^2(x-1)(x^{y-3}+x^{y-4}+\ldots+x+1) &= 2^{2k+1}(2^{z-1}-2),\\
2^{2k+1}x^2(x^{y-3}+x^{y-4}+\ldots+x+1) &= 2^{2k+1}(2^{z-1}-2),\\
x^2(x^{y-3}+x^{y-4}+\ldots+x+1) &= 2^{z-1}-2.
\end{aligned}$$

Roznásobením levé strany poslední uvedené rovnice a vytknutím čísla 2 z pravé strany přejde rovnice do tvaru

$$x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x^3+x^2 = 2(2^{z-2}-1). \tag{4.41}$$

Tedy $2 \mid (x^{y-1}+x^{y-2}+\ldots+x^3+x^2)$. Jelikož $2 \nmid x^2$ (x je liché přirozené číslo), pak *nutně* $2 \mid (x^{y-3}+x^{y-4}+\ldots+x+1)$. To lze splnit jenom tehdy, když y je sudé číslo (vzhledem k předpokladu $y \geq 4$). Dále se rovnice (4.41) upravuje následovně

$$\begin{aligned}
x^2(x+1)(x^{y-4}+\ldots+x^2+1) &= 2(2^{z-2}-1),\\
x^2(2^{2k+1}+2)(x^{y-4}+\ldots+x^2+1) &= 2(2^{z-2}-1).
\end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou je možné získat rovnici

$$x^2(2^{2k}+1)(x^{y-4}+\ldots+x^2+1) = 2^{z-2}-1. \tag{4.42}$$

Výraz $(2^{2k}+1) \mid (2^{z-2}-1)$, tedy zlomek $(2^{z-2}-1)/(2^{2k}+1)$ musí být celé číslo (dokonce přirozené číslo). Z tohoto zlomku plyne předpoklad, že $z-2 \geq 2k$. Platí tedy

$$\frac{2^{z-2}-1}{2^{2k}+1} = 2^{z-2k-2} - \frac{2^{z-2k-2}+1}{2^{2k}+1},$$

tzn. daný zlomek je přirozeným číslem právě tehdy, když je přirozeným číslem i zlomek $(2^{z-2k-2}+1)/(2^{2k}+1)$. Z daného zlomku plyne další předpoklad, že $z-2k-2 \geq 2k$ a platí

$$\frac{2^{z-2k-2}+1}{2^{2k}+1} = 2^{z-4k-2} - \frac{2^{z-4k-2}-1}{2^{2k}+1},$$

tzn. zlomek je přirozeným číslem právě tehdy, když je přirozeným číslem (nebo 0) i zlomek $(2^{z-4k-2}-1)/(2^{2k}+1)$.

Tímto postupem je možné pokračovat dále. Lze tedy předpokládat, že algoritmus neskončí po konečném počtu kroků, je nekonečný, tím pádem i počet podmínek pro z jde k nekonečnu pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Číslo z musí být větší než všechny meze plynoucí z algoritmu, tzn. takové $z \in \mathbb{N}$ neexistuje. Pro $k = 0$ plyne $2 = (2^0 + 1) \mid (2^{z-2} - 1)$, kde $2^{z-2} - 1$ je buď číslo liché, nebo je rovno 0 pro $z = 2$. Z prvního případu vyplývá spor, neboť žádné liché číslo není dělitelné číslem 2. V druhém případě je spor s předpokladem, neboť $z > 2$.

Algoritmus tedy *nutně* končí po konečném počtu kroků. Rovněž je zřejmé, že musí končit po sudém počtu kroků a tedy $z = 4kp + 2$, kde $k, p \in \mathbb{N}$ (v případu b) je řešena možnost $k = 0$). Zároveň platí, že y musí být sudé, tedy $y = 2l$, kde $l \in \mathbb{N}$ a $l \geq 2$. Rovnici (4.40) za použití vztahu $x^2 = (2^{2k+1} + 1)^2 = 2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1$ lze přepsat do tvaru

$$x^{y-2} \cdot (2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1) - 1 = 2^{z-2} \cdot 2^{2k+2} + 2^{4k+2}.$$

Využitím vztahů $z = 4kp + 2$ a $y = 2l$ obdržíme rovnici ve formě

$$x^{2l-2} \cdot (2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1) - 1 = 2^{4kp} \cdot 2^{2k+2} + 2^{4k+2}. \tag{4.43}$$

Rovnost v rovnici (4.43) nastane právě tehdy, když $p = 0$ (implikuje $l = 1$), což je spor s předpoklady $l \geq 2, p \in \mathbb{N}$. Jinak by bylo možné upravovat rovnici (4.43) následovně:

$$\begin{aligned}
x^{2l-2} \cdot x^2 &= 2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1 + (2^{4kp} - 1) \cdot 2^{2k+2} \\
x^{2l-2} \cdot x^2 &= x^2 + (2^{4kp} - 1) \cdot 2^{2k+2} \\
x^2 \cdot (x^{2l-2} - 1) &= (2^{4kp} - 1) \cdot 2 \cdot (x - 1)
\end{aligned}$$

Tedy $x^2 \mid (2^{4kp} - 1) \cdot 2 \cdot (x - 1)$. Jelikož $x^2 \nmid 2$ a $x^2 \nmid (x - 1)$, pak by *nutně* $x^2 \mid (2^{4kp} - 1)$. Tudíž zlomek $\dfrac{2^{4kp} - 1}{x^2} = \dfrac{2^{4kp} - 1}{2^{4k+2} + 2^{2k+2} + 1}$ by musel být celým číslem. Pokračováním výše popsaného procesu by bylo možné získat nekonečně mnoho podmínek pro $p \in \mathbb{N}$, které by vytvářely nekonečně klesající posloupnost přirozených čísel, což není možné. Tedy p musí být rovno 0.

ZÁVĚR: Zobecněná úloha má právě 1 řešení, a to

$$(m, n) = (2; 2k + 2),$$

kde $k \in \mathbb{N}_0$.

Ve výše dokázaném tvrzení o jistém speciálním typu exponenciálních diofantovských rovnic byly použity pouze elementární metody řešení, zejména metoda faktorizace. Dále zde byla zmíněna skutečnost, že neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel, známá jako Fermatova metoda nekonečného klesání (viz např. v [1, 8]). Tento důkaz názorně ukázal, že i při řešení složitějších úloh v oblasti diofantovských rovnic lze efektivně využít elementární metody řešení středoškolské matematiky.

Závěr

Cílem disertační práce byla sumarizace poznatků, zkoumání a analýza elementárních metod řešení diofantovských rovnic vyskytujících se v různých matematických soutěžích. Zvláštní důraz byl kladen především na polynomicko-exponenciální a exponenciální diofantovské rovnice. V rámci čtyř kapitol byly prezentovány elementární metody řešení diofantovských rovnic, přičemž jednotlivé postupy řešení byly ukázány na konkrétních úlohách. Celá disertační práce byla koncipována tak, aby byla snadno uchopitelná pro učitele i žáky středních škol a mohla mj. sloužit i jako prostředek k přípravě nadaných žáků na matematické soutěže národního i mezinárodního charakteru. Za vlastní přínos lze považovat zejména popis a zpracování polynomicko-exponenciálních a exponenciálních diofantovských rovnic řešených především pomocí elementárních metod a dále pak vytvoření studijního materiálu o diofantovských rovnicích, jež jsou řešeny s využitím tzv. Gaussových celých čísel.

První kapitola práce byla věnována přehledu základních metod řešení a má sloužit jako uvedení do problematiky diofantovských rovnic. Druhá část byla zaměřena na využití metody Gaussových celých čísel při řešení určitého typu kvadratických diofantovských rovnic o dvou neznámých. Struktura této části práce umožňuje její využití jako „manuál pro začátečníky“. Třetí sekce pojednávala o polynomicko-exponenciálních diofantovských rovnicích, přičemž byla zpravidla používána metoda faktorizace. Uvedené příklady byly řazeny od nejjednodušších rovnic daného typu po obtížnější. V úlohách se vyskytovaly i příklady z matematických soutěží, které lze rovněž řešit popsanou metodou faktorizace. Exponenciálním diofantovským rovnicím a metodám jejich řešení byla věnována čtvrtá kapitola, v níž byla zmíněna Catalanova hypotéza. Na základě prací kanadského matematika Benneta zde byla vyslovena věta, jež byla v této části disertační práce ověřena pomocí elementárních metod (metoda faktorizace a využití číselných kongruencí). Kapitoly třetí a čtvrtá, zabývající se elementárními metodami řešení polynomicko-exponenciálních a exponenciálních diofantovských rovnic, byly těžištěm disertační práce. Poslední část byla zaměřena na speciální typ exponenciálních diofantovských rovnic, který byl řešen opět pomocí elementárních metod. Z řešení prezentovaných příkladů vyplynulo, že tento typ rovnic má vždy právě jedno řešení v oboru celých čísel. Jedním z přínosů závěrečné části práce je zobecnění určitého typu exponenciálních diofantovských rovnic a vyjádření obecného tvaru řešení včetně důkazu, který je veden pomocí elementárních metod.

Dílčí myšlenky a závěry uvedené v této práci byly prezentovány na semináři z didaktiky matematiky a elementární matematiky na Katedře algebry a geometrie Univerzity Palackého v Olomouci (10. prosince 2019) a na konferencích TDID-ERC (16. října 2021) a ICERI 2022 (7. listopadu 2022). Vybrané části práce byly publikovány v časopise Matematika – Fyzika – Informatika [21, 23, 29], v časopise Notes on Number Theory and Discrete Mathematics [24] a ICERI Proceedings [22].

Conclusion

The aim of the dissertation was the summarization of findings, investigation and analysis of elementary methods of solving Diophantine equations occurring in various mathematical competitions. Particular emphasis was placed on polynomial-exponential and exponential Diophantine equations. Within four chapters, elementary methods of solving Diophantine equations were presented, while the individual solution procedures were shown on specific problems. The entire dissertation was conceived in such a way that it would be easy for teachers and secondary school students to grasp and could serve, among other things, as a means of preparing gifted students for national and international mathematical competitions. The description and processing of polynomial-exponential and exponential Diophantine equations, solved primarily using elementary methods and the creation of study material on Diophantine equations, which are solved using the so-called Gaussian integers, can be considered a personal contribution.

The first chapter of this thesis was devoted to basic methods and is intended to serve as an introduction to the given issue. The second part was focused on using the method of Gaussian integers to solve a certain type of quadratic Diophantine equations with two unknowns. The structure of this part of the work allows it to be used as a „manual for beginners“. The third section dealt with polynomial-exponential Diophantine equations, while the factorization method was usually used. The given examples were ordered from the simplest equations of the given type to the more difficult ones. In the tasks, there were also examples from mathematical competitions, which can also be solved by the described method of factorization. The fourth chapter was devoted to exponential Diophantine equations and their solution methods, in which Catalan's hypothesis was mentioned. Based on the work of the Canadian mathematician Bennet, a theorem was stated here, which was verified in this part of the dissertation using elementary methods (method of factorization and the use of numerical congruences). Chapters three and four, dealing with elementary methods of solving polynomial-exponential and exponential Diophantine equations, were the focus of the dissertation. The last part was focused on a special type of exponential Diophantine equations, which was solved again using elementary methods. Solving the presented examples, it was possible to notice that this type of equation always has exactly one solution in the field of integers. One of the contributions of the final part of the thesis is the generalization of a certain type of exponential Diophantine equations and the expression of the general form of the solution, including the proof, which is carried out using elementary methods.

Partial ideas and conclusions presented in this dissertation were presented at a seminar on didactics of mathematics and elementary mathematics at the Department of Algebra and Geometry of the Palacký University in Olomouc (December 10, 2019) and at the TDID-ERC conference (October 16, 2021) and ICERI 2022 (November 7, 2022). Selected parts of the work were published in the journal Matematika – Fyzika – Informatika [21, 23, 29], in the journal Notes on Number Theory and Discrete Mathematics [24] and ICERI Proceedings [22].

Literatura

[1] ANDREESCU, T. – ANDRICA, D.: An Introduction to Diophantine Equations. GIL Publishing House, Cluj, 2002.

[2] ANDREESCU, T. – ANDRICA, D. – FENG, Z.: 104 Number Theory Problems, Birkhäuser Boston, 2007.

[3] ANDREESCU, T. – ANDRICA, D.: Number Theory (Structures, Examples and Problems). Birkhäuser Boston, 2009.

[4] APFELBECK, A.: Kongruence. ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1968.

[5] BASHMAKOVA, I. G.: Diophantus and Diophantine Equations. The Mathematical Association of America, 1997.

[6] BENNETT, M. A.: On Some Exponential Equations of S. S. Pillai. Canad. J. Math. Vol. 53 (5), pp. 897 - 922, 2001.

[7] BENNETT, M. A.: Pillai's conjecture revisited. Journal of Number Theory 98, 228 - 235, 2003.

[8] BUSSEY, W. H.: Fermat's Method of Infinite Descent. The American Mathematical Monthly, 25:8, 333-337, 1918.

[9] CASSELS, J. W. S.: On the equation $a^x - b^y = 1$. Amer. J. Math. 75, 159 - 162, 1953.

[10] COHEN, H.: Number Theory Volume II: Analytic and Modern Tools. Springer, 2007.

[11] CONRAD, K.: The Gaussian integers [online]. Dostupné na https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf.

[12] DONALDSON, N.: Gaussian integers and Rings of Algebraic Integers. University of California, Irvine [online]. Dostupné na https://www.math.uci.edu/ndonalds/math180b/6gaussian.pdf.

[13] International Mathematical Olympiad [online]. Dostupné na https://www.imo-official.org.

[14] Halaš, R.: Úvod do teorie čísel. Univerzita Palackého v Olomouci, 2014.

[15] Jukl, M.: Analytická geometrie. Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, 1. vydání.

[16] Krásenský, K.: Gaussova prvočísla [online]. Dostupné na https://prase.cz/library/GaussovaPrvocislaKK/GaussovaPrvocislaKK.pdf.

[17] Kučera, R. – Herman, J. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Masarykova univerzita, Brno, 2011, 3. vydání.

[18] Matiyasevich, Y.: On Hilbert's tenth problem. PIMS Distinguished Chair Lectures, volume 1. Pacific Institute for the Mathematical Sciences, 2000.

[19] Math Prize for Girls [online]. Dostupné na https://mathprize.atfoundation.org/.

[20] Riemel, T.: Dělitelnost v oboru celých čísel na středních školách. Bakalářská práce, Olomouc, 2015.

[21] Riemel, T.: O exponenciálních diofantovských rovnicích. Matematika – Fyzika – Informatika. Časopis pro výuku na základních a středních školách. Ročník XXX (2021), číslo 2 – červen 2021

[22] Riemel, T.: Special exponential Diophantine equations. ICERI Proceedings, ISBN: 978-84-09-45476-1, ISSN: 2340-1095, doi: 10.21125/ iceri. 2022, listopad 2022

[23] Riemel, T.: O jedné diofantovské rovnici. Matematika – Fyzika – Informatika. Časopis pro výuku na základních a středních školách. Ročník XXXII (2023), číslo 3 – září 2023

[24] Riemel, T.: On special exponential Diophantine equations. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Print ISSN 1310–5132, Online ISSN 2367–8275, Volume 29, Number 3, 598–602, srpen 2023.

[25] Riemel, T.: Diofantovské rovnice a jejich soustavy. Diplomová práce, Olomouc, 2017.

[26] Sendov, V. A. – Frenkin, B. R.: Gipotěza Katalana (rusky). Kvant, č. 4, 2007.

[27] Švrček, J.: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. Univerzita Palackého v Olomouci, 2014.

[28] Švrček, J.: Soustavy rovnic a metody jejich řešení. Univerzita Palackého v Olomouci, 2016.

[29] Švrček, J. – Riemel, T.: Polynomicko – exponenciální diofantovské rovnice. Matematika – Fyzika – Informatika. Časopis pro výuku na základních a středních školách. Ročník XXIX (2020), číslo 1 – leden 2020.

[30] Švrček, J. – Hrubý, D.: Využití diskriminantu kvadratické rovnice. Matematika – Fyzika – Informatika. Časopis pro výuku na základních a středních školách. Ročník XXVI (2017), číslo 5 – říjen 2017.

[31] Veselý, F.: O dělitelnosti čísel celých. ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1966.

[32] Vyšín, J.: Neurčité rovnice. Jednota československých matematiků a fysiků, Brána k vědění, svazek 3, 1949.

[33] Žuravljov, B. M. – Samavol, P. I.: Eksponenciaľnyje Diofantovy uravněnija i summa cifr čisla (rusky). Matěmatičeskoje prosvěščenije, serie 3, č. 20, 2016.