VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

UŽITÍ SFÉRICKÉ GEOMETRIE V ZEMĚPISE A ASTRONOMII

APPLICATION OF THE SPHERIC GEOMETRY IN GEOGRAPHY AND ASTRONOMY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE PETR LEŽOVIČ
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE Mgr. JAN PAVLÍK,
SUPERVISOR

BRNO 2008

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2007/08

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Ležovič Petr

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Užití sférické geometrie v zeměpise a astronomii

v anglickém jazyce:

Application of the spheric geometry in geography and astronomy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Studium matematického pozadí výpočtů v zeměpisných a astronomických souřadných soustavách.

Cíle bakalářské práce:

Seznámit čtenáře se základními pojmy sférické geometrie, dokázat hlavní výsledky sférické trigonometrie a využít je při řešení problémů v zeměpise a astronomii.

Seznam odborné literatury:

Brázdil, R. a kol.: Úvod do studia planety Země. Praha, SPN 1988. 365s.,

internet

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Pavlík

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2007/08.

V Brně, dne 25.11.2007

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Anotace
Hlavním obsahem této práce je definování základních pojmů a vět sférické geometrie a jejich využití při práci se sférickým trojúhelníkem. Dále jsou zde uvedeny souřadnicové systémy, používané v zeměpise a astronomii, které využívají poznatků sférické geometrie.

Anotace anglicky
Basic contents of this thesis is definition of a principia in the spheric geometry and application in a work with spheric triangle(gore). There are systems of coordinates, that are used in geography and astronomy, that use the spheric geometry.

Klíčová slova
Sférická geometrie, sférický trojúhelník, souřadnicová soustava

Klíčová slova anglicky
Spheric geometry, spherical triangle, system of coordinates

Bibliografická citace mé práce:

LEŽOVIČ, P. *Užití sférické geometrie v zeměpise a astronomii*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007, 22 stran. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Jan Pavlík, .

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně, s použitím uvedených zdrojů a pod dohledem Mgr. Jana Pavlíka.

V Brně 24. 5. 2007 Petr Ležovič

Obsah

1. Úvod

Cílem práce je seznámit čtenáře s problematikou sférické geometrie a ukázat její aplikace v souřadnicových systémech používaných v zeměpise a astronomii. Předpokládá se, že čtenář má základní poznatky z rovinné trigonometrie. Mojí snahou bylo ukázat odvození a důkazy základních vět a vlastností sférické trigonometrie, protože ve většině publikací, které se zabývají problematikou sférického trojúhelníku, jsou tyto věty a vlastnosti pouze uvedeny, nikoli dokázány. Tomuto se věnuji ve druhé kapitole. Třetí kapitola je věnována popisu základních souřadnicových soustav a ve čtvrté kapitole jsou uvedeny příklady využití získaných poznatků.

2. Historie geometrie

Sférická geometrie se podobně jako celá matematika vyvíjela už od dávnověku. U primitivních kmenů se setkáváme se studiem astronomie, která je díky tvaru Země se sférickou geometrií úzce spjata. Úplné počátky lze přiřadit orientálním národům, které koncem 2. tisíciletí před n. l. na scéně vystřídali především Řekové, kteří již pracují s geometrií jako s abstraktní vědou. Poučky byly logicky odvozovány a ne pouze vypozorovány, jak tomu bylo u Egypťanů a Babyloňanů.

Ve své Velké sbírce (arabsky Almagest) připomíná řecký autor Ptolemaios skutečnost, že Babyloňané znali souřadný systém pro nebeskou sféru již v 8. století před n. l. V jiném jeho díle Geographia je určována poloha měst s pomocí délky a šířky zemské sféry. Ještě starší než Ptolemaios byl Menelaos, jehož práce Sférika obsahuje geometrii koule, včetně rozboru sférického trojúhelníku. Od 6. století před n. l. vznikalo souborné dílo řecké matematiky, které kolem roku 300 před n. l. dokončil Euklides. Toto dílo je prvním pokusem o axiomatický výklad matematiky. Euklides odvozuje celou geometrii z 9 axiómů, 5 postulátů a 23 definic. Právě pátý Euklidův postulát (Jestliže přímka protíná dvě přímky tak, že vnitřní úhly na téže straně jsou menší než dva pravé úhly, pak se tyto dvě přímky, pokud poběží do nekonečna, protnou na stejné straně, na které jsou úhly menší než dva pravé úhly) měl později vliv na vznik neeuklidovských geometrií, k nimž geometrie na kulové ploše jistým způsobem také patří.

S úpadkem řecké společnosti se přesouvají střediska matematického bádání do Indie (dílo Siddhántás, zabývající se především astronomií). Dalším centrem byla Mezopotámie. O trigonometrii se obzvláště zajímali arabští učenci. Například Al-Battání již znal kosinovou větu pro sférický trojúhelník či pozdější Abu-l-Vafá, který odvodil sinovou větu.

Na počátku druhého tisíciletí se evropští učenci (především z oblasti Španělska a Sicílie) seznamují s arabskou vědou, která obsahuje i práce řeckých klasiků a v Cordobě vzniká první středisko astronomů. Když v roce 1453 zanikla byzantská říše, mnoho řeckých učenců se uchýlilo do západních měst. V 15. století sepsal systematický úvod do trigonometrie Johanes Miller. V 16. století objevil logaritmy Skot John Naper (Neper), který také pracoval v oboru sférické trigonometrie. Shrnul vzorce pro řešení pravoúhlého sférického trojúhelníku v důmyslné pravidlo (Neperovo).

V 18. století byl nejvýznamnějším matematikem Leonhard Euler, který přispěl svými objevy snad ke všem odvětvím matematiky. Sférické geometrii dal dnešní podobu přehledného značení (systematicky značil úhly a strany sférického trojúhelníku).

Na přelomu 18. a 19. století začíná vznikat neeuklidovská geometrie díky Maďarovi Bolyaiemu, Rusovi Lobačevskijemu, ale především díky B. Reimannovi, který roku 1854 vystupuje s přednáškou O hypotézách tvořící základy geometrie. Sférická geometrie je částí právě Reimannovy (eliptické) geometrie.

V 19. a 20. století dochází na základě nových poznatků ke zpřesňování geometrie. Matematika je již separována do jednotlivých odvětví, protože pro množství poznatků ji již nelze studovat v celkovém objemu. V dnešní době není sférická geometrie už tolik zkoumána po vědecké stránce, ale uplatňuje se spíše v praxi, například v letecké či lodní navigaci, v astronomii i astrologii, v geodézii a mnoha dalších odvětvích.

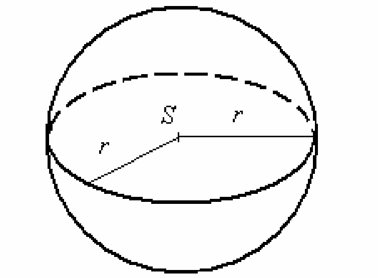
3. Sférická geometrie

3.1 Základní pojmy

Polohu bodu v prostoru určujeme obvykle pravoúhlými souřadnicemi x, y, z (kartézská souřadnicová soustava). V geografii i astronomii jsou pro určení polohy bodů v prostoru výhodnější souřadnice polární, případně souřadnice na kouli čili **sférické**.

3.1.1 Kulová plocha

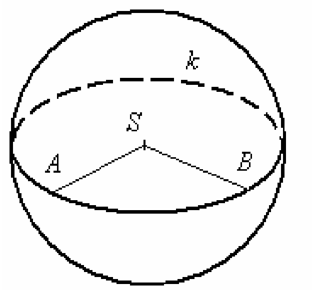
Kulová plocha je množina všech bodů v (3-dimenzionálním) prostoru, které mají od pevně zvoleného bodu *S* (střed kulové plochy) konstantní vzdálenost *r* (poloměr kulové plochy).



Obr. 1. Kulová plocha

3.1.2. Hlavní kružnice

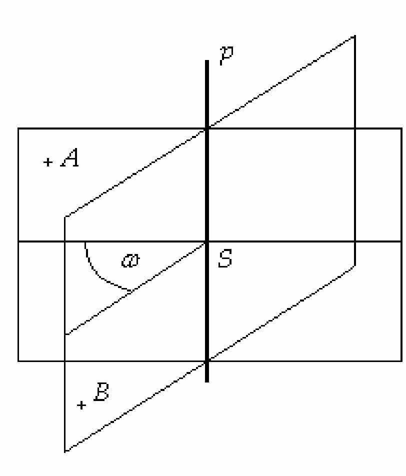
Průnik kulové plochy a roviny *ABS*, procházející středem této kulové plochy označujeme jako *hlavní kružnici k* kulové plochy. Délka oblouku *AB* je *sférická vzdálenost* bodů *A*, *B*.



Obr. 2. Hlavní kružnice

3.1.3. Klín

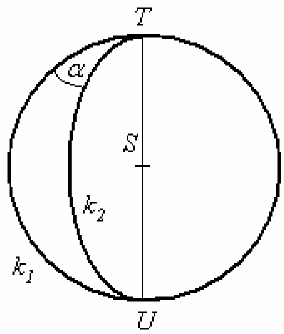
Jestliže máme dvě různé poloroviny *pA*, *pB* se společnou hranicí *p*, které nejsou navzájem opačné, nazveme *klínem A.p.B* průnik poloprostorů *pAB* a *pBA***.** Potom přímka *p* je *hrana klínu* a úhel ω, který vytvoří průnik klínu s libovolnou rovinou kolmou na hranu klínu *p*, je *úhel klínu*.



Obr. 3. Klín

3.1.4. Sférický dvojúhelník

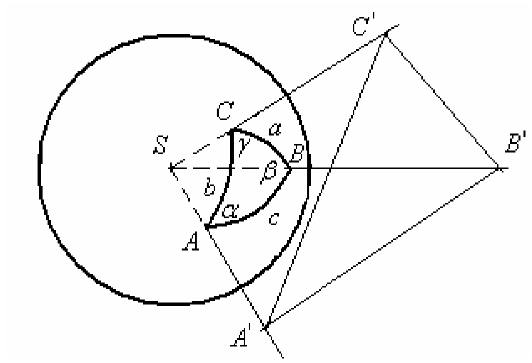
Průnik klínu a kulové plochy se nazývá *sférický dvojúhelník*. Body *U*, *T* jsou vrcholy, polokružnice k_1 a k_2 jsou strany, a úhel *α* je *sférický úhel* dvojúhelníku.



Obr. 4. Sférický dvojúhelník

3. 1. 5. Sférický trojúhelník

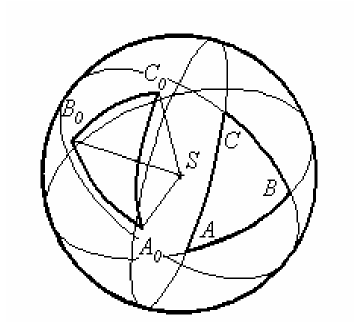
Jestliže máme dán trojúhelník *A'B'C'* a bod *S*, který neleží v rovině daného trojúhelníku, pak množinu všech bodů, které leží na všech polopřímkách s počátkem *S* a protínají trojúhelník *A'B'C'* nazýváme *trojhran*. Bod *S* je *vrchol* trojhranu a polopřímky *SA'*, *SB'* a *SC'* jsou *hrany* trojhranu. Průnikem trojhranu s vrcholem *S* a kulové plochy, která má střed v bodě *S* vznikne *sférický trojúhelník*. Má tři vrcholy *A, B, C,* které vzniknou průnikem kulové plochy s hranami trojhranu, tři strany *a, b, c*, což jsou oblouky *BC = a*, *CA = b*, *AB = c*, jejichž velikosti jsou rovny velikostem středových úhlů *BSC*, *ASC*, *ASB* v míře stupňové nebo obloukové (délkou oblouku např. *BC* v délkových jednotkách rozumíme vzdálenost bodů *B* a *C* na hlavní kružnici, procházející body *B* a *C*) a tři úhly α, β, γ, což jsou sférické úhly, které svírají příslušné oblouky hlavních kružnic *AB*, *AC; BC*, *BA; CA*, *CB*. Úhly také vyjadřujeme v míře stupňové nebo obloukové. Rozdíl mezi součtem všech úhlů sférického trojúhelníku a úhlem přímým se nazývá „exces“ sférického trojúhelníku (nadbytek), značí se ε, tj. $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$.



Obr. 5. Sférický trojúhelník

3. 1. 6. Polární sférický trojúhelník

Body, které vzniknou průnikem kulové plochy a přímky, procházející středem hlavní kružnice a kolmé na rovinu hlavní kružnice, se nazývají *póly* této kružnice. Pokud máme na kulové ploše sférický trojúhelník *ABC*, A_0 je pól hlavní kružnice určené body *B*, *C*, ležící na stejné polokouli jako bod *A*. Stejně tak je B_0 pól hlavní kružnice, určené body *A*, *C* a bod C_0 je pól hlavní kružnice určené body *A*, *B*. Říkáme, že trojúhelník $A_0B_0C_0$ je *polární* k danému trojúhelníku *ABC*.



Obr. 6. Polární trojúhelník

3. 1. 6. 1. Vlastnosti polárních trojúhelníků

Pokud je trojúhelník $A_0B_0C_0$ polární k trojúhelníku *ABC*, pak je taky trojúhelník *ABC* polární k trojúhelník $A_0B_0C_0$. Říkáme, že jsou *polárně sdružené*. Důkaz této vlastnosti je uveden například v [1.].

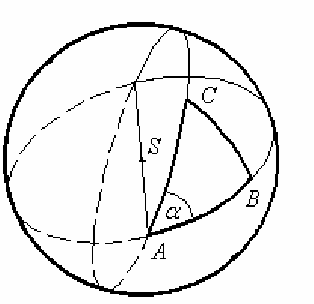
Pokud vezmeme dva polárně sdružené sférické trojúhelníky uvedené výše, pak platí:

$$a + \alpha_0 = b + \beta_0 = c + \gamma_0 = \pi$$

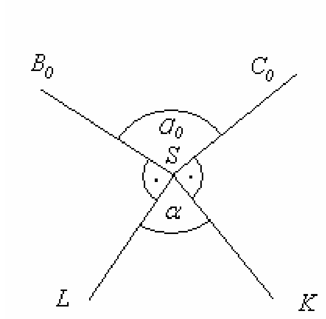
$$a_0 + \alpha = b_0 + \beta = c_0 + \gamma = \pi$$

Tato vlastnost není na první pohled zřejmá, proto si ji zde dokážeme. Nechť máme dva polárně sdružené sférické trojúhelníky *ABC* a $A_0B_0C_0$ (Obr. 6.). Pokud vezmeme klín *B.AS.C* (Obr. 7.) tak ho rovina B_0SC_0 protne postupně v polopřímkách *SK*, *SL*, kde *K*, *L* jsou body vzniklé průnikem roviny B_0SC_0 a hlavních kružnic sférického trojúhelníku vymezených body *AC* a *AB*. Situace v rovině řezu je znázorněna na obrázku 8. Polopřímky SB_0, SC_0, *SK*, *SL* jsou zřejmě kolmé na přímku *SA*. Dále je úhel $\angle KSL$ roven α, $\angle B_0SC_0 = \alpha_0$, $\angle LSB_0 = \angle KSC_0 = \pi / 2$. S přihlédnutím k poloze polopřímek SB_0,SC_0 jsou $\angle LSB_0$, $\angle KSC_0$ styčné úhly k úhlu $\angle LSK$, a platí tedy $\angle B_0SL + \angle LSK + \angle KSC_0 + \angle C_0SB_0 = 2\pi$ čili $\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} + a_0 = 2\pi$

tj. $\alpha + \alpha_0 = \pi$ a cyklické rovnosti.



Obr. 7. Klín *B.AS.C*



Obr. 8. Rovina řezu

3. 2. Sférická trigonometrie

3. 2. 1. Základní věty sférické trigonometrie

K řešení úloh na kulové ploše se s výhodou využívá několik vzorců, které jsou označeny pomocí goniometrických funkcí jako věta *kosinová*, *sinová* a *sinus-kosinová*. Jestliže máme sférický trojúhelník *ABC* se stranami *a*, *b, c* a úhly α, β, γ, pak platí následující věty:

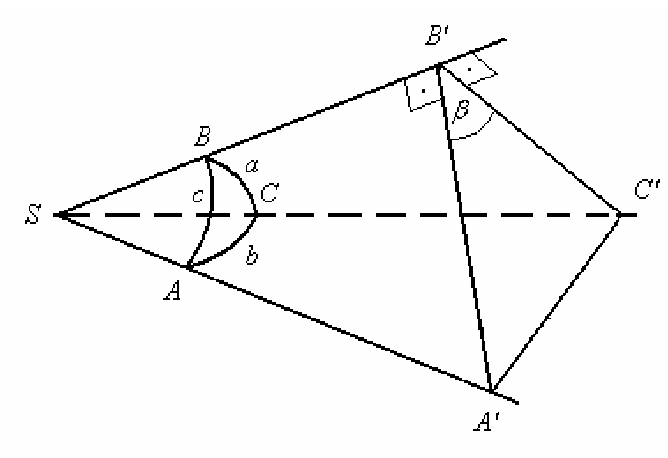
3. 2. 1. 1. Věta kosinová pro stranu sférického trojúhelníku

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad \text{- pro stranu } a$$

(a cyklická záměna proměnných)

Odvození:

Libovolným bodem *B'* na hraně trojhranu *S(A'B'C')* s vrcholem *S* proložíme rovinu kolmou k hraně *SB'*. Rovina protne zbývající hrany trojhranu v bodech *A'*, *C'*.



Obr. 9. Kosinová věta pro stranu

Podle kosinové věty pro rovinný trojúhelník platí pro trojúhelník *A'B'C'* , resp. *A'C'S*:

$$|A'C'|^2 = |A'B'|^2 + |B'C'|^2 - 2|A'B'|\cdot|B'C'|\cdot\cos\beta$$

$$|A'C'|^2 = |SA'|^2 + |SC'|^2 - 2|SA'|\cdot|SC'|\cdot\cos b$$

Rovnice porovnáme a upravíme pomocí Pythagorovy věty pro trojúhelník *SA'B'*, resp. *SB'C'* dostaneme:

$$2|SA'|\cdot|SC'|\cdot\cos b = 2|SB'| + 2|A'B'|\cdot|B'C'|\cdot\cos\beta$$

Rovnici podělíme výrazem $2\cdot|SA'|\cdot|SC'|$:

$$\cos b = \frac{|SB'|}{|SA'|}\cdot\frac{|SB'|}{|SC'|} + \frac{|A'B'|}{|SA'|}\cdot\frac{|B'C'|}{|SC'|}\cdot\cos\beta$$

Za poměry stran můžeme dosadit odpovídající goniometrické funkce rovinné trigonometrie:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta$$

Cyklickou záměnou obdržíme vztahy pro zbývající strany a úhly.

3. 2. 1. 2. Věta kosinová pro úhel sférického trojúhelníku

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$ - pro úhel α

(a cyklická záměna proměnných)

Odvození:

Dle kosinové věty pro stranu polárního sf. trojúhelníku platí:

$$\cos a_0 = \cos b_0 \cdot \cos c_0 + \sin b_0 \cdot \sin c_0 \cdot \cos \alpha_0$$

Podle vztahů pro polární trojúhelník lze rovnost přepsat do tvaru:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \cdot \sin(\pi - \gamma) \cdot \cos(\pi - a)$$

Protože:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cdot \cos \alpha + \sin \pi \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \beta) = \sin \pi \cdot \cos \beta - \cos \pi \cdot \sin \beta = \sin \beta$$

můžeme danou rovnost přepsat do tvaru:

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

Po vynásobení (-1) dostaneme kosinovou větu pro úhel:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$

Pro další úhly bychom ji získali cyklickou záměnou.

3. 2. 1. 3. Věta sinová

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Odvození:

Sinovou větu můžeme také odvodit z věty kosinové pro stranu sférického trojúhelníka. Vyjdeme z tvaru: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$. Úpravou dostaneme:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}, \sin b \neq 0, \sin c \neq 0,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \sin a \neq 0,$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c},$$

Pokud provedeme stejné úpravy pro kosinovou větu pro stranu *b* a *c* (můžeme využít cyklické záměny), dostaneme:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b\cdot\sin^2 c},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\cdot\sin^2 b\cdot\sin^2 c},$$

Pravé strany těchto rovnic jsou stejné, takže můžeme psát:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}$$

a odtud již plyne sinová věta ve tvaru:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

3. 2. 1. 4. Věta sinus-kosinová

$$\sin b\cdot\cos\alpha=\sin c\cdot\cos a-\sin a\cdot\cos\beta\cdot\cos c$$

(a cyklická záměna proměnných)

Odvození:

Vezmu větu kosinovou pro úhel α: $\cos\alpha=-\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$ a vynásobím $\sin b$. Jestliže $\cos\gamma$ rozepíšeme podle kosinové věty pro úhel a roznásobíme, dostaneme:

$$\sin b\cdot\cos\alpha=\sin b\cdot\cos^2\beta\cdot\cos\alpha-\sin b\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$$

podle sinové věty je $\sin\alpha\cdot\sin b=\sin\beta\cdot\sin a$ a také $\sin b\cdot\sin\gamma=\sin\beta\cdot\sin c$ takže můžeme psát rovnici ve tvaru:

$$\sin b\cdot\cos\alpha=\sin b\cdot\cos^2\beta\cdot\cos\alpha-\sin a\cdot\cos\beta\cdot\sin^2\beta\cdot\cos c+\sin c\cdot\sin^2\beta\cdot\cos a$$

Po vytknutí a úpravě:

$$\sin b\cdot\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\beta)=-\sin^2\beta\cdot(\sin a\cdot\cos\beta\cdot\cos c-\sin c\cdot\cos a)$$

Protože $1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$ dostaneme přímo tvar věty sinus-kosinové:

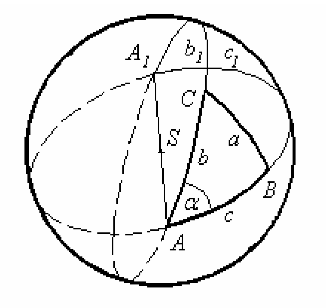
$$\sin b\cdot\cos\alpha=\sin c\cdot\cos a-\sin a\cdot\cos\beta\cdot\cos c$$

3. 2. 2. Vlastnosti sférického trojúhelníku

Pokud máme sférický trojúhelník *ABC* (a k němu polární trojúhelník $A_0B_0C_0$) platí:

a) Součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí. Například $c<a+b$. Pro $a+b\geq 180°$ toto platí, neboť $c<180°$. Pro $0<a+b<180°$ platí postupně $\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma, \cos\gamma>-1, \cos c>\cos(a+b)$ takže $c<a+b$.

b) Součet všech stran je menší než 360°, tj. $a+b+c<360°$. Pokud vezmeme sf. trojúhelník *ABC* a doplníme ho na sférický dvojúhelník o vrcholech *A*, A_1(Obr. 10), snadno vidíme, že $b_1=180°-b, c_1=180°-c$. Protože z předchozího víme, že ve sf. trojúhelníku A_1BC platí $a<b_1+c_1$ snadno vidíme, že $a+b+c<360°$.



Obr. 10. Vlastnosti sférického. trojúhelníka

c) Součet všech úhlů je větší než 180° a menší než 540°, tj. 180°< α + β + γ< 540°. Protože z předchozích vlastností víme, že $a_0 + b_0 + c_0 < 360°$, tedy že $180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma < 360°$ vidíme, že α + β + γ >180°. Protože $0 < \alpha < 180°$, $0 < \beta < 180°$, $0 < \gamma < 180°$ snadno vidíme, že α + β + γ< 540°.

d) Proti stejným stranám leží stejné úhly, proti větší straně leží větší úhel.
Toto plyne ze sinové a kosinové věty pro stranu *a, b*. Když vezmeme
$\sin a = k \sin \alpha, \sin b = k \sin \beta$, kde *k* je zřejmě kladné reálné číslo, platí:
$\cos a - \cos b = \cos c(\cos b - \cos a) + \sin c(\sin b \cos \alpha - \sin a \cos \beta)$,
$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = k \sin c(\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta)$,
$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = k \sin c \sin(\beta - \alpha)$,
kde $1 + \cos c > 0$ a všechny úhly jsou duté. Z toho vyplývá:
je-li $a \geq b$ tedy $\cos a - \cos b \leq 0$, pak je $\sin(\beta - \alpha) \leq 0$,tedy $\beta - \alpha \leq 0$,
je-li $a \leq b$ tedy $\cos a - \cos b \geq 0$, pak je $\sin(\beta - \alpha) \geq 0$,tedy $\beta - \alpha \geq 0$.

3. 2. 3. Typy sférických trojúhelníků

Existuje několik speciálních typů sférických trojúhelníků. Jsou to především:
- *pravoúhlé* sférické trojúhelníky, které mají jeden úhel pravý. Strana proti pravému úhlu se nazývá *přepona* a zbylé strany jsou *odvěsny*.
-*rovnoramenné* sférické trojúhelníky, které mají dvě strany shodné. Tyto strany nazýváme *ramena*, zbývající strana je *základna*.
-*rovnostranné* sférické trojúhelníky, které mají všechny strany shodné.

3. 2. 3. 1. Pravoúhlý sférický trojúhelník

Základní věty sférické trigonometrie mají obecnou platnost pro libovolný sférický trojúhelník. V případě pravoúhlého trojúhelníku se však věta sinová a kosinová výrazně zjednoduší. Položme $\gamma = 90°$, věta sinová pro pravoúhlý sférický trojúhelník pak bude mít tvar:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha, \ \sin b = \sin c \cdot \sin \beta$$

a věty kosinové pro pravoúhlý sférický trojúhelník se změní na:

$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a$, $\cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b$ - kosinová věta pro úhel

$\cos c = \cos a \cdot \cos b$ - kosinová věta pro stranu.

Poslední tvar kosinové věty pro stranu se nazývá sférická věta Pythagorova. Použijeme-li rozvoj funkce kosinus v mocninnou řadu: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ dostaneme po úpravě

$$1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24} - ... = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{2} - ...$$

Pro velmi malá čísla *a*, *b* vyjde i velmi malé číslo *c* a platí přibližně vztah $c^2 = a^2 + b^2$. Pro velmi malé sférické trojúhelníky tak přibližně platí Pythagorova věta rovinné geometrie.
Další vztahy pro pravoúhlý sférický trojúhelník je možné odvodit z vět sinových a kosinových pro pravoúhlý sférický trojúhelník:
Vypočteme-li cos *a* a cos *b* z kosinové věty pro úhel sférického pravoúhlého trojúhelníku a dosadíme pak do kosinové věty pro stranu sférického pravoúhlého trojúhelníku, dostaneme:

$$\cos c = \cot g\alpha \cdot \cot g\beta .$$

Dělíme-li dvě rovnice z věty sinové pro pravoúhlý sférický trojúhelník a při tom dosadíme vždy jednu z rovnic kosinové věty pro úhel pravoúhlého sférického trojúhelníku, dostaneme:

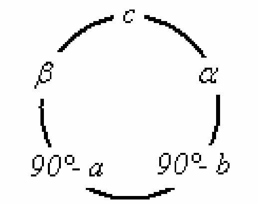
$$\sin a = tgb \cdot \cot g\beta ,\ \sin b = tga \cdot \cot g\alpha .$$

Užijeme-li postupně kosinové věty pro úhel, kosinové věty pro stranu a sinové věty pro pravoúhlý sférický trojúhelník, dostaneme:

$$\cos\alpha = tgb \cdot \cot gc ,\ \cos\beta = tga \cdot \cot gc$$

Uvedené rovnice představují vztahy, kterými jsou vázány vždy tři z pěti prvků pravoúhlého sférického trojúhelníku. Kterýkoli z těchto vztahů lze najít mechanicky pomocí *Neperova pravidla*: Do kruhového schématu zapíšeme nejprve přeponu *c*, po stranách přilehlé úhly *α*, *β* a proti nim rozdíly 90°-*a*, 90°-*b*. Potom podle Neperova pravidla platí, že kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven součinu sinů protilehlých prvků a zároveň součinu kotangent prvků přilehlých. Například:

$$\cos c = \sin(90° - a) \cdot \sin(90° - b) = \cot g\beta \cdot \cot g\alpha$$



Obr. 11. Neperovo pravidlo

3. 2. 5. Příklady

Při řešení sférického trojúhelníku se snažíme určit jeho prvky a, b, c, α, β, γ a nebude nás zajímat jeho umístění na sféře. Při řešení úloh předpokládáme, že prvky a, b, c, α, β, γ∈ $(0, \pi)$, což je nutná podmínka řešitelnosti. Důkazy určenosti sférického trojúhelníku stejně jako další typy úloh jsou uvedeny v [1] .

3. 2. 5. 1. Trojúhelník je určen třemi stranami (úloha SSS).

Trojúhelník je jednoznačně určen třemi stranami, platí-li:
$0° < a + b + c < 360°$ a $a < b + c, b < c + a, c < a + b$
Příklad: $a = 74°22', b = 51°3', c = 80°15'$
Řešení: Strany splňují podmínky, takže úpravou kosinové věty dostaneme:
$\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ =0,2127 $\Rightarrow \alpha = 77°43'$ .Cyklickou záměnou dostaneme
$\cos\beta = 0{,}6143 \Rightarrow \beta = 52°6'$ a $\cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 90°$

3. 2. 5. 2. Trojúhelník je určen třemi úhly (úloha UUU).

Trojúhelník je jednoznačně určen třemi úhly, platí-li:
$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$ a $\alpha + \beta < \gamma + 180°$, $\beta + \gamma < \alpha + 180°$, $\gamma + \alpha < \beta + 180°$
Příklad: $\alpha = 74°23', \beta = 75°14', \gamma = 84°34'$
Řešení: Úhly splňují podmínky řešitelnosti i určenosti, takže můžeme přistoupit k řešení.
Z vlastností sférických polárních trojúhelníků můžeme psát

$a_0 = 180° - \alpha = 107°44'$, $b_0 = 180° - \beta = 107°$, $c_0 = 180° - \gamma = 100°5'$, čímž jsme převedli úlohu typu UUU na úlohu typu SSS, kterou nyní vyřešíme(viz. výše).

$$\cos\alpha_0 = -0{,}378 \Rightarrow \alpha_0 = 112°12'$$

$$\cos\beta_0 = -0{,}369 \Rightarrow \beta_0 = 111°38'$$

$$\cos\gamma_0 = -0{,}29 \Rightarrow \gamma_0 = 106°52'.$$

Z úhlů polárního trojúhelníku určíme strany zadaného trojúhelníku:

$$a = 180° - \alpha_0 = 67°48',\ b = 180° - \beta_0 = 68°22',\ c = 180° - \gamma_0 = 73°8'$$

3. 2. 5. 3. Trojúhelník je určen dvěma stranami a úhlem, který tyto strany svírají (úloha SUS).

Trojúhelník je jednoznačně určen, pokud všechny velikosti úhlů leží v intervalu 0 až 180°.
Příklad: $a = 76°44', b = 120°31', \gamma = 108°12'$

Řešení: Podmínky určenosti jsou splněny, takže můžeme dopočítat stranu *c* pomocí kosinové věty pro stranu: $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = -0{,}378 \Rightarrow c = 112°14'$. Nyní bychom úlohu řešili jako úlohu SSS pro strany *a, b, c*.

3. 2. 5. 4. Trojúhelník je určen stranou a dvěma úhly k ní přilehlými (úloha USU).

Trojúhelník je jednoznačně určen, pokud všechny velikosti úhlů leží v intervalu 0 až 180°.
Příklad: $\alpha = 48°48', \beta = 74°34', c = 74°59'$

Řešení: Podmínky určenosti jsou splněny, takže můžeme dopočítat úhel γ pomocí kosinové věty pro úhel: $\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c = 0 \Rightarrow \gamma = 90°$. Tím jsme získali zadání úlohy UUU, jejíž řešení je popsáno výše (převedeme na úlohu SSS pomocí vlastností sférického polárního trojúhelníku).

3. 2. 5. 5. Pravoúhlý trojúhelník je určen dvěma odvěsnami. (Neperovo pravidlo).

Trojúhelník je určen dvěma stranami a úhlem (pravým), který tyto strany svírají, pokud všechny velikosti úhlů leží v intervalu 0 až 180°. Můžeme řešit jako úlohu SUS nebo využít Neperova pravidla.
Příklad: $a = 29°09'$, $b = 65°44'$, $\gamma = 90°$

Řešení: Podmínky určenosti jsou splněny, takže podle Neperova pravidla (Obr. 9.) můžeme psát $\cos c = \sin(90° - a) \cdot \sin(90° - b) = 0{,}358932 \Rightarrow c = 68°58'$. Dále můžeme postupovat podle úlohy SSS nebo opět využít Neperova pravidla:

$$\cos\alpha = \cot g(90° - b) \cdot \cot g(c) = 0{,}852944 \Rightarrow \alpha = 31°28',$$

$$\cos\beta = \cot g(90° - a) \cdot \cot g(c) = 0{,}214451 \Rightarrow \beta = 77°37'.$$

4. Orientace na zemi a ve vesmíru

4. 1. Orientace na zemi

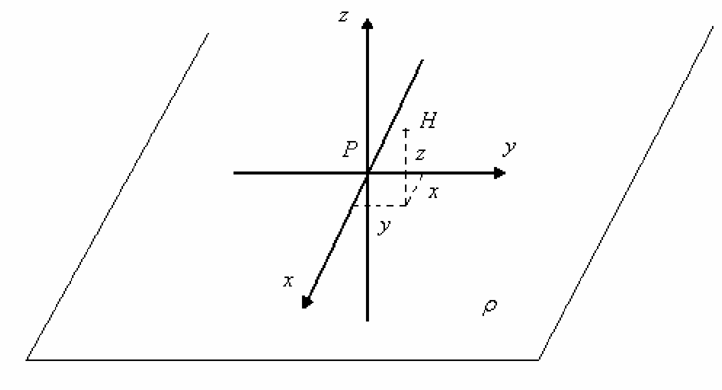
Pro určení polohy tělesa v prostoru je nutné zavést souřadnicovou soustavu, která musí mít definovanou základní rovinu procházející počátkem soustavy souřadnic a základní směr.
Podle počátku (středu) souřadnicové soustavy rozlišujeme:
- souřadnice topocentrické – mají počátek v místě pozorování,
- souřadnice geocentrické – mají počátek ve středu Země,
- souřadnice heliocentrické – mají počátek ve středu Slunce,
- souřadnice selenocentrické – mají počátek ve středu Měsíce

a další.

4. 1. 1. Pravoúhlá soustava souřadnic

Mezi nejčastěji používané patří *pravoúhlá soustava souřadnic* (Obr. 10.). Zde je definovaná základní rovina *ρ*, ve které leží místo pozorovatele (počátek P) a souřadnicové osy

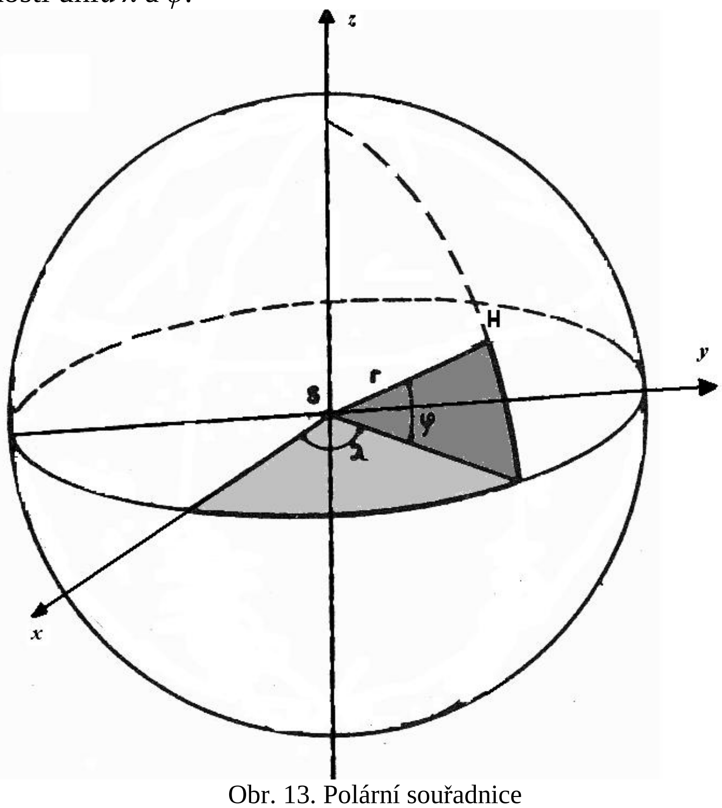
x, y, které jsou na sebe kolmé. Zároveň počátkem P kolmo k rovině ρ prochází třetí osa z. Poloha bodu H je pak určena třemi souřadnicemi x, y, z. Tato soustava se označuje jako *kartézská souřadnicová soustava*.



Obr. 12. Pravoúhlá soustava souřadnic

4. 1. 2. Sférické souřadnice

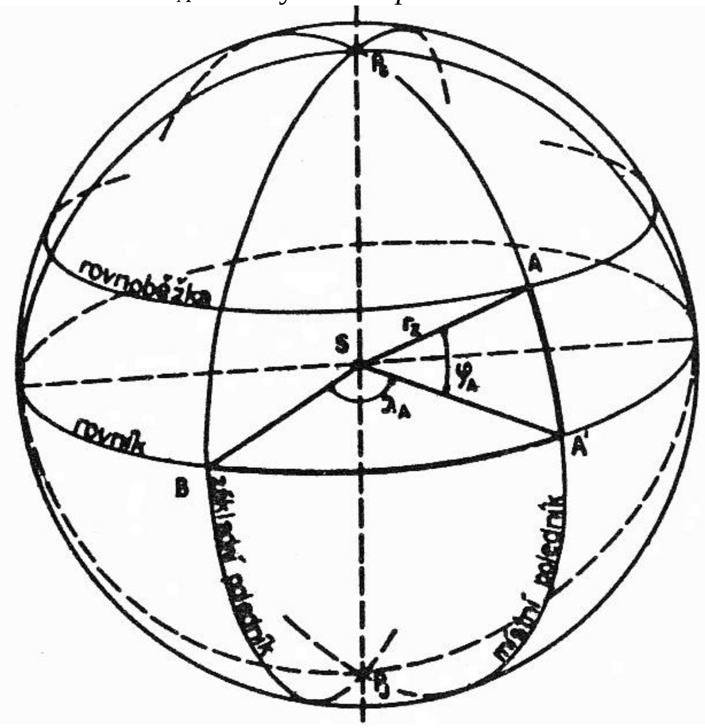
V geografii i astrologii se pro určení polohy bodů v prostoru častěji používá systém sférických souřadnic (Obr. 11.). Základní rovina ρ je stejná jako v předchozím případě a základní směrem je směr kladné poloosy x. Poloha bodu H je pak jednoznačně určena délkou průvodce r a velikostí úhlů λ a φ.



Obr. 13. Polární souřadnice

4. 1. 3. Zeměpisné souřadnice

Zeměkouli protíná osa zemské rotace ve dvou bodech, *pólu severním* P_S a *pólu jižním* P_J (Obr. 12.). Průsečnice roviny, která prochází bodem S a je kolmá na osu zemské rotace se zemskou koulí se nazývá *zemský rovník*. Pokud ztotožníme rovinu rovníku s rovinou ρ a zvolíme na rovníku libovolný bod B (SB-základní směr), můžeme vyjádřit polohu jakéhokoli bodu na zeměkouli pomocí systému sférických souřadnic r_Z, φ_A, λ_A. První polární souřadnice bodu A je rovna délce zemského poloměru r_Z, druhá souřadnice φ_A se nazývá *zeměpisnou šířkou* bodu *A* a třetí souřadnice λ_A se nazývá *zeměpisnou délkou* bodu *A*.



Obr. 14. Zeměpisné souřadnice

Zeměpisnou šířku místa lze obecně definovat jako úhel φ, který svírá normála daného místa s rovinou rovníku. Udává se v rozmezí 0 až +90° na sever od rovníku jako *severní zeměpisná šířka* a v rozmezí 0 až -90° na jih od rovníku jako *jižní zeměpisná šířka*.

Průnikem kulové plochy a roviny procházející bodem *A*, rovnoběžné s rovinou rovníku dostaneme kružnici zvanou *rovnoběžka* (geometrické místo bodů se stejnou hodnotou φ). Nejdelší rovnoběžkou je zřejmě rovník, nejkratší rovnoběžky jsou na pólech, kde je jejich délka nulová.

Průnikem kulové plochy a libovolné roviny proložené zemskou osou dostaneme hlavní kružnici zvanou *poledník*. Poledník, procházející daným bodem *A* se nazývá *místní poledník*. Na rozdíl od zeměpisné šířky, kde je základem odečtu nejdelší rovnoběžka-rovník, nelze jednoznačně určit základní poledník, protože mají všechny stejnou délku. Byl proto smluvně určen *základní*(*nultý*) poledník procházející observatoří v Greenwiche. Tento greenwichský poledník byl zaveden až v roce 1911. Předtím byl základní poledník kladen do různých míst, například na ostrov Rhodos (Hipparchos) nebo na Kanárské ostrovy (Ptolemaios).

Zeměpisná délka místa je úhel λ, který svírá rovina poledníku procházejícího daným místem s rovinou základního poledníku. Udává se v rozmezí 0 až +180° na východ od greenwichského poledníku jako *východní zeměpisná délka* a v rozmezí 0 až -180° na západ od greenwichského poledníku jako *západní zeměpisná délka*.

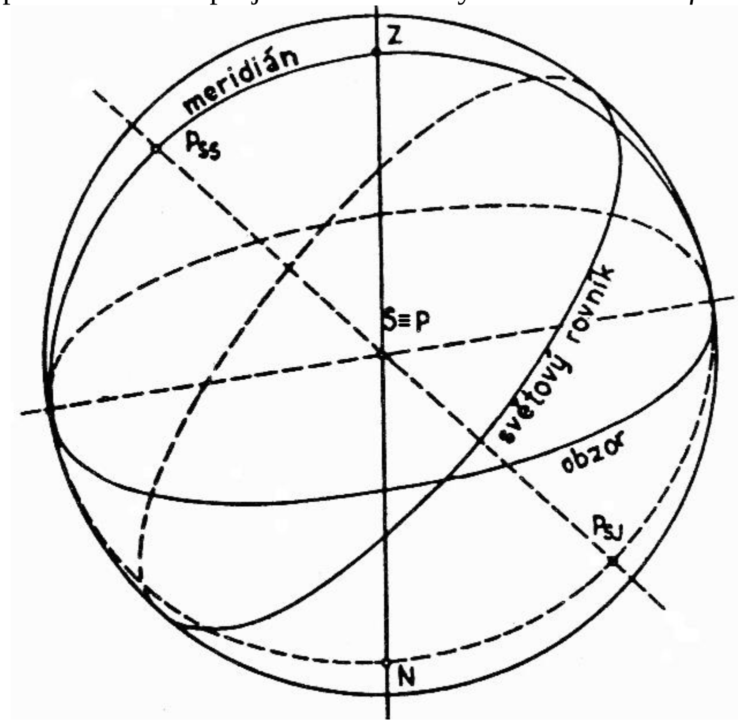
Poloha každého bodu na zemi je tedy jednoznačně určena zeměpisnou šířkou φ a zeměpisnou délkou λ, které nazýváme *zeměpisné souřadnice*. Soustava poledníků a rovnoběžek, vedených ve zvolených vzdálenostech se nazývá *zeměpisná* neboli *geografická síť*.

4. 2. Orientace na obloze

Přestože se vesmírná tělesa nacházejí v různých místech vesmíru, připadá nám, jako by byla umístěna na pomyslné kulové ploše – obloze. Při určování polohy těchto těles se používá sférických souřadnic v různých souřadnicových soustavách.

4. 2. 1. Nebeská sféra

Při určování polohy vesmírných těles na obloze si je promítáme na myšlenou kulovou plochu o značně velikém poloměru. Tuto projekční kouli nazýváme *nebeskou sférou* (Obr. 13.).



Obr. 15. Nebeská sféra

Protože poloměr nebeské sféry ve srovnání s poloměrem zemským mnohonásobně větší, můžeme ztotožnit místo pozorovatele *P* se středem země *S*. Svislá přímka, vedená místem pozorovatele, protne nebeskou sféru ve dvou bodech: *zenitu* (*nadhlavníku*) *Z* a *nadiru* (*podnožníku*) *N*. Rovina zemského rovníku protne nebeskou sféru v kružnici, které se říká *světový rovník*. Zemská osa protne nebeskou sféru ve dvou bodech, *severním světovém pólu* P_{SS} a *jižním světovém pólu* P_{SJ}. Rovina kolmá na spojnici zenitu a nadiru, proložená místem pozorovatele, protne nebeskou sféru v kružnici, která se nazývá *obzor*. Takto stanovený obzor se nazývá *zdánlivý*. Rovina kolmá k rovině obzoru, procházející místem pozorovatele P, zenitem Z, nadirem N a oběma světovými póly, protíná nebeskou sféru v hlavní kružnici, která se nazývá *místní nebeský poledník* (*meridián*).

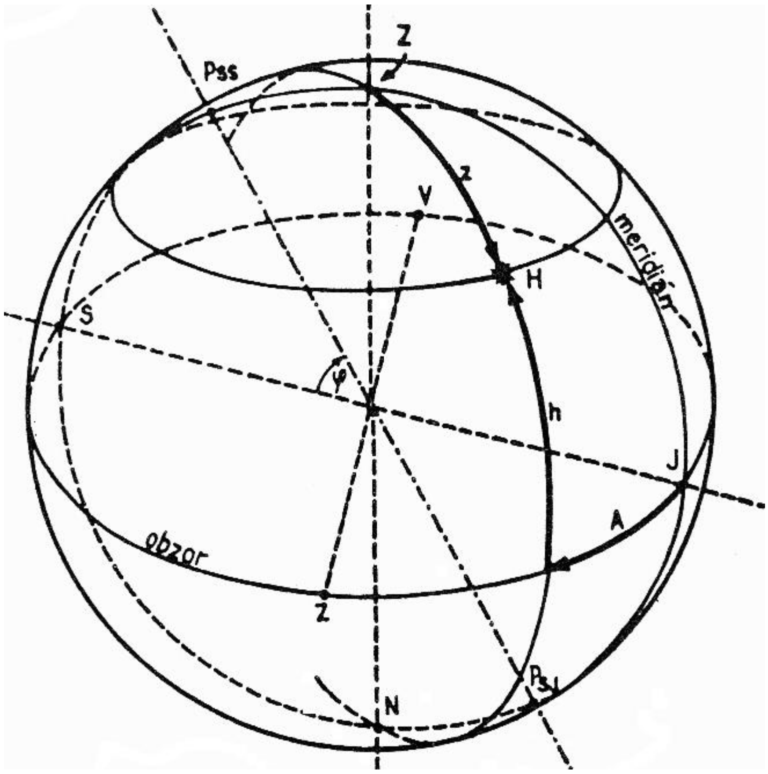
.

4. 2. 2. Astronomické souřadnice

Poloha tělesa na nebeské sféře je v astronomických souřadnicových soustavách určena dvěma úhly. Podle základní roviny rozeznáváme několik typů souřadnicových soustav.

4. 2. 2. 1. Obzorníkové souřadnice

Tyto souřadnice jsou topocentrické a jejich základní rovinou je obzor. Úhlová vzdálenost objektu od obzoru *h* je *výška* objektu *nad obzorem*. Pohybuje se v rozmezí -90° v nadiru až +90° v zenitu. Občas se místo výšky nad obzorem používá tzv. *zenitová vzdálenost z* (0°v zenitu, 180°v nadiru).



Obr. 17. Obzorníkové souřadnice

Výchozím bodem obzorníkových souřadnic je *jižní bod obzoru J*, který dostaneme jako průsečík obzoru s meridiánem. Druhá souřadnice této soustavy se nazývá *azimut A*. Je to úhel mezi rovinou meridiánu a rovinou *výškové kružnice* (rovina kolmá k obzoru, procházející místem pozorovatele a měřeným objektem). Azimut nabývá hodnot 0°až 360° a měří se od jižního bodu obzoru *J* ve směru zdánlivého otáčení oblohy. V turistice se používá azimut měřený od severního bodu obzoru *S*.

4. 2. 2. 2. Rovníkové souřadnice

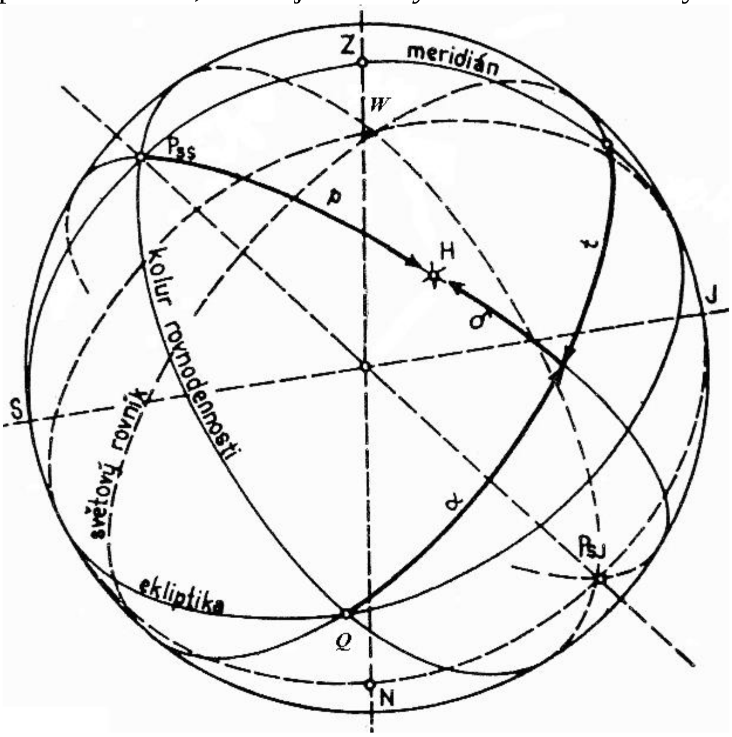
Protože se obloha zdánlivě pohybuje, mění se s časem obzorníkové souřadnice *h* a *A* daného objektu. Tuto nevýhodu nemá *rovníková (ekvatoriální) soustava souřadnic*, jejíž základní rovinou je rovina světového rovníku, procházející středem země (geocentrická soustava).

První souřadnice se nazývá *deklinace δ*. Je to úhlová vzdálenost tělesa *H* od základní roviny světového rovníku. Nabývá hodnot v rozmezí 0°až 90°pro tělesa severního nebe a 0°až -90°pro tělesa jižního nebe. Podobně jako u obzorníkových souřadnic i zde někdy udáváme místo deklinace *pólovou vzdálenost p* mezi severním světovým pólem a tělesem (0°až 180°). Podle výchozího bodu rozeznáváme dva druhy rovníkových souřadnic.

Pokud je výchozí bod stanoven jako průsečík meridiánu a světového rovníku, hovoříme o *rovníkových souřadnicích prvního druhu*. Úhel mezi rovinou meridiánu a *rovinou deklinační kružnice* (rovinou kolmou k rovině světového rovníku, procházející daným tělesem *H*, která vytne na nebeské sféře *deklinační* kružnici, procházející oběma světovými póly) je *hodinový úhel t*. Měří se od roviny meridiánu ve směru zdánlivého otáčení oblohy k rovině deklinační kružnice tělesa *H*. Nabývá hodnot 0^h-24^h (0°-360°).

Protože se v průběhu času hodinový úhel t mění, je třeba zavést druhou souřadnici jiným způsobem. Zavedeme proto pojem *ekliptika*. Je to kružnice, v níž rovina oběhu Země kolem Slunce protne nebeskou sféru. Se světovým rovníkem se ekliptika protne ve dvou bodech, *jarním Q* a *podzimním W*. Rovina kolmá k rovině rovníku, procházející jarním a podzimním bodem, se nazývá *rovina koluru rovnodennosti*.

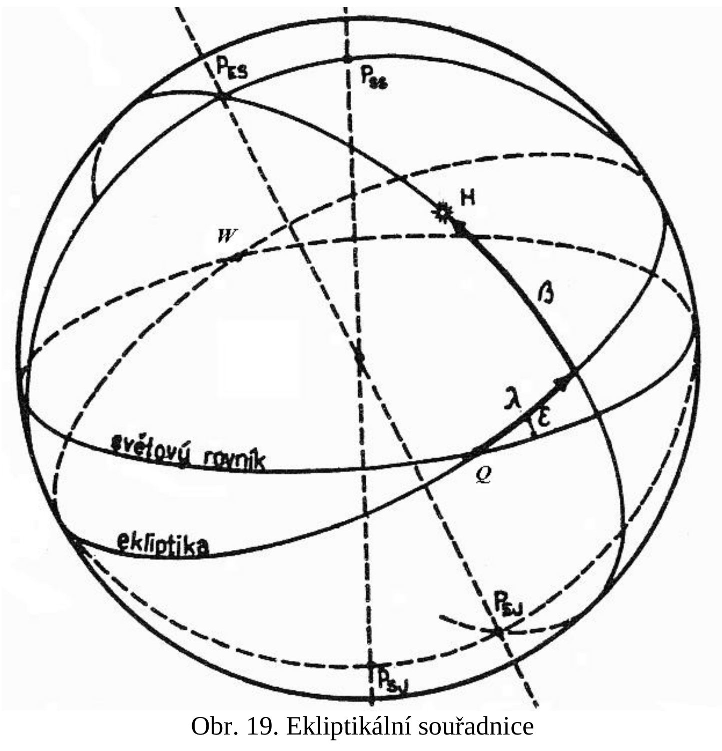
U *rovníkových souřadnic druhého druhu* je za výchozí bod zvolen jarní bod *Q*. Úhel mezi rovinou koluru rovnodennosti a rovinou deklinační kružnice daného tělesa, měřený od jarního bodu proti zdánlivému otáčení oblohy se nazývá *rektascenze α*. Rektascenze nabývá hodnot 0^h-24^h (0°-360°) a platí $\Theta = t + \alpha$, kde Θ je *hvězdný čas* neboli hodinový úhel jarního bodu *Q*.



Obr. 18. Rovníkové souřadnice

4. 2. 2. 3. Ekliptikální souřadnice

Pro určování polohy těles sluneční soustavy se používají *souřadnice ekliptikální*. Základní rovinou je rovina ekliptiky a základním bodem je zvolen jarní bod *Q*. První souřadnicí je *ekliptikální šířka β*, což je úhlová vzdálenost od základní roviny. Nabývá hodnot od -90° v *jižním ekliptikálním pólu* P_{EJ} (nachází se v souhvězdí Mečouna) až do +90°v *severním ekliptikálním pólu* P_{ES} (nachází se v souhvězdí Draka).

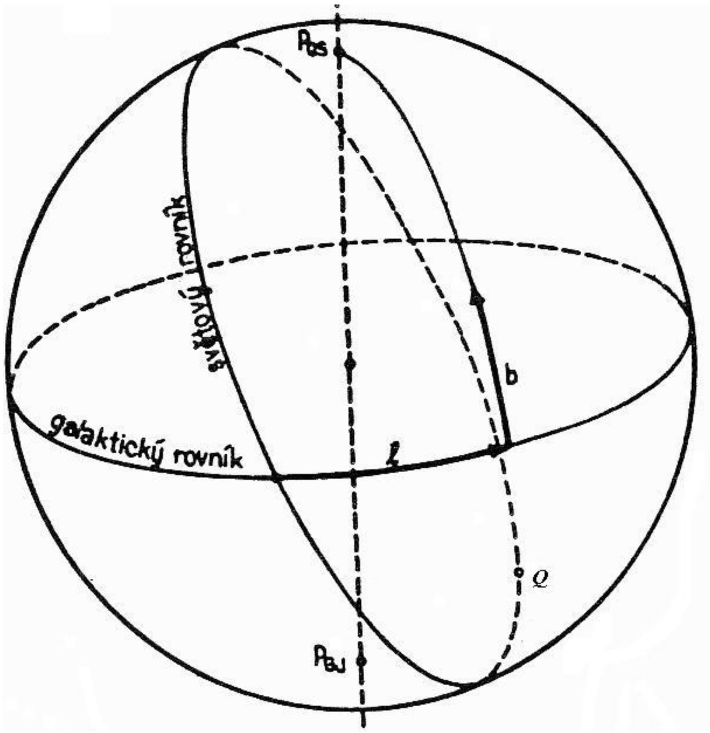


Obr. 19. Ekliptikální souřadnice

Druhou souřadnicí je ekliptikální délka λ, což je úhel mezi rovinou procházející jarním a podzimním bodem kolmou na rovinu ekliptiky a rovinou procházející daným objektem kolmou na rovinu ekliptiky. Měříme ji od jarního bodu proti směru zdánlivého otáčení oblohy a vyjadřujeme ji ve stupních 0°až 360°.

4. 2. 2. 4. Galaktické souřadnice

Pro určování polohy těles v naší galaxii se používají souřadnice galaktické. Za základní rovinu se volí *rovina naší Galaxie*.



Obr. 20. Galaktické souřadnice

Podobným způsobem jako u předchozích soustav zde určujeme *galaktickou šířku b*, což je vzdálenost od základní roviny. Nabývá hodnot -90° v *jižním galaktickém pólu P_{GJ}* (leží v souhvězdí Sochaře) až +90° v *severním galaktickém pólu P_{GS}* (leží v souhvězdí Vlasů Bereniky). Podobným způsobem určujeme *galaktickou délku l* (měříme ji od výchozího bodu, který leží v souhvězdí Střelce, ve směru rostoucí rektascenze).

4. 2. 3. Transformace souřadnic

Vzhledem k faktu, že se v astronomii používá více souřadných systémů, je nutné znát převodní vztahy mezi soustavami souřadnic.

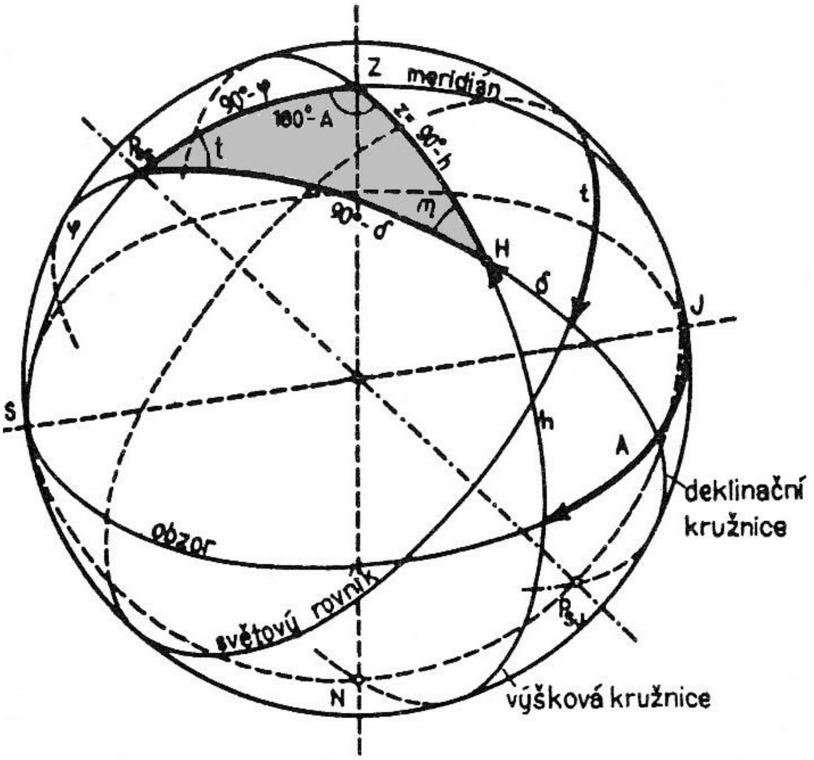
4. 2. 3. 1. Transformace souřadnic mezi obzorníkovou a rovníkovou soustavou

Při odvozování převodních vztahů vycházíme z *nautického trojúhelníku*. Je to sférický trojúhelník na nebeské sféře spojující zenit *Z*, severní světový pól P_{SS} a daný objekt *H*. Mezi těmito body jsou na nebeské sféře vedeny tři hlavní kružnice, mezi P_{SS} a *Z* je to meridián, mezi P_{SS} a *H* deklinační kružnice a mezi *H* a *Z* výšková kružnice. Jak plyne z obrázku 19. lze strany a úhly nautického trojúhelníku vyjádřit pomocí rovníkových a obzorníkových souřadnic:

$$P_{SS}H = 90° - \delta, ZH = z = 90° - h, P_{SS}Z = 90° - \varphi,$$

$$\angle ZP_{SS}H = t, \angle P_{SS}HZ = \eta, HZ\angle P_{SS} = 180° - A.$$

Úhel η je tzv. *paralaktický úhel*, který k většině praktických výpočtů nepotřebujeme.



Obr. 21. Nautický trojúhelník

Pokud použijeme kosinovou větu pro stranu ZH sférického trojúhelníku dostaneme:

$$\cos(90° - h) = \cos(90° - \delta) \cdot \cos(90° - \varphi) + \sin(90° - \delta) \cdot \sin(90° - \varphi) \cdot \cos t$$

a po úpravě dostaneme vztah: $\sin h = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos t$.

Pokud použijeme sinovou větu ve tvaru:

$$\frac{\sin(180° - A)}{\sin(90° - \delta)} = \frac{\sin t}{\sin(90° - h)},$$

tak po úpravě dostaneme vztah: $\cos h \cdot \sin A = \cos\delta \cdot \sin t$.

Pokud použijeme větu sinus-kosinovou ve tvaru:

$$\sin(90° - h) \cdot \cos(180° - A) = \cos(90° - \delta) \cdot \sin(90° - \varphi) - \sin(90° - \delta) \cdot \cos(90° - \varphi) \cdot \cos t,$$

tak po úpravě dostaneme vztah: $\cos h \cdot \cos A = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$.

Tyto 3 vztahy představují transformační rovnice, kdy ze známých souřadnic *φ*, *δ*, *t* hledáme obzorníkové souřadnice *h* a *A*. Pro opačný převod použijeme stejného postupu a získáme rovnice:

$$\sin\delta = \sin h \cdot \sin\varphi - \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \cos A,$$

$$\cos\delta \cdot \sin t = \cos h \cdot \sin A,$$

$$\cos\delta \cdot \cos t = \cos\varphi \cdot \sin h + \sin\varphi \cdot \cos h \cdot \cos A.$$

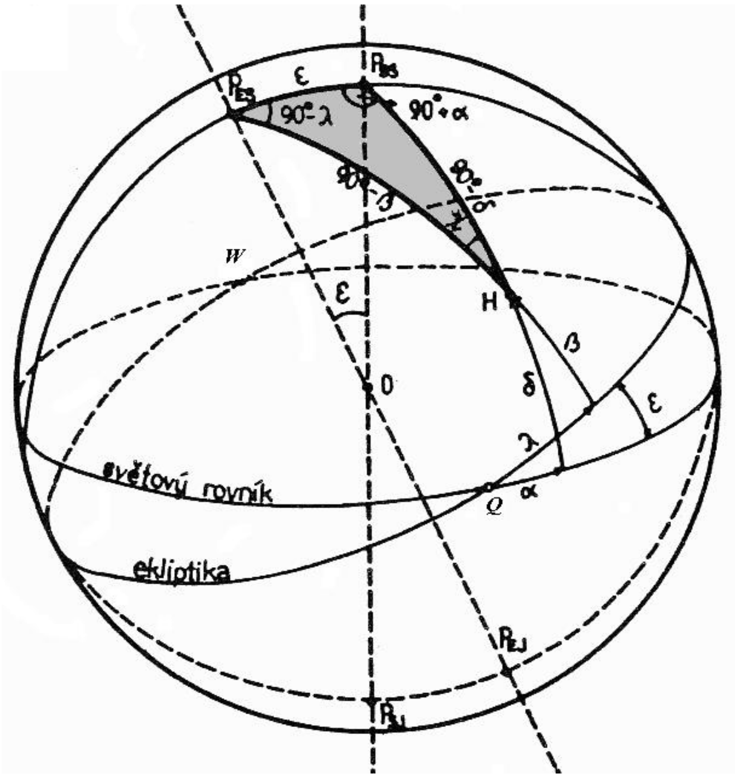
4. 2. 3. 2. Transformace souřadnic mezi rovníkovou a ekliptikální soustavou

Zde je postup obdobný, jako v minulém případě. Vycházíme ze sférického trojúhelníku určeného severním světovým pólem P_{SS}, severním ekliptikálním pólem P_{ES} a daným tělesem H. Úhly i strany sférického trojúhelníku vyjádříme tentokrát pomocí rovníkových a ekliptikálních souřadnic:

$$P_{ES}P_{SS} = \varepsilon, P_{ES}H = 90° - \beta, P_{SS}H = 90° - \delta, ,$$

$$\angle P_{SS}P_{ES}H = 90° - \lambda, \angle P_{ES}HP_{SS} = \chi, \angle HP_{SS}P_{ES} = 90° + \alpha.$$

Úhel χ se pro praktické výpočty nepoužívá, *ε* je úhel mezi rovinou světového rovníku a rovinou ekliptiky. Pro epochu 2000 (tj. určen v roce 2000) je *ε* = 23°26'21,5".



Obr. 22. Rovníkové a ekliptikální souřadnice

Užitím stejných vět a úprav jako v předchozí transformaci dostaneme transformační vztahy pro převod rovníkových souřadnic α, δ na souřadnice ekliptikální λ, β.

$$\sin\beta = \sin\delta \cdot \cos\varepsilon - \cos\delta \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\alpha\,,$$

$$\cos\lambda \cdot \cos\beta = \cos\beta \cdot \cos\alpha\,,$$

$$\sin\lambda \cdot \cos\beta = \sin\delta \cdot \sin\varepsilon + \cos\delta \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha\,.$$

Pro opačný převod souřadnic platí vzorce:

$$\sin\delta = \sin\beta \cdot \cos\varepsilon + \cos\beta \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda\,,$$

$$\cos\delta \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\lambda\,,$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\delta = -\sin\beta \cdot \sin\varepsilon + \cos\beta \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\lambda\,.$$

4. 2. 3. 3. Transformace souřadnic na galaktické souřadnice

Tato transformace (i transformace k ní opačná) se provádí podle speciálních tabulek.

5. Příklady zeměpisných a astronomických výpočtů

Příklad 1
Zadání:
Určete sférickou vzdálenost Lisabonu (9°11' z. d., 38°42' s. š.) a Ria de Janeira (43°09' z. d., 22°55' j. š.).
Řešení:
Na zemské kouli vezmeme sférický trojúhelník *ABC* takový, že bod *A* umístíme do místa, kde leží Lisabon, bod *B* do místa Ria de Janeira a bod *C* umístíme do severního zemského pólu. Pokud si situaci představíme (například na obr. 14), můžeme určit stranu *a*, *b* a úhel γ sférického trojúhelníku *ABC*:

$a = 90° + 22°55' = 112°55'$, $b = 90° - 38°42' = 51°18'$, $\gamma = 43°09' - 9°11' = 33°58'$
Nyní snadno určíme hledanou vzdálenost bodů *A*, *B*, neboli stranu *c* sférického trojúhelníku *ABC* pomocí kosinové věty pro stranu *c*:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma,$$

$$\cos c = \cos 112°55' \cdot \cos 51°18' + \sin 112°55' \cdot \sin 51°18' \cdot \cos 33°58' = 0{,}352709,$$

$$c = 69°20'2849'' = 1{,}210332 \text{rad}.$$

Pokud vezmeme poloměr Země *r* = 6378km, je délka oblouku *AB* rovna

$$d = r \cdot c = 7719{,}6 \cong 7700 \text{ km}.$$

Závěr:
Sférická vzdálenost Lisabonu a Ria de Janeira je přibližně 7700km.

Příklad 2
Zadání:
Vypočtěte azimut a výšku nad obzorem u planety Venuše pro pozorovatele v Brně (φ = 49°12'15") v okamžiku, kdy je místní hvězdný čas Θ = $5^{h}08^{min}21^{s}$. V tomto okamžiku jsou ekliptikální souřadnice Venuše: β = -2°17'12", λ = 145°15'31,5".
Řešení:
Použitím rovnice $\sin\delta = \sin\beta \cdot \cos\varepsilon + \cos\beta \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda$ vypočítáme deklinaci Venuše δ:

$$\sin\delta = \sin(-2°17'12'') \cdot \cos 23°26'21{,}5'' + \cos(-2°17'12'') \cdot \sin 23°26'21{,}5'' \cdot \sin 145°15'31{,}5'' = 0{,}18982272$$

$$\delta = 10°56'3208''.$$

Použitím rovnice $\cos\delta \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\lambda$ vypočítáme rektascenzi Venuše α:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta \cdot \cos\lambda}{\cos\delta} = \frac{\cos(-2°17'12'') \cdot \cos 145°15'31{,}5''}{\cos 10°56'3208''} = -0{,}836282.$$

Protože cos α je záporný, leží α ve druhém nebo třetím kvadrantu.
Toto určení úhlu α není jednoznačné (α nabývá hodnot 0°-360°), provedeme proto kontrolu ve kterém kvadrantu se úhel α nachází. Určíme sin α z rovnice:

$$\sin\alpha \cdot \cos\delta = -\sin\beta \cdot \sin\varepsilon + \cos\beta \cdot \cos\varepsilon \cdot \sin\lambda,$$

$$\sin\alpha = \frac{-\sin(-2°1712) \cdot \sin 23°26'21{,}5'' + \cos(-2°1712) \cdot \cos 23°26'21{,}5'' \cdot \sin 145°15'31{,}5''}{\cos 10°56'3208''} = 0{,}5482994.$$

Protože je sin α kladný, leží α v prvním nebo druhém kvadrantu. Ze získaných výsledků plyne, že α leží ve druhém kvadrantu. Takže $\alpha = 146°44'58{,}4''$, převedeno na časovou míru α = $9^{h}46^{min}59{,}9^{s}$.
Hodinový úhel t vypočítáme ze vztahu $\Theta = t + \alpha$:

$$t = 5^{h}08^{min}21^{s} - 9^{h}46^{min}59{,}9^{s} = -4^{h}38^{min}38{,}9^{s}$$

Je-li hodinový úhel záporný, získáme jeho správnou hodnotu odečtením od 24^{h}. Tedy

$$t = 24^{h} - 4^{h}38^{min}38{,}9^{s} = 19^{h}21^{min}21{,}1^{s} = 290°20'16{,}5''$$

Výšku nad obzorem *h* určíme z rovnice: $\sin(h) = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos t$, tedy

$$\sin(h) = \sin 10°56'3208'' \cdot \sin 49°12'15'' + \cos 10°56'3208'' \cdot \cos 49°12'15'' \cdot \cos 290°20'16{,}5'' = 0{,}666564$$

$$h = 21°30'34{,}4''$$

Azimut *A* určíme z rovnice $\cos(h) \cdot \sin A = \cos\delta \cdot \sin t$,

$$\sin A = \frac{\cos\delta \cdot \sin t}{\cos(h)} = \frac{\cos 10°56'3208'' \cdot \sin 290°20'16{,}5''}{\cos 21°30'34{,}4''} = -0{,}989525,$$

$$A = -81°41'58{,}9''.$$

Protože i azimut *A* nabývá hodnot 0°-360°,musíme provést kontrolu, v kterém kvadrantu leží.
Vyjdeme z rovnice $\cos(h) \cdot \cos A = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$ a určíme cos *A*:

$$\cos A = \frac{-\cos 49°12'15''\cdot \sin 10°56'3208''+\sin 49°12'15''\cdot \cos 10°56'3208''\cdot \cos 290°20'16{,}5''}{\cos 21°30'34{,}4''}$$

$$\cos A = 0{,}1443612 .$$

Protože sin A je záporný a cos A kladný, bude a ležet ve čtvrtém kvadrantu a jeho velikost tedy bude A = 360° - 81°41'58,9" = 278°18'01".

Závěr:

Venuše se pro pozorovatele bude 21°30'34,4" nad obzorem v místě o azimutu 278°18'01".

Příklad 3

Zadání:

Vypočtěte délku denního oblouku slunce na obloze v den zimního slunovratu v Brně (φ = 49°12'15"). Deklinace Slunce je δ = -23°26'21,5".

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu $\sin(h) = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot \cos t_0$, kde t_0 je hodinový úhel Slunce v okamžiku východu nebo západu. V tomto okamžiku je výška slunce nad obzorem h=0°, můžeme proto vyjádřit $\cos t_0 = -tg\varphi \cdot tg\delta = -tg\, 49°12'15''\cdot \mathrm{tg}(-\,23°26'21{,}5'') = 0{,}502350$, takže t_0 = 59°50'39,8" = $3^h 59^{min} 22{,}7^s$. Protože hodinový úhel t_0 nám udává polovinu denního oblouku tělesa na obloze, vynásobíme t_0 dvěma a dostaneme celou dráhu Slunce na obloze: $2t_0 = 7^h 58^{min} 45{,}4^s$.

Závěr:

V den zimního slunovratu je slunce v Brně nad obzorem $7^h 58^{min} 45{,}2^s$.

Příklad 4

Zadání:

Stanovte azimuty východů slunce pro 50° severní šířky ve dnech rovnodenností(deklinace Slunce δ = 0°) a ve dnech slunovratů(deklinace Slunce δ = ±23°26'21,5").

Řešení:

Vyjdeme z rovnice $\cos(h) \cdot \cos A = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$ a z podmínky h = 0°.

Dostaneme: $\cos A = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t$.

Když dosadíme za cos t = $-tg\varphi \cdot tg\delta$ (Příklad 2), můžeme psát:

$$\cos A = -\cos\varphi \cdot \sin\delta + \sin\varphi \cdot \cos\delta \cdot \frac{-\sin\varphi \cdot \sin\delta}{\cos\varphi \cdot \cos\delta} = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} .$$

Pro rovnodennost je δ = 0°, takže cos A=0°. Zde musíme určit, zda se jedná o západ (A_Z leží mezi 0°až 180°) či východ(A_V leží mezi 180°až 360°). Protože cos A=0° je A_Z = 90°, A_V = 360°-A_Z = 270°.

Pro zimní slunovrat je δ = -23°26'21,5", takže dostaneme

$\cos A = -\dfrac{\sin(-\,23°26'21{,}5'')}{\cos 50°} = -0{,}618832$, A_Z = 51°46'08,8", A_V = 308°13'51,2".

Pro letní slunovrat je δ = 23°26'21,5", takže stejným způsobem dostaneme A_Z =128°13'51,2", A_V = 231°46'08,8".

Závěr:

Azimut východu slunce A_V je ve dnech rovnodenností A_V = 270°, v době zimního slunovratu A_V = 308°13'51,2" a v době letního slunovratu A_V = 231°46'08,8".

6. Závěr

Práce se nezabývá řešením otevřených problémů, ale je zaměřena na vysvětlení základních pojmů a vlastností. Toto téma je velice široké, takže jsem se musel často rozhodovat, kterou část nedokazovat, či zcela vynechat. Zvědavému čtenáři bych vřele doporučil literaturu [1], kde je sférická trigonometrie popsána velice podrobně. Část, kde se věnuji souřadnicovým soustavám má především popisný význam, aby si čtenář uvědomil, že sférickou geometrii může vidět všude okolo sebe. Uvedené příklady mají ilustrovat některé druhy zeměpisných a astronomických výpočtů. V práci je použito větší množství obrázků, které však mají význam pouze ilustrativní, proto prosím čtenáře, aby omluvil případné nepřesnosti

7. Seznam použitých zdrojů

[1] J. Kůst: *Sférická geometrie*, SPN, Praha, 1964.
[2] R. Brázdil: *Úvod do studia planety Země*, SPN, 1988.
[3] J. Procházka: *Sférická astronomie*, Naše vojsko, 1953.
[4] Internet – Diplomová práce Martina Hložka: http://geometrie.kma.zcu.cz