

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Inverzní problémy ve fyzikálních modelech



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vypracoval: **Bc. Vojtěch Janek**

Vedoucí diplomové práce: **doc. Jan Tomeček, Ph.D.**

Studijní program: N0114A170004 Učitelství matematiky pro střední školy maior

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy/
učitelství fyziky pro střední školy

Forma studia: Prezenční

Termín odevzdání práce: 2024

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Bc. Vojtěch Janek
Název práce	Inverzní problémy ve fyzikálních modelech
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí práce	doc. Jan Tomeček, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2024
Abstrakt	Tato diplomová práce se zabývá inverzními problémy ve fyzikálních modelech. Věnuje se fyzikálním modelům střely a harmonického oscilátoru, oběma v prostředí s odporovou silou lineární vůči rychlosti pohybu. V těchto modelech řeší řadu inverzních i direktních problémů.
Klíčová slova	inverzní problémy, fyzikální modely, diferenciální rovnice, střela s lineárním tlumením, tlumený harmonický oscilátor
Počet stran	58
Počet příloh	1
Jazyk	český

Bibliographical identification

Author's first name and surname	Bc. Vojtěch Janek
Title	Inverse problems in physical models
Type of thesis	Master
Department	Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics
Supervisor	doc. Jan Tomeček, Ph.D.
The year of presentation	2024
Abstract	This master's thesis focuses on inverse problems in physical models. It focuses on physical models of projectile and harmonic oscillator, both in an environment with resistance force linearly proportional to their velocity. It addresses a series of inverse and direct problems within these models.
Keywords	inverse problems, physical models, differential equations, projectile with linear resistance, damped harmonic oscillator
Number of pages	58
Number of appendices	1
Language	czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Jana Tomečka, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 15. května 2024

.....
Bc. Vojtěch Janek

Obsah

Úvod	7
1 Teorie	8
1.1 Diferenciální rovnice	8
1.2 Inverzní problémy	9
1.3 Fyzikální modely	10
1.4 Další matematické nástroje	11
2 Střela s lineárním odporem	13
2.1 Určení doletu	16
2.1.1 Obecná funkce	16
2.1.2 Numerické řešení pevných bodů funkce obecné funkce	21
2.1.3 Explicitně zadaná funkce dvou proměnných	24
2.1.4 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné	25
2.1.5 Numerické řešení	31
2.2 Určení úhlu	32
2.2.1 Optimální úhel	33
3 Oscilátor	38
3.1 Řešené úlohy	40
3.2 Inverzní problém vycházející z měření	45
3.2.1 Sada dat generovaná funkcí	48
3.2.2 Sada dat s uměle přidanou nepřesností	50
3.2.3 Neznámá sada dat	51
Závěr	55
Literatura	57
Přílohy	58

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému vedoucímu diplomové práce doc. Janu Tomečkovi, Ph.D. za velmi vstřícný přístup, neustálý příval nápadů na zlepšení i za všechny čas, který věnoval mně a mé práci. V neposlední řadě bych pak chtěl poděkovat za neustálou podporu mé rodině, partnerce a všem přátelům.

Úvod

Tato diplomová práce se věnuje inverzním problémům ve fyzikálních modelech. Problematika inverzních problémů je zpracována již v mé bakalářské práci [2], proto jako stručný úvod lze zvolit ji. Další literatura, která se věnuje problematice, je většinou v anglickém jazyce, např. [4] nebo [1]. Právě druhá zmíněná kniha [1] poskytuje volnou inspiraci pro úlohy a problémy zpracované v této práci.

Cílem práce je vytvořit teoretický podklad pro konkrétní reálné situace, tedy pro fyzikální modely, které je popisují. Často se při řešení konkrétních problémů setkáme s diferenciálními rovnicemi a také jinými částmi matematické analýzy. Z toho důvodu je první kapitola věnována zavedení nejen pojmů jako je inverzní problém či fyzikální model, ale též těch nutných k vyřešení konkrétních případů diferenciálních rovnic. Kapitola zároveň zavádí několik základních vět z matematické analýzy, které v práci využijeme.

Další dvě kapitoly se pak věnují již konkrétním problémům. Často je nejprve vyřešen problém direktní a až poté přichází řešení problému inverzního (tyto pojmy jsou vysvětleny v první kapitole). Teoreticky odvozené řešení problému je následně aplikováno v programech v jazyku Python.

Druhá kapitola se věnuje fyzikálnímu modelu střely. Ta se pohybuje prostředím, které na ni působí odporovou silou úměrnou velikosti její rychlosti. Jedná se o problém, který je řešen převážně pomocí studia konkrétních funkcí. Kapitola se snaží o nalezení analytického řešení problémů¹.

Třetí kapitola nám předkládá studium inverzních problémů pro model harmonického oscilátoru, jež opět osciluje ve stejném prostředí jako se pohybovala střela². Zde jsou řešení naopak velmi propletena numerickými metodami, jako je třeba metoda nejmenších čtverců. Právě ze samotné podstaty této kapitoly je nutné určovat přesnost, správnost a výpovědní hodnotu získaných výsledků.

¹S co nejmenší, ideálně žádnou, pomocí numerických metod.

²Odporová síla působící na oscilující těleso je přímo úměrná rychlosti pohybu.

Kapitola 1

Teorie

V této práci bude zapotřebí orientovat se v oblasti diferenciálních rovnic, inverzních problémů a fyzikálních modelech. Tato kapitola slouží jako přehled těchto znalostí. Společně se základními poznatky vysokoškolské matematiky by měla být dostatečným materiálem k pochopení problematiky následující práce.

1.1 Diferenciální rovnice

Nejprve si řekněme, že

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

je *diferenciální rovnice n -tého řádu* v obecném tvaru, kde $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$. Řešením této rovnice je pak $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje (1.1) $\forall x \in J \subseteq \mathbb{R}$, kde J je interval.

My se zaměříme pouze na speciální případ

$$y'' + a_1 y' + a_0 = f(x); \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

což je *nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty*. K ní příslušná *homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty* má pak tvar

$$y'' + a_1 y' + a_0 = 0. \quad (1.3)$$

Obecným řešením nazveme předpis obsahující parametry, po jejichž postupném dosazení dostáváme právě všechna řešení diferenciální rovnice. Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice je rovno součtu obecného řešení \bar{y} příslušné homogenní diferenciální rovnice a libovolného partikulárního řešení¹ \hat{y} této nehomogenní diferenciální rovnice, symbolicky zapsáno

$$y = \bar{y} + \hat{y}.$$

¹Jedná se o jedno konkrétní řešení diferenciální rovnice.

Zavedme pro účely nalezení obecného řešení rovnice (1.3) její *charakteristickou rovnici* jako

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Spočteme kořeny $\lambda_{1,2}$ této kvadratické rovnice a z nich určíme obecné řešení rovnice (1.3). Mohou nastat tři případy:

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak má obecné řešení tvar

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 = \lambda_2$ (pro jednoduchost píšeme pouze λ), pak má obecné řešení tvar

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$; $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, kde $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, pak má obecné řešení tvar

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro nalezení partikulárního řešení rovnice (1.2) se nabízí hned několik postupů. Je možné je nalézt metodou neurčitých koeficientů, variací konstant, nebo ho jednoduše uhodnout. My budeme partikulární řešení v této práci nuceni hledat pouze jednou a využijeme k tomu právě metodu neurčitých koeficientů. Bude však blíže popsáno u konkrétního problému. V případě zájmu proniknout hlouběji do problematiky viz např. [3].

1.2 Inverzní problémy

Direktním problémem je problém, kdy známe vstupní hodnoty nějakého matematického modelu¹, známe také tento matematický model a chceme zjistit výstupní hodnoty. Inverzní problém je opačným problémem k problému direktnímu.

Ukažme příklad, se kterým se setkáme v této práci. Mějme kanón, který vystřelí střelu, budeme znát hmotnost střely, její rychlost atp. Budeme také vědět, jakým prostředím se pohybuje a tedy jaká závislost nám její pohyb popisuje. Direktní problém pak spočívá ve spočtení vzdálenosti, do níž střela dolétne.

Inverzní problémy mohou být dva. Jeden, tzv. *kauzální inverzní problém* se snaží determinovat vstupní parametry ze znalosti modelu a výstupních hodnot. Druhý, *identifikační inverzní problém* se pak z výstupních hodnot a vstupních parametrů snaží

¹Např. popisující fyzikální realitu.

určit matematický model, jímž se ze vstupních přešlo k hodnotám výstupním. Ještě by bylo dobré zmínit, že často je nutné řešit oba tyto problémy zároveň, takový problém nazýváme *inverzním problémem smíšeným*.

K obecné teorii inverzních problémů poskytuje česká literatura jen velmi málo informací, spíše v ní lze nalézt řešení konkrétních inverzních problémů. Proto pro zájemce o obecnou teorii je vhodná kniha [4], nebo úvodní kapitoly knihy [1], ze které v této práci často budeme vycházet. Zároveň zpracování této teorie inverzních problémů lze nalézt v úvodní kapitole výše zmíněné bakalářské práce [2], kde jsou vždy ke konkrétním typům i praktické příklady.

1.3 Fyzikální modely

Fyzikální model je způsob popsání reality. Záleží však, co se snažíme popsat a jak přesný daný popis musí být.

Hezká představa je pohyb, který jsme my klasicky schopni popsat pomocí Newtonových pohybových zákonů a v běžných podmínkách je to pro nás naprosto dostatečné. Pokud se však rychlost pohybujících se objektů začne přibližovat rychlosti světla, pak je fyzikální model popsáný těmito zákony čím dál tím víc nedostatečný. Je proto třeba sáhnout po lepším modelu, nejčastěji po speciální teorii relativity.

Častý termín, který popisuje přesnost fyzikálního modelu, je takzvané *přiblížení*. Vezměme si opět příklad střely. V prvním přiblížení můžeme střelu pohybující se vzduchem popisovat fyzikálním modelem bez odporu prostředí. Ve druhém přiblížení pak vezmeme odpor úměrný rychlosti, ve třetím úměrný kvadrátu rychlosti (tam se však již projevují i další jevy, jako víry atd.) a jsou i teorie o závislosti na v^3 , kdy by se jednalo o čtvrté přiblížení.

1.4 Další matematické nástroje

V podkapitole 2.1.4 si šikovně definujeme pomocnou funkci a následně budeme chtít ukázat spojitost a derivaci funkce $r = D(\theta)$ na určitém intervalu, jenž je zadána implicitně, více však již samotná věta.

Věta 1.1 Věta o implicitní funkci [3, kap. 9.9, věta 9.18]:

Nechť $F(x,y)$ je reálná funkce dvou proměnných x a y , která splňuje:

1. $\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : F(x_0, y_0) = 0$.
2. F má v $U(x_0, y_0)$ spojité parciální derivace prvního řádu.
3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak rovnice $F(x,y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci jedné proměnné $y = f(x)$, také má funkce f derivaci prvního řádu na $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ pro jisté $\delta > 0$, která se spočte jako

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Následující věta a důkaz jdou ruku v ruce a budeme je často používat v celé kapitole 2. Mnohokrát budeme využívat vhodně definovaných funkcí, které budou na určitém intervalu nabývat jak kladných, tak záporných hodnot a na základě níže uvedené věty budeme schopni nacházet pevné body určitých funkcí. Co je pevný bod nám říká právě definice níže.

Definice 1.2 Nechť f je reálná funkce jedné proměnné definovaná na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Číslo $p \in I$ nazveme **pevným bodem** funkce f , jestliže $f(p) = p$.

Věta 1.3 Bolzano-Cauchyho [7, kap. 6.3, věta 6.3.3]: Je-li funkce f spojitá na $[a; b]$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje bod $\xi \in [a; b]$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Ukažme si užití předchozí věty na příkladu. Mějme funkci v , která je funkcí proměnné x . Definujme si funkci

$$w(x) := v(x) - x.$$

Pokud $w(a) > 0$ a $w(b) < 0$, pak existuje $\xi \in (a; b)$ tak, že $w(\xi) = 0$. Toto ξ je pak nutně pevným bodem funkce v .

V důkazu lemmatu 2.14 využijeme následující větu.

Věta 1.4 Bolzano-Weierstrassova [7, kap. 2.3, věta 2.3.4]: Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Jako poslední matematický nástroj si v této podkapitole zavedme Heineho větu (občas také Heineho věta o spojitosti). Ta nám charakterizuje limitu funkce pomocí posloupností. Lze ji chápat jako pojítko mezi světem posloupností a světem funkcí. Z její podstaty se jedná o jednu z velmi silných vět matematické analýzy. My ji konkrétně využijeme v podkapitole 2.1.2 a 2.1.4.

Věta 1.5 Heineho [6, kap. 2.5, věta 2.46]: Mějme funkci f , f je spojitá v nějakém bodě $a \in D(f)$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $D(f)$ pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Kapitola 2

Střela s lineárním odporem

V této kapitole se budeme věnovat fyzikálnímu modelu střely, jakožto hmotného bodu. Ta se bude pohybovat prostředím o odporu přímo úměrném rychlosti střely. Jedná se o první přiblížení reálného odporu vzduchu.

Vyjděme z 2. Newtonova zákona napsaném ve tvaru

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y); \quad \mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}), \quad (2.1)$$

kde \mathbf{v} je rychlost střely, m její hmotnost, \mathbf{g} tíhové zrychlení a \mathbf{F} odporová síla. Vidíme, že rovnice je zapsána vektorově, proto si ji rozdělíme do dvou rovnic pomocí kartézské soustavy souřadné, kde (x,y) budou představovat aktuální souřadnice střely. Rovnice (2.1) pak nabude tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\frac{F_x(t)}{m}, \\ \ddot{y}(t) &= -g - \frac{F_y(t)}{m}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Náš zájem se však nyní bude upínat primárně na odporovou sílu. Ta je přímo úměrná rychlosti střely, proto $\mathbf{F} = k\mathbf{v}$; $k \in \mathbb{R}^+$ a tedy předchozí soustava rovnic nabývá tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\dot{x}(t) &= 0, \\ \ddot{y}(t) + \frac{k}{m}\dot{y}(t) &= -g. \end{aligned}$$

Střela je vystřelena z počátku, jímž je bod $(0,0)$, tzn.

$$x(0) = 0,$$

$$y(0) = 0.$$

Další dvě počáteční podmínky vyplývají ze skutečnosti, že v čase $t_0 = 0$ je střele udělena rychlost o velikosti v pod úhlem θ z intervalu $[0; \frac{\pi}{2}]$, tudíž

$$\dot{x}(0) = v \cos \theta$$

$$\dot{y}(0) = v \sin \theta.$$

Díky tomu, že v soustavě (2.2) je v první rovnici neznámou pouze funkce x a ve druhé pouze funkce y , lze obě rovnice brát zvlášť a nemluvit tak o soustavě rovnic (2.2), ale o dvou rovnicích. Každá tato rovnice společně s dvěma příslušnými počátečními podmínkami tvoří samostatnou počáteční úlohu

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\dot{x}(t) = 0; \quad \dot{x}(0) = v \cos \theta; \quad x(0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}\dot{y}(t) = -g; \quad \dot{y}(0) = v \sin \theta; \quad y(0) = 0. \quad (2.4)$$

Charakteristická rovnice diferenciální rovnice v počáteční úloze (2.3) i (2.4) má tvar

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

a kořeny

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -\frac{k}{m}.$$

Obecným řešením diferenciální rovnice z (2.3) je tedy

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Na základě počátečních podmínek dostáváme

$$\left. \begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2, \\ v \cos \theta = -\frac{k}{m}C_2, \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{mv \cos \theta}{k}; \quad C_2 = -\frac{mv \cos \theta}{k}.$$

Řešením první počáteční úlohy je proto funkce

$$x(t) = \frac{mv \cos \theta}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right). \quad (2.5)$$

Nyní se podíváme na druhou počáteční úlohu. Z (2.4) vidíme, že se jedná o nehomogenní lineární diferenciální rovnici. Najdeme obecné řešení její příslušné homogenní diferenciální rovnice. Postup je identický s předchozí úlohou, dostáváme proto obecné řešení

$$\bar{y}(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Abychom však měli řešení nehomogenní rovnice, je třeba k obecnému řešení homogenní rovnice přičíst partikulární řešení rovnice nehomogenní. Toto partikulární

řešení nalezneme například metodou neurčitých koeficientů (budeme jej hledat ve tvaru $y_p(t) = At \Rightarrow \dot{y}_p(t) = A \Rightarrow \ddot{y}_p(t) = 0$, který dosadíme do nehomogenní rovnice):

$$\begin{aligned}\frac{k}{m}A &= -g, \\ A &= -\frac{m}{k}g.\end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme partikulární řešení

$$y_p(t) = -\frac{m}{k}gt,$$

a obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice pak nabývá tvaru

$$y(t) = \bar{y}(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní využijme naše dvě počáteční podmínky, postup je analogický jako u předchozí počáteční úlohy. Docházíme k závěru, že

$$C_1 = \frac{m}{k} \left(v \sin \theta + \frac{mg}{k} \right); \quad C_2 = -\frac{m}{k} \left(v \sin \theta + \frac{mg}{k} \right).$$

Řešení počáteční úlohy má tudíž tvar

$$y(t) = \frac{m}{k} \left[\left(v \sin \theta + \frac{mg}{k} \right) - \left(v \sin \theta + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - gt \right]. \quad (2.6)$$

Upravme vztah (2.5) na

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{kx(t)}{mv \cos \theta} \right); \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

a dosadíme jej za t do vztahu (2.6), který po úpravě nabude tvaru

$$y(t) = \left(v \sin \theta + \frac{mg}{k} \right) \frac{x(t)}{v \cos \theta} + \frac{m^2}{k^2} g \ln \left(1 - \frac{kx(t)}{mv \cos \theta} \right).$$

Pokud se budeme chtít zabývat vzdáleností doletu, bude pro souřadnici y jistě platit $y = 0$. Označíme-li dolet jako D , bude se jednat o implicitně zadanou funkci proměnné θ . tato funkce tedy splňuje vztah

$$0 = \frac{k^2}{m^2 g} \left(\operatorname{tg} \theta + \frac{mg}{kv} \sec \theta \right) D(\theta) + \ln \left(1 - \frac{kD(\theta)}{mv \cos \theta} \right),$$

který upravíme do tvaru

$$D(\theta) = \frac{mv \cos \theta}{k} \left(1 - e^{-A(\theta)D(\theta)} \right); \quad A(\theta) = \frac{k}{mv} \sec \theta + \frac{k^2}{m^2 g} \operatorname{tg} \theta.$$

Zavedme si ještě označení

$$a = \frac{k}{mv}, b = \frac{k^2}{m^2g}.$$

Tím získáváme finální tvar vztahu pro dolet

$$D(\theta) = \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}); A(\theta) = a \sec \theta + b \operatorname{tg} \theta; \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.7)$$

Jak vidíme, D není dáno explicitním předpisem, ale implicitně. Je tudíž dosti problematické určit jeho hodnotu pro konkrétní θ . Budeme se snažit proto nalézt některý numerický postup pro výpočet za pomoci počítače. Nejprve ale dokážeme, že tato funkce D je definována na intervalu $[0; \frac{\pi}{2}]$ a ukážeme některé důležité vlastnosti.

2.1 Určení doletu

V této podkapitole se zaměříme na řešení direktního problému střely. A to proto, že bez něj nemá ani smysl se bavit o problému inverzním. Ze zadaných známých počátečních parametrů střely se budeme snažit určit, jak daleko tato střela doletí. Budeme usilovat o exaktní vyřešení tohoto problému a tím si nachystáme prostor pro studium inverzního problému. Nejprve si vezmeme jistou pomocnou funkci, již dobře prozkoumáme, a potom se budeme snažit ověřit, že dokázaná zjištění je možno aplikovat i pro funkci z našeho problému. Právě tyto funkce bude následně možno využít k výpočtu vzdálenosti doletu střely, což bude řešením našeho direktního problému. Celé toto snažení poté zakomponujeme do programu, který bude aplikovaně využívat dokázaných poznatků.

2.1.1 Obecná funkce

Nejprve je potřeba prozkoumat direktní problém. K tomu účelu zkoumejme některé vlastnosti funkce

$$f(x) = c(1 - e^{-dx}); x \in \mathbb{R}_0^+, \quad (2.8)$$

kde c, d jsou kladnými konstantami splňující $cd > 1$.

Věta 2.1 *Existuje jediný kladný pevný bod funkce f zadané předpisem (2.8).*

Důkaz: Všimněme si, že $x = 0$ je pevným bodem (viz Definicí 1.2) funkce f , protože

$$f(0) = c(1 - e^{-d \cdot 0}) = 0.$$

Obecně však pevných bodů může být i více, prozkoumejme jen kladné pevné body.

Zaveďme si proto pomocnou funkci

$$g(x) := f(x) - x; \quad x \geq 0.$$

Pokud najdeme takové $p > 0$, aby $g(p) = 0$, pak je p kladným pevným bodem f .

Potřebovali bychom, aby funkce g nabývala hodnoty 0. Toho dosáhneme třeba tak, že najdeme takové $s, z > 0$, že $g(s) > 0$ a $g(z) < 0$. Přepsáno pomocí funkce f tedy budeme chtít dokázat

$$f(z) < z,$$

$$f(s) > s.$$

První dokážeme pro nám již známou konstantu c (která je jistě kladná a splňuje tedy požadavky kladené na z) takto:

$$f(c) < c$$

$$c(1 - e^{-dc}) < c$$

$$1 - e^{-dc} < 1$$

$$-e^{-dc} < 0.$$

Druhý vztah pro $s \rightarrow 0^+$ dokážeme následovně:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = cd \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-ds} - 1}{-ds} = cd > 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall s \in (0; \delta) : f(s) > 0.$$

Nyní můžeme využít Bolzano-Cauchyho větu, (Věta 1.3). Máme totiž funkci g , která je spojitá na intervalu $[s; c]$ (s volíme libovolně blízké nule, tudíž pro jakékoli pevné c musí platit $s < c$) a zároveň $g(s) \cdot g(c) < 0$. Dle této věty pak existuje bod $\xi \in (s; c)$ tak, že $g(\xi) = 0$. Zjistili jsme tedy, že existuje takové ξ , které je pevným bodem funkce f .

Bylo by také velmi žádoucí, aby tento pevný bod byl pouze jediným kladným pevným bodem. Zkoumejme proto vlastnosti funkce g .

Nejprve si uvědomme skutečnost, že

$$g''(x) = f''(x), \quad f''(x) = -cd^2 e^{-dx} < 0.$$

Z toho vidíme $g''(x) < 0$ a proto je g' klesající funkcí. Zároveň

$$g(0) = 0$$

a pro libovolný kladný pevný bod ξ funkce f platí

$$g(\xi) = 0.$$

Z toho, že $g(0) = 0$, $g(\xi) = 0$, $g''(x) < 0$ dostáváme, že

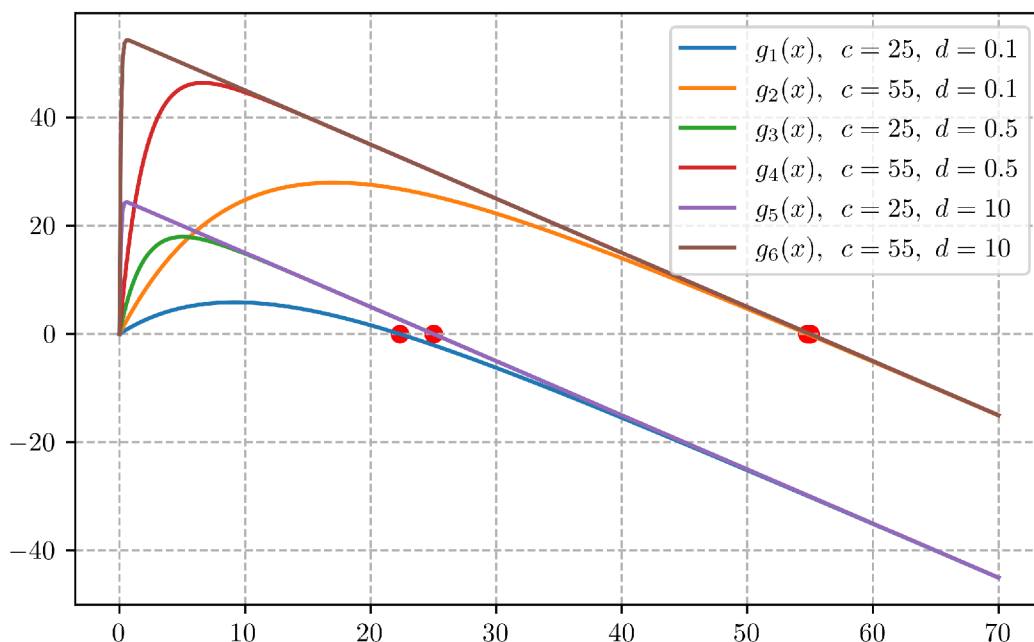
$$g(x) > 0; x \in (0, \xi). \quad (2.9)$$

To ovšem znamená, že na intervalu $(0, \xi)$ nabývá funkce g svého maxima (označme jej písmenem m), tedy bodu, v němž $g'(m) = 0$. To ovšem v kombinaci s monotónností funkce g' znamená, že $g'(x) < 0$ pro $x \in (m, \infty)$. Jelikož $m < \xi$, tak $\xi \in (m, \infty)$, tudíž je funkce g na intervalu (m, ∞) klesající, a tedy $\exists! \xi > 0 : g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \xi$.

□

Označení 2.2 *Jediný kladný pevný bod funkce f dané předpisem (2.8) budeme označovat v celém dokumentu písmenem ξ .*

Pevný bod ξ funkce f je nulovým bodem g . Graf funkce g a jejího nulového bodu pro různé hodnoty parametrů c, d je vykreslen v Obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Graf funkce g pro různé hodnoty kladných parametrů c, d splňujících $cd > 1$ a jejího kladného nulového bodu (červená tečka)

Nyní, když jsme vcelku detailně prozkoumali pevné body funkce f , definované v (2.8), je třeba nalézt (konkrétně onen jediný kladný pevný bod ξ). Tento problém by bylo vhodné vyřešit za pomoci počítače metodou iterace pevného bodu (jiný název je prostá iterační metoda). Nezapomeňme však, že naším cílem je nalézt funkční hodnotu funkce D a tedy i řešení rovnice (2.7) s neznámou $D(\theta)$.

Dokažme si několik pomocných lemmat, která nám následně budou užitečná.

Lemma 2.3 *Nechť f je funkce definovaná v (2.8), pak $\forall x > 0$:*

$$\begin{aligned} f(x) > x &\Rightarrow x < \xi, \\ f(x) < x &\Rightarrow x > \xi. \end{aligned}$$

Důkaz: Již dokázáno v důkazu Věty 2.1. Konkrétně z jednoznačnosti ξ a ze skutečnosti $g(x) > 0$ pro $x \in (0; \xi)$ plyne první nerovnost a z $g(x) < 0$ pro $x \in (\xi; \infty)$ plyne druhá nerovnost.

□

Lemma 2.4 *Nechť f je funkce definovaná v (2.8), $c > 0$ a $cd > 1$. Pak platí nerovnosti*

$$f\left(\frac{cd-1}{d}\right) > \frac{cd-1}{d}$$

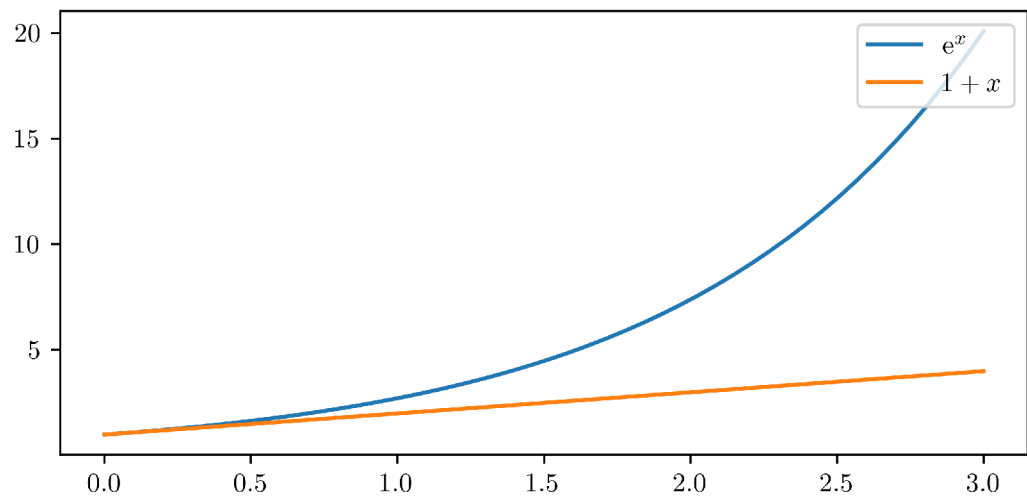
a

$$d(c - \xi) < 1.$$

Důkaz: Vyjděme z nerovnosti

$$e^x > 1 + x; x > 0,$$

jejíž platnost je známá (vyplývá z průběhu funkce, sice že funkce e^x je konkávní pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $1 + x$ je její tečnou v bodě $x = 0$, viz Obrázek 2.2 a faktu $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$).



Obrázek 2.2: Průběhy funkcí e^x a $1 + x$ pro $x \in [0; 3]$

My víme, že $cd - 1 > 0$, můžeme tedy dosadit do předchozího vztahu a dostaneme

$$\begin{aligned} e^{cd-1} &> cd \\ \frac{1}{cd} - 1 &> e^{1-cd} - 1 \\ 1 - \frac{1}{cd} &< 1 - e^{1-cd} \\ \frac{cd-1}{cd} &< 1 - e^{d\frac{1-cd}{d}} \\ \frac{cd-1}{cd} &< 1 - e^{-d\frac{cd-1}{d}}. \end{aligned}$$

Protože $c > 0$, můžeme předchozí nerovnost upravit do tvaru

$$\frac{cd-1}{d} < c \left(1 - e^{-d\frac{cd-1}{d}} \right).$$

Tím jsme dokázali první tvrzení a využitím Lemmatu 2.3 získáme

$$\begin{aligned} \frac{cd-1}{d} &> \xi, \\ d \cdot (c - \xi) &< 1. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5 *Pro ξ platí*

$$0 < f'(\xi) < 1.$$

Důkaz: Derivace f má tvar $f'(x) = cde^{-dx}$, dosadíme tedy ξ a vidíme, že

$$f'(\xi) = cde^{-d\xi} > 0.$$

Upravme $f'(\xi)$ následovaně:

$$f'(\xi) = cde^{-d\xi} - cd + cd = -d \cdot [c(1 - e^{-d\xi})] + cd = -df(\xi) + cd$$

a protože ξ je pevným bodem f , můžeme psát

$$f'(\xi) = -d\xi + cd = d \cdot (c - \xi).$$

Podle Lemmatu 2.4 pak

$$f'(\xi) = d \cdot (c - \xi) < 1.$$

Dohromady tedy

$$0 < f'(\xi) = cde^{-d\xi} = d \cdot (c - \xi) < 1.$$

□

2.1.2 Numerické řešení pevných bodů funkce obecné funkce

Podívejme se, jak spočítat pevné body funkce f .

Definice 2.6 *Nechť f je funkce definovaná předpisem (2.8), pak posloupnost iterací $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ pro každé $x_0 > 0$ definujeme vztahem*

$$x_{n+1} = f(x_n); n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.10)$$

Abychom byli schopni dokázat, že tato posloupnost iterací konverguje k pevnému bodu ξ tak, jak bychom chtěli, dokažme si nejdříve dvě lemmata.

Lemma 2.7 *Nechť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost definovaná v Definici 2.6. Jestliže $x_0 \in (0; \xi)$, pak*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n < x_{n+1} < \xi.$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

- (i) Dokažme nejprve $x_0 < x_1$. Vezměme si funkci g definovanou v důkazu Věty 2.1. Dosadíme-li x_0 , pak

$$g(x_0) = f(x_0) - x_0 = x_1 - x_0.$$

Z (2.9) přímo vyplývá, že

$$g(x_0) > 0,$$

$$x_1 - x_0 > 0,$$

$$x_1 > x_0.$$

Nyní je třeba ukázat $x_1 < \xi$, tzn. $f(x_0) - \xi < 0$. Postupně upravujeme

$$f(x_0) - \xi = f(x_0) - f(\xi) = c(1 - e^{-dx_0}) - c(1 - e^{-d\xi}) = c(e^{-d\xi} - e^{-dx_0}).$$

Víme, že $c > 0$ a také na základě toho, že $x_0 < \xi$, tak $e^{-d\xi} - e^{-dx_0} < 0$, což nutně znamená $c(e^{-d\xi} - e^{-dx_0}) < 0$, čili $x_1 < \xi$.

Z obou dokázaných tvrzení dohromady dostáváme $x_0 < x_1 < \xi$.

- (ii) Předpokládejme pravdivost indukčního předpokladu $x_k < x_{k+1} < \xi$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Dokažme, že $x_{k+1} < x_{k+2} < \xi$. Budeme postupovat analogicky jako u předchozího bodu (i).

Z indukčního předpokladu víme, že $x_{k+1} < \xi$ a z vlastností funkce g na $(0; \xi)$

$$g(x_{k+1}) > 0$$

$$f(x_{k+1}) > x_{k+1}.$$

Tedy $x_{k+2} > x_{k+1}$.

Nyní chceme dokázat nerovnost $x_{k+2} < \xi$. Studujme rozdíl $x_{k+2} - \xi$:

$$x_{k+2} - \xi = f(x_{k+1}) - f(\xi) = c(-e^{-dx_{k+1}} + e^{-d\xi}).$$

Ze stejných myšlenek jako v (i) dostáváme $e^{-d\xi} - e^{-dx_{k+1}} < 0$ a tedy $x_{k+2} < \xi$.

Dokázali jsme $x_{k+1} < x_{k+2} < \xi$.

(iii) Současnou platností bodů (i) a (ii) dokazujeme původní tvrzení. □

Lemma 2.8 *Nechť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost definovaná vztahem (2.10). Jestliže $x_0 \in (\xi; \infty)$, pak*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \xi < x_{n+1} < x_n.$$

Důkaz: Je veden analogicky jako u předchozího lemmatu. Naznačme jen hlavní myšlenku.

Bylo již dokázáno $\exists! \xi \in \mathbb{R}^+ : g(\xi) = 0, g(z) < 0$ pro $z > \xi$, tedy

$$g(x_0) < 0$$

$$x_1 < x_0.$$

Ukážeme $\xi < x_1$. Víme že $c > 0$ a $x_0 > \xi$, odtud $e^{-d\xi} - e^{-dx_0} > 0$. Proto

$$c(e^{-d\xi} - e^{-dx_0}) > 0$$

$$x_1 > \xi.$$

Podobně jako v důkazu předchozího lemmatu dokážeme matematickou indukcí. □

Věta 2.9 *Posloupnost iterací definovaná vztahem (2.10) konverguje ke ξ .*

Důkaz: Mohou nastat dvě situace a) $0 < x_0 < \xi$, nebo b) $\xi < x_0$.

a) Z Lemmatu 2.7 vyplývá, že $x_n < x_{n+1}$, což znamená, že posloupnost iterací je rostoucí. Zároveň z onoho lemmatu je zřejmé také posloupností shora omezenou.

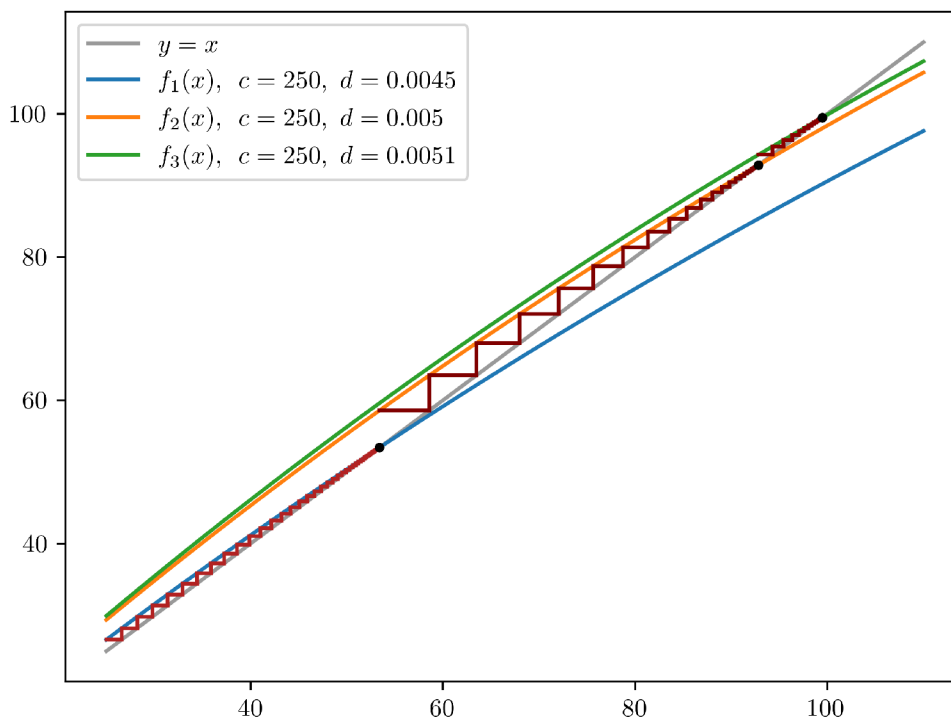
To ovšem znamená, že se jedná o konvergentní posloupnost. Chtěli bychom, aby posloupnost iterací konvergovala k ξ . Dokažme to sporem. Předpokládejme, že existuje nějaké $\chi \in (0, \xi)$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \chi$. Víme, že f je spojitá na intervalu $(0, \xi)$ a tudíž na základě Heineho věty (Věta 1.5) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\chi)$. Na základě toho, jak je iterace definována, můžeme psát (jde o druhou rovnost)

$$\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\chi).$$

Odtud χ je kladným pevným bodem f , což je ovšem spor s $\chi \in (0, \xi)$ a jednoznačností kladného pevného bodu ξ . To tedy znamená, že $\chi = \xi$ a tím jsme dokázali konvergenci iterace k ξ .

- b) Důkaz druhého tvrzení by probíhal analogicky, vycházelo by se z Lemmatu 2.8, odkud dostáváme klesající zdola omezenou posloupnost, která konverguje k ξ . \square

Vidíme, že posloupnost iterací, definovanou v Definicí 2.6, lze velmi dobře využít pro numerický výpočet ξ pomocí počítače. Napíšeme program `Iterace`, který využije tuto metodu k výpočtu kladného pevného bodu ξ funkce f při libovolné volbě kladných parametrů c, d (samozřejmě splňujících $cd > 1$) a taktéž ji pro lepší pochopení graficky znázorní (kód přiložen v příloze). Jeho použití uvádíme v Obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Posloupnost iterací funkce f pro různé hodnoty parametrů c, d

2.1.3 Explicitně zadaná funkce dvou proměnných

Bavme se o řešení rovnice (2.7). Uvažujme funkci F , definovanou předpisem

$$F(\theta, r) = \frac{\cos \theta}{a}(1 - e^{-A(\theta)r}); \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad r > 0, \quad (2.11)$$

kde $A(\theta)$ je definována stejně jako v (2.7), $a = \frac{k}{mv}$ a $b = \frac{k^2}{m^2g}$.

Pro dané $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ definujme funkci

$$f(r) := F(\theta, r), \quad r > 0.$$

Uvědomme si, že při označení $c = \frac{\cos \theta}{a}$, $d = A(\theta) = a \sec \theta + b \operatorname{tg} \theta$; $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí

$$c > 0,$$

$$d > 0,$$

$$cd = 1 + \frac{b}{a} \sin \theta > 1; \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

a tedy funkce $f(r)$ je funkcí $f(x)$ z kapitoly 2.1.1, která je definována předpisem (2.8). Můžeme proto pro funkci F využívat poznatky z kapitoly 2.1.1 (při považování θ za parametr z intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$).

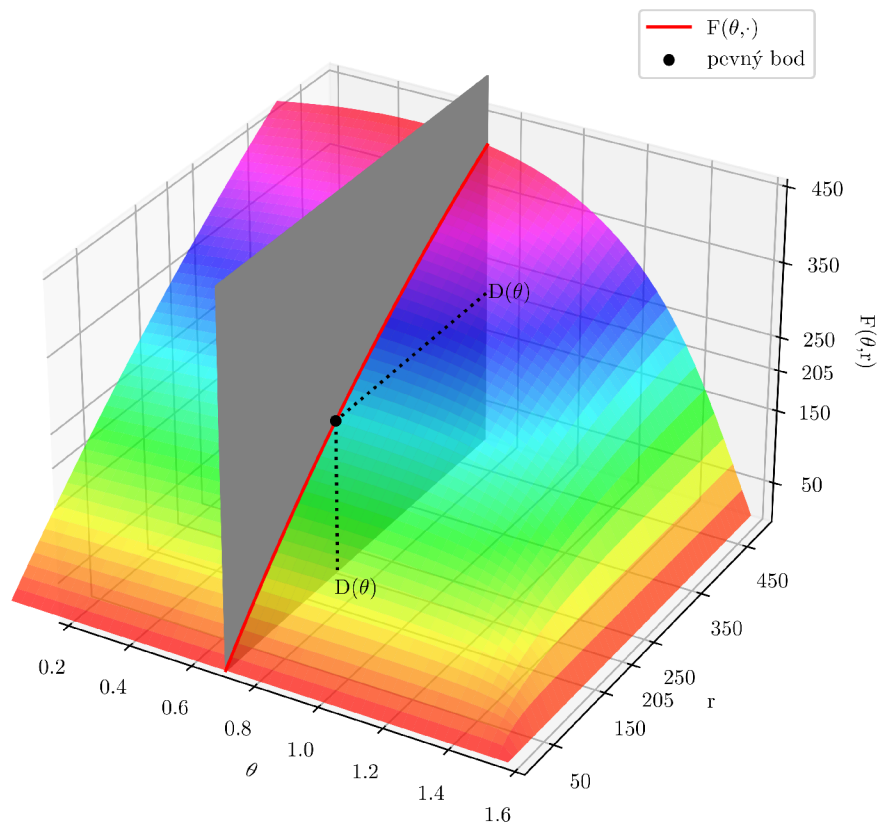
Z Věty 2.1 plyne, že $\forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2}) \exists! \bar{r} > 0 : \bar{r} = f(\bar{r}) = F(\theta, \bar{r})$.

Označení 2.10 Číslo \bar{r} zavedené výše je závislé na θ , jedná se tedy o funkci proměnné θ definovanou na intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$, označme ji $D(\theta)$. Tato funkce je tedy definována implicitně předpisem

$$D(\theta) = F(\theta, D(\theta)). \quad (2.12)$$

Co z tohoto vztahu vyplývá? Na Obrázku 2.4 je naznačen průnik F a roviny $\theta = \text{konst.}$, kdy se vlastně jedná o funkci proměnné r (označme si ji $F(\theta, \cdot)$). Pokud na θ nahlédneme jako na parametr, tak pro každé jedno θ je $D(\theta)$ pevným bodem funkce $F(\theta, \cdot)$ (pro bližší představu viz Obrázek 2.4), tedy dostáváme již známý vztah (2.12). Můžeme proto využít lemmatu 2.5 a psát $f'(D(\theta)) < 1$ a tedy

$$F_r(\theta, D(\theta)) < 1. \quad (2.13)$$



Obrázek 2.4: Znázornění pevného bodu funkce $F(\theta, \cdot)$ pro $\theta = 0,7$

2.1.4 Implicitně zadaná funkce jedné proměnné

V předchozí sekci 2.1.3 jsme dokázali existenci funkce D na intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$. Nyní bychom chtěli využít Větu o implicitní funkci, viz Větu 1.1. Pokud by se nám ji povedlo ověřit pro vhodně zvolenou funkci, pak bychom z ní mohli dostat spojitost i diferencovatelnost funkce $D(\theta)$. K tomu potřebujeme funkci, která v některém bodě nabývá nulové hodnoty. Bude se jednat o analogický přístup jako u funkce g , definované v důkazu Věty 2.1. Zdefinujme si tedy pomocnou funkci

$$G(\theta, r) := r - F(\theta, r), \quad (2.14)$$

kde F je definována vztahem (2.11).

Prozkoumejme nejprve blíže parciální derivace funkce F . Pro parciální derivace

podle θ a r platí

$$F_\theta(\theta, r) = -\frac{\sin \theta}{a}(1 - e^{-A(\theta)r}) + rA'(\theta)\frac{\cos \theta}{a}e^{-A(\theta)r}, \quad (2.15)$$

$$F_r(\theta, r) = A(\theta)\frac{\cos \theta}{a}e^{-A(\theta)r},$$

kde $A'(\theta) = a \operatorname{tg} \theta \sec \theta + b \sec^2 \theta$.

Chtěli bychom, aby obě tyto funkce byly spojité. Prozkoumejme tedy potenciální body nespojitosti. Jediný takový bod by mohl být $[r, \hat{\theta}]$, kde $\cos \hat{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, což nemůže nastat, protože $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Takže obě parciální derivace jsou spojité pro $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ a $r > 0$.

Věta 2.11 *Funkce $D(\theta)$ zadaná implicitně vztahem (2.12) je na intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$ spojitá a má na něm první derivaci.*

Důkaz: Ověřujme předpoklady Věty o implicitní funkci pro funkci G .

1. Dosadíme $r = D(\theta)$ a ze vztahu (2.12) pak $G(\theta, D(\theta)) = D(\theta) - F(\theta, D(\theta)) = 0$; $\forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2})$.
2. $G_\theta(\theta, r) = F_\theta(\theta, r) \Rightarrow G_\theta$ je spojitá pro $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ a $r > 0$.
 $G_r(\theta, r) = 1 - F_r(\theta, r) \Rightarrow G_r$ je spojitá pro $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ a $r > 0$.
3. Na základě skutečnosti $F_r(\theta, D(\theta)) < 1$ platí $G_r(\theta, D(\theta)) < 1 - 1 = 0$ a tedy $G_r(\theta, D(\theta)) \neq 0$; $\forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Pro funkci G jsme ověřili podmínky Věty o implicitní funkci. Na základě této věty dostáváme dokazované tvrzení. □

Chtěli bychom však, aby D byla spojitá i v bodech 0 zprava a $\frac{\pi}{2}$ zleva. Věnujme se nejprve bodu 0.

Lemma 2.12 $D(0) = 0$

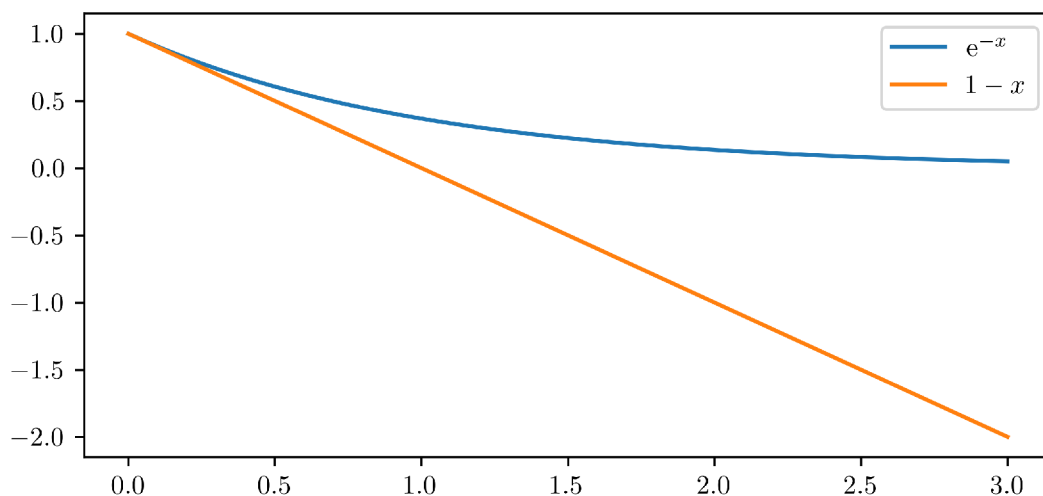
Důkaz: Z definice funkce F a G vidíme, že můžeme psát

$$G(0, r) = r - F(0, r) = r - \frac{1}{a}(1 - e^{-ar}),$$

řešíme-li rovnici $G(0, r) = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{a}(1 - e^{-ar}) &= 0 \\ 1 - ar &= e^{-ar}. \end{aligned}$$

Vydeme z nerovnosti $1 - x < e^{-x}$, která přechází v rovnost pro $x \rightarrow 0^+$ (dokázat by se to dalo analogicky jako na začátku důkazu Lemmatu 2.4 – viz Obrázek 2.5).



Obrázek 2.5: Průběhy funkcí e^{-x} a $1 - x$ pro $x \in [0; 3]$

Můžeme proto psát

$$-ar = 0$$

$$r = 0.$$

□

Nyní stačí ukázat, že $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0$. K tomu nám pomůže následující lemma.

Lemma 2.13 $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) : 0 < D(\theta) \leq \frac{1}{a}$

Důkaz: Nechť $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $r > \frac{1}{a}$. Pak $A(\theta) > 0$, tudíž $e^{-A(\theta)r} \in (0, 1)$. Provedme následující sérii dedukcí:

$$1 - e^{-A(\theta)r} \in (0, 1)$$

$$\cos \theta (1 - e^{-A(\theta)r}) \in (0, 1)$$

$$\frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}) \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$$

$$-\frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}) \in \left(-\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$-\frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}) > -\frac{1}{a}$$

$$r - \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}) > r - \frac{1}{a}$$

a tedy

$$G(\theta, r) > r - \frac{1}{a} > 0.$$

Odvodili jsme si tedy, že $\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \forall r > \frac{1}{a} : G(\theta, r) > 0$. Protože $G(\theta, D(\theta)) = 0 \forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2})$, pak nutně $D(\theta) \leq \frac{1}{a}; \forall \theta \in (0; \frac{\pi}{2})$. \square

Lemma 2.14 *Platí*

a) $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0,$

b) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} D(\theta) = 0.$

Důkaz:

a) Povedeme jej sporem. Předpokládejme proto, že

$$\neg \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \theta \in (0, \delta) : |D(\theta) - 0| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \theta \in (0, \delta) : D(\theta) \geq \varepsilon.$$

Vezměme $\varepsilon > 0$ z posledního výroku. Pak si lze zvolit libovolnou posloupnost hodnot $\delta > 0$, která splňuje výše uvedenou podmínku, třeba takto $\delta_1 = \frac{1}{1}; \delta_2 = \frac{1}{2}; \delta_3 = \frac{1}{3}; \dots$ Odtud dostáváme $\theta_1 \in (0, \delta_1); \theta_2 \in (0, \delta_2); \theta_3 \in (0, \delta_3); \dots$ tak, že

$$D(\theta_1) \geq \varepsilon; D(\theta_2) \geq \varepsilon; D(\theta_3) \geq \varepsilon.$$

Následně $\exists \{\theta_n\}_{n=1}^{+\infty}, \theta_n \in (0, \frac{\pi}{2}), \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0 : D(\theta_n) \geq \varepsilon > 0$.

Z Lemmatu 2.13 plyne, že $D(\theta_n) \in [\varepsilon, \frac{1}{a}] \forall n \in \mathbb{N}$. Víme, že posloupnost $\{\theta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je omezená, takže je možné z ní podle Bolzano-Weierstrassovy věty (Věta 1.4) vybrat konvergentní podposloupnost $\{\theta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ a můžeme psát $\{D(\theta_k)\}_{k=1}^{+\infty} \rightarrow D_0 \in [\varepsilon, \frac{1}{a}]$.

Pak

$$\{(\theta_k, D(\theta_k))\}_{k=1}^{+\infty} \rightarrow (0, D_0).$$

Na základě spojitosti G pro $r > 0; \theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ je možné využít Heineho větu, viz Větu 1.5, podle níž dostáváme

$$0 = G(\theta_k, D(\theta_k)) \rightarrow G(0, D_0) > 0.$$

To je však spor. Máme totiž nulovou posloupnost, která konverguje k nenulové hodnotě. Platí tudíž negovaný předpoklad

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0.$$

b) Důkaz, že $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} D(\theta) = 0$ je veden analogicky důkazu $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0$ výše, δ_n by byly z posloupnosti $\left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

□

Věta 2.15 D je spojitá na $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Důkaz: Spojitost $D(\theta)$ na $(0; \frac{\pi}{2})$ již byla dokázána ve Větě 2.11.

Spojitost v bodě 0 zprava plyne z rovnosti, jež vychází z Lemmatu 2.14 a Lemmatu 2.12, tzn. platí

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = 0 = D(0).$$

Ověření spojitosti zleva funkce D v bodě $\frac{\pi}{2}$ je zajímavější z toho důvodu, že G není pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ definována. Spočítejme nejprve limitu G pro $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $r \rightarrow r_0 > 0$, tedy

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow r_0}} G(\theta, r) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow r_0}} [r - F(\theta, r)] = r_0 - \lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow r_0}} \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}).$$

Napočítejme $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{a+b \sin \theta}{\cos \theta} = \infty$ a z toho již

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow r_0}} G(\theta, r) = r_0 - \frac{0}{a}(1 - 0) = r_0 > 0.$$

Dodefinujme

$$G\left(\frac{\pi}{2}, r\right) := r; \quad r > 0.$$

Vidíme, že limita by mohla nabývat 0 pro $r \rightarrow 0^+$, ověříme to:

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow 0^+}} G(\theta, r) = \lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow 0^+}} r - \lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ r \rightarrow 0^+}} \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)r}).$$

Opět si uvědomme, že je zásadní limita $A(\theta) = \frac{a+b \sin \theta}{\cos \theta}$, pro $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Zároveň pro $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$

$$a + b \sin \theta \rightarrow a + b > 0 \text{ a } \cos \theta \rightarrow 0^+,$$

tudíž $A(\theta) \rightarrow +\infty$ pro $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-$. Proto $A(\theta)r > 0$, což znamená, že $e^{-A(\theta)r} \in (0; 1)$ a tedy i $(1 - e^{-A(\theta)r}) \in (0; 1)$. Díky tomu, že výraz $(1 - e^{-A(\theta)r})$ je omezený a $\cos \theta \rightarrow 0$, platí

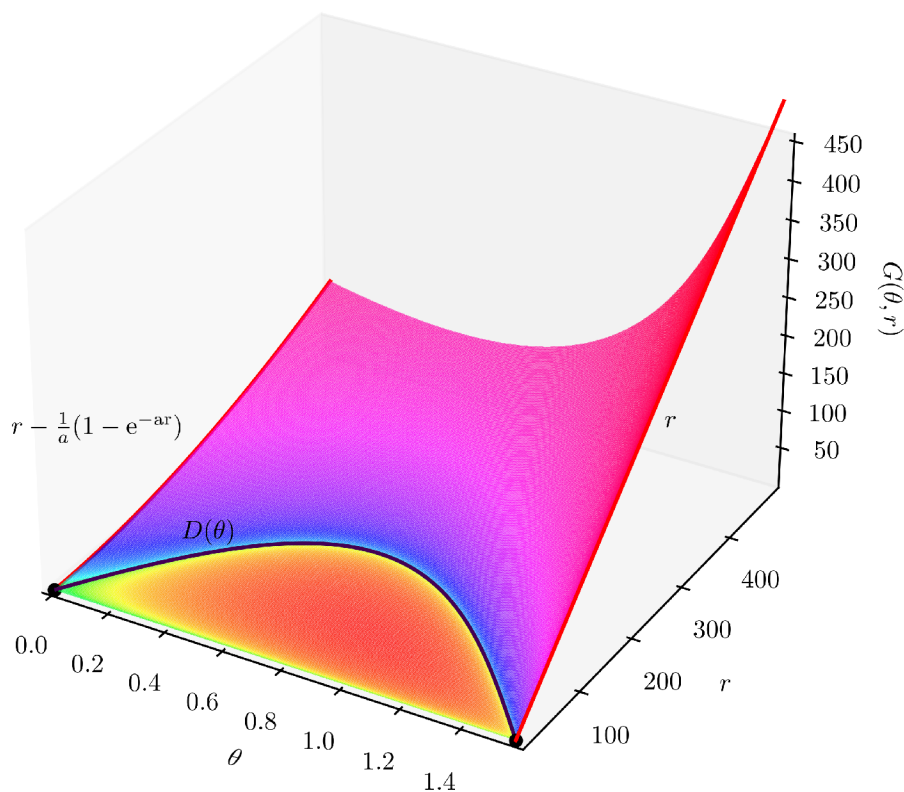
$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}- \\ r \rightarrow 0+}} G(\theta, r) = 0.$$

Tedy funkci G lze spojitě dodefinovat $G(\frac{\pi}{2}, 0) := 0$, z čehož vyplývá $D(\frac{\pi}{2}) = 0$. Máme tudíž z výše odvozeného a Lemmatu 2.14

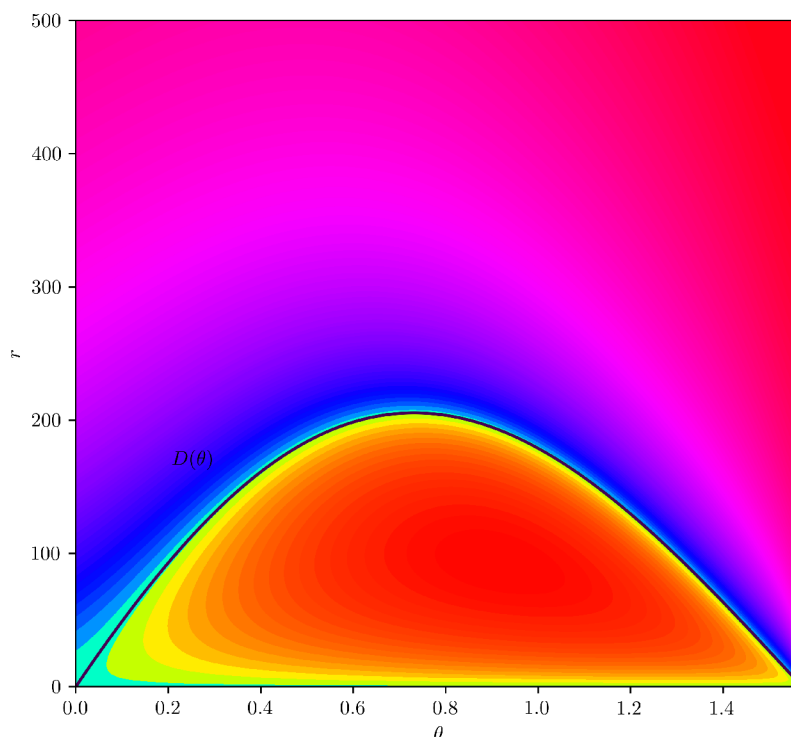
$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} D(\theta) = 0 = D\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Získáváme tedy funkci $D(\theta)$ v bodě $\frac{\pi}{2}$ spojitou zleva. □

Grafické znázornění funkcí G a D lze nalézt v Obrázku 2.6 a pohled shora na Obrázku 2.7.



Obrázek 2.6: Graf funkce G a její nultá hladina $D(\theta)$ pro $a = 0,001$, $b = \frac{0,0025}{9,81}$



Obrázek 2.7: Hladiny funkce G a její nultá hladina $D(\theta)$ pro $a = 0,001$, $b = \frac{0,0025}{9,81}$

2.1.5 Numerické řešení

Funkční hodnoty funkce D jsou vlastně pevné body jistého zobrazení (konkrétně funkce F , vycházejí ze vztahu (2.12)). Připomeňme si, že $D(\theta)$ je dána vztahem

$$D(\theta) = \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}); \text{ kde } A(\theta) = \frac{a + b \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Pro $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$ je $\frac{\cos \theta}{a} > 0$ a $A(\theta) > 0$. Také platí, že

$$\frac{\cos \theta}{a} \cdot A(\theta) = \frac{a + b \sin \theta}{a} = 1 + \frac{b \sin \theta}{a} > 1.$$

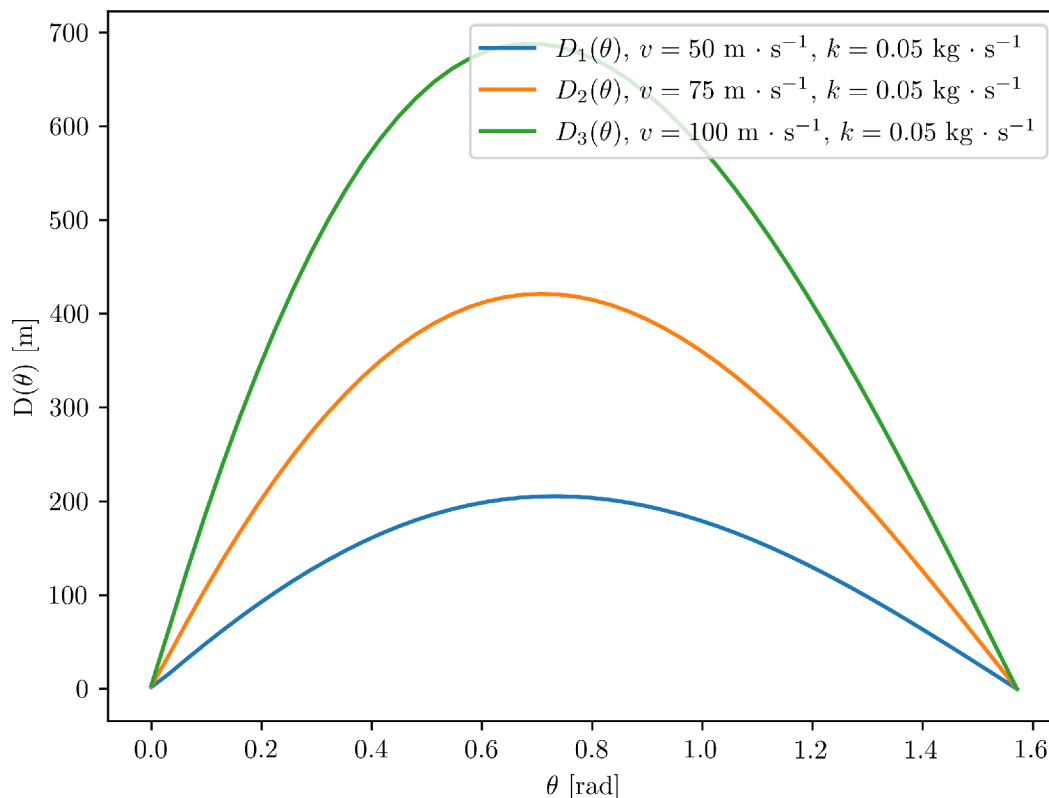
Je patrné, že pro každé θ z intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$ je $D(\theta)$ pevným bodem funkce

$$f(x) = \frac{\cos \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)x}).$$

Vidíme tedy, že $D(\theta)$ by bylo možné spočít pomocí posloupnosti iterací funkce f . Výše jsme dokázali, že tato posloupnost konverguje ke kladnému pevnému bodu funkce f .

Proto napíšeme program, pojmenujme jej `Dolet`, který spočte $D(\theta)$ pro libovolnou kombinaci kladných parametrů k , m , v využitím právě této iterační metody. Program

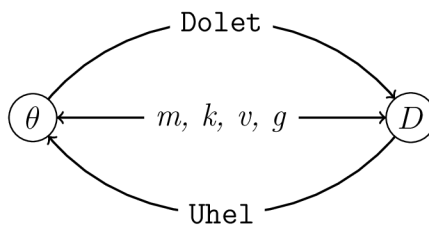
taktéž vykreslí hodnoty $\forall \theta \in [0; \frac{\pi}{2}] : D(\theta)$ (kód opět v příloze). Po spuštění pro konkrétní hodnoty parametrů dává Obrázek 2.8.



Obrázek 2.8: Dolet střely při lineárním odporu prostředí ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

2.2 Určení úhlu

V předchozí části jsme vyřešili direktní problém střely s lineárním odporem, nyní se tedy zaměříme na problém inverzní k tomuto problému. Půjde o určení úhlu vystřelení střely z toho, jak daleko doletěla, jakou měla hmotnost, jakou rychlostí se pohybovala a v jakém prostředí. Opět napíšeme program, který tento inverzní problém vyřeší, nazveme jej `Uhel`. Do schématu níže je zanesena aktuální situace.



Připomeňme, že funkce pro výpočet doletu D je dána implicitním předpisem (2.12), respektive vztahem (2.7). Ty jdou přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\frac{D(\theta)}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^{-\left(\frac{a}{\cos \theta} + b \operatorname{tg} \theta\right) D(\theta)} \right), \\ \frac{D(\theta)}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^{-\left(a \frac{D(\theta)}{\cos \theta} + b \sin \theta \frac{D(\theta)}{\cos \theta}\right)} \right), \\ \frac{D(\theta)}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^{-\left(a \frac{D(\theta)}{\cos \theta} + b D(\theta) \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}}\right)} \right), \\ \frac{D(\theta)}{\cos \theta} &= \frac{1}{a} \left(1 - e^{-\left(a \frac{D(\theta)}{\cos \theta} + b \sqrt{\frac{D^2(\theta)}{\cos^2 \theta} - D^2(\theta)}\right)} \right).\end{aligned}$$

Pokud bychom si zavedli označení $w = \frac{D(\theta)}{\cos \theta}$, tak tento předpis přechází do tvaru

$$w = \frac{1}{a} \left(1 - e^{-\left(aw + b \sqrt{w^2 - D(\theta)^2}\right)} \right).$$

Ekvivalentními úpravami pak dostáváme

$$0 = aw - 1 + e^{-\left(aw + b \sqrt{w^2 - D(\theta)^2}\right)}.$$

Na θ opět nahlížíme jako na parametr, proto můžeme říci, že $D(\theta)$ je řešením rovnice (2.7) právě tehdy, když w je kořenem funkce

$$h(w) := aw - 1 + e^{-\left(aw + b \sqrt{w^2 - D(\theta)^2}\right)}.$$

Vypočteme-li tímto způsobem w , upravíme substituční vztahu do tvaru

$$\theta = \arccos \frac{D(\theta)}{w}$$

a získáváme způsob, jak spočítat θ . Máme takřka kompletní návod, jak napsat program `Uhel` (kód v příloze), který spočte θ z intervalu $[0; \frac{\pi}{2}]$ a tím inverzní problém vyřeší.

Náš inverzní problém si však jistě zaslouhuje vedle obecného řešení i hlubší prozkoumání. Jak je všeobecně známo, úhel, při němž dosáhneme maximálního doletu v prostředí bez odporu, je 45° . V následující podkapitole se věnujme nově vyvstalé otázce: „Jak je tomu však v prostředí, které má odporovou sílu úměrnou rychlosti pohybujícího se tělesa?“

2.2.1 Optimální úhel

Vezměme si funkci D definovanou vztahem (2.12). Pokusme se nyní nalézt $D(\theta_{\max})$, tedy maximum funkce $D(\theta)$ a hodnotu úhlu, pro které je toto maximum nabyto.

Fyzikálně se $D(\theta_{\max})$ interpretuje jako maximální vzdálenost, do níž střela dolítne (maximální dolet) a θ_{\max} je úhel, pro nějž je maximálního doletu dosaženo.

Nejprve napočítejme derivaci D :

$$D'(\theta) = \frac{d}{d\theta} F(\theta, D(\theta)) = F_{\theta}(\theta, D(\theta)) + F_r(\theta, D(\theta)) D'(\theta)$$

a položíme ji rovnu nule, abychom určili $D(\theta_{\max})$:

$$F_{\theta}(\theta_{\max}, D(\theta_{\max})) + F_r(\theta_{\max}, D(\theta_{\max})) D'(\theta_{\max}) = 0.$$

My však víme, že $D'(\theta_{\max}) = 0$, tudíž předchozí rovnice přejde do tvaru

$$F_{\theta}(\theta_{\max}, D(\theta_{\max})) = 0.$$

Parciální derivaci F_{θ} jsme již napočítali v (2.15), proto dosadíme a upravujeme (níže budeme psát pouze θ , bude tím však myšleno θ_{\max}):

$$-\frac{\sin \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}) + D(\theta)A'(\theta) \frac{\cos \theta}{a} e^{-A(\theta)D(\theta)} = 0,$$

kde $A'(\theta) = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{b}{\cos^2 \theta}$,

$$-\frac{\sin \theta}{a} (1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}) + D(\theta) \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{b}{a \cos \theta} \right) e^{-A(\theta)D(\theta)} = 0,$$

$$-\sin \theta (1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}) + D(\theta) \frac{a}{\cos \theta} \left(\sin \theta + \frac{b}{a} \right) e^{-A(\theta)D(\theta)} = 0.$$

Z (2.7) můžeme úpravou dostat $D(\theta) \frac{a}{\cos \theta} = 1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}$ a tedy předchozí vztah upravit do tvaru

$$(1 - e^{-A(\theta)D(\theta)}) \cdot \left(-\sin \theta + e^{-A(\theta)D(\theta)} \left(\sin \theta + \frac{b}{a} \right) \right) = 0.$$

Protože $e^{-A(\theta)D(\theta)} \neq 1$ (z důvodu $A(\theta) = \frac{a+b \sin \theta}{\cos \theta} \neq 0 \wedge D(\theta) \neq 0$), tak první činitel nikdy nebude nula, tudíž druhý činitel být musí. Položíme jej tedy roven 0 a upravujeme dále

$$-\sin \theta + e^{-A(\theta)D(\theta)} \left(\sin \theta + \frac{b}{a} \right) = 0,$$

$$\sin \theta = e^{-A(\theta)D(\theta)} \left(\sin \theta + \frac{b}{a} \right). \quad (2.16)$$

Opět úpravou (2.7), tentokrát do tvaru $e^{-A(\theta)D(\theta)} = 1 - \frac{aD(\theta)}{\cos \theta}$ můžeme předchozí vztah přepsat na

$$\sin \theta = \left(1 - \frac{aD(\theta)}{\cos \theta} \right) \left(\sin \theta + \frac{b}{a} \right),$$

což po úpravách dává

$$D(\theta) = \frac{\frac{b}{a^2} \cos \theta}{\sin \theta + \frac{b}{a}}.$$

Rovnici výše můžeme přenásobit nenulovým $A(\theta)$, ta poté přechází ve tvar

$$A(\theta)D(\theta) = \frac{\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin \theta}{\sin \theta + \frac{b}{a}}.$$

Zaveďme si substituci¹ $c = \frac{a}{b}$, takže pak

$$A(\theta)D(\theta) = \frac{c + c^2 \sin \theta}{\sin \theta + c}.$$

Když předchozí rovnost dosadíme do vztahu (2.16) (zavedeme substituci $s = \sin \theta \Rightarrow s \in (0; 1)$), pak dostáváme

$$s = e^{-\frac{c+c^2s}{s+c}} (s + c).$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{s}{s+c} = e^{-\frac{c+c^2s}{s+c}}$$

a vynásobíme ji Eulerovým číslem e

$$\frac{es}{s+c} = e^{\frac{s-c^2s}{s+c}},$$

$$\frac{es}{s+c} = e^{\frac{1-c^2}{e} \frac{es}{s+c}}$$

Zaveďme substituci $x = \frac{es}{s+c}$, dále označme $z = \frac{1-c^2}{e}$, předchozí pak rovnice nabývá tvaru

$$x = e^{zx}, \tag{2.17}$$

kde x je neznámá a z parametr.

Nyní si opět definujme pomocnou funkci

$$\psi(x) := x - e^{zx}$$

a naše úloha se tedy převede na problém nalezení nulových bodů této funkce. Uvědomme si, že hledáme řešení pro $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ a tedy

$$x = \frac{es}{s+c} = \frac{e \sin \theta}{\sin \theta + c} \in \left[0; \frac{e}{1+c}\right].$$

¹Substituci je možné také zavést pomocí původních parametrů jako $c = \frac{kv}{mg}$.

Napočítejme nyní hodnoty funkce ψ pro krajní body intervalu:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= -1 < 0 \\ \psi\left(\frac{e}{1+c}\right) &= \frac{e(1 - \frac{1+c}{e^c})}{1+c} > 0.\end{aligned}$$

Že je druhá hodnota kladná, tvrdíme na základě faktu $1+c < e^c$; $c > 0$. Tuto nerovnost jsme již využili a dokázali na začátku důkazu Lemmatu 2.4 (viz Obrázek 2.5). Tudíž pak $\frac{1+c}{e^c} < 1$ a tedy $1 - \frac{1+c}{e^c} > 0$. Z Bolzano-Cauchyho věty (Věta 1.3) nám tedy plyne, že musí existovat bod \bar{x} pro který platí, že $\psi(\bar{x}) = 0$ (spojitost funkce ψ zřejmá). Dále dokažme jednoznačnost \bar{x} .

Napočítejme si derivaci funkce ψ , tzn.

$$\psi'(x) = 1 - ze^{zx}$$

a zkoumejme ji v intervalu $x \in [0; \frac{e}{1+c}]$. Pro pravý krajní bod intervalu dostáváme

$$\psi'\left(\frac{e}{1+c}\right) = 1 - \frac{1-c^2}{e} e^{\frac{1-c^2}{e} \frac{e}{1+c}}.$$

Protože $c > 0$, tak jistě $z < \frac{1}{e}$ a tedy

$$\psi'\left(\frac{e}{1+c}\right) > 1 - \frac{1}{e} e^{\frac{1}{e} \frac{e}{1+c}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{c}{1+c}}}.$$

Zároveň $e^{\frac{c}{1+c}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{c}{1+c}}} < 1$, což tedy znamená

$$1 - \frac{1}{e^{\frac{c}{1+c}}} > 0.$$

Z předchozího pak vyplývá

$$\psi'\left(\frac{e}{1+c}\right) > 0.$$

A protože

$$\psi''(x) = -z^2 e^{zx}$$

nabývá jistě záporných hodnot pro $x \in [0; \frac{e}{1+c}]$ a pro pravý krajní bod intervalu platí $\psi'\left(\frac{e}{1+c}\right) > 0$, tak jistě

$$\psi'(x) > 0; x \in \left[0; \frac{e}{1+c}\right].$$

Z toho důvodu můžeme tvrdit, že kořen \bar{x} funkce $\psi(x)$ pro $x \in [0; \frac{e}{1+c}]$ existuje právě jeden a tedy $\exists! \theta : \bar{x} = \frac{e \sin \theta}{\sin \theta + c}$ pro $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Závěr: Získali jsme možnost z rovnice (2.17) nalézt v intervalu $[0; \frac{e}{1+c}]$ řešení a pak ze substitučního vztahu pro x spočítat hodnotu θ_{\max} , kdy se jedná o úhel, při němž dosáhneme maximálního doletu. Výše odvozený postup je využit v programu `Max_uhel` (kód v příloze). Tento problém se nazývá Tartagliův problém a má za sebou i historické opodstatnění při střelbě z děl atp., pro více viz [1].

Příklad: Mějme střelu, která se pohybuje prostředím s odporovou silou přímo úměrnou rychlosti střely. Parametry tohoto systému jsou

$$k = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, v = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, m = 1 \text{ kg}.$$

Předpokládejme, že jsme v České republice a tedy $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Po dosazení do `Max_uhel` získáváme výsledek

$$\theta_{\max} = 0,73162517 \text{ rad},$$

což je ve stupních přibližně $41^{\circ}55'$.

Kapitola 3

Oscilátor

Velmi častý a ve fyzice hojně využívaný je model harmonického oscilátoru. Jedná se o způsob, jak popsat spoustu jevů z kvantové mechaniky, stejně jako atomové fyziky či třeba klasické mechaniky. Věnujme se opět případu s prostředím, které klade pohybujícímu se tělesu odpor úměrný rychlosti pohybu.

Na těleso, které vykonává oscilační pohyb po svislé přímce, působí síly o velikostech

$$F_1 = ky,$$

$$F_2 = cv = c\dot{y},$$

$$F_3 = ma = m\ddot{y},$$

kde k je tuhost pružiny, c koeficient tlumení, m hmotnost tělesa a y jeho poloha. První síla vyplývá z Hookova zákona, druhá je pak odporová síla (proto je úměrná velikosti rychlosti) a třetí vyplývá z Druhého Newtonova pohybového zákona. Síla F_3 má však opačný směr než první dvě, získáváme proto pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \tag{3.1}$$

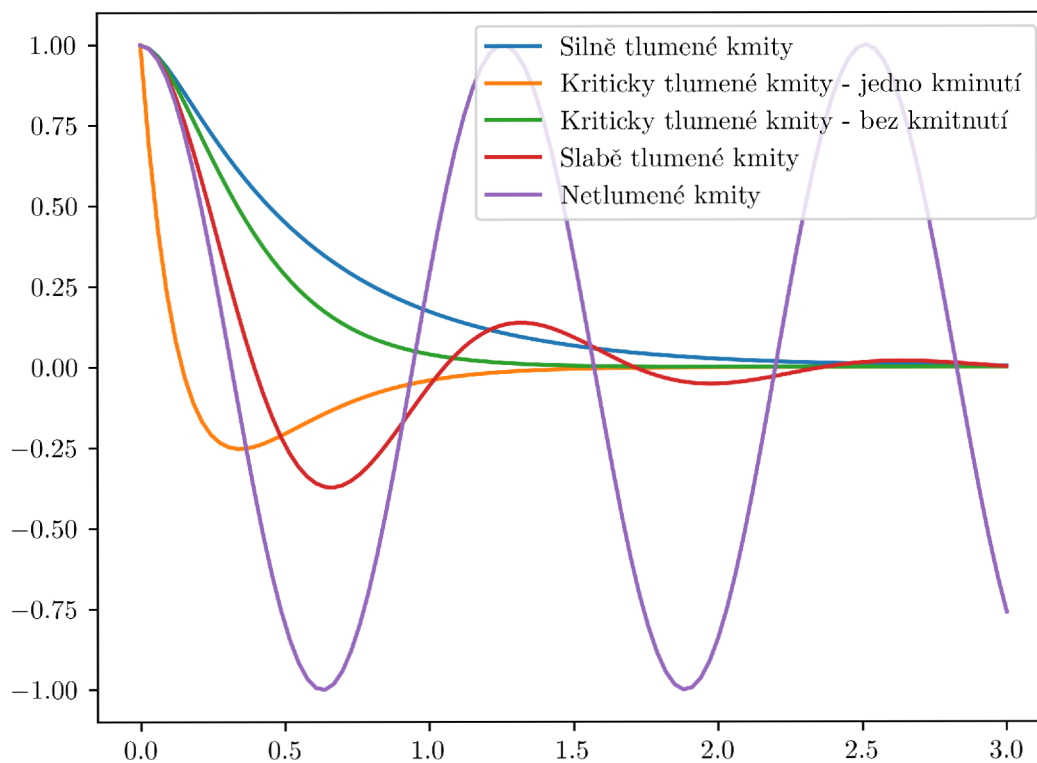
popisující polohu lineárně tlumeného oscilátoru, uvedeno také v [5].

Začněme tím, že se pokusíme diferenciální rovnici (3.1) vyřešit analyticky. Napišme si tedy její charakteristickou rovnici

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0,$$

která má kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$. Nyní je však třeba provést diskuzi řešení pro různé hodnoty parametru c . Tato řešení jsou vykreslena v Obrázku 3.1, pro porovnání je v tomto obrázku vynesena i průběh netlumených oscilací.

$c > 2\sqrt{mk} :$	$c = 2\sqrt{mk} :$	$c < 2\sqrt{mk} :$
$\lambda_1 \neq \lambda_2; \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2; \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \bar{\lambda}_1; \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow
$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t};$	$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t};$	$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t +$ $+ C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t;$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	$C_1, C_2 \in \mathbb{R}; \lambda_1 = \alpha + i\beta$
Jedná se o silně tlumené kmity.	Jedná se o kriticky tlumené kmity.	Jedná se o slabě tlumené kmity.



Obrázek 3.1: Časové průběhy jednotlivých druhů kmitů oscilátoru

3.1 Řešené úlohy

V této části se budeme věnovat řešení inverzního problému určení vstupních parametrů c , k , m v rovnici (3.1). Budeme tak dělat pro dva různé slabě tlumené systémy, které byly pozorovány. Aby byly problémy řešitelné, je třeba jeden z těchto parametrů znát, v obou problémech to bude hmotnost m . Úlohy jsou inspirovány problémy z [1, kap. 4.4].

Úloha 1

Mějme těleso o hmotnosti 1 kg zavěšené na pružině, kterou v klidu prodlouží o 0,21 m. Těleso uvedeme natáhnutím pružiny do kmitavého pohybu. Po 25 cyklech jsme zjistili, že amplituda klesla o 90%. Určete parametry c , k , m systému.

Řešení: Tuhost pružiny určíme díky tomu, že při pouhém zavěšení musí nastat rovnováha tíhy závaží a síly pružiny (podle Hookova zákona přímo úměrné prodloužení), tedy

$$k\Delta y = mg.$$

Odtud již snadno pro podmínky v ČR ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) máme

$$k = \frac{mg}{\Delta y},$$
$$k = \frac{1 \cdot 9,81}{0,21} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2},$$

a tedy

$$\underline{\underline{k = \frac{327}{7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}}.$$

Uvědomme si nyní, že vlastně známe počáteční podmínku $\dot{y}(0) = 0$. Z té pak dostáváme¹ $0 = C_1\alpha + C_2\beta$, tedy $C_2 = -\frac{\alpha}{\beta}C_1$. Řešení tedy bude ve tvaru

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right).$$

Řekněme, že na počátku pohybu byl oscilátor ve vzdálenosti x od rovnovážné polohy (tedy x je maximální amplituda), tedy $y(0) = x$, pak

$$x = C_1 e^{\alpha \cdot 0} \left(\cos(\beta \cdot 0) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \cdot 0) \right),$$

$$x = C_1.$$

¹V úvodu kapitoly předpokládáme, že jde o slabě tlumené kmity.

Podívejme se nyní na výraz

$$\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t)$$

a vytknutím ho upravme do tvaru

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \left(-\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}} \sin(\beta t) + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}} \cos(\beta t) \right). \quad (3.2)$$

Platí, že $\sqrt{\left(-\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right)^2} = 1$, tudíž bod $\left[-\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right]$ leží

na jednotkové kružnici. Z toho důvodu $\exists \phi \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\cos \phi = -\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}},$$

$$\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}},$$

a tedy protože $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$, platí

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Výraz (3.2) lze pak psát ve tvaru

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} (\cos \phi \sin(\beta t) + \sin \phi \cos(\beta t)) = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \sin(\beta t + \phi),$$

kde jsme využili goniometrického vzorce:

$$\forall x; y \in \mathbb{R} : \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

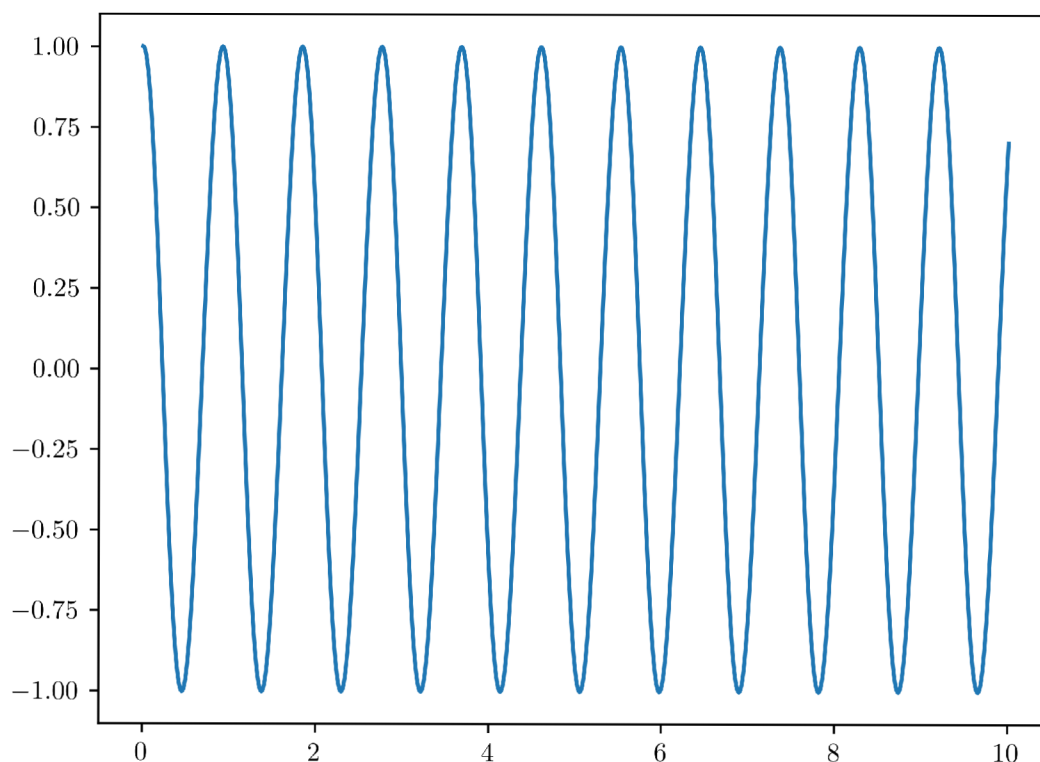
Tedy platí

$$\cos(\beta t) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \sin \left(\beta t + \operatorname{arctg} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \right),$$

pro průběh této funkce, viz Obrázek 3.2. My z toho důvodu víme, že amplituda je ovlivněna pouze částí¹ $C_1 e^{\alpha t} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} = C_1 e^{-\frac{c}{2}t} \sqrt{1 + \left(\frac{-c}{\sqrt{c^2+4k}}\right)}$. Proto jestliže po 25 cyklech klesla na 10%, tak

$$e^{-\frac{c}{2}\tau} = 0,1,$$

$$\tau = \frac{\ln 100}{c}.$$



Obrázek 3.2: Periodická funkce $\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \sin(\beta t + \arctg(-\frac{\beta}{\alpha}))$ pro²
 $\alpha = -0,1$ a $\beta = \frac{\sqrt{\frac{1308}{7}-0,2^2}}{2}$

Další informace je, že proběhlo 25 cyklů za nějaký čas τ , úhlová rychlost ω je tedy rovna $\frac{50\pi}{\tau} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a platí proto rovnost

$$\frac{50\pi}{\tau} = \frac{\sqrt{4k - c^2}}{2}.$$

¹Za předpokladu $m = 1 \text{ kg}$.

²Taky možno psát pomocí původních parametrů $k = \frac{327}{7} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$, $c = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$

Po dosazení výše odvozené rovnosti pro τ a hodnoty k do tohoto vztahu získáváme

$$\frac{50\pi}{\frac{\ln 100}{\{c\}}} = \frac{\sqrt{4 \cdot \frac{327}{7} - \{c\}^2}}{2}.$$

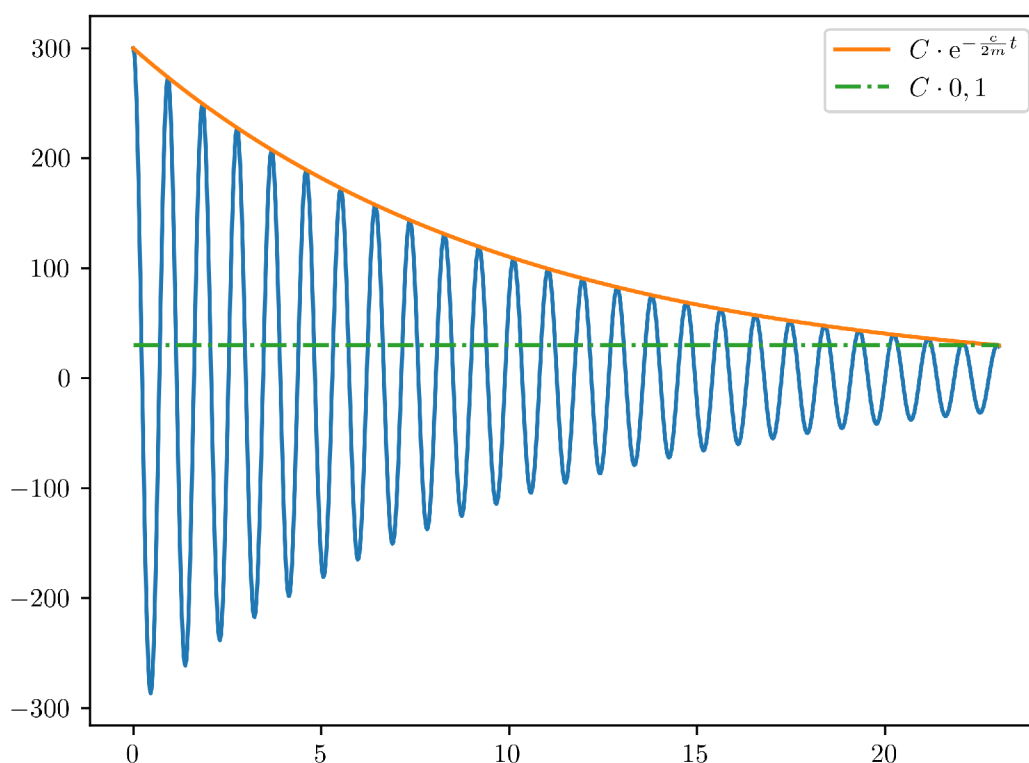
Vztah upravíme do tvaru

$$c = \sqrt{\frac{\ln^2 10 \cdot 1308}{7 \cdot [(50\pi)^2 + \ln^2 10]}} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

a spočteme

$$\underline{\underline{c \approx 0,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}}.$$

Pro spočtené hodnoty parametrů vykreslíme průběh oscilace a graficky v Obrázku 3.3 znázorníme správnost řešení.



Obrázek 3.3: Vykreslení funkce y pro $c = 0,2$, $m = 1$ a $k = \frac{327}{7}$

Úloha 2

Mějme závaží o hmotnosti 1 kg, které oscilátor v klidu prodlouží o 0,2m. Pozorujeme, že během 3s oscilátor pětkrát projde rovnovážnou polohou. Určete parametry c , k , m systému.

Řešení: Parametr k spočteme naprosto analogicky a dostáváme výslednou hodnotu

$$\underline{\underline{k = 49,05 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}}.$$

Opět obdobně jako u první úlohy si uvědomme, že $\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$. Dále si uvědomme, že β lze spočít jako počet radiánů za daný čas, tedy v našem případě

$$\beta = \frac{6\pi}{3} = 2\pi.$$

Dostáváme tudíž rovnici

$$\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = 2\pi,$$

kde známe k i m a neznámou, kterou chceme spočítat je c . Úpravami lze dojít ke tvaru

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{2m}\right)^2 &= \frac{k}{m} - 4\pi^2, \\ \frac{c}{2m} &= \sqrt{\frac{k}{m} - 4\pi^2}, \\ c &= 2m\sqrt{\frac{k}{m} - 4\pi^2}. \end{aligned}$$

Číselná hodnota c je pak

$$\underline{\underline{c \approx 6,19 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}}.$$

Počet průchodů rovnovážnou polohou za daný čas však nemůže být zvolen libovolně. Dříve, než byl řešen výše uvedený problém, byl proveden pokus o vyřešení stejně zadaného problému s devíti průchody rovnovážnou polohou z knihy [1]. Každý si však může stejným postupem ověřit, že řešení c neexistuje. Pojdme tedy nalézt podmínku, kterou musí počet průchodů splňovat, označme si ji písmenem z .

Víme, že

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

a také, že

$$\beta = \frac{z}{t}\pi,$$

kde t je čas, za nějž proběhne z půlcyklů (tedy π radiánů, jelikož z je počet průchodů rovnovážnou polohou). Pak tedy

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} &= \frac{z}{t}\pi, \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 &= \left(\frac{z}{t}\pi\right)^2, \\ \left(\frac{c}{2m}\right)^2 &= \frac{k}{m} - \left(\frac{z}{t}\pi\right)^2.\end{aligned}$$

Odtud tedy dostáváme podmínku

$$\begin{aligned}\frac{k}{m} - \left(\frac{z}{t}\pi\right)^2 &\geq 0, \\ \left(\frac{z}{t}\pi\right)^2 &\leq \frac{k}{m}.\end{aligned}$$

Protože $k, m > 0$, tak

$$\begin{aligned}\frac{z}{t}\pi &\leq \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ z &\leq \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.\end{aligned}$$

Konkrétně tedy pro předchozí problém dostáváme podmínku

$$z \leq 6,69.$$

Šest průchodů rovnovážnou polohou je tedy maximum, kterého lze dosáhnout s takovýmto slabě tlumeným systémem. Zajímavé je si také všimnout, že tato hranice není závislá na prostředí, v němž oscilace probíhají, jelikož se ve vztahu nevyskytuje c .

3.2 Inverzní problém vycházející z měření

V této části se budeme snažit o určení parametrů c, k, m z naměřených dat. Nejprve upravíme obecnou rovnici oscilátoru (3.1). Tu je možné vydělit nenulovým m a dostat tvar

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0,$$

který po substituci $q = \frac{c}{m}$ a $r = \frac{k}{m}$ přechází v

$$\ddot{y} + q\dot{y} + ry = 0. \tag{3.3}$$

Snaha tedy bude o určení c , k , m , respektive¹ q a r . Budeme mít data polohy v závislosti na čase. Abychom toho byli schopni dosáhnout, nejprve musíme dostat předchozí rovnici na tvar, do něž budeme moci dosadit naměřené hodnoty. O to se pokusíme dále.

Začněme první derivací y v bodě t , tu je možné dobře aproximovat jako

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}, \quad h > 0$$

a druhou jako

$$\ddot{y}(t) = \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}, \quad h > 0.$$

Dosazením do (3.3) přechází rovnice do tvaru

$$\frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} + q \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} + ry(t) = 0,$$

po úpravě

$$\frac{h(y(t+h) - y(t-h))}{2}q + h^2y(t)r = -y(t+h) + 2y(t) - y(t-h).$$

Obvykle měření závislosti polohy na čase probíhá v konstantních časových intervalech. Označme si $[a; b]$ časový interval celého měření. Vezměme $N \in \mathbb{N}$ a spočtěme číslo $h = \frac{b-a}{N}$. Pokud bychom si čas počátku měření označili jako t_0 , pak ostatní časy měření definujeme jako $t_j = t_0 + hj$; $j = 1, 2, \dots, N$. Pro $t = t_k$; $k = 1, 2, \dots, N-1$ dostáváme $N-1$ rovnic

$$\frac{h}{2}(y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}))q + h^2y(t_k)r = -y(t_{k+1}) + 2y(t_k) - y(t_{k-1}); \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ještě je dobré si uvědomit, že abychom mohli jednoznačně určit neznámé² q a r potřebujeme alespoň dvě rovnice, tedy minimálně čtyři naměřené hodnoty $y(t)$. S každou následující naměřenou hodnotou pak zvýšíme přesnost určení výsledných parametrů. Uvědomme si, že z výše uvedeného víme, že naměřených hodnot t_i je právě $N+1$. Zjistili jsme, že předchozí předpis pro $N \geq 3$ nám dává soustavu rovnic (obecně o $N-1$ rovnicích) a ta se dá zapsat ve tvaru

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

¹Dále v tomto textu nebudeme uvádět při vypsání konkrétních hodnot q a r jejich jednotky. Pro úplnost, základní jednotkou q je s^{-1} a r je s^{-2} .

²Jedná se o parametry systému, které jsou poměry původních parametrů c , k , m , jež se snažíme určit.

kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}(y(t_2) - y(t_0)) & h^2 y(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{h}{2}(y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})) & h^2 y(t_i) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{h}{2}(y(t_{N+1}) - y(t_{N-1})) & h^2 y(t_N) \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -y(t_2) + 2y(t_1) - y(t_0) \\ \vdots \\ -y(t_{i+1}) + 2y(t_i) - y(t_{i-1}) \\ \vdots \\ -y(t_{N+1}) + 2y(t_N) - y(t_{N-1}) \end{pmatrix}, i \in \mathbb{N}.$$

Uvědomme si, že parametry q a r by bylo možné získat z předchozího předpisu pomocí aproximace lineární funkce metodou nejmenších čtverců. Tímto způsobem tedy zjistíme podíly $\frac{c}{m}$ a $\frac{k}{m}$, což znamená, že znalost hodnoty alespoň jednoho z parametrů c , k , m nám umožňuje spočítat zbylé dva. Tímto tedy vyřešíme inverzní problém určení původních parametrů pouze z pozorování pohybu (naměřených dat).

Výše naznačený postup lze aplikovat pomocí vhodného programu. Popišme si, jak by měl fungovat takový, který spočte q a r . Hodnoty nezávisle proměnné budou z intervalu od $T1$ po $T2$. Budeme mít $N + 1$ dat (včetně hodnoty pro $T1$ a $T2$), kde N je počet intervalů, na něž vygenerované hodnoty dělí interval $[T1; T2]$. Následně ke každé této hodnotě bude přidána jistá nepřesnost, aby bylo co nejlépe simulováno reálné měření. Hodnota nepřesnosti bude náhodně z intervalu $(-\varepsilon; \varepsilon)$, kde ε zadáme. Napíšeme funkci v Pythonu, která uvedený postup aplikuje pro určitá data a konkrétní hodnoty $T1$, $T2$, N , ε . Funkci nazveme `coeff(y, T1, T2, N, ε)`.

Kdybychom chtěli problematiku posunout ještě o kousek dál, máme možnost pomocí řešení tohoto inverzního problému vyřešit i direktní, tedy determinovat pozici oscilátoru v libovolném čase.

Na základě parametrů c , k , m určíme z předpokladů, zda se jedná o silně/ kriticky/ slabě tlumené kmity. Následně opět metodou nejmenších čtverců, aplikovanou na jednu ze tří příslušných funkcí, určíme C_1 a C_2 .

Celý výše uvedený postup je sepsán v programu `Fit` (kód v příloze). Zadání následujících úloh opět vychází z [1, kap. 4.4]

3.2.1 Sada dat generovaná funkcí

Varianta 1

Nejprve si postup aplikujeme na data, která budou generována funkcí

$$y = (1 - 0,9t)e^{-0,1t}.$$

Berme $\varepsilon = 0$. Parametry zvolíme $\text{coeff}((1 - 0,9t)e^{-0,1t}, 0, 7, 10, 0)$. Funkce tedy pracuje s daty:

t	y
0,0	0,000
0,7	0,345
1,4	-0,226
2,1	-0,721
2,8	-1,149
3,5	-1,515
4,2	-1,827
4,9	-2,089
5,6	-2,308
6,3	-2,487
7,0	-2,632

Výše vypsaná data dosazená do coeff pak dávají zaokrouhleně řešení tohoto problému

$$\underline{q = 0,2; r = 0,01}.$$

Nyní se pokusme určit, o jaký druh oscilátoru se jedná a díky tomu stanovit C_1 ; C_2 a tím tedy i kompletně determinovat rovnici tohoto oscilátoru. Na základě výsledků inverzního problému platí

$$\begin{aligned}q &\approx \sqrt{r}, \\ \frac{c}{m} &\approx 2\sqrt{\frac{k}{m}}, \\ c &\approx 2\sqrt{mk}.\end{aligned}$$

Jedná se tudíž o kriticky tlumený oscilátor, proto jeho průběh bude možno popsat pomocí funkce

$$y(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

která byla nalezena v úvodu kapitoly 3. A tedy q přesně odpovídá vstupní funkci $y = (1 - 0,9t)e^{-0,1t}$, protože $\lambda = -\frac{q}{2}$.

Dokonce pak kód pro řešení direktního problému determinace C_1 a C_2 dává hodnoty postupně přibližně 1 a $-0,9$.

Varianta 2

Podobně například pro funkci

$$y = e^{-0,032t} \sin 2,18t$$

funkce coeff pro stejnou volbu proměnných dává zaokrouhleně

$$\underline{q = 0,064; r = 3,90.}$$

V tomto případě

$$q < 2\sqrt{r},$$

$$c < 2\sqrt{mk}.$$

Jedná se tedy o slabě tlumený oscilátor, příslušná funkce popisující polohu opět v úvodu kapitoly 3. Zjištěné hodnoty q a r pak odpovídají vstupním hodnotám parametrů

$$\alpha = -\frac{q}{2} = -0,032,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4r - q^2}}{2} \approx 1,97.$$

To však jistě není uspokojivě přesný výsledek pro β . Navýšením počtu dělicích intervalů (tedy zvětšením parametru N) na 100 se pokusíme zvýšit přesnost. Pro

$$\text{coeff}(e^{-0,032t} \sin 2,18t, 0, 7, 100, 0)$$

dostáváme hodnoty parametrů

$$\underline{q = 0,064; r = 4,74.}$$

Opět se jedná o slabě tlumený oscilátor. Hodnoty q a r pak odpovídají vstupním hodnotám parametrů v původní funkci, viz níže

$$\alpha = -\frac{q}{2} = -0,032,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4r - q^2}}{2} \approx 2,18.$$

Z obecného tvaru funkce slabě tlumeného oscilátoru asi tušíme, že řešení direktního problému pro ověření, jak průběh odpovídá datům, bude $C_1 \approx 0$ a $C_2 \approx 1$. Skutečně tyto výsledky pomocí kódu v příloze dostáváme.

Obdobně jako v předchozích dvou variantách by bylo možné si data nechat vygenerovat funkcí tak, aby se jednalo o silně tlumený oscilátor.

3.2.2 Sada dat s uměle přidanou nepřesností

Přidejme teď nepřesnost do generovaných dat. Ke každé zadané hodnotě y_i přičteme náhodně vygenerované číslo z intervalu $(-\varepsilon; \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ budeme různě volit. Tímto způsobem budeme simulovat chyby měření.

Mějme nepřesnost $\varepsilon = 0,001$, tedy vytvoříme pro každé z dat odchylku v řádu nanejvýš desetiny procenta. Spustíme

$$\text{coeff}((1 - 0,9t)e^{-0,1t}, 0, 7, 10, 0,001)$$

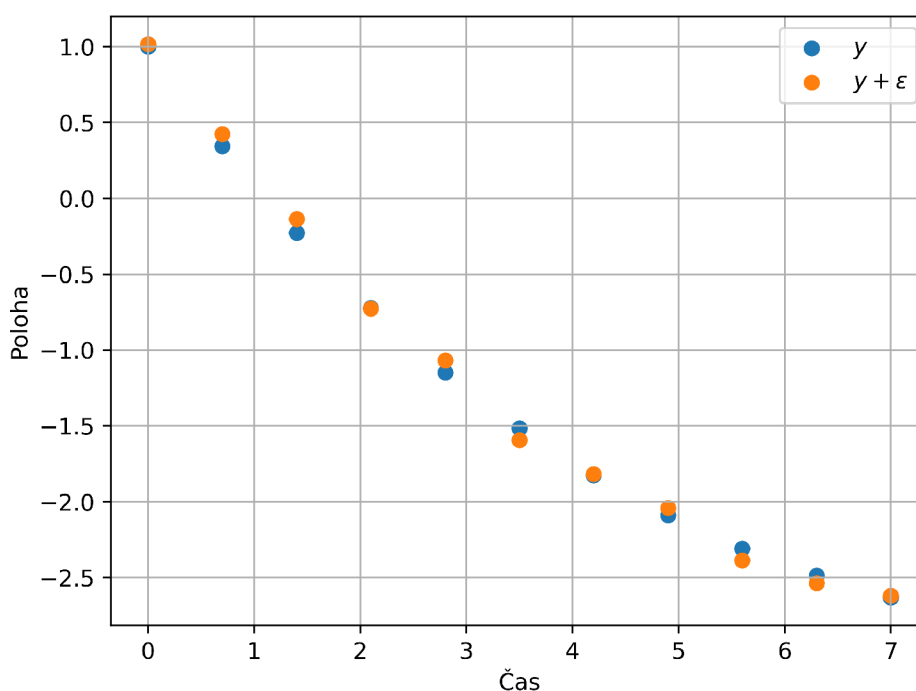
a opět dostáváme zaokrouhleně

$$\underline{q = 0,2; r = 0,01.}$$

Pokud zvolíme $\varepsilon = 0,01$, pak budou odchylky u dat i v řádu procent a již se dá očekávat i odchylka ve výsledných parametrech. Volání funkce

$$\text{coeff}((1 - 0,9t)e^{-0,1t}, 0, 7, 10, 0,01)$$

vrací q přibližně v intervalu $[0,19; 0,21]$, r stále osciluje kolem hodnoty 0,01 dosti těsně. Přesnost lze zvýšit změnou parametru na vyšší hodnotu, např. 30. Avšak drastičtější navýšení, např. až na 100 již vede k velmi nepřesným výsledkům. Přirozeně rozšířením intervalu $[T1; T2]$ i počtu dělicích bodů (tedy zvětšením parametru N) dostaneme přesnější hodnoty q i r .



Obrázek 3.4: Data generovaná funkcí $(1 - 0,9t)e^{-0,1t}$ s přidanou nepřesností $\varepsilon = 0,1$

Pro hodnoty $\varepsilon = 0,1$ (ilustrativně vyneseny v Obrázku 3.4) je již mnohem náročnější odladit vhodnou kombinaci parametrů, často se děje, že chyby měření znehodnocují výsledky. Docela rozumné výsledky lze dostat při zachování poměru $N : (T2 - T1)$ na hodnotě 1:1 při zvětšování N .

3.2.3 Neznámá sada dat

Přejděme nyní k reálnějšímu případu, tzn. data již nebudou generována žádnou funkcí, ale budou zadána, coby konkrétní hodnoty jako:

t	y
0.70	0.348
0.91	0.366
1.12	0.365
1.33	0.351
1.54	0.330
1.75	0.304
1.96	0.276

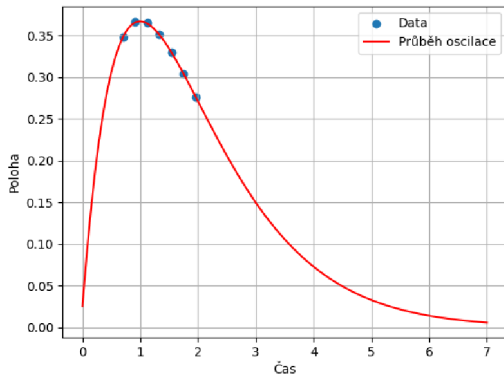
Pro data zadaná jakožto včít (vektor) jsme upravili funkci `coeff` na funkci `coeff1`. Pro výše uvedená data platí, že počet dělicích intervalů je přirozeně pro konkrétní počet dat stanoven pevně. Funkce `coeff1` jej počítá automaticky (výše uvedená data mají $N = 6$).

Tato data jsou stále ještě bez jakékoli uměle přidané nepřesnosti ε . Po jejich dosazení do funkce `coeff1` s parametry $T1 = 0,7$, $T2 = 1,96$ a $\varepsilon = 0$ dostáváme

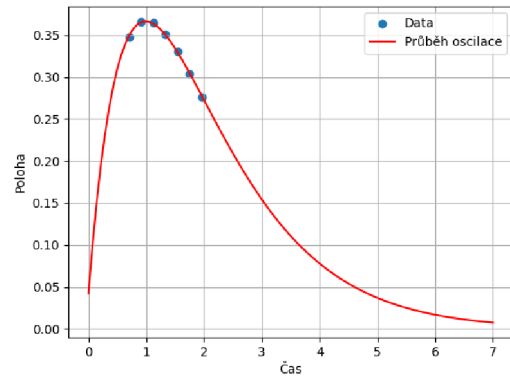
$$\underline{q = 1,934; r = 0,967.}$$

Jedná se tedy o slabě tlumený oscilátor, který byl proměřen v datech výše. Avšak rozdíl hodnot $q = 1,934$ a $2\sqrt{r} = 1,967$ není vůči jejich hodnotám nikterak velký (jen do 2%), dalo by se tedy takřka mluvit i o kriticky tlumeném oscilátoru.

Opět pro kontrolu zkusíme vyřešit i direktní problém.



(a) Slabě tlumený oscilátor



(b) Kriticky tlumený oscilátor

Obrázek 3.5: Stejná data proložená dvěma různými funkcemi.

Ze samotných průběhů v Obrázku 3.5 moc rozdílů nepoznáme, proto spočteme koeficient determinace R^2 (respektive pro větší N adjustovaný koeficient determinace), který zjednodušeně řečeno vyjadřuje míru odchylky fitem predikovaných hodnot od naměřených dat. Pro slabě tlumené kmity $R^2 = 0,9999$, pro kriticky tlumené kmity pak $R^2 = 0,9989$. Tedy se opravdu jedná o slabě tlumené kmity.

Přirozeně však reálně naměřená data budou ovlivněna jistou nepřesností. Testujme tedy, pro jaká ε dostaneme jaké hodnoty q a r (vždy spustíme pro konkrétní ε program `Fit` 5-krát a následně uděláme jejich aritmetický průměr, pro lepší představu).

Pro $\varepsilon = 0,1$:

n	q	r
1	2,181	3,040
2	-1,578	1,622
3	0,703	3,045
4	-3,251	0,806
5	0,047	2,118

Průměrně

$$\underline{\underline{q = -0,3796; r = 2,1262,}}$$

což jsou naprosto nesmyslné hodnoty, už z toho důvodu, že $c, m > 0$ a tedy $q > 0$. Můžeme proto tvrdit, že nepřesnost 0,1 je příliš velká (jedná se o nepřesnost okolo 25%).

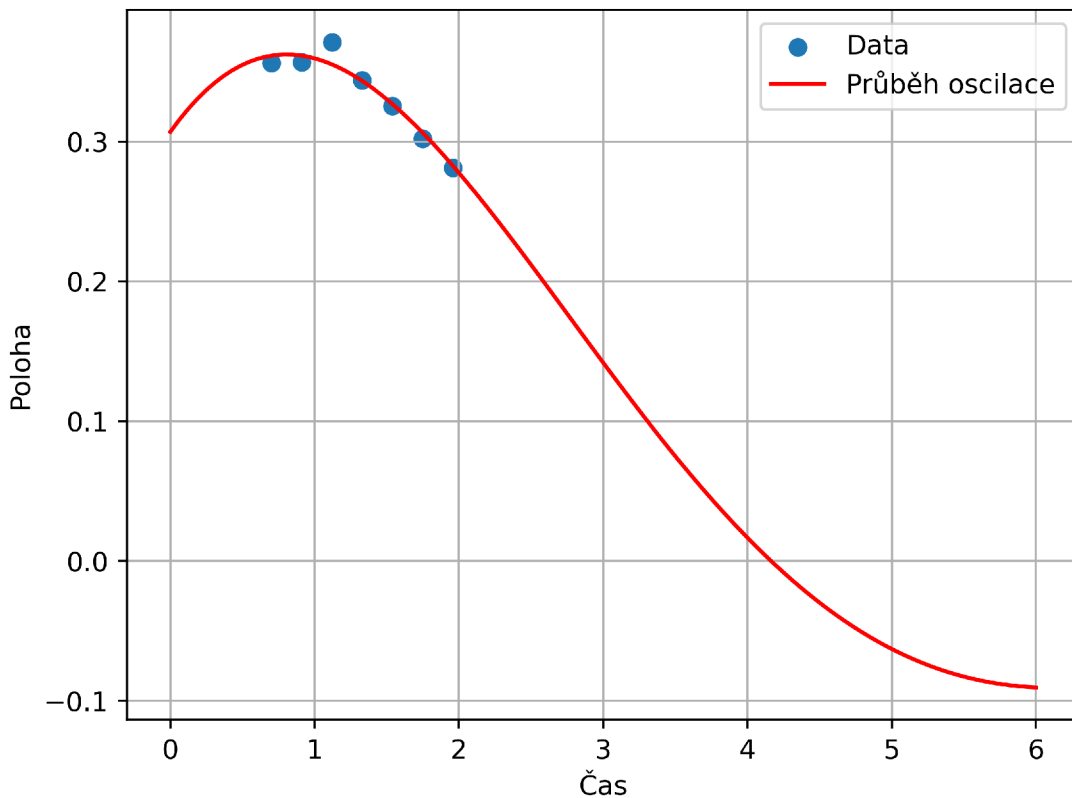
Pro $\varepsilon = 0,01$:

n	q	r
1	0,740	0,793
2	1,258	0,867
3	1,378	0,946
4	-0,097	0,540
5	2,942	1,007

Tedy průměrně

$$\underline{q = 1,2442; r = 0,8306.}$$

Vidíme však, že tato nepřesnost stále dosti ovlivňuje výsledné hodnoty parametrů. Například v předposledním řádku je záporná hodnota q a v posledním pak je $q > 2\sqrt{r}$, což je problém, protože máme slabě tlumené kmity. Pro představu uvádíme ilustrativní řešení direktního problému v Obrázku 3.6, které navazuje na řešení našeho problému inverzního (tedy určení q a r) a vychází vcelku rozumně.



Obrázek 3.6: Ilustrativní slabě tlumené kmity s $\varepsilon = 0,01$ a $R^2 = 0,949$

Pro $\varepsilon = 0,001$:

n	q	r
1	1,960	0,970
2	1,891	0,969
3	1,842	0,935
4	1,927	0,972
5	1,899	0,975

Průměrné hodnoty

$$\underline{\underline{q = 1,9038; r = 0,9642}}$$

jsou tedy již velmi blízké hodnotám bez nepřesnosti.

Závěr

Diplomová práce je věnována řešení různých inverzních problémů pro dva konkrétní modely: střelu a tlumený harmonický oscilátor¹. Řešení jednotlivých problémů je provedeno vždy co nejuniverzálněji tak, aby bylo možné jej aplikovat na různé variace reálných situací.

Model střely je zpracován velmi podrobně co do direktního problému. Díky tomuto obšírnému rozboru je již vcelku snadné vyřešit kauzální inverzní problém spočtení úhlu. Problematika je posunutá o kousek dál ke spočtení takzvaného maximálního úhlu², tedy úhlu, kdy je dosaženo maximální vzdálenosti doletu. Na konkrétním příkladu vidíme, že jeho hodnota je menší než 45° , avšak důkaz tohoto tvrzení proveden nebyl. Bylo by možné jím pokračovat.

Navazující studium tohoto modelu by představovalo další přiblížení, tedy pohyb v prostředí přímo úměrnému kvadrátu rychlosti. Tato závislost se ovšem projevuje až při větších rychlostech a zároveň se u ní začíná projevovat proudění, víry atd. Existují určité pomocné výpočty využívané právě k určení, zda je aktuální přiblížení dostatečně vhodné, či je potřeba použít bližší.

Model (tlumeného) harmonického oscilátoru byl prozkoumán spíše co do rozmanitosti konkrétních úloh, alespoň v první části. Druhá část se pak snažila simulovat reálné měření a z něj determinovat parametry systému, čímž byl opět vyřešen kauzální inverzní problém.

Rozvíjení problematiky tohoto modelu by mohlo jít stejným směrem jako u střely, tedy přes přiblížení odporové síly. U oscilátoru se však objevují jiné zajímavé modely, či modifikace. Bylo by vskutku lákavé prozkoumat spojené oscilátory nebo pravidelně buzený oscilátor, případně by bylo možné, a také velmi odvážné, se věnovat modelu kvantového lineárního harmonického oscilátoru.

¹Oba v prostředí s odporovou silou úměrnou rychlosti.

²Byla dokázána i existence a jednoznačnost tohoto úhlu.

Tato práce představovala výzvu sama o sobě, stejně tak jako následné zpracování a aplikace zjištěných poznatků do programů v jazyku Python¹. Všechny tyto programy jsou v příloze. Díky tomu by neměl být problém je po lehké modifikaci v případě potřeby využít v reálných výpočtech. Práce je proto určena všem, kteří mají rádi matematiku aplikovanou do fyziky, zajímavé problémy a nebo prostě jen neobvyklá témata.

¹V Pythonu byly vytvořeny i všechny grafy v práci.

Literatura

- [1] GROETSCH, Charles W. *Inverse problems: activities for undergraduates*. Washington: Mathematical Association of America, 1999. ISBN 0-88385-716-2.
- [2] JANEK, Vojtěch. *Inverzní problémy pro diferenciální rovnice*. Olomouc, 2022. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.
- [3] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza pro fyziky (II)*. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-10-X.
- [4] MOURA NETO, Francisco Duarte a Antônio J. SILVA NETO. *An introduction to inverse problems with applications*. New York: Springer, c2013. ISBN 978-3-642-32557-1.
- [5] NAVE, Rod. *Damped Harmonic Oscillator*. HyperPhysics [online]. c2024 [cit. 2024-04-21]. Dostupné z: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscd.html>
- [6] TOMEČEK, Jan. *Matematická analýza 2* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2020 [cit. 2023-11-18]. ISBN 978-80-244-5853-3. Dostupné z: https://kma.upol.cz/data/storage/source/Studenti/Studijni_materialy/Tomecek_Matematicka_analyza_2.pdf
- [7] TRÁVNÍČEK, Stanislav, Pavel CALÁBEK a Jaroslav ŠVRČEK. *Matematická analýza I a II (pro učitelské obory)*. UP Olomouc, 2017. Dostupné také z: <https://kag.upol.cz/data/upload/20/MAI+II.pdf>

Přílohy

V příloze nalezneme pět programů, které jsou aplikací poznatků sepsaných v této práci. Zde si proto uvedme jejich abecedně seřazený přehled.

- **Dolet**

Řeší direktní problém střely, tedy spočte, jak daleko dolétne střela. Spočte hodnoty doletu pro úhly z intervalu $[0; \frac{\pi}{2}]$ a vykreslí je pro různé hodnoty parametrů systému.

- **Fit**

Obsahuje dvě části, první řeší inverzní problém určení parametrů oscilátoru. Po vyřešení první části se program zeptá na to, o jaký typ oscilátoru se jedná¹. Po zvolení typu pak vrací řešení direktního problému, které vykreslí jako graf polohy oscilátoru v čase.

- **Iterace**

Spočte za pomoci posloupnosti iterací pevného bodu pevný bod funkce f . Graficky znázorní průběh výpočtu.

- **Max_uhel**

Pomocí teoreticky odvozeného postupu spočte úhel, pro nějž dosáhneme maximálního doletu. Nutná je však znalost vstupních parametrů systému, které jsou voleny hned v počátku programu.

- **Uhel**

Řeší inverzní problém střely, spočte úhel pro konkrétní hodnotu doletu ve známém prostředí. Nejprve vykreslí pomocnou funkci a zeptá se na odhad $y(t \neq 0) = 0$ z grafu. Následně vrátí onen úhel.

¹Poznáme to, když porovnáme hodnoty q a $2\sqrt{r}$.