Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Diplomová práce

Žákovská řešení slovních úloh se zlomky a s procenty

Vypracovala: Bc. Hana Adamcová

Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Žákovská řešení slovních úloh se zlomky a s procenty jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

……..………………………
Bc. Hana Adamcová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat paní RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za odborné vedení a věcné připomínky během psaní této diplomové práce. Dále děkuji mé rodině za plnou podporu během studia.

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá tématem z matematiky, a to slovními úlohami se zlomky a s procenty. Konkrétně se tato práce věnuje žákovským řešením takových slovních úloh. Práce seznamuje čtenáře s tím, jak vybrané slovní úlohy se zlomky a s procenty řeší žáci 9. ročníků základních škol. Přibližuje čtenářům různé početní postupy, které žáci zvolili. Některé postupy se objevily častěji, jiné naopak pouze výjimečně. Každá slovní úloha je doplněna grafem, který znázorňuje úspěšnost žáků při řešení dané slovní úlohy. Dále jsou v práci zařazeny fotografie žákovských řešení pro čtenářovu lepší představu. V závěru kapitoly jsou některé slovní úlohy zpracované pomocí metody Concept Cartoons. Práce ukazuje především na úzké souvislosti mezi zlomky a procenty. A hlavně na to, jak to vidí žáci základních škol.

Abstract

This diploma thesis deals with a topic of mathematics, namely word problems with fractions and percentages. Specifically, this work deals with students' solutions to such word problems. The work acquaints the reader with how selected word problems with fractions and percentages are solved by pupils in the 9th grade of primary schools. It introduces the readers to the various numerical procedures chosen by the students. Some procedures occurred more frequently, others only rarely. Each word problem is supplemented by a graph, which shows the success of students in solving the word problem. The work also includes photographs of students' solutions for the reader's better idea. At the end of the chapter, some word problems are processed using the Concept Cartoons method. The work shows mainly close connections between fractions and percentages. And especially on how primary school students look at the problem from their point of view.

Obsah

Úvod

Zlomky a procenta jsou důležitou součástí učiva na základní škole. Ve své bakalářské práci jsem se věnovala slovním úlohám právě se zlomky a s procenty. Snažila jsem se ukázat úzké souvislosti mezi zlomky a procenty. Rozhodla jsem se tomuto tématu věnovat i v mé diplomové práci, ale tentokrát jsem se zaměřila na to, jak souvislosti mezi těmito dvěma tématy vidí žáci základní školy. Jelikož jsem budoucí učitelka matematiky, myslím si, že by mi tento výzkum mohl pomoci i do budoucna.

V mé práci hraje hlavní roli výzkum a z něho získaná žákovská řešení. Nejprve jsem si naplánovala, jak bude výzkum probíhat. Poté jsem sestavila písemný test, který měl dvě varianty a každá obsahovala pět slovních úloh. Některé slovní úlohy jsem vybrala ze sbírky, kterou jsem vytvořila v mé bakalářské práci. K nim párové slovní úlohy jsem vytvořila sama. Inspirovala jsem se v učebnici matematiky Odvárko, Kadleček 2011. Písemný test jsem poté předložila žákům devátých ročníků základní školy. Získaná žákovská řešení jsem opravila a analyzovala jednotlivé postupy řešení. Hledala jsem, jaké postupy používají žáci nejčastěji a jaké naopak ojediněle. Také jsem se soustředila na to, jaké žáci dělají chyby. Všechny získané informace jsem shrnula do závěrečné diskuze. V závěru mé práce jsem čtyři slovní úlohy a jejich žákovská řešení zpracovala pomocí metody Concept Cartoons.

Veškeré použité fotografie žákovských řešení jsou mé vlastní a zcela anonymní. Také všechny použité grafy jsem vytvořila sama pomocí programu Excel. Obrázky Concept Cartoons jsem nakreslila vlastní rukou.

1 Teoretický základ

1.1 Zlomky

Se zlomky se žáci podle RVP ZV poprvé setkávají již ve 4. ročníku na prvním stupni základní školy. Seznamují se s pojmy celek, část, zlomek a pracují se základními zlomky (polovina, čtvrtina, pětina, desetina). Pomocí obrázků se učí určovat části celku. Podrobněji se žáci věnují zlomkům až na začátku 7. ročníku, kde se učí počítat se zlomky. Jednou z možností, jak chápat zlomek, je *zlomek jako podíl.* Zlomek představuje jiný způsob zápisu dělení neboli zlomek je podíl dvou výrazů. Ve slovních úlohách použitých v tomto výzkumu jsou pouze zlomky, které mají v čitateli i jmenovateli číslo. Zároveň jsou všechny použité zlomky pravé. Pravé zlomky jsou takové zlomky, jejichž číslo v čitateli je menší, než číslo ve jmenovateli. Pravý zlomek je vždy menší než jedna (Šarounová 1997).

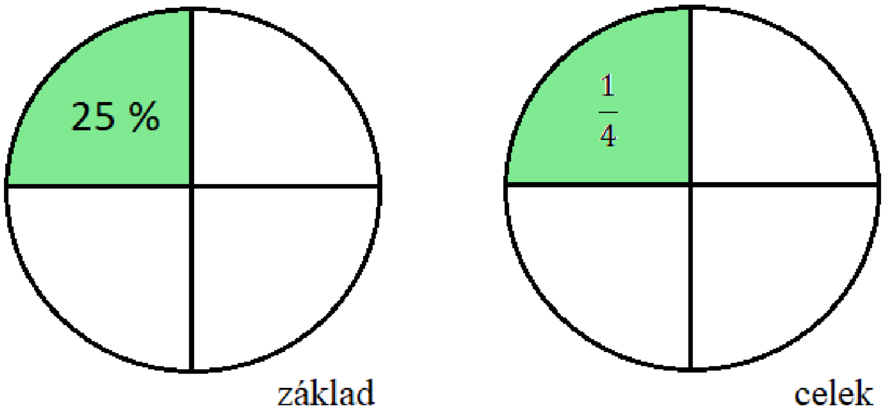
Zlomek vždy označuje určitou část celku. Proto je zlomek vždy spojen s celkem, ze kterého vznikl (např. polovina chleba, osmina pizzy, třetina z ceny). Pro určení hodnoty dané části z celku, existuje jednoduchý výpočet. Nejprve zadaný celek rozdělíme na tolik částí, kolik říká číslo ve jmenovateli. Poté vybereme tolik částí, kolik udává číslo v čitateli. Takovýto postup se označuje jako výpočet přes kmenový zlomek (Divíšek 1989).

Každý zlomek lze zapsat jako desetinné číslo. Každé takové desetinné číslo, které má za desetinnou čárkou konečný počet číslic anebo se stále opakují stejné skupiny číslic, se dá napsat jako zlomek. Zlomek převedeme na desetinné číslo tak, že čitatele vydělíme jmenovatelem, konkrétně $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$. Pokud se v takovém podílu od určitého místa objevují pouze nuly, jde o *konečný desetinný rozvoj*. V případě, že se od určitého místa číslice nebo skupiny číslic opakují, jde o *nekonečný periodický desetinný rozvoj* (Delventhal 2004).

Zlomky budou vždy součástí učiva, jen se bude měnit jejich postavení v probírané látce. Zlomky jsou velmi důležitou součástí matematiky, jelikož na zlomky navazují další matematická témata (Divíšek 1989).

1.2 Procenta

Procenta se v osnovách poprvé objevují na začátku 8. ročníku základní školy. K nim se připojuje i již žákům známá trojčlenka s procenty. Procenta jsou důležitou součástí matematiky. Objevují se nejen v matematice ale i ve fyzice, technice, přírodovědě, společenských vědách a ekonomice. Procenta také vyjadřují část nějakého celku. Při práci s procenty se tento celek nazývá základ (Odvárko, Kadleček 2011).



Obrázek 1 (vztah mezi základem a celkem)

Hodnota části ze základu odpovídající zadanému počtu procent se nazývá procentová část. U slovních úloh s procenty pracujeme vždy se základem, procentovou částí a počtem procent. Výpočet pro hodnotu procentové části je jednoduchý. Nejprve zjistíme hodnotu 1 % tak, že základ vydělíme stem. Hodnotu 1 % pak vynásobíme zadaným počtem procent. Takovém postupu se říká výpočet přes jedno procento (Odvárko, Kadleček 2011).

Výpočty procent jsou speciálním případem trojčlenky v přímé úměrnosti. Jelikož vztah mezi počtem procent a procentovou částí je přímo úměrný. Ze zadání slovní úlohy známe vždy dva údaje. Třetím známým údajem, který využijeme do trojčlenky je 100 %, jelikož víme, že základ je 100 % (Delventhal 2004).

Pro moji práci je nejdůležitější to, že procenta a zlomky spolu velmi úzce souvisí. Jelikož 1 % ze základu je $\frac{1}{100}$ z celku (Šarounová 1998). Souvislosti mezi vyjádřením v procentech pomocí zlomku s číslem 100 ve jmenovateli a zápisem ve tvaru desetinného čísla je následující (Delventhal 2004):

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$8\,\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$$100\,\% = \frac{100}{100} = 1$$

Obrázek 2 (vztah mezi procenty, zlomky a desetinnými čísli)

1.3 Slovní úlohy

Slovní úlohy provázejí žáky po celou dobu studia na základní škole. V jednodušší podobě se vyskytují již na prvním stupni. Na druhém stupni vždy doprovází probírané učivo. Slovní úlohy jsou tradiční a klíčovou součástí výuky matematiky. Žákova schopnost řešit slovní úlohy v matematice souvisí i s řešením dalších problémů v ostatních předmětech. V neposlední řadě se žákova schopnost řešit slovní úlohy projeví i v každodenním životě. Tato schopnost není ovlivněna pouze matematickými znalostmi žáka, ale podílí se na ní i další faktory. Z nichž zásadní je schopnost porozumět textu. Slovní úlohy bývají v odborné literatuře definovány různě. Například (Vyšín 1962) považuje za slovní úlohu každý matematický úkol, který je zadaný slovně. (např. „Urči takové číslo, jehož čtyřnásobek zmenšený o pět je 31.“). Většina autorů se omezuje jen na úlohy, které jsou zasazeny do kontextu (Divíšek et al. 1989, Kuřina 1989). Podle (Vondrová 2019) je slovní úloha pouze úloha obsahující nějaký kontext, ať už reálný či vymyšlený. Některé numerické údaje jsou v ní zadány, jiné se dopočítávají. Úloha může obsahovat jeden nebo více úkolů, zadaných otázkou nebo rozkazovací větou. Úkoly lze splnit pomocí zadaných numerických údajů a vztahů mezi nimi, které vyplývají ze zadání a ze znalostí a zkušeností řešitele (Vondrová 2019, s. 61).

Celý proces řešení slovní úlohy, je rozdělen na etapy podle kognitivních aktivit žáka. Nejprve by mělo dojít k pochopení zadaného problému. Žák musí správně rozpoznat, co známe a co hledáme. Poté by si měl žák vytvořit plán, jakou metodu, či početní postup použije. Žák se zamýšlí nad tím, zda někdy řešil podobnou úlohu. Poté přichází na řadu realizace vytvořeného plánu. Žák důkladně kontroluje jednotlivé kroky zvoleného postupu. Na závěr se žák ohlíží zpět za svým postupem řešení. Kontroluje, zda je získaný výsledek správný a zamýšlí se nad tím, zda by se daná slovní úloha dala vyřešit i jiným způsobem. Slovní úlohy lze rozdělit do mnoha kategorií podle toho, jak moc jsou složité, podle povahy matematického modelu nutného pro jejich vyřešení, podle kontextu zadání apod. (Rendl 1997) říká, že slovní úlohy jsou tvořené různým počtem triád, kde triáda je vztah dvou čísel vyjádřený třetím číslem. Tedy tři čísla, která patří svým způsobem dohromady. Podle počtu triád tedy rozdělíme úlohy na jednoduché a složité. Jednoduché jsou takové, které jsou tvořeny jednou triádou. Obsahují tedy pouze jeden početní výkon. Složité slovní úlohy pak obsahují více triád, tedy i více početních výkonů. Obecně mají složité slovní úlohy i složitější kontext zadání i matematickou strukturu. Jelikož se tyto úlohy více soustředí na krátkodobou paměť žáka, často se může stát, že žák danou úlohu nedokončí a skončí u nějakého mezivýsledku (Vondrová 2019, s. 62).

(Riley, Greeno, Heller 1983) dělí jednoduché slovní úlohy do třech skupin. První skupina se nazývá **dynamické úlohy**. Ta zahrnuje úlohy, ve kterých dochází ke změně množství v čase: „Jana má 3 lízátka, jedno dala Martině. Kolik lízátek jí zbylo?“. Druhou skupinou jsou **statické úlohy**. Tyto úlohy obsahují informaci o dvou množstvích, která se slučují dohromady: „Jana má 3 lízátka, Martina má 5 lízátek. Kolik lízátek mají dohromady?“. Poslední jsou **úlohy na porovnání**. Tato skupina se skládá z úloh, ve kterých jsou uvedena dvě množství, která se mezi sebou porovnávají: „Jana má 3 lízátka, Martina 5. O kolik lízátek má Martina víc?“. (Hejný 2014) říká, že typ slovní úlohy záleží na roli čísla v zadání. Číslo může mít roli *stavu,* v tom případě se ještě rozděluje, zda jde o počet nebo o veličinu (např. 30 Kč, 80 kg). Číslo dále může mít roli *operátoru,* v takovém případě číslo reprezentuje vzájemný vztah dvou stavů. Rozlišujeme operátora porovnávání: „Čokoláda je o 20 korun dražší než žvýkačky, žvýkačky jsou o 10 korun dražší než sušenka.“ a operátora změny: „Tento týden malý Tomáš rychle přibyl na váze. Ve čtvrtek vážil o 3 kg více než v úterý, v neděli pak o 4 kg více než ve čtvrtek. Kolik kilogramů Tomáš za tento týden přibral?“ Číslo může mít také roli *frekvence* (četnosti) (např. autobus jede každých 6 minut). Poslední je role *identifikátoru* (např. pokoj číslo 412, Adam má narozeniny 14.8.). Důležité jsou také *slovní úlohy s antisignálem.* Takové úlohy obsahují slovo, či více slov, která navádějí řešitele k jiné početní operaci než, kterou vyžaduje správné řešení. Jednoduchým řešením je úloha: „V sobotu i v neděli jsme byli na výletě. V neděli jsme ušli 15 km, což bylo o 7 více než v sobotu. Kolik jsme tedy ušli v sobotu?" Slovo „více" nabádá ke sčítání, ale správná početní operace, kterou musíme v této úloze použít je odečítání (Vondrová 2019, s. 63).

V posledních desítkách let upozorňují výzkumníci, že důležitá je také autenticita slovních úloh. Slovní úlohy by měly být inspirovány skutečnými problémy, aby vytvářely most mezi matematickým a reálným světem a podporovaly žákovu schopnost modelovat skutečné problémy (Vondrová 2019, s. 64).

1.4 Trojčlenka

Trojčlenku se žáci poprvé učí na konci 7. ročníku společně s poměrem a přímou a nepřímou úměrností. Trojčlenka je jednou z metod řešení slovních úloh na přímou a nepřímou úměrnost. Při použití této metody vypočítáme ze tří zadaných údajů čtvrtý údaj, a to ve třech krocích. Trojčlenka v přímé úměrnosti je založena na tom, že veličina b závisí na veličině a podle vzorce $b = c \cdot a$, kde c je konstanta. Tedy veličiny a a b jsou přímo úměrné. Kolikrát se zvětší veličina a, tolikrát se zvětší veličina b. Naopak trojčlenka v nepřímé úměrnosti je založena na tom, že veličina b závisí na veličině a, podle vztahu $b = \frac{c}{a}$, kde c je konstanta. Tedy veličiny a a b jsou nepřímo úměrné. Tedy pokud by se veličina a zdvojnásobila, veličina b by se dvakrát zmenšila (Delventhal 2004).

2 Výzkumné šetření

Má diplomová práce je založena na kvalitativním výzkumu. Kvalitativní výzkum je proces, při kterém dochází k hledání porozumění. Může být založený na různých metodách zkoumání daného problému. V tomto typu výzkumu jde o názory dotazovaných, analyzují se texty a práce a vytváří se komplexní pohled na věc. Výzkum se provádí v přirozených podmínkách. (Creswell, Poth 2018)

Na začátku musí být vybráno téma výzkumu a vhodně zvolené výzkumné otázky. Ty se mohou v průběhu výzkumu upravovat a doplňovat. Vznikají hypotézy, jedná se tedy o pružný druh výzkumu. Velkou výhodou kvalitativního výzkumu je zisk podrobných dat v průběhu interakcí mezi výzkumníkem a skupinou účastníků v reálném čase. Mezi hlavní nevýhody patří fakt, že jde o subjektivní výzkum, jelikož získané závěry nemusí zákonitě platit pro celou populaci. (Hendl 2005)

2.1 Identifikace výzkumného problému

Při výzkumu jsem se vracela k mé bakalářské práci, jejíž hlavním cílem bylo sestavit sbírku párových úloh se zlomky a s procenty. Můj kvalitativní výzkum měl za úkol zjistit, jak budou vybraní žáci dané párové slovní úlohy řešit.

2.1.1 Cíle výzkumu

Jedním z cílů mé diplomové práce je provést kvalitativní analýzu získaných žákovských řešení daných slovních úloh vybraných ze sbírky úloh v mé bakalářské práci. Hlavním cílem práce je zjistit, jakým způsobem žáci zadané slovní úlohy řeší. Případně jaký je jejich vztah ke zlomkům a procentům. Dalším cílem pak je, vybrané slovní úlohy a jejich žákovská řešení z výzkumu zpracovat pomocí metody Concept Cartoons.

2.1.2 Podmínky výzkumu

Výzkumné šetření jsem provedla jednorázově v dubnu a květnu roku 2021 na dvou nejmenovaných městských základních školách. Šetření proběhlo bez jakéhokoliv opakování daného tématu.

2.1.3 Relevance výzkumu

Výzkum v rámci učiva matematiky u žáků základní školy je stále velmi aktuální. Jelikož matematika bude vždy důležitá a užitečná, má smysl sledovat úroveň matematické gramotnosti u všech žáků, hlavně u žáků na základní škole, kde se rodí úplné početní základy.

2.2 Použité metody výzkumu

Při mém výzkumu jsem použila metodu obsahové analýzy a testování. Data byla sesbírána pomocí jednoho šetření v podobě písemného testu, který byl sestaven z párových slovních úloh se zlomky a s procenty vybraných ze sbírky úloh z mé bakalářské práce. Písemný test jsem předložila čtyřem třídám 9. ročníků základní školy. Celé šetření zabralo dvě vyučovací hodiny matematiky na každé ze škol. Díky žákovským pracím jsem měla možnost přehledně sledovat jednotlivé žákovské postupy řešení. Výsledky testů ukázaly, jak jsou na tom žáci druhého stupně v oblasti zlomků a procent. Pro tento výzkum nebyla zapotřebí z mojí strany žádná dlouhodobá práce se žáky.

2.3 Analýza výzkumného problému

2.3.1 Výzkumné otázky

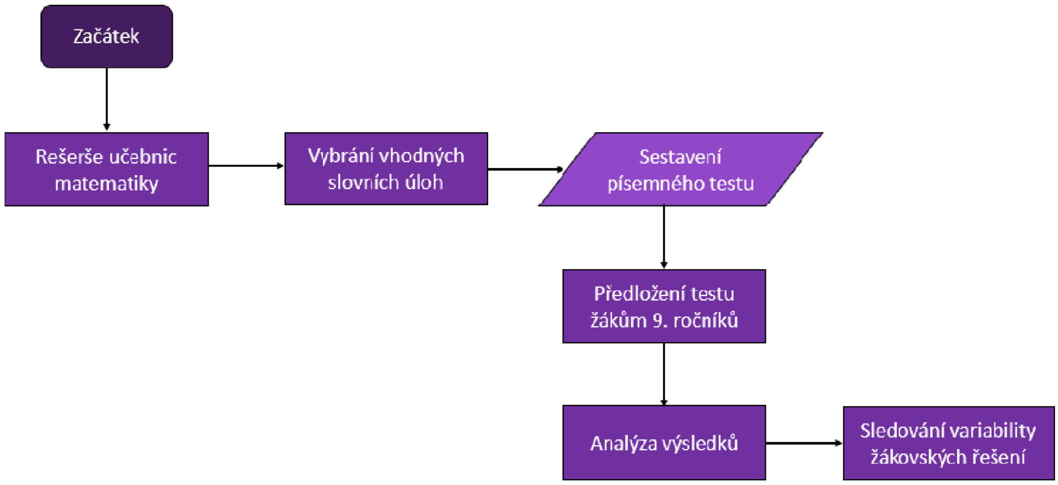
- Jak žáci zadané slovní úlohy řešili?
- Jaká část žáků poznala, že slovní úlohy se zlomky a s procenty se dají řešit stejným způsobem?
- Jaká je úspěšnost jednotlivých slovních úloh?
- Jaké téma je u žáků více oblíbené, zlomky či procenta?

2.3.2 Výzkumný vzorek

Výzkumný vzorek představují žáci 9. ročníků základní školy, tedy děti ve věku od 14 do 15 let. Výběr žáků, které jsem zařadila do výzkumného vzorku, jsem předem konzultovala s paní učitelkou matematiky na jedné ze základních škol, kde výzkumné šetření probíhalo. Paní učitelka mi doporučila žáky devátých tříd, jelikož už by měli dobře ovládat jak počty se zlomky, tak s procenty. A tak by měli mnou vytvořený test lehce zvládnout.

2.3.3 Průběh výzkumu

Průběh mého výzkumu je po jednotlivých krocích zpracovaný v následujícím diagramu.



Obrázek 3 (Diagram výzkumu)

Rešerši učebnic matematiky a vybrání vhodných slovních úloh jsem provedla již při psaní mé bakalářské práce. Nejprve jsem tedy vhodně sestavila písemný test, který jsem poté předložila čtyřem třídám 9. ročníků základní školy k vyplnění. Získaná žákovská řešení jsem poté zanalyzovala a sledovala jejich variabilitu, z čehož jsem vyvodila patřičné závěry.

3 Rozbor žákovských řešení

Pro výzkum k mé diplomové práci jsem navštívila dvě nejmenované městské základní školy. Kde jsem čtyřem třídám devátého ročníků předložila mnou sestavený písemný test. Test obsahoval slovní úlohy, které jsem použila v mé bakalářské práci a měl dvě různé varianty. Pojďme se nejprve podívat jaké slovní úlohy jsem pro výzkum zvolila.

3.1 Testové úlohy

Varianta Testu	Zadání slovní úlohy	Zdroj	Dále použitá zkratka
A	1. Mezi dětmi, které chodí do školy, je 15 % alergiků. Kolik alergiků je ve škole, kam chodí 500 dětí?	(Půlpán 2008, s. 44)	A/1
	2. V každém úlu tvoří $\frac{3}{20}$ všech včel pouze dělnice. Kolik dělnic je v úlu, kde je 500 včel?	Vlastní	A/2
	3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?	(Odvárko, Kadleček 2011, s. 62)	A/3
	4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?	Vlastní	A/4
	5. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o $\frac{1}{5}$, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?	Vlastní	A/5
B	1. Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o 15 %?	(Odvárko, Kadleček 2011, s. 54)	B/1
	2. Délka toku Labe je 1122 km, z toho 396 km je na území naší Republiky. a) Kolik **procent** z celkové délky toku Labe je na území naší republiky? b) Jaká část z celkové délky toku Labe **ve zlomku** je na území naší republiky?	(Běloun 1998, s. 26)	B/2
	3. Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o $\frac{3}{20}$ původní ceny?	Vlastní	B/3
	4. Jirka si šetří na horské kolo. To, které si vyhlédl, stojí 2800 Kč. Zatím má naspořeno $\frac{3}{20}$ z jeho ceny. Kolik korun musí ještě ušetřit?	Vlastní	B/4

Tabulka 1 (Testové úlohy)

3.2 Charakteristika úloh

Všechny použité slovní úlohy mají dva číselné údaje zadané a třetí údaj mají žáci dopočítat. K získání výsledku mohli žáci použít různý počet kroků od jednoho až po tři výpočty. Tyto slovní úlohy lze zařadit mezi ty jednodušší.

Slovní úlohy A/1 a A/2 jsou úlohy statické. Různé části celku jsou odlišené nějakou vlastností. Konkrétně tady ti, co jsou alergici a ti co nejsou alergici. Číslo 500 má roli stavu, konkrétně počtu. Hodnota 15 % nebo $\frac{3}{20}$ je v roli operátora a znázorňuje nám vztah dvou stavů. V této úloze znají žáci základ či celek a počet procent nebo zlomek a mají dopočítat procentovou/zlomkovou část.

Slovní úlohy A/3, A/4 a A/5 jsou dynamické úlohy. Zde dochází ke změně hodnoty stavu v čase. Hodnota 1920 Kč označuje stav, konkrétně veličinu. 20 % nebo $\frac{1}{5}$ má roli operátora změny. Představuje změnu, o kterou se hodnota stavu změnila. Ve všech třech úlohách žáci znají procentovou či zlomkovou část a počet procent nebo zlomek. Mají tedy dopočítat základ/celek.

Slovní úlohy B/1 a B/3 jsou také úlohy dynamické. Hodnota 2800 Kč je v roli stavu, konkrétně označuje veličinu. 15 % či $\frac{3}{20}$ mají roli operátora změny. V těchto třech úlohách žáci znají základ nebo celek a počet procent či zlomek. Dopočítávají tedy procentovou/zlomkovou část.

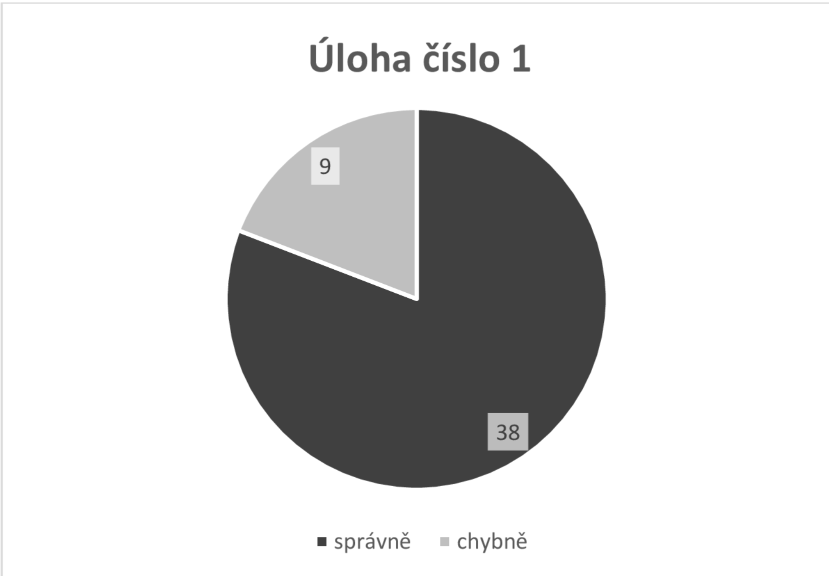
Slovní úlohy B/2 a B/4 jsou úlohy statické. V zadání úlohy B/2 se objevují dvě čísla, která májí roli stavu, konkrétně veličiny. Žáci tedy znají základ a procentovou část. V první otázce mají určit počet procent a ve druhé otázce zlomek. V úloze B/4 označuje hodnota 2800 Kč stav, konkrétně veličinu. Zlomek $\frac{3}{20}$ má roli operátora, znázorňuje tedy vztah dvou stavů. Žáci znají celek a zlomek. Mají dopočítat zlomkovou část.

3.3 Žákovská řešení

Variantu A vypracovalo celkem 47 žáků a variantu B 36 žáků. Každá varianta byla složena z pěti slovních úloh na zlomky a procenta. Pojďme se nyní podívat na konkrétní žákovská řešení. Nejprve se podíváme na variantu A, která byla sestavena z těchto pěti slovních úloh.

1. **Mezi dětmi, které chodí do školy, je 15 % alergiků. Kolik alergiků je ve škole, kam chodí 500 dětí?** (Půlpán 2008, s. 44)

Tato slovní úloha byla na počítaní s procenty. Žáci měli v zadání uvedený počet procent a základ a měli vypočítat procentovou část. Z celkového počtu 47 získaných řešení bylo 38 správných a 9 chybných.

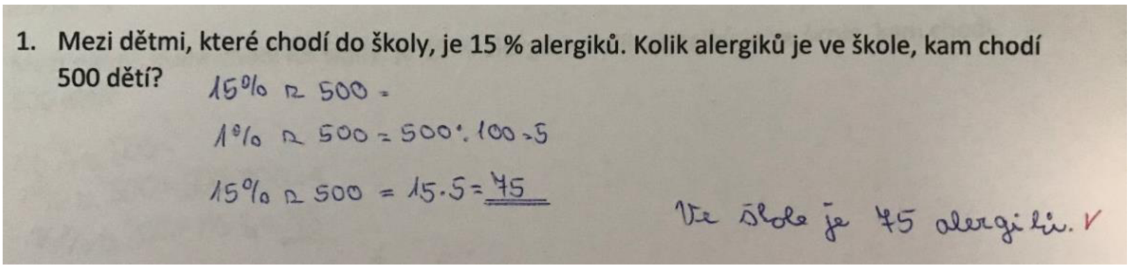


Obrázek 4 (A/1, úspěšnost úlohy, n = 47)

Žáci k získání výsledku nejčastěji použili výpočet pomocí jednoho procenta. Pouze dva žáci využili jiný postup. Tři žáci početní postup neuvedli, takže neleze soudit, zda úlohu vypočítali z hlavy, nebo výsledek opsali od souseda, či tipovali.

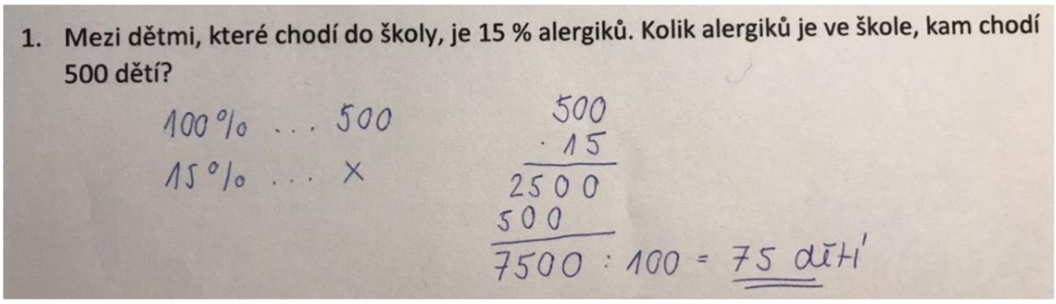
Obrázek 5 (A/1, způsob řešení, n = 47)

Zde můžete vidět řešení jednoho ze žáků se správným výsledkem. Provedl přehledný zápis vypočtu přes jedno procento. Ze všech žáků, kteří použili vypočet pomocí jednoho procenta, se u pěti z nich objevil zápis z, č, p neboli základ, část a počet procent. Osobně bych čekala, že takovýto zápis použije k lepšímu zorientování se v úloze více žáků.



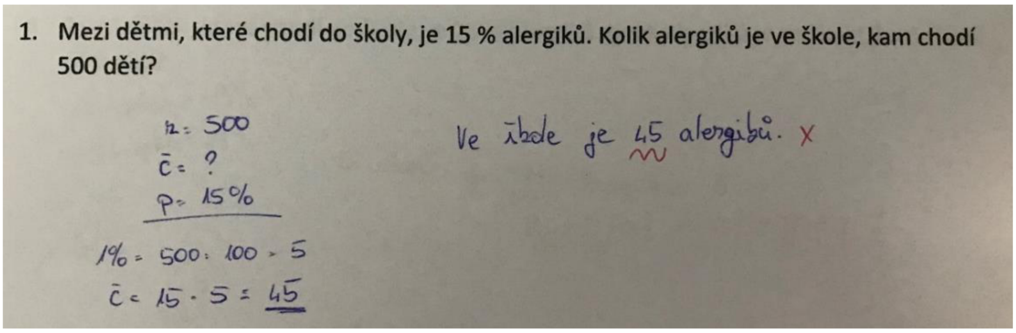
Obrázek 6 (A/1, správné řešení pomocí procent)

U obou žáků, kteří použili jiný způsob výpočtu, se objevil postup, který můžete vidět na obrázku níže. Žáci nejprve celý základ vynásobili počtem procent a poté vydělili stem, aby získali hodnotu procentové části. Tento postup je sice netradiční, ale naprosto správný. Vlastně se jedná o trojčlenku, která není zapsána tradičním způsobem, ale výpočet odpovídá postupu trojčlenky.



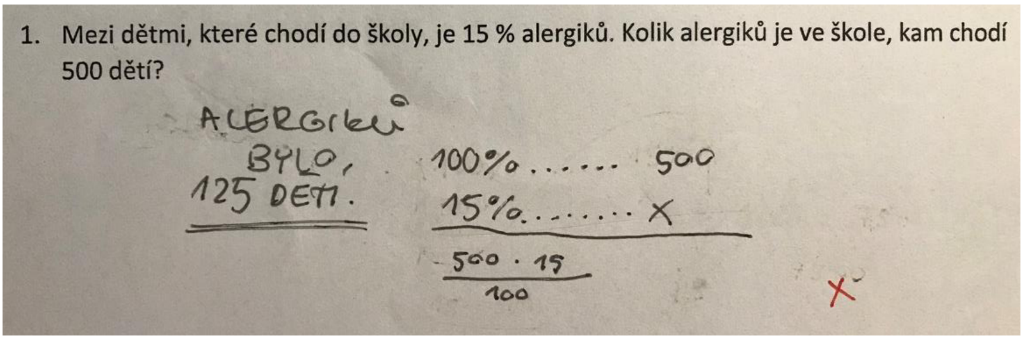
Obrázek 7 (A/1, správné řešení)

Nyní se pojďme podrobněji podívat na některá chybná řešení. V prvním případě byl správně udělaný zápis, došlo však k chybě v násobení. Jelikož 15krát 5 není 45, ale 75.



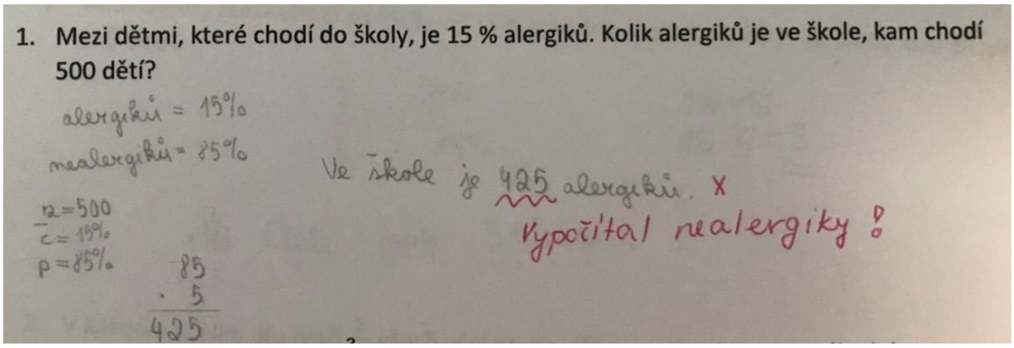
Obrázek 8 (A/1, chybné řešení)

V následujícím případě byla použita trojčlenka, její zápis i zápis pro výpočet byl správný, chyba tedy musela nastat opět v násobení či dělení.



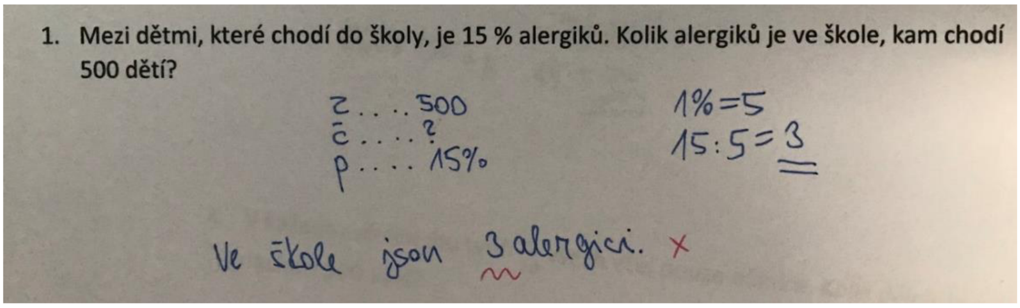
Obrázek 9 (A/1, chybné řešení)

V dalším případě si žákyně spletla alergiky se žáky bez alergie. Opět můžeme vidět pěkný přehledný zápis, v posledním kroku však došlo k chybě z nepozornosti.



Obrázek 10 (A/1, chybné řešení)

Poslední konkrétní případ je poněkud závažnější než ty tři před ním. Žák správně vypočítal hodnotu jednoho procenta, v závěru však zvolil špatnou početní operaci. Můžeme se jen domnívat, zda to bylo neznalostí či nepozorností.



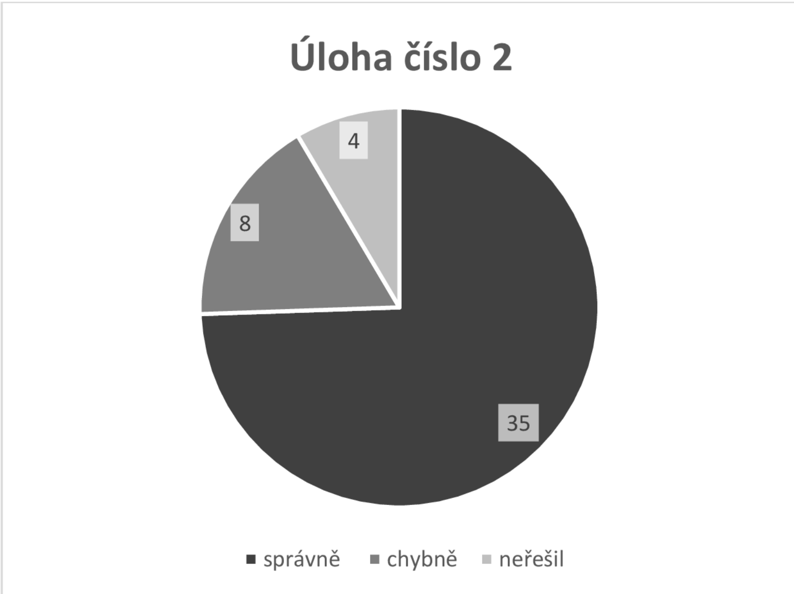
Obrázek 11 (A/1, chybné řešení)

U třech žáků se objevil výsledek 100 alergiků, jelikož se z neznámého důvodu domnívali, že 500 děleno 15 je 100. Chyby v řešení byly ve většině případů způsobeny nepozorností, či chybou v početní operaci.

Úloha číslo dvě má stejný princip jako úloha číslo jedna, pouze číselný údaj je nyní uveden ve zlomku a slovní zadání je pozměněné, ale výsledek obou úloh je stejný. Tedy tentokrát žák zná celek, zlomek a má vypočítat zlomkovou část.

2. **V každém úlu tvoří $\frac{3}{20}$ všech včel pouze dělnice. Kolik dělnic je v úlu, kde je 500 včel?**

Druhá slovní úloha měla 35 úspěšných řešitelů ze 47. Tato úloha měla osm nesprávných řešení. Čtyři žáci se o vyřešení druhé úlohy vůbec nepokusili.

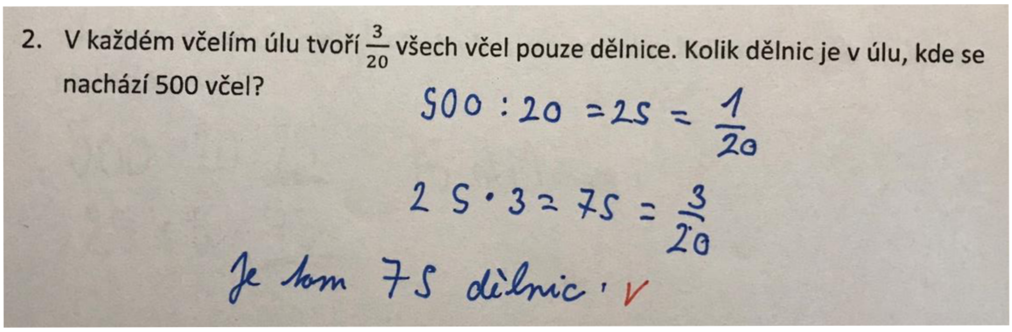


Obrázek 12 (A/2, úspěšnost úlohy, n = 47)

Nejvíce žáků řešilo úlohu pomocí kmenového zlomku. Čtyři žáci použili jiný postup, z toho tři žáci využili procenta. Tentokrát postup neuvedli dva z žáků.

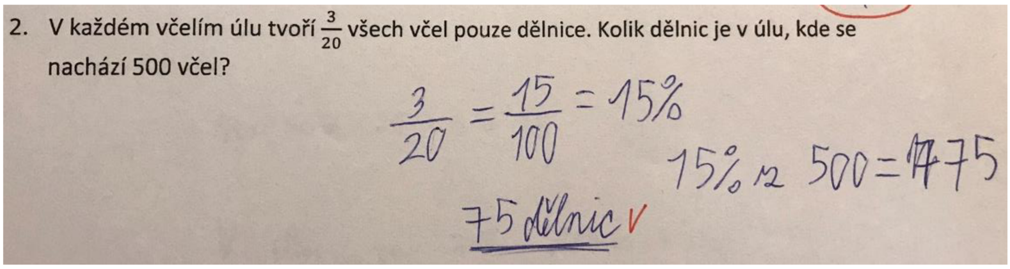
Obrázek 13 (A/2, způsob řešení, n = 47)

Zde můžete vidět jedno ze správných řešení, pomocí kmenového zlomku, v tomto konkrétním případě šlo o $\frac{1}{20}$.



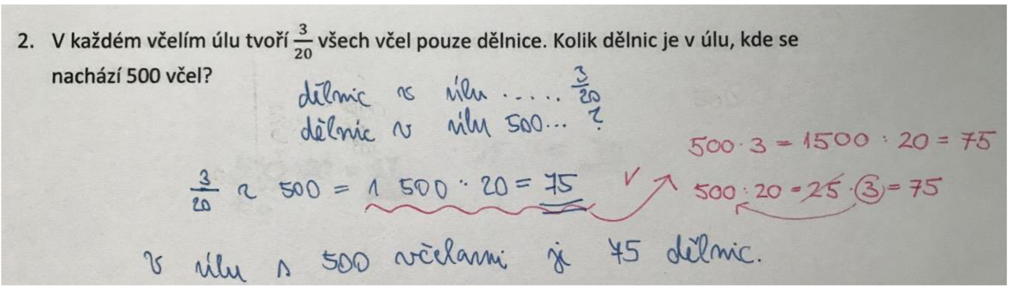
Obrázek 14 (A/2, správné řešení pomocí zlomků)

Hned na dalším obrázku je vidět postup žáka, který počítal pomocí procent. Z tohoto postupu je vidět, že žák zná dobře jak zlomky tak procenta a umí mezi nimi lehce přecházet tak, aby byla pro něj slovní úloha co nejsnadnější a výpočet co nejpohodlnější. V tomto konkrétním případě již žák věděl z první úlohy, že 15 % z 500 je 75. Ulehčil si tedy svoji práci i ušetřil nějaký ten čas.



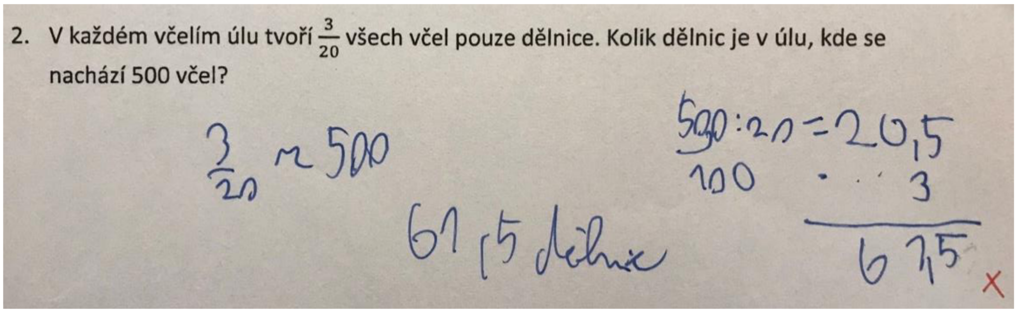
Obrázek 15 (A/2, správné řešení pomocí procent)

Postup jediné žákyně, která nepoužila ani kmenový zlomek ani procenta, můžeme vidět na následujícím obrázku. Žákyně použila netradiční, ale přesto správný postup. Nejprve celek vynásobila třemi a poté výsledek vydělila 20. Tento postup mě poněkud překvapil, ale když jsem si ho prošla podrobněji, zjistila jsem, že je to snadný a rychlý způsob pro řešení takto lehkých slovních úloh se zlomky.



Obrázek 16 (A/2, správné řešení)

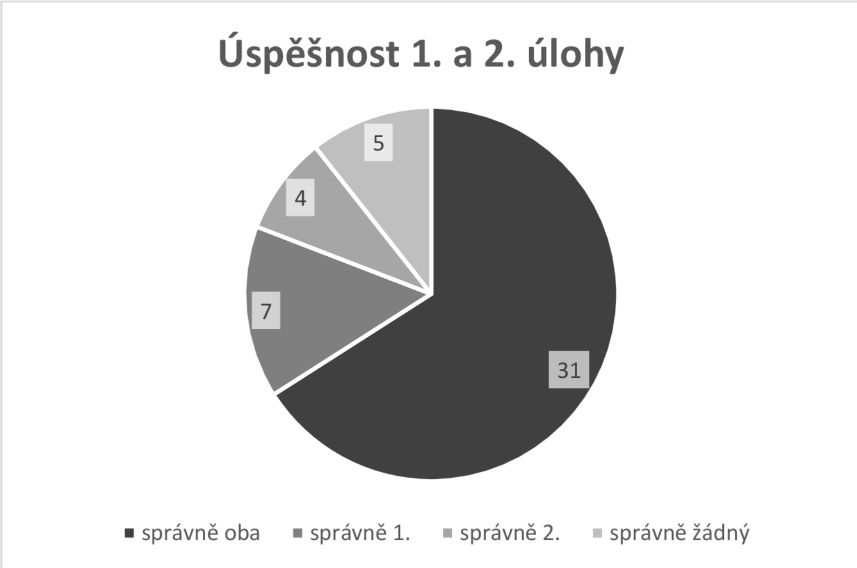
Vskutku překvapivý výsledek, který se objevil mezi nesprávnými řešeními, byl 61 a půl dělnice. Špatný výsledek patrně vzešel z chybného dělení.



Obrázek 17 (A/2, chybné řešení)

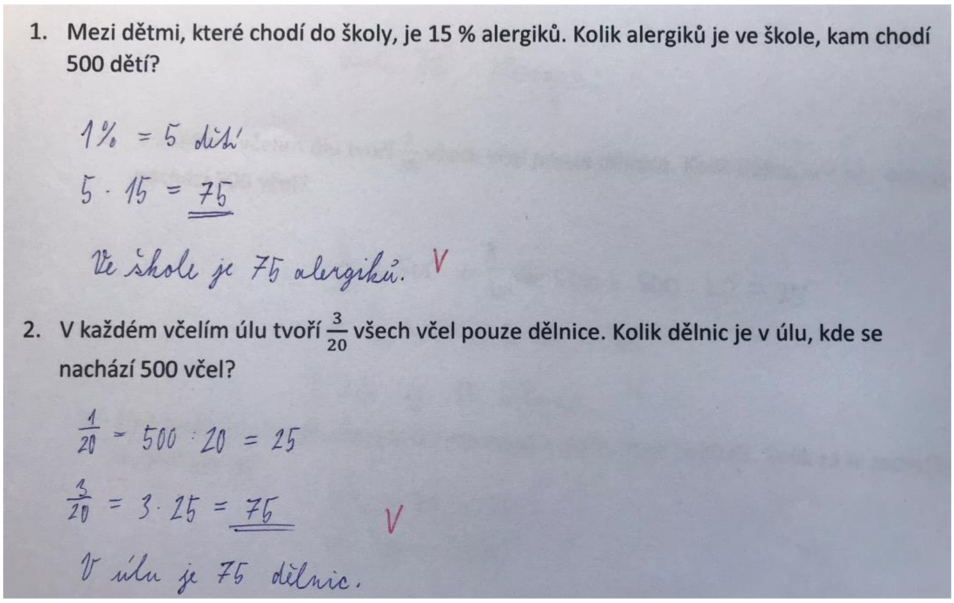
Co se týče ostatních chybných řešení, pouze dvě řešení ukazují na žákovu neznalost zlomků, v pěti případech došlo k chybnému dělení či násobení a v jednom případně došlo ke zbytečné nepozornosti.

Při shrnutí získaných dat z první a druhé úlohy, jsem zjistila, že pět žáků nevyřešilo správně ani jednu z těchto jednoduchých úloh. Co se týče úspěšnosti jednotlivých úlohy, rozdíl není nějak závažný, ale i tak z něj můžeme usoudit, že žákům více vyhovují slovní úlohy s procenty než se zlomky.

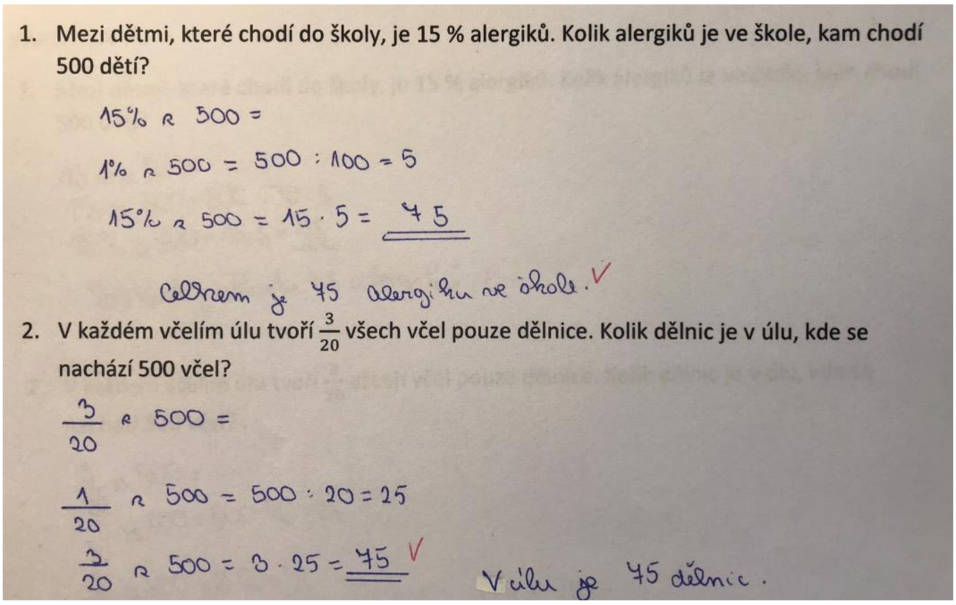


Obrázek 18 (A/1,2, úspěšnost úloh, n = 47)

Ze 31 žáků, kteří vyřešili obě úlohy správně, použilo 25 žáků odpovídající si postupy výpočtu, tedy v první úloze počítali pomocí jednoho procenta a ve druhé úloze pomocí kmenového zlomku. Odpovídající si postupy jsou pěkně vidět na následujících dvou snímcích.

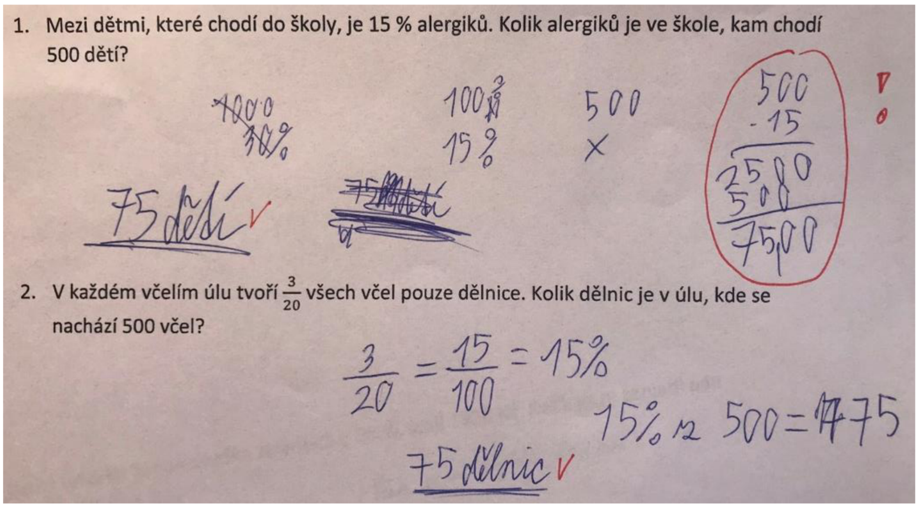


Obrázek 19 (A/1,2, správné řešení)



Obrázek 20 (A/1,2, správné řešení)

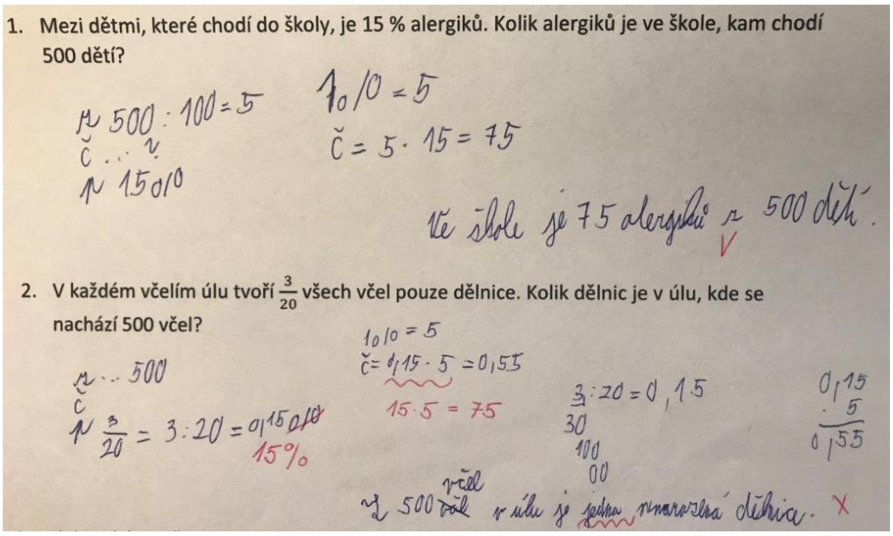
Pouze tři žáci si převedli zlomek ve druhé úloze na procenta a zjistili, že $\frac{3}{20}$ jsou 15 %. Takový příklad vyřešili již v první úloze, takže věděli, že dělnic v úle je 75. Pomocí převodu zlomku na procenta se tedy úplně vyhnuli výpočtu. Z těchto tří žáků jeden použil v první úloze výpočet přes jedno procento, zbylí dva žáci použili postup uvedený na následujícím obrázku. Tento postup mě velmi překvapil, ještě jsem se s ním nesetkala.



Obrázek 21 (A/1,2, správné řešení)

Zbylé tři testy, na kterých byly obě úlohy správně, byly různorodé. Jeden žák vypočítal první úlohu pomocí jednoho procenta a u druhé úlohy napsal jen správný výsledek. Druhý žák naopak vypočítal druhou úlohu pomocí kmenového zlomku a u první uvedl taky jen správný výsledek. Poslední žák neuvedl postup ani u jedné z úloh. Tudíž nelze soudit, zda tito tři žáci viděli souvislost mezi těmito dvěma úlohami.

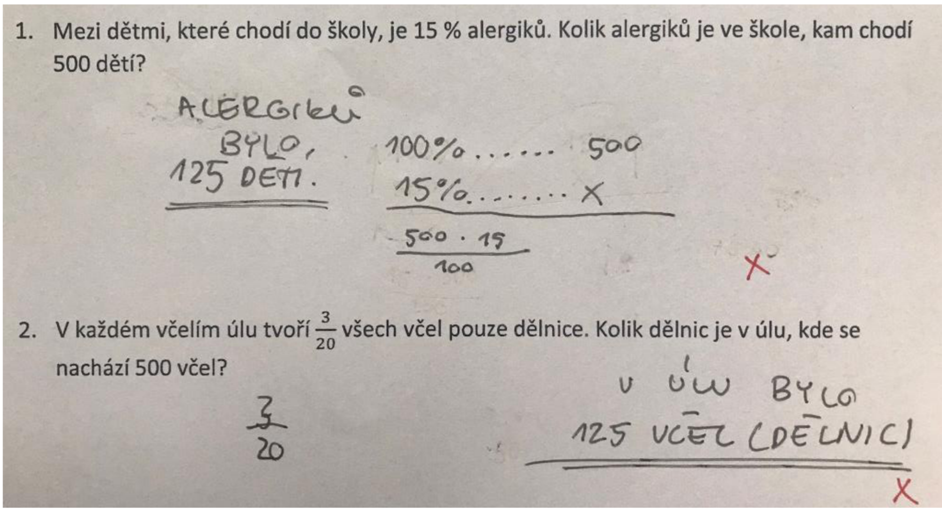
Sedm žáků mělo správně jen první úlohy. Pouze jeden žák neuvedl řešení, zbylých šest žáků použilo výpočet přes jedno procento. Co se týče špatných řešení druhé úlohy, tak ve třech případech nebyl vidět žádný náznak výpočtu. Další tři žáci použili postup přes kmenový zlomek, ale udělali chybu v dělení. Poslední žák chtěl použít procenta, ale jak můžeme vidět na snímku níže, udělal vážnou chybu při převodu.



Obrázek 22 (A/1,2, správné i chybné řešení)

Naopak čtyři žáci měli správně jen druhou úlohu. Tři žáci použili výpočet přes kmenový zlomek a jeden ze žáků použil postup uvedený na *Obrázku 14*. U špatných řešení první úlohy byl vždy použit výpočet přes jedno procento, došlo však k chybě v početní operaci nebo k nepozornosti.

Jen pět žáků ze 47 nespočítalo ani jednu úlohu správně. Dvě žákyně se pokusily vypočítat jen první úlohu, a to pomocí trojčlenky. Trojčlenku měly zapsanou dobře, ale její výpočet byl chybný, oběma děvčatům vyšel výsledek 100. Další dva žáci, kteří také použili trojčlenku, dostali různé výsledky. Přitom oba měli zápis trojčlenky správný. Jednomu vyšlo 125 a druhému správných 75, ale nejspíš si špatně přečetl zadání, a proto uvedl jako výsledek 425. Z testů těchto dvou žáků lze usoudit, že jisté souvislosti mezi první a druhou úlohou našli. Můžete posoudit na snímcích níže. U poslední žákyně byl náznak výpočtu přes kmenový zlomek, který byl opět chybný, u první úlohy uvedla jen špatný výsledek.



1. Mezi dětmi, které chodí do školy, je 15 % alergiků. Kolik alergiků je ve škole, kam chodí 500 dětí?

ALERGIKŮ BYLO, 125 DĚTÍ.

100 % 500

15 % x

$\frac{500 \cdot 15}{100}$

x

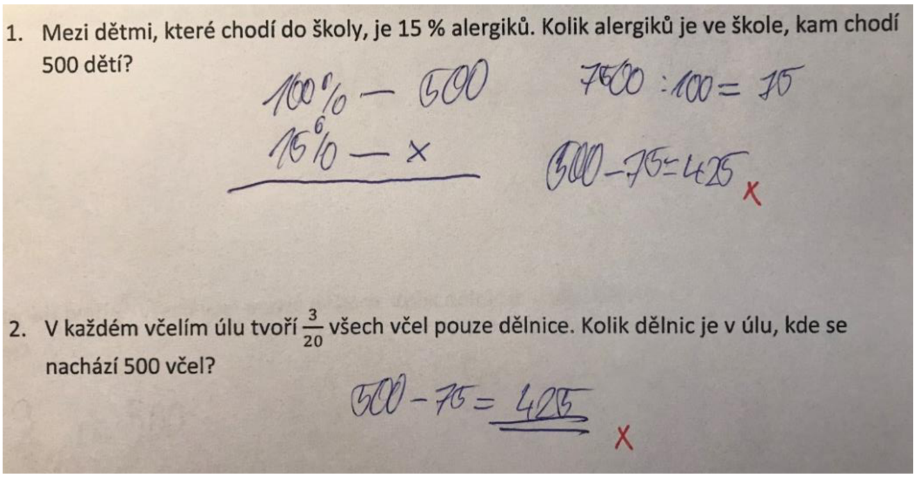
2. V každém včelím úlu tvoří $\frac{3}{20}$ všech včel pouze dělnice. Kolik dělnic je v úlu, kde se nachází 500 včel?

$\frac{3}{20}$

V ÚLU BYLO 125 VČEL (DĚLNIC)

X

Obrázek 23 (A/1,2, chybné řešení)



1. Mezi dětmi, které chodí do školy, je 15 % alergiků. Kolik alergiků je ve škole, kam chodí 500 dětí?

100 % — 500

15 % — x

7500 : 100 = 75

500 − 75 = 425 x

2. V každém včelím úlu tvoří $\frac{3}{20}$ všech včel pouze dělnice. Kolik dělnic je v úlu, kde se nachází 500 včel?

500 − 75 = 425

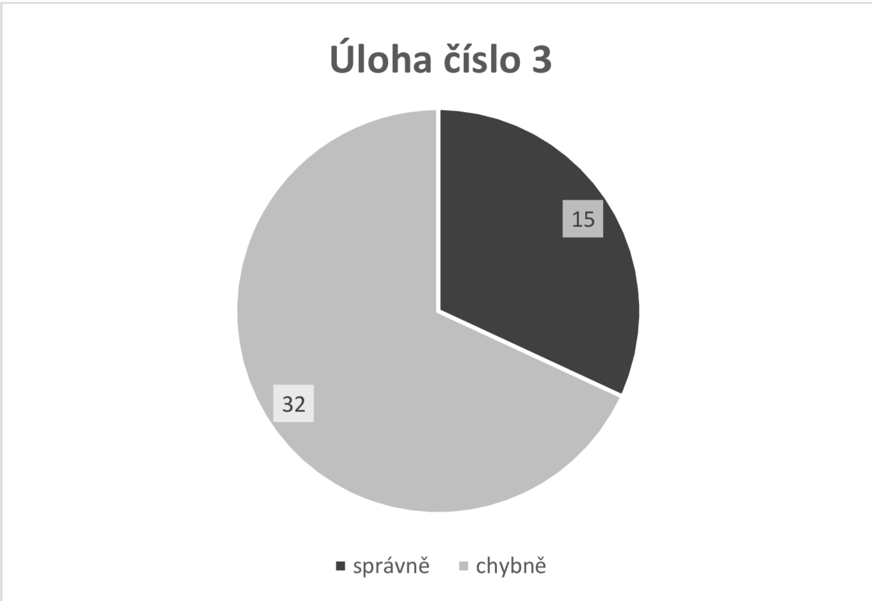
X

Obrázek 24 (A/1,2, chybné řešení)

Následující tři slovní úlohy byly založeny na stejném principu. Úloha číslo 3 je převzata z učebnice matematiky. U dalších dvou úloh jsem záměrně pozměnila zadání. Úloha číslo 4 je stejně jako úloha číslo 3 na výpočet s procenty, ale má pozměněnou slovní část zadání. Naopak úloha číslo 5 má stejné slovní zadání jako úloha číslo 3, ale tentokrát jde o výpočet se zlomky. Ve všech těchto slovních úlohách je uveden v zadání počet procent/zlomek a procentová/zlomková část a žáci mají vypočítat základ/celek.

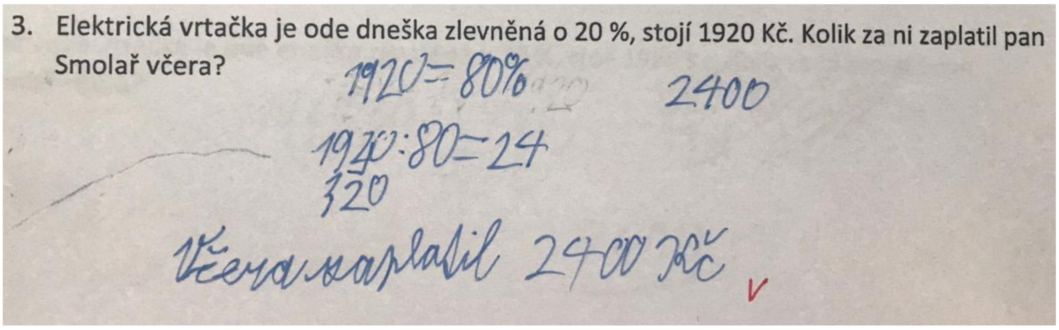
3. **Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?** (Odvárko, Kadleček 2011, s. 62)

Úloha číslo 3 spočívala v tom, že žáci měli vypočítat hodnotu základu, jelikož mají zadanou procentovou část a počet procent. Tuto úlovu vyřešilo správně patnáct žáků ze 47.



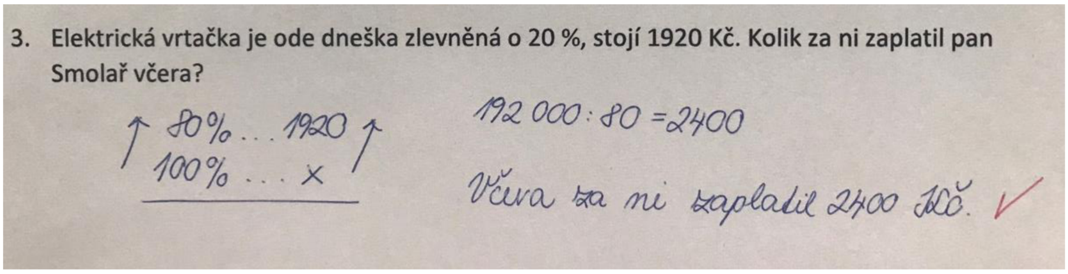
Obrázek 25 (A/3, úspěšnost řešení, n = 47)

Ze všech žáků, kteří tuto slovní úlohu vyřešili správně, použilo čtrnáct z nich výpočet přes jedno procento. Správně si ze zadání uvědomili, že zmiňovaných 1920 Kč ze zadání je 80 % z ceny vrtačky a oni hledají původní cenu, což je 100 % z ceny vrtačky. Postupovali tedy tak, že 1920 Kč vydělili 80 a výsledek vynásobili stem. Jedno ze žákovských řešení pomocí jednoho procenta můžete vidět na obrázku níže.



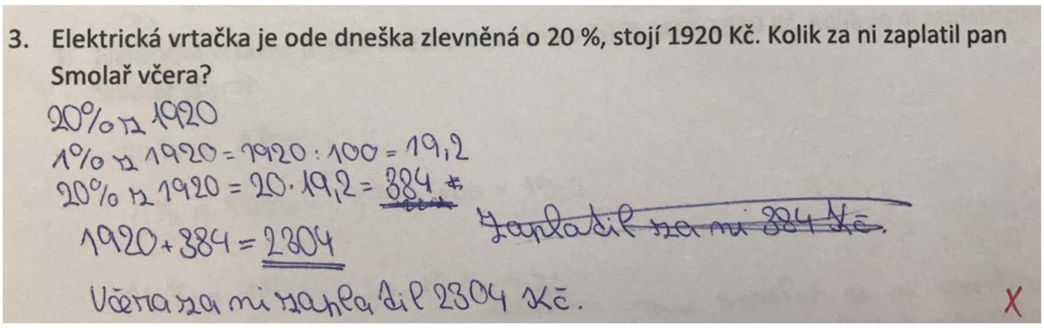
Obrázek 26 (A/3, správné řešení pomocí procent)

Pouze jeden žák z patnácti úspěšných řešitelů použil pro výpočet trojčlenku. Jeho postup můžete vidět na snímku níže.



Obrázek 27 (A/3,správné řešení pomocí trojčlenky)

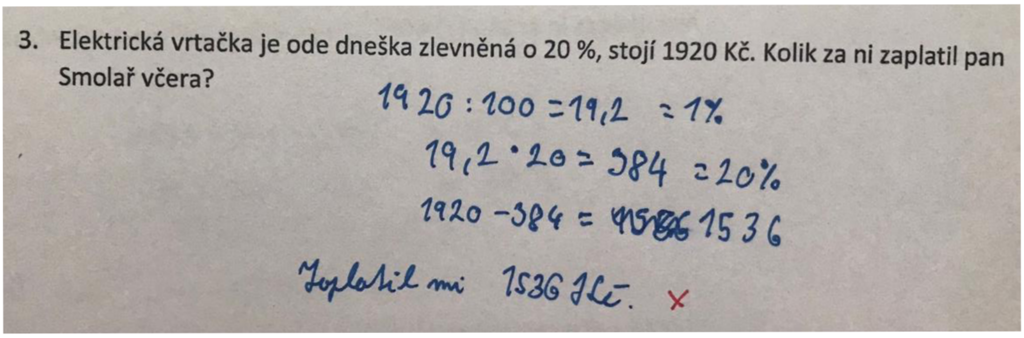
Když se podíváme na chybná řešení, nejčastěji uvidíme výsledek 2304 Kč. Tento výsledek vznikl chybnou úvahou, že 1920 Kč je základ. Tito žáci proto hledali 20 % z 1920 Kč, které pak k dané částce přičetli. I přesto, že šlo o zlevnění, žáci správně přičítali, jelikož se hledala původní cena. Někteří žáci rovnou hledali 120 % z 1920 Kč. Tuto chybu udělalo dvanáct žáků ze 32. Na jedno takové řešení se můžete podívat pod tímto odstavcem.



Obrázek 28 (A/3, chybné řešení)

Dalším častým chybným výsledkem, který se objevil u čtyř žáků, bylo 1536 Kč. Tito žáci si opět zvolili 1920 Kč jako 100 % a z toho hledali 20 %. Tentokrát žáci ale udělali ještě další chybu a nechali se zmást slovem „zlevněná“ a vypočítaných 20 %

od 1920 Kč odečítali. I když bylo v zadání jasně uvedeno, že mají hledat včerejší cenu. Na příklad takového řešení se můžete podívat níže.


3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

1920 : 100 = 19,2 = 1%

19,2 · 20 = 384 = 20%

1920 − 384 = 1536

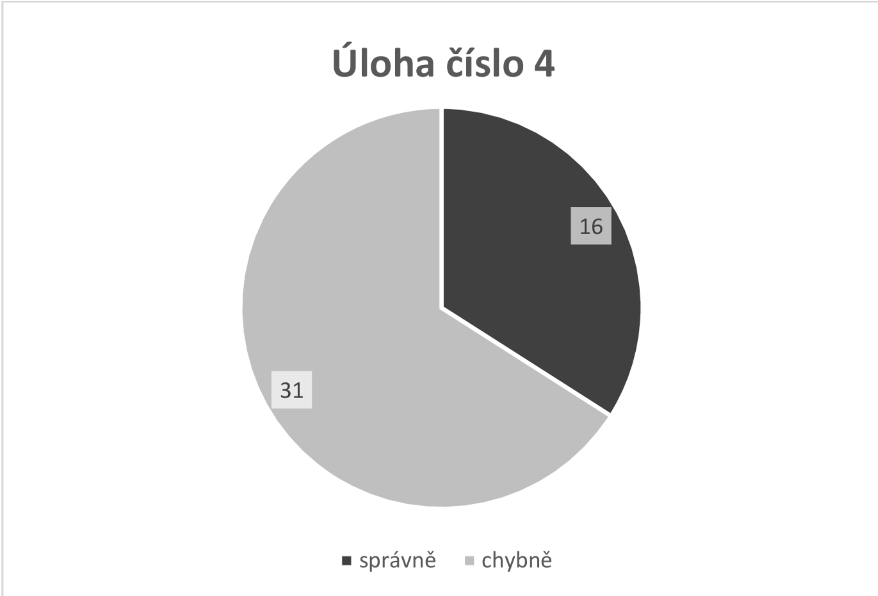
Zaplatil mi 1536 Kč.

Obrázek 29 (A/3, chybné řešení)

Dále se objevilo spoustu nejrůznějších výsledků. Někteří žáci odečítali od 1920 Kč nesmyslné částky. Další žáci udělali chybu v násobení či dělaní. Objevili se také žáci, kteří vypočítali pouze hodnotu slevy, jelikož si ale jako základ určili 1920 Kč, byla i vypočítaná hodnota slevy nesprávná. Další žáci pak brali 1920 Kč jako 20 %. Pouze dva žáci ze všech neúspěšných řešitelů ze zadání poznalo, že cena 1920 Kč představuje 80 %. Správně tedy vypočítali hodnotu jednoho procenta a to 24 korun. Bohužel pak nevěděli, jak s touho hodnotou správně naložit. Sedm žáků se k žádnému výsledku nedopracovali, z toho někteří se o to ani nepokusili.

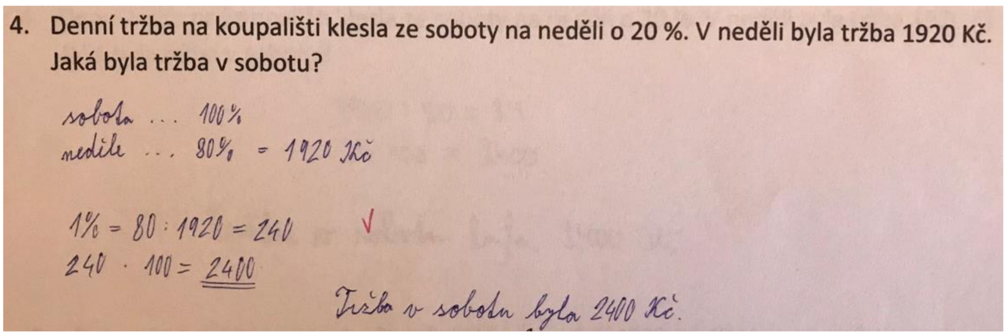
4. **Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?**

Tato slovní úloha obsahovala stejný výpočet jako předchozí úloha číslo 3, ale bylo pozměněné slovní zadání. Žáci tentokrát nehledali původní cenu vrtačky, ale sobotní tržbu na koupališti. Počet procenta a procentová část zůstala stejná. Tuto slovní úlohu vyřešilo správně šestnáct žáků.



Obrázek 30 (A/4, úspěšnost úlohy, n = 47)

Stejně jako u předešlé úlohy se nejvíce objevoval výpočet pomocí jednoho procenta. Takový postup použilo jedenáct žáků. Objevili se také žáci, kteří napsali pouze správný výsledek, aniž by uvedli postup řešení. Na tyto případy se podíváme podrobněji ve shrnutí třetího a čtvrtého příkladu. Opět se objevil jeden žák, který pro výpočet použil trojčlenku. Na jedno ze správných řešení pomocí výpočtu jednoho procenta se můžete podívat na následujícím snímku.


4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

sobota … 100 %
neděle … 80 % = 1920 Kč

1 % = 80 : 1920 = 240 √
240 · 100 = 2400

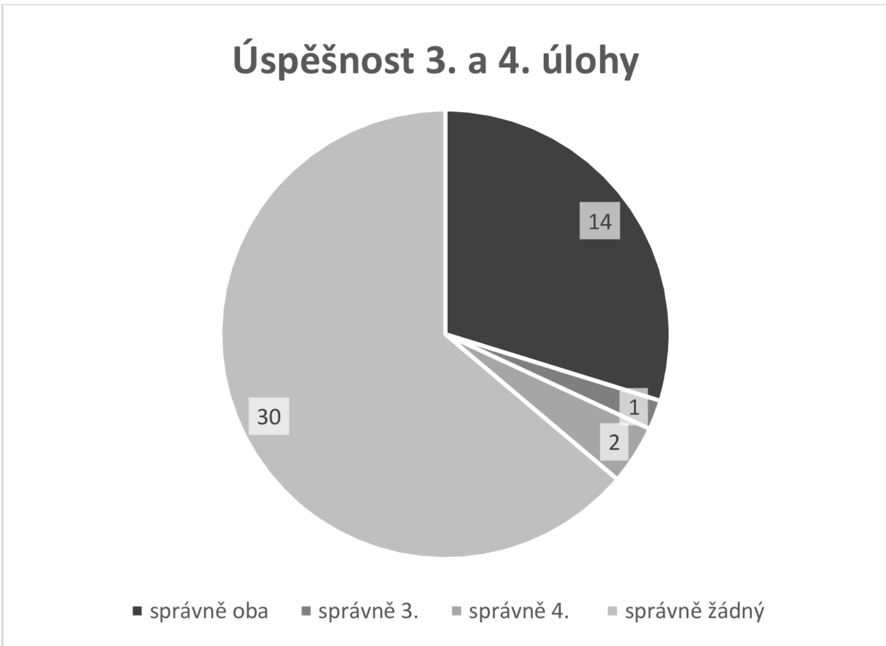
Tržba v sobotu byla 2400 Kč.

Obrázek 31 (A/4, správné řešení pomocí procent)

Mezi nesprávnými řešeními se opět nejvíce objevoval výsledek 2304 Kč. Znovu lze říct, že to bylo způsobeno špatným pochopením zadání a špatným rozpoznáním, co je základ a co procentová část. Dalším častým chybným výsledkem bylo 1536 Kč.

Opět se také objevovali nesmyslné výsledky. Čtyři žáci vypočítali pouze hodnotu slevy, která byla stejně nesprávná. Jeden žák použil trojčlenku, ale jelikož měl špatně určený základ, výsledek byl chybný, další žáci si pak vymýšleli různé výsledky. Nesprávné výsledky se často shodovali s výsledky předchozí úlohy. Pět žáků se do řešení této slovní úlohy vůbec nepustilo.

Pojďme si nyní získané výsledky třetí a čtvrté úlohy shrnout dohromady. Na to, jak byli žáci při řešení třetí a čtvrté úlohy úspěšní se můžete podívat na následujícím grafu.

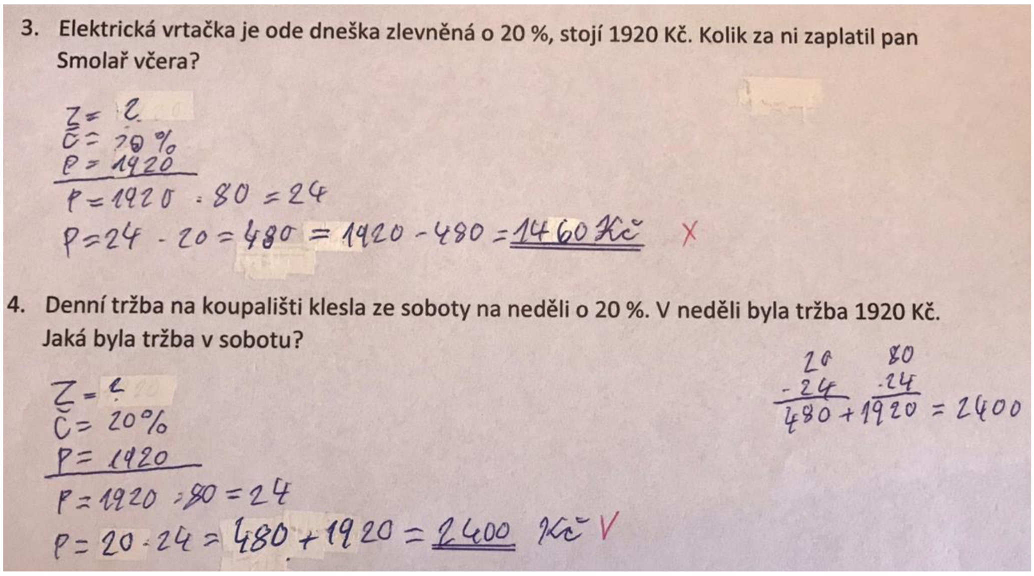


Obrázek 32 (A/3,4, úspěšnost úloh, n = 47)

Nejdřív se podíváme na postup řešení u žáků, kteří měli obě úlohy vyřešené správně. Takových žáků bylo čtrnáct. Z nich osm použilo pro obě slovní úlohy výpočet přes jedno procento a úlohy řešilo nezávisle na sobě každou zvlášť. Objevil se jeden žák, který pro obě úlohy využil trojčlenku a opět každou úlohu vyřešil zvlášť. Pět žáků vyřešilo pouze první z úloh a u druhé uvedli pouze výsledek, jelikož se výsledky shodovaly, lze z toho usoudit, že si tito žáci uvědomili, že když jsou principy zadání i číselné hodnoty obou úloh stejné, budou i jejich výsledky shodné.

Objevil se pouze jeden žák ze všech 47, který vypočítal správně pouze úlohu číslo tři. Pro výpočet použil hodnotu jednoho procenta. U druhé úlohy tento žák nenapsal vůbec nic, těžko říct proč.

Dvě žákyně měly správně pouze čtvrtou úlohu. Obě použily výpočet pomocí jednoho procenta, jedna ze žákyň řešila pouze úlohu číslo čtyři a o vyřešení předchozí úlohy se vůbec nepokusila. U druhé žákyně je situace zajímavější. Ta u každé z úloh dospěla k jinému výsledku. Na její postup se podívejte na snímku pod tímto odstavcem. Žákyně si u obou úloh správně rozdělila, co je procentová část, co počet procent a co základ. Správně vypočítala hodnotu jednoho procenta. Pak ale v první z úloh došlo k chybě, místo toho, aby žákyně hodnotu dvaceti procent k ceně přičetla, ji odečetla. Nejspíš se nechala zmást slovem „zlevněná“ v zadání.


3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

Z = ?
Č = 20 %
P = 1920
P = 1920 : 80 = 24
P = 24 · 20 = 480 = 1920 − 480 = 1460 Kč X

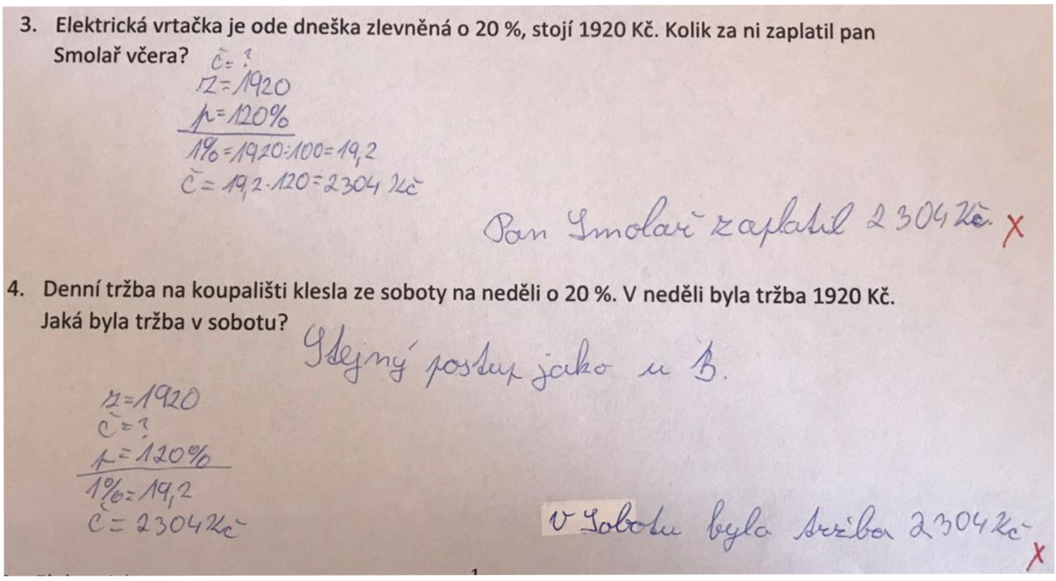
4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

Z = ?
Č = 20 %
P = 1920
P = 1920 : 80 = 24
P = 20 · 24 = 480 + 1920 = 2400 Kč V

20 · 24 = 480; 80 · 24 = 1920; 480 + 1920 = 2400

Obrázek 33 (A/3,4, chybné i správně řešení)

Pojďme se teď podívat na to, jak vypadaly postupy řešení u žáků, kteří měli obě slovní úlohy vyřešeny chybně. Těchto žáků bylo třicet, což jsou skoro dvě třetiny všech řešitelů. Devět žáků došlo u obou úloh k výsledku 2304 Kč. Jak už bylo zmíněno, tato chyba nastala špatným zvolením základu. Tito žáci použili jako základ zadaných 2304 korun. Všichni tito žáci použili výpočet přes jednoho procento a všichni, až na dva žáky, počítali úlohy nezávisle na sobě. Jeden z těch dvou žáků přímo uvedl, že používá stejný početní postup jako u předchozí úlohy.


3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

č = ?
z = 1920
p = 120%
1% = 1920 : 100 = 19,2
č = 19,2 · 120 = 2304 Kč

Pan Smolař zaplatil 2304 Kč. X

4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

Stejný postup jako u 3.

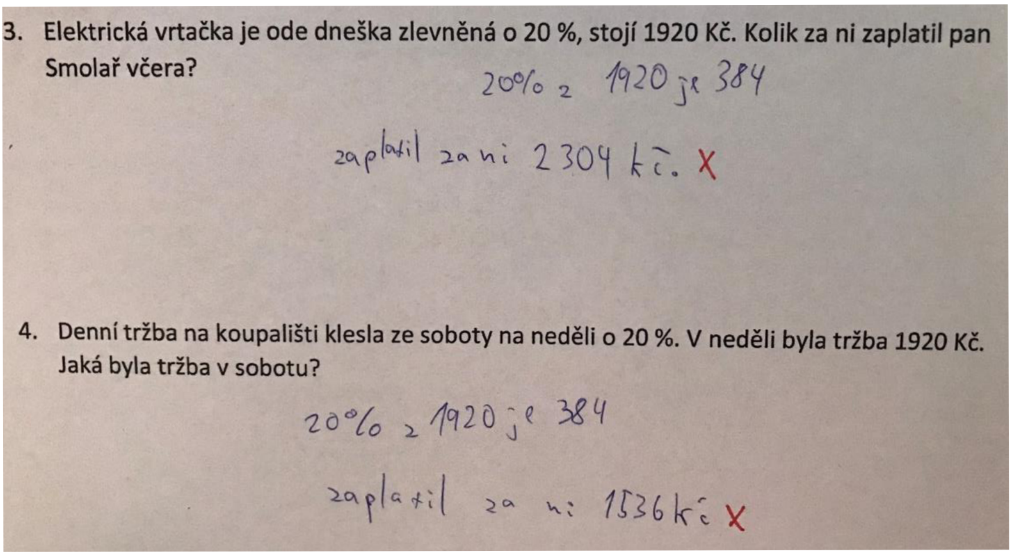
z = 1920
č = ?
p = 120%
1% = 19,2
č = 2304 Kč

V sobotu byla tržba 2304 Kč. X

Obrázek 34 (A/3,4, chybná řešení)

Dva žáci na obě úlohy uvedli jako výsledek 1536 Kč, k tomu došlo nejen chybným zvolením základu, ale také špatným zvolením početní operace v posledním kroku výpočtu.

Podobná situace jako na *Obrázku 33* se objevila u dvou žáků. Jejich výsledky u těchto dvou úloh se neshodovaly. Žáci tentokrát v první úloze hodnotu dvaceti procent přičítali a v druhé úloze ji odečítali. Zřejmě nedošlo ke správnému pochopení zadání.


3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

20% z 1920 je 384

zaplatil za ni 2304 kč. X

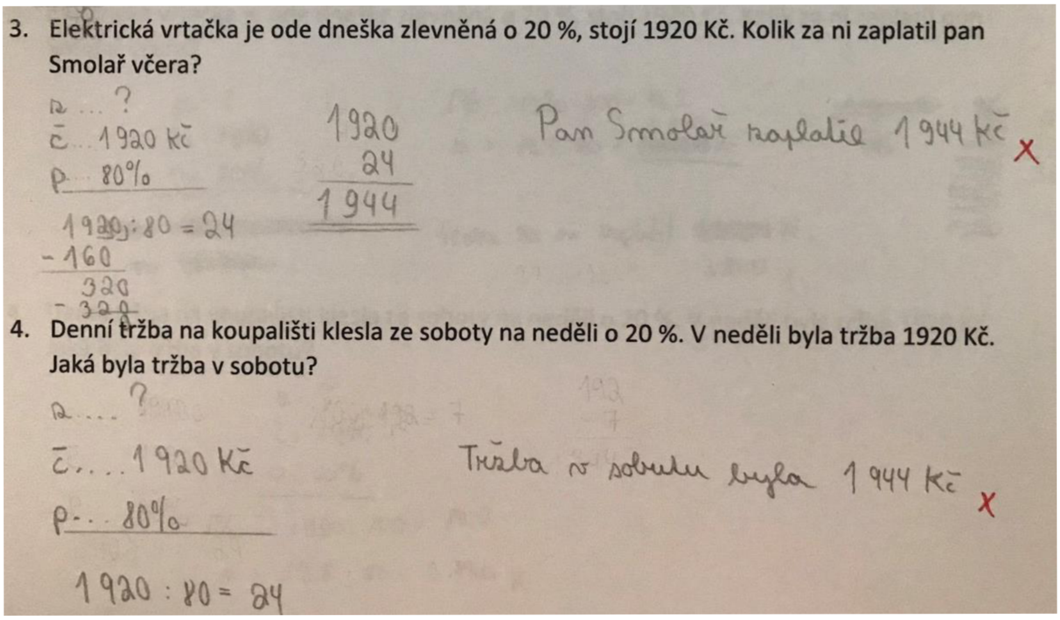
4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

20% z 1920 je 384

zaplatil za ni 1536 kč X

Obrázek 35 (A/3,4, chybná řešení)

U dalších čtyř žáků se výsledky obou úloh také shodovaly, z toho lze usoudit, že viděli v obou zadáních shodu. Z toho jeden žák měl velmi dobře našlápnuto, k výpočtu použil trojčlenku, udělal ale chybu v násobení. Dva žáci špatně zvolili základ a k tomu se nakupily další chyby způsobené neznalostí procent. Postup posledního z těchto žáků můžete vidět na snímku níže. Žák si správně určil, že 1920 Kč je 80 %, správně vypočítal hodnotu jednoho procenta, ale tuto hodnotu zapomněl vynásobit dvaceti.



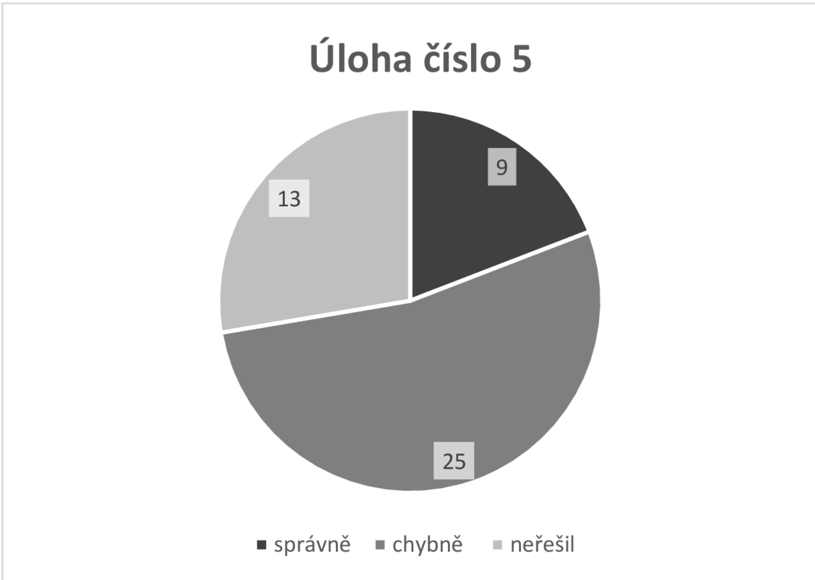
Obrázek 36 (A/3,4, chybná řešení)

Na závěr toho shrnutí lze říct, že žákům dělá největší problém rozpoznat ze zadání, co je základ, co procentová část, co počet procent a co vlastně mají vypočítat.

Nyní se podíváme na poslední příklad z varianty A. Ten má stejné slovní zadání jako příklad třetí, ale místo procent je hodnota uvedena ve zlomku, tedy místo 20 % je v zadání $\frac{1}{5}$. Tentokrát tedy známe zlomek, zlomkovou část a opět hledáme celkem.

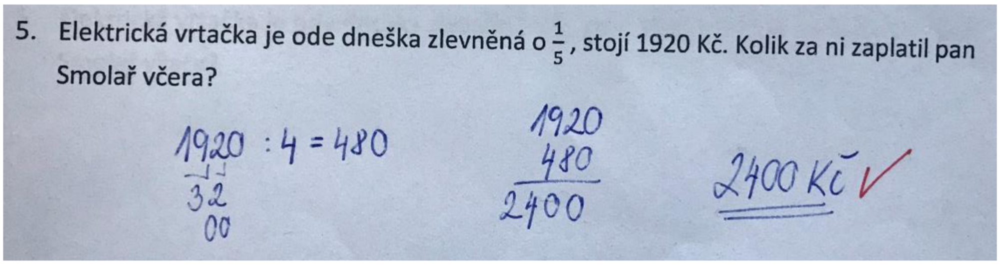
5. **Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o $\frac{1}{5}$, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?**

Úlohu číslo pět správně vyřešilo jen devět žáků, 25 žáků pak úlohu vyřešilo chybně a třináct ji vůbec neřešilo.



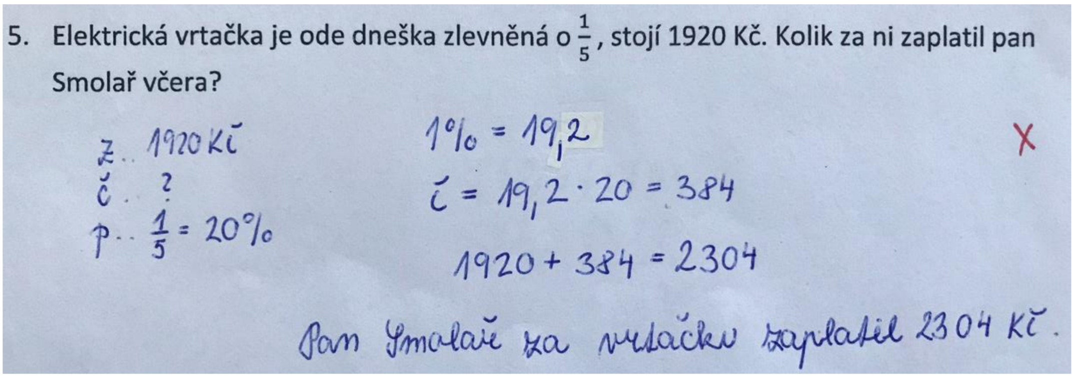
Obrázek 37 (A/5, úspěšnost úlohy, n = 47)

Úspěšní řešitelé ze zadání správně poznali, že hodnota 1920 Kč představuje $\frac{4}{5}$ z původní ceny a oni tak hledají celek $\frac{5}{5}$. Pět z nich použilo výpočet přes kmenový zlomek. Vydělili tedy 1920 čtyřmi a získanou hodnotu jedné pětiny vynásobili pěti, a tak získali výsledek 2400 Kč. Tři žáci bez jakéhokoliv postupu uvedli pouze výsledek, je tedy možné, že si v hlavě dokázali převézt zlomek na procenta a tím zjistili, že úloha 5 je stejná jako úloha 3. Jen jeden ze všech úspěšných řešitelů použil pro výpočet procenta, tedy rovnou si určil 1920 korun jako 80 % a postupoval stejně jako u dvou předchozích úloh. Jedno ze žákovských řešení pomocí kmenového zlomku můžete vidět na obrázku níže.



Obrázek 38 (A/5, správné řešení)

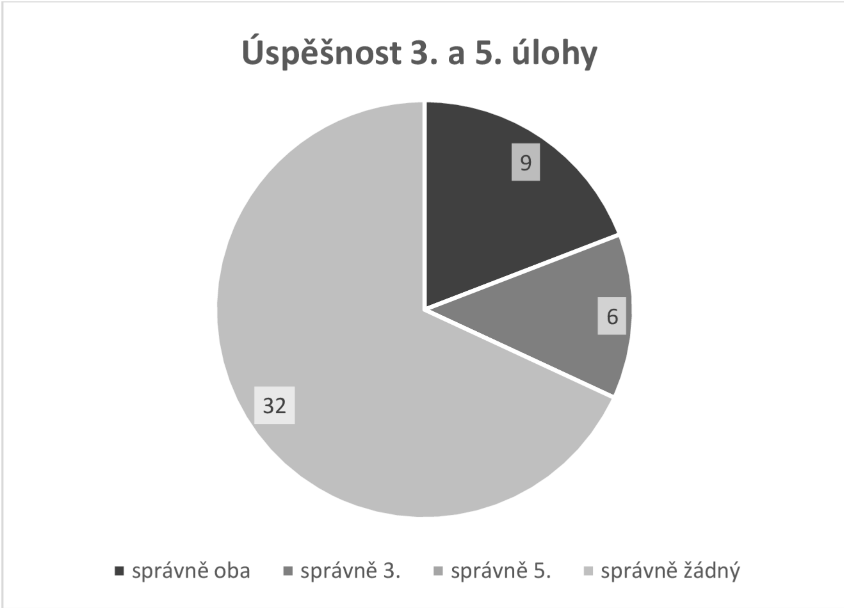
Chybných řešení bylo celkem 25, což je skoro polovina všech získaných řešení. Opět se často objevovaly výsledky 2304 Kč a 1536 Kč. Výsledek 2304 korun se objevil celkem šestnáctkrát, znovu došlo k chybnému zvolení, co je celek. Žáci s touto chybou použili jako celek 1920 Kč, a proto dělili pěti místo čtyřmi. Nesprávně vypočítanou slevu pak správně přičetli. Pět ze žáků s tímto výsledkem počítalo pomocí procent, tedy $\frac{1}{5}$ si převedli na 20 %. Poté již postupovali stejně jako třetí a čtvrté úlohy. Takový postup můžete vidět na snímku pod tímto odstavcem.



Obrázek 39 (A/5, chybné řešení)

Tři žáci došli k výsledku 1536 Kč, opět si špatně určili základ, a ještě navíc slevu odečítali. Další žáci udělali chyby v násobení či dělení, někteří vypočítali pouze hodnotu slevy, která byla ale také špatně.

Nyní si shrneme dohromady získané výsledky ze třetí a páté úlohy. Pouze devět žáků z celkových 47 mělo správně vypočítané obě slovní úlohy. 32 žáků nemělo správně vyřešenou ani jednu z úlohy a šest žáků mělo správně jen úlohu číslo 3. Mezi žáky se neobjevil nikdo, kdo by spočítal správně pouze pátou úlohu.



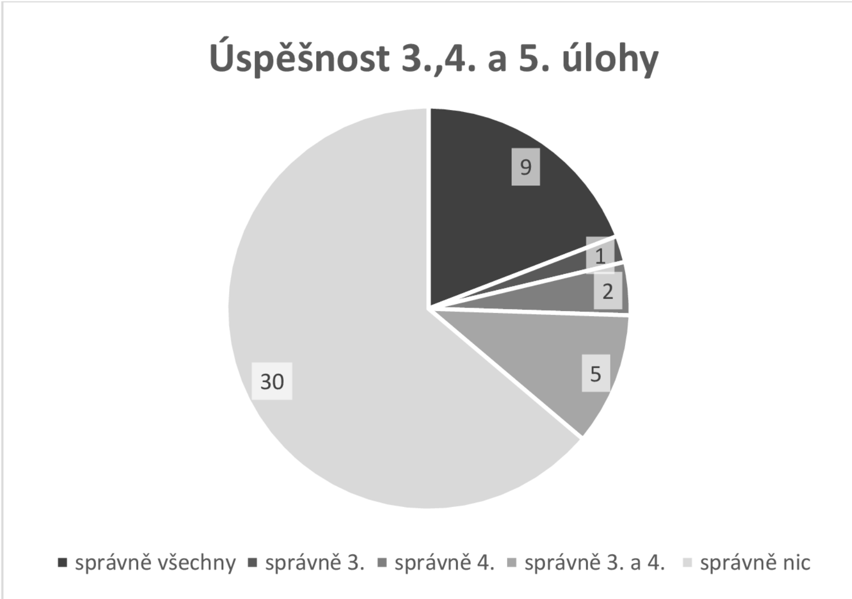
Obrázek 40 (A/3,5, úspěšnost úloh)

Žáky s oběma správnými výsledky můžeme rozdělit do tří skupin. Pět žáků počítalo první úlohu pomocí jednoho procenta a druhou pomocí kmenového zlomku. Tři žáci spočítali první úlohu pomocí jednoho procenta a u druhé úlohy uvedli pouze výsledek. Pouze jedna žákyně využila k výpočtu obou úloh výpočet přes jedno procento.

Tři žáci, kteří měli správně pouze první úlohu, se o vyřešení druhé úlohy vůbec nepokusili. Zbylí tři žáci dělili 1920 Kč pěti, tudíž špatně si zvolili, co je celek.

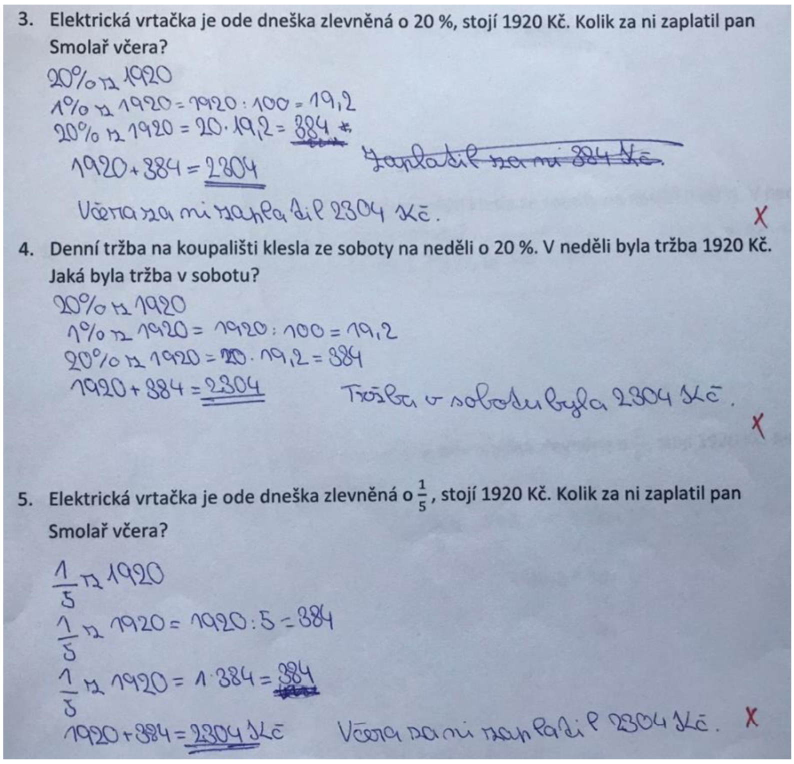
Mezi žáky, kteří měli obě úlohy chybně, se objevilo čtrnáct žáků, u kterých se chybné výsledky z první a druhé úlohy shodovaly, z toho lze usoudit, že žáci viděli souvislosti mezi jednotlivými úlohami. Většina chyb pak vznikla, špatným zvolením základu/celku nebo nepozorností v násobení či dělení. U osmi žáků se výsledky obou úloh neshodovaly, tudíž žáci zřejmě stejnému slovnímu zadání nevěnovali dostatek pozornosti. Zbytek žáků se z různých důvodů minimálně u jedné z úloh k výsledku nedopracoval.

Na závěr si shrneme dohromady všechny tři slovní úlohy. Žáků, kteří měli správně všechny tři slovní úlohy, bylo pouze devět ze 47. Naopak žáků, kteří neměli správně žádnou z úloh, bylo třicet. Pouze třetí úlohu měl správně jeden žák. Jen úlohu číslo čtyři měli správně dva žáci a pět žáků mělo správně pouze třetí a čtvrtou úlohu.



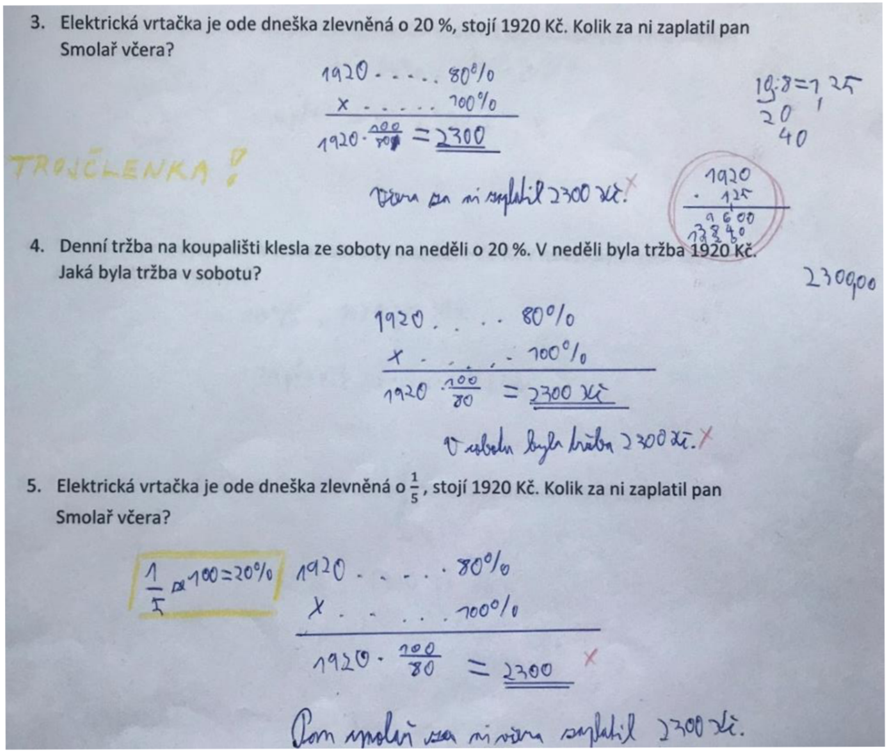
Obrázek 41 (A/3,4,5, úspěšnost úloh)

Objevili se žáci, kteří každou úlohu řešili samostatně buď pomocí jednoho procenta, nebo pomocí kmenového zlomku. Takových žáků bylo celkem čtrnáct, z nichž tři byli úspěšní řešitelé a jedenáct z nich bylo neúspěšných. Na snímku níže, můžete vidět ukázkový výpočet přes jedno procento a přes kmenový zlomek, špatný výsledek je způsoben nesprávným zvolením základu.



Obrázek 42 (A/3,4,5, chybná řešení)

Dále pak šest žáků počítalo všechny tři slovní úlohy v procentech, jeden z nich využil trojčlenku a zbytek počítal přes jedno procento. Z těchto žáků byl pouze jeden úspěšný. Pojďme se podívat na postup žáka, který použil pro výpočet trojčlenku. Bohužel udělal chybu v násobení, a tak má špatný výsledek. U pátého příkladu můžete vidět převod ze zlomku na procenta.



3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

1920 . . . . . 80 %
x . . . . . 100 %
1920 · 100/80 = 2300

TROJČLENKA !

Včera za ni zaplatil 2300 Kč.

19 : 8 = 1 25
20
40

1920
· 125
9600
3840
1920
230000

4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

1920 . . . . 80 %
x . . . . . 100 %
1920 · 100/80 = 2300 Kč

V sobotu byla tržba 2300 Kč.

5. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o $\frac{1}{5}$, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

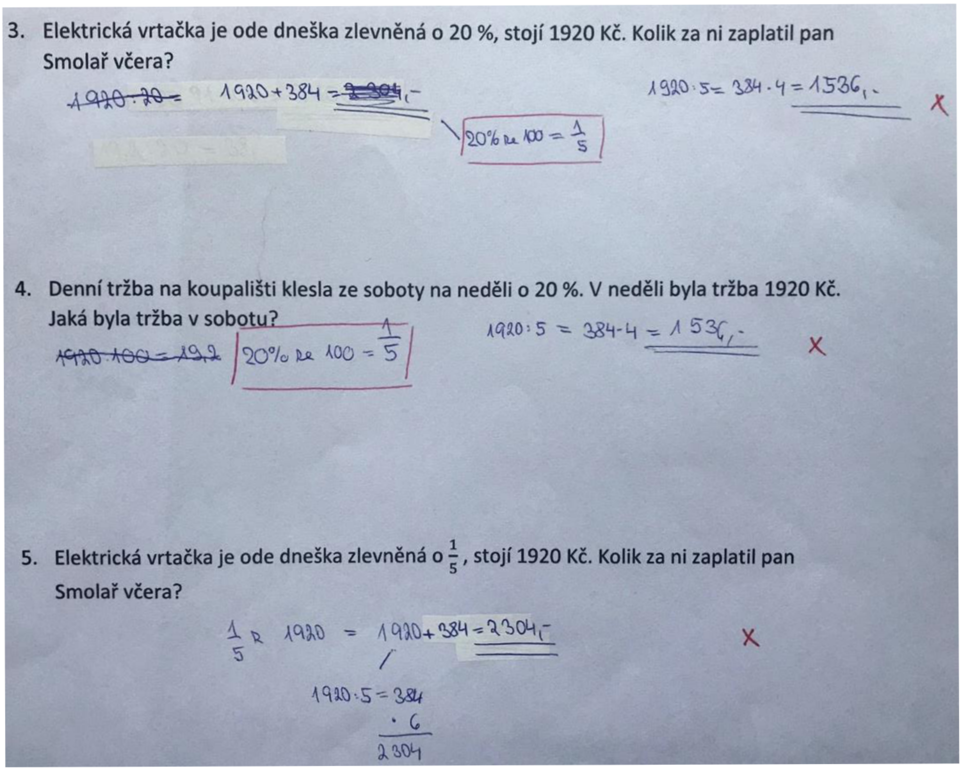
$\frac{1}{5} \cdot 100 = 20\,\%$

1920 . . . . . 80 %
x . . . . . 100 %
1920 · 100/80 = 2300

Pan Smolař za ni včera zaplatil 2300 Kč.

Obrázek 43 (A/3,4,5, chybná řešení)

Objevila se i jedna žákyně, která pro všechny úlohy použila zlomky. U třetí a čtvrté úlohy je vidět převod z procent na zlomek. Její výsledky byly však nesprávné, jelikož si chybně určila, co je základ. Na její postup se podívejte na následujícím snímku.



3. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o 20 %, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

~~1920 : 20 =~~ 1920 + 384 = ~~2304~~,-

20% ze 100 = $\frac{1}{5}$

1920 : 5 = 384 · 4 = 1536,-

X

4. Denní tržba na koupališti klesla ze soboty na neděli o 20 %. V neděli byla tržba 1920 Kč. Jaká byla tržba v sobotu?

~~1920 : 100 = 19,2~~

20% ze 100 = $\frac{1}{5}$

1920 : 5 = 384 · 4 = 1536,-

X

5. Elektrická vrtačka je ode dneška zlevněná o $\frac{1}{5}$, stojí 1920 Kč. Kolik za ni zaplatil pan Smolař včera?

$\frac{1}{5}$ z 1920 = 1920 + 384 = 2304,-

1920 : 5 = 384

· 6

2304

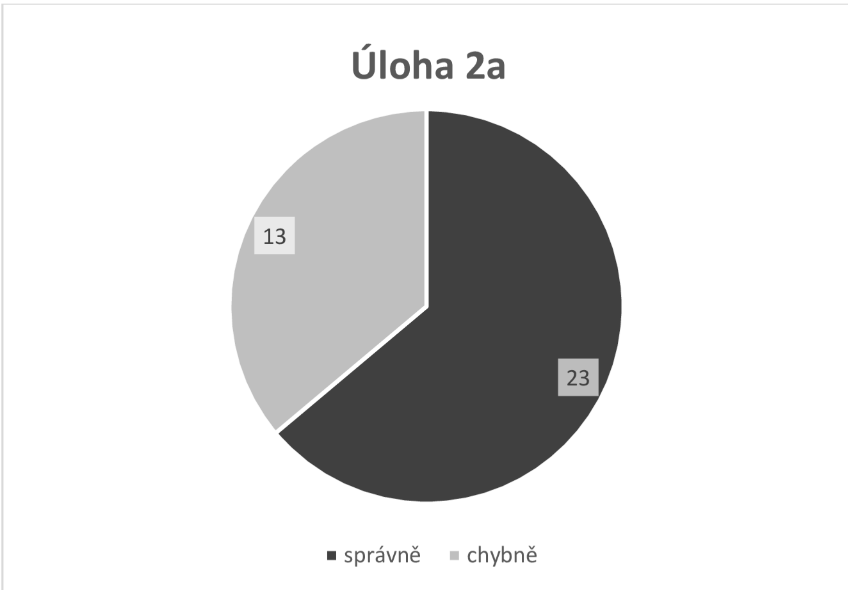
X

Obrázek 44 (A/3,4,5, chybná řešení)

Nyní se podíváme na získaná žákovská řešení varianty B. Těch jsem získala celkem 36. Varianta B písemného testu byla sestavena z těchto slovních úloh.

2. **Délka toku Labe je 1122 km, z toho 396 km je na území naší Republiky.**
   a) **Kolik procent z celkové délky toku Labe je na území naší republiky?**
   b) **Jaká část z celkové délky toku Labe ve zlomku je na území naší republiky?** (Běloun 1998, s. 26)

Tato slovní úloha je jiná než ostatní úlohy použité v testu. Úloha osahuje jedno zadání a dvě otázky, z nichž jedna požaduje výsledek v procentech a druhá ve zlomku. Tentokrát máme zadaný základ/celek a procentovou část neboli část z celku. Na první otázku odpovědělo správně 23 žáků z 36.

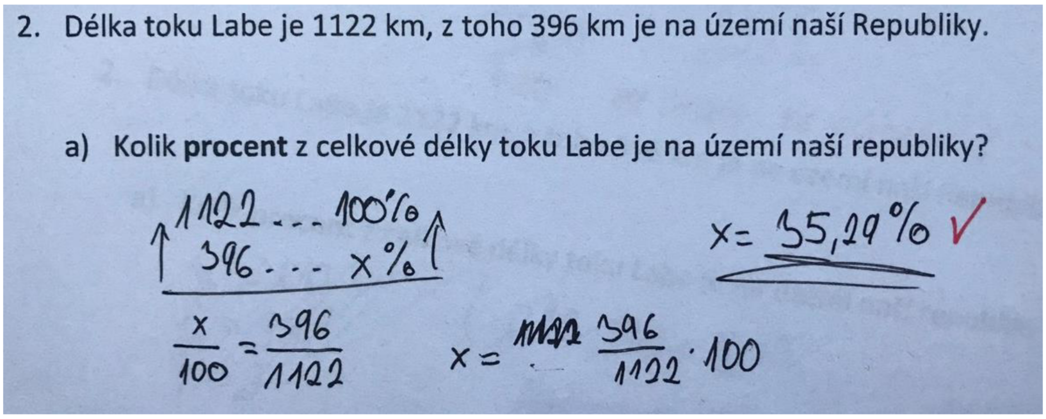


Obrázek 45 (B/2a, úspěšnost úlohy, n = 36)

Šestnáct žáků využilo výpočet pomocí jednoho procenta, čtyři žáci svůj postup výpočtu neuvedli. Tři žáci použili trojčlenku, která mi v případě hledání počtu procent přijde jednodušší. Ppřekvapilo mě, že trojčlenku použilo tak málo žáků.

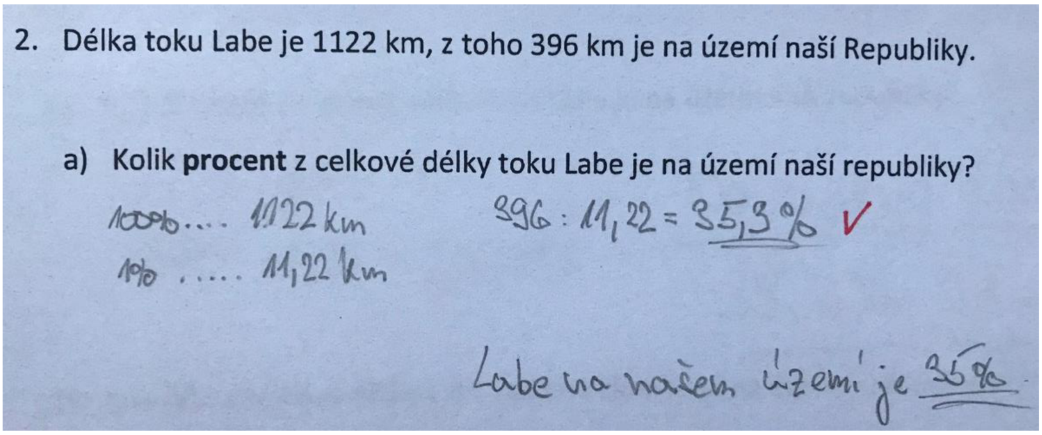
Obrázek 46 (B/2a, způsob řešení, n = 36)

Na obrázku níže je vidět jedno ze žákovských řešení pomocí trojčlenky.



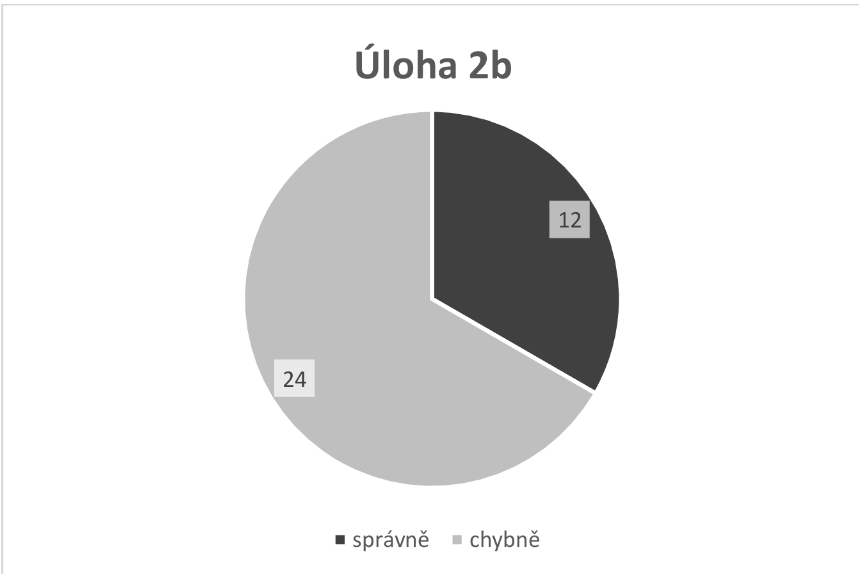
Obrázek 47 (B/2a, správné řešení pomocí trojčlenky)

Na dvou snímcích níže je zaznamenán výpočet pomocí jednoho procenta. Žáci nejprve hodnotu 1122 vydělili stem, aby zjistili hodnotu jednoho procenta. Tuto získanou hodnotu poté vynásobili 396.



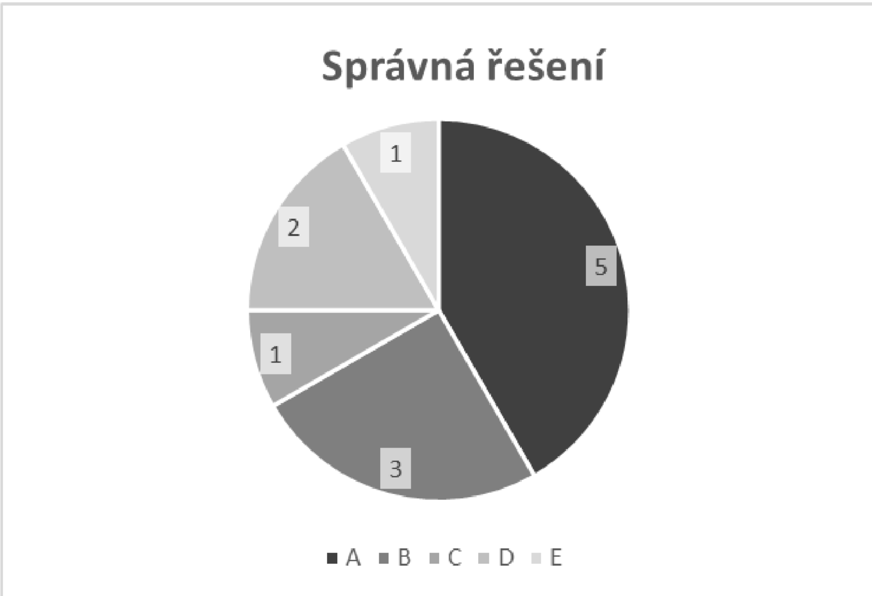
Obrázek 48 (B/2a, správné řešení)

Na druhou otázku odpovědělo správně jen dvanáct žáků. Neúspěch u této otázky může mít více různých důvodů. Žáci, kteří „vidí“ souvislosti mezi zlomky a procenty, mohli druhou úlohu vyřešit tak, že pouze vyjádřili procentuální hodnotu vypočítanou v první otázce ve zlomku. Správný výsledek měli samozřejmě pouze ti, kteří měli správně první úlohu. V případě, že žák chápe obě tyto témata odděleně, může pro něho být zadání ve zlomcích srozumitelnější než v procentech.



Obrázek 49 (B/2b, úspěšnost úlohy, n = 36)

Správné řešení mohlo mít několik různých podob. Nejčastěji se objevil zlomek $\frac{7}{20}$, což je základní tvar zlomku $\frac{35}{100}$, který vznikl převedením zaokrouhlené hodnoty 35,29 % na zlomek. Další správnou možností byl zlomek $\frac{6}{17}$, což je opět základní tvar, ale tentokrát od zlomku $\frac{396}{1122}$, který vznikl přímo z hodnot v zadání. U jedné žákyně se objevila odpověď $\frac{66}{187}$, což je zlomek $\frac{396}{1122}$ zkrácený šesti. V žádném testu nebyl uvedený postup, byl tam pouze zapsaný správný zlomek a v šesti případech byl uveden postup krácení zlomku do základního tvaru. Jako správné řešení byly uznány i zlomky, které nebyly v základním tvaru. Pro lepší orientaci v následujícím grafu: A = $\frac{7}{20}$, B = $\frac{35}{100}$, C = $\frac{6}{17}$, D = $\frac{396}{1122}$ a E = $\frac{66}{187}$.



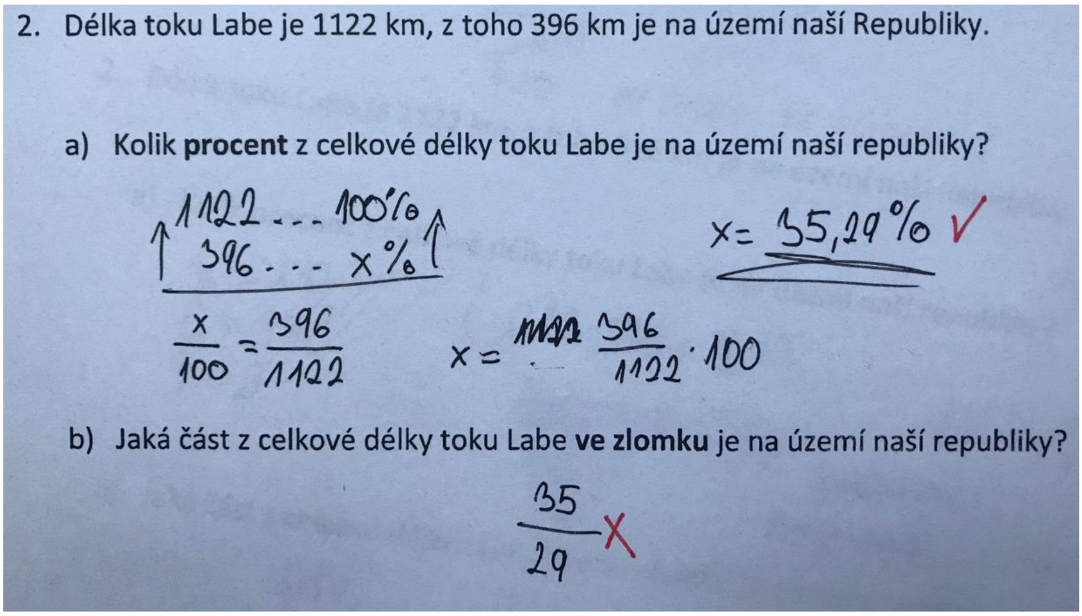
Obrázek 50 (B/2b, správná řešení, n = 12)

Pojďme se teď podrobněji podívat na to, jak žáci druhou úlohu řešili. Žáky můžeme rozdělit do dvou skupin ti, u kterých je jasné, že převáděli výsledek z procent na zlomek a ti, kteří úlohu řešili „od začátku“, tedy vycházeli ze zadání úlohy a nic z procent nepoužili.

Nejprve se podíváme na žáky, kteří měli obě úlohy vyřešeny správně. Osm žáků uvedlo jako výsledný zlomek $\frac{35}{100}$ nebo $\frac{7}{20}$, u těchto žáků je jasné, že převáděli procenta z první úlohy na zlomek. Dva žáci uvedli jako výsledek zlomek $\frac{396}{1122}$. U těch je zřejmé, že pracovali s údaji ze zadání, tudíž řešili obě úlohy odděleně.

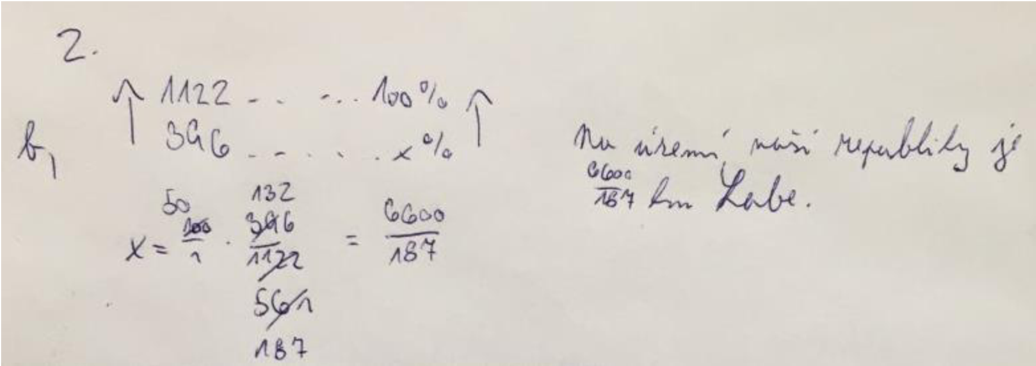
Dvě žákyně, které měly správně pouze druhý příklad, uvedly jako výsledek zlomky $\frac{66}{187}$ a $\frac{6}{17}$. U těchto dvou žákyň bylo jasně poznat, že druhou slovní úlohu řešily nezávisle na té první.

Při analýze chybných řešení druhé úlohy jsem zjistila, že jedenáct žáků z 24 se ani nepokusilo úlohu vyřešit. Jedna žákyně dokonce napsala, že nepochopila zadání. Pět žáků uvedlo bez jakéhokoliv postupu pouze chybný zlomek. Čtyři z těchto žáků měli chybně i první otázku, z toho pouze u jedné žákyně se hodnota zlomku shodovala s hodnotou procent. Zbylý jeden žák nedokázal správně převést procenta na zlomek. Jeho postup můžete vidět na obrázku níže. Toto je velmi zajímavé, může to ukazovat na konceptuální neznalost v oblasti procent. Žák má naučený postup, ale v podstatě nerozumí výsledku, který mu vyšel. Výsledek u procent je sice správný, ale žák nejspíš nerozumí tomu, co to je „35,29 %“.



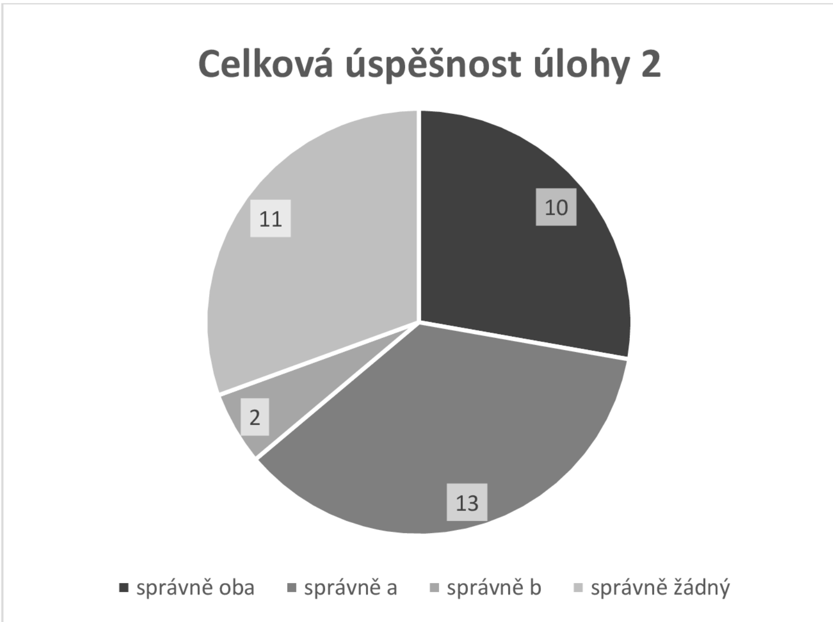
Obrázek 51 (B/2, správné i chybné řešení)

Žáků, kteří se úlohu pokusili vyřešit, ale jejich výsledek byl špatný, bylo devět. Většina chyb byla způsobena chybnou hodnotou procent z první otázky nebo špatným převodem procent na zlomek. Tři žáci se nezávisle na sobě dostali k hodnotě $\frac{6600}{187}$. Jejich postup můžete vidět na následujícím obrázku.



Obrázek 52 (B/2b, chybné řešení)

Shrnutí první slovní úlohy vypadá následovně. Na obě otázky správně odpovědělo deset žáků z 36. Jedenáct žáků nevyřešilo správně ani jednu z úloh. Třináct žáků pak vyřešilo správně pouze první otázku, z nichž šest se vůbec nepokusilo druhou otázku vyřešit. Naopak dvě žákyně měly správně pouze druhou otázku.

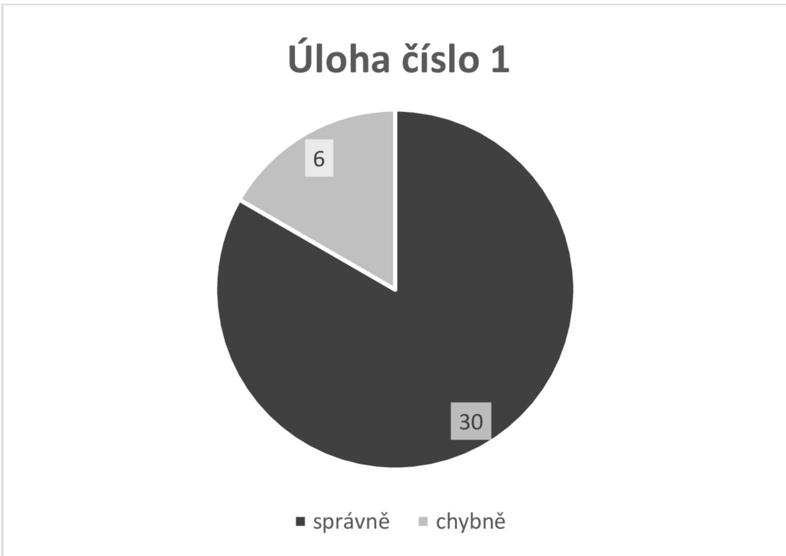


Obrázek 53 (B/2, úspěšnost úlohy, n = 36)

Úlohy číslo 1, 3 a 4 jsou založeny na stejném principu. Úloha číslo jedna je původní zadání převzaté z učebnice matematiky. Úloha číslo 3 má stejné slovní zadání, ale místo v procentech je číselný údaj o slevě uvedený ve zlomku. Poslední úloha má taktéž slevu zadanou ve zlomku, ale tentokrát má i změněné slovní zadání. Ve všech těchto úlohách je zadaný základ/celek a počet procent nebo zlomek. Žáci tak mají vypočítat procentovou či zlomkovou část. Konkrétně hodnotu, o kterou budou lyže zlevněné, případně kolik korun musí ještě Jirka našetřit na nové kolo.

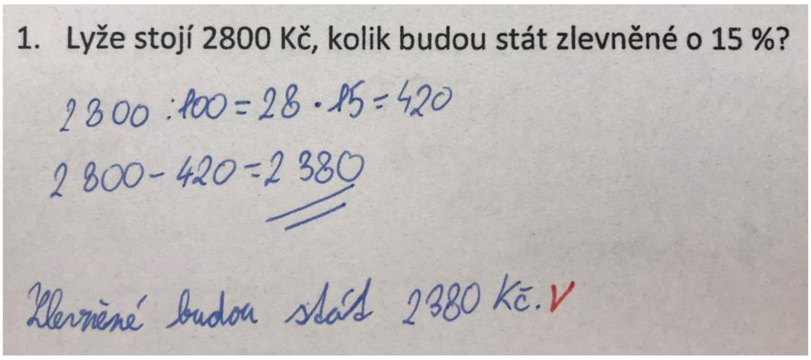
1. **Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o 15 %?** (Odvárko, Kadleček 2011, s. 54)

V první slovní úloze žáci znají základ a počet procent a mají vypočítat procentovou část. Tuto slovní úlohu správně vyřešilo 30 žáků a pouze šest žáků vypočítalo výsledek nesprávný.



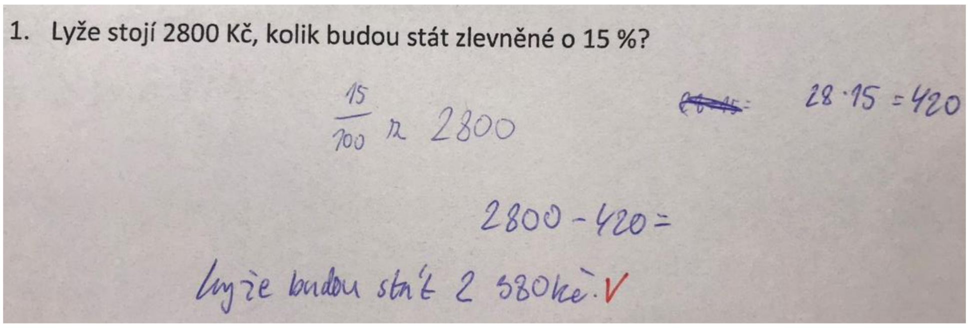
Obrázek 54 (B/1, úspěšnost úlohy, n= 36)

Objevily se různé způsoby výpočtu. Nejvíce úspěšní řešitelé využívali výpočet pomocí jednoho procenta. Všichni nejprve vypočítali hodnotu 15 % z 2800 Kč a pak získanou hodnotu od původní ceny odečetli. Takových žáků bylo 21. Na jedno takové řešení pomocí jednoho procenta se podívejte na snímku pod tímto odstavcem.



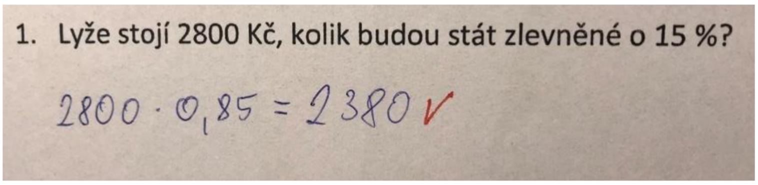
Obrázek 55 (B/1, správné řešení pomocí procent)

Jeden žák využil k výpočtu zlomky. Hledal tedy, kolik je $\frac{15}{100}$ z 2800 Kč. Na jeho postup se opět můžete podívat níže.



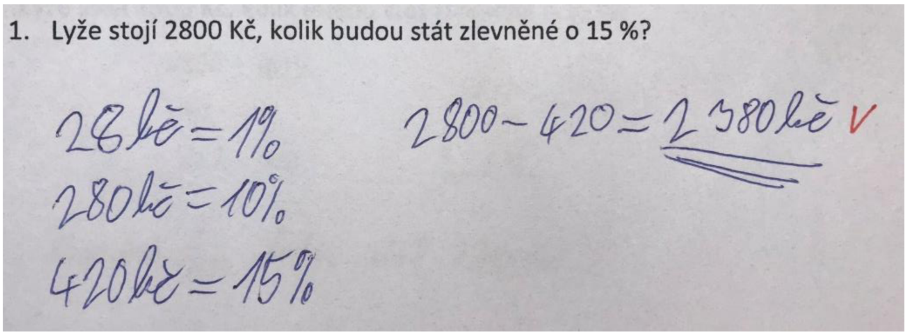
Obrázek 56 (B/1, správné řešení pomocí zlomků)

Jeden ze všech žáků použil k vyřešení této úlohy trojčlenku. Pouze jeden žák uvedl jen správný výsledek bez jakéhokoliv výpočtu. Dva žáci využili k řešení příkladu ještě jiný způsob. Jeden žák použil úspornější způsob řešení a hledal rovnou hodnotu 85 % z 2800 Kč, použil k tomu však desetinné číslo. Rovnou tady původní cenu vynásobil 0,85.



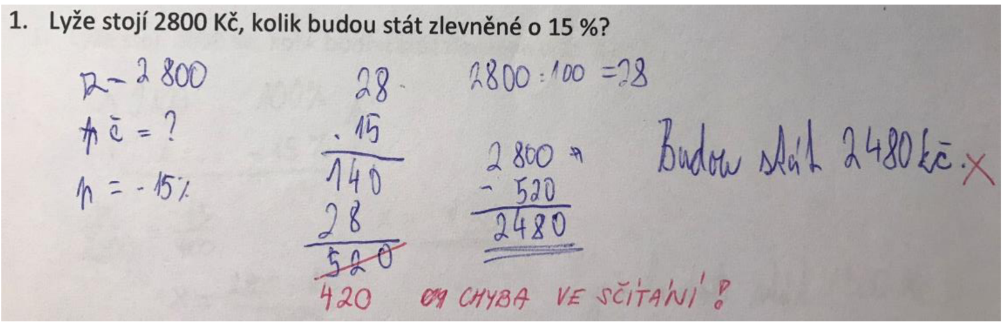
Obrázek 57 (B/1, správné řešení)

Druhý z žáků nejprve spočítal hodnotu jednoho procenta, poté hodnotu deseti procent a až poté hodnotu patnácti procent. Vyhnul se tak složitějším výpočtům, jelikož hodnota 15 % byla o polovinu větší než hodnota 10 %.



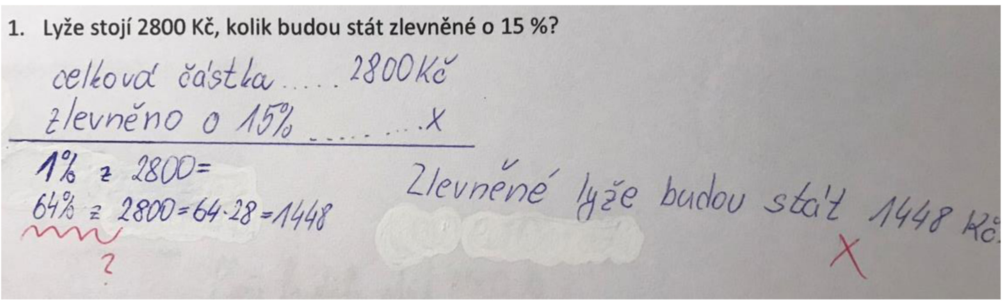
Obrázek 58 (B/1, správné řešení)

Chybných řešení této slovní úlohy bylo jen šest. Tři žáci skončili u výpočtu slevy. Hodnotu slevy měli sice správně, ale příklad nedokončili. Dva k tomu použili výpočet přes jedno procento a jeden pak použil trojčlenku. Následující postup jedné žákyně byl celý správně, bohužel udělala pří výpočtu slevy chybu ve sčítání.



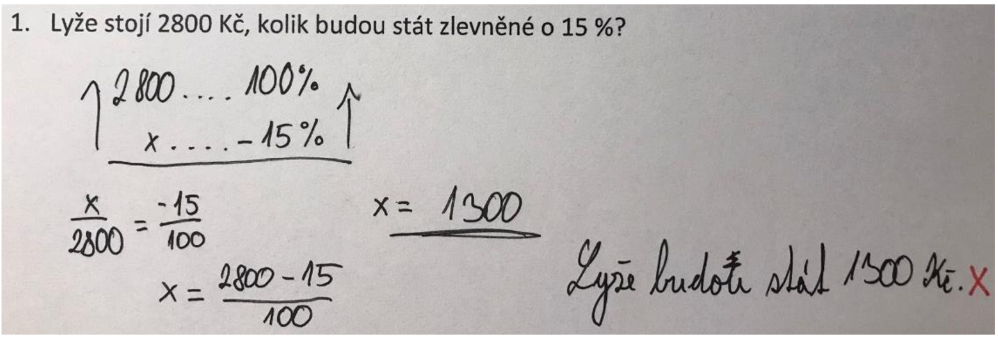
Obrázek 59 (B/1, chybné řešení)

Další z neúspěšných řešitelů nevím, z jakého důvodu, počítal hodnotu 64 % z 2800 Kč. Vypočítaná hodnota byla stejně chybná a odpovídala přibližně 52 %, zde došlo k chybě v násobení. Nevím, co se tomuto žákovi honilo hlavou, jeho postup byl dost zmatený. Posuďte sami.



Obrázek 60 (B/1, chybné řešení)

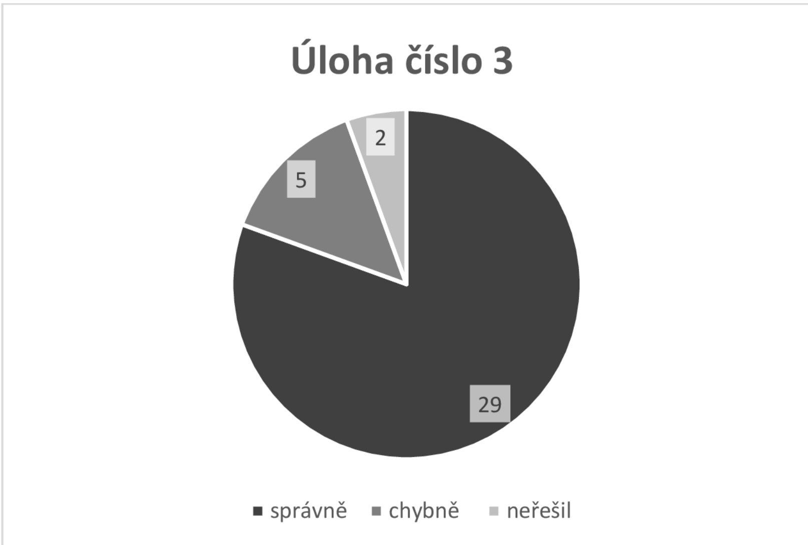
Poslední z neúspěšných řešitelů použil pro vyřešené úlohy trojčlenku. Očividně tento žák ale trojčlence moc nerozumí. Jako neznámou x si označil mínus 15 %, které pak dosadil do rovnice. V trojčlenkové rovnici úplně vynechal násobení v čitateli, proto mu výsledek vyšel chybně. Další chybou bylo, že žák označil jako výsledek, hodnotu slevy. Podívejte se na jeho postup pod tímto odstavcem.



Obrázek 61 (B/1, chybné řešení)

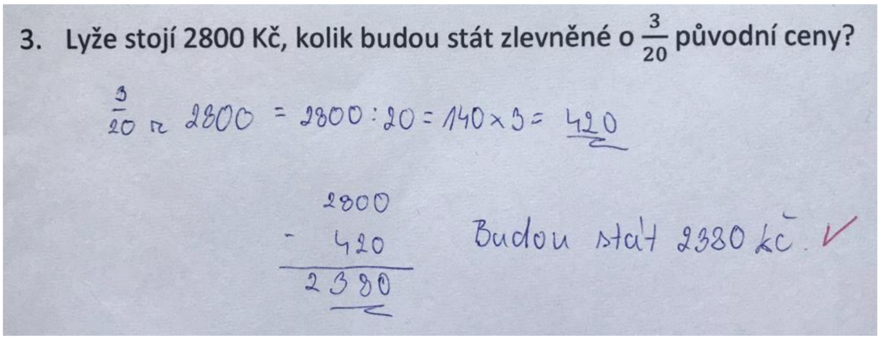
3. Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o $\frac{3}{20}$ původní ceny?

Druhá slovní úloha měla celkem 29 úspěšných a pět neúspěšných řešitelů. Dva žáci tuto slovní úlohu vůbec neřešili.



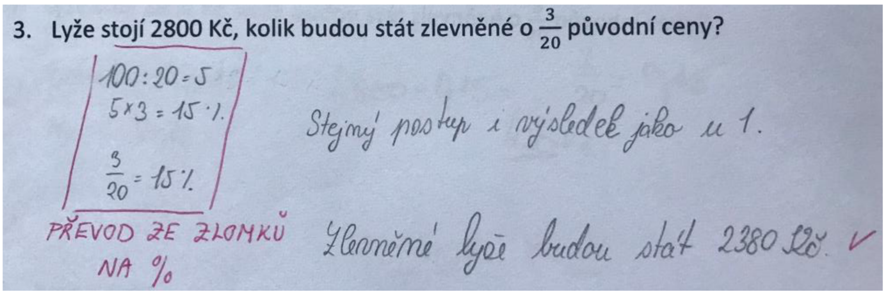
Obrázek 62 (B/3, úspěšnost úlohy, n = 36)

Nejvíce žáků použilo výpočet pomocí kmenového zlomku. Postupovali tak, že původní cenu 2800 Kč vydělili dvaceti a výsledek pak vynásobili třemi. Tak získali hodnotu slevy, která představovala $\frac{3}{20}$ z původní ceny. Vypočítanou slevu pak odečetli od původní ceny. Neobjevil se žádný žák, který by vypočítal rovnou $\frac{17}{20}$, aby na konci výpočtu nemusel odečítat. Na příklad takového postupu se podívejte níže.

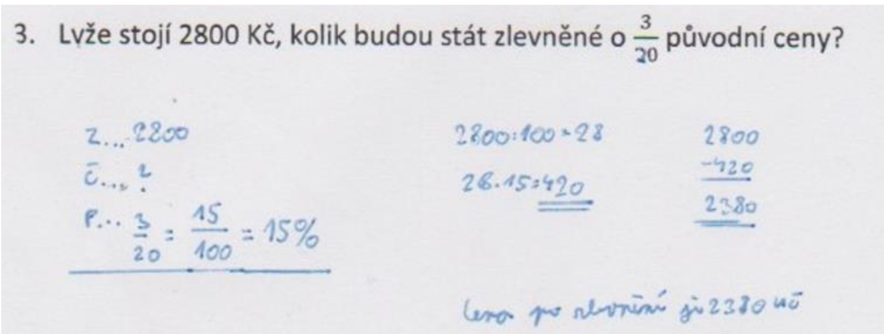


Obrázek 63 (B/3, správné řešení pomocí zlomků)

Tentokrát tři žáci použili výpočet pomocí procent. Zlomek $\frac{3}{20}$ si převedli na 15 %, dva z nich poté rovnou uvedli stejný výsledek jako u slovní úlohy číslo 1. Jedna žákyně dokonce uvedla, že by použila stejný postup jako u první úlohy, a proto se i výsledky obou úloh shodují. Třetí žák poté počítal úlohu pomocí jednoho procenta.

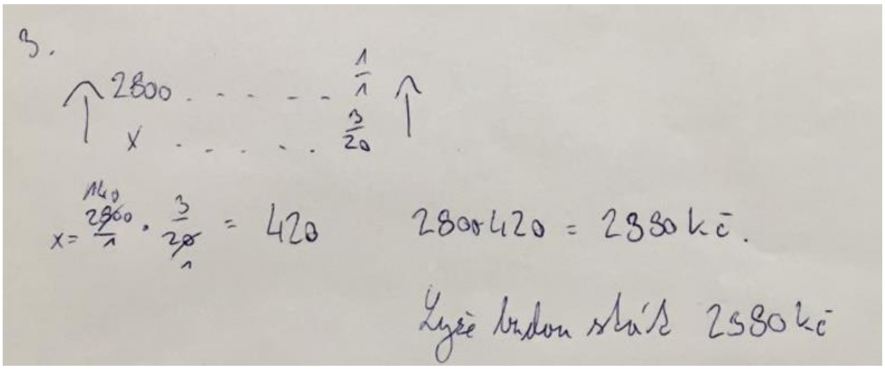


Obrázek 64 (B/3, správné řešení pomocí procent)



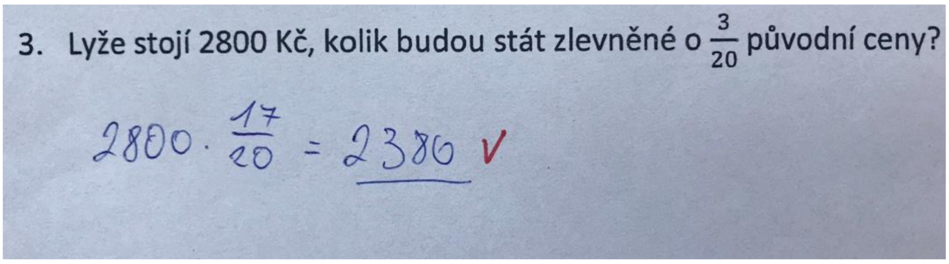
Obrázek 65 (B/3, správné řešení pomocí procent)

Další tři žáci použili k výpočtu trojčlenku, do které dosazovali ve zlomcích. Původní cenu si označili jako celek a neznámou x pak představoval zlomek $\frac{3}{20}$.



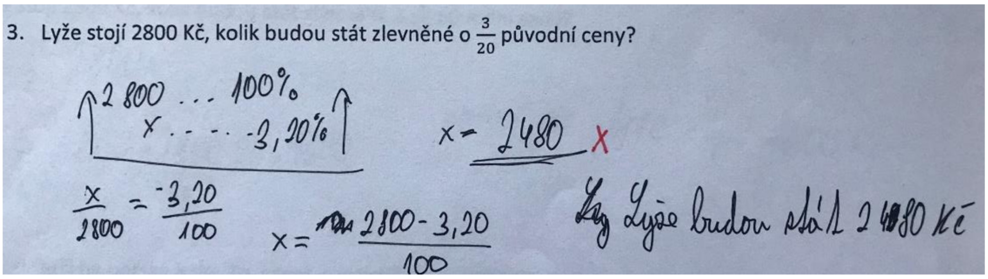
Obrázek 66 (B/3, správné řešení pomocí trojčlenky)

Pouze u jednoho žáka se objevil jiný postup. Tento žák původní cenu 2800 Kč rovnou vynásobil zlomkem $\frac{17}{20}$ a získal správný výsledek 2380 Kč. Na jeho postup se podívejte na snímku níže. Zbylí dva žáci uvedli pouze správný výsledek.



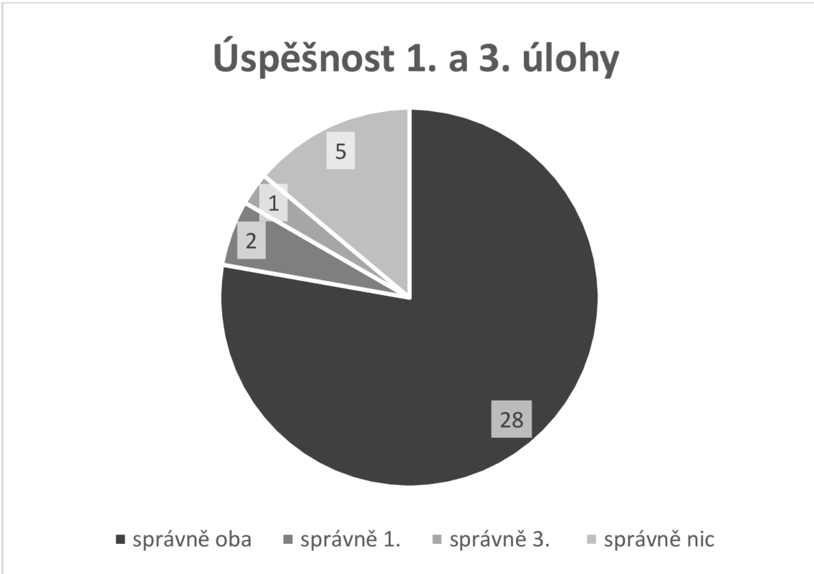
Obrázek 67 (B/3, správné řešení)

Chybných řešení u této slovní úlohy bylo jenom pět. Dva žáci skončili tím, že spočítali správně hodnotu slevy, kterou pak ale neodečetli od původní ceny. Důvodem může být nepozornost při čtení zadání. Další dva žáci se pokusili vypočítat úlohu pomocí kmenového zlomku. Jeden z nich udělal chybu již při výpočtu $\frac{1}{20}$, chybně spočítal příklad 2800 děleno 20. Tím jeho snaha o získání výsledku skončila. Druhý z žáků udělal chybu z nepozornosti, počítal hodnotu $\frac{1}{20}$ z 8200 Kč. Poslední žák, u kterého se objevil nesprávný výsledek, se pokusil použít trojčlenku a procenta. K první závažné chybě došlo už v převodu zlomku na procenta, kdy žák uvedl, že $\frac{3}{20}$ jsou 3,20 %. Další závažná chyba nastala, když žák v trojčlenkové rovnici použil v čitateli místo početní operace násobení odečítání. Na jeho postup plný vážných chyb se podívejte po tímto odstavcem.



Obrázek 68 (B/3, chybné řešení)

Na následujícím grafu můžete vidět shrnutí úspěšnosti první a třetí slovní úlohy. Tyto slovní úlohy měly stejné slovní zadání, pouze místo procent byl ve druhé úloze zlomek.



Obrázek 69 (B/1,3, úspěšnost úloh, n = 36)

Celkem 28 žáků spočítalo obě slovní úlohy správně. Většina z nich použila pro první úlohu výpočet přes jedno procento a pro úlohu číslo 3 způsob výpočtu přes kmenový zlomek. Dva žáci počítali obě úlohy pomocí procent a pouze jeden žák využil u obou slovních úloh zlomky. Tři žáci pak využili u obou úloh trojčlenku. Objevil se pouze jeden žák, který první úlohu vypočítal pomocí trojčlenky a u třetí úlohy použil výpočet přes kmenový zlomek.

4. **Jirka si šetří na horské kolo. To, které si vyhlédl, stojí 2800 Kč. Zatím má naspořeno $\frac{3}{20}$ z jeho ceny. Kolik korun musí ještě ušetřit?**

Poslední čtvrtá slovní úloha měla jiné, možná trochu složitější slovní zadání než dvě předchozí úlohy. Číselné údaje zůstaly stejné a byly použity zlomky. Tentokrát jde o to, že si Jirka šetří na nové horské kolo. Kolo stojí 2800 Kč a Jirka má již našetřeny $\frac{3}{20}$ z ceny kola. Otázkou je kolik peněz musí ještě našetřit? Žáci tedy opět znají celek a zlomek a mají spočítat zlomkovou část.

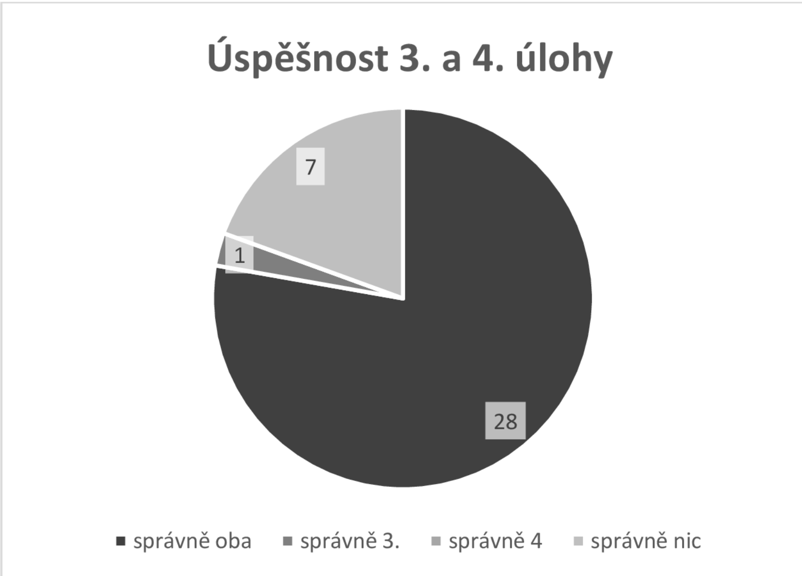
Tuto slovní úlohu spočítalo správně 28 žáků, nesprávný výsledek mělo pět žáků a tři žáci ze 36 tuto úlohu vůbec neřešili.

Obrázek 70 (B/5, úspěšnost úlohy, n = 36)

Pouze třináct ze všech úspěšných řešitelů využilo početní postup pomocí kmenového zlomku. Tento postup se shodoval s postupem u třetí slovní úlohy. Opět tři žáci využili trojčlenku, do které dosazovali ve zlomcích. Jen jedna žákyně pro svůj výpočet použila procenta. Objevili se tři žáci, kteří použili hodnotu $\frac{3}{20}$ vypočítanou v předchozí úloze a tu jen odečetli od 2800 Kč. Osm žáků u této úlohy uvedlo pouze správný výsledek, jeden z žáků přímo poznamenal, že slovní úlohy 3 a 4 jsou úplně stejné.

Chybných řešení bylo celkem pět. Dva neúspěšní řešitelé skončili vypočítáním hodnoty $\frac{3}{20}$, tudíž opět došlo k nepozornosti při čtení zadání. Jeden z žáků uvedl pouze chybný výsledek. Další žák napsal stejný výsledek jako u předchozí úlohy, který byl bohužel chybný. A poslední žák udělal stejnou chybu z nepozornosti jako v předchozí úloze.

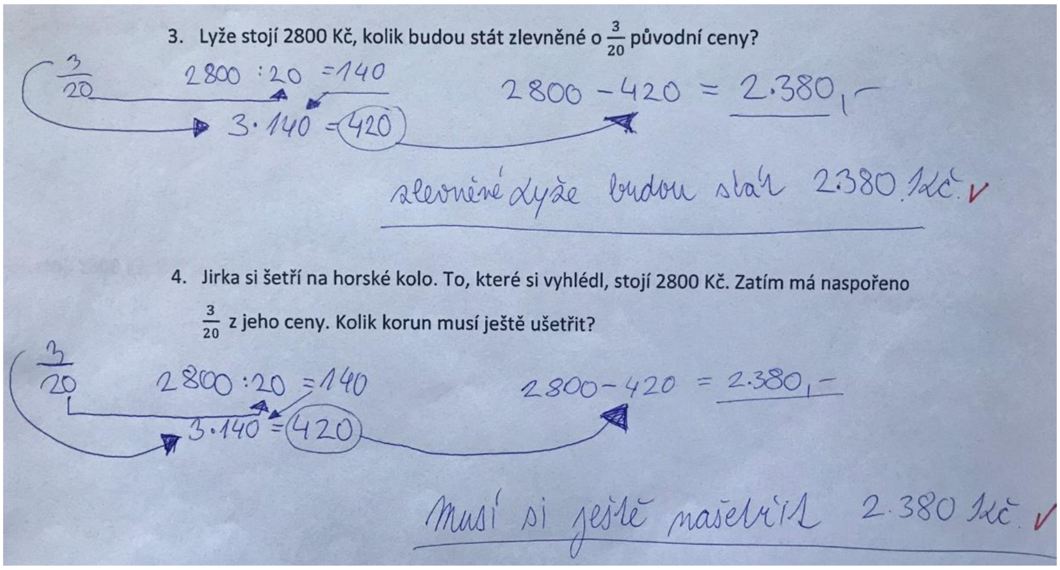
Pojďme si shrnout dohromady třetí a čtvrtou slovní úlohu, které byly obě zadané ve zlomku, ale měly různá slovní zadání.



Obrázek 71 (B/3,4, úspěšnost úloh, n = 36)

Žáků, kteří vyřešili obě slovní úlohy správně bylo 28 z 36. Sedm žáků pak nevyřešilo správně ani jednu z úloh a objevil se pouze jeden žák, který měl správně pouze jednu z úloh, a to úlohu číslo 3.

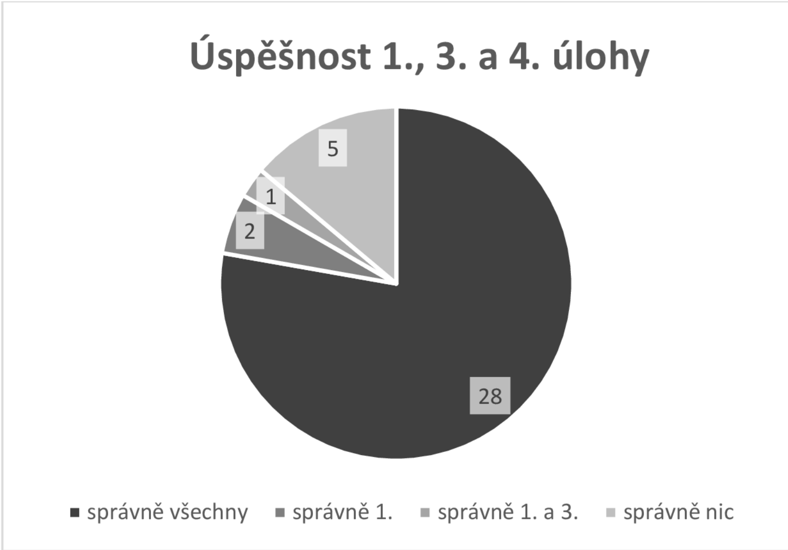
Úspěšné řešitele obou úloh můžeme rozdělit do dvou skupin. Ti, kteří použili pro obě úlohy stejný početní postup a ti, kteří vypočítala jen první z úloh a u druhé uvedli jen výsledek. V té první skupině bylo třináct žáků, kteří obě úlohy řešili přes kmenový zlomek. Tři žáci využili pro oba příklady trojčlenku a pouze jedna žákyně počítala obě úlohy pomocí procent. V druhé skupině pak bylo celkem jedenáct žáků. Na snímku pod tímto odstavcem můžete vidět ukázkový a přehledný postup pomocí kmenového zlomku.



Obrázek 72 (B/3,4, správná řešení)

Žák, který měl správně pouze jednu z úloh, a to tu třetí, napsal u obou úloh pouze výsledky, takže nelze poznat, proč nevyřešil správně i druhou z úloh.

Mezi neúspěšnými řešiteli obou úloh byli dva žáci, kteří ani jednu z úloh neřešili. Jeden žák řešil pouze první z úloh, ve které udělal početní chybu v dělení. Zbylé čtyři žáky můžeme rozdělit na ty, u kterých se výsledky shodovaly a na ty, kteří měli u obou úloh odlišné výsledky. Dva žáci u obou úloh uvedli výsledek 420 Kč, což byla správná hodnota $\frac{3}{20}$, ale nebyl to správný výsledek, který byl požadován v zadání. Jeden žák uvedl u obou úloh jako výsledek 2480 Kč, k čemuž došlo chybným použitím trojčlenky v prvním z příkladů. Zbylá žákyně, u které se výsledky lišily, udělala chybu z nepozornosti a výsledky se neshodovaly proto, že u první úlohy uvedla chybnou hodnotu slevy a ve druhé tu chybnou hodnotu tří dvacetin od celku odečetla. Na závěr si shrneme všechny tři tyto podobné slovní úlohy dohromady.

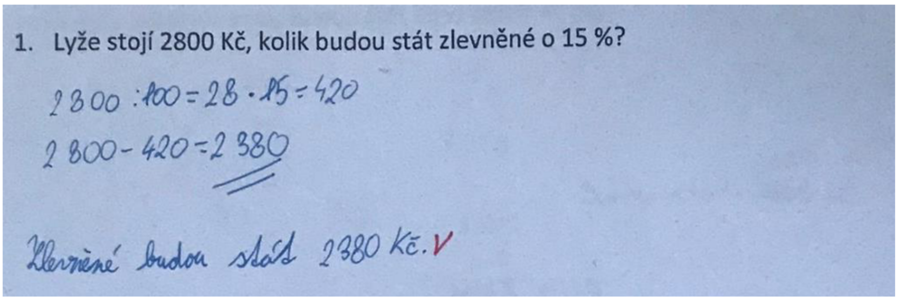


Obrázek 73 (B/1,3,4, úspěšnost úloh, n = 36)

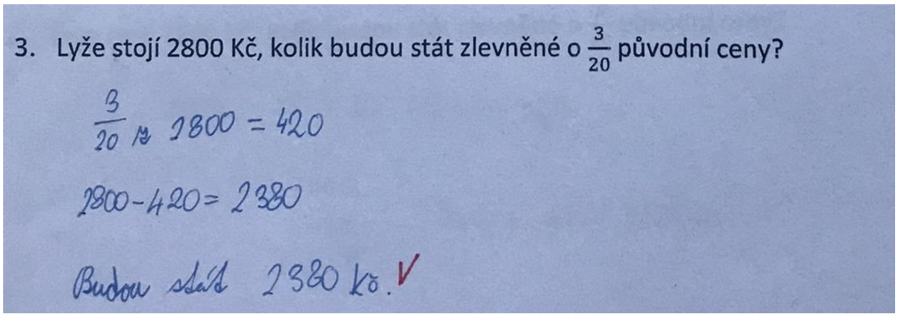
Úspěšnost těchto slovních úloh mě mile překvapila, ze všech 36 žáků mělo všechny tři úlohy správně 28. Naopak pět žáků nemělo správně ani jenu z úloh. Dále se objevil jeden žák, který měl správně pouze první a třetí slovní úlohu a dva žáci, kteří měli správně jen úlohu číslo 1. Pojďme se podívat na postupy řešení jednotlivých úloh u úspěšných řešitelů.

Obrázek 74 (B/1,3,4, způsob řešení, n = 36)

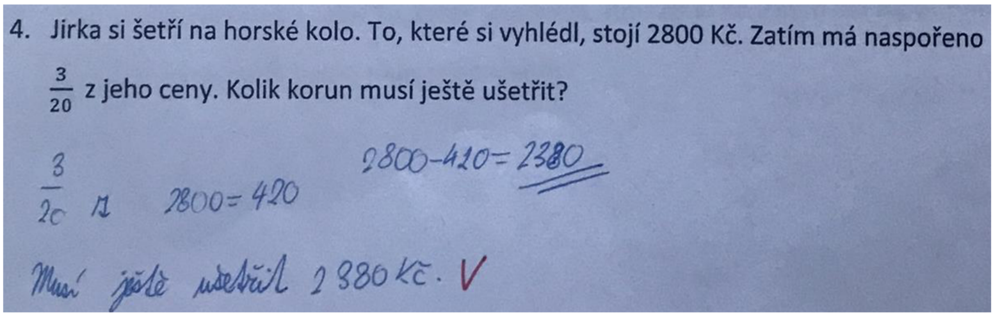
Většina úspěšných řešitelů zvolila početní postup podle toho, zda byl v zadání zlomek nebo procenta. 25 žáků tedy první úlohu řešilo v procentech a zbylé dvě úlohy ve zlomcích. Z toho tři žáci použili trojčlenku na všechny tři slovní úlohy a jeden použil trojčlenku u první úlohy s procenty a zbylé dvě počítal přes kmenový zlomek. Nejčastější způsob výpočtu si prohlédněte na snímku níže. Jedná se o klasický výpočet pomocí jednoho procenta a kmenového zlomku.



Obrázek 75 (B/1, správné řešení pomocí procent)

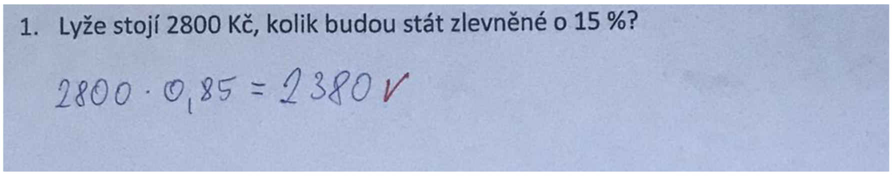


Obrázek 76 (B/3, správné řešení pomocí zlomků)



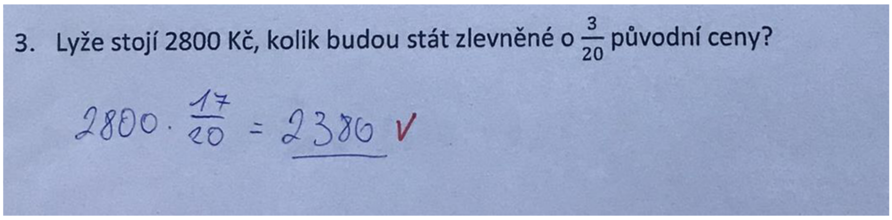
Obrázek 77 (B/4, správné řešení pomocí zlomků)

Jeden žák použil zcela odlišný způsob výpočtu od všech ostatních. Také zachoval to, že první úlohu řešil v procentech a zbylé dvě ve zlomcích, ale v první úloze násobil hodnotu základu rovnou 0,85. Toto desetinné číslo vzniklo, že původní cena představovala 100 % a sleva činila 15 %, tedy cena po slevě představovala 85 % z původní ceny. 85 % rovná se číslu 0,85. Ve třetí úloze násobil hodnotu celku rovnou $\frac{17}{20}$. Tento zlomek vznikl tak, že celek představuje $\frac{20}{20}$ a slevu představují $\frac{3}{20}$. $\frac{20}{20}$ mínus $\frac{3}{20}$ se rovná $\frac{17}{20}$. Ve čtvrté úloze nejprve spočítal, co má Jirka již naspořeno tak, že 2800 vynásobil $\frac{3}{20}$ a to poté odečetl od 2800 Kč. Tento postup je velmi stručný a rychlý. Tento žák byl jediný, kdo takový postup použil.


1. Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o 15 %?

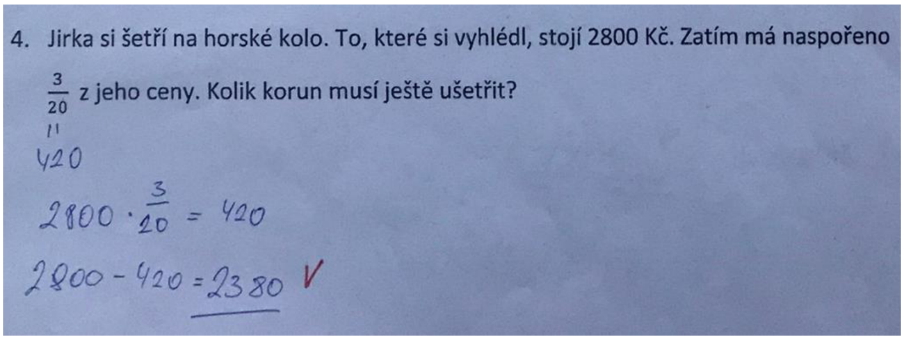
$2800 \cdot 0{,}85 = 2380$

Obrázek 78 (B/1, správné řešení)


3. Lyže stojí 2800 Kč, kolik budou stát zlevněné o $\frac{3}{20}$ původní ceny?

$2800 \cdot \frac{17}{20} = \underline{2380}$

Obrázek 79 (B/3, správné řešení)


4. Jirka si šetří na horské kolo. To, které si vyhlédl, stojí 2800 Kč. Zatím má naspořeno $\frac{3}{20}$ z jeho ceny. Kolik korun musí ještě ušetřit?

$\frac{3}{20}$ = 420

$2800 \cdot \frac{3}{20} = 420$

$2800 - 420 = \underline{2380}$

Obrázek 80 (B/4, správné řešení)

Dva žáci počítali všechny tři úlohy v procentech a jeden žák všechny tři úlohy ve zlomcích. Někteří žáci využívali stejného slovního zadání a stejných zadaných hodnot. U třetí, a ještě více u čtvrté úlohy uváděli pouze výsledky.

4 Diskuze

Mezi všemi získanými žákovskými řešeními se nejvíce objevovaly klasické postupy, a to přes jedno procento a přes kmenový zlomek. Toto ukazuje, že žáci mají základní znalosti zlomků a procent. Většina žáků tedy zůstala u prvního postupu, který se ve škole naučili. K mému překvapení jen málo žáků použilo trojčlenku.

Slovní úlohy A/1 a A/2 byly úlohy statické. V této úloze znali žáci základ či celek a počet procent nebo zlomek a dopočítávali procentovou/zlomkovou část. Nejvíce žáků použilo k získání výsledku dva výpočty. Nejprve spočítalo hodnotu jednoho procenta nebo kmenového zlomku a pomocí ní spočítali hledanou část. Někteří žáci sice výpočet jednoho procenta na papír neuvedli, ale i tak tento výpočet musel proběhnout. Objevili se i žáci, kteří použili tři výpočty, jelikož vypočítanou část museli ještě odečíst od základu.

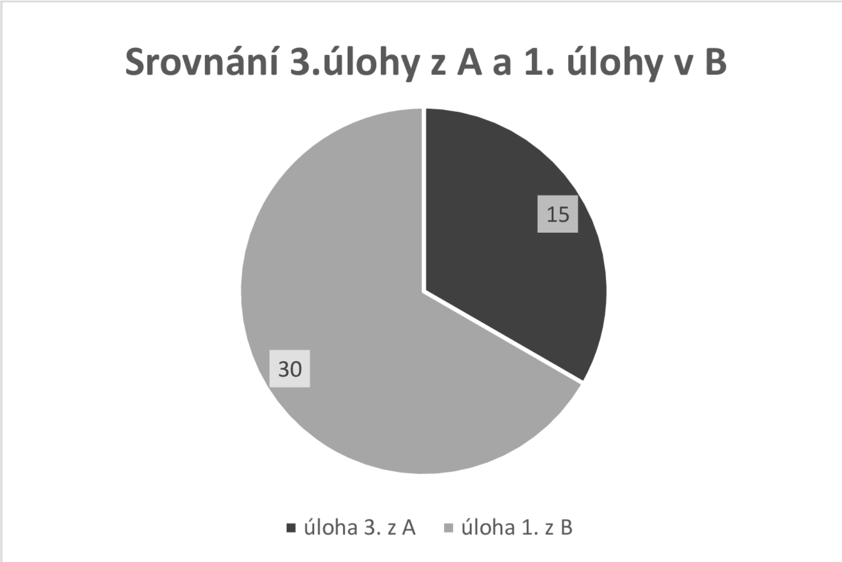
Slovní úlohy A/3, A/4 a A/5 byly dynamické úlohy. Ve všech třech úlohách žáci znali procentovou či zlomkovou část a počet procent nebo zlomek. Měli tedy dopočítat základ/celek. U těchto tří úloh žáci nejčastěji použili tři výpočty. Nejprve zjistili hodnotu jednoho procenta, či kmenového zlomku, poté vypočítali hodnotu slevy, tu poté přičetli a získali původní cenu. Tyto úlohy se daly vyřešit i dvěma výpočty, kdy v druhém kroku žák nehledá část, ale hledá rovnou základ, tedy 100 %.

Slovní úlohy B/1 a B/3 byly také úlohy dynamické. V těchto dvou úlohách žáci znali základ nebo celek a počet procent či zlomek. Dopočítávali tedy procentovou/zlomkovou část. Tento typ úloh opět nejvíce žáků řešilo třemi výpočty. Dal se ale vypočítat i pomocí dvou výpočtů, kdy jako druhý krok žák rovnou vypočítá hodnotu ceny po slevě, tedy 85 %.

Slovní úloha B/2 byla úloha statická. Žáci znali základ a procentovou část. V první otázce měli určit počet procent a ve druhé otázce zlomek. V případě první otázky většina žáků použila dva výpočty. Nejprve zjistili hodnotu jednoho procenta a poté vypočítali počet procent. Ve druhé otázce použila většina žáků pouze jeden výpočet a to ten, že procenta převedli na zlomek.

Poslední úloha B/4 byla také statická. Žáci znali celek a zlomek a dopočítávali zlomkovou část. Žáci nejčastěji dospěli k výsledku pomocí třech výpočtů.

Pojďme se nyní podívat na jednu skutečnost, která se dala předpokládat. Shrneme si dohromady úspěšnost úlohy číslo 3 z varianty A a úspěšnost úlohy číslo 1 z varianty B. Obě tyto úlohy byly zadané v procentech a u obou šlo o zlevňování zboží. Ve třetí úloze se ale měl vypočítat základ, kdežto v první úloze procentová část.



Obrázek 81 (srovnání A/3 a B/1, n = 45)

Úlohu číslo 1 měl správně dvojnásobný počet žáků, než úlohu číslo 3. Samozřejmě musíme brát na zřetel, že variantu B vypracovalo o jedenáct žáků méně než variantu A. Ve třetí úloze se objevovala častá žákovská chyba a to, že žáci automaticky, bez ohledu na kontext úlohy, považují číslo v zadání za základ. Toto srovnání ukazuje na to, že žákům více vyhovují ty slovní úlohy, u kterých znají základ a dopočítávají část ze základu. Může to být způsobeno tím, že žáci se v minulosti setkávali spíše s tímto typem slovních úloh na procenta. A proto mají tento postup naučený nazpaměť a příliš o zadání úlohy nepřemýšlí, vidí procenta a automaticky počítají procentovou část.

Z učitelských zkušeností i výzkumů prováděných se žáky vyplývá, že významný zdroj takovýchto chyb je absence tvorby situačního modelu slovní úlohy. Takovýto situační model je podkladem pro vytvoření matematického modelu. (Hejný 1995) tuto situaci nazývá jako *zmocňování se úlohy s porozuměním*. Tento proces probíhá ve vědomí žáka při čtení slovního zadání slovní úlohy (Vondrová 2019, s. 85).

Pojďme se ještě na chvilku zastavit u toho, proč žáci tak málo využívali trojčlenku. V knize (Vondrová 2019) se objevuje situace z nejmenované školy, kde zrovna v 7. ročníků probírají procenta. Výpočty s procenty se nejprve učili pomocí 1 %. Pro zjednodušení žákům paní učitelka ukázala i trojčlenku ale spíše na mechanické úrovni. Žáci se postup trojčlenky naučili nazpaměť, došlo tedy ke zredukování trojčlenky na formální pravidlo, tím zaniká základní podstata trojčlenky jako rovnost poměrů. Dokud žáci používají tímto způsobem trojčlenku každý den, nemají s ní sebemenší problém. Jakmile se ale žák začne věnovat jinému tématu, může naučený mechanický postup u žáka zmizet. Proto žák ve vyšším ročníku použije radši výpočet pomocí jednoho procenta (Vondrová 2019, s. 98).

Z úspěšnosti jednotlivých slovních úloh a z toho, jaké početní postupy si žáci vybírali, vyplývá, že u žáků devátých ročníků jsou více oblíbená procenta než zlomky. Objevilo se více žáků, kteří si zlomky převáděli na procenta než naopak.

To potvrzuje i prováděný výzkum z knihy (Rendl, Vondrová 2013). Učitelé, kteří se zúčastnili výzkumu, označili zlomky jako téma, kterému se žáci snaží nejvíce vyhýbat. Další takové téma, které učitelé vyzdvihli byly slovní úlohy. Výzkum také říká, že žákům se lépe pracuje s celými čísly. To může být další důvod, proč si žáci převáděli zlomky na procenta. Radši budou počítat s 15 % než se $\frac{3}{20}$ (Rendl, Vondrová 2013, s. 75).

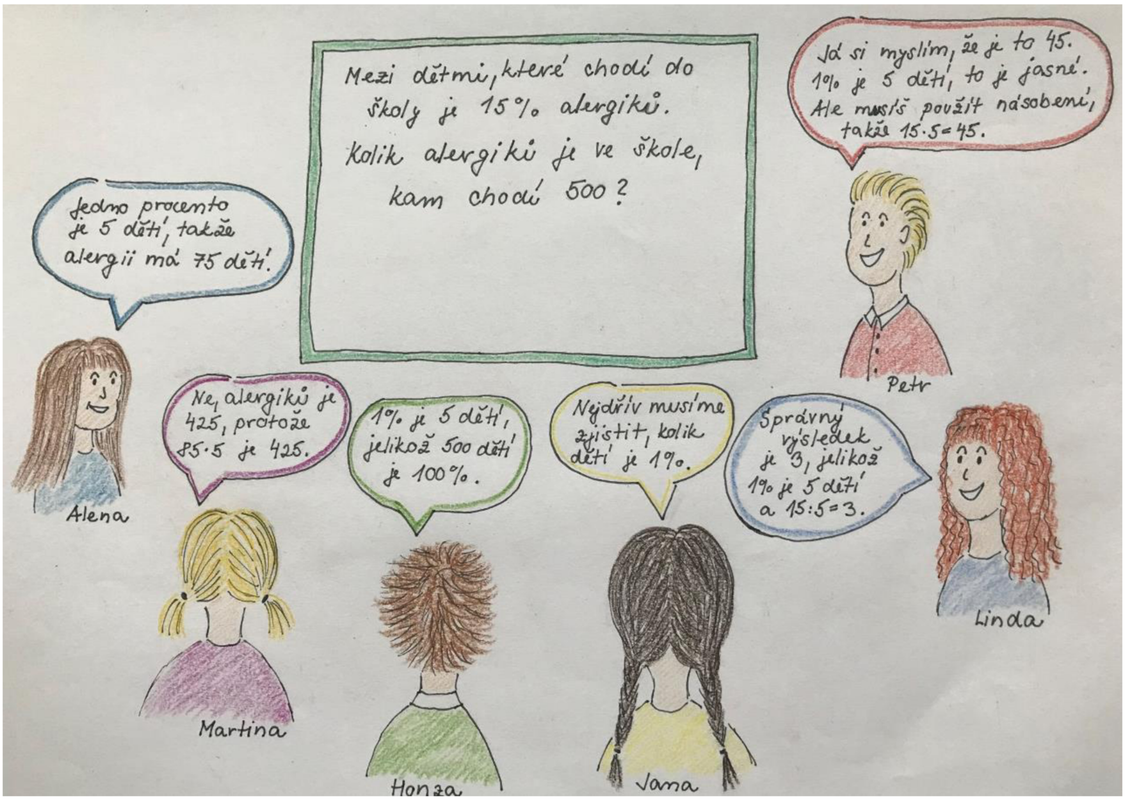
Co se týče zlomků, tak výzkum TIMSS z roku 2007 potvrzuje, že největší potíže měli čeští žáci s úlohami, ve kterých se objevovaly zlomky. Jako důvod uvádí fakt, že z českého kurikula na určitou dobu zcela vypadlo učivo zlomků na 1. stupni (Vondrová, Rendl 2015, s. 40).

Chyba, ke které došlo na *Obrázku 50*, je podle Vondrové způsobena absencí představy o vztahu mezi zlomky a desetinnými čísly. Někteří žáci tedy převod zlomku na desetinné číslo řeší podobně jako tento žák. Jde o jakousi „skládanku“ číslic čili v tomto konkrétním případě žák z desetinného čísla 35,29 vytvoří zlomek $\frac{35}{29}$ (Vondrová, Rendl 2015, s. 189).

5 Concept Cartooons

V této kapitole jsem některé vybrané slovní úlohy a jejich žákovská řešení zpracovala pomocí metody Concept Cartoons. Concept Cartoons je vyučovací pomůcka, která by měla v žácích podpořit motivaci a chuť zapojovat se více do výuky. Takovéto obrázky zobrazují situaci, kde několik dětí reaguje na zadaný problém prostřednictvím bublinového rozhovoru. V bublinách se objevují správné i chybné názory na daný problém (Samková 2020).

První mnou vytvořený obrázek pomocí metody Concept Cartoons se vztahuje ke slovní úloze číslo 1 z varianty A. Žáci diskutují nad problémem: Kolik alergiků je ve škole, kam chodí 500 dětí, když alergikové představují 15 %? V bublinách se objevují jak správná, tak chybná řešení.



Obrázek 82 (Concept Cartoons A/1)

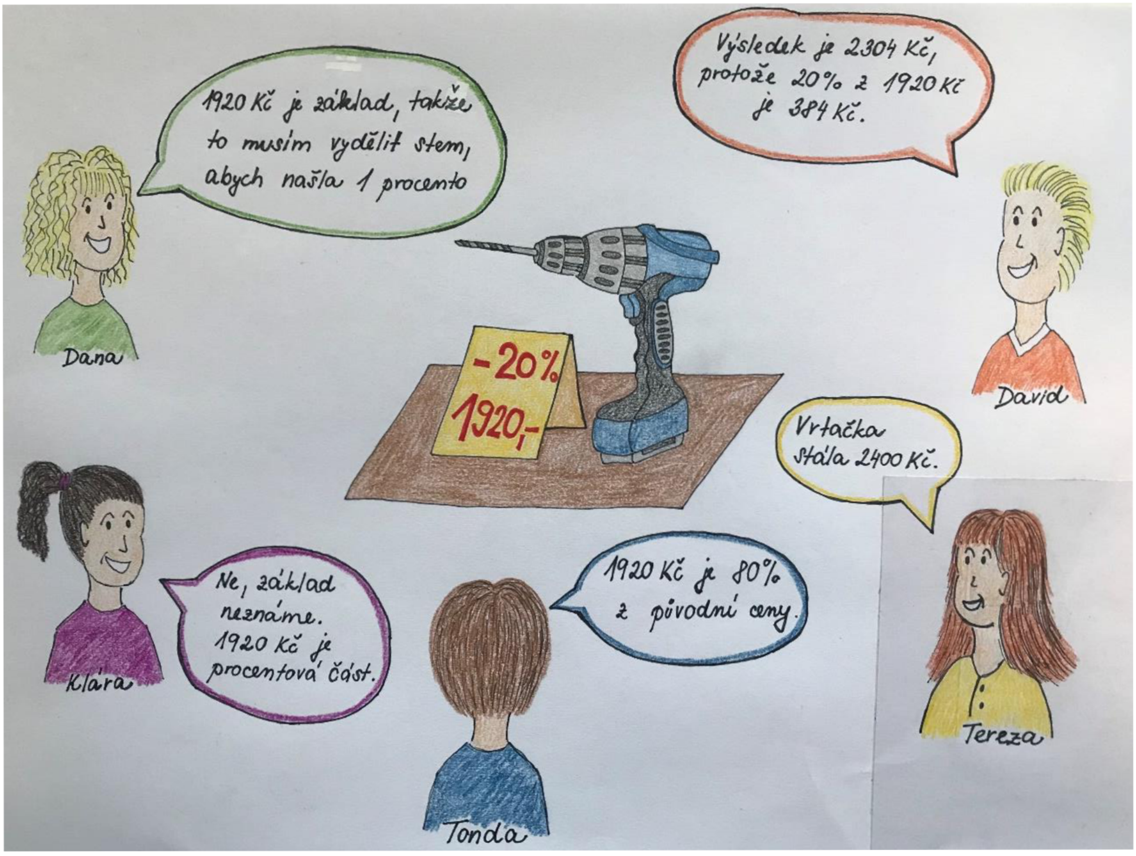
Alenina bublina představuje nejčastější správné řešení. Honza a Jana konstatují správný postup, takto postupovali téměř všichni řešitelé této slovní úlohy. Martina, Linda a Petr znázorňují chybná řešení, která byla ojedinělá. Chyba v bublině u Martiny vznikla pouze nepozorností. Linda místo násobení dělila a Petr udělal početní chybu na násobení. Chyby, vzniklé u této úlohy, nebyly nějak zvlášť zásadní.

Druhou slovní úlohou, kterou jsem zpracovala podle metody Concept Cartoons je obdobná k předchozí úloze. Je to slovní úloha číslo 2 z varianty A. Žáci tentokrát uvažují nad situací: Kolik dělnic je v úle, kde je 500 včel, když dělnice zaujímají $\frac{3}{20}$? V bublinách jsou zaznamenány, jak nápady většiny žáků, tak jednotlivců.

Obrázek 83 (Concept Cartoons A/2)

Martinova bublina konstatuje, jak vypadá celek. Tuto informaci při svém řešení použili všichni žáci, i ti jejichž výsledek byl na konci chybný. Hanka znázorňuje nejčastěji použitý výpočet, a to přes kmenový zlomek. Lenka představuje postup pouze jednoho žáka, který počítal tuto slovní úlohu v procentech. Markéta a Daniel pak ukazují chybná řešení, která byla způsobená chybou v početní operaci. Takové chyby se vyskytly jen ojediněle.

Další slovní úloha, kterou jsem se rozhodla zpracovat pomocí této metody, je třetí úloha z varianty A. Tato slovní úloha byla zadána v procentech. Žáci tentokrát diskutují nad situací: Jaká byla původní cena vrtačky, která stála po dvacetiprocentní slevě 1920 Kč?



Obrázek 84 (Concept Cartoons A/3)

Danina bublina ukazuje nejčastější žákovskou chybu. Přes dvě třetiny všech řešitelů udělalo tuto chybu. 1920 Kč neoznačili jako procentovou část, ale jako základ. Na tuto bublinu navazuje Davidova bublina, která ukazuje chybný výsledek způsobený milnou domněnkou z Daniny bubliny. Klára a Tonda konstatují správný postup a to, ze zmíněných 1920 Kč je procentová část neboli 80 %. Tereza pak znázorňuje správný výsledek této slovní úlohy.

Poslední takto zpracovanou úlohou je úloha číslo 1 z varianty B. Tato úloha byla opět zadána v procentech. Tentokrát žáci vedou diskuzi nad situací: Kolik budou po patnácti procentní slevě stát lyže, jejichž původní cena je 2800 Kč.

Obrázek 85 (Concept Cartoons B/1)

Dominika představuje nejčastěji použitý způsob, a to výpočet přes jedno procento. Na tuto bublinu navazuje další častý postup v podobě Jakubovy bubliny. Správně konstatuje, že spočítaná sleva se musí odečíst. Denisina bublina sděluje správný výsledek. Kateřina nabízí způsob výpočtu, který nebyl tak častý, a to je trojčlenka. Ondrova bublina ukazuje na ojedinělou chybu způsobenou chybou ve sčítání.

Závěr

Tato diplomová práce byla věnována žákovským řešením slovních úloh se zlomky a s procenty. Hlavním cílem této práce bylo zjistit, jaké početní postupy nejčastěji používají žáci devátých ročníků základních škol při řešení slovních úloh se zlomky a s procenty.

Jako první jsem zařadila kapitolu věnovanou teorii slovních úloh, zlomků a procent a krátce jsem se věnovala trojčlence. Uvedla jsem zde základní definici a typologii slovních úloh, přidala jsem vlastnosti zlomků a procent důležité pro výpočty. Ve druhé kapitole Výzkumné šetření jsem představila můj plán výzkumu. Vytyčila jsem si cíle, podmínky a představila použité výzkumné metody. Ve třetí kapitole jsem se již věnovala získaným žákovským řešením. Nejprve jsem všechny vyplněné testy opravila a poté jsem se každé slovní úloze věnovala zvláště. Úspěšnost každé slovní úlohy jsem pro lepší představu zpracovala do grafu. Práci jsem doplnila fotografiemi, jak správných, tak chybných žákovských řešení. Upozornila jsem na často se objevované postupy řešení, ale i na ty ojedinělé. Celou analýzu žákovských řešení jsem pravidelně doplňovala mými komentáři. Získané výsledky z tohoto výzkumu jsem shrnula v diskuzi, kterou jsem doplnila poznatky z odborné literatury. V poslední kapitole jsem čtyři slovní úlohy a jejich žákovská řešení zpracovala pomocí metody Concept Cartoons. Použité obrázky jsem vlastnoručně nakreslila.

Seznam použité literatury:

[1] BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80 7196-104-3.

[2] CRESWELL, John W. a Cheryl N. POTH. Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches. 4th Edition. Thousand Oaks: SAGE Publications, 2018. ISBN 9781506330198.

[3] DELVENTHAL, Katka Maria, Alfred KISSNER a Malte KULICK. *Kompendium matematiky: vzorce a pravidla : četné příklady včetně řešení : od základních operací po vyšší matematiku*. V Praze: Knižní klub, 2004. Universum (Knižní klub). ISBN 80-242-1227-7.

[4] DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8: učitelství pro 1. stupeň základní školy*. Praha: SPN, 1989. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-04-20433-3.

[5] HENDL, Jan. Kvalitativní výzkum: základní metody a aplikace. Praha: Portál, 2005. ISBN 80-7367-040-2.

[6] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-423-0.

[7] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-427-8.

[8] PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Šárka MÜLLEROVÁ, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 7 pro základní školy: aritmetika*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-80-7235-398-9.

[9] RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

[10] RVP ZV 2017. In: Národní ústav pro vzdělávání [online]. [cit. 2021-04-12]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4986/

[11] SAMKOVÁ, Libuše. *Metoda Concept Cartoons*. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, [2020]. Pedagogica et psychologica. ISBN 978-80-7394-798-9.

[12] ŠAROUNOVÁ, Alena. *Matematika 7: [učebnice pro základní školy zpracovaná ve spolupráci s JČMF]*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-085-3.

[13] ŠAROUNOVÁ, Alena. Matematika 7: [učebnice pro základní školy zpracovaná ve spolupráci s JČMF]. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-106-x.

[14] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

[15] VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019. ISBN 978-80-7603-109-8.