Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

Algebraické rovnice a nerovnice a jejich vizualizace

Bakalářská práce

Vladislava Vomáčková

Školitelka: RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.

České Budějovice 2013

Bibliografické údaje:

Vomáčková V., 2013, Algebraické rovnice a nerovnice a jejich vizualizace [Algebraic equations and inequalities and their visualization] - p.117, Faculty of Science, The University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace:

Bakalářská práce se zabývá problematikou algebraických rovnic a nerovnic. První část je zaměřena na výklad učiva včetně názorných řešení příkladů. Druhou část práce tvoří pracovní listy, které umožňují procvičení probrané látky a samostatnou činnost studentů.

Annotation:

The bachelor thesis deals with the topic of algebraic equations and inequalities. The first part is focused on the interpretation of the schoolwork including illustrative solution of exercises. The second part consists of worksheets that allow students to practise schoolwork and self-study.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně, pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 11. prosince 2013

....

Vladislava Vomáčková

Poděkování:

Chtěla bych poděkovat své vedoucí RNDr. Ing. Janě Kalové, Ph.D. za odborné vedení, čas strávený při konzultacích, trpělivost, cenné rady, připomínky a pomoc při zpracování bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Seznam použitých symbolů a značek **2**

3 Rovnice a jejich řešení **3**

3.1 Postup řešení rovnice 3

3.2 Grafická řešení rovnic 6

4 Klasifikace rovnic **8**

5 Algebraické rovnice s jednou neznámou **9**

5.1 Lineární rovnice 9

5.1.1 Grafická řešení lineárních rovnic 9

5.1.2 Lineární rovnice s absolutními hodnotami 13

5.2 Kvadratické rovnice 20

5.2.1 Grafická řešení kvadratických rovnic 20

5.2.2 Algebraické řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru $\mathcal{R}$. 22

5.2.3 Kvadratické rovnice s reálnými parametry 27

6 Nerovnice a jejich řešení **32**

6.1 Části postupu řešení nerovnice 32

6.2 Grafická řešení nerovnic 34

7 Klasifikace nerovnic **35**

8 Algebraické nerovnice s jednou neznámou **36**

8.1 Lineární nerovnice 36

8.1.1 Grafická řešení lineárních nerovnic 36

8.1.2 Lineární nerovnice s absolutními hodnotami 39

8.2 Kvadratické nerovnice 44

8.2.1 Grafická řešení kvadratických nerovnic 45

8.2.2 Kvadratické nerovnice s absolutními hodnotami 46

9 Závěr **48**

10 Přílohy **54**

10.1 Příloha A 54

10.1.1 Zadání - Lineární rovnice 54

10.1.2 Řešení - Lineární rovnice 55

10.2 Příloha B 74

10.2.1 Zadání - Kvadratické rovnice 74

10.2.2 Řešení - Kvadratické rovnice 75

10.3 Příloha C 87

10.3.1 Zadání - Lineární nerovnice 87

10.3.2 Řešení - Lineární nerovnice 88

10.4 Příloha D 100

10.4.1 Zadání - Kvadratické nerovnice 100

10.4.2 Řešení - Kvadratické nerovnice 101

1 Úvod

Matematika je často, díky míře přesnosti a abstrakce, označována za královnu věd. Výklad matematických poznatků spočívá v definicích, formulacích a dokazování.

Matematika u řady studentů vyvolává z různých důvodů obavy i přes to, že se mnohý učitel snaží, aby jeho výklad byl pro studenty zajímavý a hlavně srozumitelný.

První část práce obsahuje teoretický přehled algebraických rovnic a nerovnic s pětadvaceti vzorovými příklady, které jsou doplněny grafickým řešením. Tato část práce by měla studentům umožnit pochopení daného tématu, poskytnout studijní materiály a učitelům usnadnit výklad této látky. *„Průměrný učitel vypráví. Dobrý učitel vysvětluje. Výborný učitel ukazuje. Nejlepší učitel inspiruje."* (Artemus Ward)

Druhá část práce obsahuje pracovní listy pro studenty a řešené pracovní listy pro učitele. Pracovní listy osbsahují přibližně čtyřicet řešených příkladů včetně grafů vykreslených ve volně dostupném počítačovém softwaru GeoGebra. Tyto pracovní listy by měly usnadnit přípravu učitelům na hodinu matematiky a studentům by měly dát možnost pracovat individuálně. *„Naši učitelé nesmějí být podobni sloupům u cest, jež pouze ukazují, kam jít, ale samy nejdou."* (Jan Amos Komenský)

2 Seznam použitých symbolů a značek

$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se, je různé od
$<$	je menší než
$>$	je větší než
$\leq$	je menší nebo rovno
$\geq$	je větší nebo rovno
$\vee$	disjunkce
$\wedge$	konjunkce
$\sum$	suma, výsledný součet čísel
$\leftrightarrow$	ekvivalence
$\exists$	existenční kvantifikátor, existuje aspoň jeden
$\forall$	obecný kvantifikátor, pro každý
$f(a)$	hodnota funkce f v bodě a
$a \in A$	a je prvkem množiny A
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$A \cap B$	průnik množin A, B
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$\emptyset$	prázdná množina
$\oplus$	kladná hodnota v určitém intervalu
$\ominus$	záporná hodnota v určitém intervalu
p	reálný parametr
K	množina všech řešení
UR	úprava rovnice
UN	úprava nerovnice
$\mathcal{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathcal{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathcal{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathcal{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathcal{Z}$	množina všech celých čísel

3 Rovnice a jejich řešení

Mnoho fyzikálních, technických a jiných úloh lze matematicky formulovat jako úlohu typu: Jsou dány dva výrazy $L_{(x)}$ a $P_{(x)}$ s proměnnou x a my máme určit hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M, pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zápis této úlohy ve tvaru:

$$L_{(x)} = P_{(x)} \tag{1}$$

se nazývá rovnice. Výrazu $L_{(x)}$ se říká levá strana rovnice a výrazu $P_{(x)}$ pravá strana rovnice. Speciálně může být jedna strana rovnice konstanta; je-li jí nula, mluvíme o anulovaném tvaru rovnice. Proměnná x v rovnici se nazývá neznámá. Hodnoty neznámé x_k, pro něž je rovnice splněna, tedy pro něž platí rovnost $L_{(x_k)} = P_{(x_k)}$, se nazývají kořeny (řešení) rovnice. Číselný obor M, ve kterém hledáme kořeny (řešení) rovnice, nazýváme oborem řešení rovnice. Podmnožina množiny M, v níž jsou definovány oba výrazy $L_{(x)}$ a $P_{(x)}$ neboli průnik definičních oborů těchto výrazů, se nazývá definiční obor rovnice a značí se D. Množinu všech kořenů (řešení) rovnice budeme značit K ($K \subset D \subset M$). [1, str. 201]

Kromě neznámých mohou rovnice obsahovat další proměnné, jimž se říká parametry. Taková rovnice se nazývá parametrická rovnice nebo rovnice s parametrem a představuje zápis množiny všech rovnic, které získáme dosazením konstant za parametr dané číselné množiny. Příkladem je rovnice:

$$px = 1,$$

kde x je neznámá, $x \in \mathcal{R}$ a p je parametr, $p \in \mathcal{R}$. Řešením parametrické rovnice jsou kořeny určené v závislosti na přípustných hodnotách parametru.

3.1 Postup řešení rovnice

Postup řešení dané rovnice se skládá ze tří základních částí: a) rozbor, b) závěr rozboru, c) zkouška. U parametrických rovnic je součástí závěru rozboru ještě diskuse řešení.

a) Rozbor: Předpokládáme, že daná rovnice (1) má alespoň jeden kořen a jejími úpravami získáme rovnici, jejíž kořeny dovedeme určit. Zároveň použité úpravy rovnice musí mít tu vlastnost, že každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou. Takovým úpravám rovnice říkáme důsledkové (neekvivalentní) úpravy. Při takových úpravách je každé řešení původní rovnice řešením nově vzniklé rovnice, avšak obráceně to platit nemusí.

V tabulce 1 jsou shrnuty nejdůležitější ekvivalentní úpravy rovnic, které vycházejí z vlastností rovnic reálných čísel. [1, str. 203]

Tabulka 1: Přehled ekvivalentních úprav rovnice v oboru $M \subset R$

Označení	Ekvivalentní úprava rovnice
(UR 1)	Vzájemná výměna stran rovnice.
(UR 2)	Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení rovnice.
(UR 3)	Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice, k oběma stranám rovnice.
(UR 4)	Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a je různý od nuly (tj.nabývá jen nenulových hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
(UR 5)	Umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
(UR 6)	Odmocnění obou stran rovnice přirozeným odmocnitelem, jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.
(UR 7)	Zlogaritmování obou stran rovnice při témž základu, jsou-li obě strany rovnice kladné (tj. nabývají jen kladných hodnot) v celém oboru řešení rovnice.

V tabulce 2 jsou uvedeny nejvýznamnější důsledkové úpravy rovnic, které nejsou obecně ekvivalentními. [1, str. 203]

Tabulka 2: Přehled důsledkových úprav rovnice v oboru $M \subset R$

Označení	Důsledková (obecně neekvivalentní) úprava rovnice
(UR 4a)	Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice.
(UR 5a)	Umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem.

b) Závěr rozboru: Určíme množinu K všech kořenů rovnice, kterou jsme získali v první fázi důsledkovými úpravami. Množina $K \subset M$ představuje všechna možná řešení dané rovnice.

U parametrických rovnic se v závěru provádí diskuse řešení - určíme, pro které hodnoty parametrů má daná rovnice řešení a pro které řešení nemá.

c) Zkouška: V případě, že při řešení rovnice byly prováděny neekvivalentní úpravy, je nutnou součástí řešení zkouška. Zjistíme, které z prvků x_k množiny M_1 jsou kořeny dané rovnice. Provádí se tak, že postupně dosazujeme každé z čísel $x_k \in M_1$ do levé strany rovnice, čímž dostaneme číslo $L_{(x_k)}$ a do pravé strany dané rovnice, čímž dostaneme číslo $P_{x(_k)}$. Je-li $L_{(x_k)} = P_{(x_k)}$, je číslo x_k kořenem rovnice.

Příklad 1: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ rovnici* $\dfrac{6-x^2}{2-x} = x$

a) Rozbor: Aby měla daná rovnice smysl, musí být $2 - x \neq 0$, neboli $x \neq 2$.

$\dfrac{6-x^2}{2-x} = x / \cdot (2-x)$

$6 - x^2 = x \cdot (2 - x)$

$6 - x^2 = 2x - x^2$

$2x = 6$

$x = 3$

Ekvivalentními úpravami dostáváme z nelineární lomené funkce funkci lineární.

b) Závěr rozboru: Řešením rovnice dostáváme kořen $x = 3$, tedy $M_1 = \{3\}$.

c) Zkouška:

$L_{(x)} = \dfrac{6-3^2}{2-3} = 3$

$P_{(x)} = 3$

$\rightarrow L_{(x)} = P_{(x)} \rightarrow x = 3$ je řešením dané rovnice.

Protože jsme používali pouze ekvivalentní úpravy rovnice, v tomto případě není zkouška nutnou součástí řešení.

Příklad 2: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ rovnici $p^2(x+1) = px + 1$ s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $p \in \mathcal{R}$:*

Postupnými úpravami zadané rovnice, dostaneme rovnici (*)

$p^2x + p^2 = px + 1$

$p^2x - px = 1 - p^2$

$x(p^2 - p) = 1 - p^2$

$xp(p-1) = 1 - p^2 \qquad (*)$

Nyní budeme uvažovat, jak je řešení závislé na parametru p. Rovnici můžeme vydělit libovolným nenulovým číslem. Budeme tedy zvlášť diskutovat případ, kdy $p = 0$ a $p - 1 = 0$.

a) $p = 0$ dosadíme do zadání a dostáváme: $0 \cdot (x + 1) = 0x + 1$

$0 = 1 \rightarrow$ daná rovnice nemá řešení

b) $p = 1$ dosadíme do zadání a dostáváme:

$1 \cdot (x + 1) = 1x + 1$

$0x = 0 \rightarrow$ daná rovnice platí po všechna $x \in \mathcal{R}$

Hodnoty parametru p lze v obou případech dosadit i do upravené rovnice (*).

c) $p \neq 0 \wedge p \neq 1$

Pro $p \neq 0 \wedge p \neq 1$ můžeme rovnici (*) vydělit polynomem $p(p-1)$ a získáme následující řešení:

$$x = \frac{1 - p^2}{p(p-1)} = \frac{(1-p)(1+p)}{-p(1-p)} = -\frac{p+1}{p}$$

Pro přehlednost zapíšeme výsledky do tabulky.

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 0$	$\emptyset$
$p = 1$	$\mathcal{R}$
$p \neq 0 \wedge p \neq 1$	$-\frac{p+1}{p}$

3.2 Grafická řešení rovnic

Při grafickém řešení lineární rovnice $ax+b = 0$ sestrojíme graf lineární funkce $y = ax+b$ a určíme x-ovou souřadnici průsečíku $X[x_0; 0]$ grafu s osou x. Tato souřadnice x_0 je řešením dané rovnice. Řešíme-li graficky lineární rovnici $f(x) = g(x)$, kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou lineární dvojčleny, můžeme ji nejprve převést na rovnici typu $ax + b = 0$ a tu graficky vyřešit. Ale můžeme též sestrojit přímky o rovnicích $y_1 = f(x)$ a $y_2 = g(x)$. Jsou-li tyto přímky různoběžné, určíme x-ovou souřadnici jejich průsečíku $X[x_0; y_0]$; x_0 je jediným řešením rovnice. Jsou-li přímky rovnoběžné různé, nemá rovnice žádné řešení. Splývají-li obě přímky, je každé reálné číslo řešením rovnice.

Při grafickém řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ postupujeme tak, že sestrojíme graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$. Poté jsou průsečíky dané paraboly a osy x hledými kořeny. Pokud se parabola s osou x neprotne, daná rovnice nemá žádné řešení. pokud jsou průsečíky dva, rovnice má právě dva kořeny. Pokud se graf paraboly dotýká osy x, rovnice má dvojnásobný kořen.

4 Klasifikace rovnic

Elementární rovnice jsou rozdělovány na dva typy: I. algebraické, II. nealgebraické.

I. Algebraická rovnice n-tého stupně s neznámou $x \in \mathcal{C}$ je každá rovnice tvaru:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, \text{ kde } a_n \neq 0, n \in \mathcal{N}, a_i \in \mathcal{C}, i \in \{0, 1, ..., n\},$$

kde $a_0, a_1, ..., a_n$ jsou čísla nazývaná koeficienty algebraické rovnice. Levá strana algebraické rovnice takového tvaru je tedy mnohočlen n-tého stupně s komplexními koeficienty $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$; stručně se označuje $P_n(x)$. Členy polynomu $P_n(x)$ se nazývají členy algebraické rovnice.

Příkladem algebraické rovnice je: $x^3 - 4x = 0$.

II. Nealgebraické rovnice jsou rovnice, které nelze zapsat v algebraickém tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$. Mezi nealgebraické rovnice patří například rovnice exponenciální, logaritmické a goniometrické.

Příkladem nealgebraické rovnice je: $\sin{(x - \frac{\pi}{2})} = 1$.

5 Algebraické rovnice s jednou neznámou

Vzhledem k rozsahu tématu se zaměříme na řešení lineárních a kvadratických rovnic s jednou neznámou. Řešení budeme hledat v oboru reálných čísel $\mathcal{R}$.

5.1 Lineární rovnice

Lineární rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax+b = 0, \tag{2}$$

kde a, b jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla. Pro řešení takové rovnice v oboru $\mathcal{R}$ mohou nastat právě tři případy:

a) Je-li $a \neq 0$, je rovnice (2) ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže tato rovnice má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.

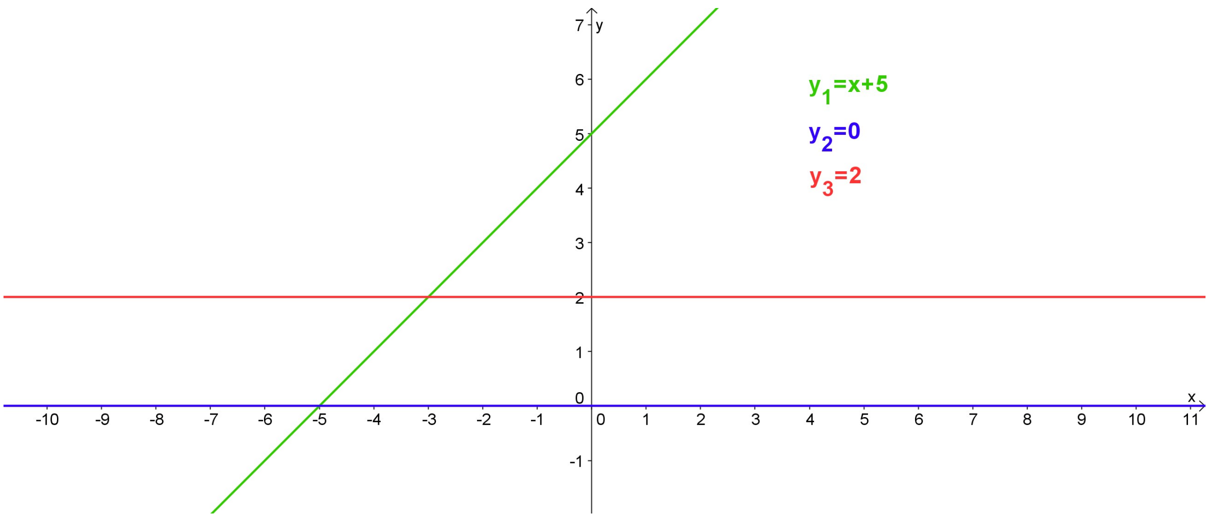
b) Je-li $a = b = 0$, má rovnice (2) nekonečně mnoho řešení a jejím kořenem je každé reálné číslo.

c) Je-li $a = 0, b \neq 0$, rovnice nemá řešení.

5.1.1 Grafická řešení lineárních rovnic

Grafem lineární funkce $y = ax + b$ je přímka (kapitola 3.2.). Na obrázku 1 vidíme případy, kdy má rovnice jeden, nekonečně mnoho nebo žádný kořen.

Zeleně je znázorněna funkce $y_1 = x + 5$, pomocí které graficky vyřešíme například rovnici $x + 5 = 0$. Jediným kořenem této rovnice je $x = -5$. Modře je znázorněna funkce $y_2 = 0$ reprezentující rovnici s nekonečným počtem řešení, například $0x + 5 = 5$. Červená přímka zobrazuje funkci $y_3 = 2$, která je grafickým řešením rovnice s nulovým počtem kořenů, například $0x + 2 = 0$.



Obrázek 1: Grafické řešení lineárních rovnic

Příklad 3: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ rovnici:* $\dfrac{1+x}{2} + 5x = 7 - x$

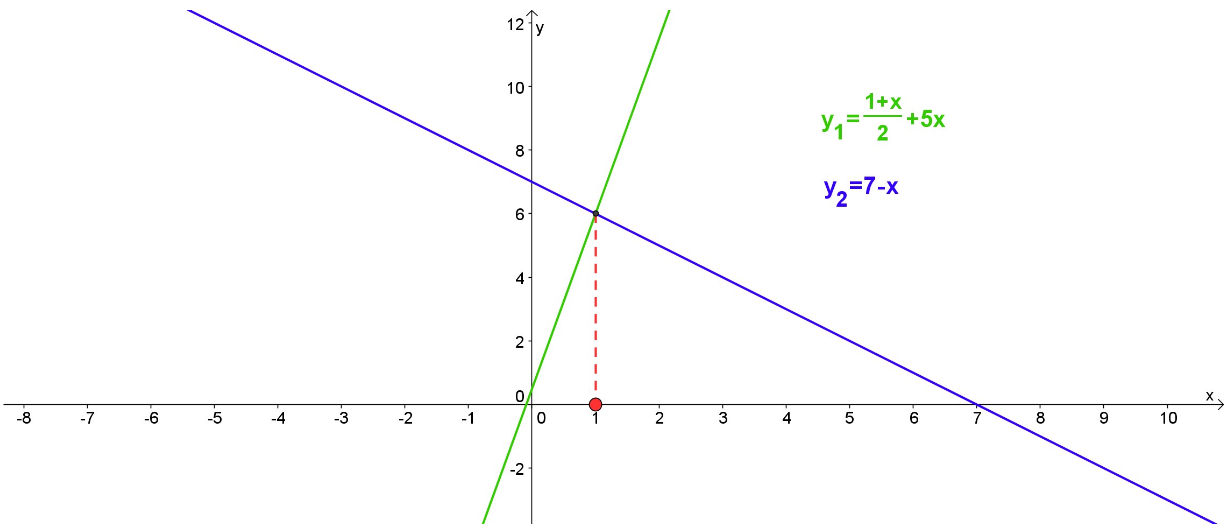
$\dfrac{1+x}{2} + 5x = 7 - x / \cdot 2$

$1 + x + 10x = 14 - 2x$

$13x = 13$

$x = 1$

Grafické řešení dané rovnice je zakreslené na obrázku 2. Zelená přímka znázorňuje pravou stranu rovnice a modrá přímka znázorňuje levou stranu rovnice. Kořen rovnice znázorňuje x-ová souřadnice průsečíku dvou zadaných funkcí.



Obrázek 2: Grafické řešení lineární rovnice s jedním kořenem

Příklad 4: *Řešte v R danou rovnici* $2 \cdot (x-1) + 3x = \frac{1}{2} \cdot (10x - 4)$

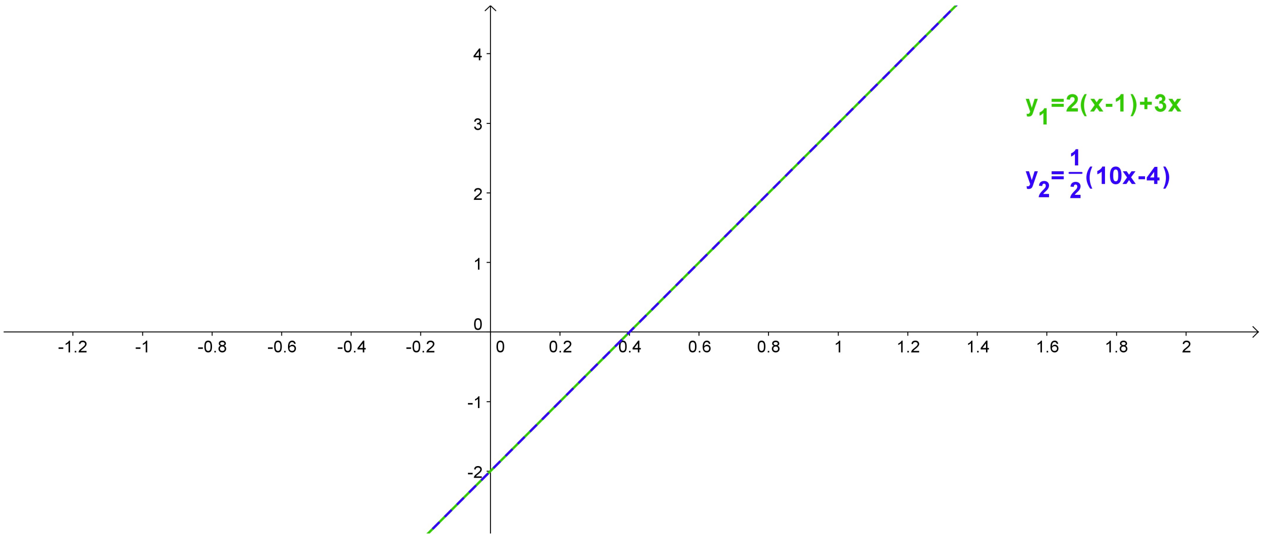
$2 \cdot (x-1) + 3x = \frac{1}{2} \cdot (10x-4) / \cdot 2$

$4 \cdot (x-1) + 6x = (10x-4)$

$4x - 4 + 6x = 10x - 4$

$0x = 0 \quad \rightarrow$ rovnice má nekonečně mnoho řešení

Grafické řešení zadané rovnice je znázorněné na obrázku 3. Splývají-li obě přímky, je každé reálné číslo řešením rovnice.



Obrázek 3: Grafické řešení lineární rovnice s nekonečně mnoha kořeny

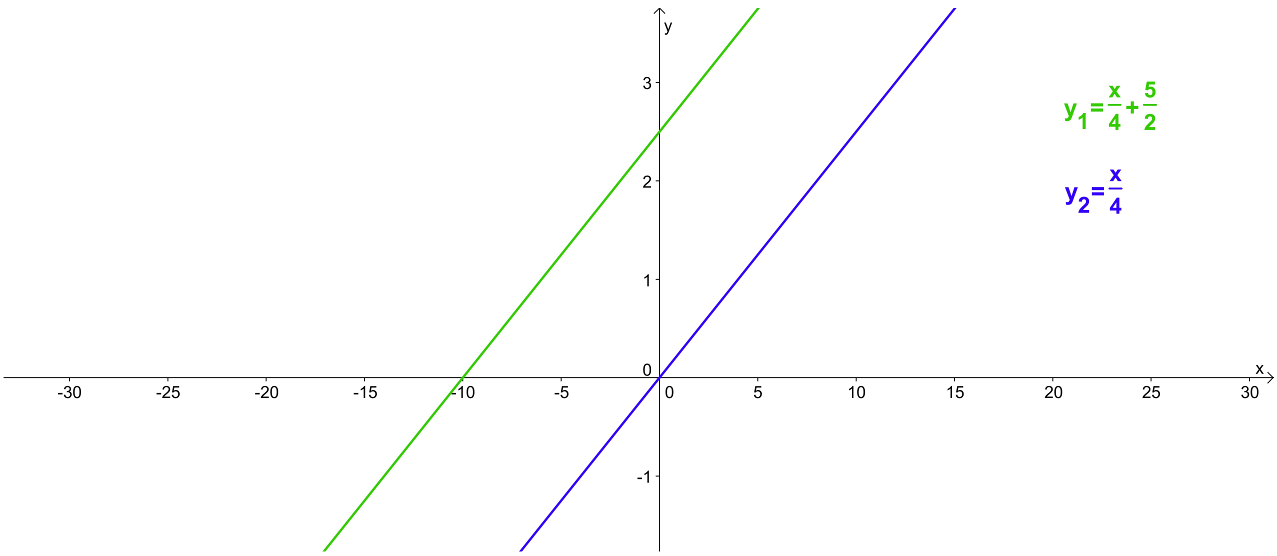
Příklad 5: *Řešte danou rovnici s neznámou* $x \in \mathcal{R}$: $\frac{x}{4} + \frac{5}{2} = \frac{x}{4}$

$\frac{x}{4} + \frac{5}{2} = \frac{x}{4} / \cdot 4$

$x + 10 = x$

$0x = -10 \quad \rightarrow$ rovnice nemá řešení

Na obrázku 4 je zobrazené grafické řešení rovnice. Jsou-li přímky rovnoběžné různé, nemá daná rovnice žádné řešení.



Obrázek 4: Grafické řešení lineární rovnice s žádným kořenem

Příklad 6: *Řešte danou rovnici s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $p \in \mathcal{R}$:* $2px + x = 5$

$2px + x = 5$

$x \cdot (2p + 1) = 5 \qquad (*)$

Spočítáme, kdy se dvojčlen $2p + 1$ rovná nule:

$2p + 1 = 0 \longrightarrow 2p = -1 \longrightarrow p = -\dfrac{1}{2}$.

Nyní budeme uvažovat, jak je řešení závislé na parametru p.

a) $p = -\dfrac{1}{2}$:

Po dosazení do rovnice (*), získáme rovnici tvaru $0x = 5$, která nemá řešení.

b) $p \neq -\dfrac{1}{2}$:

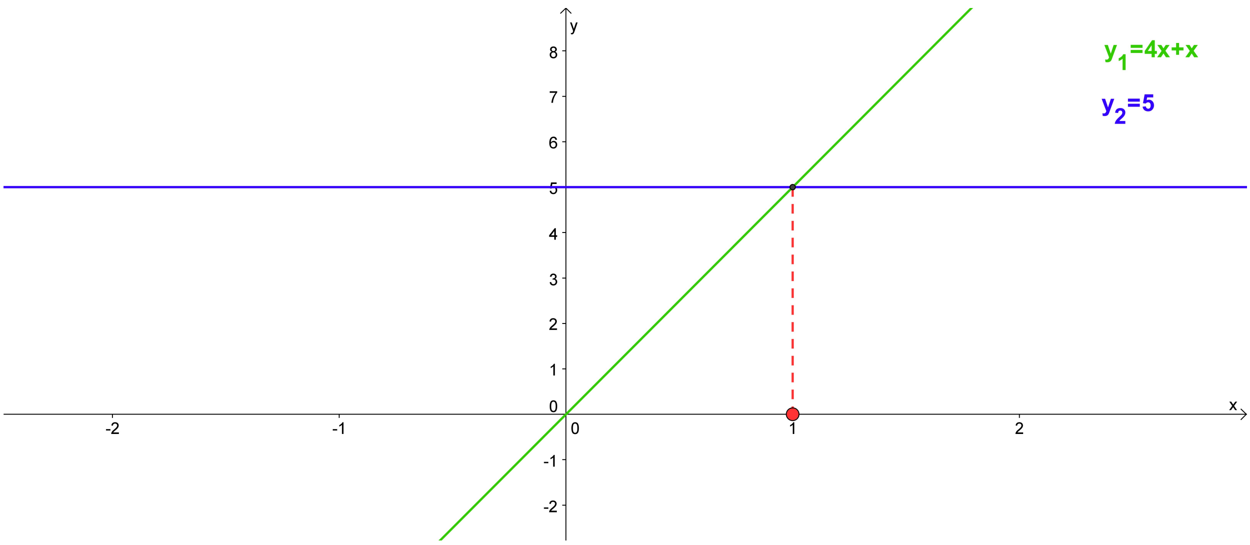
Pokud za p dosadíme libovolné číslo kromě $p = -\dfrac{1}{2}$, získáme následující řešení:

$x = \dfrac{5}{2p + 1}$

Pro přehlednost zaneseme výsledky do tabulky.

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = -\frac{1}{2}$	$\emptyset$
$p \neq -\frac{1}{2}$	$\{\frac{5}{2p+1}\}$

Na obrázku 5 můžeme vidět grafické řešení dané rovnice s libovolně zvoleným parametrem $p = 2$, pro který získáme lineární rovnici $4x + x = 5$.



Obrázek 5: Grafické řešení rovnice $2px + x = 5$ pro $p = 2$

5.1.2 Lineární rovnice s absolutními hodnotami

Lineární rovnicí s absolutní hodnotou nazýváme každou rovnici s neznámou $x \in \mathcal{R}$ ve tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm ... \pm |a_nx + b_n| = a_0x + b_0,$$

kde a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, ..., n$.

Rovnice s absolutními hodnotami se řeší úpravou na lineární rovnici bez absolutních hodnot v intervalech, na které je rozdělena množina $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$ nulovými body dvojčlenů $a_ix + b_i$, tedy čísly $\frac{-b_i}{a_i}$ pro $i = 1, 2, ..., n$. Tato metoda řešení se nazývá metoda intervalů neboli metoda nulových bodů.

Ve speciálním případě při řešení rovnice

$$|a_ix + b_i| = c,$$

kde c je kladná konstanta, můžeme vyjít přímo z ekvivalence:

$$|a| = r \geq 0 \leftrightarrow a = \pm r.$$

Zápis $|a_i{-}b_i|$ můžeme interpretovat jako vzdálenost obrazu čísla a_i od obrazu čísla b_i.

Zápis $a_i + b_i = a_i - (-b_i)$ můžeme interpretovat jako vzdálenost obrazu čísla a_i od obrazu čísla $-b_i$.

Příklad 7: *Řešte v $\mathcal{R}$ rovnici* $|x + 5| = 4$

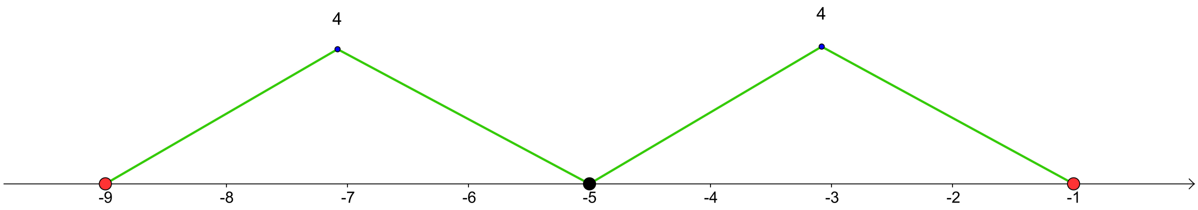
Rovnici si přepíšeme jako: $|x - (-5)| = 4$

Hledáme tedy taková čísla, jejichž obrazy na číselné ose mají vzdálenost 4 od obrazu čísla -5.

$|x + 5| = 4 \leftrightarrow x + 5 = 4 \vee x + 5 = -4 \leftrightarrow x = -1 \vee x = -9$

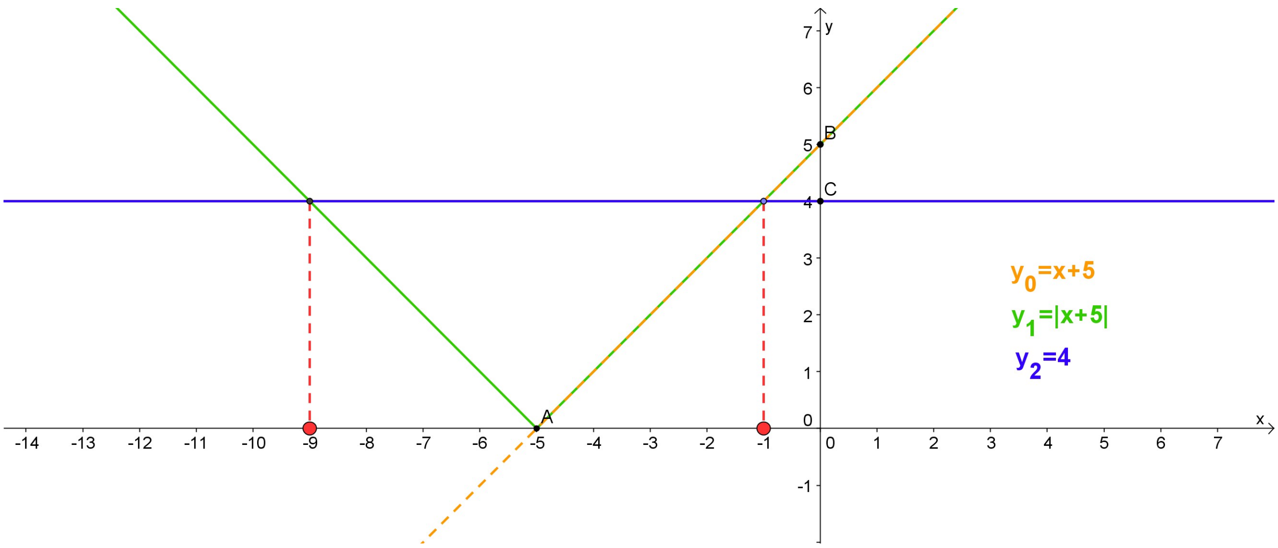
$\longrightarrow x \in \{-1, -9\}$

Na obrázku 6 vidíme grafické znázornění této rovnice na číselné ose.



Obrázek 6: Grafické znázornění rovnice $|x + 5| = 4$ na číselné ose

Do obrázku 7 zakreslíme zvlášť pravou a levou stranu rovnice, tedy nejdříve zakreslíme funkci $y_1 = |x + 5|$. Tuto funkci zakreslíme postupně a to nejdříve bez absolutní hodnoty. Funkce $y_0 = x + 5$, která je na obrázku 5 vyznačená oranžovou barvou, protíná osu x v bodě $A[-5, 0]$ a osu y v bodě $B[0, 5]$. Nyní tuto funkci zakreslíme s absolutní hodnotou. Protože víme, že absolutní hodnota překlopí všechny části funkce, které jsou pod osou x nad osu x, vznikne nám graf, který na obrázku 5 máme vyznačený zelenou barvou. Je tedy patrné, že kladná část funkce y_0 a y_1 se shoduje. Nyní zakreslíme funkci $y_2 = 4$. Grafem této funkce je přímka, která prochází bodem $C[0, 4]$ a je rovnoběžná s osou x. Vznikly nám dva průsečíky funkcí y_1 a y_2, které promítneme na osu x a získáme tak řešení dané rovnice, které máme na obrázku vyznačené červenými body.



Obrázek 7: Grafické řešení rovnice $|x + 5| = 4$

Příklad 8: *Řešte v $\mathcal{R}$ rovnici* $|2x - 4| + |x + 1| = 9$

Pomocí metody intervalů určíme nulové body výrazů $2x - 4$ a $x + 1$:

$2x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2, \quad x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1.$

Množina $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$ je tedy rozdělena nulovými body x_1, x_2 na tři intervaly:

$I_1 = (-\infty, -1), \quad I_2 = \langle -1, 2), \quad I_3 = \langle 2, \infty)$. V těchto intervalech můžeme upravit danou rovnici s absolutními hodnotami na rovnici bez absolutních hodnot, k tomu nám stačí určit znaménka libovolných hodnot dvojčlenů $2x - 4, x + 1$ uvnitř intervalů I_1, I_2, I_3. Do prvního řádku tabulky zaneseme vzniklé intervaly, které jsou dané nulovými body. Do prvního sloupce tabulky zapíšeme jednotlivé absolutní hodnoty.

Nyní doplníme tabulku - zvolíme si libovolné číslo z daného intervalu, které zkusíme dosadit do absolutní hodnoty. Podle toho, zda nám vyjde kladné či záporné číslo, dostaneme znaménko celé této absolutní hodnoty. Například budeme uvažovat absolutní hodnotu $|2x-4|$ na intervalu $(-\infty, -1)$. Zvolíme si libovolné číslo x z tohoto intervalu, například $x = -4$ a spočítáme hodnotu absolutní hodnoty v bodě $-4 \longrightarrow 2 \cdot (-4) - 4 = -12$. Protože nám vyšla záporná hodnota, v tomto celém intervalu bude výraz uvnitř absolutní hodnoty záporný a do příslušné kolonky v tabulce tedy píšeme $-(2x - 4)$ neboli $4 - 2x$. Stejným způsobem vyplníme celou tabulku.

	$I_1 = (-\infty, -1)$	$I_2 = \langle -1, 2)$	$I_3 = \langle 2, \infty)$
$\lvert 2x-4 \rvert$	$4-2x$	$4-2x$	$2x-4$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

Odtud plyne:

a) Pro $x \in I_1$ daná rovnice nabývá tvaru

$$(4-2x) + (-x-1) = 9.$$

Jejím kořenem je číslo $x = -2$. Protože $x \in I_1$, je $x = -2$ řešením rovnice v I_1, tedy $K_1 = \{-2\}$.

b) Pro $x \in I_2$ daná rovnice nabývá tvaru

$$(4-2x) + (x+1) = 9.$$

Jejím kořenem je číslo $x = -4$, ale x nenáleží do intervalu I_2, a proto $x = -4$ není řešením rovnice v I_2, tedy $K_2 = \emptyset$.

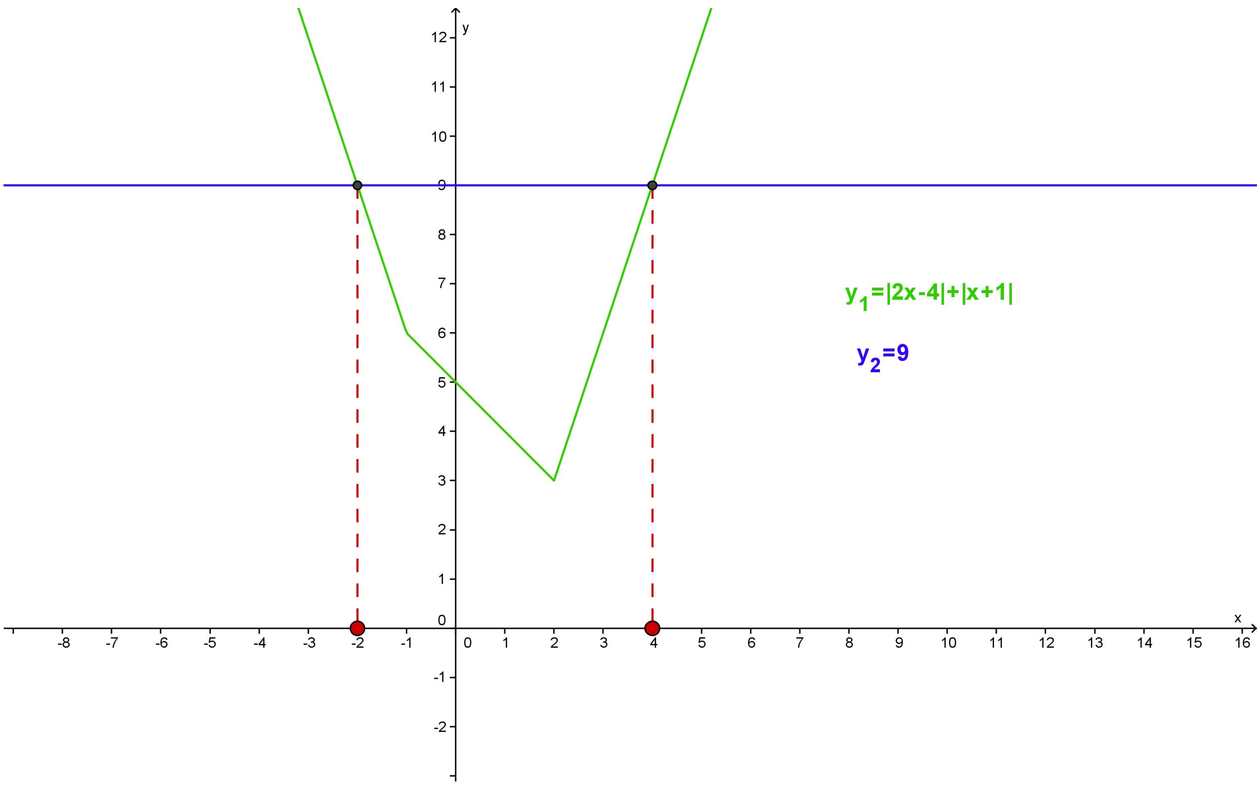
c) Pro $x \in I_3$ daná rovnice nabývá tvaru

$$(2x-4) + (x+1) = 9.$$

Jejím kořenem je číslo $x = 4$. Protože $x \in I_3$ je $x = 4$ řešením rovnice v I_3, tedy $K_3 = \{4\}$.

Výsledkem zadané rovnice je: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{-2, 4\}$

Grafické řešení zadané rovnice je znázorněné na obrázku 8. Výsledné hodnoty jsou body vyznačené na ose x.



Obrázek 8: Grafické řešení rovnice $|2x-4|+|x+1|=9$

Příklad 9: *a) Řešte rovnici $|x+1|+4=x+p$ s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a s parametrem $p \in \mathcal{R}$*

Nulový bod $x=-1$ rozdělí množinu $\mathcal{R}=(-\infty,\infty)$ na dva intervaly:

$I_1=(-\infty,-1), \quad I_2=\langle -1,\infty)$.

	$I_1=(-\infty,-1)$	$I_2=\langle -1,\infty)$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$

Odtud plyne:

a) Pro $x \in I_1$ daná rovnice nabývá tvaru

$$(-x-1)+4=x+p$$

Jejím kořenem je číslo $x=\dfrac{3-p}{2}$. Pro $x \in I_1$ musí být $\dfrac{3-p}{2}<-1$ a tedy $p>5$.

Pro $p>5$, má rovnice právě jedno řešení $x=\dfrac{3-p}{2} \in I_1$.

Je-li $p \leq 5$, pak nemá žádné řešení $x \in I_1$.

b) Pro $x \in I_2$ daná rovnice nabývá tvaru

$$(x+1)+4=x+p$$

Je-li $p = 5$, pak řešením této rovnice je každé $x \in I_2$, je-li $p \neq 5$, pak v I_2 nemá tato rovnice žádné řešení.

Pro přehlednost shrneme výsledky do tabulky:

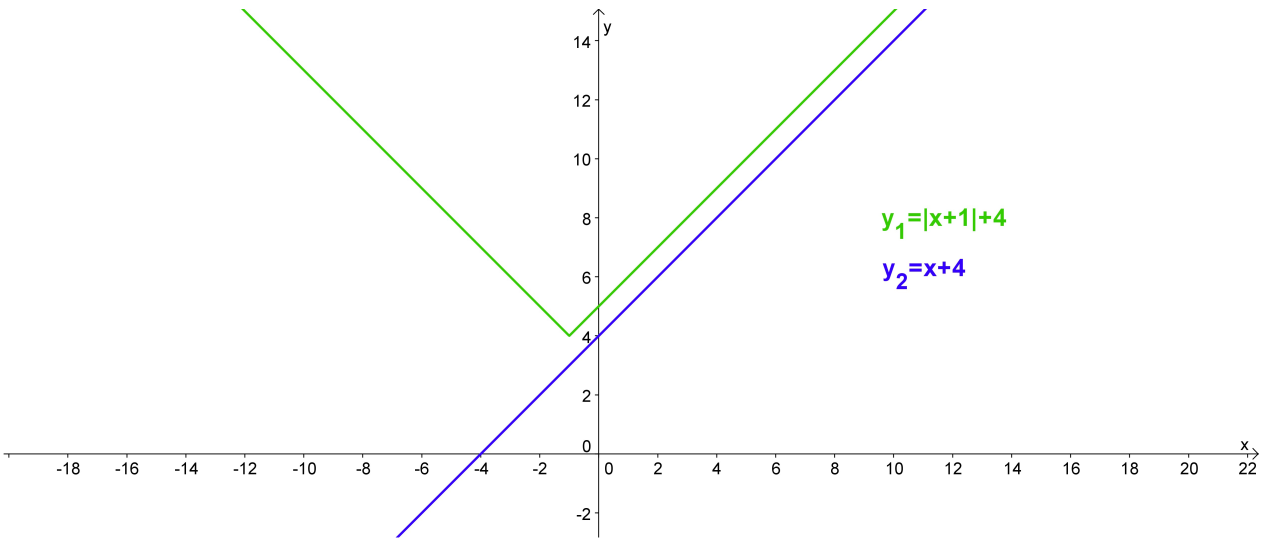
Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p \in (5, \infty)$	$\{\frac{3-p}{2}\}$
$p = 5$	$\langle -1, \infty)$
$p \in (-\infty, 5)$	$\emptyset$

b) Řešte graficky rovnici $|x + 1| + 4 = x + p$ *s neznámou* $x \in \mathcal{R}$ *pro hodnoty parametru* $p = 4, 5, 6$.

I) $p = 4$:

Pro $p = 4$ dostáváme po dosazení rovnici $|x + 1| + 4 = x + 4$.

Na obrázku 9 je patrné, že v tomto případě nemá rovnice žádné řešení, protože se grafy funkcí neprotínají ani v jednom bodě. To můžeme porovnat i s algebraickým řešením - ve třetím řádku tabulky ($p = 4$ je z intervalu $(-\infty, 5)$) vidíme, že v tomto případě rovnice opravdu nemá řešení.

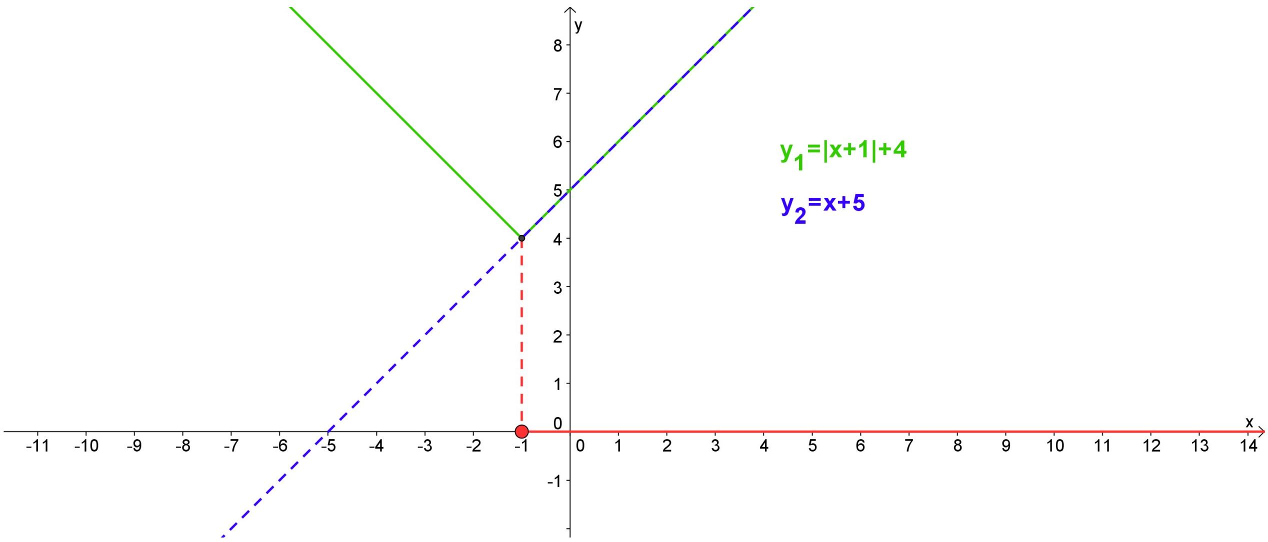


Obrázek 9: Grafické řešení rovnice $|x + 1| + 4 = x + p$ pro hodnotu parametru $p = 4$

II) $p = 5$:

Pro $p = 5$ dostáváme po dosazení rovnici $|x + 1| + 4 = x + 5$.

Na obrázku 10 je vidět, že pro hodnotu parametru $p = 5$ je výsledkem interval $\langle -1, \infty)$. Opět můžeme porovnat s algebraickým řešením (v tomto případě s druhým řádkem tabulky), kde nám vyšel stejný výsledek.



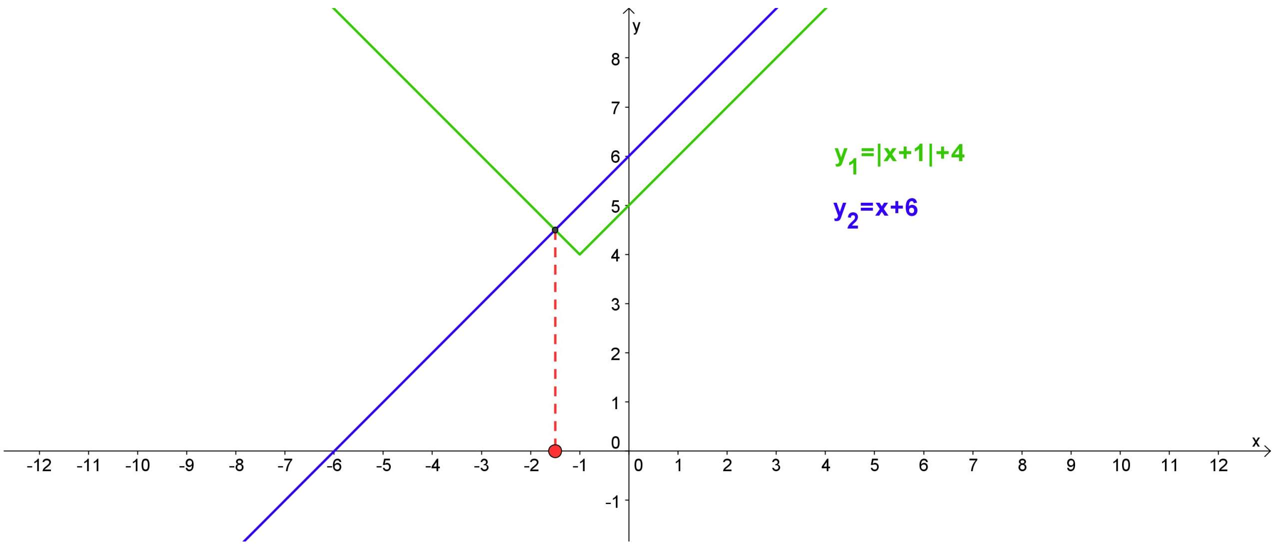
Obrázek 10: Grafické řešení rovnice $|x + 1| + 4 = x + p$ pro hodnotu parametru $p = 5$

III) $p = 6$:

Pro $p = 6$ dostáváme po dosazení rovnici $|x + 1| + 4 = x + 6$.

Z algebraického řešení vyplývá, že výsledkem rovnice pro hodnotu parametru $p = 6$ je bod $[-\frac{3}{2}, 0]$. (Hodnotu parametru $p = 6$ dosadíme do prvního řádku tabulky a získáme $x = \frac{3-p}{2} = \frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$).

Na obrázku 11 vidíme, že se grafy protínají v jediném bodě.



Obrázek 11: Grafické řešení rovnice $|x+1|+4 = x+p$ pro hodnotu parametru $p = 6$

5.2 Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice s neznámou x je každá rovnice tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla, $a \neq 0$. Členy kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ se nazývají: ax^2 kvadratický člen, bx lineární člen a c absolutní člen kvadratické rovnice.

Je-li $b = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se ryze kvadratická rovnice. Je-li $c = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + bx = 0$ a nazývá se kvadratická rovnice bez absolutního členu.

Kvadratické rovnici tvaru

$$x^2 + px + q = 0$$

se říká normovaný tvar kvadratické rovnice.

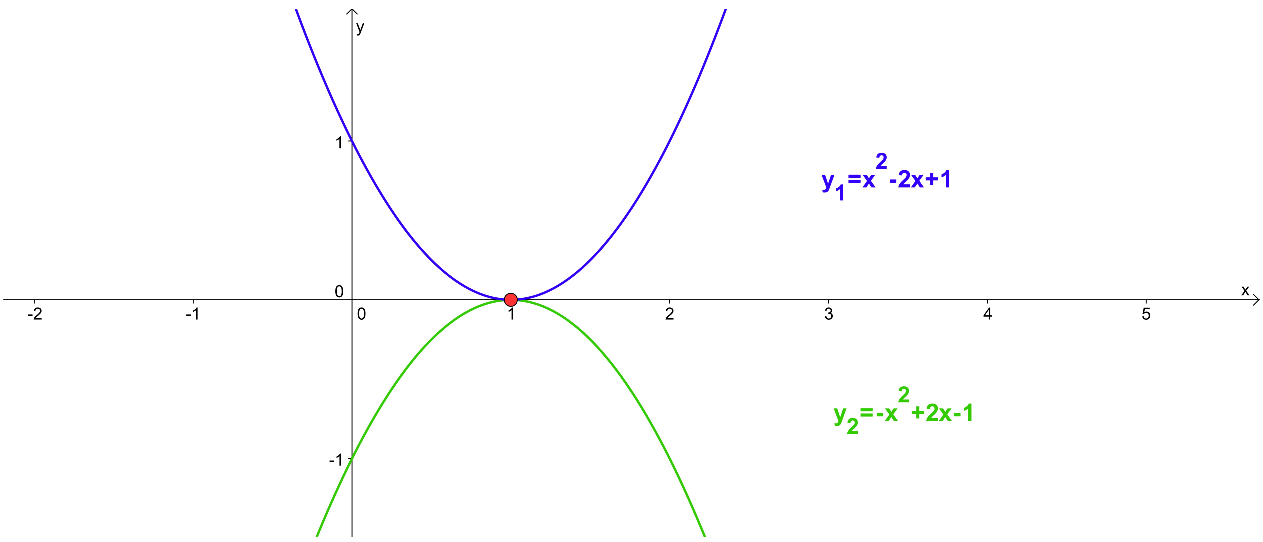
Při řešení každé kvadratické rovnice v oboru $\mathcal{R}$ i v oboru $\mathcal{C}$ je důležité číslo

$$D = b^2 - 4ac,$$

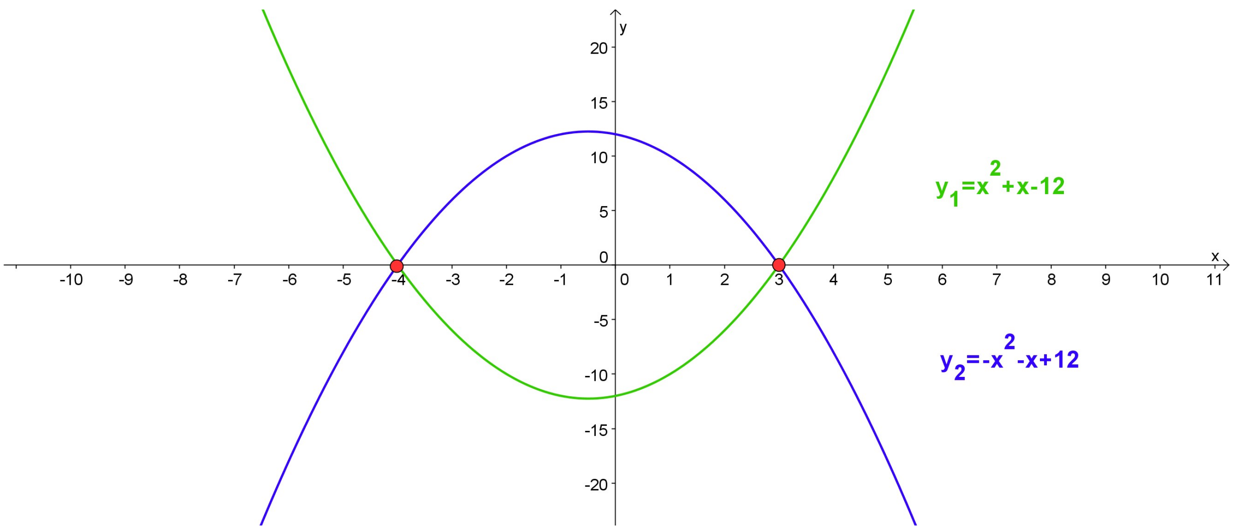
kterému říkáme diskriminant kvadratické rovnice.

5.2.1 Grafická řešení kvadratických rovnic

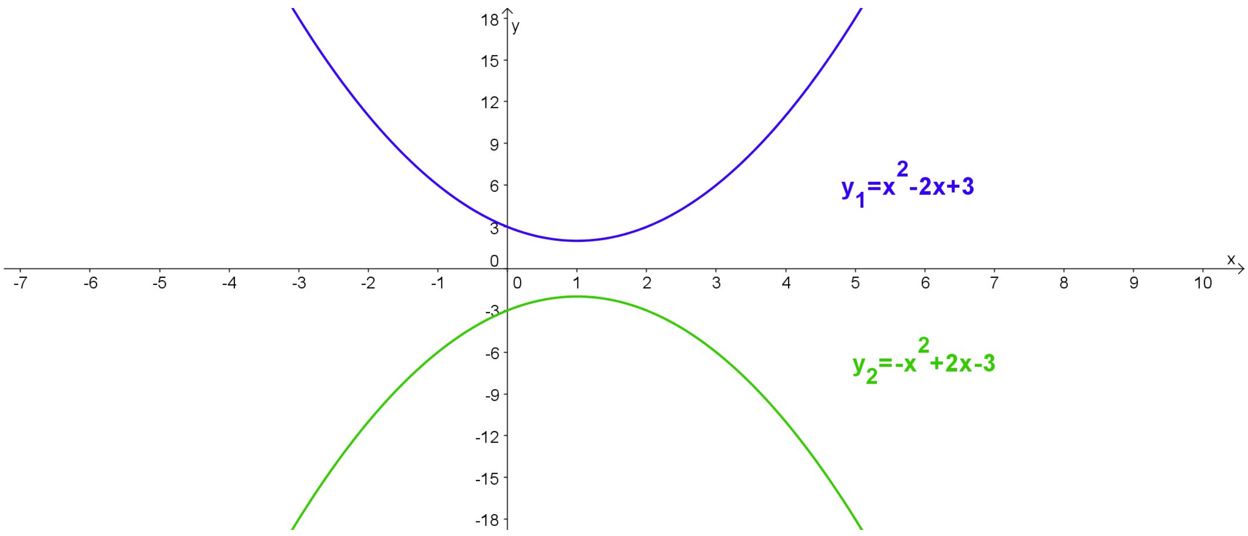
Grafem kvadratické funkce je parabola (kapitola 3.2.). Kvadratická rovnice může mít jeden, dva nebo žádný kořen (viz. obrázek 12, 13, 14).



Obrázek 12: Grafické řešení kvadratické rovnice s jedním kořenem



Obrázek 13: Grafické řešení kvadratické rovnice s dvěma kořeny



Obrázek 14: Grafické řešení kvadratické rovnice, která nemá reálné kořeny

5.2.2 Algebraické řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru $\mathcal{R}$

Věta 1: Nechť $ax^2 + bx + c = 0$ je libovolná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$ a diskriminantem D.
Je-li $D > 0$, má tato rovnice právě dva reálné různé kořeny,
je-li $D = 0$, má tato rovnice právě dva sobě rovné reálné kořeny (dvojnásobný reálný kořen),
je-li $D < 0$, nemá tato rovnice v oboru reálných čísel žádný kořen. [1, str. 212]

Věta 2: Nechť $ax^2 + bx + c = 0$ je libovolná kvadratická rovnice s reálnými kořeny a, b, c $(a \neq 0)$ a diskriminantem $D \geqq 0$. Pak reálné kořeny x_1, x_2 této kvadratické rovnice jsou dány vzorcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$ [1, str. 212]

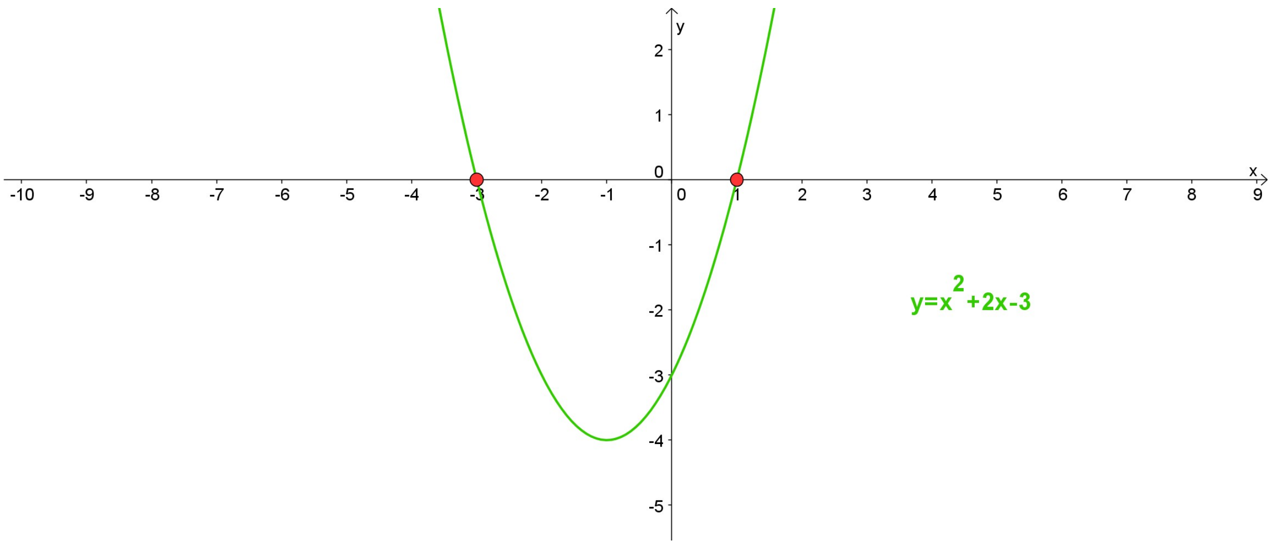
Příklad 10: *Řešte v $\mathcal{R}$ rovnici $x^2 + 2x - 3 = 0$*

Nejdříve spočítáme diskriminant D dané rovnice: $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$.

Podle předchozích vět 1 a 2 víme, že tato rovnice bude mít právě dva reálné různé kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \longrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -3$$

Na obrázku 15 je znázorněné grafické řešení dané rovnice.



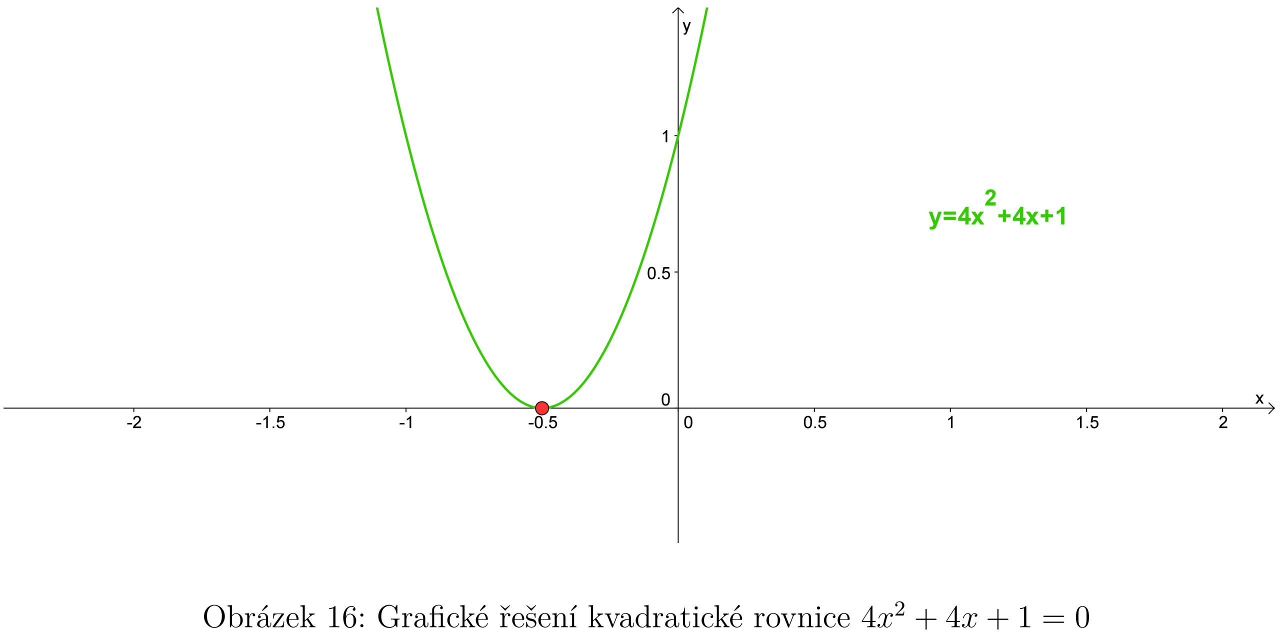
Obrázek 15: Grafické řešení kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$

Příklad 11: *Řešte rovnici* $4x^2 + 4x + 1 = 0$ *v* $\mathcal{R}$

Nejdříve spočítáme diskriminant D dané rovnice: $D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$.

Podle předchozích vět víme, že tato rovnice bude mít právě dva sobě rovné kořeny:
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4}{8} \longrightarrow x_{1,2} = -\dfrac{1}{2}$

Na obrázku 16 je znázorněné grafické řešení dané rovnice.

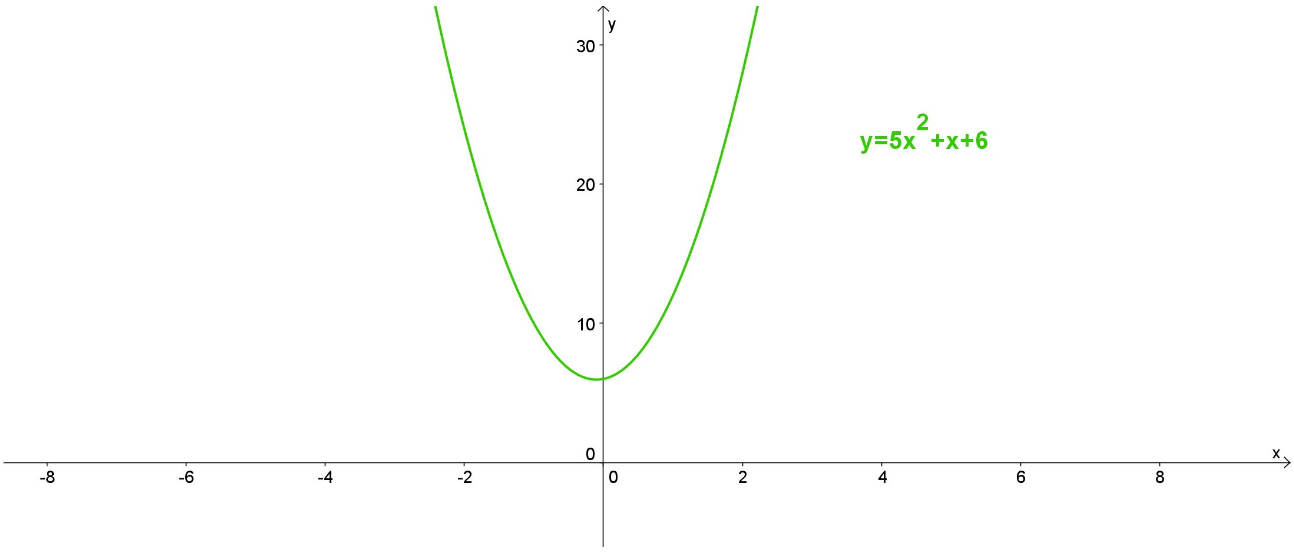


Obrázek 16: Grafické řešení kvadratické rovnice $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Příklad 12: *Řešte rovnici* $5x^2 + x + 6 = 0$ *v* $\mathcal{R}$

Nejdříve spočítáme diskriminant dané rovnice: $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = -119$.

Podle předchozích vět je zřejmé, že tato rovnice nemá reálné řešení. To ukazuje i grafické řešení na obrázku 17.



Obrázek 17: Grafické řešení kvadratické rovnice $5x^2 + x + 6 = 0$

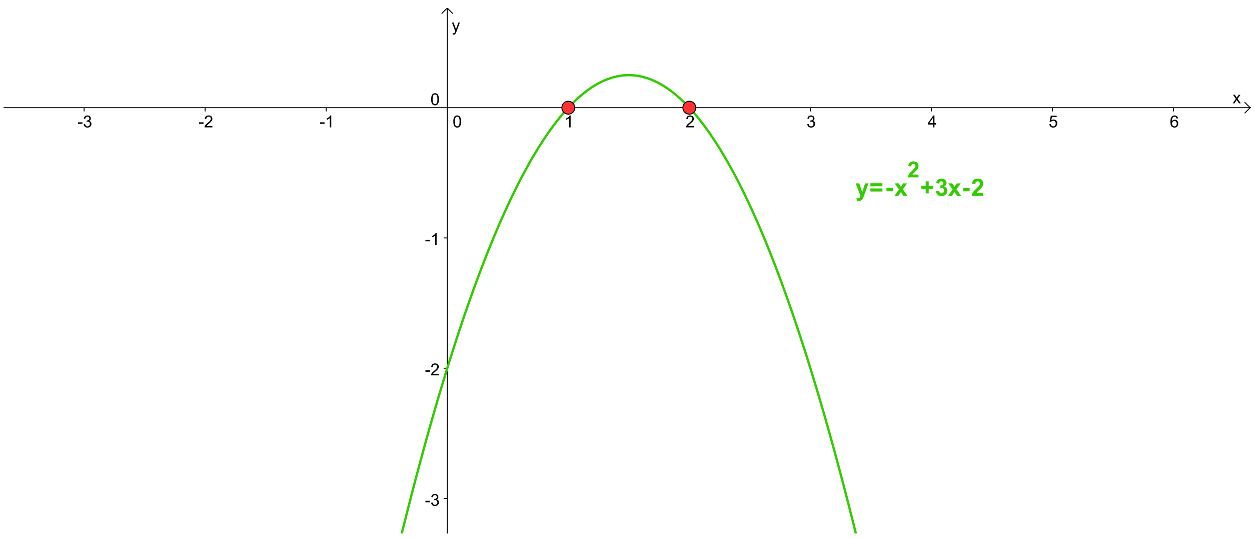
Příklad 13: *Řešte rovnici* $-x^2 + 3x - 2 = 0$ *v* $\mathcal{R}$

Nejdříve spočítáme diskriminant rovnice: $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1$.

Víme tedy, že daná rovnice bude mít právě dva reálné kořeny.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} \longrightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2$$

Na obrázku 18 je zobrazené grafické řešení rovnice.



Obrázek 18: Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + 3x - 2 = 0$

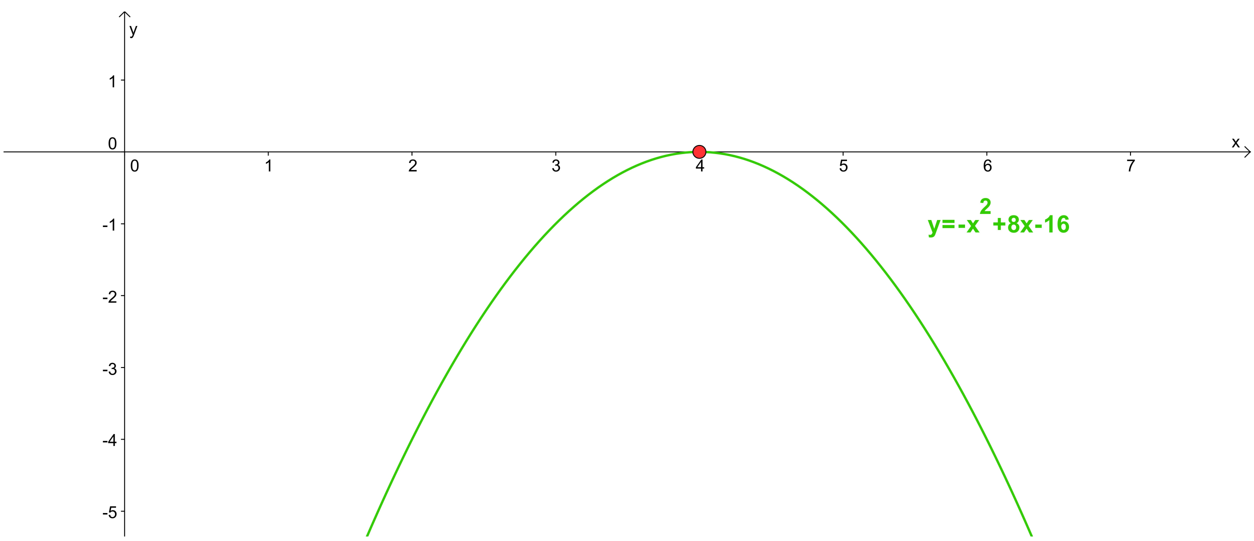
Příklad 14: *Řešte rovnici* $-x^2 + 8x - 16 = 0$ *v* $\mathcal{R}$

Nejdříve spočítáme diskriminant rovnice: $D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) = 0$.

Víme, že zadaná rovnice bude mít právě jeden reálný kořen.

$x_1 = \dfrac{-8}{2 \cdot (-1)} = 4$

Grafické řešení dané rovnice je zobrazené na obrázku 19.



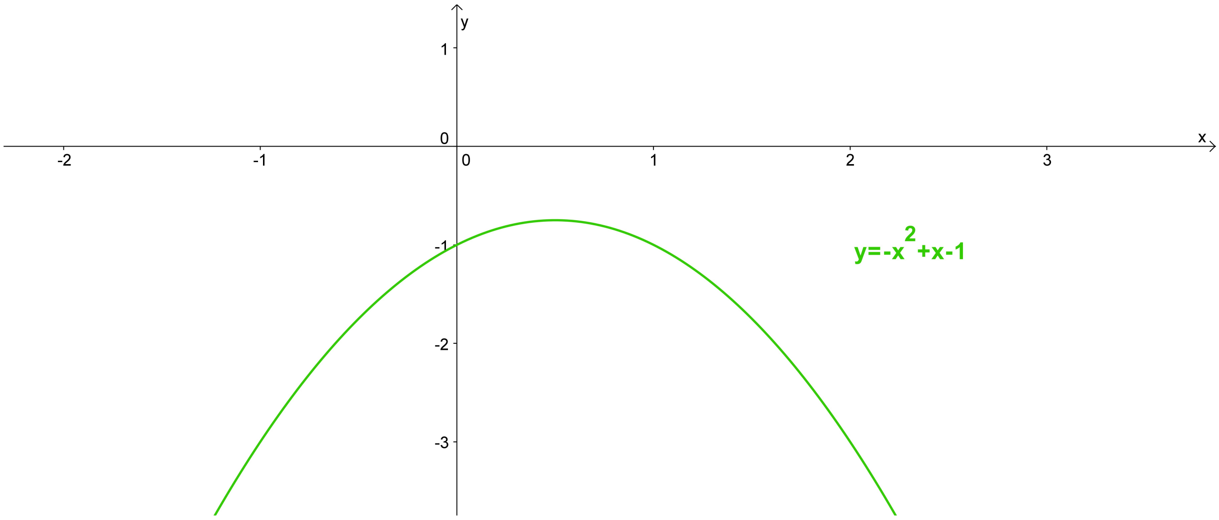
Obrázek 19: Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + 8x - 16 = 0$

Příklad 15: *Řešte rovnici* $-x^2 + x - 1 = 0$ *v* $\mathcal{R}$

Nejdříve spočítáme diskriminant rovnice: $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3$.

Je zřejmé, že tato rovnice nemá žádný reálný kořen.

Řešení dané kvadratické rovnice je patrné také z obrázku 20.



Obrázek 20: Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + x - 1 = 0$

Věta 3: Mezi kořeny $x_{1,2}$ a koeficienty a, b, c $(a \neq 0)$, libovolné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, resp. kořeny příslušné normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí vztahy vyjádřené Viètovými vzorci

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q.$$ [1, str. 212]

Věta 4: Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořeny x_1, x_2, pak kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit v součin lineárních dvojčlenů (kořenových činitelů) $x - x_1$, $x - x_2$ takto:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

takže danou kvadratickou rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$ [1, str. 213]

Příklad 16: *Rozložte v $\mathcal{R}$ kvadratický trojčlen dané rovnice na součin lineárních dvojčlenů*

$x^2 - 7x - 30 = 0$

Podle předchozích vět můžeme tuto rovnici vyřešit buď vzorcem pro výpočet kvadratické rovnice nebo můžeme k výsledku dospět pomocí rozkladu kvadratického trojčlenu v kořenové činitele.

Podle Viètových vzorců je $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -p = 7$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = q = -30$.

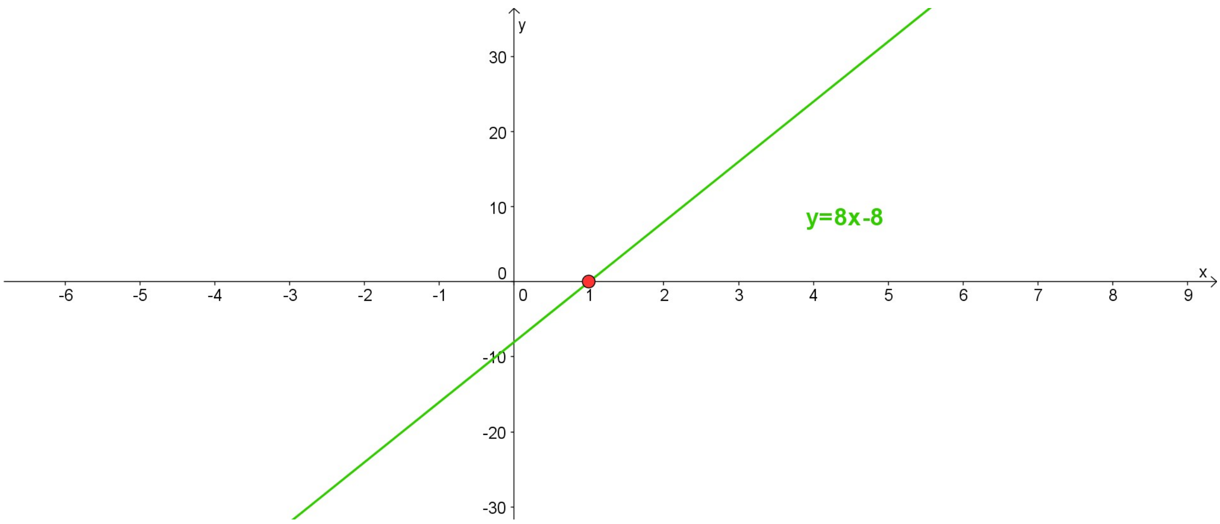
Jelikož $7 = -3 + 10 \wedge -30 = -3 \cdot 10$, potom $x^2 - 7x - 30 = (x+3)(x-10)$.

5.2.3 Kvadratické rovnice s reálnými parametry

Příklad 17: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ danou rovnici s reálným parametrem p*

$$(5-p) \cdot x^2 - 2 \cdot (1-p) \cdot x + 2 \cdot (1-p) = 0$$

Je-li $p = 5$, je rovnice lineární: $8x - 8 = 0$ a má právě jeden kořen $x = 1$. To můžeme vidět i z grafického řešení na obrázku 21.



Obrázek 21: Grafické řešení lineární rovnice $8x - 8 = 0$

Pokud $5 - p \neq 0$ čili $p \neq 5$, je rovnice kvadratická a pro její vyřešení spočítáme nejprve její diskriminant:

$D = [-2 \cdot (1-p)]^2 - 4 \cdot (5-p) \cdot 2 \cdot (1-p) = 4 \cdot (1 - 2p + p^2) - 8 \cdot (5-p)(1-p) =$

$= 4 - 8p + 4p^2 - 8 \cdot (5 - 5p - p + p^2) = 4 - 8p + 4p^2 - 8 \cdot (p^2 - 6p + 5) = 4 - 8p + 4p^2 - 8p^2 + 48p - 40 =$

$= -4p^2 + 40p - 36$

Nyní budeme uvažovat hodnotu diskriminantu:

a) $D = 0 \rightarrow x_1 = x_2$:

$-4p^2 + 40p - 36 = 0 / \cdot (-\frac{1}{4})$

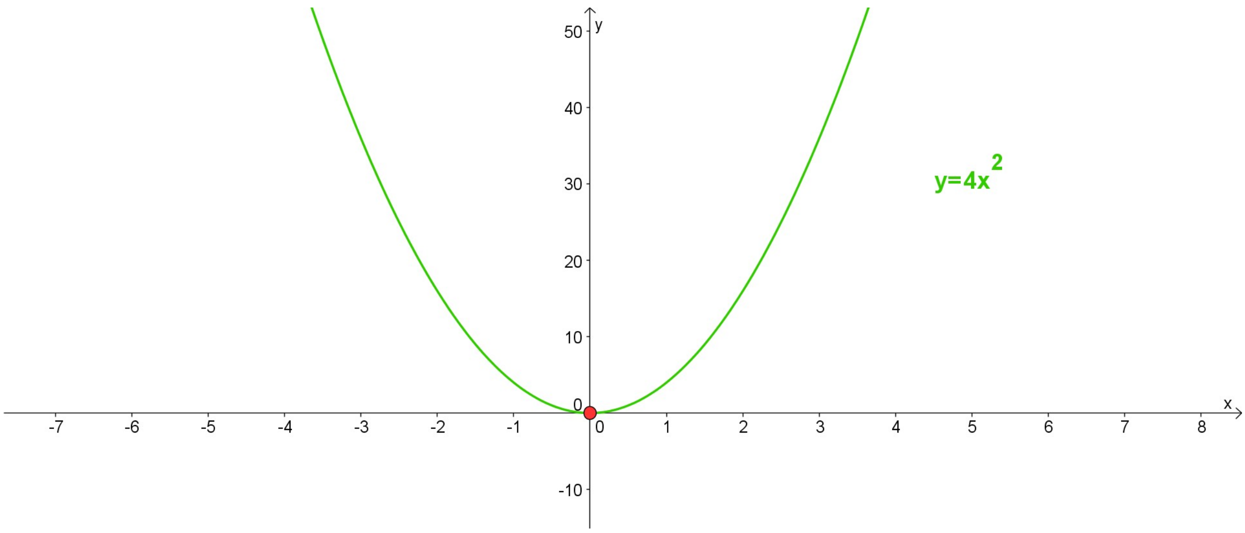
$p^2 - 10p + 9 = 0$

$(p-1)(p-9) = 0 \rightarrow p = 1 \quad \vee \quad p = 9$

$x_1 = x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \dfrac{2 \cdot (1-p)}{2 \cdot (5-p)} = \dfrac{1-p}{5-p}$

Pro $p = 1 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1-1}{5-1} = 0$

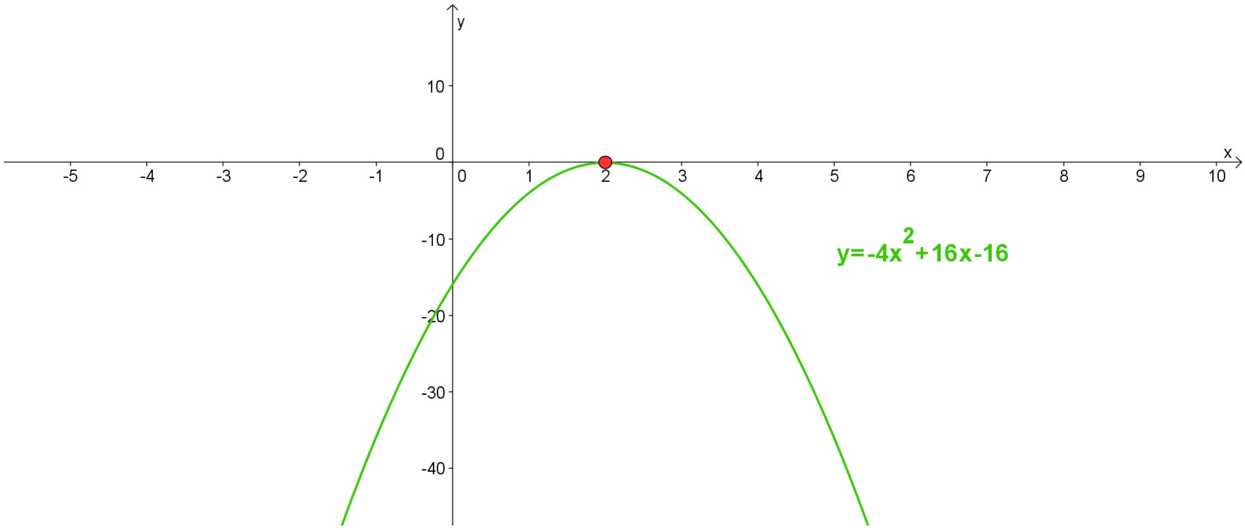
Pokud $p = 1$ dosadíme rovnou do zadané rovnice, získáme kvadratickou rovnici $4x^2 = 0$. Tato rovnice, jak vidíme i z obrázku 22, má právě jeden dvojnásobný kořen $x = 0$.



Obrázek 22: Grafické řešení kvadratické rovnice $4x^2 = 0$

Pro $p = 9 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1-9}{5-9} = 2$

Pokud $p = 9$ dosadíme rovnou do zadané rovnice, získáme kvadratickou rovnici $-4x^2 + 16x - 16 = 0$. Tato rovnice, jak vidíme i z obrázku 23, má právě jeden dvojnásobný kořen $x = 2$.



Obrázek 23: Grafické řešení kvadratické rovnice $-4x^2 + 16x - 16 = 0$

b) $D > 0 \rightarrow x_1, x_2$:

$-4p^2 + 40p - 36 > 0 / \cdot (-\frac{1}{4})$

$p^2 - 10p + 9 < 0$

$(p-1)(p-9) < 0 \rightarrow \quad p \in (1,9) - \{5\} \rightarrow p \in (1,5) \cup (5,9)$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{2 \cdot (1-p) \pm \sqrt{-4p^2 + 40p - 36}}{2 \cdot (5-p)} = \frac{2 \cdot (1-p) \pm \sqrt{4 \cdot (-p^2 + 10p - 9)}}{2 \cdot (5-p)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (1-p) \pm 2 \cdot \sqrt{-p^2 + 10p - 9}}{2 \cdot (5-p)} = \frac{1 - p \pm \sqrt{-p^2 + 10p - 9}}{5-p} \qquad (*)$$

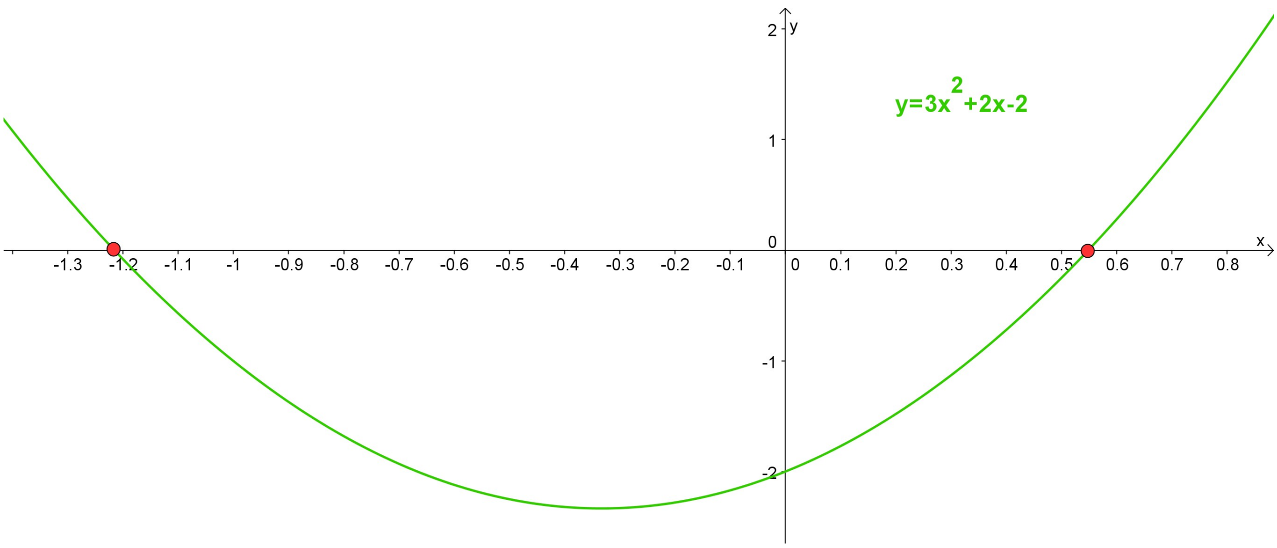
Nyní vypočteme konkrétní řešení například pro hodnotu parametru $p = 2$.

Dosazením $p = 2$ do zadané rovnice získáme rovnici tvaru $3x^2 + 2x - 2 = 0$, z které získáme následující řešení:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Stejné řešení dostaneme, pokud dosadíme $p = 2$ do výše upraveného výrazu (*).

Tyto hodnoty pro hodnotu parametru $p - 2$ lze odhadnout i z grafického řešení, které vidíme na obrázku 24.



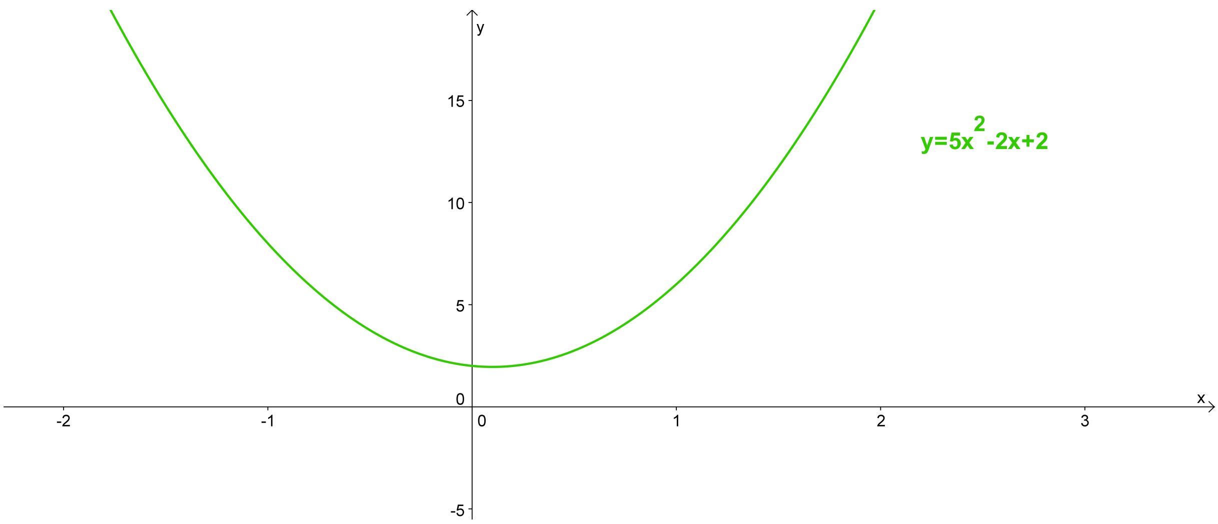
Obrázek 24: Grafické řešení kvadratické rovnice $3x^2 + 2x - 2 = 0$

c) $D < 0 \rightarrow \emptyset$:

$-4p^2 + 40p - 36 < 0 / \cdot (-\frac{1}{4})$
$p^2 - 10p + 9 > 0$

$p \in (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$

Z obrázku 25 vidíme konkrétní řešení rovnice pro hodnotu parametru $p = 0$, pro kterou získáme rovnici $5x^2 - 2x + 2 = 0$. Je zřejmé, že v tomto případě rovnice nemá řešení.



Obrázek 25: Grafické řešení kvadratické rovnice $5x^2 - 2x + 2 = 0$

Pro přehlednost zaneseme výsledky do tabulky:

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 5$	$\{1\}$
$p = 1$	$\{0\}$
$p = 9$	$\{2\}$
$p = (1,5) \cup (5,9)$	$\{\frac{1 - p \pm \sqrt{-p^2 + 10p - 9}}{5 - p}\}$
$p = (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$	$\emptyset$

6 Nerovnice a jejich řešení

Nerovnice o jedné neznámé je každá nerovnice, která je zapsána ve tvaru nerovnosti dvou výrazů

$L_{(x)} > P_{(x)}, L_{(x)} < P_{(x)}, L_{(x)} \geq P_{(x)}, L_{(x)} \leq P_{(x)}$

s proměnnou x z daného číselného oboru M.

Pro nerovnice vždy platí, že $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$, takže kořeny nerovnice mohou být pouze reálná čísla.

6.1 Části postupu řešení nerovnice

Postup řešení dané nerovnice se skládá ze stejných částí řešení jako rovnice, tedy z rozboru, závěru rozboru a zkoušky. U nerovnic s parametry je součástí závěru rozboru diskuse řešení vzhledem k hodnotám parametrů. [1, str. 241] Úpravy nerovnic jsou obvykle ekvivalentní úpravy, tj. úpravy, jimiž z dané nerovnice získáme nerovnici s touž množinou všech kořenů. Nejdůležitější ekvivalentní úpravy jsou uvedené v tabulce 5. [1, str. 242]

Tabulka 3: Přehled ekvivalentních úprav nerovnice v oboru $M \subset R$

Označení	Ekvivalentní úprava nerovnice
(UN 1)	Vzájemná výměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnosti v obrácený.
(UN 2)	Nahrazení libovolné strany nerovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 3)	Přičtení téhož čísla nebo výrazu s neznámou, který je definovám v celém oboru řešení, k oběma stranám nerovnice, znak nerovnosti se nemění.
(UN 4)	Vynásobení obou stran nerovnice kladným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a kladný (tj. nabývá jen kladných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.

(UN 4a)	Vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován a záporný (tj. nabývá jen záporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se změní v obrácený.
(UN 5)	Umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jsou-li obě strany nerovnice nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.
(UN 6)	Odmocnění obou stran nerovnice přirozeným odmocnitelem, jestliže obě strany nerovnice jsou nezáporné (tj. nabývají jen nezáporných hodnot) v celém oboru řešení nerovnice, přitom znak nerovnosti se nemění.

Zkoušku nerovnice provádíme buď prověřením podmínek, za nichž jsou prováděné úpravy ekvivalentní nebo jistou modifikací zkoušky dosazením u rovnic:

Vyšlo nám $x > x_1$, můžeme dosadit $x = x_1 + a$,

Vyšlo nám $x < x_2$, můžeme dosadit $x = x_2 - a$,

kde $a > 0$ je pomocný reálný parametr.

Zkouška je nezbytnou součástí řešení právě tehdy, když jsme prováděli neekvivalentní úpravy nerovnice.

Příklad 18: *Řešte v oboru* $\mathcal{R}$ *nerovnici* $\dfrac{1+2x}{x-3} > 1$ *s neznámou* x

a) Rozbor:

Daná nerovnice má smysl pro $x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

Odečtením čísla 1 od obou stran nerovnice dostáváme:

$$\frac{1+2x}{x-3} - 1 > 0 \leftrightarrow \frac{1+2x-1\cdot(x-3)}{x-3} > 0 \leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} > 0$$

b) Závěr rozboru:

Nerovnice $\dfrac{x+4}{x-3} > 0$ je splněna pro všechna x, pro něž platí:

$$x+4>0 \text{ čili } x>-4 \quad \wedge \quad x-3>0 \text{ čili } x>3 \quad \rightarrow K_1 = (3,\infty)$$

nebo

$$x+4<0 \text{ čili } x<-4 \quad \wedge \quad x-3<0 \text{ čili } x<3 \quad \rightarrow K_2 = (-\infty,-4)$$

$\rightarrow K = K_1 \cup K_2 = (3,\infty) \cup (-\infty,-4)$.

c) Zkouška:

Zavedeme pomocný parametr $a > 0$ a položíme $x = a - 4$ a $x = a + 3$.

Pro $x = a - 4$:
$L_{(a-4)} = \dfrac{1+2x}{x-3} = \dfrac{1+2\cdot(a-4)}{(a-4)-3} = \dfrac{2a-7}{a-7} = \dfrac{7}{a-7} + 2$
$P_{(a-4)} = 1 \longrightarrow L_{(x)} > P_{(x)}$

Pro $x = a + 3$:
$L_{(a+3)} = \dfrac{1+2x}{x-3} = \dfrac{1+2\cdot(a+3)}{(a+3)-3} = \dfrac{2a+7}{a} = \dfrac{7}{a} + 2$
$P_{(a+3)} = 1 \longrightarrow L_{(x)} > P_{(x)}$

6.2 Grafická řešení nerovnic

Při grafickém řešení lineární nerovnice $ax + b < 0$, (popřípadě $>, \leq, \geq$) sestrojíme graf lineární funkce $y = ax + b$. Podle toho, zda uvažujeme kladné či záporné funkční hodnoty funkce, vybereme příslušný interval.

Při grafickém řešení kvadratické nerovnice $ax^2+bx+c < 0$, (popřípadě $>, \leq, \geq$) postupujeme tak, že nejdříve sestrojíme graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$. Podle toho, zda uvažujeme kladné či záporné funkční hodnoty funkce, je řešením příslušný interval (popřípadě sjednocení intervalů).

7 Klasifikace nerovnic

Elementární nerovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ lze rozdělit na dva druhy: I. algebraické, II. nealgebraické.

I. Algebraická nerovnice n-tého stupně s neznámou $x \in \mathcal{R}$ je každá nerovnice tvaru

$P_n(x) > 0$, resp. $P_n(x) < 0$,

$P_n(x) \geqq 0$, resp. $P_n(x) \leqq 0$,

kde $P_n(x)$ je mnohočlen n-tého stupně. [1, str. 243]

Dále můžeme algebraické nerovnice rozdělit na racionální a iracionální.

Příkladem algebraické nerovnice je: $2x + 3 \leq x + 1$

II. Nealgebraické nerovnice jsou nerovnice, které nejsou algebraické. Patří mezi ně nerovnice exponenciální, logaritmické a goniometrické.

Příkladem nealgebraické rovnice je: $\ln(3x + 4) < 0$

8 Algebraické nerovnice s jednou neznámou

Vzhledem k rozsahu práce se zaměříme na řešení lineárních a kvadratických nerovnic s jednou neznámou. Řešení budeme hledat v oboru reálných čísel $\mathcal{R}$.

8.1 Lineární nerovnice

Lineární nerovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ je každá nerovnice tvaru

$ax + b > 0$, resp. $ax + b < 0$,

kde a, b jsou libovolná reálná čísla. Lineární rovnice může být i ve tvaru

$ax + b \geqq 0$, resp. $ax + b \leqq 0$.

Řešení lineární nerovnice $ax+b > 0; (ax+b < 0)$ se provádí tak, že odečteme číslo b od obou stran nerovnice (UN 3) a získáme tak nerovnici ve tvaru $ax > c; (ax < c), a, c \in \mathcal{R}; c = -b$. Při řešení této nerovnice v oboru $M = \mathcal{R}$ mohou nastat tři případy:

a) Pro $a > 0$ je $ax > c \leftrightarrow x > \frac{c}{a}$, tj. $K = (\frac{c}{a}, \infty)$; $(ax < c \leftrightarrow x < \frac{c}{a})$, tj. $K = (-\infty, \frac{c}{a})$.

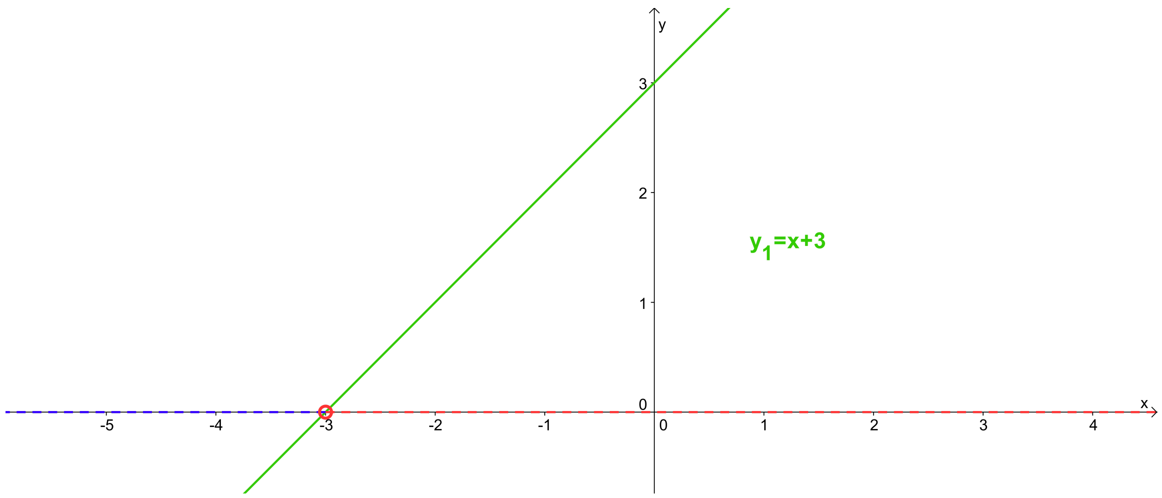
b) Pro $a < 0$ je $ax > c \leftrightarrow x < \frac{c}{a}$, tj. $K = (-\infty, \frac{c}{a})$; $(ax < c \leftrightarrow x > \frac{c}{a})$, tj. $K = (\frac{c}{a}, \infty)$.

c) Pro $a = 0$ dostáváme nerovnici tvaru $0x > c$; $(0x < c)$. Podle toho, jakých hodnot nabývá c, je tato nerovnice splněna buď pro každé $x \in \mathcal{R}$, (když $c < 0$), tj. $K = \mathcal{R}$, anebo není splněna pro žádné $x \in \mathcal{R}$, tj. $K = \emptyset$, (pro $c > 0$). [1, str. 244]

8.1.1 Grafická řešení lineárních nerovnic

Grafem lineární funkce $y = ax + b$ je přímka (kapitola 3.2.). Na obrázku 26 je znázorněn graf funkce $y_1 = x+3$, pomocí které vyřešíme například nerovnici $x+3 > 0$. Řešením této nerovnice je otevřený interval $(-3, \infty)$, který je znázorněný červeně přerušovanou čárou. Pokud bychom řešili nerovnici $x + 3 < 0$, řešením by byl otevřený interval $(-\infty, -3)$. Tento interval je na obrázku znázorněn modře přerušovanou čárou.

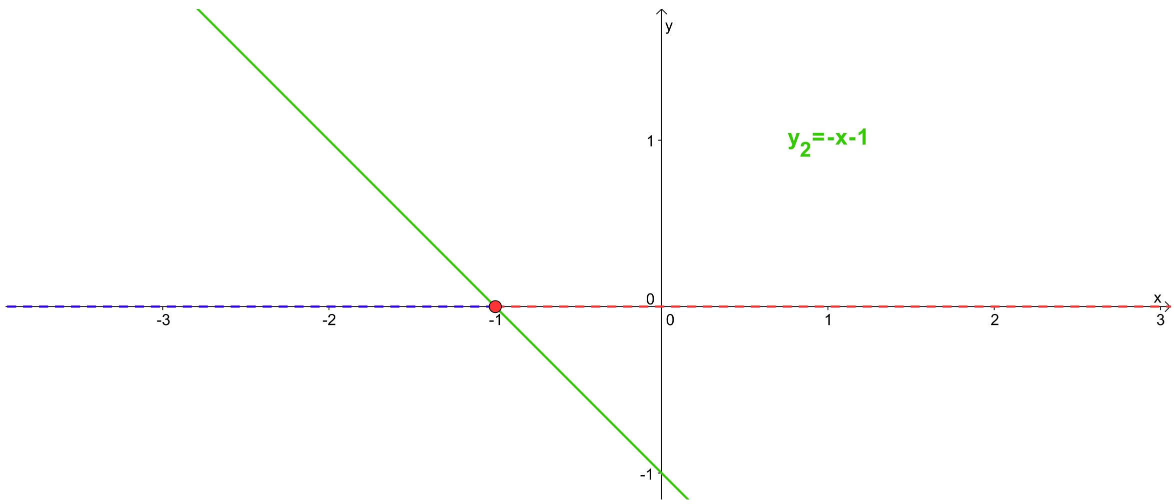
V obou případech se jedná o ostrou nerovnost, proto krajní bod $x = -3$ nepatří do intervalů řešení.



Obrázek 26: Grafické řešení lineární nerovnice s ostrou nerovností

Na obrázku 27 je znázorněné graf funkce $y_2 = -x - 1$, pomocí které vyřešíme například nerovnici $-x - 1 > 0$. Řešením takové nerovnice je otevřený interval $(-\infty, -1)$, který je na obrázku znázorněný modře přerušovanou čárou. Pokud bychom řešili nerovnici $-x - 1 \leq 0$, řešením by byl zleva uzavřený interval $\langle -1, \infty)$. Tento interval je na obrázku znázorněn červeně přerušovanou čárou.

V obou případech se jedná a neostrou nerovnost, proto krajní bod $x = -1$ patří do intervalů řešení.



Obrázek 27: Grafické řešení lineární nerovnice s neostrou nerovností

Příklad 19: *Řešte v oboru* $\mathcal{R}$ *nerovnici* $3(x-2) > x-8$ *s neznámou* x

$3(x-2) > x-8$

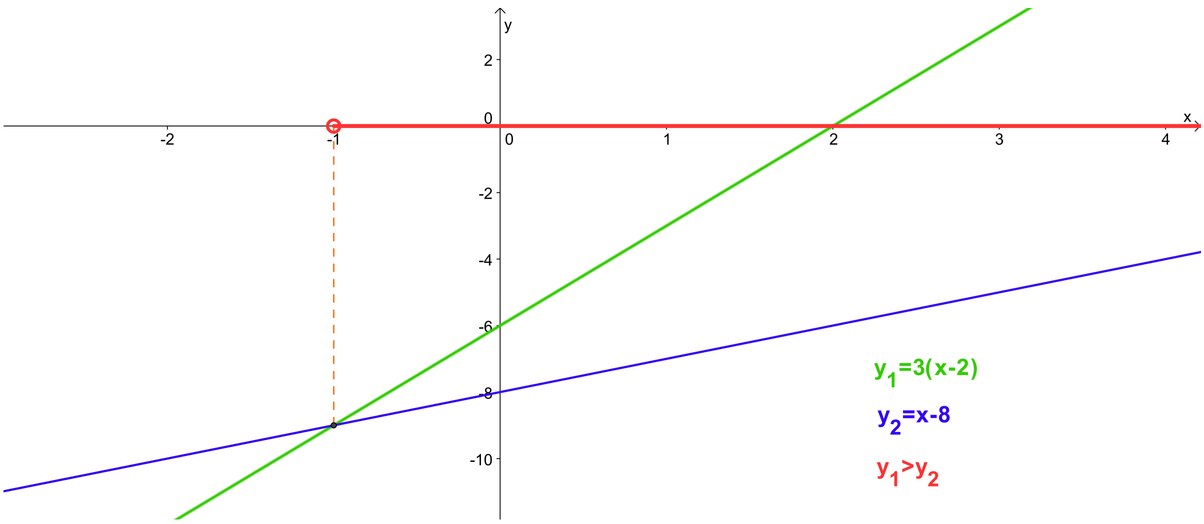
$3x-6 > x-8$

$2x > -2$

$x > -1 \longrightarrow x \in (-1, \infty)$

Na obrázku 28 je znázorněné grafické řešení zadané nerovnice. Zeleně je znázorněn graf lineární funkce $y_1 = 3(x-2)$ a modře graf lineární funkce $y_2 = x-8$. Nyní hledáme průsečík těchto dvou přímek, který promítneme na osu x. Podle zadání hledáme případ, kdy jsou hodnoty funkce y_1 větší než hodnoty funkce y_2. Z obrázku je patrné, že tyto hodnoty jsou znázorněné vpravo od bodu $x = -1$.

Řešením zadané nerovnice je tedy otevřený interval $(-1, \infty)$, což znázorňuje červená polopřímka.



Obrázek 28: Grafické řešení nerovnice $3(x-2) > x-8$

Příklad 20: *Řešte v oboru* $\mathcal{Z}$ *nerovnici* $5(x-2) \leq x+6$ *s neznámou* x

$5(x-2) \leq x+6$

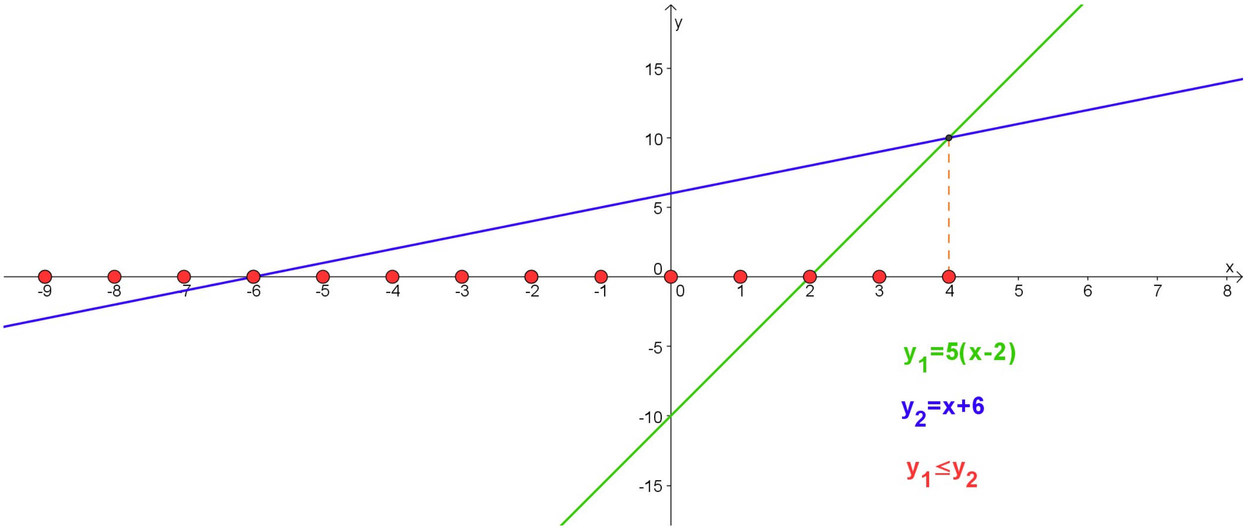
$5x-10 \leq x+6$

$4x \leq 16$

$x \leq 4 \longrightarrow x \in (-\infty, 4\rangle$

Řešením jsou tedy všechna celá čísla menší než 5.

Na obrázku 29 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zeleně je znázorněne lineární funkce $y_1 = 5(x-2)$ a modře funkce $y_2 = x + 6$. Hledáme, kdy jsou hodnoty funkce y_1 menší nebo rovny než hodnoty funkce y_2. V bodě $x = 4$ se funkční hodnoty funkcí y_1 a y_2 rovnají, od tohoto bodu doleva jsou všechny funkční hodnoty funkce y_1 menší než funkční hodnoty funkce y_2. Vzhledem k zadání ale hledáme pouze celá čísla. Proto jsou řešením body v intervalu $(-\infty, 4\rangle$, které jsou v obrázku vyznačené červeně.



Obrázek 29: Grafické řešení nerovnice $5(x-2) \leq x + 6$

8.1.2 Lineární nerovnice s absolutními hodnotami

Lineární nerovnicí s neznámou v absolutní hodnotě nazýváme každou nerovnici (s neznámou $x \in \mathcal{R}$) tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm ... \pm |a_nx + b_n| > a_0x + b_0$$

(popř. $\geqq, <, \leqq$), přičemž a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, ..., n$. [1, str. 248]

Takové nerovnice se řeší úpravou na lineární nerovnice bez absolutních hodnot užitím metody intervalů.

Věta 5: Ve speciálních případech nerovnic $|a_1x + b_1| < c, |a_1x + b_1| \leqq c$,

$|\mathrm{a}_x + b_1| > c, |a_1x + b_1| \geqq c$, kde c je daná kladná konstanta, lze při řešení vyjít přímo z následujících ekvivalencí pro libovolné reálné číslo a a $r > 0$, které reprezentují geometrický význam absolutní hodonoty:

$|a| < r \leftrightarrow -r < a < r, |a| \leqq r \leftrightarrow -r \leqq a \leqq r, |a| > r \leftrightarrow a > r \vee a < -r$,

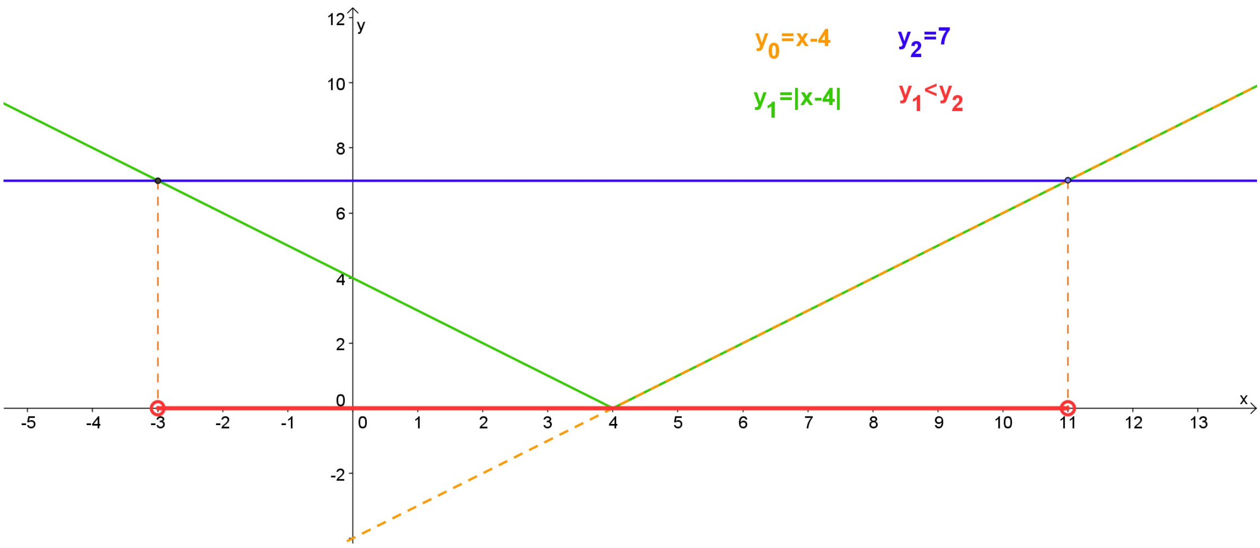
$|\mathrm{a}| \geqq r \leftrightarrow a \geqq r \vee a \leqq -r$.[1, str. 248]

Příklad 21: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnici $|x - 4| < 7$ s neznámou x*

Podle předešlé věty dostáváme

$|x - 4| < 7 \leftrightarrow -7 < x - 4 < 7$, odkud $-3 < x < 11 \longrightarrow x \in (-3, 11)$

Na obrázku 30 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Nejdříve sestrojíme graf funkce reprezentující levou stranu nerovnice a graf funkce reprezentující pravou stranu nerovnice. Oranžová přímka, představuje funkci $y_0 = x - 4$, tedy funkci představující levou stranu nerovnice avšak zatím bez absolutní hodnoty. Zeleně je vyznačená funkce $y_1 = |x - 4|$. Modrou přímku představuje funkce $y_2 = 7$, která reprezentuje pravou stranu nerovnice. Nyní hledáme situaci, kdy je funkce y_1 menší než funkce y_2. Tento případ nastává mezi body $x_1 = -3$ a $x_2 = 11$. Hledaným řešením nerovnice je proto otevřený interval $(-3, 11)$.



Obrázek 30: Grafické řešení nerovnice $|x - 4| < 7$

Příklad 22: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnici* $|2x-4| \leq 6x+8$ *s neznámou* x

Řešíme metodou intervalů:

Pro nerovnici $|2x-4| \leq 6x+8$ určíme nulový bod lineárního dvojčlenu v absolutní hodnotě

$2x-4=0 \rightarrow x=2.$

Tento bod rozdělí množinu $\mathcal{R}=(-\infty,\infty)$ na dva intervaly $I_1=(-\infty,2)$, $I_2=\langle 2,\infty)$, ve kterých danou nerovnici s absolutní hodnotou můžeme nahradit nerovnicemi bez absolutní hodnoty.

	$I_1=(-\infty,2)$	$I_2=\langle 2,\infty)$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	$2x-4$

a) Pro $x \in I_1$ nerovnice nabývá tvaru

$-2x+4 \leq 6x+8$

$\rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow x \in \langle -\frac{1}{2}, 2)$

b) Pro $x \in I_2$ nerovnice nabývá tvaru

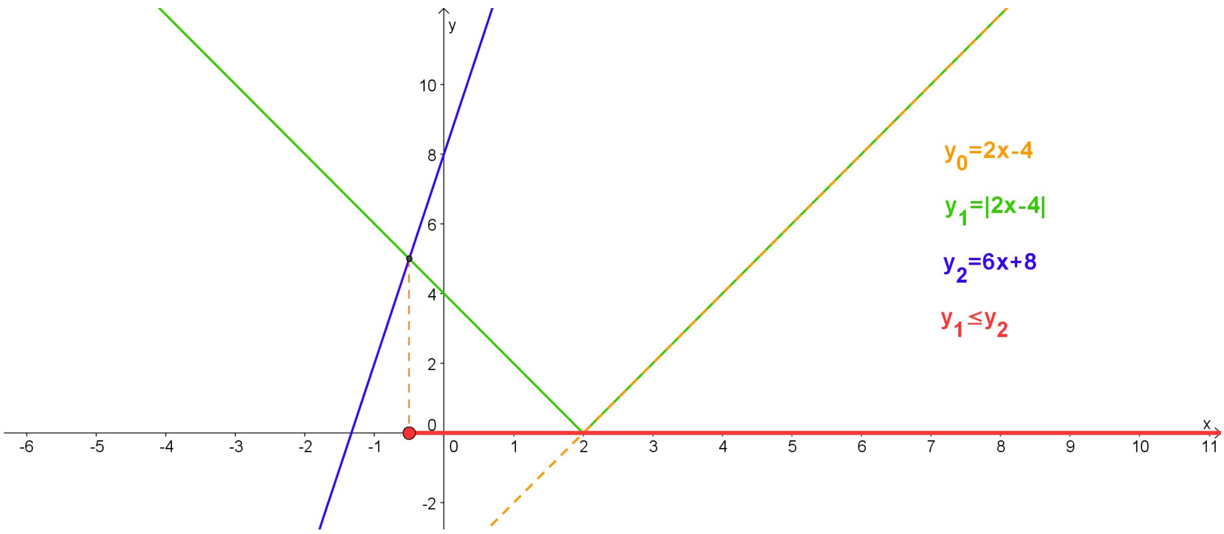
$2x-4 \leq 6x+8$

$\rightarrow x \geq -3 \rightarrow x \in \langle 2,\infty)$

Řešením dané nerovnice je: $x \in \langle -\frac{1}{2}, 2) \cup \langle 2,\infty) = \langle -\frac{1}{2}, \infty)$

Na obrázku 31 vidíme grafické řešení dané nerovnice.

Oranžově je znázorněná funkce $y_0=2x-4$, zeleně funkce $y_1=|2x-4|$, reprezentující levou stranu nerovnice. Funkce $y_2=6x+8$ znázorněná modrou barvou představuje pravou stranu nerovnice. Podle zadání hledáme, kdy je funkce y_1 menší nebo rovna funkci y_2. Tato situace nastane doprava od bodu $x=-\frac{1}{2}$. Hledaným řešením je tedy zleva uzavřený interval $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$.



Obrázek 31: Grafické řešení nerovnice $|2x-4| \leq 6x+8$

Příklad 23: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnici* $\dfrac{|x-4|}{|x+1|} \leq 2$ *s neznámou* x

Definičním oborem dané nerovnice je $D = \mathcal{R} - \{-1\}$. Nerovnici upravíme nejdříve vynásobením obou jejích stran výrazem $|x+1|$, čímž dostáváme nerovnici

$$|x-4| \leq 2|x+1| \rightarrow |x-4| - 2|x+1| \leq 0.$$

Při řešení této nerovnice metodou intervalů postupujeme následovně: Určíme nulové body lineárních dvojčlenů v absolutních hodnotách

$$x-4=0 \rightarrow x=4, \quad x+1=0 \rightarrow x=-1.$$

Nulové body rozdělí definiční obor nerovnice na tři intervaly: $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = \langle -1, 4), I_3 = \langle 4, \infty)$. V těchto intervalech se řešená nerovnice upraví na nerovnice bez absolutních hodnot. K tomu lze využít tabulku znamének hodnot dvojčlenů $x-4$ a $x+1$ pro vnitřní body x intervalů I_1, I_2, I_3.

	$I_1 = (-\infty, -1)$	$I_2 = \langle -1, 4)$	$I_3 = \langle 4, \infty)$
$\lvert x-4 \rvert$	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

a) Pro $x \in I_1$ daná nerovnice nabývá tvaru

$$(-x+4) - 2(-x-1) \leq 0,$$

odkud $x \leq -6 \rightarrow x \in (-\infty, -6\rangle$. Množinou všech řešení nerovnice v I_1 je tedy $K_1 = (-\infty, -1) \cap (-\infty, -6\rangle = (-\infty, -6\rangle$.

b) Pro $x \in I_2$ daná nerovnice nabývá tvaru

$$(-x+4) - 2(x+1) \leq 0,$$

odkud $x \geq \frac{2}{3} \rightarrow x \in \langle \frac{2}{3}, 4)$. Množinou všech řešení nerovnice v I_2 je tedy $K_2 = \langle -1, 4) \cap \langle \frac{2}{3}, 4) = \langle \frac{2}{3}, 4)$.

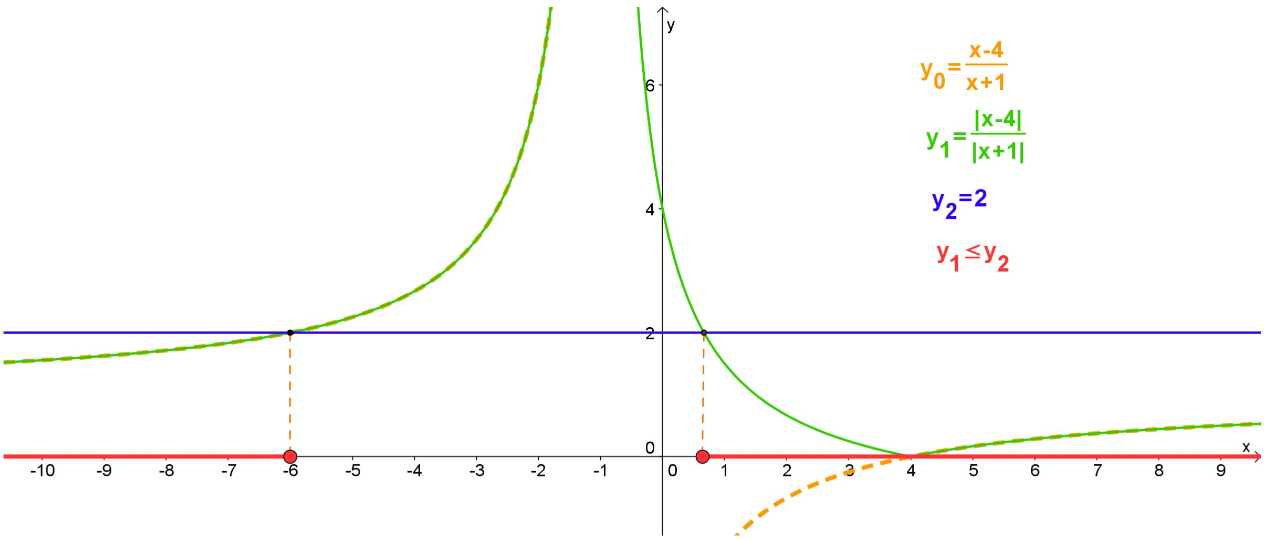
c) Pro $x \in I_3$ daná nerovnice nabývá tvaru

$$(x-4) - 2(x+1) \leq 0,$$

odkud $x \geq -6 \rightarrow x \in \langle -6, \infty)$. Množinou všech řešení nerovnice v I_3 je tedy $K_3 = \langle 4, \infty) \cap \langle -6, \infty) = \langle 4, \infty)$.

Řešením nerovnice je: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-\infty, -6\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 4) \cup \langle 4, \infty) = (-\infty, -6\rangle \cup \langle \frac{2}{3}, \infty)$.

Na obrázku 32 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Oranžovou barvou je znázorněná funkce $y_0 = \frac{x-4}{x+1}$, zeleně funkce $y_1 = \frac{|x-4|}{|x+1|}|$, tedy funkce reprezentující levou stranu nerovnice. Modře je znázorněn funkce $y_2 = 2$ představující pravou stranu nerovnice. Hledáme taková řešení, kdy jsou hodnoty funkce y_1 menší nebo rovny než hodnoty funkce y_2. Z obrázku je vidět, že této podmínce vyhovují dva intervaly. Řešením je proto sjednocení těchto dvou intervalů.



Obrázek 32: Grafické řešení nerovnice $\frac{|x-4|}{|x+1|} \leq 2$

8.2 Kvadratické nerovnice

Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathcal{R}$ nazýváme každou nerovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c > 0; (ax^2 + bx + c < 0),$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. O kvadratické nerovnici mluvíme také v případě, že má tvar

$$ax^2 + bx + c \geqq 0; (ax^2 + bx + c \leqq 0).$$

Označme $D = b^2 - 4ac$ jako diskriminant příslušné kvadratické rovvnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Řešení kvadratické nerovnice se provádí v oboru $\mathcal{R}$ následujícím způsobem:

I. Je-li $D > 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dva reálné různé kořeny x_1, x_2 a kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit v součin kořenových činitelů $a(x - x_1)(x - x_2)$. Po vydělení obou stran dané nerovnice číslem a má levá strana kvadratické nerovnice tvar $(x - x_1)(x - x_2)$

a k jejímu řešení stačí užít věty o znaménku součinu dvou reálných čísel. Tento postup řešení lze zjednodušit pomocí metody intervalů. Nechť je $x_1 < x_2$, parabola, která je grafem kvadratické funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, protíná osu x ve dvou různých bodech. Pro funkční hodnoty funkce f v intervalech $I_1 = (-\infty, x_1), I_2 = (x_1, x_1), I_3 = (x_2, \infty)$ platí: V každé dvojici sousedních intervalů mají opačná znaménka. Stačí tedy zjistit znaménko kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ v libovolném bodě jednoho z intervalů I_1, I_2, I_3, odkud pak plynou znaménka hodnot tohoto trojčlenu ve všech ostatních bodech těchto intervalů, čímž je určeno řešení dané kvadratické nerovnice.

II. Je-li $D = 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má jediný dvojnásobný kořen x_1. Proto $ax^2 + bx + c$ můžeme napsat v součinovém tvaru $a(x - x_1)^2$ a pro každé $x \in \mathcal{R}$ platí: Je-li $a > 0$, je $a(x - x_1)^2 \geqq 0$, je-li $a < 0$, je $a(x - x_1)^2 \leqq 0$, přičemž rovnost nule nastává jenom tehdy, když $x = x_1$. V grafickém znázornění to znamená, že parabola se dotýká osy x a všechny ostatní body paraboly leží nad osou x nebo pod ní.

III. Je-li $D < 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádný reálný kořen. V grafickém znázornění to znamená, že parabola, jež je grafem kvadratické funkce, leží celá nad osou x (pro $a > 0$) nebo pod ní (pro $a < 0$). Stačí tedy zjistit znaménko hodnoty kvadratického trojčlenu v kterémkoli bodě $x \in \mathcal{R}$ a můžeme určit řešení této kvadratické nerovnice.

Věta 6: Jeli $D = p^2 - 4q < 0$, pak pro každé $x \in \mathcal{R}$ je $x^2 + px + q > 0$. [1, str. 253]

Důsledek: Kvadratická nerovnice $x^2+px+q > 0$ s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a s reálnými koeficienty p, q má pro $D < 0$ nekonečně mnoho řešení $x \in \mathcal{R}$ a kvadratická nerovnice $x^2 + px + q < 0$ nemá za týchž předpokladů v oboru $\mathcal{R}$ žádné řešení. [1, str. 253]

8.2.1 Grafická řešení kvadratických nerovnic

Příklad 24: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ kvadratickou nerovnici $x^2 + 5x + 4 < 0$ s neznámou x*

Diskriminant příslušné kvadratické rovnice je $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 \rightarrow 9 > 0$, takže tato rovnice má dva reálné různé kořeny $x_1 = -1, x_2 = -4$ a platí

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4).$$

Řešenou kvadratickou nerovnici lze proto vyjádřit ve tvaru

$$(x + 1)(x + 4) < 0.$$

Tuto nerovnici můžeme řešit následujícími dvěma způsoby:

I. způsob řešení - užitím věty o záporném součinu dvou reálných čísel

Součin $(x+1)(x+4)$ je záporný právě tehdy, když větší z čísel $x+1, x+4$ je kladné a menší z nich je záporné, tedy

$$x + 4 > 0 \wedge x + 1 < 0.$$

Odtud $x > -4 \wedge x < -1$ neboli $-4 < x < -1$, tj. $x \in (-4, -1)$.

II. způsob řešení - metodou intervalů

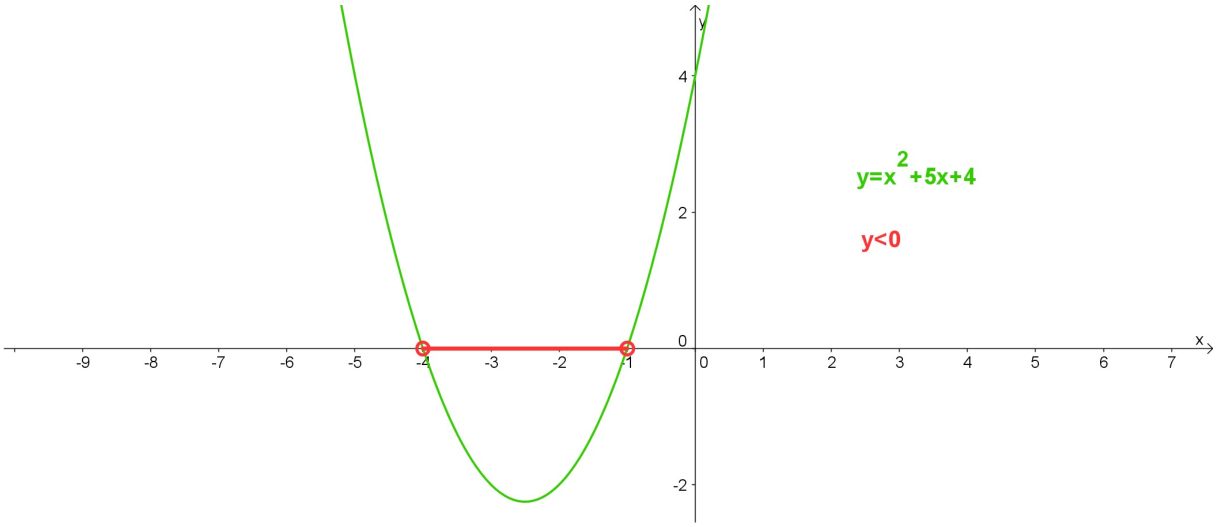
Nulové body kvadratického trojčlenu $x_1 = -1, x_2 = -4$ vymezují na číselné ose intervaly $I_1 = (\infty, -4), I_2 = (-4, -1), I_3 = (-1, \infty)$. Zvolíme libovolný bod $x_0 \in \mathcal{R} - \{-4; -1\}$ a vypočteme v něm hodnotu kvadratického trojčlenu $P(x_0) = x^2+5x+4$, např. pro $x_0 = -2$ dostáváme $P(-2) = -2 < 0$. Protože je $-2 \in I_2$, bude $P(x) < 0$ pro každé $x \in I_2$ (zatímco v intervalech I_1, I_3 pro každé x bude $P(x) > 0$).

$I_1 = I_1 = (-\infty, -4)$	$I_2 = (-4, -1)$	$I_3 = (-1, \infty)$
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Ekvivalentnost obou způsobů řešení plyne ze znaménkové analýzy kořenových činitelů a kvadratického trojčlenu $P_2(x)$ v uvedených dílčích intervalech I_1, I_2, I_3:

x	$I_1 = (-\infty, -4)$	$I_2 = (-4, -1)$	$I_3 = (-1, \infty)$
$x+1$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x+4$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$P_2(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Z této tabulky je patrné, že daná nerovnice má záporné hodnoty právě v otevřeném intervalu $(-4, -1)$. Stejné řešení můžeme vidět i z následujícího obrázku 33.



Obrázek 33: Grafické řešení nerovnice $\mathrm{x}^2 + 5x + 4 < 0$

8.2.2 Kvadratické nerovnice s absolutními hodnotami

Příklad 25: *Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnici $x^2 - |5x-3| - x < 2$ s neznámou x*

Danou nerovnici budeme řešit metodou intervalů, určíme tedy nulový bod výrazu

$5x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{5}$. Množina $\mathcal{R}$ je rozdělena nulovým bodem na dva intervaly:

$I_1 = (-\infty, \frac{3}{5}), I_2 = \langle\frac{3}{5}, \infty)$. V těchto intervalech můžeme upravit danou nerovnici s absolutní hodnotou na nerovnici bez absolutní hodnoty. Určíme proto znaménka libovolných hodnot dvojčlenu $5x - 3$ v intervalech I_1, I_2:

	$I_1 = (-\infty, \frac{3}{5})$	$I_2 = \langle\frac{3}{5}, \infty)$
$\lvert 5x-3\rvert$	$-5x+3$	$5x-3$

Odtud plyne:

Pro $x \in I_1$ daná nerovnice nabývá tvaru

$$x^2 - (-5x + 3) - x < 2$$

Jejím řešením je $-5 < x < 1 \rightarrow x \in (-5, 1) \cap I_1 = (-5, 1) \cap (-\infty, \frac{3}{5}) \rightarrow x \in (-5, \frac{3}{5})$

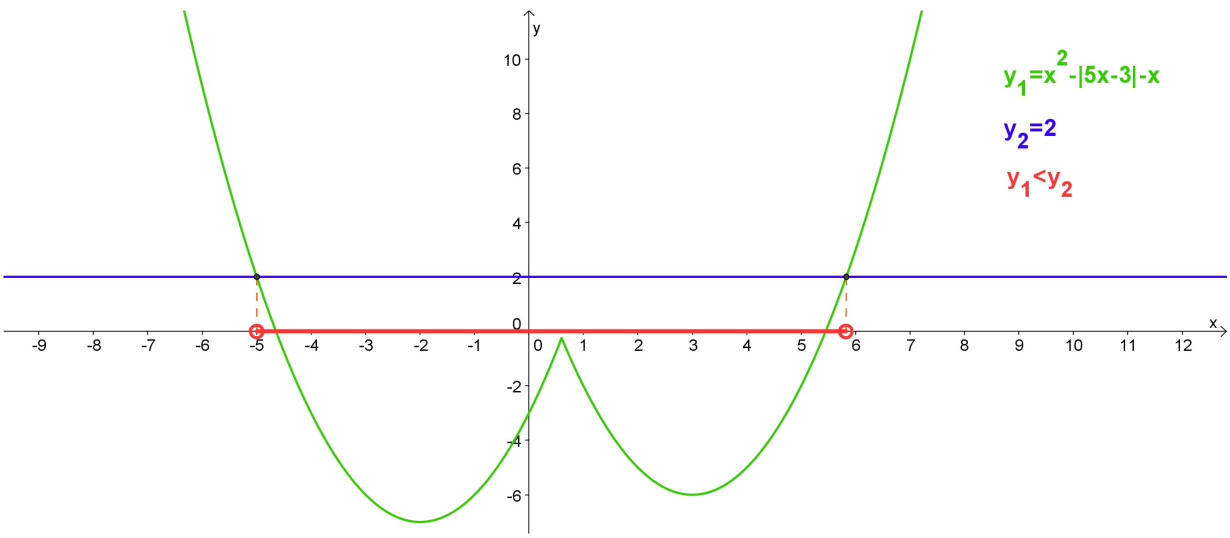
Pro $x \in I_2$ daná nerovnice nabývá tvaru

$$x^2 - (5x - 3) - x < 2$$

Jejím řešením je $3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2} \rightarrow x \in (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \cap I_2 =$
$= (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \cap \langle \frac{3}{5}, \infty) \rightarrow x \in \langle \frac{3}{5}, 3 + 2\sqrt{2})$

Řešením dané nerovnice je $x \in (-5, \frac{3}{5}) \cup \langle \frac{3}{5}, 3 + 2\sqrt{2}) \rightarrow x \in (-5, 3 + 2\sqrt{2})$.

Na obrázku 34 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zeleně je znázorněna kvadratická funkce s absolutní hodnotou $y_1 = x^2 - |5x - 3| - x$, která reprezentuje levou stranu nerovnice a modře je znázorněna lineární funkce $y_2 = 2$, představující pravou stranu nerovnice. Hledáme takové řešení, kde je y_1 menší než y_2. Taková situace nastává pouze v otevřeném intervalu, který je na obrázku znázorněn červenou úsečkou.



Obrázek 34: Grafické řešení nerovnice $x^2 - |5x - 3| - x < 2$

9 Závěr

Výsledkem bakalářské práce je sada materiálů a pracovních listů pro výuku algebraických rovnic a nerovnic. Pracovní listy umožní studentům pracovat samostatně dle svého tempa, což může být výhoda nejen pro studenty, ale i pro pedagoga. Zatímco někteří již mohou pracovat samostatně, učitel má možnost vysvětlovat látku studentům, kteří ještě zcela učivo nepochopili.

Tuto představu jsem si měla možnost vyzkoušet na Gymnáziu v Jírovcově ulici v Českých Budějovicích v pátém ročníku osmiletého gymnázia. Z vyučovací hodiny, ve které jsem měla možnost realizovat výuku bez těchto materiálů usuzuji, že pokud žáci nemají možnost pracovat každý samostatně a dle svého tempa, vzájemně se vyrušují.

Předpokládám, že pokud by každý z nich měl možnost pracovat svým tempem na svém pracovním listu, pedagog by měl větší možnost věnovat se pomalejším studentům. Avšak pro toto tvrzení nestačí pouhá jedna vyučovací hodina. Byl by zapotřebí daleko větší časový úsek a srovnání tříd pracujících s těmito materiály a běžně pracujících tříd. Srovnávat bychom mohli jak z pohledu pochopení látky, tak z pohledu studentova zájmu a pozornosti.

Seznam tabulek

1 Přehled ekvivalentních úprav rovnice v oboru $M \subset R$ 4
2 Přehled důsledkových úprav rovnice v oboru $M \subset R$ 4
3 Přehled ekvivalentních úprav nerovnice v oboru $M \subset R$ 32

Seznam obrázků

1 Grafické řešení lineárních rovnic . . . 10
2 Grafické řešení lineární rovnice s jedním kořenem . . . 10
3 Grafické řešení lineární rovnice s nekonečně mnoha kořeny . . . 11
4 Grafické řešení lineární rovnice s žádným kořenem . . . 12
5 Grafické řešení rovnice $2px + x = 5$ pro $p = 2$ . . . 13
6 Grafické znázornění rovnice $|x + 5| = 4$ na číselné ose . . . 14
7 Grafické řešení rovnice $|x + 5| = 4$ . . . 15
8 Grafické řešení rovnice $|2x - 4| + |x + 1| = 9$ . . . 17
9 Grafické řešení rovnice $|x + 1| + 4 = x + p$ pro hodnotu parametru $p = 4$ . . . 18
10 Grafické řešení rovnice $|x + 1| + 4 = x + p$ pro hodnotu parametru $p = 5$ . . . 19
11 Grafické řešení rovnice $|x + 1| + 4 = x + p$ pro hodnotu parametru $p = 6$ . . . 20
12 Grafické řešení kvadratické rovnice s jedním kořenem . . . 21
13 Grafické řešení kvadratické rovnice s dvěma kořeny . . . 21
14 Grafické řešení kvadratické rovnice, která nemá reálné kořeny . . . 22
15 Grafické řešení kvadratické rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ . . . 23
16 Grafické řešení kvadratické rovnice $4x^2 + 4x + 1 = 0$ . . . 23
17 Grafické řešení kvadratické rovnice $5x^2 + x + 6 = 0$ . . . 24
18 Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + 3x - 2 = 0$ . . . 25
19 Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + 8x - 16 = 0$ . . . 25
20 Grafické řešení kvadratické rovnice $-x^2 + x - 1 = 0$ . . . 26
21 Grafické řešení lineární rovnice $8x - 8 = 0$ . . . 27
22 Grafické řešení kvadratické rovnice $4x^2 = 0$ . . . 28
23 Grafické řešení kvadratické rovnice $-4x^2 + 16x - 16 = 0$ . . . 29
24 Grafické řešení kvadratické rovnice $3x^2 + 2x - 2 = 0$ . . . 30
25 Grafické řešení kvadratické rovnice $5x^2 - 2x + 2 = 0$ . . . 30
26 Grafické řešení lineární nerovnice s ostrou nerovností . . . 37
27 Grafické řešení lineární nerovnice s neostrou nerovností . . . 37
28 Grafické řešení nerovnice $3(x - 2) > x - 8$ . . . 38
29 Grafické řešení nerovnice $5(x - 2) \leq x + 6$ . . . 39
30 Grafické řešení nerovnice $|x - 4| < 7$ . . . 40

31 Grafické řešení nerovnice $|2x-4| \leq 6x+8$ 42
32 Grafické řešení nerovnice $\dfrac{|x-4|}{|x+1|} \leq 2$ 43
33 Grafické řešení nerovnice $\mathrm{x}^2+5x+4<0$ 46
34 Grafické řešení nerovnice $x^2-|5x-3|-x<2$ 47
35 Grafické řešení rovnice $3x(x-2)+2x-3x^2=2$ 55
36 Grafické řešení rovnice $3x=9$ 56
37 Grafické řešení rovnice $(2x-1)(x+2)=2x^2+7$ 57
38 Grafické řešení rovnice $11x-6=0$ 58
39 Grafické řešení rovnice $(x-1)(x-2)(x-3)=x(x^2-6x)$ 58
40 Grafické řešení rovnice $5x-3=6$ 59
41 Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x}{3}=1$ 60
42 Grafické řešení rovnice $(x-2)\cdot\dfrac{3+2x}{2}=x(x-2)$ 61
43 Grafické řešení rovnice $(x-3)^2-x(x-1)=x+15$ 62
44 Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-2}{x}=1$ 63
45 Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-2}{x}=-\dfrac{1}{4}$ 64
46 Grafické řešení rovnice $x-\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{1}{2}$ 65
47 Grafické řešení rovnice $4x-2=x+1$ 66
48 Grafické řešení rovnice $-\dfrac{1}{x}+1=1$ 67
49 Grafické řešení rovnice $-\dfrac{2}{x}+1=0$ 67
50 Grafické řešení rovnice $\dfrac{1}{x}+1=3$ 68
51 Grafické řešení rovnice $|x-2|=3$ 69
52 Grafické řešení rovnice $|x+3|+|x-2|=1+x$ 70
53 Grafické řešení rovnice $|x+5|=|x|-2$ 72
54 Grafické řešení rovnice $-2=\dfrac{3}{x-2}$ 73
55 Grafické řešení rovnice $4x^2-12x+9=0$ 75
56 Grafické řešení rovnice $3x^2+9x-3=x-7$ 76
57 Grafické řešení rovnice $x^2+x+3=-6x-3x^2$ 77
58 Grafické řešení rovnice $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{x}=-2-x$ 78
59 Grafické řešení rovnice $x^2+|x-1|+5=0$ 81
60 Grafické řešení rovnice $|x-1|\cdot|x+2|=3$ 83
61 Grafické řešení rovnice $x^2+2x-8=|x-2|$ 84

62 Grafické řešení rovnice $-x^2 + 8x - 12 = 0$ 85
63 Grafické řešení rovnice $x^2 - x - 6 = |x - 3| - 5$ 86
64 Grafické řešení nerovnice $\frac{1 + 3x^2}{3} \leq x^2 + x$ 88
65 Grafické řešení nerovnice $\frac{\frac{1}{x} + 2x}{2} < x + 2$ 90
66 Grafické řešení nerovnice $3(x + 6) - 9 > 3(x + 3)$ 91
67 Grafické řešení nerovnice $2(x - 1) > x + 4$ 92
68 Grafické řešení nerovnice $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x + 1}$ 93
69 Grafické znázornění nerovnice $|x + 4| \leq 3$ 97
70 Grafické řešení nerovnice $|x + 2| + |x| > |x - 4|$ 99
71 Grafické řešení nerovnice $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 102
72 Grafické řešení nerovnice $2x^2 - 7x - 4 < 0$ 103
73 Grafické řešení nerovnice $2x^2 - 8x - 24 > 0$ 104
74 Grafické řešení nerovnice $-x^2 + 7x - 6 > 0$ 105
75 Grafické řešení nerovnice $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \geq 0$ 106
76 Grafické řešení nerovnice $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ 107
77 Grafické řešení nerovnice $|\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}| \leq 5$ 108
78 Grafické řešení nerovnice $-x^2 - 2|x| + 8 \leq 0$ 109
79 Grafické řešení nerovnice $\frac{|x|^2 - |x| - 2}{|x| - 2} > 7$ 111

Seznam použité literatury

[1] POLÁK, J. Přehled středoškolské matematiky. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 659s. ISBN 978-80-7196-356-1

[2] POLÁK, J. Středoškolská matematika v úlohách II. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 626s. ISBN 80-7196-166-3

[3] Cifrikova matematika. [online]. [cit.2013-03-21]. Dostupné z www: http://www.matematika.webz.cz

[4] MATEMATIKA POLOPATĚ. [online]. [cit.2013-04-11]. Dostupné z www: http://www.matweb.cz

[5] KOVÁČIK, J. a kol. Řešené příklady z matematiky pro střední školy. 2. vyd. Praha: ASPI, 2006, 908s. ISBN 80-7357-146-3

[6] KUBEŠOVÁ, N., Cibulková, E. Matematika - přehled středoškolského učiva. 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2007, 239s. ISBN 978-80-86873-05-3

[7] CHARVÁT, J., ZHOUF, J., BOČEK, L. Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2005, 223s. ISBN 978-80-7196-362-2

[8] VOCELKA, J., Matematika - zásobník úloh pro SŠ nejen k maturitě. 1. vyd. Mníšek pod Brdy: Scientia, 2006, 55s. ISBN 80-86960-06-4

[9] ČERMÁK, P., ČERVINKOVÁ, P. Odmaturuj z matematiky 1. 4. vyd. Brno: DIDAKTIS, 2007, 208s. ISBN 978-80-7358-102-2

[10] MIZERA P., Numerické metody hledání reálných kořenů polynomu. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2008, 42s. Dostupné z www: is.muni.cz/th/175323/.[cit.2013-04-22]

10 Přílohy

10.1 Příloha A

10.1.1 Zadání - Lineární rovnice

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

a) $3x(x-2) + 2x - 3x^2 = 2$

b) $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 7$

c) $(x-1)(x-2)(x-3) = x(x^2 - 6x)$

2) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{Z}_0^+$:

a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = 1$

b) $(x-2) \cdot \dfrac{3+2x}{2} = x(x-2)$

c) $(x-3)^2 - x(x-1) = x + 15$

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $p \in \mathcal{R}$:

a) $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{1-p}{2p}$, řešte také pro $p = 2$

b) $3px + p(x-2) = 2p - 1 + x$, řešte také pro $p = 1$

c) $\dfrac{p-2}{x} + 1 = p$, řešte také pro $p = 0$ a $p = 3$

4) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

a) $|x-2| = 3$

b) $|x+3| + |x-2| = 1 + x$

c) $|x+5| = |x| - 2$

5) Nalezněte všechny hodnoty parametru $p \in \mathcal{R}$, pro které má rovnice $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{3}{x-2}$ kladné reálné řešení.

10.1.2 Řešení - Lineární rovnice

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

a) $3x(x-2)+2x-3x^2 = 2$

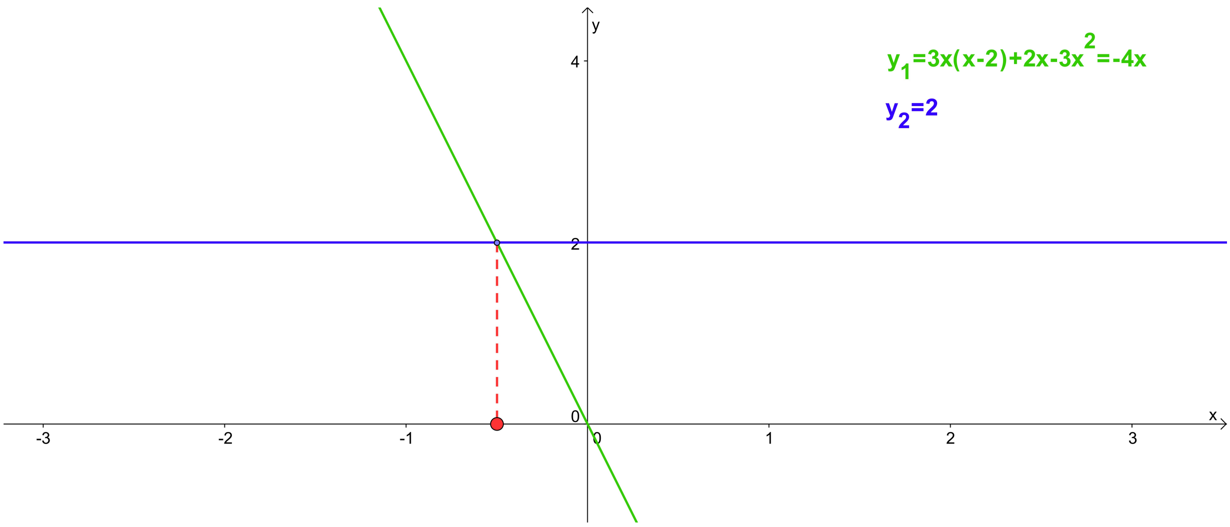
$3x^2 - 6x + 2x - 3x^2 = 2$

$-4x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$

$K = \{-\frac{1}{2}\}$

Na obrázku 35 můžeme vidět graf funkce $y_1 = 3x(x-2)+2x-3x^2 = -4x$, který je znázorněný zelenou barvou a představuje levou stranu rovnice. Modře je zanesena funkce $y_2 = 2$, reprezentující pravou stranu rovnice.



Obrázek 35: Grafické řešení rovnice $3x(x-2)+2x-3x^2 = 2$

b) $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 7$

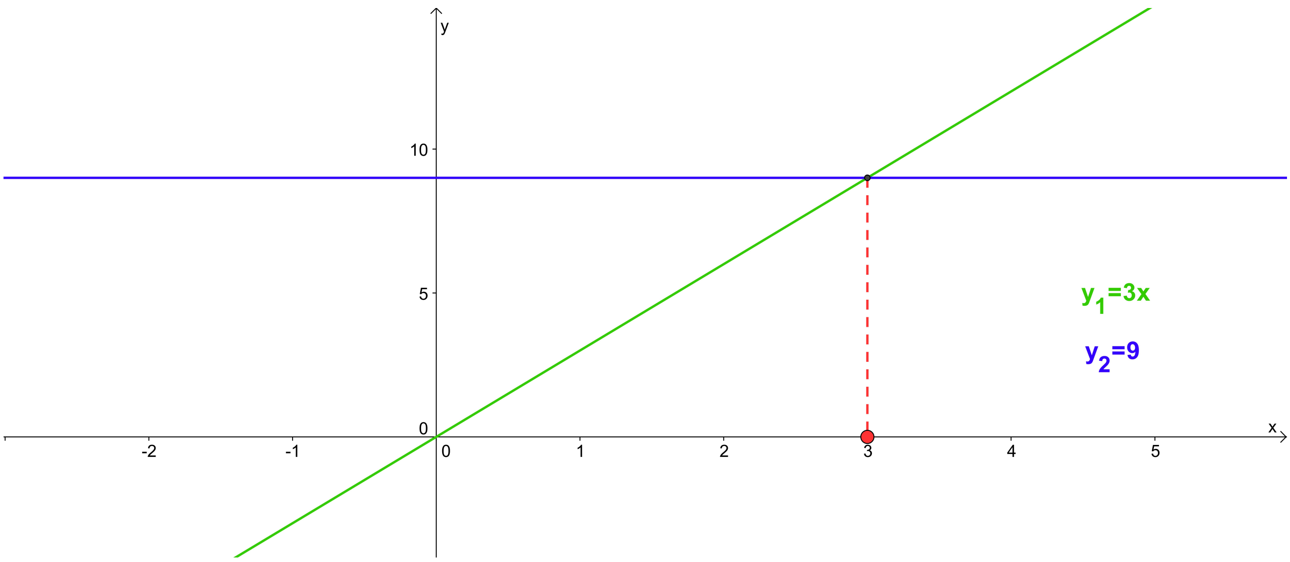
$2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 7$

$3x = 9$

$x = 3$

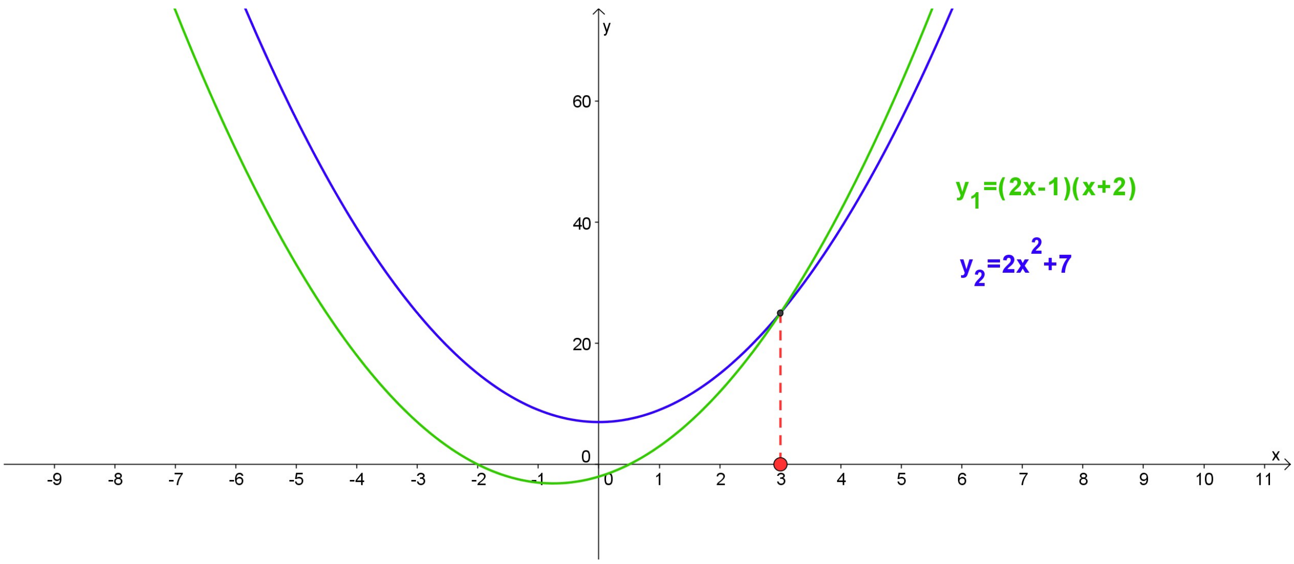
$K = \{3\}$

Na levé i pravé straně zadané rovnice jsou polynomy druhého stupně. Avšak početními úpravami se rovnice upraví na rovnici lineární. Na obrázku 36 je znázorněné grafické řešení této upravené lineární rovnice.



Obrázek 36: Grafické řešení rovnice $3x = 9$

Na obrázku 36 a 37 můžeme vidět, že při využití počítačového software je obvykle tvar předpisu funkce nepodstatný. Neupravená rovnice 2. řádu má stejné řešení jako lineární rovnice získaná ekvivalentními úpravami.



Obrázek 37: Grafické řešení rovnice $(2x-1)(x+2) = 2x^2 + 7$

c) $(x-1)(x-2)(x-3) = x(x^2 - 6x)$

$(x^2 - 2x - x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2$

$x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x - x^2 + 3x + 2x - 6 = x^3 - 6x^2$

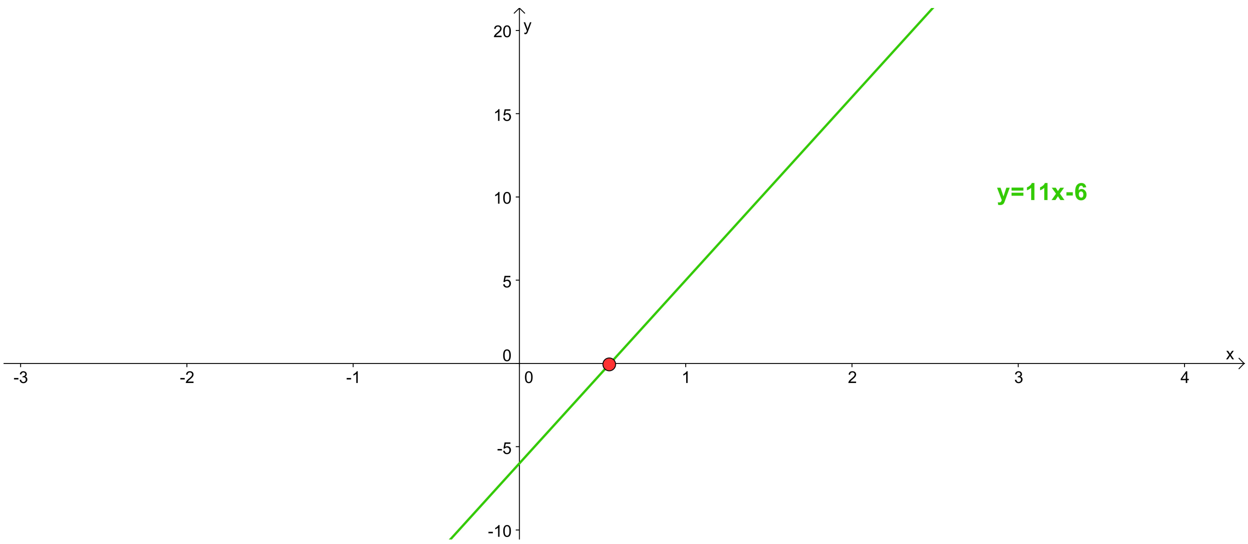
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 6x^2$

$11x - 6 = 0$

$x = \dfrac{6}{11}$

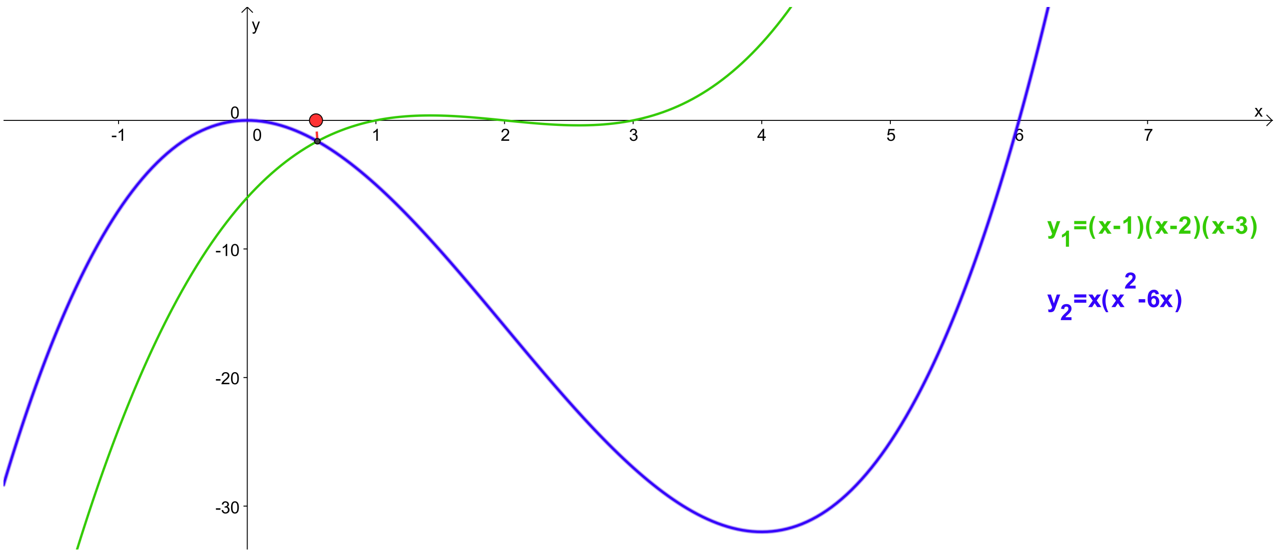
$K = \{\dfrac{6}{11}\}$

Na levé i pravé straně rovnice jsou polynomy třetího stupně. Avšak početními úpravami získáme z nelineární rovnice rovnici lineární. Grafické řešení této upravené lineární rovnice můžeme vidět na obrázku 38.



Obrázek 38: Grafické řešení rovnice $11x - 6 = 0$

Opět můžeme vidět, že upravená lineární rovnice (obrázek 38) má stejné řešení jako původně zadaná rovnice 3. stupně (obrázek 39).



Obrázek 39: Grafické řešení rovnice $(x-1)(x-2)(x-3) = x(x^2 - 6x)$

Polynom třetího stupně s reálnými koeficienty, může mít v reálném oboru $\mathcal{R}$ pouze jeden nebo tři kořeny. Z grafického řešení na obrázku 39 je patrné, že polynom na levé straně rovnice má tři reálné kořeny, což je vidět i ze součinu kořenových činitelů v zadané rovnici. Polynom na pravé straně má taktéž tři kořeny (z toho jeden dvojnásobný), což můžeme vidět na grafickém řešení. Z početního řešení ale víme, že tato rovnice má pouze jeden reálný kořen.

2) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{Z}_0^+$:

Množinou $\mathcal{Z}_0^+$ rozumíme všechna celá čísla včetně nuly.

a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = 1$

$3(x-1) + 2x = 6$

$3x - 3 + 2x = 6$

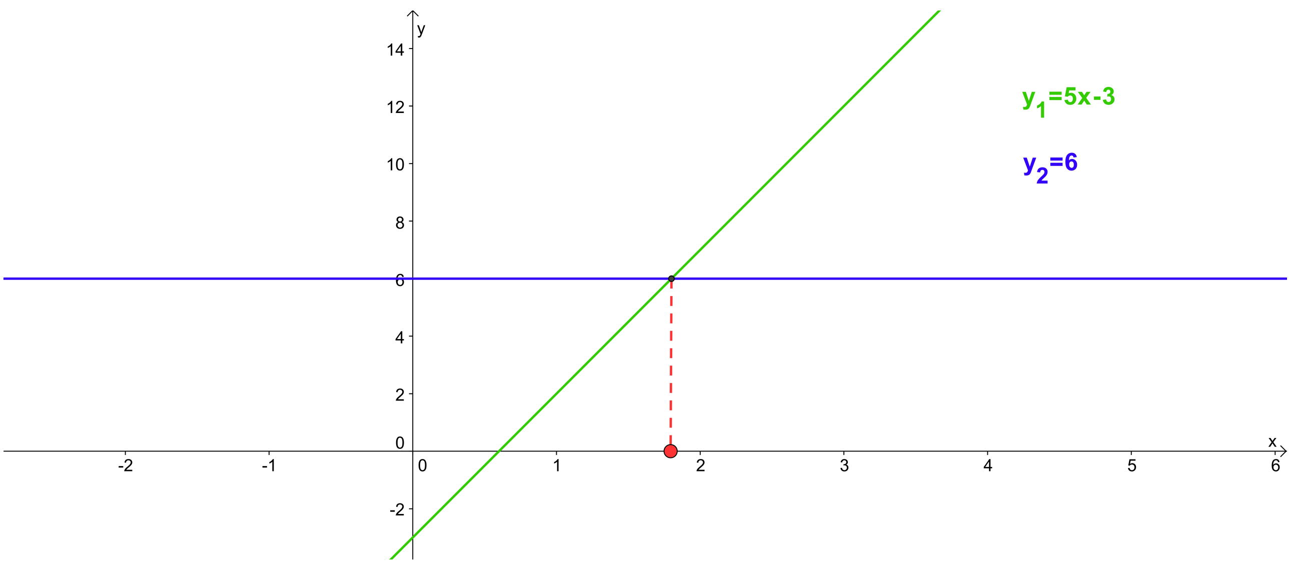
$5x - 3 = 6$

$5x = 9$

$x = \dfrac{9}{5} \rightarrow x \notin \mathcal{Z}_0^+$

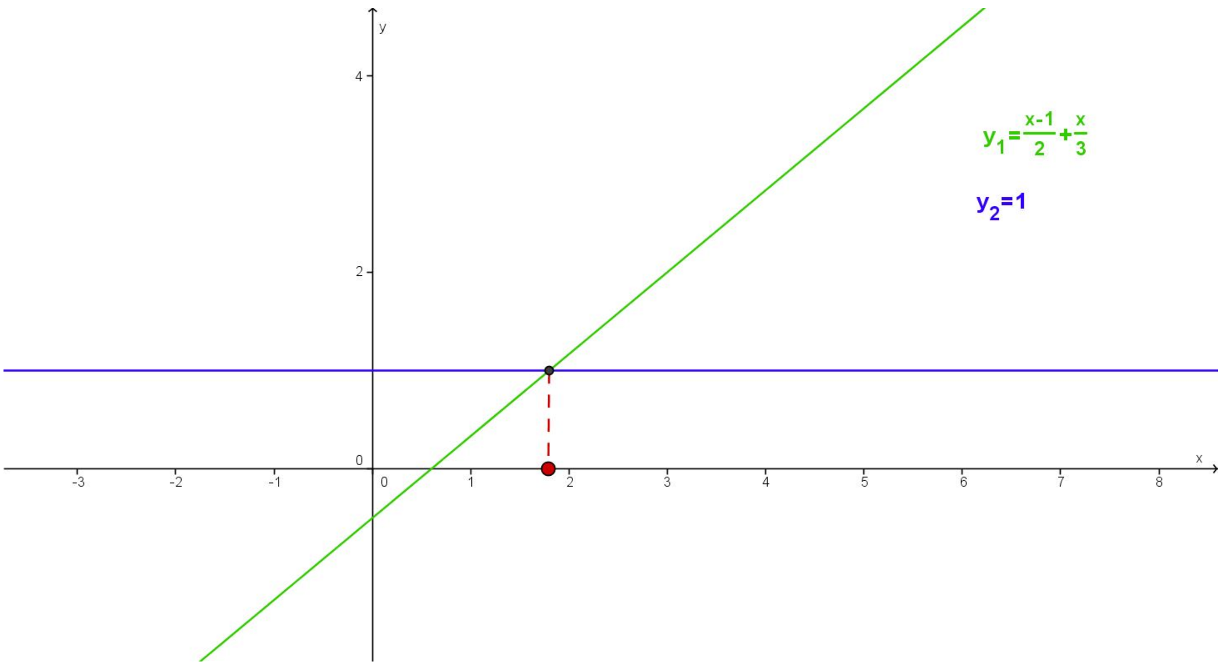
$K = \emptyset$

Do grafického řešení, které je na obrázku 40, znázorníme zvlášť pravou a levou stranu upravené lineární rovnice. Jelikož uvažujeme pouze obor $\mathcal{Z}_0^+$, daná rovnice nemá řešení.



Obrázek 40: Grafické řešení rovnice $5x - 3 = 6$

Na obrázku 41 je grafické řešení dané rovnice v původně zadaném tvaru.



Obrázek 41: Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = 1$

b) $(x-2) \cdot \dfrac{3+2x}{2} = x(x-2)$

$(x-2) \cdot \dfrac{3+2x}{2} = x(x-2)$

$3x + 2x^2 - 6 - 4x = 2x^2 - 4x$

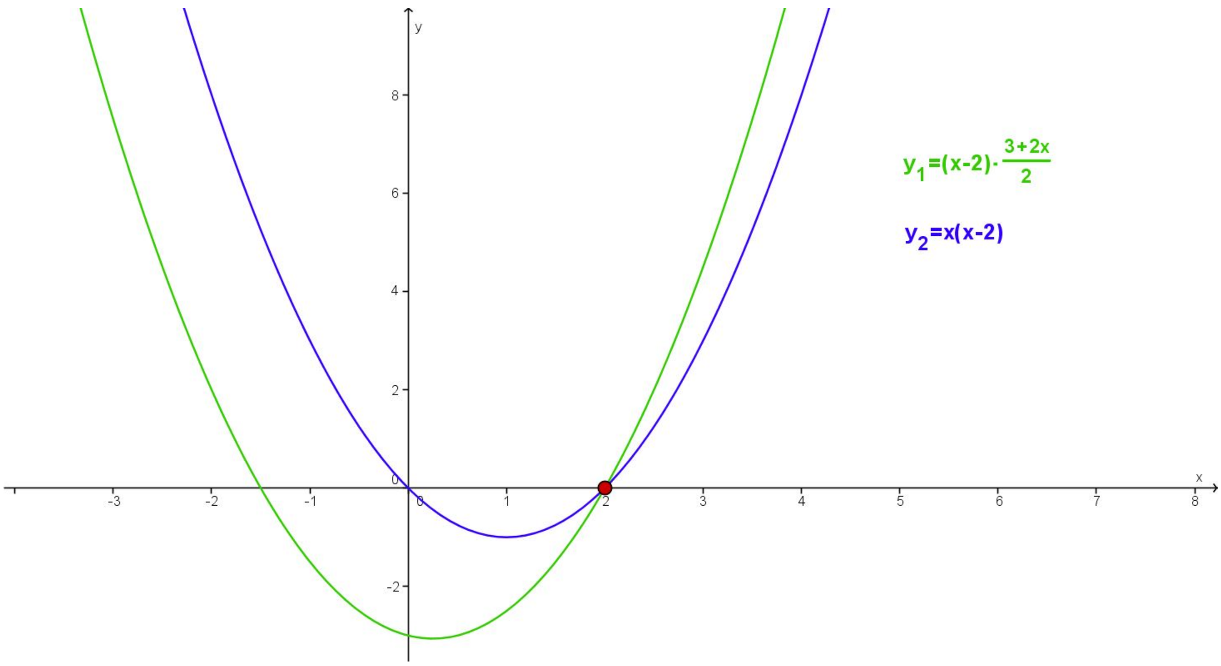
$-x - 6 = -4x$

$3x = 6$

$x = 2$

$K = \{2\}$

Na pravé i levé straně rovnice jsou polynomy druhého stupně, které jsou zobrazené na obrázku 42. Početními úpravami však dostaneme na obou stranách funkce lineární.



Obrázek 42: Grafické řešení rovnice $(x-2)\cdot\dfrac{3+2x}{2}=x(x-2)$

c) $(x-3)^2 - x(x-1) = x + 15$

$x^2 - 6x + 9 - x^2 + x = x + 15$

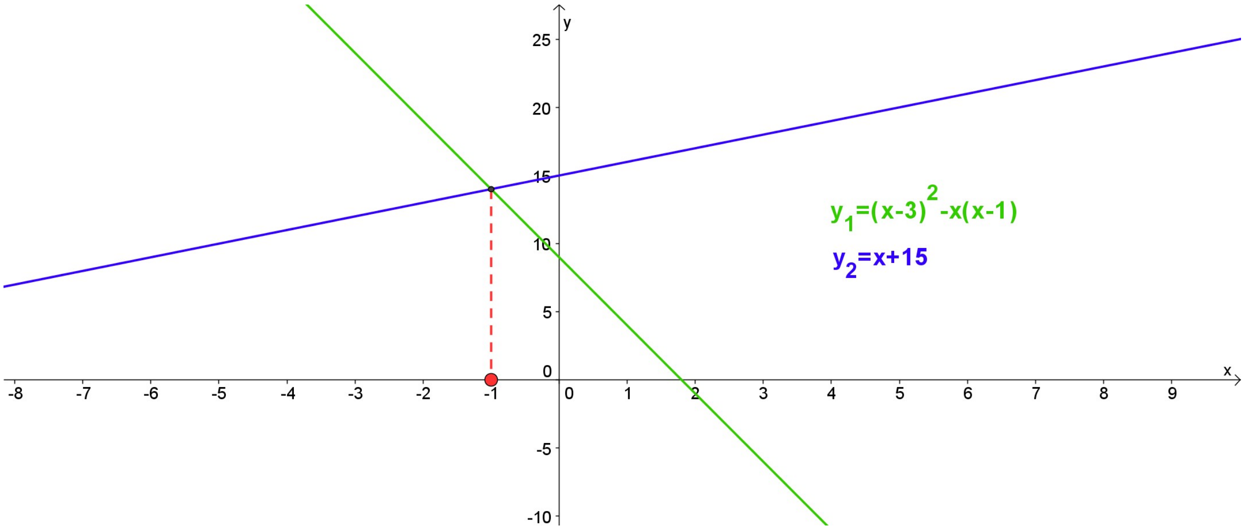
$-5x + 9 = x + 15$

$-6x = 6$

$x = -1 \rightarrow x \notin \mathcal{Z}_0^+$

$K = \emptyset$

Na obrázku 43 je zobrazená pravá a levá strana zadané rovnice. Vidíme, že tato rovnice má kořen $x = -1$. Avšak podle zadání uvažujeme pouze obor $\mathcal{Z}_0^+$, a proto tato rovnice nemá žádné řešení.



Obrázek 43: Grafické řešení rovnice $(x-3)^2 - x(x-1) = x + 15$

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $p \in \mathcal{R}$:

a) $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{1-p}{2p}$, řešte také pro $p = 2$

$$\frac{x-2}{x} = \frac{1-p}{2p} \quad / \cdot 2px \qquad x \neq 0 \wedge p \neq 0$$

$$2p(x-2) = x(1-p)$$

$$2px - 4p = x - px$$

$$3px - x = 4p$$

$$x(3p-1) = 4p \qquad (*)$$

Nyní uvažujeme dvě možnosti:

$3p - 1 = 0 \vee 3p - 1 \neq 0$:

Pro $3p - 1 = 0 \rightarrow p = \dfrac{1}{3}$

$\rightarrow$ pro hodnotu parametru $p = \dfrac{1}{3}$ dostaneme po dosazení do zadání rovnici $\dfrac{x-2}{x} = 1$, (hodnotu p=$\dfrac{1}{3}$ můžeme také dosadit do upraveného tvaru (*), pak řešíme rovnici $0x = \dfrac{4}{3}$). Tato rovnice nemá řešení, což můžeme vidět i z obrázku 44.

Pokud bychom do rovnice dosadili hodnotu parametru $p = 0$, dostaneme rovnici $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{1}{0}$, která nemá smysl.

Pro $3p - 1 \neq 0 \rightarrow x = \dfrac{4p}{3p-1}$

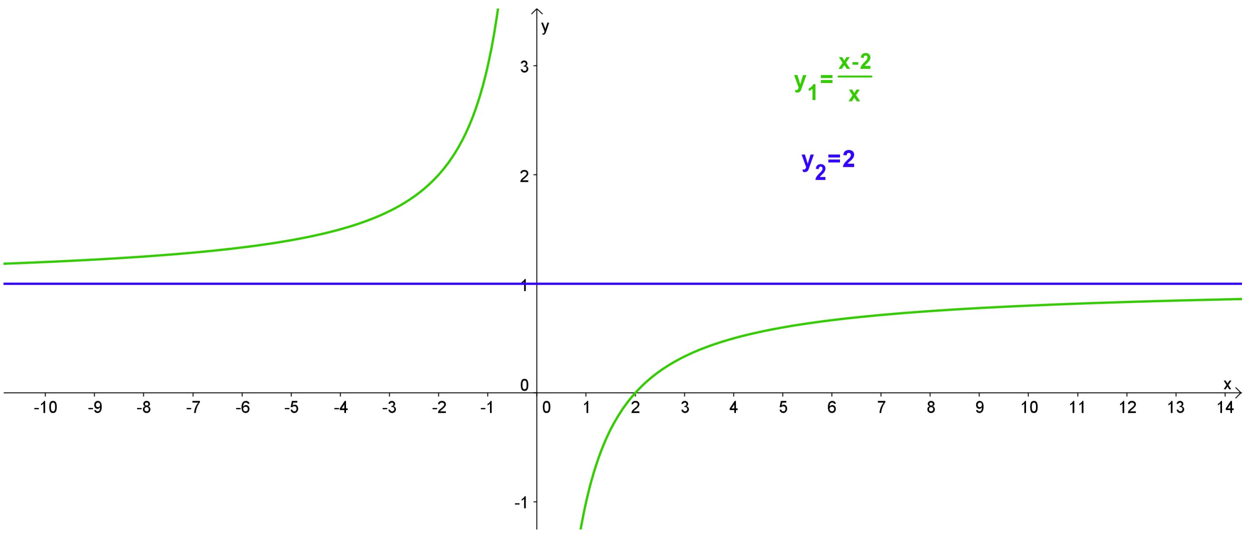
$\rightarrow$ pokud dosadíme do zadání (popřípadě do upraveného tvaru rovnice) libovolnou hodnotu parametru různou od $p = \dfrac{1}{3} \wedge p = 0$, rovnice bude mít řešení tvaru $x = \dfrac{4p}{3p-1}$.

Pro přehlednost zaneseme výsledné hodnoty do následující tabulky.

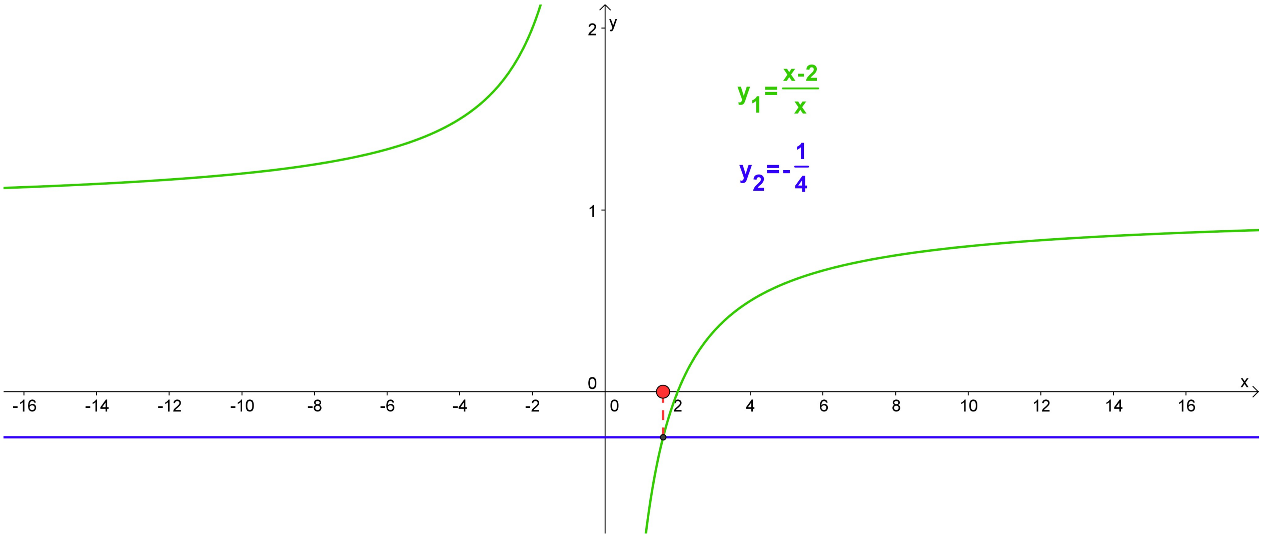
Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 0$	nemá smysl
$p = \frac{1}{3}$	$\emptyset$
$p \neq 0 \wedge p \neq \frac{1}{3}$	$\{\frac{4p}{3p-1}\}$

Pro hodnotu parametru $p = 2$ dostaneme po dosazení do zadání rovnici $\dfrac{x-2}{x} = -\dfrac{1}{4}$. Jejím řešením je $x = \dfrac{8}{5}$. Stejné řešení můžeme vidět přímo z předešlé tabulky (3. řádek). Po dosazení hodnoty parametru $p = 2$ do výrazu $x = \dfrac{4p}{3p-1}$ získáme stejný výsledek, tedy $x = \dfrac{8}{5}$.

Grafické znázornění je na obrázku 45.



Obrázek 44: Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-2}{x} = 1$



Obrázek 45: Grafické řešení rovnice $\dfrac{x-2}{x} = -\dfrac{1}{4}$

b) $3px + p(x-2) = 2p - 1 + x$, řešte také pro $p = 1$

$3px + px - 2p = 2p - 1 + x$

$4px - x = 4p - 1$

$x(4p-1) = 4p - 1 \qquad (*)$

Nyní uvažujeme dvě možnosti:

$\rightarrow 4p - 1 = 0 \vee 4p - 1 \neq 0$:

Pro $4p - 1 = 0 \rightarrow p = \dfrac{1}{4}$

$\rightarrow$ po dosazení hodnoty parametru $p = \dfrac{1}{4}$ do zadání dostaneme rovnici $x - \dfrac{1}{2} = x - \dfrac{1}{2}$, ($p = \dfrac{1}{4}$ lze dosadit přímo do upraveného tvaru (*), dostaneme pak rovnici 0x=0), z čehož je zřejmé, že v tomto případě má rovnice nekonečně mnoho řešení. To můžeme vidět i z obrázku 46.

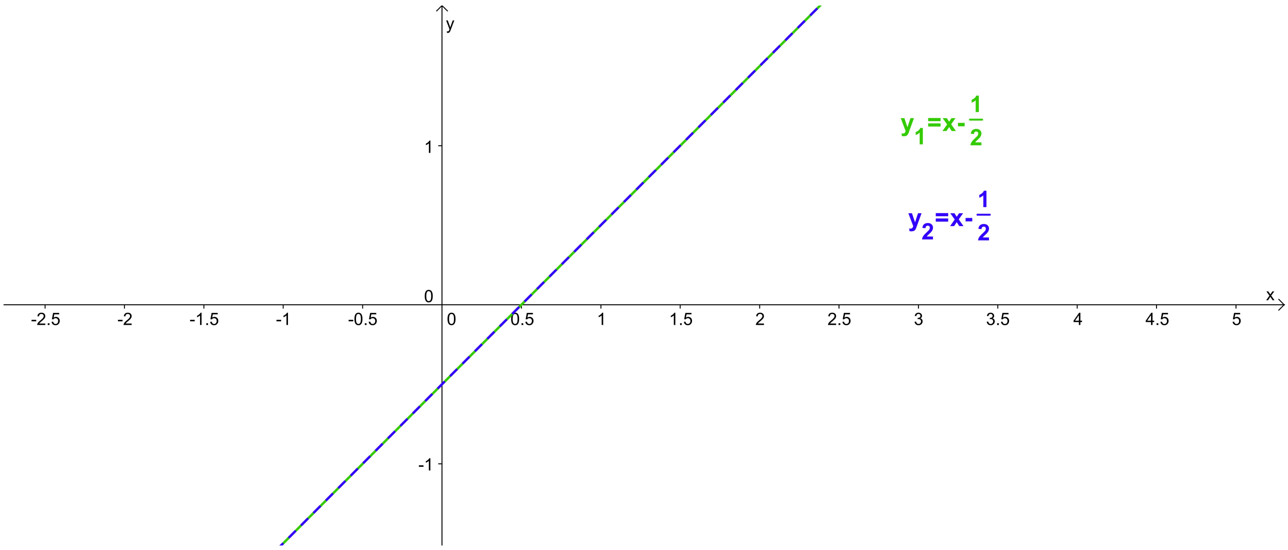
Pro $4p - 1 \neq 0 \rightarrow x = \dfrac{4p-1}{4p-1} = 1$

$\rightarrow$ pro libovolnou hodnotu parametru různou od $p = \dfrac{1}{4}$ má daná rovnice řešení vždy $x = 1$.

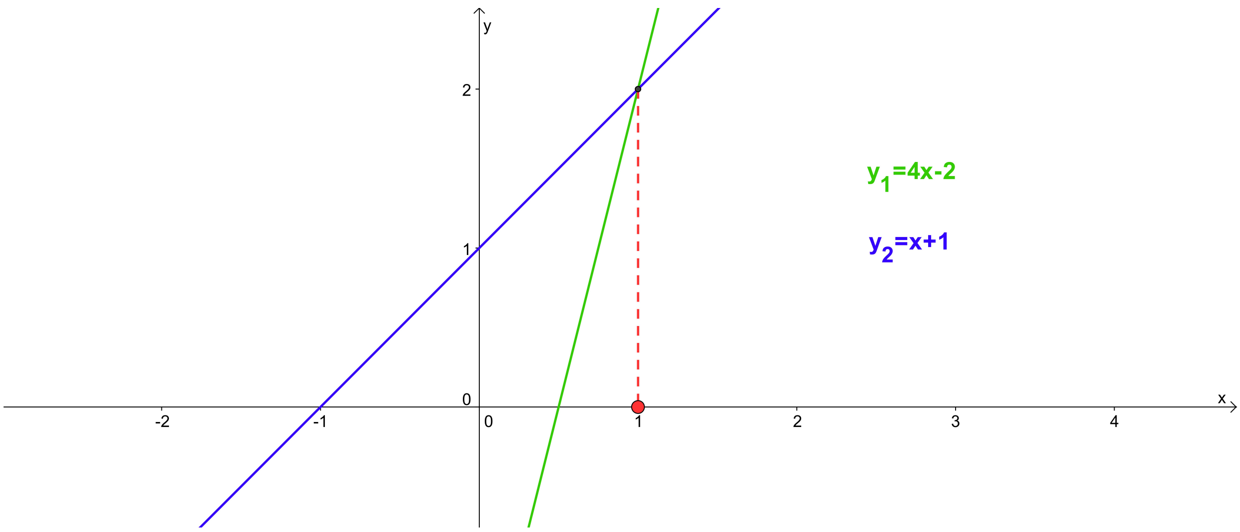
Pro přehlednost zaneseme výsledné hodnoty do následující tabulky.

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = \frac{1}{4}$	R
$p \neq \frac{1}{4}$	$\{1\}$

Pro hodnotu parametru $p = 1$ dostaneme po dosazení rovnici ve tvaru $4x - 2 = x + 1$, jejím řešením je $x = 1$. Tuto hodnotu lze získat přímo z 2. řádku předešlé tabulky. Grafické řešení této rovnice vidíme znázorněné na obrázku 47.



Obrázek 46: Grafické řešení rovnice $x - \dfrac{1}{2} = x - \dfrac{1}{2}$



Obrázek 47: Grafické řešení rovnice $4x - 2 = x + 1$

c) $\dfrac{p-2}{x} + 1 = p$, řešte také pro $p = 0$ a $p = 3$

$\dfrac{p-2}{x} + 1 = p \quad / \cdot x \qquad x \neq 0$

$p - 2 + x = px$

$x - px = 2 - p$

$x(1-p) = 2 - p \rightarrow 1 - p = 0 \vee 1 - p \neq 0$:

Pro $1 - p = 0 \rightarrow p = 1$

$\rightarrow$ po dosazení hodnoty parametru $p = 1$ do zadané rovnice získáme rovnici tvaru $-\dfrac{1}{x} + 1 = 1$, která nemá řešení. To můžeme vidět i z obrázku 48.

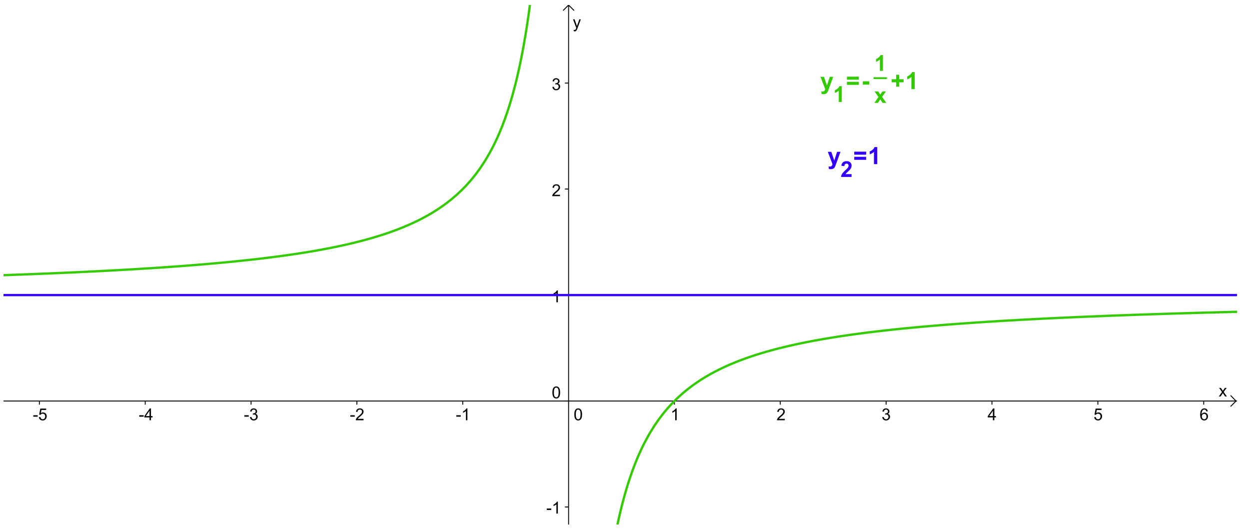
Pro $1 - p \neq 0 \rightarrow x = \dfrac{2-p}{1-p}$

$\rightarrow$ po dosazení libolné hodnoty parametru různé od $p = 1$ bude mít rovnice vždy řešení tvaru $x = \dfrac{2-p}{1-p}$.

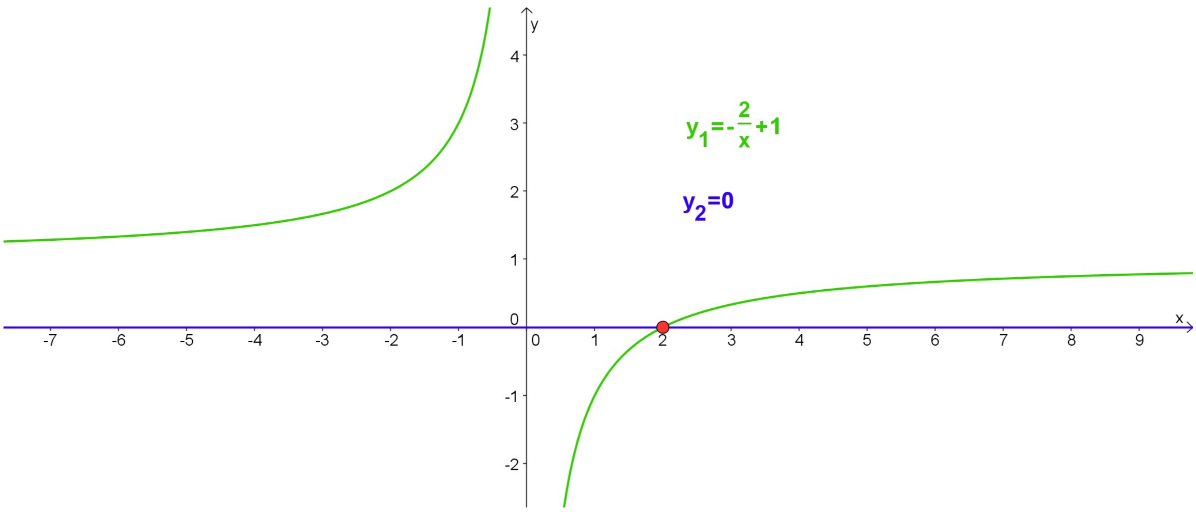
Pro přehlednost zaneseme výsledné hodnoty do následující tabulky.

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 1$	$\emptyset$
$p \neq 1$	$\{\frac{2-p}{1-p}\}$

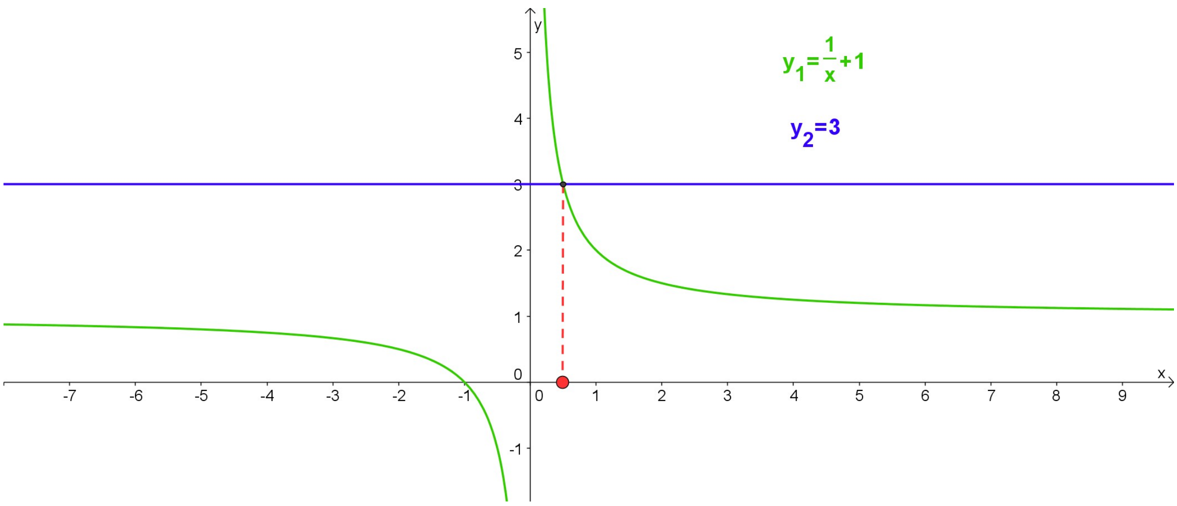
Na obrázku 49 a 50 jsou znázorněné grafy pro konkrétní hodnoty parametru. Obrázek 49 znázorňuje grafické řešení rovnice $-\frac{2}{x}+1=0$, kterou jsme získali dosazením parametru $p=0$ do zadané rovnice. Z tabulky (2. řádek) i zgrafického řešení vidíme, že v tomto případě má rovnice řešení $x=2$. Obrázek 50 znázorňuje grafické řešení rovnice $\frac{1}{x}+1=3$, kterou jsme získali dosazením parametru $p=3$ do zadané rovnice. Řešením této rovnice je $x=\frac{1}{2}$.



Obrázek 48: Grafické řešení rovnice $-\frac{1}{x}+1=1$



Obrázek 49: Grafické řešení rovnice $-\frac{2}{x}+1=0$



Obrázek 50: Grafické řešení rovnice $\dfrac{1}{x}+1=3$

4) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

a) $|x-2| = 3$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

$\rightarrow I_1 = (-\infty, 2), I_2 = \langle 2, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, 2)$	$I_2 = \langle 2, \infty)$
$\lvert x-2 \rvert$	$-x+2$	$x-2$

Pro I_1:

$-x+2=3$

$-x=1$

$x=-1 \rightarrow x \in I_1 \rightarrow K_1 = \{-1\}$

Pro I_2:

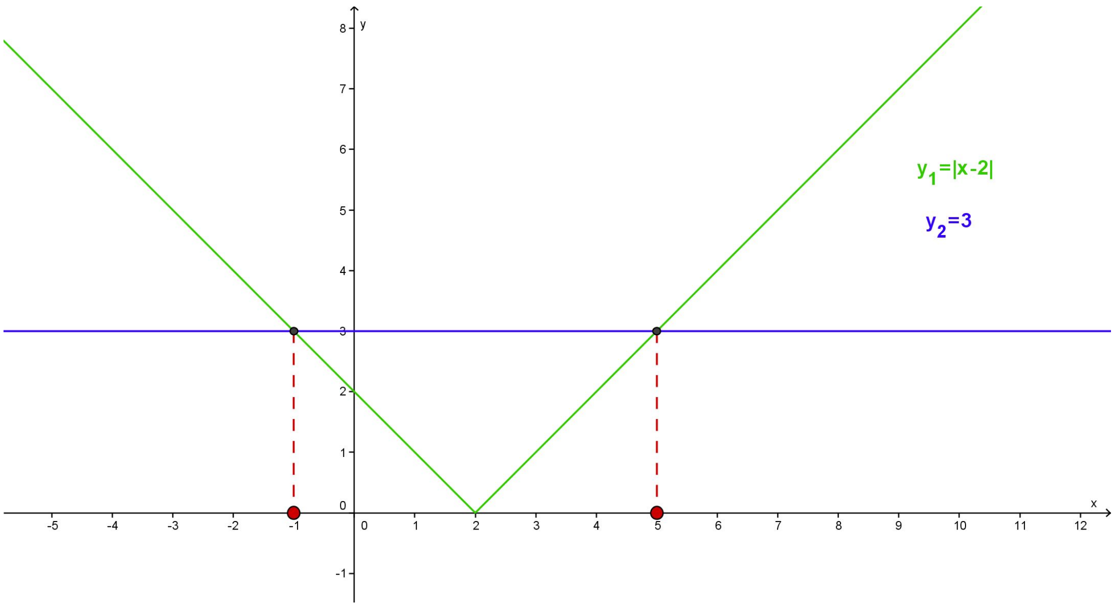
$x-2=3$

$x=5 \rightarrow x \in I_2 \rightarrow K_2 = \{5\}$

$K = K_1 \cup K_2 = \{-1; 5\}$

Grafické řešení zadané rovnice je znázorněné na obrázku 51. Zelenou barvou je znázorněná funkce $y_1 = |x-2|$ reprezentující levou stranu rovnice a modře je znázorněna funkce $y_2 = 3$

reprezentující pravou stranu rovnice. Vidíme, že se funkce protínají ve dvou bodech, proto má daná rovnice právě dvě řešení.



Obrázek 51: Grafické řešení rovnice $|x-2|=3$

b) $|x+3|+|x-2|=1+x$

$x+3=0 \rightarrow x_1=-3$

$x-2=0 \rightarrow x_2=2$

$\rightarrow I_1=(-\infty,-3), I_2=\langle -3,2), I_3=\langle 2,\infty)$

	$I_1=(-\infty,-3)$	$I_2=\langle -3,2)$	$I_3=\langle 2,\infty)$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$

Pro I_1:

$-x-3+(-x+2)=1+x$

$-x-3-x+2=1+x$

$-2x-1=1+x$

$-3x=2$

$x=-\dfrac{2}{3} \rightarrow$ rovnice nemá řešení pro žádné $x \rightarrow K_1=\emptyset$

Pro I_2:

$x + 3 + (-x + 2) = 1 + x$

$x + 3 - x + 2 = 1 + x$

$5 = 1 + x$

$x = 4 \rightarrow$ rovnice nemá řešení pro žádné $x \rightarrow K_2 = \emptyset$

Pro I_3:

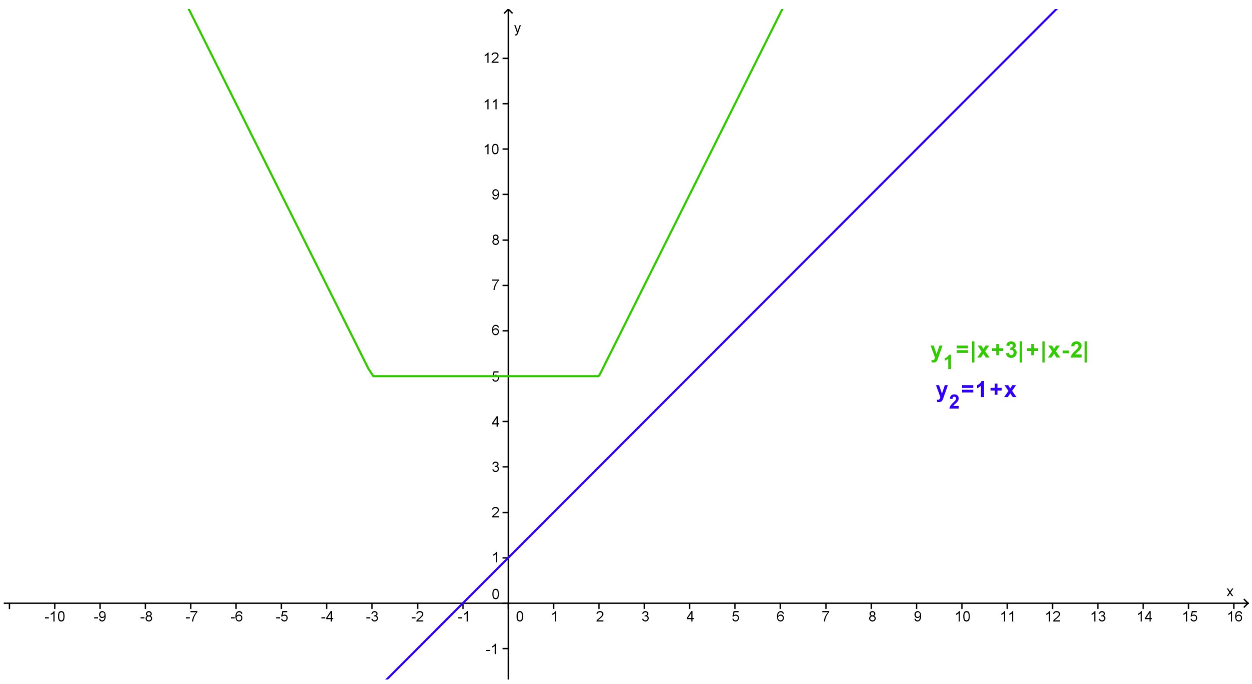
$x + 3 + x - 2 = 1 + x$

$2x + 1 = 1 + x$

$x = 0 \rightarrow$ rovnice nemá řešení pro ždáné $x \rightarrow K_3 = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \emptyset$

Do obrázku 52 jsou zakreslené grafy obou funkcí představujících levou a pravou stranu rovnice. Vzhledem k tomu, že se grafy neprotínají ani v jednom bodě, tato rovnice nemá žádné řešení.



Obrázek 52: Grafické řešení rovnice $|x + 3| + |x - 2| = 1 + x$

c) $|x+5| = |x| - 2$

$x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = -5$

$x = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$\rightarrow I_1 = (-\infty, -5), I_2 = \langle -5, 0), I_3 = \langle 0, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -5)$	$I_2 = \langle -5, 0)$	$I_3 = \langle 0, \infty)$
$\lvert x+5 \rvert$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$	x

Pro I_1:

$-x - 5 = -x - 2$

$0x = 3 \rightarrow$ rovnice nemá řešení pro ždáné $x \rightarrow K_1 = \emptyset$

Pro I_2:

$x + 5 = -x - 2$

$2x = -7$

$x = -\dfrac{7}{2} \rightarrow x \in I_2 \rightarrow K_2 = \{-\dfrac{7}{2}\}$

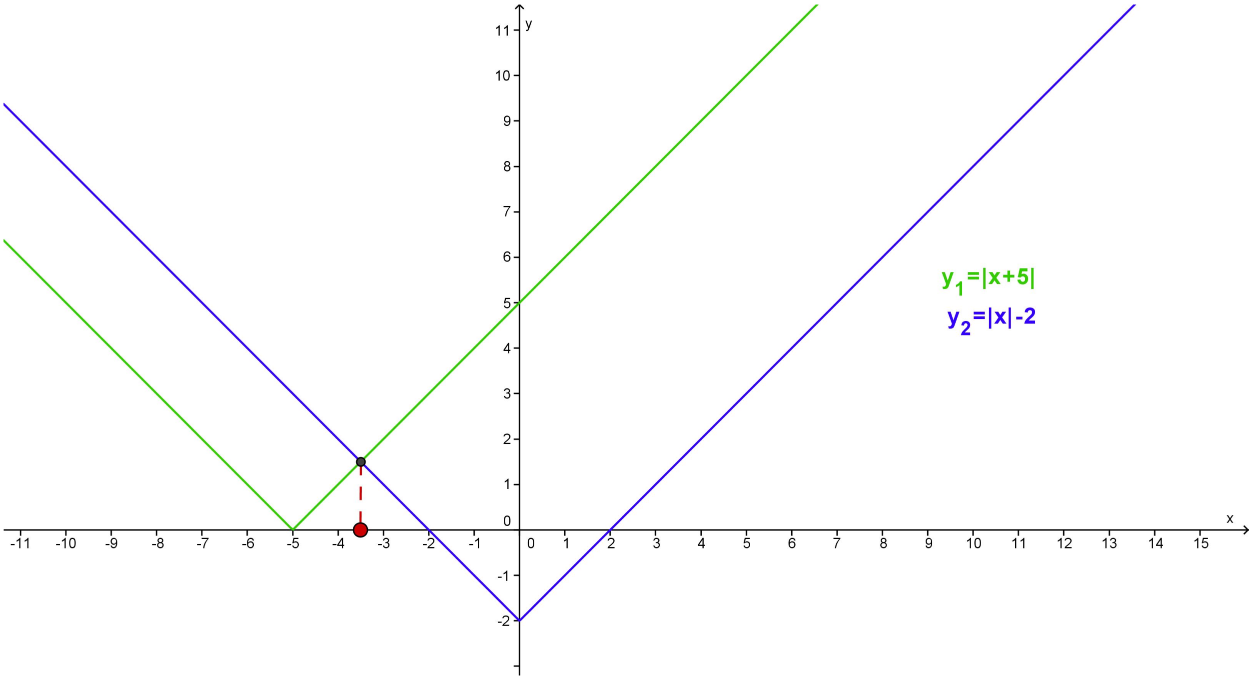
Pro I_3:

$x + 5 = x - 2$

$0x = -7 \rightarrow$ rovnice nemá řešení pro ždáné $x \rightarrow K_3 = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{-\dfrac{7}{2}\}$

Grafické řešení zadané rovnice je zobrazené na obrázku 53. Graf funkce $y_1 = |x + 5|$ reprezentuje levou stranu rovnice, graf funkce $y_2 = |x| - 2$ představuje pravou stranu rovnice. Jak je vidět z obrázku, grafy funkcí se protínají v jednom bodě, proto má daná rovnice právě jedno řešení.



Obrázek 53: Grafické řešení rovnice $|x+5| = |x| - 2$

5) Nalezněte všechny hodnoty parametru $p \in \mathcal{R}$, pro které má rovnice $\dfrac{1-p}{p} = \dfrac{3}{x-2}$ kladné reálné řešení:

$$\frac{1-p}{p} = \frac{3}{x-2} \; / \cdot p(x-2) \qquad p \neq 0$$

$$(1-p)(x-2) = 3p$$

$$x - 2 - px + 2p = 3p$$

$$x - px = p + 2$$

$$x(1-p) = p + 2 \qquad (*)$$

Nyní budeme uvažovat dvě možnosti:

Pro $1 - p = 0 \rightarrow p = 1$

Po dosazení $p = 1$ do upravené rovnice (*) získáme rovnici tvaru $0x = 3$. Tato rovnice nemá řešení.

Pro $1 - p \neq 0 \rightarrow p \neq 1$

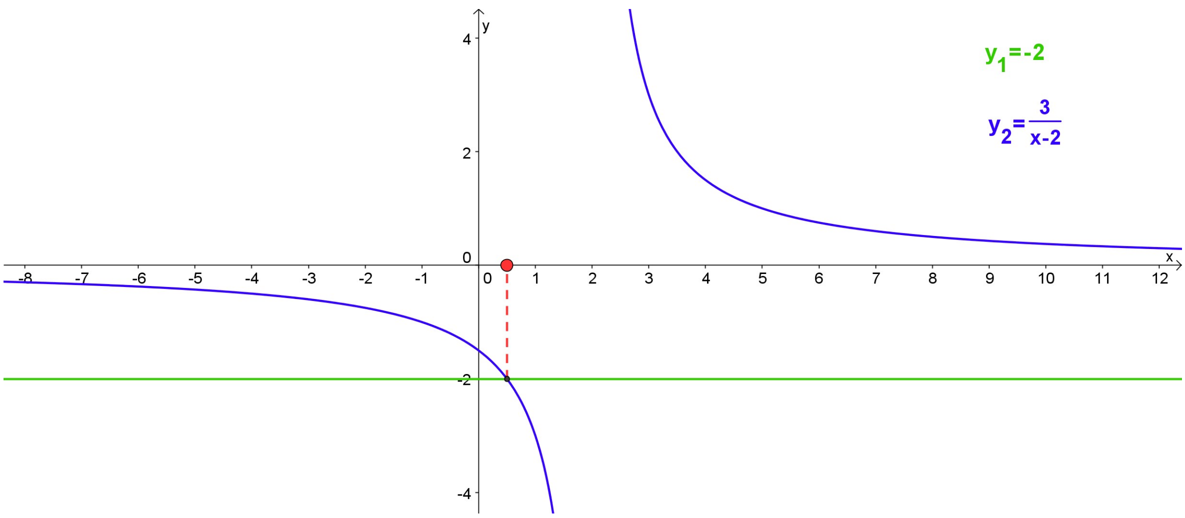
Po dosazení libovolné hodnoty parametru p (kromě $p = 1$), získáme řešení ve tvaru $x = \dfrac{p+2}{1-p}$.

Pro $p \neq 1 \wedge x > 0 \leftrightarrow \dfrac{p+2}{1-p} > 0 \leftrightarrow [(p+2>0 \wedge 1-p>0) \vee (p+2<0 \wedge 1-p<0)] \leftrightarrow$
$$[(p > -2 \wedge p < 1) \vee (p < -2 \wedge p > 1)] \to p \in (-2,0) \cup (0,1)$$

$p \in (-2,0) \cup (0,1)$

Hodnota parametru $p \neq 0$, což je dané zadáním.

Dosadíme-li například hodnotu parametru $p = -1$ do zadané rovnice, dostáváme rovnici tvaru $-2 = \dfrac{3}{x-2}$. Jejím řešením je $x = \dfrac{1}{2}$, tedy kladné reálné číslo (stejné řešení by nám vyšlo, pokud bychom hodnotu parametru dosadili do některého upraveného tvaru zadané rovnice). Grafické řešení rovnice pro $p = -1$ máme znázorněné na obrázku 54.



Obrázek 54: Grafické řešení rovnice $-2 = \dfrac{3}{x-2}$

10.2 Příloha B

10.2.1 Zadání - Kvadratické rovnice

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

b) $3x^2 + 9x - 3 = x - 7$

c) $\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{1}{x} = -2 - x$

2) Řešte rovnici v oboru $\mathcal{R}$ s parametrem $p \in \mathcal{R}$:

$(3-p)x^2 - (1-p)x + 3(1-p) = 0$

3) Určete, pro které hodnoty reálného parametru p bude mít kvadratická rovnice $(p+2)x^2 - 4px + (4p-1)$ imaginární kořeny:

4) Řešte v $\mathcal{R}$ rovnice:

a) $x^2 + |x-1| + 5 = 0$

b) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

5) Řeště rovnice s neznámou $x \in \mathcal{Z}_0^+$:

a) $x^2 + 2x - 8 = |x-2|$

b) $-x^2 + 8x - 12 = 0$

c) $x^2 - x - 6 = |x-3| - 5$

10.2.2 Řešení - Kvadratické rovnice

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$:

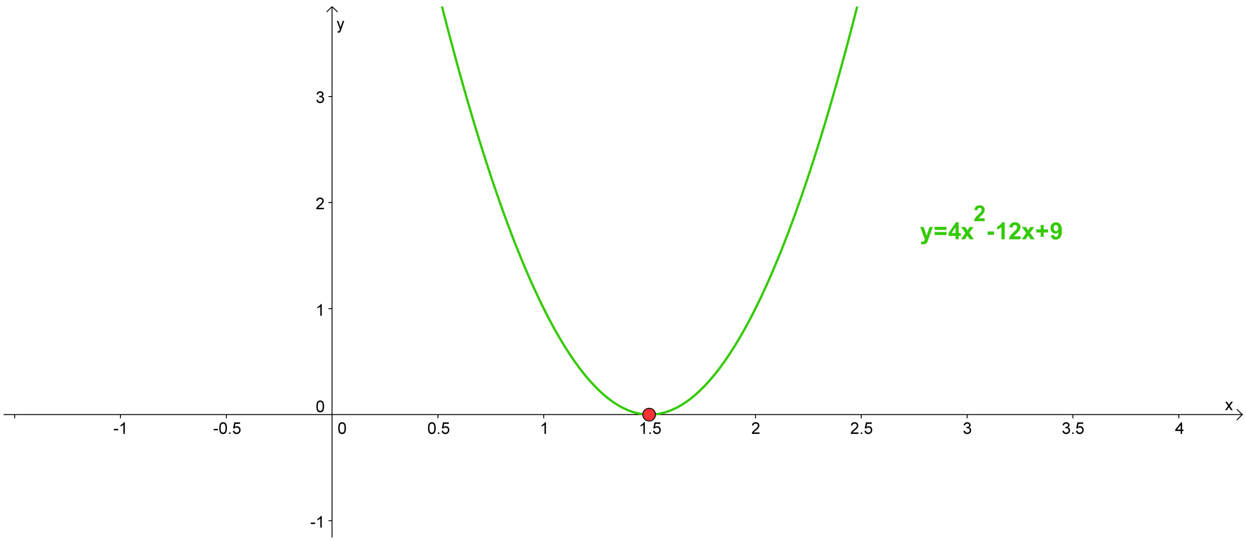
a) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$(2x-3)^2 = 0$

$2x - 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3}{2}$

$K = \{\dfrac{3}{2}\} \longrightarrow$ rovnice má dvojnásobný kořen

Grafické řešení zadané rovnice je znázorněné na obrázku 55.



Obrázek 55: Grafické řešení rovnice $4x^2 - 12x + 9 = 0$

b) $3x^2 + 9x - 3 = x - 7$

$3x^2 + 8x + 4 = 0$

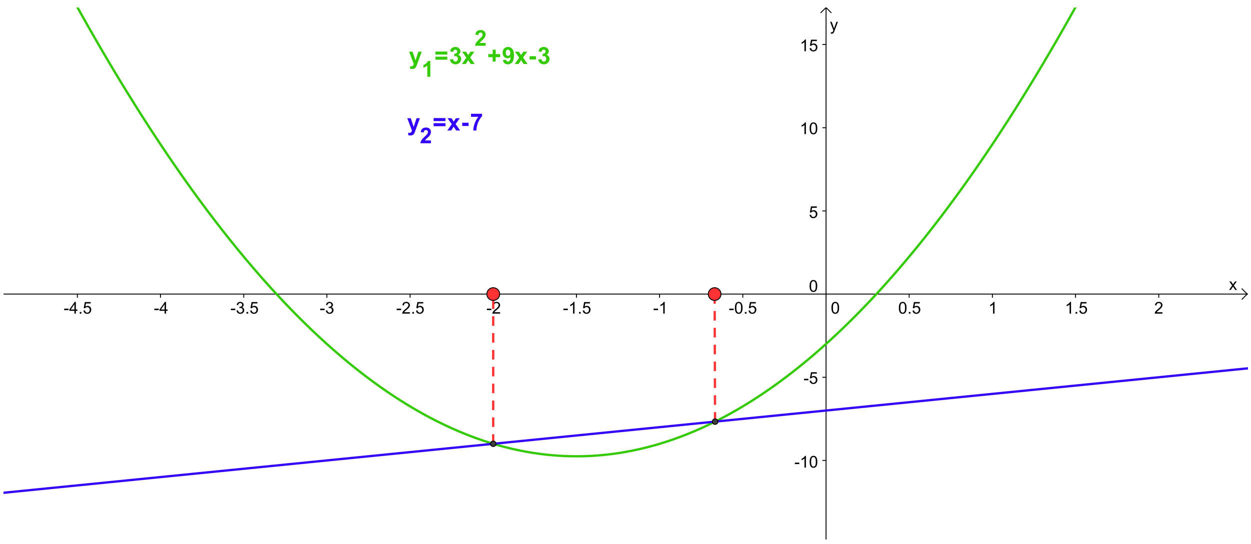
$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16 \rightarrow 2$ různé kořeny

$x_{1,2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{16}}{6} = \dfrac{-8 \pm 4}{6} \rightarrow x_1 = -\dfrac{2}{3};\ x_2 = -2$

$K = \{-\dfrac{2}{3}, -2\}$

Na obrázku 56 je znázorněné grafické řešení zadané rovnice. Zelenou barvou je zakreslena kvadratická funkce, která tvoří levou stranu zadané rovnice. Modrou barvou je znázorněna lineární funkce, která představuje pravou stranu rovnice.

Červeně vyznačené body reprezentují řešení této rovnice.



Obrázek 56: Grafické řešení rovnice $3x^2 + 9x - 3 = x - 7$

c) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{x}=-2-x$

$\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{x}=-2-x\ /\cdot 3x$

$x(x+1)+3=-6x-3x^2$

$x^2+x+3=-6x-3x^2$

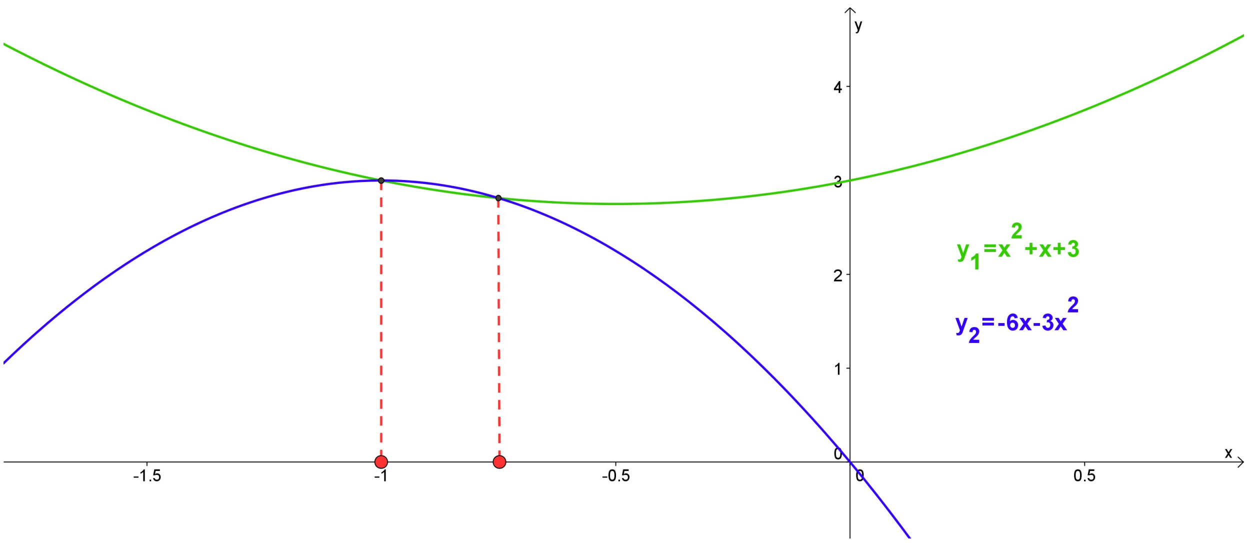
$4x^2+7x+3=0$

$D=7^2-4\cdot 4\cdot 3=1\rightarrow 2$ různé kořeny

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{1}}{8}=\dfrac{-7\pm 1}{8}\rightarrow x_1=-\dfrac{3}{4};\ x_2=-1$

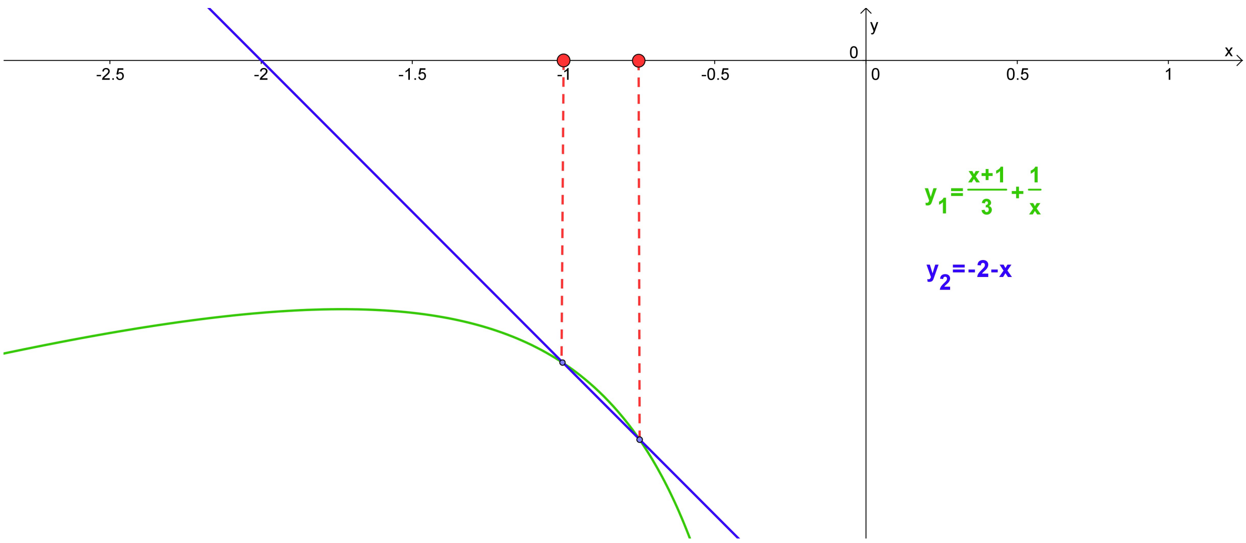
$K=\{-\dfrac{3}{4},-1\}$

Na obrázku 57 je znázorněné grafické řešení upravené kvadratické rovnice, ze kterého jsou vidět dva reálné kořeny.



Obrázek 57: Grafické řešení rovnice $x^2+x+3=-6x-3x^2$

Na obrázku 58 je grafické řešení původně zadané rovnice. Zelená funkce reprezentuje levou stranu rovnice, modrá funkce reprezentuje pravou stranu rovnice. Řešení rovnice reprezentují červeně vyznačené body.



Obrázek 58: Grafické řešení rovnice $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{x}=-2-x$

2) Řešte rovnici v oboru $\mathcal{R}$ s parametrem $p \in \mathcal{R}$:

$(3-p)x^2-(1-p)x+3(1-p)=0$

Pro $3-p=0 \to p=3 \longrightarrow$ dosazením $p=3$ do zadání získáváme lineární rovnici

$-(1-3)x+3(1-3)=0$

$2x-6=0$

$x=3$

Pro $3-p \neq 0 \to p \neq 3 \longrightarrow$ dosazením libovolné hodnoty (kromě $p=3$) do zadání získáváme kvadratickou rovnici

$D=(1-p)^2-4(3-p)(1-p)=1-2p+p^2-(12-4p)(1-p)=$

$=1-2p+p^2-12+12p+4p-4p^2=-3p^2+14p-11$

I) $D=0 \to$ dvojnásobný kořen $x_1=x_2$:

$-3p^2+14p-11=0\ / \cdot(-1)$

$3p^2-14p+11=0 \to p=1 \vee p=\dfrac{11}{3}$

$x_1=x_2=\dfrac{(1-p)\pm 0}{2(3-p)}=\dfrac{1-p}{6-2p}$

Pro $p=1$:

$$x_{1,2} = \frac{1-p}{6-2p} = \frac{1-1}{6-2\cdot 1} = \frac{0}{4} = 0$$

Pro $p = \dfrac{11}{3}$:

$$x_{1,2} = \frac{1-p}{6-2p} = \frac{1-\frac{11}{3}}{6-2\cdot\frac{11}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = 2$$

II) $D > 0 \rightarrow$ dva různé reálné kořeny $x_,; x_2$:

$-3p^2 + 14p - 11 > 0 \cdot (-1)$

$3p^2 - 14p + 11 < 0$

Levou stranu rozložíme na součin:

$(p-1)(3p-11) < 0$

$\longrightarrow p \in (1, \frac{11}{3}) \wedge p \neq 3 \longrightarrow p \in (1,3) \cup (3, \frac{11}{3})$

$$x_{1,2} = \frac{(1-p) \pm \sqrt{-3p^2+14p-11}}{2(3-p)} = \frac{(1-p) \pm \sqrt{-3p^2+14p-11}}{6-2p}$$

III) $D < 0 \rightarrow$ rovnice nemá žádný reálné kořen

$-3p^2 + 14p - 11 < 0 \cdot (-1)$

$3p^2 - 14p + 11 > 0 \rightarrow p \in (-\infty, 1) \cup (\frac{11}{3}, \infty)$

Pro přehlednost zaneseme výsledky do tabulky.

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 3$	$\{3\}$
$p = 1$	$\{0\}$
$p = \frac{11}{3}$	$\{2\}$
$p \in (1,3) \cup (3, \frac{11}{3})$	$\{\frac{(1-p)\pm\sqrt{-3p^2+14p-11)}}{6-2p}\}$
$p \in (-\infty, 1) \cup (\frac{11}{3}, \infty)$	$\emptyset$

3) Určete, pro které hodnoty reálného parametru p bude mít kvadratická rovnice

$(p+2)x^2 - 4px + (4p-1)$ imaginární kořeny:

$D = (4p)^2 - 4 \cdot (p+2)(4p-1) = 16p^2 - (4p+8)(4p-1) = 16p^2 - (16p^2 - 4p + 32p - 8) =$

$= 16p^2 - 16p^2 + 4p - 32p + 8 = -28p + 8$

Imaginární kořeny má kvadratická rovnice v případě, že její diskriminant je záporný. Řešení pak neexistuje v reálném oboru, ale v oboru komplexních čísel existují dvě imaginární řešení. Protože má zadaní rovnice reálné koeficienty, budou tato dvě imaginární řešení komplexně sdružená čísla.

$D < 0 \rightarrow -28p + 8 < 0 \rightarrow p > \frac{2}{7}$

$p \in (\frac{2}{7}, \infty)$

Zadadná kvadratická rovnice má imaginární kořeny pro parametr p z otevřeného intervalu $(\frac{2}{7}, \infty)$.

4) Řešte v $\mathcal{R}$ rovnice:

a) $x^2 + |x-1| + 5 = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$\rightarrow I_1 = (-\infty, 1); \quad I_2 = \langle 1, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, 1)$	$I_2 = \langle 1, \infty)$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$x-1$

Pro I_1:

$x^2 + (-x+1) + 5 = 0$

$x^2 - x + 1 + 5 = 0$

$x^2 - x + 6 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23 \rightarrow$ rovnice nemá v oboru $\mathcal{R}$ řešení

Pro I_2:

$x^2 + x - 1 + 5 = 0$

$x^2 + x + 4 = 0$

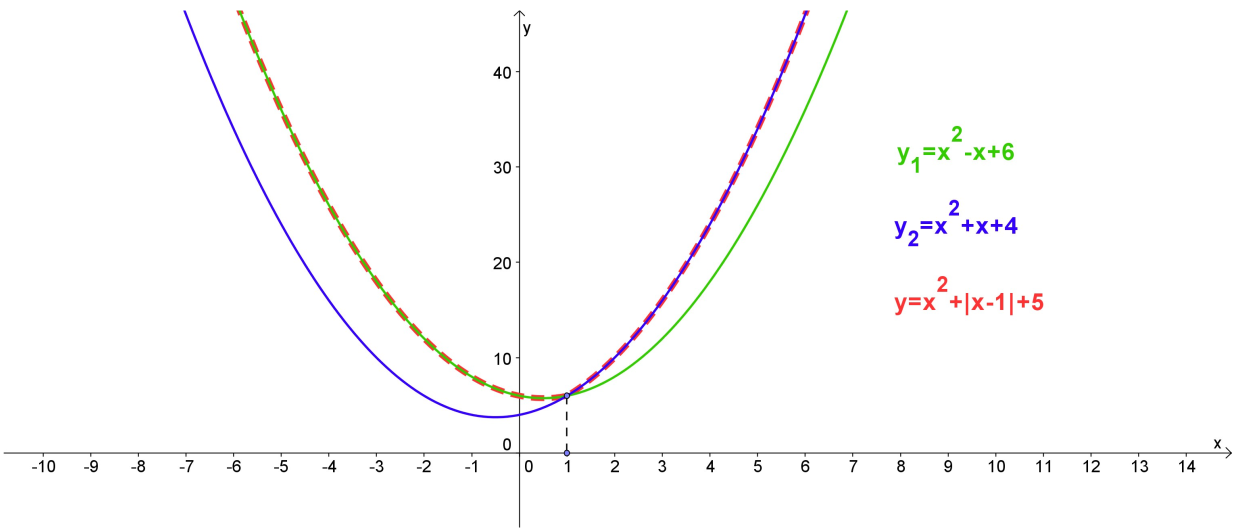
$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 \rightarrow$ rovnice nemá v oboru $\mathcal{R}$ řešení

$K = \emptyset$

Na obrázku 59 je zelenou barvou znázorněna funkce $y_1 = x^2 - x + 6$, která představuje rovnici vzniklou v prvním intervalu I_1.

Modrou barvu je znázorněna funkce $y_2 = x^2 + x + 4$, která reprezentuje rovnici vzniklou v druhém intervalu I_2.

Červenou barvou je znázorněn graf zadané rovnice. Je patrné, že graf funkce neprotíná osu x v žádném bodě, neexistuje tedy žádný reálný kořen této rovnice. Z obrázku také můžeme vidět, že $x = 1$ je opravdu nulovým bodem rovnice.



Obrázek 59: Grafické řešení rovnice $x^2 + |x - 1| + 5 = 0$

Poznamenejme, že hned ze zadání je možné usoudit, že rovnice nemá žádné řešení v oboru $\mathcal{R}$. Na levé straně je totiž vždy kladná hodnota.

b) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$

$x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$

$I_1 = (-\infty, -2), \quad I_2 = \langle -2, 1), \quad I_3 = \langle 1, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = \langle -2, 1)$	$I_3 = \langle 1, \infty)$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$

Pro I_1:

$(-x+1)(-x-2) = 3$

$x^2 + 2x - x - 2 = 3$

$x^2 + x - 5 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 21 \rightarrow 2$ různé reálné kořeny

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2};\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x_1 \notin I_1; x_2 \in I_1 \longrightarrow K_1 = \{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\}$

Pro I_2:

$(-x+1)(x+2) = 3$

$-x^2 - 2x + x + 2 = 3$

$-x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 \rightarrow$ rovnice nemá reálné kořeny $\longrightarrow K_2 = \emptyset$

Pro I_3:

$(x-1)(x+2) = 3$

$x^2 + 2x - x - 2 = 3$

$x^2 + x - 5 = 0$

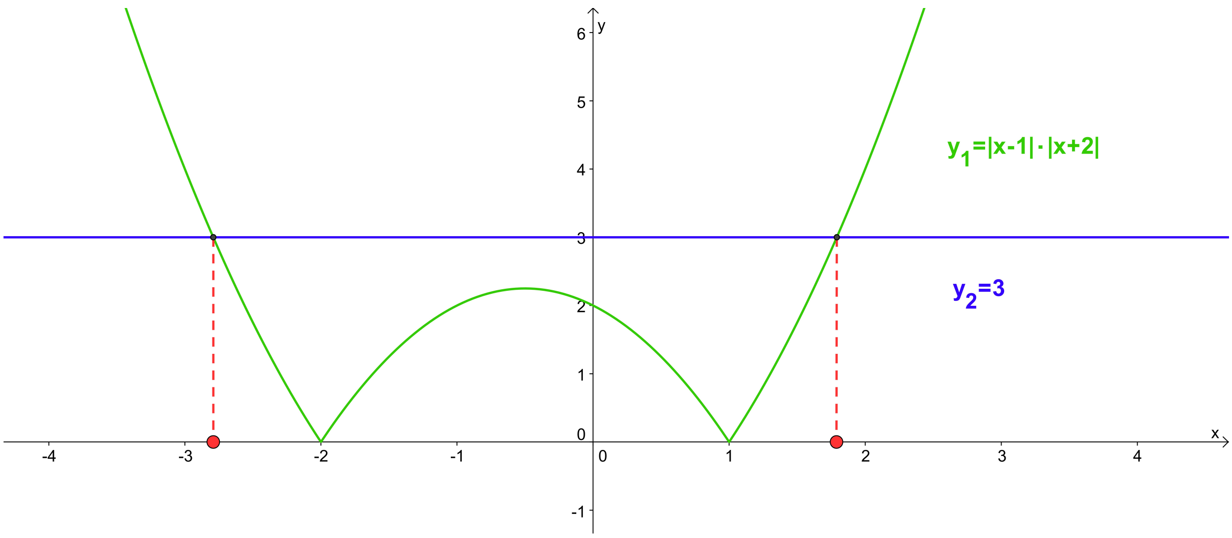
$D = 1 - \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 21 \rightarrow 2$ různé reálné kořeny

$x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \rightarrow x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2};\ x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x_3 \in I_3; x_4 \notin I_4 \longrightarrow K_3 = \{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\}$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\}$

Na obrázku 60 je grafické řešení zadané rovnice. Zeleně je znázorněná funkce reprezentující levou stranu zadané rovnice. Modře je zakreslena funkce představující pravou stranu rovnice. Červeně jsou vyznačeny body, které jsou řešením zadané rovnice.



Obrázek 60: Grafické řešení rovnice $|x-1| \cdot |x+2| = 3$

5) Řeště rovnice s neznámou $x \in \mathcal{Z}_0^+$:

a) $x^2 + 2x - 8 = |x-2|$

$x - 2 = 0 \to x = 2$

$\longrightarrow I_1 = (-\infty, 2); \quad I_2 = \langle 2, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, 2)$	$I_2 = \langle 2, \infty)$
$\lvert x-2 \rvert$	$2-x$	$x-2$

Pro I_1:

$x^2 + 2x - 8 = 2 - x$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \longrightarrow D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$\to x_1 = 2 \longrightarrow x \notin I_1$

$\to x_2 = -5 \longrightarrow x \in I_1$, ale $x \notin \mathcal{Z}_0^+ \longrightarrow K_1 = \emptyset$

Pro I_2:

$x^2 + 2x - 8 = x - 2$

$x^2 + x - 6 = 0 \longrightarrow D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$

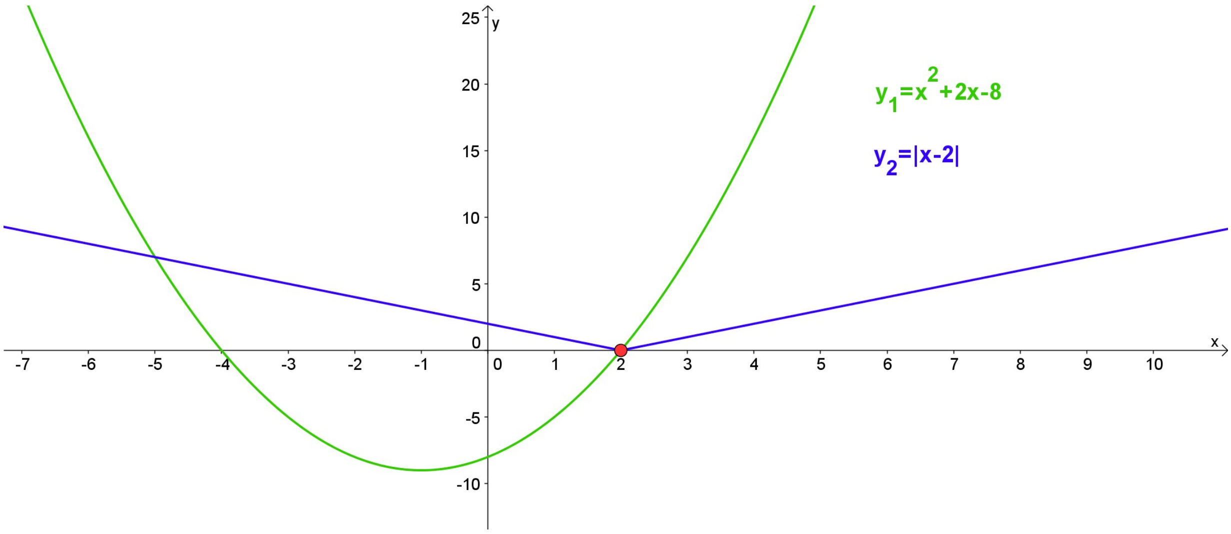
$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$\to x_3 = 2 \longrightarrow x \in I_2 \quad \wedge \quad x \in \mathcal{Z}_0^+ \longrightarrow K_2 = \{2\}$

$\to x_4 = -3 \longrightarrow x \notin I_2$

$K = K_1 \cup K_2 = \{2\}$

Grafické řešení je znázorněno na obrázku 61.



Obrázek 61: Grafické řešení rovnice $x^2 + 2x - 8 = |x - 2|$

b) $-x^2 + 8x - 12 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12) = 16 \longrightarrow$ rovnice má dvě různá reálná řešení

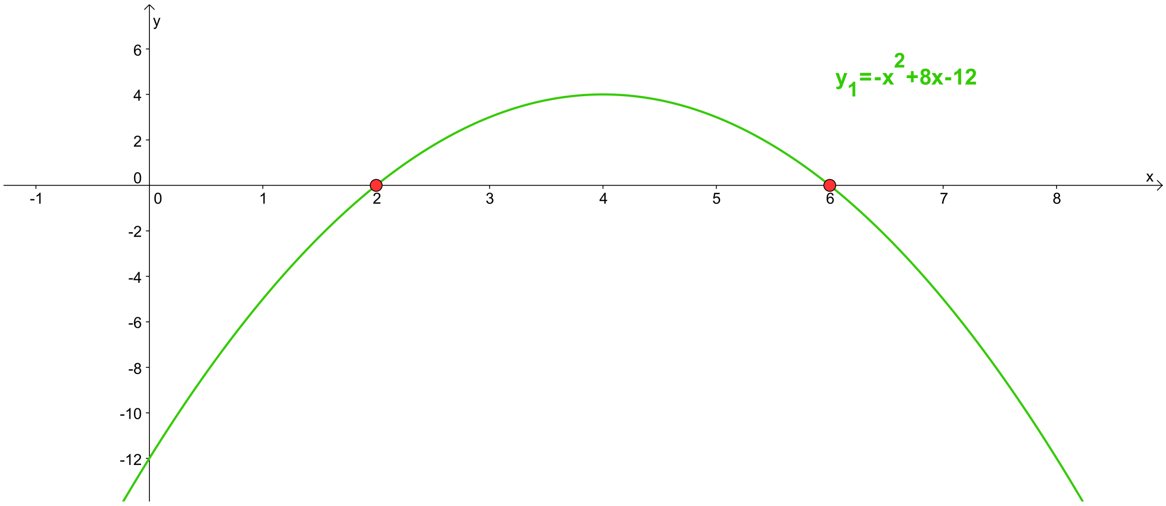
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

$\rightarrow x_1 = 2 \longrightarrow x \in \mathcal{Z}_0^+ \longrightarrow K_1 = \{2\}$

$\rightarrow x_2 = 6 \longrightarrow x \in \mathcal{Z}_0^+ \longrightarrow K_2 = \{6\}$

$K = K_1 \cup K_2 = \{2; 6\}$

Na obrázku 62 je grafické řešení zadané rovnice.



Obrázek 62: Grafické řešení rovnice $-x^2 + 8x - 12 = 0$

c) $x^2 - x - 6 = |x - 3| - 5$

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

	$I_1 = (-\infty, 3)$	$I_2 = \langle 3, \infty)$
$\lvert x - 3\rvert$	$3 - x$	$x - 3$

Pro I_1:

$x^2 - x - 6 = 3 - x - 5$

$x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$\rightarrow x_1 = 2 \longrightarrow x \in I_1 \quad \wedge \quad x \in \mathcal{Z}_0^+ \longrightarrow K_1 = \{2\}$

$\rightarrow x_2 = -2 \longrightarrow x \in I_1$, ale $x \notin \mathcal{Z}_0^+$

Pro I_2:

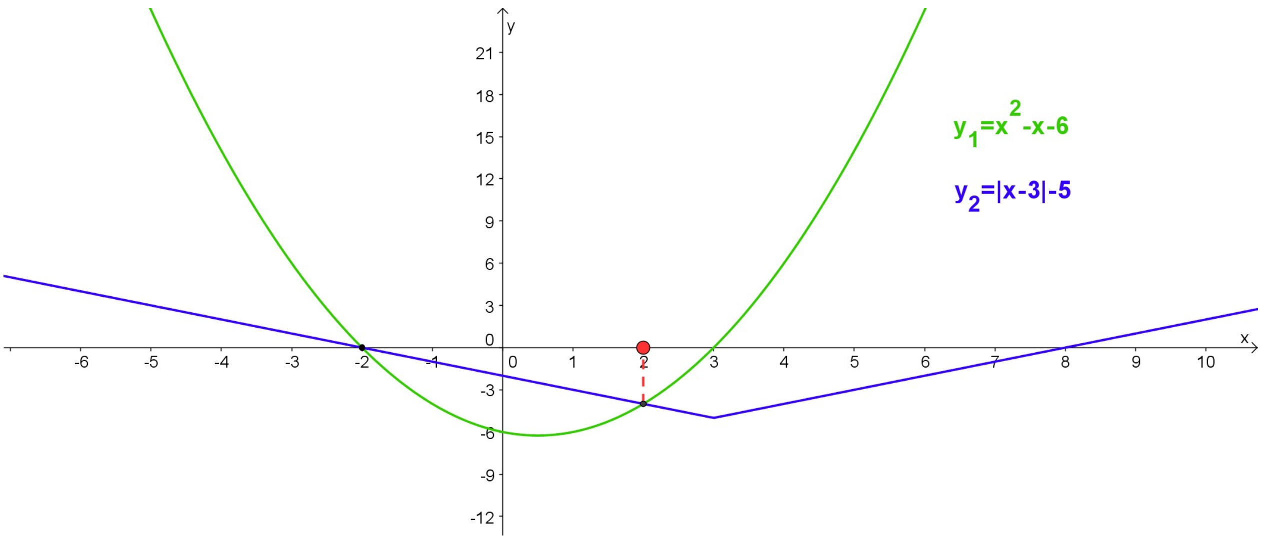
$x^2 - x - 6 = x - 3 - 5$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \longrightarrow D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \longrightarrow$ rovnice nemá reálné kořeny $\longrightarrow K_2 = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2 = \{2\}$

Na obrázku 63 je znázorněné grafické řešení dané rovnice.

Zelenou barvou je znázorněna funkce reprezentující levou stranu rovnice, modrou barvou je zakreslena funkce reprezentující pravou stranu rovnice. Červeně je vyznačen bod, který znázorňuje řešení rovnice vzhledem k zadanému oboru $\mathcal{Z}_0^+$.



Obrázek 63: Grafické řešení rovnice $x^2 - x - 6 = |x - 3| - 5$

10.3 Příloha C

10.3.1 Zadání - Lineární nerovnice

1) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $\dfrac{1+3x^2}{3} \leq x^2 + x$

b) $\dfrac{\frac{1}{x} + 2x}{2} < x + 2$

c) $3(x+6) - 9 > 3(x+3)$

2) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{Z}$:

a) $2(x-1) > x + 4$

b) $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{x+1}$

3) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$ s parametrem $p \in \mathcal{R}$:

a) $x + 2 - px > 5p$

b) $3(p - x) < px + 2$

4) Pro která $x \in \mathcal{R}$ platí $(p^2 - 3p)x > 3 - p$, kde p je kladný parametr $(p > 0)$?

5) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $|x+4| \leq 3$

b) $|x+2| + |x| > |x-4|$

10.3.2 Řešení - Lineární nerovnice

1) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $\dfrac{1+3x^2}{3} \leq x^2 + x$

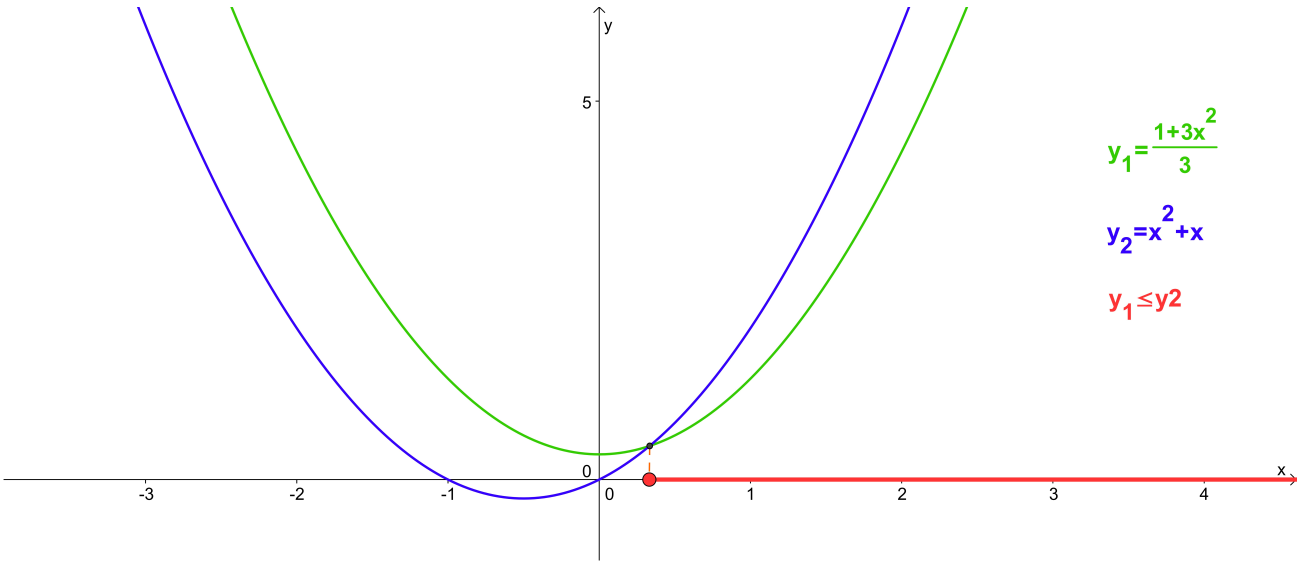
$\dfrac{1+3x^2}{3} \leq x^2 + x \ / \cdot 3$

$1 + 3x^2 \leq 3x^2 + 3x$

$x \geq \dfrac{1}{3}$

$K = \langle \dfrac{1}{3}, \infty)$

Na obrázku 64 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zeleně znázorněná funkce $y_1 = \dfrac{1+3x^2}{3}$ reprezentuje levou stranu nerovnice, modrá funkce $y_2 = x^2 + x$ představuje pravou stranu nerovnice. Podle zadání hledáme řešení, kdy je funkce y_1 menší nebo rovna funkci y_2. Tato situace nastává na intervalu $\langle \dfrac{1}{3}, \infty)$, který je na obrázku zvýrazněný červenou barvou.



Obrázek 64: Grafické řešení nerovnice $\dfrac{1+3x^2}{3} \leq x^2 + x$

b) $\dfrac{\frac{1}{x}+2x}{2} < x+2$

$\dfrac{\frac{1}{x}+2x}{2} < x+2 \ / \cdot 2 \quad x \neq 0$

$\dfrac{1}{x}+2x < 2x+4 \ / \cdot x$

Nyní budeme uvažovat dvě možnosti:

Pro $x > 0$:

$1+2x^2 < 2x^2+4x$

$x > \dfrac{1}{4} \longrightarrow x > \dfrac{1}{4} \wedge x > 0 \longrightarrow \ K_1 = (\dfrac{1}{4}, \infty)$

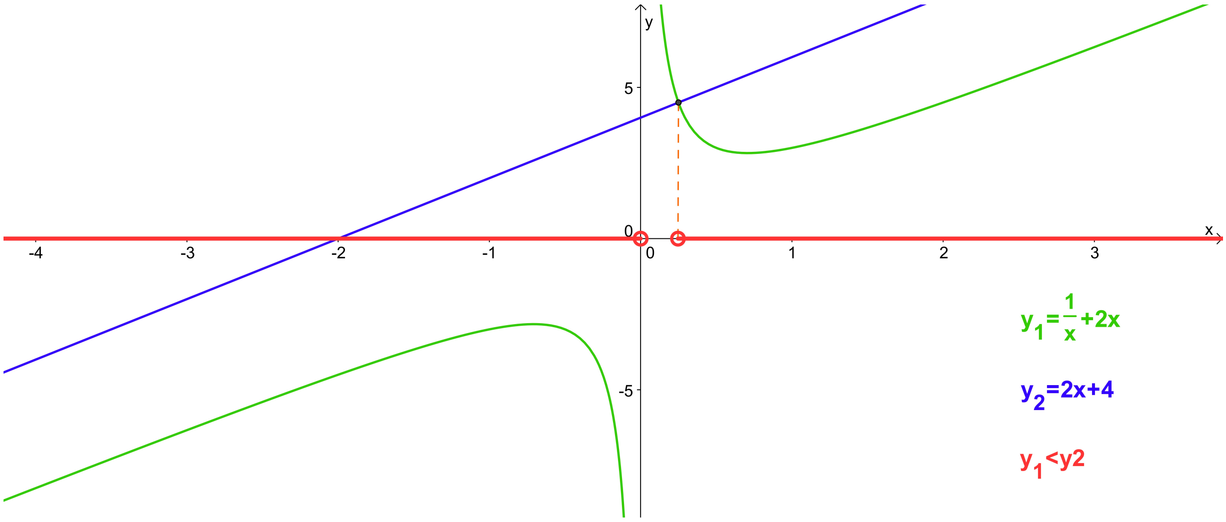
Pro $x < 0$:

$1+2x^2 > 2x^2+4x$

$x < \dfrac{1}{4} \longrightarrow x < \dfrac{1}{4} \wedge x < 0 \longrightarrow K_2 = (-\infty, 0)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, 0) \cup (\dfrac{1}{4}, \infty)$

Na obrázku 65 je vyobrazené grafické znázornění dané nerovnice. Zeleně je znázorněný graf již upravené funkce levé strany zadané nerovnice, tedy $y_1 = \dfrac{1}{x} + 2x$, modře je znázorněný graf upravené funkce pravé strany nerovnice, tedy $y_2 = 2x+4$. Hledaným řešením jsou intervaly vyznačené červenými polopřímkami.



Obrázek 65: Grafické řešení nerovnice $\dfrac{\frac{1}{x}+2x}{2} < x+2$

c) $3(x+6)-9 > 3(x+3)$

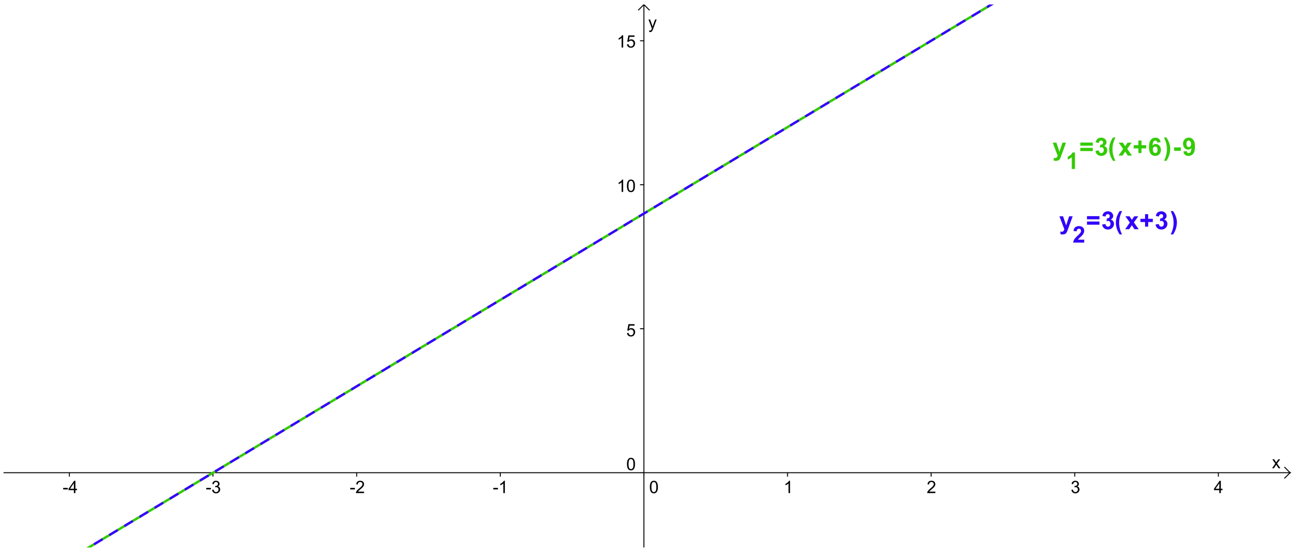
$3x+18-9 > 3x+9$

$3x+9 > 3x+9$

$0x > 0$

$K = \emptyset$

Na obrázku 66 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněná funkce $y_1 = 3(x+6)-9$ reprezentující levou stranu nerovnice, modrou barvou je znázorněná funkce $y_2 = 3(x+3)$, představující pravou stranu nerovnice. Obě dvě funkce se překrývají, a proto neexistuje situace, kdy by byla funkce y_1 větší než funkce y_2. Daná nerovnice tedy nemá žádné řešení.



Obrázek 66: Grafické řešení nerovnice $3(x + 6) - 9 > 3(x + 3)$

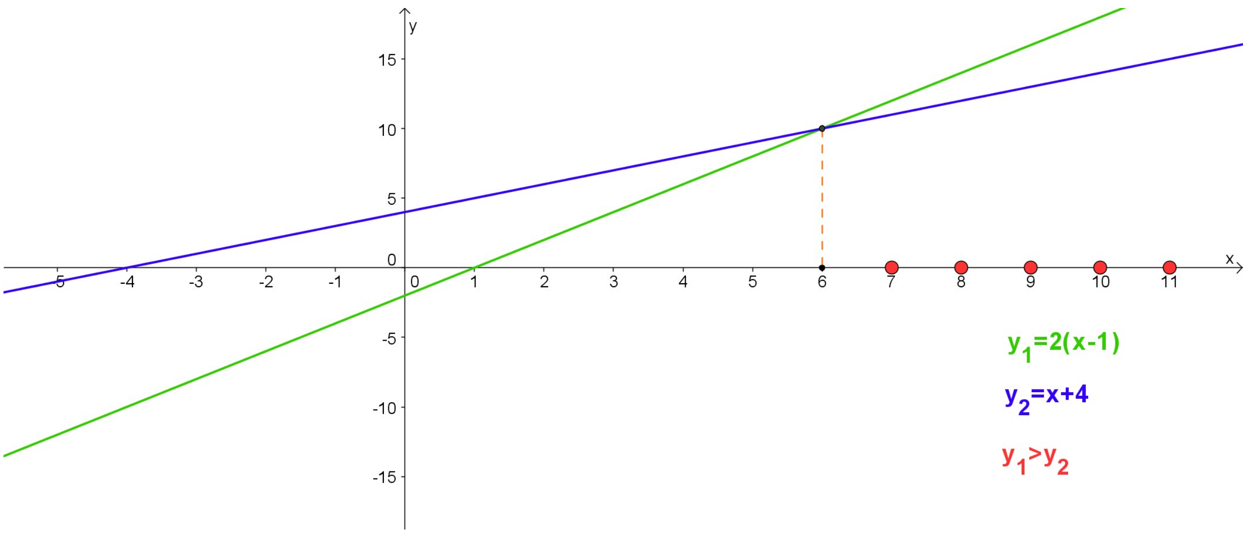
2) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{Z}$:

a) $2(x - 1) > x + 4$

$2x - 2 > x + 4$

$x > 6 \longrightarrow$ řešením nerovnice jsou všechna celá čísla větší než 6.

Na obrázku 67 je grafické znázornění dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněná funkce $y_1 = 2(x-1)$, která představuje levou stranu nerovnice a modrou barvou je znázorněná funkce $y_2 = x+4$ reprezetující pravou stranu nerovnice. Vzhledem k zadání hledáme situaci, kdy je funkce y_1 větší než y_2. Z obrázku můžeme vidět, že tento případ nastává pro $x > 6$. Protože řešení hledáme v oboru $\mathcal{Z}$, výsledkem jsou pouze celá čísla, která jsou na obrázku znázorněná červenými body.



Obrázek 67: Grafické řešení nerovnice $2(x-1) > x+4$

b) $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{x+1} \leq 0$

$\frac{x+1-3}{3(x+1)} \leq 0$

$\frac{-2+x}{3(x+1)} \leq 0$

Nerovnice je v podílovém tvaru. Takové nerovnice (stejně jako nerovnice v součinovém tvaru) lze vyřešit metodou intervalů. Určíme nulové body čitatele a jmenovatele.

$x \in \{2, -1\}$: Nulové body rozdělí definiční obor $\mathcal{R} - \{-1\}$ nerovnice na tři intervaly: $I_1 = (-\infty, -1), I_2 = (-1, 2\rangle, I_3 = \langle 2, \infty)$.

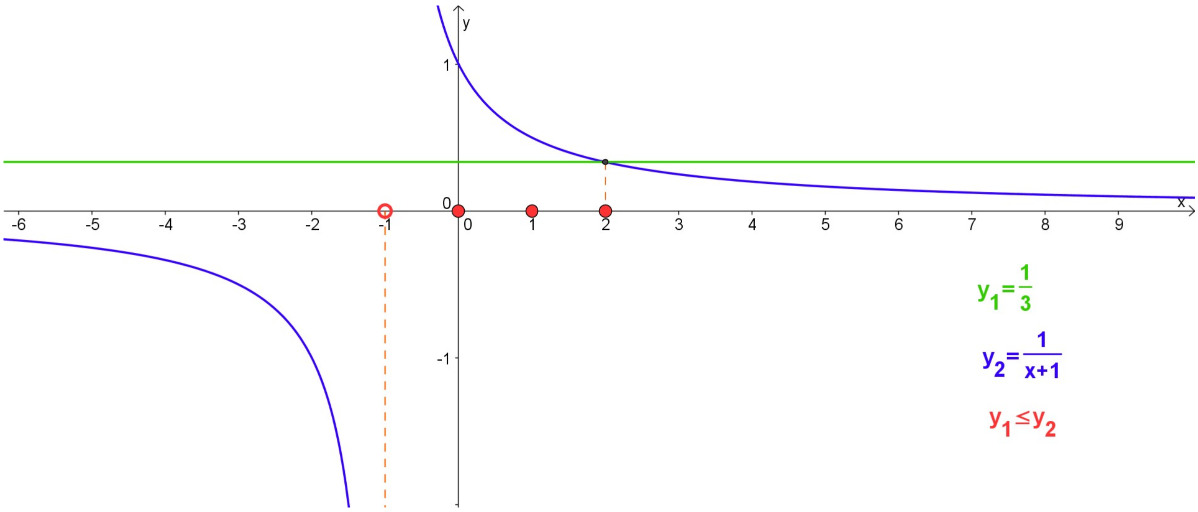
$x = -1$ do definičního oboru funkce nepatří, protože pokud bychom ji dosadili do zadání, nerovnice by neměla smysl.

	$I_1 = (-\infty, -1)$	$I_2 = (-1, 2\rangle$	$I_3 = \langle 2, \infty)$
$-2+x$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$3(x+1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$\frac{-2+x}{3(x+1)}$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Řešením nerovnice jsou všechna celá čísla z intervalu $(-1, 2\rangle$.

$K = \{0, 1, 2\}$

Na obrázku 68 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněná konstatní funkce $y_1 = \frac{1}{3}$ reprezentující levou stranu nerovnice a modrou barvou je vyobrazená lomená funkce $y_2 = \frac{1}{x+1}$, která představuje pravou stranu nerovnice. Nyní hledáme, kdy je funkce y_1 menší nebo rovna funkci y_2. Tato situace nastává pouze na zprava uzavřeném intervalu $(-1, 2\rangle$. Vzhledem k tomu, že nerovnici řešíme v oboru $\mathcal{Z}$, výsledkem jsou pouze body vyznačené červenou barvou.



Obrázek 68: Grafické řešení nerovnice $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1}$

3) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$ s parametrem $p \in \mathcal{R}$:

a) $x + 2 - px > 5p$

$x - px > 5p - 2$

$x(1 - p) > 5p - 2 \qquad (*)$

Nyní uvažujeme tři možnosti:

Pro $1 - p = 0 \rightarrow p = 1$

Po dosazení $p = 1$ do upraveného tvaru nerovnice (*) získáme nerovnici $0x > 3$, která nemá smysl $\longrightarrow K_1 = \emptyset$

Pro $1 - p > 0 \rightarrow p < 1 \rightarrow x > \dfrac{2-5p}{p-1} \longrightarrow K_2 = (\dfrac{2-5p}{p-1}, \infty)$

Pro $1 - p < 0 \rightarrow p > 1 \rightarrow x < \dfrac{2-5p}{p-1} \longrightarrow K_3 = (-\infty, \dfrac{2-5p}{p-1})$

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 1$	$\emptyset$
$p < 1$	$(\frac{2-5p}{p-1}, \infty)$
$p > 1$	$(-\infty, \frac{2-5p}{p-1})$

b) $3(p - x) < px + 2$

$3p - 3x < px + 2$

$-3x - px < -3p + 2 \;/ \cdot (-1)$

$3x + px > 3p - 2$

$x(3 + p) > 3p - 2 \qquad (*)$

Pro $3 + p = 0 \rightarrow p = -3 \longrightarrow x \in \mathcal{R}$

Po dosazení $p = -3$ do upraveného tvaru nerovnice (*) získáme nerovnici tvaru $0x > -11 \longrightarrow K_1 = \mathcal{R}$

Pro $3 + p > 0 \rightarrow p > -3 \longrightarrow x > \dfrac{3p-2}{p+3} \longrightarrow K_2 = (\dfrac{3p-2}{p+3}, \infty)$

Pro $3 + p < 0 \rightarrow p < -3 \longrightarrow x < \dfrac{3p-2}{p+3} \longrightarrow K_3 = (-\infty, \dfrac{3p-2}{p+3})$

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = -3$	$\mathcal{R}$
$p > -3$	$(\frac{3p-2}{p+3}, \infty)$
$p < -3$	$(-\infty, \frac{3p-2}{p+3})$

4) Pro která $x \in \mathcal{R}$ platí $(p^2 - 3p)x > 3 - p$, kde p je kladný parametr $(p > 0)$?

$p^2x - 3px > 3 - p$

$p^2x - 3px - 3 + p > 0$

$-3(px + 1) + p(px + 1) > 0$

$(px + 1)(p - 3) > 0$

Pro $p - 3 = 0 \rightarrow p = 3 \rightarrow 0 \cdot (px + 1) > 0 \rightarrow K_1 = \emptyset$

Pro $p - 3 > 0 \rightarrow p > 3 \rightarrow (px + 1) > 0 \rightarrow x > -\dfrac{1}{p}$

Pro $p - 3 < 0 \land p > 0 \rightarrow 0 < p < 3 \rightarrow (px + 1) < 0 \rightarrow x < -\dfrac{1}{p}$

Hodnoty parametru p	Množina K všech řešení
$p = 3$	$\emptyset$
$p > 3$	$(-\frac{1}{p}, \infty)$
$0 < p < 3$	$(-\infty, -\frac{1}{p})$

5) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $|x+4| \leq 3$

$x+4=0 \rightarrow x=-4$

$\rightarrow I_1=(-\infty,-4), \quad I_2=\langle -4,\infty)$

	$I_1=(-\infty,-4)$	$I_2=\langle -4,\infty$
$\lvert x+4 \rvert$	$-x-4$	$x+4$

Pro I_1 :

$-x-4 \leq 3$

$-x \leq 7 \ / \cdot (-1)$

$x \geq -7 \rightarrow K_1=\langle -7,\infty) \cap (-\infty,-4)=\langle -7,-4\rangle$

Pro I_2 :

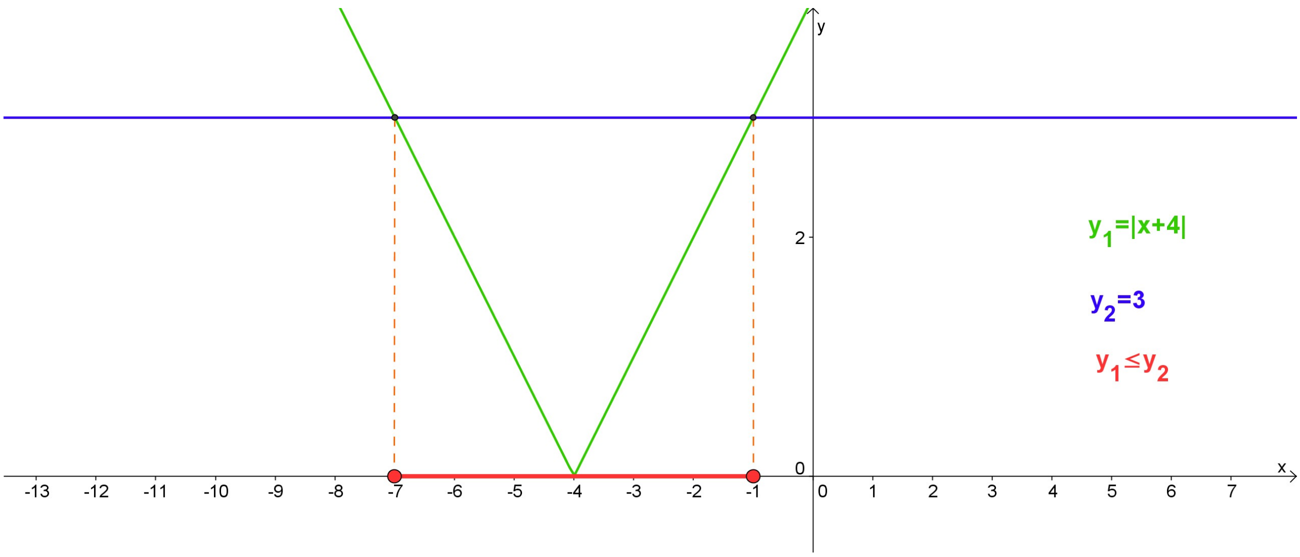
$x+4 \leq 3$

$x \leq -1 \rightarrow K_2=(-\infty,-1\rangle \cap \langle -4,\infty)=\langle -4,-1\rangle$

$x \in K_1 \cup K_2=\langle -7,-4\rangle \cup \langle -4,-1\rangle=\langle -7,-1\rangle$

$K=\langle -7,-1\rangle$

Na obrázku 69 je zobrazené grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněný graf funkce $y_1=|x+4|$, který představuje levou stranu nerovnice a modrou barvou je znázorněný graf konstantní funkce $y_2=3$. Podle zadání hledáme taková řešení, kdy je funkce y_1 menší nebo rovna funkci y_2 reprezentující pravou stranu nerovnice. Tento případ nastává na uzavřeném intervalu $\langle -7,-1\rangle$, který je na obrázku znázorněný červenou barvou.



Obrázek 69: Grafické znázornění nerovnice $|x+4| \leq 3$

b) $|x+2| + |x| > |x-4|$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -2$

$x = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$x - 4 = 0 \rightarrow x_3 = 4$

$\rightarrow I_1 = (-\infty, -2), \quad I_2 = \langle -2, 0), \quad I_3 = \langle 0, 4), \quad I_4 = \langle 4, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = \langle -2, 0)$	$I_3 = \langle 0, 4)$	$I_4 = \langle 4, \infty)$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x-4 \rvert$	$-x+4$	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$

Pro I_1 :

$-x - 2 - x > -x + 4$

$-2x - 2 > -x + 4$

$-x > 6$

$x < -6 \rightarrow K_1 = (-\infty, -6) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -6)$

Pro I_2 :

$x + 2 - x > -x + 4$

$2 > -x + 4$

$x > 2 \rightarrow K_2 = (2, \infty) \cap \langle -2, 0) = \emptyset$

Pro I_3 :

$x + 2 + x > -x + 4$

$2x + 2 > -x + 4$

$3x > 2$

$x > \dfrac{2}{3} \to K_3 = (\dfrac{2}{3}, \infty) \cap \langle 0, 4) = \langle \dfrac{2}{3}, 4)$

Pro I_4 :

$x + 2 + x > x - 4$

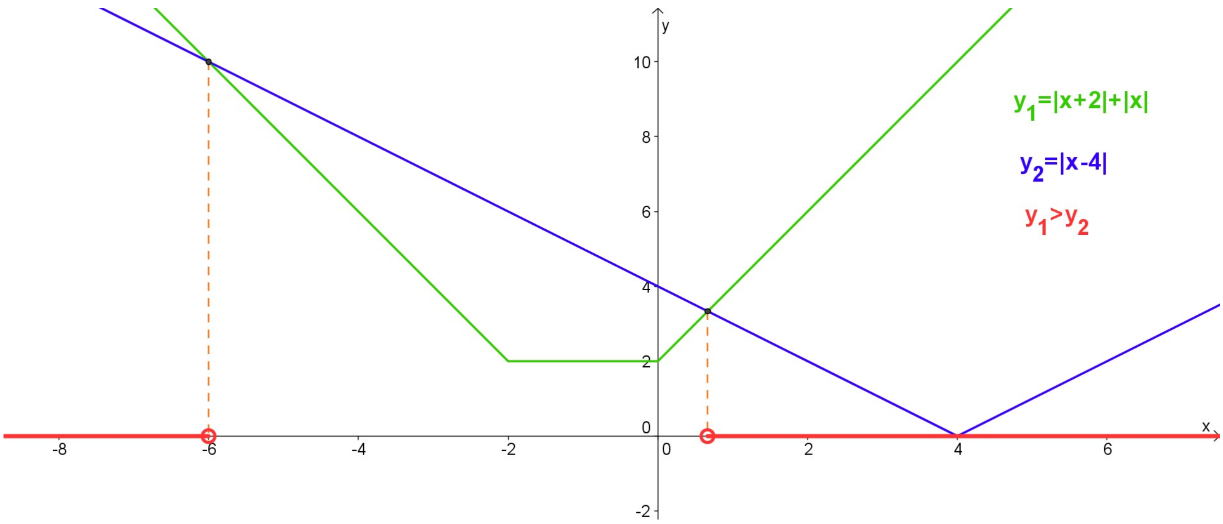
$2x + 2 > x - 4$

$x > -6 \to K_4 = (-6, \infty) \cap \langle 4, \infty) = \langle 4, \infty)$

$x \in K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = (-\infty, -6) \cup \emptyset \cup (\frac{2}{3}, 4) \cup \langle 4, \infty) = (-\infty, -6) \cup (\dfrac{2}{3}, \infty)$

$K = (-\infty, -6) \cup (\dfrac{2}{3}, \infty)$

Na obrázku 70 je grafické znázornění zadané nerovnice. Zelenou barvou je zobrazený graf funkce $y_1 = |x + 2| + |x|$ reprezentující levou stranu nerovnice a modrou barvou je znázorněný graf funkce $y_2 = |x - 4|$ představující pravou stranu nerovnice. Podle zadání hledáme takovou situaci, kdy je funkce y_1 větší než funkce y_2. Taková situace nastává právě ve dvou intervalech, které jsou na obrázku vyobrazené červenou barvou.



Obrázek 70: Grafické řešení nerovnice $|x+2|+|x|>|x-4|$

10.4 Příloha D

10.4.1 Zadání - Kvadratické nerovnice

1) Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnice:

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

b) $2x^2 - 7x - 4 < 0$

c) $2x^2 - 8x - 24 > 0$

2) Řeště v oboru $\mathcal{Z}$ nerovnice:

a) $-x^2 + 7x - 6 > 0$

b) $x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{8} \geq 0$

c) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

3) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $|\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}| \leq 5$

b) $-x^2 - 2|x| + 8 \leq 0$

c) $\dfrac{|x|^2 - |x| - 2}{|x| - 2} > 7$

10.4.2 Řešení - Kvadratické nerovnice

1) Řešte v oboru $\mathcal{R}$ nerovnice:

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -1$

Předpis pro kvadratickou funkci tedy můžeme rozložit do součinového tvaru:

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

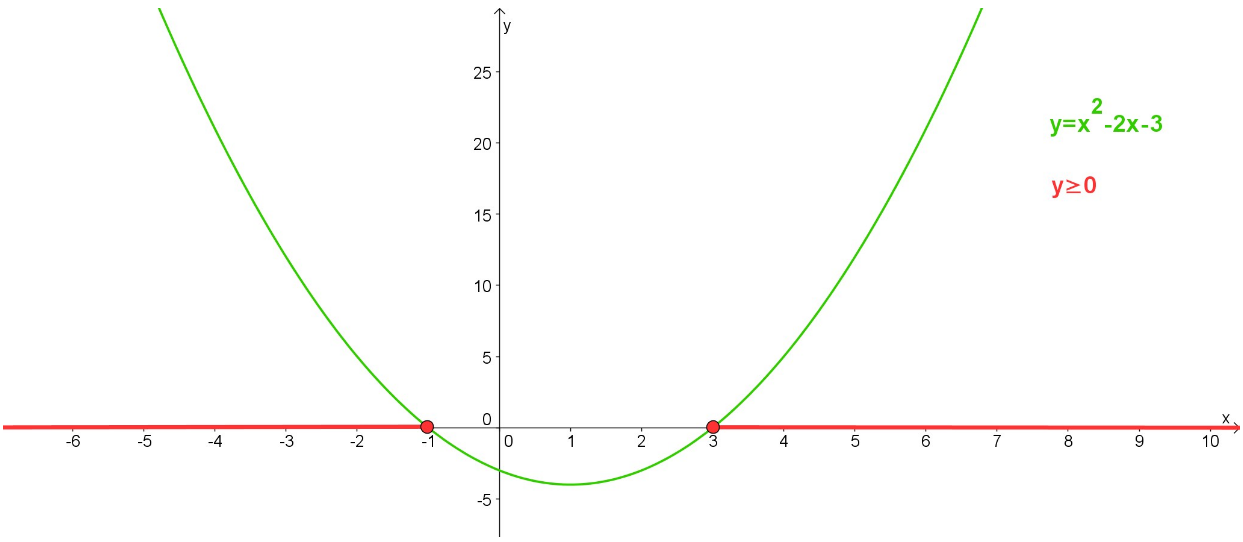
$\rightarrow I_1 = (-\infty, -1\rangle, \quad I_2 = \langle -1, 3\rangle, \quad I_3\langle 3, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -1\rangle$	$I_2 = \langle -1, 3\rangle$	$I_3 = \langle 3, \infty)$
$x-3$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x+1$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$x^2 - 2x - 3$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \leftrightarrow x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty)$

$K = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty)$

Na obrázku 71 je zobrazené grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je vyobrazený graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$, červenou barvou jsou zvýrazněné intervaly, ve kterých je splněna podmínka $y \geq 0$. Tyto intervaly jsou tedy řešením zadané nerovnice.



Obrázek 71: Grafické řešení nerovnice $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

b) $2x^2 - 7x - 4 < 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \dfrac{7 \pm 9}{4} \rightarrow x_1 = 4;\; x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Předpis pro kvadratickou funkci tedy můžeme rozložit do součinového tvaru:

$2x^2 - 7x - 4 = 2 \cdot (x - 4)(x + \dfrac{1}{2})$

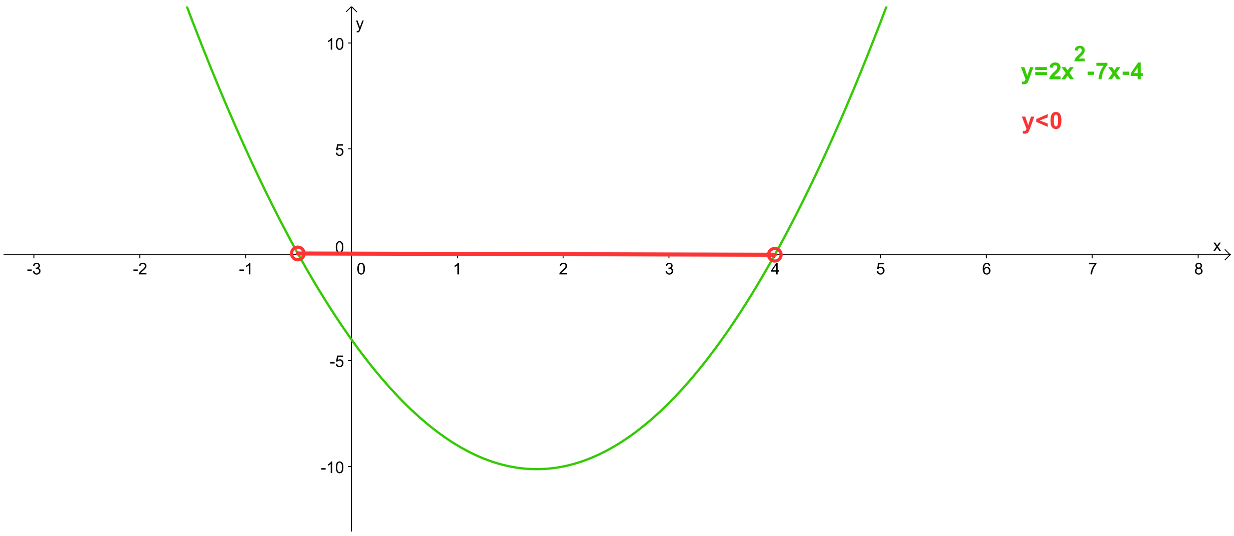
$\rightarrow I_1 = (-\infty, -\dfrac{1}{2}), \quad I_2 = (-\dfrac{1}{2}, 4), \quad I_3 = (4, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -\frac{1}{2})$	$I_2 = (-\frac{1}{2}, 4)$	$I_3 = (4, \infty)$
$x - 4$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x + \frac{1}{2}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$2x^2 - 7x - 4$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

$2x^2 - 7x - 4 < 0 \leftrightarrow x \in (-\dfrac{1}{2}, 4)$

$K = (-\dfrac{1}{2}, 4)$

Na obrázku 72 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je vyobrazený graf funkce $y = 2x^2 - 7x - x$. Červeně je vyznačený interval, který splňuje podmínku $y < 0$. Vzhledem k tomu, že v zadané nerovnici je ostrá nerovnost, krajní body výsledného intervalu nejsou součástí řešení.



Obrázek 72: Grafické řešení nerovnice $2x^2 - 7x - 4 < 0$

c) $2x^2 - 8x - 24 > 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24) = 256$

$x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 2} = \dfrac{8 \pm 16}{4} \rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -2$

Předpis pro kvadratickou funkci můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

$2x^2 - 8x - 24 = 2 \cdot (x - 6)(x + 2)$

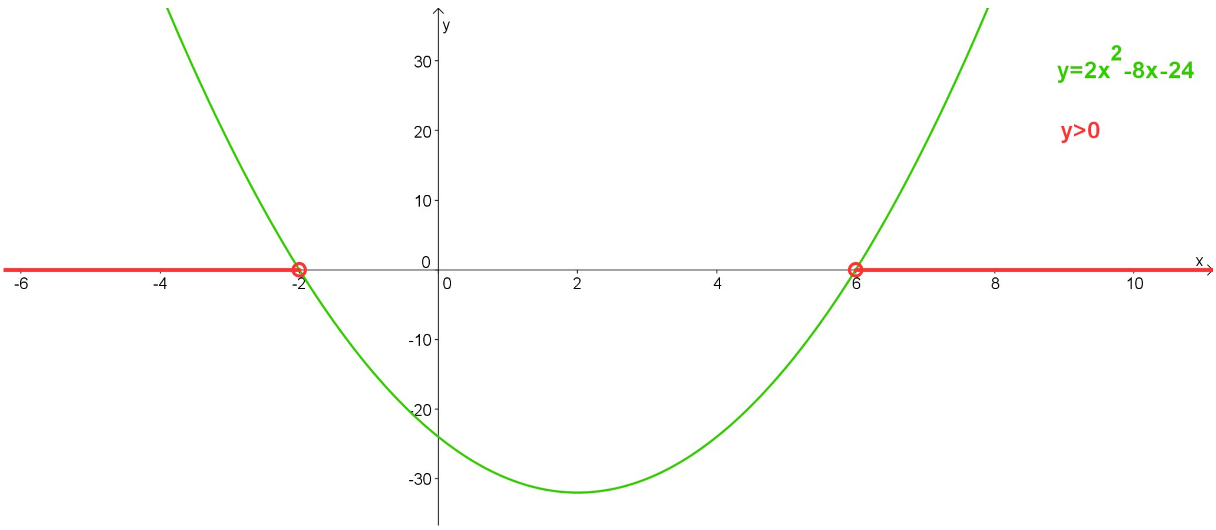
$\rightarrow I_1 = (-\infty, -2), \quad I_2 = (-2, 6), \quad I_3 = (6, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = (-2, 6)$	$I_3 = (6, \infty)$
$x - 6$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x + 2$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$2x^2 - 8x - 24$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

$2x^2 - 8x - 24 > 0 \leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$

$K = (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$

Na obrázku 73 je zobrazené grafické řešení dané nerovnice. Zeleně je znázorněný graf funkce $y = 2x^2 - 8x - 24$, červeně jsou zvýrazněné intervaly, které splňují podmínku $y > 0$. Vzhledem k ostré nerovnosti v zadané nerovnici, krajní body výsledných intervalů nejsou součástí řešení.



Obrázek 73: Grafické řešení nerovnice $2x^2 - 8x - 24 > 0$

2) Řeště v oboru $\mathcal{Z}$ nerovnice:

a) $-x^2 + 7x - 6 > 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot (-1)\dot{(} - 6) = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{25}}{-2} = \dfrac{-7 \pm 5}{-2} \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 6$

Předpis pro kvadratickou funkci můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

$-x^2 + 7x - 6 = -1 \cdot (x-1)(x-6) = (-x+1)(x-6)$

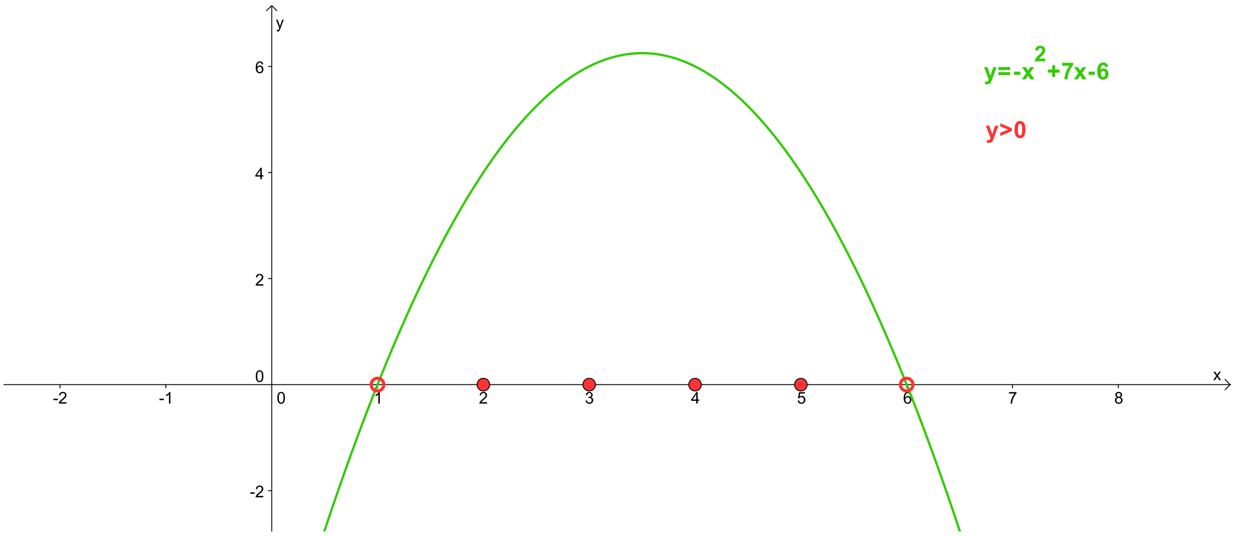
$\rightarrow I_1 = (-\infty, 1), \quad I_2 = (1, 6), \quad I_3 = (6, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, 1)$	$I_2 = (1, 6)$	$I_3 = (6, \infty)$
$-x+1$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$x-6$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$-x^2+7x-6$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

$-x^2 + 7x - 6 > 0 \leftrightarrow x \in (1, 6)$

$K = \{2, 3, 4, 5\}$

Na obrázku 74 je zobrazené grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněný graf funkce $y = -x^2 + 7x - 6$, červenou barvou je znázorněný výsledný interval. Vzhledem k zadání hledáme řešení pouze v oboru celých čísel, krajní body tohoto intervalu nejsou kvůli ostré nerovnosti součástí řešení.



Obrázek 74: Grafické řešení nerovnice $-x^2+7x-6>0$

b) $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\geq 0$

$D=(-\frac{1}{4})^2-4\cdot 1\cdot(-\frac{1}{8})=\frac{9}{16}$

$x_{1,2}=\frac{\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}}{2}=\frac{\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}}{2}\to x_1=-\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{2}$

Předpis pro kvadratickou funkci můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

$x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})$

$\to I_1=(-\infty,-\frac{1}{4}),\quad I_2=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}),\quad I_3=(\frac{1}{2},\infty)$

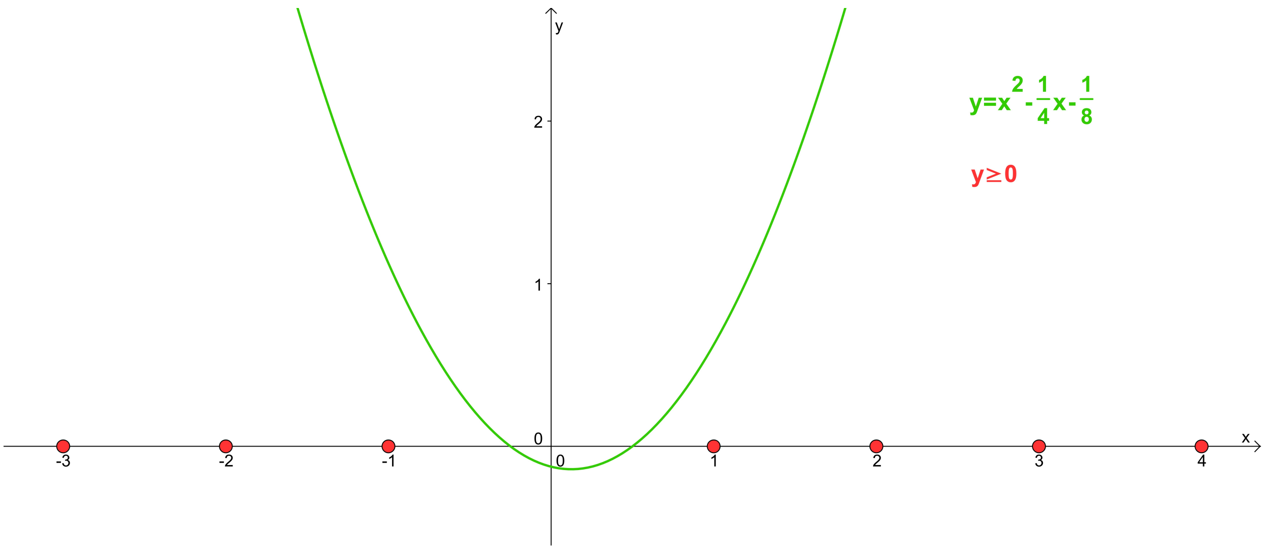
	$I_1=(-\infty,-\frac{1}{4})$	$I_2=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$	$I_3=(\frac{1}{2},\infty)$
$x+\frac{1}{4}$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$x-\frac{1}{2}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

$x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\geq 0\leftrightarrow x\in(-\infty,-\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2},\infty)$

Vzhledem k zadanému oboru $\mathcal{Z}$ je řešením

$K = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...\} = \mathcal{Z} - \{0\}$

Na obrázku 75 je zobrazené grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je znázorněný graf funkce $y = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$, červeně je znázorněné řešení dané nerovnice. Vzhledem k zadání mohou být řešením pouze celá čísla.



Obrázek 75: Grafické řešení nerovnice $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \geq 0$

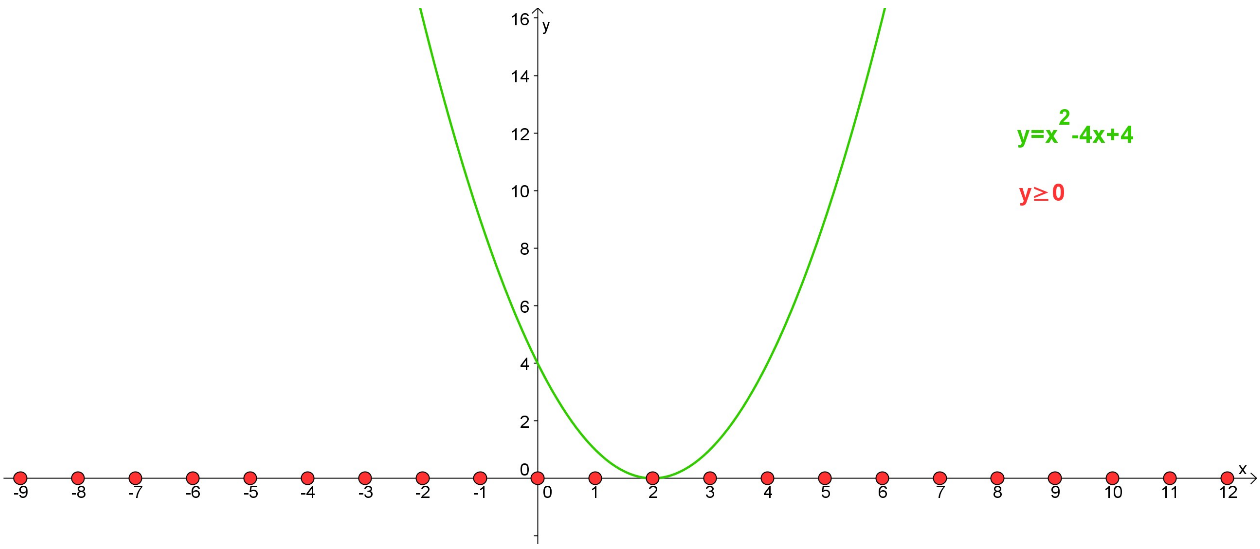
c) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$(x-2)^2 \geq 0$

Tato nerovnice je splněna vždy. Řešením jsou tedy všechna celá čísla.

$K = \mathcal{Z}$

Na obrázku 76 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zeleně je zobrazený graf funkce $y = x^2 - 4x + 4$. Hledáme takovou situaci, kdy jsou funkční hodnoty funkce y větší nebo rovna nule. Vzhledem k zadání hledáme řešení v oboru $\mathcal{Z}$. Z obrázku je vidět, že jsou výsledkem všechna celá čísla, což je znázorněné červenou barvou.



Obrázek 76: Grafické řešení nerovnice $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

3) Řešte nerovnice v oboru $\mathcal{R}$:

a) $|\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}| \leq 5 \qquad x \neq -1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 3$

Kvadratický trojčlen můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

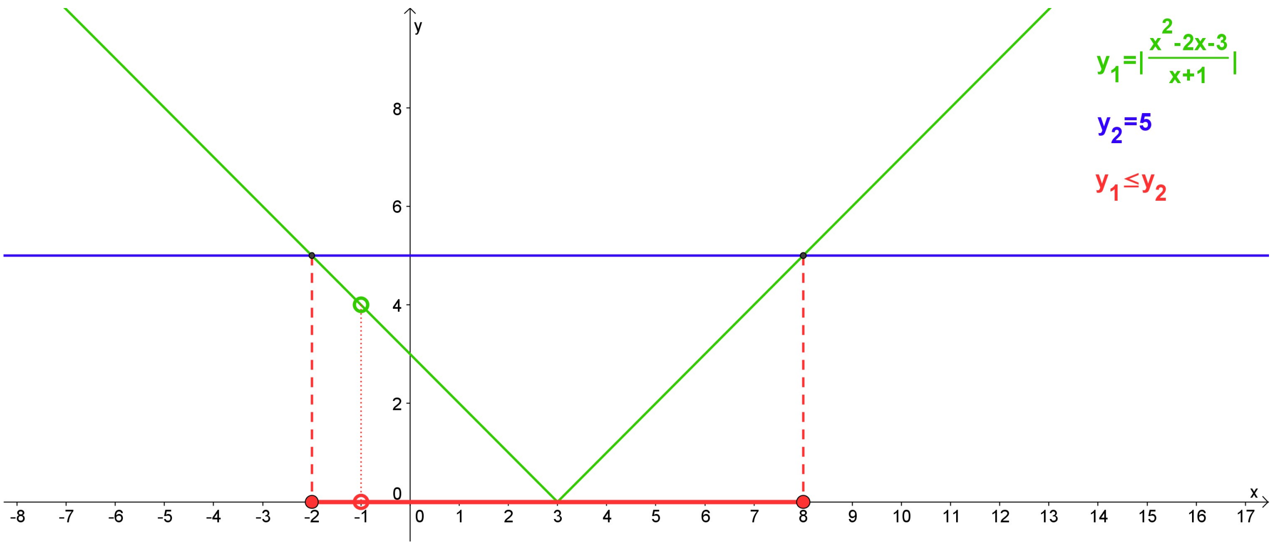
$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

$|\dfrac{(x + 1)(x - 3)}{x + 1}| \leq 5$

$|x - 3| \leq 5 \rightarrow x \in \langle -2, 8\rangle$

$K = \langle -2, 8\rangle - \{-1\}$

Na obrázku 77 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je vyobrazena funkce $y_1 =|\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}|$, která představuje levou stranu nerovnice, modrou barvou je znázorněna funkce $y_2 = 5$ představující pravou stranu nerovnice. Vzhledem k zadání hledáme situaci, kdy je funkce y_1 menší nebo rovna funkci y_2. Řešení této nerovnice je znázorněné červenou barvou.



Obrázek 77: Grafické řešení nerovnice $|\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}| \leq 5$

b) $-x^2 - 2|x| + 8 \leq 0$

Pro $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$:

$-x^2 - 2x + 8 \leq 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \dfrac{2 \pm 6}{-2} \rightarrow x_1 = -4;\; x_2 = 2$

Kvadratický trojčlen můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

$-x^2 - 2x + 8 = (-x-4)(x-2) \leq 0$

$\rightarrow I_1 = (-\infty, -4), \quad I_2 = \langle -4, 2), \quad I_3 = \langle 2, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -4)$	$I_2 = \langle -4, 2)$	$I_3 = \langle 2, \infty)$
$-x-4$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$x-2$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$-x^2-2x+8$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

$\rightarrow x \in [(-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, \infty)] \cap \langle 0, \infty) \rightarrow K_1 = \langle 2, \infty)$

Pro $x < 0 \rightarrow |x| = -x$:

$-x^2 + 2x + 8 \leq 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \rightarrow x_3 = -2;\ x_4 = 4$$

Kvadratický trojčlen můžeme tedy rozložit do součinového tvaru:

$-x^2 + 2x + 8 = (x + 2)(-x + 4)$

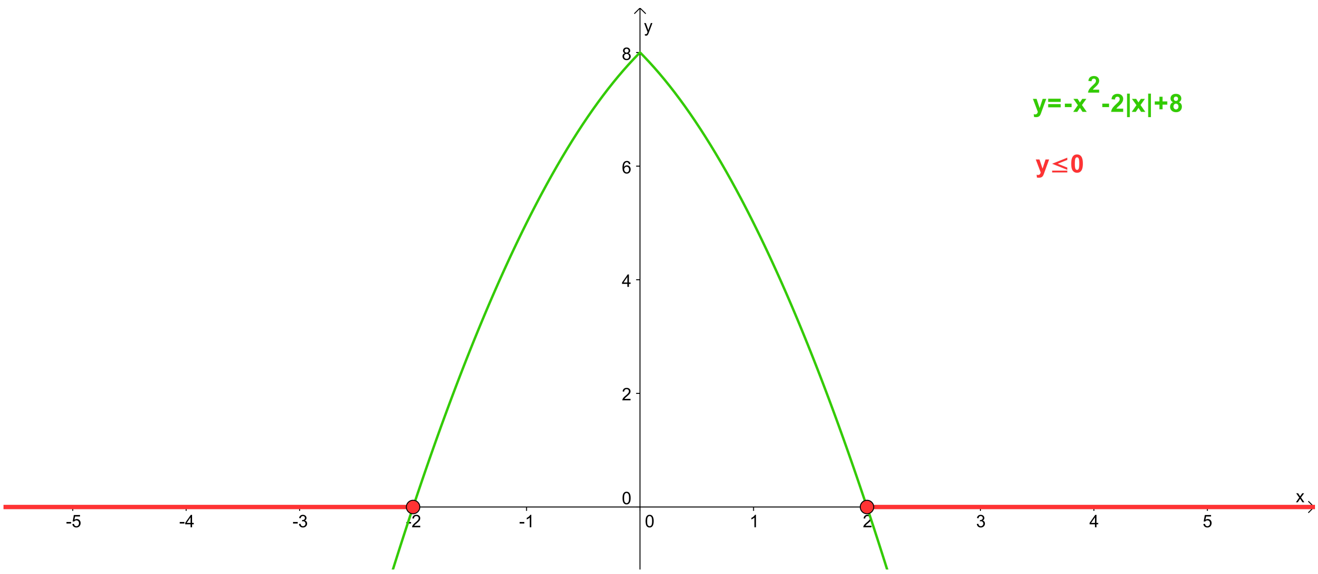
$\rightarrow I_1 = (-\infty, -2), \quad I_2 = \langle -2, 4), \quad I_3 = \langle 4, \infty)$

	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = \langle -2, 4)$	$I_3 = \langle 4, \infty)$
$x + 2$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$-x + 4$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$-x^2 + 2x + 8$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$

$\rightarrow x \in [(-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, \infty)] \cap (-\infty, 0) \rightarrow K_2 = (-\infty, -2\rangle$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

Na obrázku 78 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je zobrazený graf funkce $y = -x^2 - 2|x| + 8$. Podle zadání hledáme takovou situaci, kdy je funkce y menší nebo rovna nule. Řešení této nerovnice je na obrázku znázorněné červenou barvou.



Obrázek 78: Grafické řešení nerovnice $-x^2 - 2|x| + 8 \leq 0$

c) $\dfrac{|x|^2-|x|-2}{|x|-2} > 7 \qquad |x| \neq 2, x \neq \pm 2$

Nyní budeme uvažovat dvě situace: $x \geq 0; \quad x < 0$

Pro $x \geq 0 \to |x| = x$:

$x^2 - x - 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \longrightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -1$

Nyní můžeme rozložit kvadratický trojčlen v čitateli do součinového tvaru:

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} > 7$

$x + 1 > 7$

$x > 6 \to x > 6 \wedge x \geq 0 \longrightarrow K_1 = (6, \infty)$

Pro $x < 0 \to |x| = -x$:

$\dfrac{x^2+x-2}{-x-2} > 7$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

$x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \to x_3 = 1;\ x_4 = -2$

Nyní můžeme rozložit kvadratický trojčlen v čitateli do součinového tvaru:

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\dfrac{(x-1)(x+2)}{-x-2} > 7$

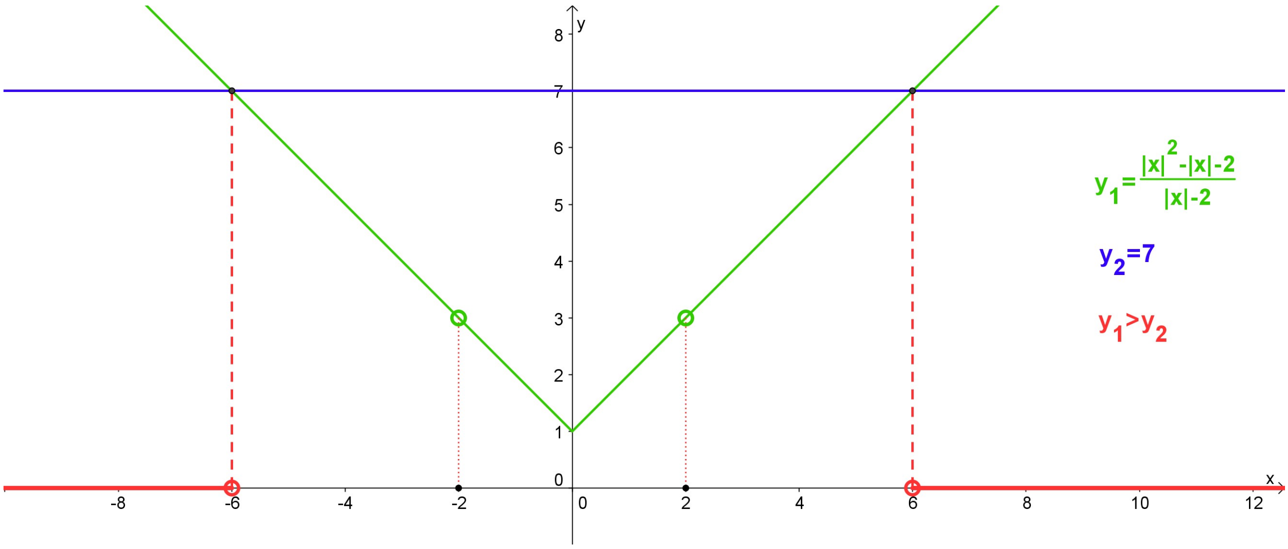
$\dfrac{(x-1)(x+2)}{-(x+2)} > 7$

$-x + 1 > 7$

$x < -6 \to x < -6 \wedge x < 0 \longrightarrow K_2 = (-\infty, -6)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty, -6) \cup (6, \infty)$

Na obrázku 79 je znázorněné grafické řešení dané nerovnice. Zelenou barvou je zobrazená funkce $y_1 = \dfrac{|x|^2-|x|-2}{|x|-2}$ reprezentující levou stranu nerovnice a modrou barvou je znázorněná funkce $y_2 = 7$ představující pravou stranu nerovnice. Podle zadání hledáme takový případ, kdy je funkce y_1 větší než funkce y_2. Řešení této nerovnice je znázorněné červenou barvou.



Obrázek 79: Grafické řešení nerovnice $\dfrac{|x|^2 - |x| - 2}{|x| - 2} > 7$