



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

## STIRLINGŮV MOTOR

STIRLING ENGINE

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Vondruš

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Kaplan, CSc.

BRNO 2016



## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automobilního a dopravního inženýrství  
Student: **Jan Vondruš**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Stavba strojů a zařízení  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Zdeněk Kaplan, CSc.**  
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Stirlingův motor**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Obsahem závěrečné bakalářské práce je teoretická analýza Stirlingova termodynamického cyklu s regenerací tepla.

#### **Cíle bakalářské práce:**

Závěrečná práce bude obsahovat výpočet ideálního termodynamického cyklu Stirlingova motoru, odvození Schmidovy teorie včetně její aplikace na uvedený Stirlingův motor a vlastní závěrečné hodnocení rozdílů obou případů.

#### **Seznam literatury:**

Walker, G.: Stirling Engines, Oxford 1980, 160 s., ISBN 0-19-856209-8

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



## ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá popisem a výpočtem tepelného Stirlingova motoru s uzavřeným pracovním oběhem a tepelnou regenerací. V teoretické části je popsána historie motoru, princip jeho funkce, rozdíly jednotlivých konstrukčních typů motoru a využití motoru v minulosti i současnosti. Dále je zde popsán princip a způsob výpočtu ideálního Stirlingova cyklu a také výhody a nevýhody použití těchto tepelných strojů. Praktická část práce se zabývá výpočtem pomocí ideálního Stirlingova cyklu a výpočtem cyklu jednotlivých modifikací pomocí Schmidty idealizace. Primárním cílem této bakalářské práce je porovnání výsledků získaných užitím obou metod. Výsledky práce ukazují, že použití Schmidty idealizace dává nižší, a tedy přesnější hodnoty parametrů motoru oproti užití ideálního Stirlingova cyklu.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Stirlingův cyklus, Stirlingův motor, Schmidty teorie, regenerace, termodynamický cyklus

## ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the description and calculation of a closed regenerative thermodynamic cycle. In the theoretical part of the thesis, there is described history of the engine, the principle of its function, differences between particular design variants, and the use of the engine in the past and nowadays. In the other part of the work, there is described the principle and calculation of ideal Stirling cycle. In addition, there are included positives as well as negatives of applying the heat devices based on this cycle. Practical part of the work deals with the calculation of ideal Stirling cycle with the use of Schmidt theory. The primary aim of this bachelor thesis is then to compare and contrast the results gained from both of the calculation methods. In the end, the results of the thesis show that the use of Schmidt theory gives lower, i.e. more accurate, values of engine's parameters compared to the use of Stirling ideal cycle.

## KEYWORDS

Stirling cycle, Stirling engine, Schmidt theory, regeneration, thermodynamic cycle



## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

VONDRUŠ, J. *Stirlingův motor*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 56 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Zdeněk Kaplan, CSc.



## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením doc. Ing. Zdeňka Kaplana, CSc., a s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 25. května 2016

.....

Jan Vondruš



## PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce doc. Ing. Zdeňku Kaplanovi, CSc., za odbornou pomoc, cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval.





## OBSAH

Úvod .....	11
1 Stirlingův motor.....	12
1.1 Historie Stirlingova motoru .....	12
1.2 Výhody a nevýhody Stirlingova motoru.....	13
1.3 Jak pracuje Stirlingův motor .....	13
1.4 Konstrukční typy Stirlingova motoru .....	15
1.4.1 Alfa modifikace .....	15
1.4.2 Beta modifikace.....	16
1.4.3 Gama modifikace.....	17
1.5 Použití Stirlingova motoru dnes .....	17
2 Teorie Stirlingova cyklu .....	19
2.1 Ideální Stirlingův oběh.....	19
2.2 Reálný oběh Stirlingova motoru .....	19
3 Metody výpočtu Stirlingova motoru.....	20
3.1 Matematické modely pro analýzu Stirlingova motoru.....	20
3.1.1 Metody prvního řádu .....	20
3.1.2 Metody druhého řádu .....	20
3.1.3 Metody třetího řádu .....	20
3.1.4 Metody čtvrtého řádu .....	20
3.2 Výpočet Stirlingova ideálního cyklu .....	21
3.2.1 Regenerátor a jeho vliv na účinnost cyklu.....	24
3.3 Porovnání Carnotova a Stirlingova cyklu.....	25
3.4 Výpočet Stirlingova motoru pomocí Schmidovy teorie .....	26
3.4.1 Předpoklady pro použití Schmidovy teorie .....	26
3.4.2 Výpočet alfa modifikace pomocí Schmidovy teorie .....	27
3.4.3 Výpočet beta modifikace pomocí Schmidovy teorie .....	32
3.4.4 Výpočet gama modifikace pomocí Schmidovy teorie.....	35
3.4.5 Výpočet tepel, tlaků, výkonu a účinnosti cyklů.....	36
4 Výsledky výpočtů a porovnání jednotlivých modifikací.....	38
4.1 Výchozí parametry teoretického motoru .....	38
4.2 Výsledek výpočtu Stirlingova ideálního cyklu .....	39
4.3 Výpočet cyklu pomocí Schmidovy teorie.....	41
4.3.1 Výpočet zdvihového objemu alfa modifikace.....	41
4.3.2 Výpočet zdvihového objemu beta a gama modifikace.....	43
4.4 Porovnání modifikací s ideálním Stirlingovým cyklem .....	46



---

4.5	Porovnání modifikací při zachování stejného objemu regenerátoru.....	47
4.6	Porovnání modifikací při zachování množství dodaného tepla .....	49
	Závěr.....	50
	Seznam použitých zkratek a symbolů .....	53
	Seznam příloh.....	56
	Přílohy práce.....	i



## ÚVOD

Se stále rostoucí ekonomikou a materiální spotřebou společnosti roste také spotřeba elektrické či mechanické energie, nerostných surovin a fosilních paliv. Zpřesňující výroba, nasazení informačních technologií, využití simulace a modelování či vývoj nových materiálů umožňuje konstruovat a vyrábět mnohem dokonalejší a úspornější zařízení. Avšak pokud například v automobilovém průmyslu nedojde k průlomovému objevu, všechna ostatní řešení jsou pouze dočasná a dobu, kdy dojde k úplnému vyčerpání fosilních paliv, pouze oddalují. Navíc snižování emisních produktů je velice limitováno a vývoj je přerušeno kvůli mnohdy neřešitelným problémům. V úvahu přichází vývoj nového produktu či přepracování dávno odložených a zapomenutých vynálezů, které potkal stejný osud. Toto znovuobjevení a přepracování může dosáhnout obdivuhodných výsledků, protože překážky mohly být v průběhu doby odstraněny při vývoji jiných odvětví.

Jedním z těchto případů je i znovuobjevení Stirlingova motoru, kterému se po dlouhých letech v ústraní dostává opět pozornosti. Tento velmi tichý, účinný a ve srovnání se spalovacími motory díky kontinuálnímu spalování i mnohem ekologičtější motor, byl patentován již v roce 1816 Robertem Stirlingem. Do ústraní se dostal během masového nasazení elektromotoru a tepelného motoru s vnitřním spalováním. Tehdy limitujícím faktorem pro motor byla neexistence takového materiálu, který by odolával nepřetržitému vystavení vysoké teploty. Jeho vynálezce Robert Stirling si toho byl již v té době dobře vědom, v jedné ze svých prací dokonce uvedl domněnku, že pravé rozšíření a ohromný rozvoj jeho vynálezu nastane až po vývoji nových teplotně odolných materiálů. Dnes se výzkumem Stirlingova motoru v různých formách zabývá téměř každá vyspělá země. Stirlingův motor je vyráběn především jako kogenerační zařízení, avšak jeho možnosti využití jsou široké. Nasazen může být jako kryogenní jednotka nebo jako zdroj elektrické energie. Je nezávislý na zdroji tepla. Využito může být jak fosilní palivo, tak i obnovitelné zdroje včetně sluneční energie.

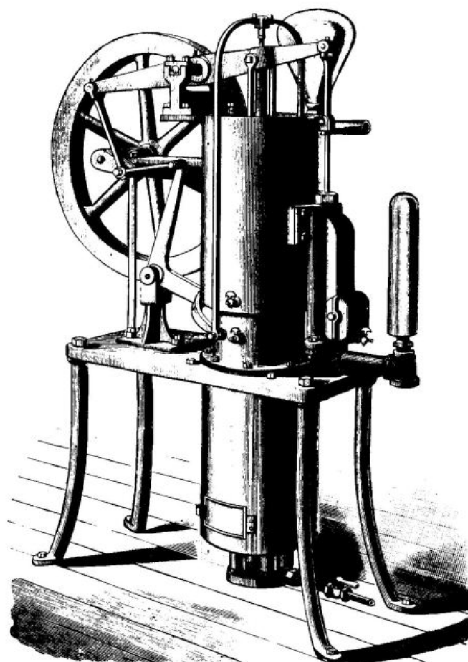
Záměrem této práce je teoretická analýza Stirlingova ideálního termodynamického cyklu a teoretická analýza Schmidovy teorie. Ačkoliv obě metody dosahují totožných termodynamických účinností, při užití Schmidovy teorie, která uvažuje spojitý pohyb pístů, je dosaženo výsledků bližších reálnému motoru. Ze závěrů této práce by měly být zřejmé rozdíly dosažených parametrů jednotlivých modifikací, a především rozdíl mezi dosaženými hodnotami při výpočtu pomocí ideálního Stirlingova cyklu a při užití zpřesňující Schmidovy metody.



# 1 STIRLINGŮV MOTOR

## 1.1 HISTORIE STIRLINGOVA MOTORU

Na počátku 19. století, v době největšího rozmachu parních strojů, dochází k výzkumu a vývoji alternativních řešení. Jedním z důvodů je především nebezpečí parních strojů a četných úrazů spojených s jejich užíváním. Nedokonalost materiálů a konstrukčních spojů vedlo často k výbuchu kotlů a následného úniku horké páry. Robert Stirling (1790–1878) si nechává v roce 1816 patentovat na tuto dobu velice efektivní, tichý, ale především bezpečný motor vlastní konstrukce. Nutno podotknout, že je to ještě v době, v níž nejsou formulovány ani termodynamické zákony, ani znalost teorie termodynamických cyklů. Sadi Carnot, který je považován za zakladatele termodynamiky, první termodynamický cyklus popsal až v roce 1824 ve své knize *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu (Úvahy o hybné síle ohně)*. [1] Termodynamické zákony v takové podobě, v jaké je známe dnes, přichází až v roce 1850 formulací první a druhé věty. Třetí věta termodynamiky přichází až v roce 1905. Robert Stirling si však těchto termodynamických zákonitostí musel být plně vědom. Již dva roky po zapsání patentu spolu se svým bratrem Jamesem staví motor o výkonu dvou koňských sil na čerpání vody z kamenolomu. V průběhu dalších let byly různé typy Stirlingových motorů použity jako vodní čerpadla, pohony ventilací či jako pohony malých mechanizací, jimiž jsou šicí stroje, odstředivky, mixéry. Největších prodejních úspěchů dosáhl Ericssonův model Stirlingova motoru, prodávaný tehdy v mnoha velikostních modifikacích a sloužící jako čerpadlo vody. Toto velmi jednoduché, tiché a bezpečné čerpadlo bylo poháněno spalováním dřeva, uhlí či plynu. Ericssonovo čerpadlo z prodejního katalogu roku 1890 je zobrazeno na obrázku 1.[6]



Obrázek 1: Ericssonovo čerpadlo z roku 1890 [6]



John Ericsson také kolem roku 1850 staví motor obrovských rozměrů s výkonem 300 kW. Tento čtyřválcový motor, s průměrem jednoho válce 4,5 m, spotřeboval, na rozdíl od srovnatelně velkého parního stroje pouze poloviční množství paliva.[8] Vývoj motoru s vnitřním spalováním a především rozvoj a hromadné nasazení elektromotoru v průmyslu uzavřely největší éru Stirlingova motoru. Znovu se ke slovu přihlásil až díky firmě Philips v roce 1937. Philips, výrobce rádií, hledal vhodný zdroj energie do přenosných radiopřijímačů. Jejich motor na kerosin dosahoval výkonu 0,2 kWe. Stirlingův motor byl vhodný zejména pro svoji tichost a absenci jakéhokoliv typu zapalování, které by rušilo radiové vlny. Zlepšující se materiály a poznatky ve výpočtech umožnily navrhovat motory pro pohony autobusů, tahačů, ponorek, vesmírných stanic, ale i užití Stirlingova motoru v oblasti medicíny jako umělé srdce. Profesor Senft v roce 1990 dosáhl rekordu v nejnižším rozdílu teploty výhřevu a chlazení. Dosáhl hodnoty pouhých 0,5°C. Nejmenší motor byl vytvořen v roce 1993 s délkou 19,5 mm, šířkou 9 mm a výškou 9,5 mm o celkové váze 0,5 gramů. Tento motor běžel bez poruchy více než hodinu.[5] Užití Stirlingova motoru ke chlazení, tedy k opačnému ději, kdy je přiváděna práce a odváděno teplo, je komentováno již v roce 1834 v časopise *The Athenaeum*. [8] Komerčního použití dosáhly Stirlingovy chladiče firmy Philips. Další komerční použití nabízí Stirlingův chladič v kryogenním inženýrství (při kryogenních teplotách se látka stává kapalnou). Toho lze využít pro separaci či čištění plynů. V armádě byly hojně nasazeny mikrochladiče pro noční optiku. V dnešní době se Stirlingovu motoru dostává stále více pozornosti.[6]

## 1.2 VÝHODY A NEVÝHODY STIRLINGOVA MOTORU

Ve srovnání s jinými pohony má Stirlingův motor řadu výhod. Již v historii byl tento motor považován za velice tichý a bezpečný. Jeho provoz je hospodárný a spolehlivý. Další výhodou je téměř bezúdržbový chod či nízké vibrace. V případě zdroje tepla vzniklého spalováním je přívod tepla vnější, nedochází tedy k mísení spalín s olejem, a tím k jeho degradaci, také nedochází k úniku oleje do prostoru spalování, a tím zhoršení emisí. Emise tohoto motoru jsou buďto nízké díky kontinuálnímu spalování, nebo žádné v případě použití sluneční nebo odpadní tepelné energie. Dále motor vyniká vysokou variabilitou použití zdroje tepla či chladu. Lze tedy využít obnovitelné i neobnovitelné zdroje jako jsou fosilní paliva, sluneční a geotermální energie či biomasa.[5]

Jako hlavní nevýhodu lze označit vysokou cenu tohoto motoru. Oproti běžnému spalovacímu motoru jsou náklady na výrobu až trojnásobné. Problém se zdá být i ve velice obtížném řízení výkonu motoru, který je náchylný na změnu zatížení, proto je při použití ve vozidlech nutno přistoupit ve srovnání s motorem s vnitřním spalováním ke složitějšímu a nekonvenčnímu přenosu energie z motoru na pohon kol. Použití v osobních vozidlech ve větší míře také znemožňuje veliký prostor zástavby motoru a jeho vysoká hmotnost. Při spuštění motoru nějakou dobu trvá, než se vnitřní směs zahřeje a motor může začít stabilně fungovat. Oproti motoru s vnitřním spalováním tedy není možné uvést vozidlo ihned do pohybu. Za omluvu může být považován fakt, že Stirlingovu motoru nebyl dopřán takový čas pro vývoj oproti motorům spalovacím, za nadějně lze považovat výsledky zlepšení vlastností testovaných motorů v průběhu jejich vývoje.[8]

## 1.3 JAK PRACUJE STIRLINGŮV MOTOR

Princip Stirlingova motoru je tak jako u všech teplených zařízení založen na přeměně tepelné energie na mechanickou. Plyn se při zahřátí rozpíná a při chladnutí se jeho objem zmenšuje. Mechanická energie, odebíraná z klikového mechanismu motoru, je výsledkem

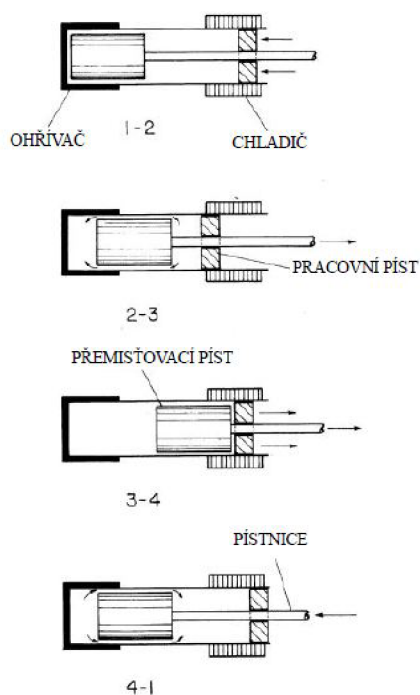


rozdílu prací vytvořenou expanzí plynu a prací spotřebovanou na stlačení plynu a pokrytím všech ztrát v mechanismu. Toho je dosaženo tím, že expanze probíhá za vyšší teploty, než komprese. Důležitý je tedy teplotní rozdíl dvou odlehlých částí motoru. Čím vyšší tento rozdíl bude, tím více mechanické práce motor vykoná. Pro rozběh motoru však stačí takový rozdíl teplot, aby došlo k pokrytí ztrát třením a prouděním plynu uvnitř motoru. Stirlingův motor je charakteristický svým hermeticky uzavřeným pracovním prostorem s konstantním obsahem pracovního média. Znamená to, že zde není sání ani výfuk tolik charakteristický pro běžné spalovací motory. Ohřívání náplně motoru probíhá v ohřivači a jeho teplota je udržována na stálé hodnotě. Zdrojem tepla může být fosilní palivo i obnovitelné zdroje jako je bioplyn, odpadní teplo či sluneční energie. Chlazení náplně probíhá v chladiči na odvrácené straně motoru. Součástí, která do velké míry ovlivňuje účinnost Stirlingova motoru, je regenerátor, umístěný mezi chladičem a ohřivačem. Regenerátor předehřívá a předchlazuje teplo, které jím proudí z chladiče do ohřivače a zpět. Teplo se však v regenerátoru neztrácí, ale akumuluje, aby bylo využito v jiné fázi oběhu. Účinnost teoretického cyklu bez regenerátoru je zhruba 19,5 %, s bezztrátovou regenerací dosahuje běžné hodnoty okolo 70 %. Tato hodnota závisí pouze na minimální a maximální hodnotě teploty cyklu. Z tohoto důvodu je účinnost Stirlingova cyklu rovna účinnosti Carnotova cyklu. V termodynamických dějích nelze získat účinnosti vyšší.[5],[6]

Jak pracuje Stirlingův motor je patrné z obrázku 2.[6] Válec je z jedné strany pevně uzavřen a z druhé strany utěsněn pomocí pohyblivého pracovního pístu. Uzavřený konec válce je obklopen ohřivačem, který je stálým zdrojem tepla. Na druhém konci je chladič. Chlazení probíhá vodou či vzduchem. Ve válci mezi pístem a vyhříváním koncem je zařízení zvané přemístovací píst. Přemístovací píst je vzhledově podobný klasickému pístu, avšak má radiální vůli, což umožňuje směsi přemísťovat se z jedné části válce do druhé. Přemístovací píst je obvykle napojen na pístnici, která vzduchotěsně prochází pístem a je napojena na klikový hřídel. Při pohybu přemístovacího pístu se pracovní objem motoru nemění. Naproti tomu pohyb pracovního pístu mění pracovní objem motoru. Pracovní píst je za pístem přemístovacím zpožděn vhodnou konstrukcí klikového hřídele. V prvním kroku ideálního Stirlingova cyklu (1–2) je veškerý studený plyn mezi pracovním pístem a přemístovacím pístem. Přemístovací píst je v klidu v teplé části válce. Pracovní píst se pohybuje vpřed a stlačuje tak plyn. Tento proces je nazýván jako izotermická komprese. Kompresi obstarává připojený setrvačnický klikového mechanismu, který není na obrázku zobrazen. Ve druhém kroku (2–3) se ke stojícímu pracovnímu pístu přibližuje píst přemístovací. Děj je nazýván jako izochorický ohřev, protože celkový objem plynu je při tomto kroku zachován. Plyn uvnitř válce proudí kolem přemístovacího pístu a dostává se do horké části válce, kde je zahříván. Tím také roste tlak. Mechanická energie nutná k pohybu přemístovacího pístu je velice malá a je spotřebována na překonání tření táhla a tření plynu, proudícího kolem přemístovacího pístu. V následném kroku (3–4) probíhá izotermická expanze, kdy rozpínající se plyn tlačí oba písty a motor koná mechanickou práci. Pracovní píst dosahuje své krajní pozice a veškerý plyn je v teplé oblasti. V posledním kroku (4–1) přemístovací píst přenáší plyn z teplé části motoru zpět do chladné části. Jedná se o izochorické chlazení. Pracovní píst je v tomto kroku v klidu a plyn se ochlazuje. Ke konci kroku je přemístovací píst opět v krajní poloze teplé části válce, objem plynu je v chladné komoře a celý děj se může opakovat následnou kompresí.[6]



Práce v tepelném stroji vzniká změnou objemu a tlaku. Kroky 2–3 a 4–1 slouží k přenosu plynu z jedné komory do druhé pomocí přemísťovacího pístu, a tedy k ohřevu a chlazení náplně. Píst pracovní je v těchto krocích v klidu. Vzhledem k zanedbatelné velikosti táhla, které vstupuje do pracovního objemu při pohybu přemísťovacího pístu směrem k horké části, je součet objemů obou komor konstantní po celý děj přemísťování, a motor v těchto fázích tedy nekoná práci. Během komprese se práce motoru musí přivádět. Velikost této práce závisí na kompresním poměru. Avšak díky vyšší teplotě plynu při expanzi než při kompresi je práce získaná vyšší, než práce spotřebovaná kompresí, čímž vzniká výsledná užitečná mechanická energie.[8]



Obrázek 2: Princip funkce Stirlingova motoru [6]

## 1.4 KONSTRUKČNÍ TYPY STIRLINGOVA MOTORU

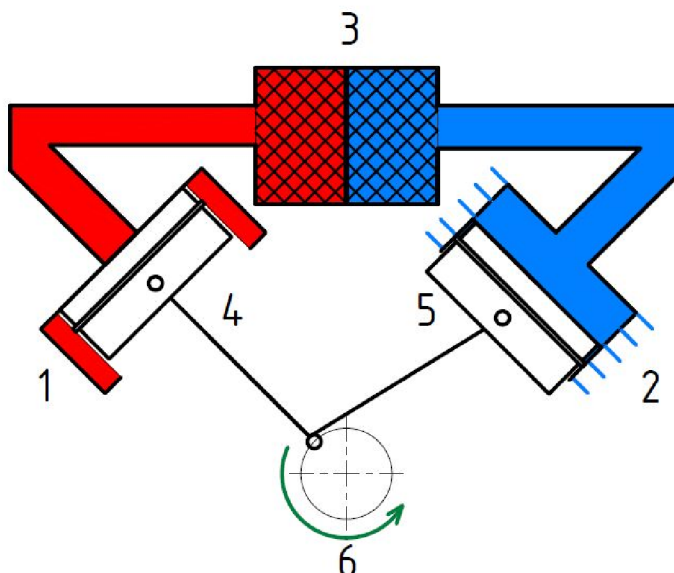
U Stirlingova motoru došlo během času k vývoji mnoha variant. Každá z variant má své výhody a nevýhody a předurčují tak oblasti jejich použití. Jednotlivé varianty se od sebe odlišují uspořádáním válců a průběhem změny objemů jednotlivých prostor. Motory lze dělit na jednočinné, dvojčinné, hybridní či motory s volnými písty. Následuje popis základních modifikací alfa, beta a gama.[18]

### 1.4.1 ALFA MODIFIKACE

Alfa modifikace je nejjednodušším konstrukčním typem Stirlingova motoru. Používá se u jednoduchých zařízení, na které nejsou kladeny vysoké tepelné nároky. Jedná se zejména o chladničky či čerpadla. Důvodem je to, že v alfa modifikaci je nepřetržitě zahříván jeden ze dvou válců. Motor je dvouválcový, kdy každý z pístů zastává funkci pracovní i rozmísťovací. Můžeme však válce a písty rozdělit na expanzní 4, a kompresní 5 (viz obrázek 3). Expanzní pracovní prostor je v trvale zahřívané části od ohřívače 1 a expanzní píst předává energii



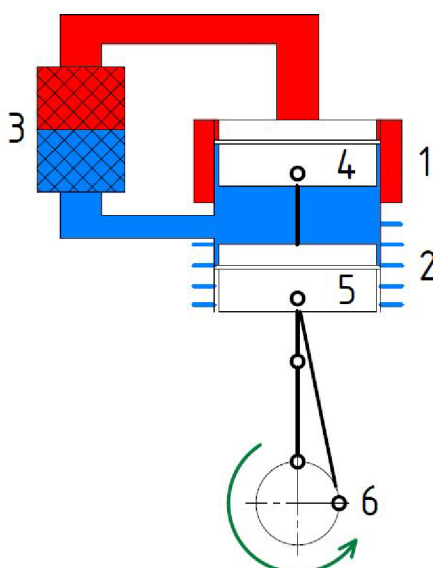
rozpínajícího se plynu na klikový mechanismus 6. Setrvačnická část expanzní energie použije ke kompresi plynu v kompresní části, chlazené chladičem 2. Mezi válci se nachází regenerátor 3. Použití dvou válců také přináší problém s utěsněním celého prostoru. Alfa modifikace je na obrázku 3.[5],[10]



Obrázek 3: Alfa modifikace Stirlingova motoru

#### 1.4.2 BETA MODIFIKACE

Oba písty se v beta modifikaci nacházejí v jediném válci, na kterém je ohřivač 1 i chladič 2. Mezi horkou a chladnou část je vřazen regenerátor 3. Na této koncepci byl popsán princip činnosti Stirlingova motoru v kapitole 1.2. Jedná se o původní návrh patentovaný Robertem Stirlingem. Přednost tohoto typu je v maximálním využití pracovního prostoru, což souvisí s malou velikostí zástavby motoru, a tedy i hmotností. Negativem tohoto motoru je konstrukčně náročné řešení vývodu pístnic, řešení klikového mechanismu 6 a utěsnění jednotlivých prostor. Zdvihy obou pístů se můžou vzájemně překrývat. Na obrázku 4 rozlišujeme píst přemísťovací 4 a pracovní 5.[10],[18]



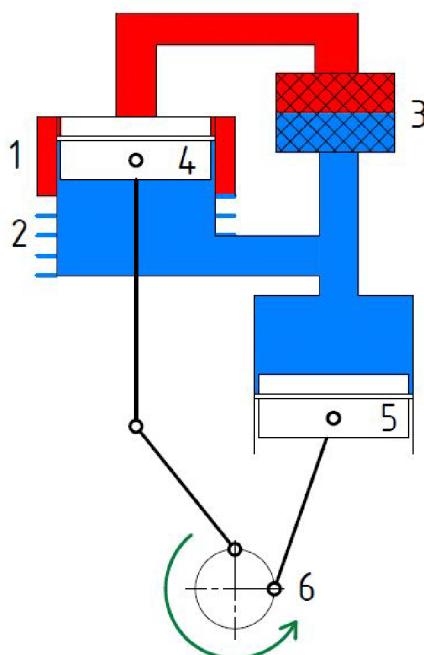
Obrázek 4: Beta modifikace Stirlingova motoru





### 1.4.3 GAMA MODIFIKACE

Gama modifikace je obdobná verzi beta, avšak válce jsou samostatné. Motor vyniká svojí těsností, je zamezeno vniknutí mazacího filmu do horkého pracovního prostoru a těsnění nejsou tolik tepelně namáhána. Písty lze opět dělit na přemísťovací 4 a pracovní 5. Nevýhodou gama modifikace je složitější konstrukce, použití spojovacích kanálků zvětšujících mrtvý objem motoru, a tím pokles účinnosti. Gama modifikace je na obrázku 5.[10],[18]



Obrázek 5: Gama modifikace Stirlingova motoru

### 1.5 POUŽITÍ STIRLINGOVA MOTORU DNES

I přes vyšší cenu Stirlingova motoru ve srovnání se spalovacím motorem se můžeme s jeho aplikací setkat i dnes. Roční produkce tohoto typu motoru dosahuje 100000 vyrobených kusů. Nasazení tohoto typu motoru je ve velice specifických oblastech. Nejvíce je využíván k produkci elektrické energie, a to jak přeměnou energie sluneční, tak i spalováním běžných paliv z obnovitelných či neobnovitelných zdrojů. Vysoce výkonné Stirlingovy motory se používají jako pohony ponorek. Dále ve vzduchotechnice a klimatizaci, jako vodní a tepelná čerpadla a zejména jako kogenerační a mikrokogenerační jednotky.[5]

Zajímavá je studie Nasa, která v roce 1986 měla za úkol potvrdit konkurenceschopnost Stirlingova motoru užitím v osobním vozidle. Hlavní myšlenkou k užití Stirlingova motoru byla možnost použít jakéhokoliv druhu paliva. Studie začala v roce 1978, kdy byl motor typu P-40 zastavěn do vozu GM Opel. Z výsledku studie vyplývá, že za téměř deset let vývoje došlo především ke snížení nákladů na výrobu motoru z 5000 USD na 1200 USD díky použití běžných materiálů na výrobu a také díky celkovému zjednodušení systému. Akcelerace motoru stoupla trojnásobně a spotřeba klesla na polovinu. Za tak krátké období vývoje se jedná o úžasné výsledky. Celkové vlastnosti vozidla Chevrolet Celebrity s motorem MOD II v roce 1986 jsou v porovnání s originálním spalovacím zážehovým motorem srovnatelné. Lepších výsledků dosahuje krouticí moment motoru a množství vypuštěných emisí.[2]

Další ze studií NASA se zabývá užitím Stirlingova motoru s volnými písty pro použití ve vesmíru. Jeden z hlavních požadavků pro vesmírné použití je nízká váha motoru. Motor



nemá klikový mechanismus, energie je odebírána či dodávána z lineárních elektromotorů nebo čerpadel. Výhoda motoru je i v nízkém tření mezi pístem a válcem, další mechanické ztráty díky absenci klikového hřídele odpadají. Tím se zvyšuje i velice potřebná dlouhá životnost pro užití ve vesmíru. Další prodloužení životnosti je v možnosti hermeticky uzavřeného systému. Úniky náplně přes těsnění klikového hřídele odpadají. Za zdroj tepla je uvažována nukleární či sluneční energie. Příznivé jsou nízké vibrace. Na testovaném motoru o výkonu 25 kW dosáhly výchylky vibrací hodnoty 0,01 mm.[3]

V České republice se vývojem Stirlingova motoru zabýval výrobce kogeneračních jednotek TEDOM a.s. z Třebíče. Motor při váze 110 kg dosahoval výkonu 7,9 kW při otáčkách  $1500 \text{ min}^{-1}$ . Jako palivo byl použit zemní plyn. Motor byl vyvíjen jako mikrokogenerační jednotka poháněná zemním plynem, bioplynem a obnovitelnými zdroji, odpadním teplem či slunečním zářením.[4]

Velké Stirlingovy motory o výkonu 75 kW jsou použity u švédských vojenských ponorek a slouží pro dobíjení baterií. První instalace proběhla v roce 1988 firmou SAAB AG v loděnici Kockums. Motor nepotřebuje na rozdíl od ostatních pohonů přístup vzduchu. Výdrž ponorky pod vodou se prodloužila z dnů na dva týdny. Navíc je motor velmi tichý, nevznikají vibrace a odhalení takové ponorky je znesnadněno. Ve srovnání s nukleárním pohonem je toto řešení velice snadné, bezpečné a levné.[7]



## 2 TEORIE STIRLINGOVA CYKLU

### 2.1 IDEÁLNÍ STIRLINGŮV OBĚH

Ideální Stirlingův oběh nám dává určitý obraz výsledné účinnosti a výkonu motoru. Výpočet ideálního cyklu by však nikdy neměl být brán za podklad ke konstrukci reálného motoru či jeho analýze. Slouží nám především pro zjednodušení, pochopení a popis reálného termodynamického děje uvnitř motoru. Ideální Stirlingův oběh počítá s rovnicemi ideálního plynu, tedy ideálně stlačitelného, bez vnitřního tření. Pro tento plyn platí stavová rovnice. Dále nedochází k mechanickému tření či úniku média díky netěsnostem. Plyn je dokonale promísen po celém objemu válců. Regenerátor funguje se stoprocentní účinností. Rozmístění tlaku a teploty je v daný okamžik stejný ve všech místech objemu. Pohyb pístů je nespojitý. Prostup tepla probíhá pouze mezi pracovním plynem, stěny válce či písty teplo nepřenáší. Účinnost tohoto ideálního Stirlingova motoru dosahuje termodynamicky nejvyšší možné účinnosti, tedy Carnotově účinnosti cyklu  $\eta_C$ . Stirlingův cyklus se od Carnotova odlišuje užitím regenerace tepla při izochorických dějích.[6]

### 2.2 REÁLNÝ OBĚH STIRLINGOVA MOTORU

Reálný Stirlingův oběh se od ideálního liší v mnoha aspektech. V reálném motoru vznikají hydraulické a třecí ztráty a únik vnitřní náplně díky nedokonalé těsnosti. Dále v reálném motoru proces expanze a komprese probíhá někde mezi izotermickým a adiabatickým dějem. To je způsobeno tím, že použité materiály nemají nekonečně velký součinitel tepelné vodivosti a teplo se přenáší po velice krátkou dobu. Dále se v ideálním cyklu neuvažuje s tzv. mrtvým prostorem. Tento prostor není zdvihovým objemem žádného z pístů. Je tvořen z vnitřního vedení kanálků či připojovacích trubek, výměníků a také samotný regenerátor je mrtvým prostorem. Třetí rozdíl je přímo v cyklickém, nepřetržitém pohybu pístů. Nesouvislý a trhavý pohyb, sledující ideální cyklus, by velice namáhal celý systém, vznikal by hluk a vibrace a životnost takového stroje by byla velice nízká. Všechny tyto důvody ovlivňují reálný motor natolik, že se reálné hodnoty účinnosti motoru pohybují mezi 40–70 % ideální účinnosti. Výčet výpočetních metod, které se svými výsledky více či méně blíží reálnému oběhu, shrnuje následující kapitola.[6],[5]



## 3 METODY VÝPOČTU STIRLINGOVA MOTORU

### 3.1 MATEMATICKÉ MODELÝ PRO ANALÝZU STIRLINGOVA MOTORU

Metody pro výpočet a popis dějů, probíhajících ve Stirlingově motoru, se navzájem odlišují v dosažené přesnosti výsledků. S rostoucí přesností roste náročnost a doba výpočtu a u nejpřesnějších metod také požadavky na technické a softwarové vybavení. Každá z metod užívá různého stupně zjednodušujících předpokladů a je těmito předpoklady limitována. Metody lze dělit do čtyř hlavních skupin.[16],[6]

#### 3.1.1 METODY PRVNÍHO ŘÁDU

Tyto metody slouží k předběžnému návrhu parametrů Stirlingova motoru. Jedná se o nejjednodušší metody, nazývané také jako metody přibližné. V prvním kroku je použita analýza bez uvažování ztrát. Nejznámější analýzou prvního řádu je Schmidtova metoda. Výsledky získané Schmidtovou metodou jsou následně zpřesněny korekčními ztrátovými součiniteli, které jsou získány empiricky měřením reálných motorů. Metody prvního řádu jsou vhodné pro hrubé odhady velikosti a výkonu motoru, avšak nejsou použitelné pro detailnější návrh motoru.

#### 3.1.2 METODY DRUHÉHO ŘÁDU

Oproti metodám prvního řádu se ke korekci výsledků analýzy používají ztrátové součinitele vypočítané pro konkrétní motor. Ztráty jsou rozděleny na výkonové, zahrnující ztráty třením, prouděním, hysterezní a ztráty vzniklé únikem média díky netěsnostem motoru. Druhá skupina zahrnuje tepelné ztráty, vzniklé vedením stěnou či nedokonalostí regenerátoru. Při výpočtu se neuvažuje závislost obou skupin ztrát, proto je metoda druhého řádu nazývána metodou oddělenou. Metody druhého řádu se užívají pro optimalizaci parametrů motoru. Lze je dále dělit podle děje, který se uvažuje při změně objemů na modely izotermické, adiabatické a polytropické. Izotermický model je model Schmidtvův, přestup tepla je nekonečně rychlý, teplota zůstává nezměněna. Adiabatický model uvažuje naopak nekonečně dlouhý čas přestupu tepla. Přestup tepla je tedy během děje nulový. V polytropickém modelu se mění teplo i teplota.

#### 3.1.3 METODY TŘETÍHO ŘÁDU

Metody třetího řádu jsou označovány také jako metody uzlů. Slouží k detailní simulaci motoru, určení rozložení hmoty, tlaku a teploty v motoru. Tato metoda může být výhodná v případě, v němž je technicky obtížné měřit skutečný motor. Motor se nejprve rozdělí na síť uzlů, poté se sestaví jednotlivé diferenciální rovnice, které se řeší pomocí numerických metod.

#### 3.1.4 METODY ČTVRTÉHO ŘÁDU

Označovány jako metody charakteristik. Tyto metody jsou založeny na teorii proudění plynu a řeší systémy nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Softwarové CFD modelování umožňuje detailní návrh jednotlivých částí motoru a optimalizaci pro usměrnění toku plynu v motoru.



### 3.2 VÝPOČET STIRLINGOVA IDEÁLNÍHO CYKLU

Stirlingův termodynamický ideální cyklus je cyklus uzavřený, vratný. Skládá se ze dvou izoterm a dvou izochor. Teplo se s okolím vyměňuje ve všech krocích. Pro výpočet cyklu musíme znát základní návrhové hodnoty motoru. Při návrhu motoru se volí maximální a minimální teploty motoru  $T_{max}$  a  $T_{min}$  s ohledem na druh použitého paliva a také tepelné odolnosti použitého materiálu, zdvihový objem motoru  $V_Z$ , kompresní poměr  $\varepsilon_k$  v závislosti na velikosti mrtvého prostoru a hodnota maximálního tlaku  $p_{max}$  dosaženého v cyklu v závislosti na použitém materiálu. Dále je nutné znát, jaký pracovní plyn bude použit. Pro předběžný výpočet výkonu je nutno stanovit také pracovní otáčky motoru  $n$ . Výpočet ideálního cyklu nám dává určitou představu o výkonu a účinnosti motoru ze zadaných parametrů či naopak o potřebných změnách parametrů pro dosažení předem stanovené účinnosti a výkonu. Díky výpočtu také získáváme informaci o tom, zda je vůbec možné uvažovat nasazení Stirlingova motoru v dané oblasti použití. [6]

Při výpočtu Stirlingova ideálního cyklu využijeme vztahů z [14]. Vycházíme ze základní stavové rovnice ideálního plynu:

$$pV = mrT \quad (1)$$

Kde:

$p$  tlak [Pa]

$V$  objem [ $m^3$ ]

$m$  hmotnost [kg]

$r$  měrná plynová konstanta [ $J\ kg^{-1}K^{-1}$ ]

$T$  teplota [K]

Pro dva různé stavy totožného plynu platí:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (2)$$

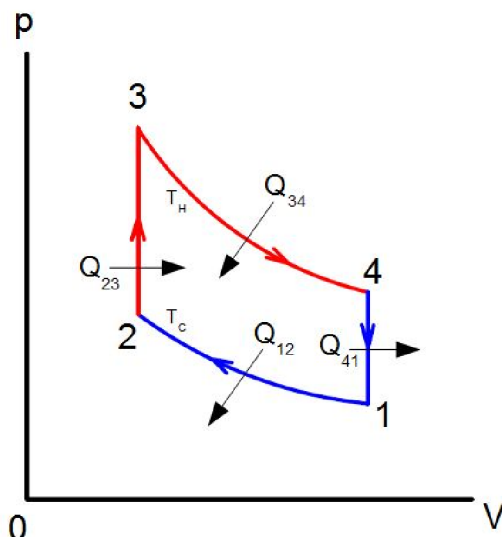
Neboli:

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \quad (3)$$

Označme jednotlivé body cyklu následovně. Pracovní bod  $1$  je výchozím bodem cyklu, předpokládáme znalost parametrů v tomto bodě. Izotermická komprese platí až do bodu  $2$ . Teplo  $Q_{12}$ , vznikající kompresí, je odváděno chladičem. Tím je zachována izotermie a teplota  $T_C$  se v kroku  $1-2$  nemění. Z bodu  $2$  do bodu  $3$  je plyn izochoricky zahříván teplem z regenerátoru  $Q_{23}$ . Jeho objem je zachován. Mezi body  $3-4$  plyn izotermicky expanduje při teplotě  $T_H$ . Teplo  $Q_{34}$  je dodáváno z ohřívače. Z bodu  $4$  se plyn izochoricky chladí, teplo  $Q_{41}$  je odváděno do regenerátoru, cyklus končí výchozím bodem  $1$ .



Ideální Stirlingův cyklus s jednotlivými pracovními body a teplem do cyklu vstupujícím a vystupujícím je na obrázku 6. Děj probíhá mezi teplotou  $T_H$  a  $T_C$ .



Obrázek 6: Ideální Stirlingův cyklus

Pro jednotlivé pracovní body cyklu dále platí:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_4 = V_{max} \\ V_2 &= V_3 = V_{min} \\ T_1 &= T_2 = T_C = T_{min} \\ T_3 &= T_4 = T_H = T_{max} \\ p_1 &= p_{min} \\ p_3 &= p_{max} \end{aligned}$$

Hodnotu  $V_{min}$  lze vypočítat při znalosti maximálního objemu  $V_{max}$  a daného kompresního poměru  $\varepsilon_k$  ze vztahu:

$$V_{min} = \frac{V_{max}}{\varepsilon_k - 1} \quad (4)$$

Kde kompresní poměr je dán:

$$\varepsilon_k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{max}}{V_{min}} \quad (5)$$

Hmotnost pracovního plynu lze spočítat ze stavové rovnice z jakéhokoliv pracovního bodu. Pro pracovní bod  $I$  platí:

$$m = \frac{p_1 V_1}{r T_1} \quad (6)$$



Pro výpočet bodů ležících v termodynamických dějích platí následující rovnice:

**Izotermická komprese 1–2:**

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad (7)$$

Odebrané teplo:

$$Q_{12} = mrT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (8)$$

**Izochorický ohřev 2–3:**

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \quad (9)$$

Teplo dodané regenerátorem:

$$Q_{23} = mc_v(T_3 - T_2) \quad (10)$$

Kde:

$c_v$  měrná tepelná kapacita za stálého objemu [ $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} r \quad (11)$$

$\kappa$  Poissonova konstanta plynu [-]

**Izotermická expanze 3–4:**

$$p_3V_3 = p_4V_4 \quad (12)$$

Teplo dodané ohřivačem:

$$Q_{34} = mrT_3 \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right) \quad (13)$$

**Izochorické chlazení 4–1:**

$$\frac{p_4}{T_4} = \frac{p_1}{T_1} \quad (14)$$

Teplo odebrané regenerátorem:

$$Q_{41} = mc_v(T_1 - T_4) \quad (15)$$



### Práce vykonaná cyklem a účinnost Stirlingova cyklu:

Indikovaná práce cyklu je rovna součtu všech teplot do cyklu dodaných a odebraných:

$$W_I = Q_I = -|Q_{12}| + |Q_{23}| + |Q_{34}| - |Q_{41}| \quad (16)$$

Pokud je splněn předpoklad, že regenerátor pracuje bezztrátově, pak velikost tepla dodaného regenerátorem  $Q_{23}$  do cyklu je rovno velikosti tepla  $Q_{41}$ , které se do regenerátoru z cyklu vrací zpět. Tuto skutečnost lze zapsat následovně:

$$|Q_{23}| - |Q_{41}| = 0 \quad (17)$$

Pak se rovnice vykonané práce zjednoduší na tvar:

$$W_I = Q_I = |Q_{34}| - |Q_{12}| \quad (18)$$

Při izochorickém ději  $2-3$  a  $4-1$  se objem plynu nemění a plyn nekoná práci. Výsledná práce je rozdíl práce vykonané expanzí plynu  $Q_{34}$  a práci spotřebované ke kompresi  $Q_{12}$ .

Účinnost motoru je podíl práce získané a práce do cyklu dodané. Pak lze psát:

$$\eta = \frac{|Q_{34}| - |Q_{12}|}{|Q_{34}|} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad (19)$$

Výkon motoru je definován jako součin celkového tepla  $Q_I$  a pracovních otáček motoru  $n$ :

$$P = Q_I n \quad (20)$$

#### 3.2.1 REGENERÁTOR A JEHO VLIV NA ÚČINNOST CYKLU

Použití a účinnost regenerátoru ve Stirlingově motoru má zásadní vliv na výslednou účinnost celého motoru. [9] Je zaveden teplotní poměr:

$$\psi = \frac{T_{max}}{T_{min}} \quad (21)$$

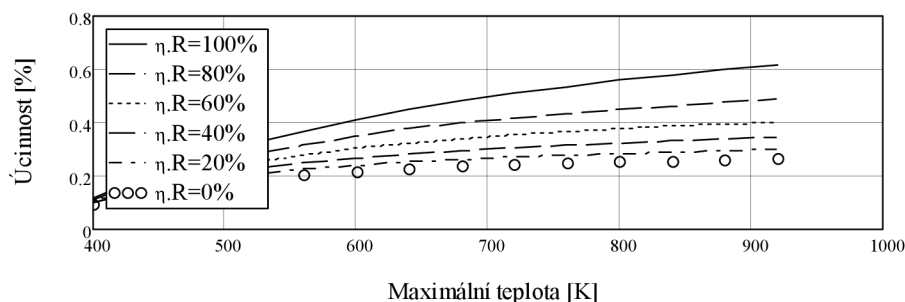
Výslednou účinnost  $\eta$  se zahrnutím účinnosti regenerátoru  $\eta_R$  lze následně zapsat jako:

$$\eta = \frac{\ln \varepsilon_k (\psi - 1)}{\frac{(\psi - 1)}{\kappa - 1} \frac{(100 - \eta_R)}{100} + \psi \ln \varepsilon_k} \quad (22)$$





Závislost účinnosti Stirlingova motoru na teplotě v expanzním prostoru při uvažování různé účinnosti regenerátoru  $\eta_R$  je zobrazena na obrázku 7.

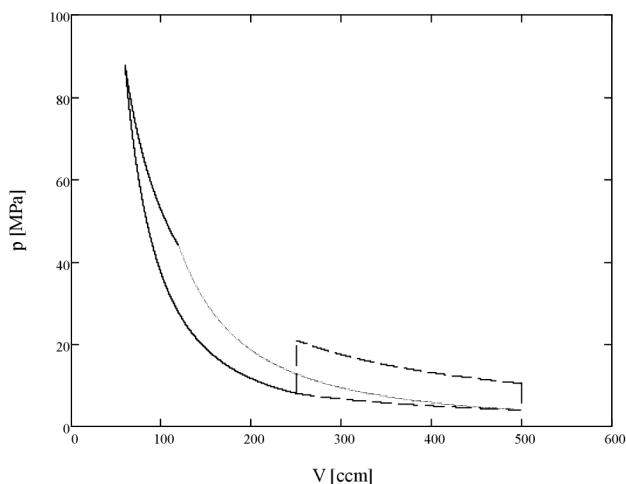


Obrázek 7: Závislost účinnosti regenerátoru na celkové účinnosti cyklu

### 3.3 POROVNÁNÍ CARNOTOVA A STIRLINGOVA CYKLU

Pro porovnání účinností různých motorů se používá Carnotův cyklus. Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796–1832), francouzský vědec považovaný za jednoho ze zakladatelů termodynamiky, popsal tento cyklus ještě před formulací prvních termodynamických zákonů. Výsledkem jeho práce je popis cyklu parního stroje pomocí ideálních termodynamických dějů. Carnotův ideální termodynamický cyklus se skládá ze dvou izoterm (jako u Stirlingova cyklu), avšak izochory jsou zde nahrazeny adiabaty. Výměna tepla cyklu s okolím probíhá tedy pouze při izotermických dějích. Carnotův ideální cyklus se používá především jako cyklus porovnávací. Nelze jej zrealizovat, avšak snažíme se přiblížit jeho účinnosti. Poměr účinnosti Carnotova cyklu s účinností zkonstruovaného motoru nám udává, jak úspěšná byla realizace motoru. Účinnosti Carnotova a Stirlingova cyklu jsou stejné. Jejich hodnoty závisí pouze na maximální a minimální teplotě cyklu, tedy na rozdílu přivedeného a odvedeného tepla, neboli rozdílu přivedené a odvedené práce.[14]

Z následujícího výpočtu pro konkrétní zadané parametry vyplývá, že realizace Stirlingova cyklu je jednodušší než realizace Carnotova cyklu. Při zachování vstupních parametrů cyklu nám u Carnotova cyklu kompresní poměr a maximální tlak vzroste téměř pětinašobně. Nereálnost provedení ideálního Carnotova děje pro stejné vstupní parametry je zobrazena na obrázku 8.



Obrázek 8: Porovnání ideálního Stirlingova a Carnotova cyklu



### 3.4 VÝPOČET STIRLINGOVA MOTORU POMOCÍ SCHMIDTOVY TEORIE

V následujících kapitolách jsou podrobně uvedeny jednotlivé kroky výpočtu Schmidtova modelu pro konstrukční modifikace alfa, beta a gama. Cílem užití zjednodušujících koeficientů v rovnicích umožňovalo v době bez výpočetní techniky celý výpočet zpřehlednit a zjednodušit. Výsledkem úprav je jednoduchý vztah pro výpočet okamžitého tlaku, který je závislý pouze na jedné proměnné, na úhlu natočení klikového hřídele, ostatní členy jsou pro konkrétní motor konstantní. Tento vztah je pro všechny modifikace díky užitým substitucím totožný. Základním podkladem pro odvození vztahů Schmidtova modelu byly zdroje [10],[13] a [17]. Nutno však podotknout, že uvedené zdroje obsahují pouze stručný výčet vzorců, nutných k sestavení p-V diagramů a výpočtu výkonu, případně účinnosti motoru. Jejich správnost tudíž nemůže být ihned odhadnuta a především zdroj [13] obsahuje mnoho nejasností. Při studiu Schmidtova modelu výpočtu bylo zjištěno, že nedostatky se bohužel vyskytují i v dalších pracích, odkazujících na zdroj [13]. Hlavním cílem této práce je popis jednotlivých kroků Schmidtovy analýzy tak, aby budoucí zájemce byl schopen ověřit správnost použitých vzorců a porozuměl užitým matematickým krokům ve Schmidtové analýze. Proto jsou mnohé matematické kroky v následujících kapitolách zbytečně jednoduché a je jich mnoho, avšak jejich vyčerpávající výčet umožňuje i laickému čtenáři pochopit vznik jednotlivých rovnic.

Schmidtova teorie si zachovává předpoklad izotermické komprese a expanze, avšak na rozdíl oproti Stirlingovu ideálnímu cyklu uvažuje spojitý pohyb pístů. Tuto teorii v roce 1871 uveřejnil profesor Gustav Schmidt, působící na pražské polytechnice.[8] Jedná se o jednu z prvních metod, které byly použity pro přiblížení výpočtu ke skutečnému cyklu. Výsledky Schmidtovy metody se od skutečných, reálně naměřených hodnot značně liší, avšak metodu lze řešit algebraicky, je poměrně jednoduchá a výsledky je možné použít k prvotnímu návrhu parametrů motoru. Z výsledného p-V diagramu lze dále předběžně určit síly, působící na píst v průběhu cyklu a z velikosti dodaného a odebraného tepla předběžnou velikost teplosměnných ploch chladiče a ohřivače.[15]

Schmidtova teorie uvažuje mnohá zjednodušení pro výpočet. Expanze a komprese ve Schmidtové teorii probíhá izotermicky, stejně jako u ideálního cyklu. Dále je stejně jako u ideálního Stirlingova cyklu uvažován ideální plyn, který se řídí stavovou rovnicí. Sinusový pohyb pístů je dalším ze zjednodušení výpočtu, v reálném motoru není možné pohyb pístů pomocí jednoduché goniometrické rovnice popsat. Další zjednodušení a předpoklady, které vedou ke snížení přesnosti výpočtu, jsou uvedeny dále.[10]

#### 3.4.1 PŘEDPOKLADY PRO POUŽITÍ SCHMIDTOVY TEORIE

- 1) Okamžitý tlak je po celém objemu konstantní.
- 2) Proces komprese a expanze probíhá izotermicky.
- 3) Stav pracovního plynu se mění dle rovnice ideálního plynu  $pV = nrT$ .
- 4) Regenerátor pracuje bezztrátově.
- 5) Expanze probíhá při teplotě  $T_H$ , komprese při teplotě  $T_C$ , není uvažován teplotní spád mezi výměníkem a hlavou motoru.
- 6) Teplota plynu v regenerátoru je průměrnou hodnotou teploty expanzní  $T_H$  a kompresní  $T_C$ .



- 7) Pracovní médium má stálou hmotnost. Nedochází k úniku média, prostor je dokonale utěsněn.
- 8) Teplota výměníku je stejná po celém jeho objemu.
- 9) Teploty stěn válců a pístů jsou konstantní.
- 10) Změny objemů se mění dle sinusoidy.
- 11) Děje v motoru jsou ději ustálenými.

### 3.4.2 VÝPOČET ALFA MODIFIKACE POMOCÍ SCHMIDTOVY TEORIE

Alfa modifikace se skládá z okamžitého pracovního objemu horké strany  $V_H$ , okamžitého pracovního objemu studené strany  $V_C$  a objemu regenerátoru  $V_R$ . Celkový pracovní objem motoru je dán jejich součtem:

$$V = V_H + V_C + V_R \quad (23)$$

Výpočet okamžitých objemů válců chladné  $V_C$  a horké  $V_H$  strany motoru, které se mění v závislosti na úhlu natočení klikového hřídele  $\varphi$  je definován následovně:

$$V_H = \frac{V_{ZH}}{2} (1 - \cos\varphi) + V_{DH} \quad (24)$$

$$V_C = \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + V_{DC} \quad (25)$$

Kde:

$\varphi$  úhel natočení klikového hřídele [°]

$\alpha$  fázový úhel [°]

$V_{ZH}$  zdvihový objem expanzního, horkého válce [cm<sup>3</sup>]

$V_{ZC}$  zdvihový objem kompresního, studeného válce [cm<sup>3</sup>]

$V_{DH}$  mrtvý objem expanzního, horkého prostoru [cm<sup>3</sup>]

$V_{DC}$  mrtvý objem kompresního, studeného prostoru [cm<sup>3</sup>]

Úhel natočení klikového hřídele  $\varphi$  je definován jako  $\varphi=0^\circ$ , pokud expanzní píst horké strany je ve své horní úvrati. Součástí okamžitého objemu chladné či horké strany motoru je i mrtvý, škodlivý objem. Tento objem je nepříznivý a snižuje výkon motoru. Teploty v mrtvých objemech  $V_{DH}$  a  $V_{DC}$  odpovídají teplotám studené a teplé části motoru. Rovnice (24) vyjadřuje okamžitý objem horké strany motoru  $V_H$ . Tento objem nabývá maximální hodnoty  $V_{ZH}+V_{DH}$  při úhlu  $\varphi=180^\circ$  a minimální hodnoty, tedy pouze mrtvého objemu  $V_{DH}$  při úhlu  $\varphi=0^\circ$ . Rovnice (25) okamžitého objemu chladné strany motoru se liší od rovnice (24) pouze tím, že uvažuje fázový úhel mezi písty, tedy opoždění druhého pístu za prvním. Fázový úhel  $\alpha$  je jedním z parametrů, které jsou při návrhu motoru optimalizovány za účelem dosažení vyšší účinnosti.



Hmotnost plynného média uvnitř motoru je podle předpokladu 7) konstantní. Celkovou hmotnost média lze vyjádřit podobně jako objemy v rovnici (23) jako součet hmotností pracovního média v jednotlivých prostorách motoru rovnicí (26).

$$m = m_H + m_C + m_R \quad (26)$$

Schmidtův model pracuje s ideálním plynem, který se řídí stavovou rovnicí. Pak lze psát rovnici (26) ve tvaru:

$$m = \frac{pV_H}{rT_H} + \frac{pV_C}{rT_C} + \frac{pV_R}{rT_R} \quad (27)$$

Tlak je podle předpokladu 1) po celém prostoru v daném okamžiku natočení klikového hřídele stejný. Teplota regenerátoru je podle předpokladu 6) aritmetický průměr mezi teplotou horké  $T_H$  a chladné  $T_C$  části motoru:

$$T_R = \frac{T_H + T_C}{2} \quad (28)$$

Rovnici (27) lze přepsat při užití rovnice (28) do tvaru:

$$m = \frac{pV_H}{rT_H} + \frac{pV_C}{rT_C} + \frac{2pV_R}{r(T_H + T_C)} \quad (29)$$

Rovnice (30) zavádí teplotní poměr  $\tau$ , jeden z dalších parametrů, které lze optimalizovat za účelem dosažení vyšší účinnosti cyklu:

$$\tau = \frac{T_C}{T_H} \quad (30)$$

Rovnici (29) lze upravit převedením konstant  $p$  a  $r$  na levou stranu a dále užitím teplotního poměru  $\tau$  následovně:

$$\frac{mrT_C}{p} = V_H\tau + V_C + \frac{2V_R\tau}{1 + \tau} \quad (31)$$

Rovnice (31) je výchozí rovnicí pro výpočet okamžitého tlaku pro jednotlivé modifikace Stirlingova motoru. Závislost změny tlaku na změně objemů horké a studené části motoru umožní vykreslení výsledných p-V diagramů. Okamžitý tlak se mění v závislosti na natočení klikového hřídele  $\varphi$  společně se změnou objemů  $V_H$  a  $V_C$ , které byly pro alfa modifikaci vyjádřeny v rovnicích (24) a (25). Po dosažení těchto rovnic do rovnice (31) získáme:

$$\frac{mrT_C}{p} = \tau \left[ \frac{V_{ZH}}{2} (1 - \cos\varphi) + V_{DH} \right] + \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + V_{DC} + \frac{2V_R\tau}{1 + \tau} \quad (32)$$

Rovnice (32) se stává již značně nepřehlednou, proto jsou dále zavedeny poměry zpřehledňující celý výpočet. Zdvihový poměr  $v$  udává rozdíl mezi zdvihovým objemem chladné a horké strany motoru. Objemové poměry  $X$  jsou definovány vždy ke zdvihovému objemu expanzního válce  $V_{ZH}$ :



$$v = \frac{V_{ZC}}{V_{ZH}} \quad (33)$$

$$X_{DH} = \frac{V_{DH}}{V_{ZH}} \quad (34)$$

$$X_{DC} = \frac{V_{DC}}{V_{ZH}} \quad (35)$$

$$X_R = \frac{V_R}{V_{ZH}} \quad (36)$$

Rovnice (32) se upraví roznásobením:

$$\frac{2mrT_C}{p} = \tau V_{ZH}(1 - \cos\varphi) + 2\tau V_{DH} + V_{ZC}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] + 2V_{DC} + \frac{4V_R\tau}{1 + \tau} \quad (37)$$

Rovnici (37) vydělíme zdvihovým objemem expanzního válce  $V_{ZH}$ :

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \tau(1 - \cos\varphi) + 2\tau \frac{V_{DH}}{V_{ZH}} + \frac{V_{ZC}}{V_{ZH}} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + 2 \frac{V_{DC}}{V_{ZH}} + \frac{4\tau}{1 + \tau} \frac{V_R}{V_{ZH}} \quad (38)$$

Nyní již lze rovnici (38) zjednodušit užitím objemových poměrů (33),(34),(35) a (36):

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \tau(1 - \cos\varphi) + 2\tau X_{DH} + v[1 - \cos(\varphi - \alpha)] + 2X_{DC} + \frac{4\tau}{1 + \tau} X_R \quad (39)$$

Roznásobením závorek v rovnici (39) dostaneme:

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \tau - \tau\cos\varphi + 2\tau X_{DH} + v - v\cos(\varphi - \alpha) + 2X_{DC} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} \quad (40)$$

Rovnici (40) lze uspořádat na konstantní členy v hranaté závorce a na členy, které se mění se změnou natočení klikového hřídele:

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \left[ 2\tau X_{DH} + 2X_{DC} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} + v + \tau \right] - v\cos(\varphi - \alpha) - \tau\cos\varphi \quad (41)$$

Konstantní členy v hranaté závorce z rovnice (41) lze zapsat jako koeficient  $S$ :

$$S = \tau + 2\tau X_{DH} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} + v + 2X_{DC} \quad (42)$$



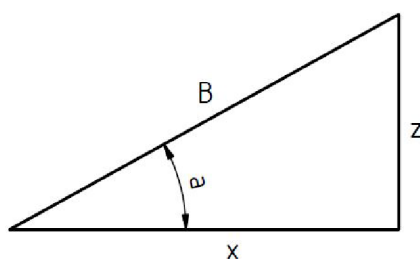
Pro zjednodušení pravé strany rovnice (41) měnící se v závislosti na úhlu  $\varphi$  se zavádí goniometrická substituce. Zavede se pravoúhlý trojúhelník (viz obrázek 9) pro který platí:

$$x = B \cos \alpha \quad (43)$$

$$z = B \sin \alpha \quad (44)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{z}{x} \quad (45)$$

$$B^2 = x^2 + z^2 \quad (46)$$



Obrázek 9: Pravoúhlý trojúhelník

Dále se zavede substituční funkce:

$$\cos(\varphi - \alpha) \quad (47)$$

Kterou lze zapsat po roznásobení substitučním koeficientem  $B$  a vyjádřením jako:

$$B \cos(\varphi - \alpha) = B \cos \varphi \cos \alpha + B \sin \varphi \sin \alpha \quad (48)$$

Využitím goniometrických závislostí v pravoúhlém trojúhelníku (43) a (44) lze rovnici (48) upravit:

$$B \cos(\varphi - \alpha) = x \cos \varphi + z \sin \varphi \quad (49)$$

Část pravé strany rovnice (41), závislá na úhlu natočení  $\varphi$  lze zapsat následovně:

$$v \cos(\varphi - \alpha) + \tau \cos \varphi = v \cos \varphi \cos \alpha + v \sin \varphi \sin \alpha + \tau \cos \varphi \quad (50)$$

Rovnici (50) lze dále upravit vytknutím:

$$v \cos(\varphi - \alpha) + \tau \cos \varphi = \cos \varphi (v \cos \alpha + \tau) + \sin \varphi (v \sin \alpha) \quad (51)$$

Porovnáním rovnice (51) a (49) získáme členy  $x$  a  $z$ :

$$x = v \cos \alpha + \tau \quad (52)$$

$$z = v \sin \alpha \quad (53)$$

Nyní již lze určit úhel  $\alpha$  při užití rovnic (52) a (53) v pravoúhlém trojúhelníku:

$$\alpha = \arctg \left( \frac{v \sin \alpha}{\tau + v \cos \alpha} \right) \quad (54)$$



Nyní se určí substituční koeficient  $B$  z rovnice (46) využitím rovnic (52) a (53):

$$B = \sqrt{(v \cos \alpha + \tau)^2 + (v \sin \alpha)^2} \quad (55)$$

Tedy:

$$B = \sqrt{\tau^2 + 2\tau v \cos \alpha + v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha} \quad (56)$$

Po vytknutí  $v^2$ :

$$B = \sqrt{\tau^2 + 2\tau v \cos \alpha + v^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \quad (57)$$

Výsledný tvar substitučního koeficientu  $B$  lze zapsat:

$$B = \sqrt{\tau^2 + 2\tau v \cos \alpha + v^2} \quad (58)$$

Konstanta  $c$  jako poměr koeficientů  $B$  a  $S$ :

$$c = \frac{B}{S} \quad (59)$$

Dosazením koeficientů  $S$ ,  $B$  a úhlu  $a$  do rovnice (41):

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = S - B \cos(\varphi - a) \quad (60)$$

Vyjádřením tlaku z rovnice (60) lze získat vztah pro okamžitý tlak, závislý na natočení klikového hřídele  $\varphi$ . Díky této rovnici lze sestavit výsledné p-V diagramy.

$$p = \frac{2mrT_C}{V_{ZH}[S - B \cos(\varphi - a)]} \quad (61)$$

Výpočet středního tlaku je definován jako neurčitý křivkový integrál:

$$p_{st} = \frac{1}{2\pi} \oint p d\varphi \quad (62)$$

Po dosazení mezi cyklu  $0$  až  $2\pi$  dostáváme určitý integrál:

$$p_{st} = \frac{2mrT_C}{V_{ZH}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{S - B \cos(\varphi - a)} \quad (63)$$

Pro výpočet určitého integrálu využijeme výpočet z [17]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{S - B \cos(\varphi - a)} = \frac{2\pi}{\sqrt{S^2 - B^2}} \quad (64)$$



Střední tlak cyklu po integraci:

$$p_{st} = \frac{2mrT_C}{V_{ZH}\sqrt{S^2 - B^2}} \quad (65)$$

Z rovnice (65) vyplývá:

$$\frac{2mrT_C}{V_{ZH}} = p_{st}\sqrt{S^2 - B^2} \quad (66)$$

Výpočet okamžitého tlaku ze známého středního tlaku motoru obdržíme po dosazení rovnice (66) do rovnice (61):

$$p = \frac{p_{st}\sqrt{S^2 - B^2}}{S - B\cos(\varphi - \alpha)} \quad (67)$$

Rovnici (67) lze po vydělení koeficientem  $S$  a užitím vztahu (59) zjednodušit na tvar:

$$p = \frac{p_{st}\sqrt{1 - c^2}}{1 - c\cos(\varphi - \alpha)} \quad (68)$$

Rovnice (68) je výsledná zjednodušená rovnice, sloužící pro vykreslení p-V diagramů všech tří modifikací.

### 3.4.3 VÝPOČET BETA MODIFIKACE POMOCÍ SCHMIDTOVY TEORIE

Beta modifikace se skládá z objemů definovaných v alfa modifikaci s tím rozdílem, že objem horké části  $V_H$  a chladné části  $V_C$  se nachází ve společném válci. Prostory motoru lze rozdělit na přemísťovací část s přemísťovacím pístem a na prostor pracovní části s pracovním pístem. Pro beta modifikaci je charakteristický objem  $V_\Delta$ . Tento objem představuje velikost překrytí zdvihu pracovního a přemísťovacího pístu. S rostoucím objemem překrytí pístů klesá objem mrtvého prostoru.

Celkový objem motoru je dán součtem těchto objemů:

$$V = V_H + V_C + V_R \quad (69)$$

Výpočet okamžitých objemů pracovních prostor chladné  $V_C$  a horké  $V_H$  strany motoru:

$$V_H = \frac{V_{ZH}}{2}(1 - \cos\varphi) + V_{DH} \quad (70)$$

$$V_C = \frac{V_{ZH}}{2}(1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] - V_\Delta + V_{DC} \quad (71)$$

Kde člen  $V_\Delta$  je objem překrytí zdvihu pracovního a přemísťovacího pístu, definovaný:

$$V_\Delta = \frac{V_{ZH} + V_{ZC}}{2} - \sqrt{\frac{V_{ZH}^2 + V_{ZC}^2}{4} - \frac{V_{ZH}V_{ZC}}{2}\cos\alpha} \quad (72)$$





Úhel natočení klikového hřídele  $\varphi$  je definován obdobně jako u alfa modifikace, tedy jako  $\varphi=0^\circ$ , pokud expanzní píst horké strany je ve své horní úvrati. Okamžitý objem chladné části  $V_C$ , vyjádřený rovnicí (71), se skládá ze čtyř členů. Díky uspořádání obou pístů do jednoho válce lze využít na rozdíl od alfa modifikace objemu pro přepouštěcí píst s fází  $\varphi$ , tedy první člen rovnice (71). Druhý člen rovnice s fází  $\varphi-\alpha$  připadá prostoru pracovního pístu. Objem překrytí zdvihu  $V_\Delta$  je definován rovnicí (71). Pro další úpravu se opět využije výchozí rovnice pro určení okamžitého tlaku (31), definovaná v alfa modifikaci:

$$\frac{mrT_C}{p} = V_H\tau + V_C + \frac{2V_R\tau}{1+\tau} \quad (31)$$

Opět se dosadí rovnice (70) a (71) pro okamžité objemy:

$$\frac{mrT_C}{p} = \tau \left[ \frac{V_{ZH}}{2}(1 - \cos\varphi) + V_{DH} \right] + \frac{V_{ZH}}{2}(1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] - V_\Delta + V_{DC} + \frac{2V_R\tau}{1+\tau} \quad (73)$$

K objemovým poměrům z rovnic (33) až (36) z alfa modifikace je v beta modifikaci definován navíc poměr  $X_\Delta$ , tedy objem překrytí zdvihu pracovního a přemístovacího pístu vztažený na zdvihový objem horké části:

$$X_\Delta = \frac{V_\Delta}{V_{ZH}} \quad (74)$$

Rovnice (73) se upraví obdobně jako v alfa modifikaci roznásobením jednotlivých členů:

$$\frac{mrT_C}{p} = \frac{\tau V_{ZH}}{2}(1 - \cos\varphi) + \tau V_{DH} + \frac{V_{ZH}}{2}(1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] - V_\Delta + V_{DC} + \frac{2V_R\tau}{1+\tau} \quad (75)$$

Po úpravě rovnice (75) vydělením zdvihovým objemem horké části  $V_{ZH}$ :

$$\frac{mrT_C}{pV_{ZH}} = \frac{\tau V_{ZH}}{2V_{ZH}}(1 - \cos\varphi) + \frac{\tau V_{DH}}{V_{ZH}} + \frac{V_{ZH}}{2V_{ZH}}(1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2V_{ZH}}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] - \frac{V_\Delta}{V_{ZH}} + \frac{V_{DC}}{V_{ZH}} + \frac{2V_R\tau}{V_{ZH}(1+\tau)} \quad (76)$$

Po zavedení objemových poměrů do rovnice (76):

$$\frac{mrT_C}{pV_{ZH}} = \frac{\tau}{2}(1 - \cos\varphi) + \tau X_{DH} + \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) + \frac{v}{2}[1 - \cos(\varphi - \alpha)] - X_\Delta + X_{DC} + \frac{2X_R\tau}{(1+\tau)} \quad (77)$$

Roznásobením rovnice (77) obdržíme:

$$\frac{mrT_C}{pV_{ZH}} = \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2}\cos\varphi + \tau X_{DH} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\cos(\varphi - \alpha) - X_\Delta + X_{DC} + \frac{2X_R\tau}{(1+\tau)} \quad (78)$$

Rovnici (78) upravíme:

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \tau - \tau\cos\varphi + 2\tau X_{DH} + 1 + \cos\varphi + v - v\cos(\varphi - \alpha) - 2X_\Delta + 2X_{DC} + \frac{4X_R\tau}{1+\tau} \quad (79)$$

Opět rovnici (79) rozdělíme na konstantní členy v hranaté závorce a na členy měnící se v závislosti na natočení klikového hřídele:

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \left[ \tau + 2\tau X_{DH} + \frac{4\tau X_R}{1+\tau} + v + 2X_{DC} + 1 - 2X_\Delta \right] - \tau\cos\varphi + \cos\varphi - v\cos(\varphi - \alpha) \quad (80)$$



Konstantní členy z hranaté závorky v rovnici (81) označíme jako koeficient  $S$  pro beta modifikaci, který je od alfa modifikace odlišný:

$$S = \tau + 2\tau X_{DH} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} + v + 2X_{DC} + 1 - 2X_{\Delta} \quad (81)$$

Pravou část rovnice (80) lze zapsat jako:

$$\tau \cos \varphi - \cos \varphi + v \cos(\varphi - \alpha) = \tau \cos \varphi - \cos \varphi + v \cos \varphi \cos \alpha + v \sin \varphi \sin \alpha \quad (82)$$

Rovnici (82) lze po vytknutí rozepsat:

$$\tau \cos \varphi - \cos \varphi + v \cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi (\tau - 1 + v \cos \alpha) + \sin \varphi (v \sin \alpha) \quad (83)$$

Stejnou úvahou, která byla použita v alfa modifikaci, lze určit:

$$x = \tau + v \cos \alpha - 1 \quad (84)$$

$$z = v \sin \alpha \quad (85)$$

Úhel  $\alpha$  se určí z trojúhelníku, který byl definován v alfa modifikaci:

$$\alpha = \arctg \left( \frac{v \sin \alpha}{\tau + v \cos \alpha - 1} \right) \quad (86)$$

Součinitel  $B$  lze opět určit z pravouhlého trojúhelníku a rovnice (46) jako:

$$B = \sqrt{(\tau + \cos \alpha - 1)^2 + (v \sin \alpha)^2} \quad (87)$$

Po umocnění:

$$B = \sqrt{\tau^2 + v^2 \cos^2 \alpha + 1 + 2\tau v \cos \alpha - 2\tau - 2v \cos \alpha + v^2 \sin^2 \alpha} \quad (88)$$

Postupnou úpravou dostaneme:

$$B = \sqrt{\tau^2 + 1 + v \cos \alpha (2\tau - 2) - 2\tau + v^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} \quad (89)$$

Výsledný součinitel  $B$ , odlišný od alfa modifikace:

$$B = \sqrt{\tau^2 + 2(\tau - 1)v \cos \alpha + v^2 - 2\tau + 1} \quad (90)$$

Součinitel  $c$  jako poměr součinitelů  $B$  a  $S$ :

$$c = \frac{B}{S} \quad (91)$$

Okamžitý tlak cyklu, nutný pro konstrukci p-V diagramu je dán totožnou rovnicí (68), jako v alfa modifikaci:

$$p = \frac{p_{st} \sqrt{1 - c^2}}{1 - c \cos(\varphi - \alpha)} \quad (68)$$



### 3.4.4 VÝPOČET GAMA MODIFIKACE POMOCÍ SCHMIDTOVY TEORIE

Výpočet gama modifikace Stirlingova motoru je velice obdobný výpočtu beta modifikace. Objem překrytí pístů  $V_A$  se v gama modifikaci nenachází. Přemísťovací a pracovní píst se nacházejí v oddělených válcích. Pro optimalizaci mohou být voleny různé průměry a zdvihy obou pístů.

Celkový objem motoru je dán součtem těchto objemů:

$$V = V_H + V_C + V_R \quad (92)$$

Výpočet okamžitých objemů pracovních prostor horké  $V_H$  a chladné  $V_C$  strany motoru:

$$V_H = \frac{V_{ZH}}{2} (1 - \cos\varphi) + V_{DH} \quad (93)$$

$$V_C = \frac{V_{ZH}}{2} (1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + V_{DC} \quad (94)$$

Úhel natočení klikového hřídele  $\varphi$  je definován obdobně jako u alfa modifikace, tedy jako  $\varphi = \theta^\circ$ , pokud expanzní píst horké strany je ve své horní úvrati. Objemové poměry z rovnic (33) až (36) z alfa modifikace jsou zachovány i v gama modifikaci.

Výchozí rovnice pro výpočet tlaku je pro všechny modifikace totožná:

$$\frac{mrT_C}{p} = V_H\tau + V_C + \frac{2V_R\tau}{1 + \tau} \quad (31)$$

Rovnice (93) a (94) opět dosadíme do výchozí rovnice (31), pro výpočet okamžitého tlaku:

$$\frac{mrT_C}{p} = \tau \left[ \frac{V_{ZH}}{2} (1 - \cos\varphi) + V_{DH} \right] + \frac{V_{ZH}}{2} (1 + \cos\varphi) + \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] + V_{DC} + \frac{2V_R\tau}{1 + \tau} \quad (95)$$

Úpravou rovnice (95) obdobně jako v beta modifikace získáme:

$$\frac{2mrT_C}{pV_{ZH}} = \left[ \tau + 2\tau X_{DH} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} + v + 2X_{DC} + 1 \right] - \tau \cos\varphi + \cos\varphi - v \cos(\varphi - \alpha) \quad (96)$$

Z rovnice (96) opět vyčleníme koeficient  $S$ , který se od beta modifikace liší o chybějící člen  $2X_A$ :

$$S = \tau + 2\tau X_{DH} + \frac{4\tau X_R}{1 + \tau} + v + 2X_{DC} + 1 \quad (97)$$

Úhel  $\alpha$  je totožný s modifikací beta, jelikož pravá strana rovnice (96) závislá na natočení klikového hřídele zůstává nezměněna:

$$\alpha = \arctg \left( \frac{v \sin\alpha}{\tau + v \cos\alpha - 1} \right) \quad (98)$$



Ze stejného důvodu je i koeficient  $B$  totožný s beta modifikací:

$$B = \sqrt{\tau^2 + 2(\tau - 1)u\cos\alpha + v^2 - 2\tau + 1} \quad (99)$$

Součinitel  $c$  jako poměr součinitelů  $B$  a  $S$ :

$$c = \frac{B}{S} \quad (100)$$

Vzorec pro okamžitý tlak cyklu (68), nutný pro konstrukci p-V diagramu je společný pro všechny tři modifikace:

$$p = \frac{p_{st}\sqrt{1 - c^2}}{1 - c\cos(\varphi - \alpha)} \quad (68)$$

### 3.4.5 VÝPOČET TEPEL, TLAKŮ, VÝKONU A ÚČINNOSTI CYKLŮ

Velikost dodaného, popřípadě odebraného tepla v cyklu lze definovat také jako množství indikované energie, či velikost práce do cyklu dodané a odebrané. Tuto velikost znázorňuje plocha p-V diagramu ohraničená křivkou.

Dodané teplo expanzního prostoru  $Q_H$ , je definováno jako křivkový integrál:

$$Q_H = \oint p dV_H \quad (101)$$

Kde okamžitý objem expanzního prostoru  $V_H$  je z rovnice (24):

$$V_H = \frac{V_{ZH}}{2}(1 - \cos\varphi) + V_{DH} \quad (24)$$

Derivace  $V_H$  dle úhlu  $\varphi$ :

$$\frac{dV_H}{d\varphi} = \frac{\frac{V_{ZH}}{2}(1 - \cos\varphi) + V_{DH}}{d\varphi} = \frac{V_{ZH}}{2}\sin\varphi \quad (102)$$

Po dosazení hodnot do rovnice (101) získáme:

$$Q_H = \oint p dV_H = \frac{V_{ZH}p_{st}\sqrt{S^2 - B^2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{S - B\cos(\varphi - \alpha)} d\varphi \quad (103)$$

K výpočtu určitého integrálu z rovnice (103) využijeme řešení integrálu z [17]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{S + B\cos(\varphi + \alpha)} d\varphi = \frac{2\pi}{B} \left[ \frac{S}{\sqrt{S^2 - B^2}} - 1 \right] \sin\alpha \quad (104)$$



Po úpravě a zjednodušení použitím koeficientu  $c$  získáme:

$$Q_H = \frac{p_{st} V_{ZH} \pi c s \sin a}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \quad (105)$$

Teplo z cyklu odebrané  $Q_C$ , definováno jako křivkový integrál:

$$Q_C = \oint p dV_C \quad (106)$$

Po integraci a obdobné úpravě:

$$Q_C = - \frac{p_{st} V_{ZH} \pi c \tau s \sin a}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \quad (107)$$

Celková energie cyklu za jednu otáčku  $Q_I$  je definována jako:

$$Q_I = Q_H + Q_C \quad (108)$$

Tedy:

$$Q_I = \frac{p_{st} V_{ZH} \pi c (1 - \tau) s \sin a}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \quad (109)$$

Výkon cyklu je definován jako:

$$P = Q_I n \quad (110)$$

Vztahy mezi maximálním, středním a minimálním tlakem jsou definovány následovně:

$$\frac{p_{min}}{p_{st}} = \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} \quad (111)$$

$$\frac{p_{max}}{p_{st}} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} \quad (112)$$

Účinnost cyklu je u všech modifikací stejná, závisí pouze na maximální a minimální teplotě cyklu  $T_H$  a  $T_C$ . Tato účinnost je rovna účinnosti Carnotova cyklu, tedy nejvyšší, které lze v termodynamickém cyklu dosáhnout.

$$\eta^{\alpha, \beta, \gamma} = 1 - \tau \quad (113)$$



## 4 VÝSLEDKY VÝPOČTŮ A POROVNÁNÍ JEDNOTLIVÝCH MODIFIKACÍ

Jednotlivé výpočty ideálního Stirlingova cyklu a výpočty modifikací motorů alfa, beta a gama pomocí Schmidovy teorie byly provedeny pomocí softwaru MathCad. Výhodou tohoto programu je okamžitá reakce výstupu na změnu vstupních hodnot. Grafický výstup pro vykreslení p-V diagramů je také dostatečný. Pro jemné vykreslení grafů bylo užito vhodného dělení úhlu natočení klikového hřídele  $\varphi$ . Výstupy ze softwaru MathCad, obsahující pouze nejdůležitější rovnice výpočtu jsou v přílohách 6–9. Zeleně zvýrazněné parametry lze vhodně měnit a okamžitě získat žlutě zvýrazněné výstupní parametry. Podrobnosti o jednotlivých výpočtech jsou v následujících kapitolách.

### 4.1 VÝCHOZÍ PARAMETRY TEORETICKÉHO MOTORU

Výpočet ideálního cyklu, výpočet pomocí Schmidovy idealizace a výsledné srovnání budou provedeny pro teoretické motory o společných parametrech, shrnutých v tabulce 1. Srovnány budou teoretické motory o stejném zdvihovém objemu.

Tabulka 1: Výchozí parametry pro výpočet

Parametr:	Jednotka:	Hodnota:
Zdvihový objem	$V_z$ [cm <sup>3</sup> ]	250
Objem mrtvého prostoru	$V_{dead}$ [cm <sup>3</sup> ]	250
Plynová konstanta použitého média (He)	$r$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	2077
Minimální teplota	$T_c$ [K]	353,15
Maximální teplota	$T_H$ [K]	923,15
Minimální tlak	$p_{min}$ [MPa]	4
Otáčky motoru	$n$ [s <sup>-1</sup> ]	1500



## 4.2 VÝSLEDEK VÝPOČTU STIRLINGOVA IDEÁLNÍHO CYKLU

Díky užití vztahů pro výpočet ideálního Stirlingova cyklu z kapitoly 3.2 na zadané parametry teoretického motoru byly vypočteny hodnoty, které jsou zaneseny do tabulky 2. Číselně indexované hodnoty jsou hodnoty parametrů v pracovních bodech cyklu 1–4. Tučně zvýrazněné hodnoty jsou hodnoty zadané, tedy pro výpočet výchozí.

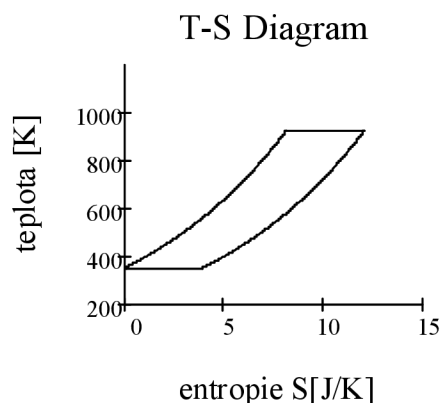
Tabulka 2: Výsledky výpočtu ideálního cyklu

Parametr:	Označení [Jednotka]:	Hodnota:
Zdvihový objem	$V_z$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>
Objem mrtvého prostoru	$V_{dead}$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>
Maximální objem	$V_{max}=V_1=V_4$ [cm <sup>3</sup> ]	500
Minimální objem	$V_{min}=V_2=V_3$ [cm <sup>3</sup> ]	250
Plynová konstanta použitého média (He)	$r$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	<b>2077</b>
Minimální teplota	$T_C=T_1=T_2$ [K]	<b>353,15</b>
Maximální teplota	$T_H=T_3=T_4$ [K]	<b>923,15</b>
Minimální tlak	$p_{min}=p_1$ [MPa]	<b>4</b>
Tlak v bodě 2	$p_2$ [MPa]	8
Tlak v bodě 4	$p_4$ [MPa]	10
Maximální tlak	$p_{max}=p_3$ [MPa]	21
Střední tlak cyklu	$p_{st}$ [MPa]	9
Hmotnost pracovního média	$m$ [Kg]	0,003
Otáčky motoru	$n$ [s <sup>-1</sup> ]	<b>1500</b>
Teplo odvedené chladičem	$Q_{12}$ [J]	-1386,29
Teplo dodané z regenerátoru	$Q_{23}$ [J]	4818,04
Teplo dodané ohříváčem	$Q_{34}$ [J]	3623,84
Teplo odvedené do regenerátoru	$Q_{41}$ [J]	-4818,04
Celkové indikované teplo cyklu	$Q_i$ [J]	2237,54
Výkon	$P$ [kW]	55,94
Účinnost	$\eta$ [%]	61,75

Výsledky potvrzují předpoklad, tedy že při 100% účinnosti regenerátoru si jsou tepla  $Q_{23}$  a  $Q_{41}$  rovny. Záporné hodnoty tepel znázorňují teplo z cyklu odvedené.

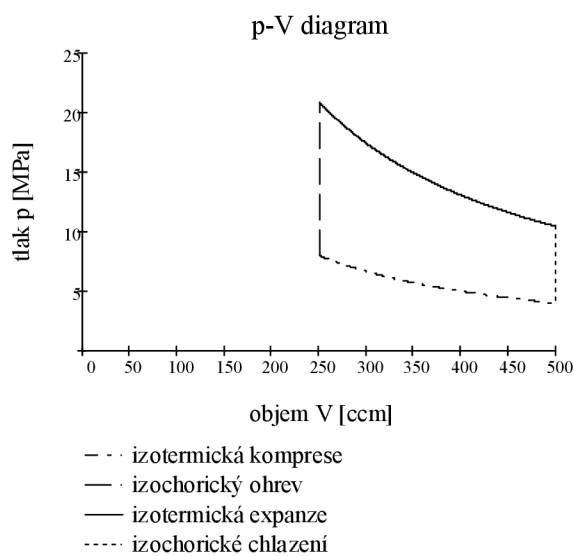


T-S diagram ideálního Stirlingova cyklu, sestaven z výsledných hodnot, je na obrázku 10.



Obrázek 10: T-S Diagram ideálního Stirlingova cyklu

Diagram p-V je na obrázku 11. Plocha grafu, ohraničená křivkou, znázorňuje množství získané práce v cyklu. Nevyužitá plocha 0–250 cm<sup>3</sup> představuje mrtvý prostor  $V_{dead}$ .



Obrázek 11: p-V diagram ideálního cyklu





### 4.3 VÝPOČET CYKLU POMOCÍ SCHMIDTOVY TEORIE

Pro porovnání jednotlivých modifikací je nutno nejprve vypočítat objem alfa modifikace tak, aby byly objemové hranice p-V diagramu shodné s hodnotami z ideálního cyklu. U modifikací beta a gama byly zachovány objemy horké strany motoru z alfa modifikace. Zbylé objemy byly vhodně voleny tak, aby výsledné objemové hranice byly opět shodné s hranicemi ideálního Stirlingova cyklu. Ve výpočtech všech modifikací je uvažováno, že mrtvý objem kompresního a expanzního prostoru ( $V_{DH}$  a  $V_{DC}$ ) je nulový.

#### 4.3.1 VÝPOČET ZDVIHOVÉHO OBJEMU ALFA MODIFIKACE

Pro zachování objemových hranic p-V diagramu Schmidtova modelu s ideálním cyklem je nutno vypočítat velikosti objemu chladné a horké části. Uvažujeme, že oba válce alfa modifikace budou totožných rozměrů a písty svírají úhel  $\alpha=90^\circ$ . Objemy  $V_H$  a  $V_C$  jsou tedy totožné. Okamžitá hodnota objemu, který se mění s úhlem natočení klikového hřídele  $\varphi$  v p-V diagramu se vypočítá pomocí následující rovnice. Rovnice neuvažuje objem regenerátoru, který se v průběhu cyklu nemění, a dále objemy mrtvých prostor, které v průběhu cyklu jsou taktéž neměnné:

$$V(\varphi) = V_H(\varphi) + V_C(\varphi) \quad (114)$$

#### Výpočet maxima a minima zdvihu:

Nejprve je nutno nalézt úhel, ve kterém nastává maximum, případně minimum součtu obou objemů. Tento extrémní úhel nalezneme, pokud derivaci této rovnice položíme rovnu nule.

$$\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dV_H(\varphi) + dV_C(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (115)$$

Do rovnice (115) dosadíme za okamžité hodnoty objemů  $V_H$  a  $V_C$ :

$$\frac{d \left\{ \frac{V_{ZH}}{2} [1 - \cos(\varphi)] \right\} + d \left\{ \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] \right\}}{d\varphi} = 0 \quad (116)$$

Díky rovnosti objemů  $V_H$  a  $V_C$  se rovnice (116) zjednoduší:

$$\frac{d \left\{ \frac{V_{ZH}}{2} - \frac{V_{ZH}}{2} \cos(\varphi) + \frac{V_{ZH}}{2} - \frac{V_{ZH}}{2} \cos(\varphi - \alpha) \right\}}{d\varphi} = 0 \quad (117)$$

Člen  $\cos(\varphi - \alpha)$  z rovnice (117) lze rozepsat následovně:

$$\cos(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi) \sin(\alpha) + \cos(\varphi) \cos(\alpha) \quad (118)$$

Při uvažování úhlu mezi válci  $\alpha=90^\circ$  se rovnice (118) zjednoduší na:

$$\cos(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi) \quad (119)$$



Po dosažení rovnice (119) do rovnice (117) a derivací získáme:

$$\frac{V_{ZH}}{2} \sin(\varphi) = \frac{V_{ZH}}{2} \cos(\varphi) \quad (120)$$

Tedy:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = 1 \quad (121)$$

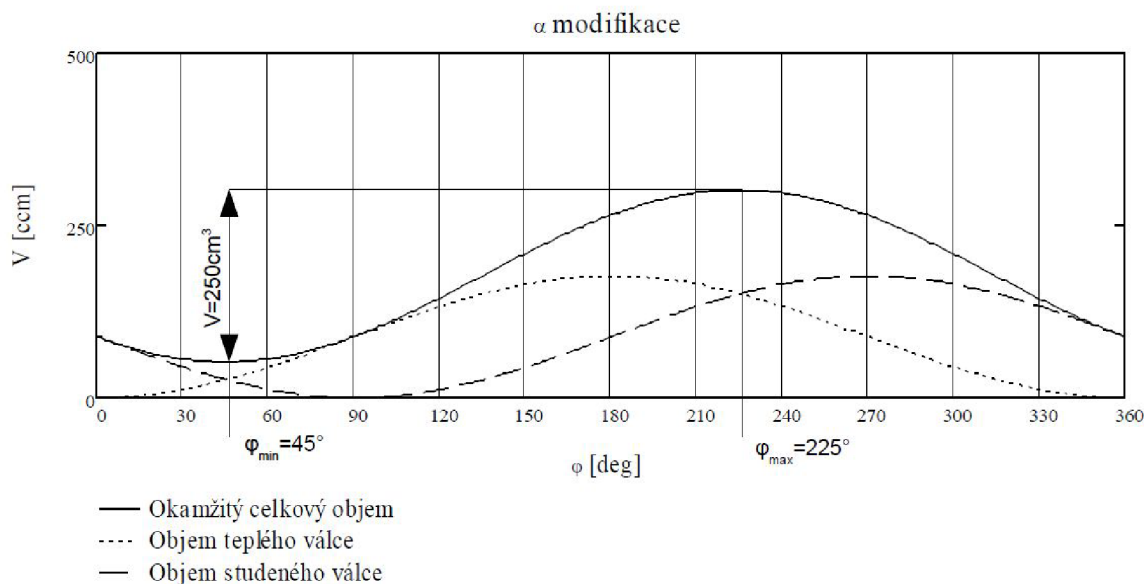
Z rovnice (121) vyplývá, že úhel maxima, popřípadě minima nastává:

$$\varphi_{max,min} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad kde \ k = 0,1,2 \dots \quad (122)$$

Zda jde při úhlu  $\varphi=45^\circ$  o maximum či minimum zjistíme, pokud rovnici (121) opět derivujeme a dosadíme úhel  $\varphi=45^\circ$ :

$$\frac{1}{\cos^2(45)} = 2 \quad (123)$$

Při úhlu  $\varphi=45^\circ$  nastává minimum celkového pracovního objemu, při úhlu  $\varphi=225^\circ$  nastává maximum, což dokazuje i výsledný graf závislosti natočení klikového hřídele na jednotlivých objemech a jejich součtu na obrázku 12.



Obrázek 12: Závislost změny objemu na úhlu natočení klikového hřídele

Potřebné hodnoty  $V_{ZH}$  a  $V_{ZC}$  pro zachování hranic ideálního cyklu p-V diagramu dostaneme, pokud rozdíl maximálního a minimálního okamžitého objemu obou válců bude roven požadovanému zdvihu motoru ideálního cyklu. Pro zdvih  $250 \text{ cm}^3$  platí:

$$250 \text{ cm}^3 = 2V_{H(\varphi_{max})} - 2V_{H(\varphi_{min})} \quad (124)$$



Tuto podmínku splňuje zdvihový objem  $V_{ZH}$ , potažmo objem  $V_{ZC}$ :

$$V_{ZH} = V_{ZC} = 176,78 \text{ cm}^3 \quad (125)$$

#### 4.3.2 VÝPOČET ZDVIHOVÉHO OBJEMU BETA A GAMA MODIFIKACE

Okamžitá hodnota objemu v p-V diagramu se vypočítá pomocí následující rovnice. Rovnice opět uvažuje pouze objemy, které se v průběhu natočení klikového hřídele  $\varphi$  mění. Rovnice opět neuvažuje objem regenerátoru, který je v průběhu cyklu zachován. Dále nejsou zahrnuty ani mrtvé objemy, které jsou v průběhu cyklu také neměnné a objem překrytí  $V_A$ .

$$V(\varphi) = V_H(\varphi) + V_C(\varphi) \quad (126)$$

#### Výpočet maxima a minima zdvihu:

Tak jako u alfa modifikace je nutno nalézt úhel, ve kterém nastává maximum, případně minimum součtu obou objemů. Tento extrémní úhel nalezneme, pokud derivaci této rovnice položíme rovnu nule.

$$\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dV_H(\varphi) + dV_C(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (127)$$

Do rovnice (127) dosadíme za okamžité hodnoty objemů  $V_H$  a  $V_C$  pro beta, případně gamma modifikaci:

$$\frac{d \left\{ \frac{V_{ZH}}{2} [1 - \cos(\varphi)] + \frac{V_{ZH}}{2} [1 + \cos(\varphi)] + \frac{V_{ZC}}{2} [1 - \cos(\varphi - \alpha)] \right\}}{d\varphi} = 0 \quad (128)$$

Při uvažování úhlu mezi válci  $\alpha=90^\circ$  se člen  $\cos(\varphi - \alpha)$  z rovnice (128) opět zjednoduší na:

$$\cos(\varphi - \alpha) = \sin(\varphi) \quad (129)$$

Po dosazení rovnice (129) do rovnice (128) a derivací získáme:

$$\frac{V_{ZH}}{2} \sin(\varphi) - \frac{V_{ZH}}{2} \sin(\varphi) - \frac{V_{ZC}}{2} \cos(\varphi) = 0 \quad (130)$$

Tedy:

$$-\frac{V_{ZC}}{2} \cos(\varphi) = 0 \quad (131)$$

Tato rovnost nastává pro úhel  $\varphi=90^\circ$ :

$$\varphi_{max,min} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{kde } k = 0,1,2 \dots \quad (132)$$



Zda jde při úhlu  $\varphi=90^\circ$  o maximum či minimum zjistíme, pokud rovnici (131) opět derivujeme a dosadíme úhel  $\varphi=90^\circ$ :

$$\frac{V_{ZC}}{2} \sin(90) > 0 \quad (133)$$

Rovnice znázorňuje, že při  $V_{ZC}>0$  pro úhel  $\varphi=90^\circ$  nastává minimum celkového pracovního objemu, při úhlu  $\varphi=270^\circ$  nastává maximum.

Potřebné hodnoty  $V_{ZH}$  a  $V_{ZC}$  pro zachování hranic ideálního cyklu p-V diagramu dostaneme, pokud rozdíl maximálního a minimálního okamžitého objemu obou válců bude roven požadovanému zdvihu motoru ideálního cyklu. Pro zdvih  $250 \text{ cm}^3$  platí:

$$250 \text{ cm}^3 = V_{(\varphi_{max})} - V_{(\varphi_{min})} \quad (134)$$

Po dosazení objemů z rovnice (126):

$$[V_{H(\varphi_{max})} + V_{C(\varphi_{max})}] - [V_{H(\varphi_{min})} + V_{C(\varphi_{min})}] = 250 \text{ cm}^3 \quad (135)$$

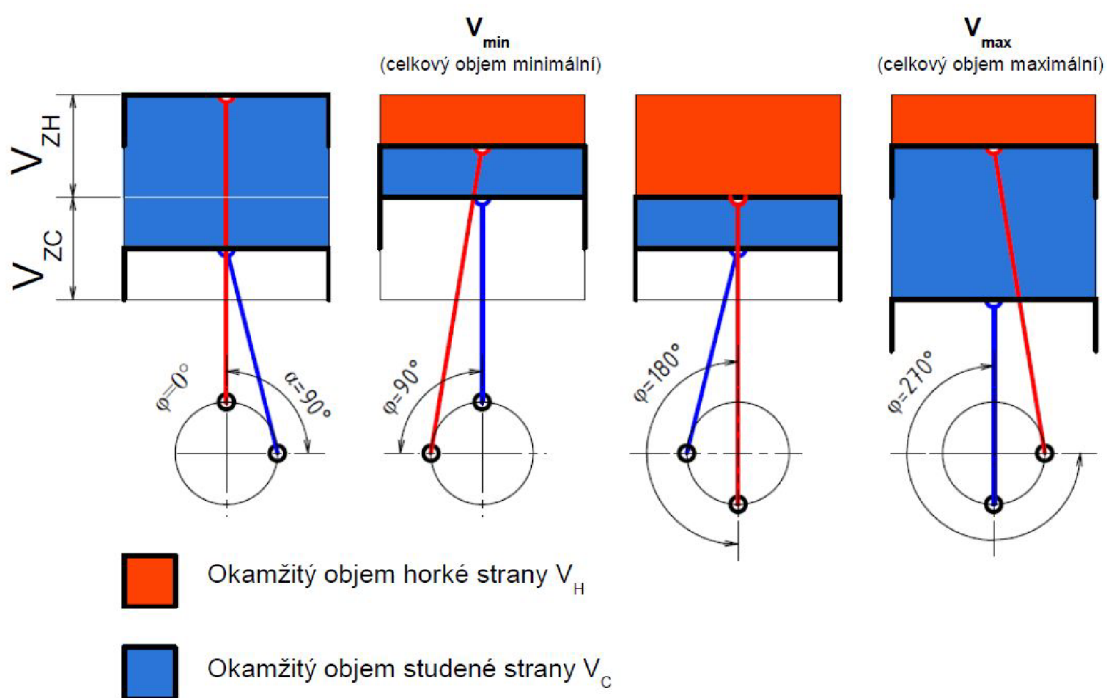
Po dosazení úhlů  $\varphi_{max}$  a  $\varphi_{min}$  do rovnice (135) a úpravě dostaneme:

$$\left(\frac{V_{ZH}}{2} + \frac{V_{ZH}}{2} + V_{ZC}\right) - \left(\frac{V_{ZH}}{2} + \frac{V_{ZH}}{2}\right) = 250 \text{ cm}^3 \quad (136)$$

Pro zdvihový objem  $V_{ZC}$  dostáváme podmínku:

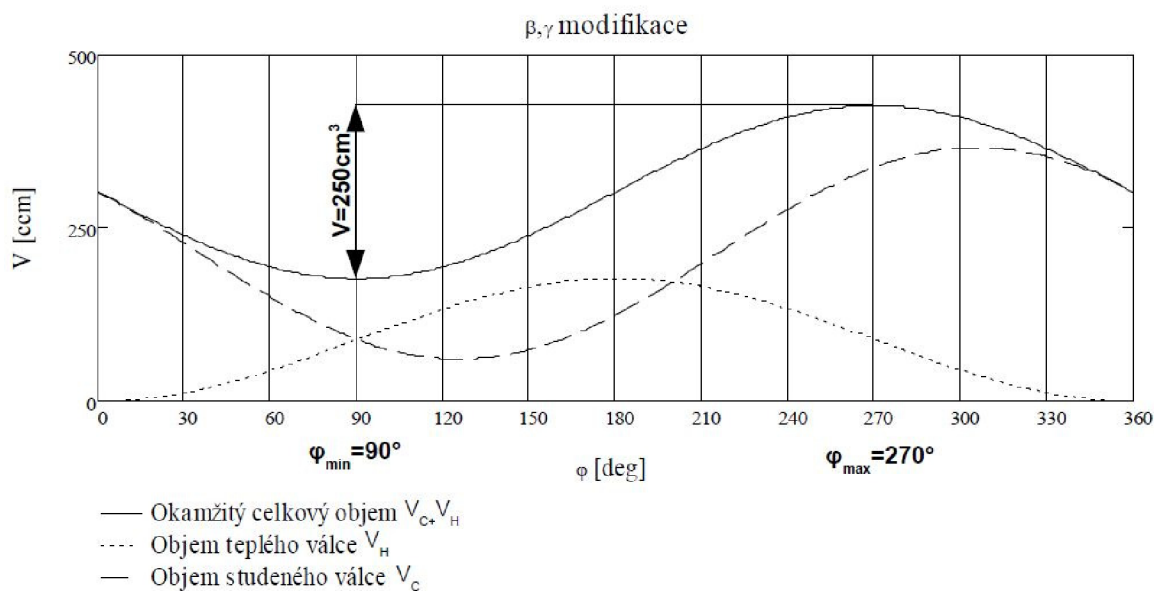
$$V_{ZC} = 250 \text{ cm}^3 \quad (137)$$

Z rovnice (136) vyplývá zajímavý závěr, že velikost zdvihového objemu horké strany motoru  $V_{ZH}$  neovlivní celkový zdvihový objem motoru. Zobrazení minimálního a maximálního celkového objemu je na obrázku 13. Na obrázku je zobrazena zjednodušená beta modifikace Stirlingova motoru. Regenerátor ani mrtvé prostory nejsou pro zjednodušení zobrazeny, dále se uvažuje stejný zdvihový objem obou válců ( $V_{ZC}$  a  $V_{ZH}$ ), objem překrytí zdvihu pracovního a přemísťovacího pístu také není uvažován. Obrázek znázorňuje vzájemné změny objemů pro různé úhly natočení klikového hřídele  $\varphi$ . Z obrázku je zřejmé, že při jakékoliv volbě zdvihového objemu  $V_{ZH}$  bude celkový zdvihový objem ( $V_{max}-V_{min}$ ) záviset pouze na volbě  $V_{ZC}$ . Pracovní objem chladného pístu se skládá ze zdvihového objemu pracovního pístu  $V_{ZC}$  a také ze zdvihového objemu pístu přemísťovacího  $V_{ZH}$ . Výhodou beta modifikace je možnost navrhnout geometrii tak, aby při minimálním celkovém objemu nebyl zbytečně velký prostor nad pracovním pístem, tedy aby nevznikal zbytečný mrtvý prostor. Využívá se tzv. objemu překrytí zdvihu pracovního a přemísťovacího pístu  $V_A$ . Tento mrtvý prostor pístů lze odstranit a zbývá pouze mrtvý prostor pístů nad přemísťovacím pístem.



Obrázek 13: Závislost změn pracovních objemů na natočení klikového hřídele

Řešení pro konkrétní požadavek zachování zdvihového objemu  $V_Z=250\text{ cm}^3$  je zobrazeno na obrázku 14:



Obrázek 14: Závislost změny objemu na úhlu natočení klikového hřídele



#### 4.4 POROVNÁNÍ MODIFIKACÍ S IDEÁLNÍM STIRLINGOVÝM CYKLEM

Pro názorné porovnání Schmidtova výpočtového modelu a výpočtu pomocí ideálního Stirlingova cyklu byly zachovány objemové hranice p-V diagramů, tedy hodnoty celkového mrtvého objemu  $V_D$ . Tento celkový mrtvý objem  $V_D$  je součtem mrtvého prostoru  $V_{dead}$  a mrtvého prostoru pístů  $V_{DP}$ . Mrtvý prostor  $V_{dead}$  je složen z mrtvého prostoru horkého a chladného pístu ( $V_{DH}$  a  $V_{DC}$ ), přípojných kanálků a objemu regenerátoru  $V_R$ . Objem mrtvého prostoru pístů  $V_{DP}$ , který nebyl v ideálním Stirlingově cyklu uvažován, pro jednotlivé modifikace narůstá, proto bylo u jednotlivých modifikací nutno vhodně snižovat objem mrtvého prostoru  $V_{dead}$  tak, aby celkový mrtvý prostor  $V_D$  byl pro všechny modifikace stejný.

Při výpočtech je uvažován ideální případ, kdy účinnost regenerátoru je 100%. U beta modifikace je dále zanedbána ztráta objemu nad pracovním pístem díky nutnému táhlu pro přemísťovací píst, který tento objem zmenšuje. Tabulka 3 zobrazuje vypočtené hodnoty. Zvýrazněné hodnoty představují parametry, které byly pro porovnání pro jednotlivé modifikace totožné.

*Tabulka 3: Porovnání modifikací dle Schmidtova modelu s ideálním Stirlingovým cyklem*

Parametr:	Označení [Jednotka]:	Hodnota:			
		Ideální	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Celkový zdvihový objem	$V_Z$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>
Zdvihový objem horké strany motoru	$V_{ZH}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	<b>177</b>	<b>177</b>	<b>177</b>
Zdvihový objem chladné strany motoru	$V_{ZC}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	177	250	250
Objem překrytí pístů	$V_{\Delta}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	0	60	0
Objem mrtvého prostoru	$V_{dead}$ [cm <sup>3</sup> ]	250	200	135	74
Objem mrtvého prostoru pístů	$V_{DP}$ [cm <sup>3</sup> ]	0	50	115	176
Celkový objem mrtvého prostoru	$V_D$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>
Plynová konstanta použitého média (He)	$r$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>
Fázový úhel	$\alpha$ [°]	-	<b>90</b>	<b>90</b>	<b>90</b>
Minimální teplota	$T_C$ [K]	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>
Maximální teplota	$T_H$ [K]	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>
Minimální tlak	$p_{min}$ [MPa]	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
Maximální tlak	$p_{max}$ [MPa]	21	9	13	11
Střední tlak cyklu	$p_{st}$ [Mpa]	9	6	7	7
Otáčky motoru	$n$ [s <sup>-1</sup> ]	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>
Přivedené teplo do cyklu	$Q_H$ [J]	3623,84	678,15	1021,04	856,94
Odvedené teplo z cyklu	$Q_C$ [J]	-1386,29	-259,43	-390,60	-327,82
Získaná práce cyklu	$Q_i$ [J]	2237,54	418,72	630,44	529,12
Výkon	$P$ [kW]	55,94	10,47	15,76	13,23
Účinnost	$\eta$ [%]	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>



### Závěry výpočtu:

Při snaze zachovat objemové hranice p-V diagramu je nutné snižovat objem mrtvého prostoru  $V_{dead}$ , přestože celkový objem mrtvého prostoru  $V_D$  (spodní objemová hranice p-V diagramu) zůstává stejný. K tomuto dochází díky vzrůstajícímu mrtvému objemu pístů  $V_{DP}$ . Mrtvý objem pístů  $V_{DP}$  je jednotlivými písty využit, avšak při pohybu obou pístů díky jejich fázovému posunu nikdy nenastane okamžik, kdy by byly oba písty společně v horní úvratí. Mrtvý objem pístů  $V_{DP}$  je zřejmý i z grafu závislosti změny objemu na natočení klikového hřídele v příloze 1. Sinusoida, představující součet objemů horké a chladné strany, nikdy nedosáhne nulového objemu. U alfa modifikace se jedná o  $50 \text{ cm}^3$ , u modifikací beta se jedná o hodnotu  $115 \text{ cm}^3$  a u modifikace gama o  $176 \text{ cm}^3$ . Výhodou beta modifikace oproti gama modifikaci je možnost snížení mrtvého objemu pístů  $V_{DP}$  vhodnou volbou objemu překrytí pístů  $V_A$ .

U všech modifikací Schmidtova modelu dochází díky uvažování spojitěho pohybu pístů k poklesu výkonu oproti hodnotě ideálního Stirlingova termodynamického cyklu, což je zřejmé i z obsahů ploch výsledných p-V diagramu pro různé modifikace v příloze 2. Beta modifikace má výkon nejvyšší, díky své konstrukci a také díky využití objemu překrytí pístů  $V_A$ .

Při snižování objemu mrtvého prostoru  $V_{dead}$  dochází i ke snižování velikosti teplosměnných ploch regenerátoru. Účinnost regenerátoru je se zmenšováním těchto ploch snižována, čehož při výpočtu nebylo uvažováno. Modifikace beta a gama je konstrukčně při takto malém mrtvém prostoru  $V_{dead}$  již neřešitelná, či finančně vysoce nákladná a proto bude následovat srovnání, kdy bude velikost mrtvého prostoru  $V_{dead}$  zachována, tedy bude zachován i objem regenerátoru  $V_R$ .

## 4.5 POROVNÁNÍ MODIFIKACÍ PŘI ZACHOVÁNÍ STEJNÉHO OBJEMU REGENERÁTORU

Výpočet Stirlingova ideálního cyklu neuvažuje mrtvých prostor jednotlivých pístů. Při užití Schmidtova výpočetního modelu jsou však tyto jednotlivé mrtvé prostory zahrnuty. Na rozdíl od předchozího srovnání, kdy bylo cílem zachovat objemové hranice p-V diagramů pro názornost rozdílu Schmidtova modelu od ideálního Stirlingova cyklu, je nyní provedeno srovnání pro motory o stejném objemu mrtvých prostor  $V_{dead}$ . Tento objem je složen z mrtvého prostoru horkého a chladného pístu ( $V_{DH}$  a  $V_{DC}$ ), přípojných kanálků a samotného regenerátoru  $V_R$ . Oproti předchozímu srovnání má toto srovnání větší význam, neboť umožňuje srovnat motory se zachováním objemu regenerátoru, tedy z konstrukčního a geometrického hlediska motory podobné.



Tabulka 4 zobrazuje vypočtené hodnoty. Zvýrazněné hodnoty představují parametry, které jsou pro jednotlivé modifikace totožné:

Tabulka 4: Výsledné hodnoty při zachování objemu mrtvého prostoru

Parametr:	Označení [Jednotka]:	Hodnota:			
		Modifikace:			
		Ideální	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Celkový zdvihový objem	$V_Z$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>
Zdvihový objem horké strany motoru	$V_{ZH}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	<b>177</b>	<b>177</b>	<b>177</b>
Zdvihový objem chladné strany motoru	$V_{ZC}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	177	250	250
Objem překrytí pístů	$V_{\Delta}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	0	60	0
Objem mrtvého prostoru	$V_{dead}$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>
Objem mrtvého prostoru pístů	$V_{DP}$ [cm <sup>3</sup> ]	0	50	115	176
Celkový objem mrtvého prostoru	$V_D$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>300</b>	<b>365</b>	<b>426</b>
Plynová konstanta použitého média (He)	$r$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>
Fázový úhel	$\alpha$ [°]	-	<b>90</b>	<b>90</b>	<b>90</b>
Minimální teplota	$T_C$ [K]	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>
Maximální teplota	$T_H$ [K]	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>
Minimální tlak	$p_{min}$ [MPa]	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
Maximální tlak	$p_{max}$ [MPa]	21	9	10	8
Střední tlak cyklu	$p_{st}$ [MPa]	9	6	6	6
Otáčky motoru	$n$ [s <sup>-1</sup> ]	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>
Přivedené teplo do cyklu	$Q_H$ [J]	3623,84	570,82	699,64	538,63
Odvedené teplo z cyklu	$Q_C$ [J]	-1386,29	-218,37	-267,65	-206,05
Získaná práce cyklu	$Q_i$ [J]	2237,54	352,45	431,99	332,58
Výkon	$P$ [kW]	55,94	8,81	10,80	8,31
Účinnost	$\eta$ [%]	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>

### Závěr výpočtu:

Výkon beta modifikace je nejvyšší. Gama modifikace dosahuje nejnižšího výkonu. Nejvyšší maximální tlak, limitující faktor pro použité materiály a způsob konstrukce, dosahuje beta modifikace. Nutno poznamenat, že u beta modifikace nebyla při výpočtu uvažována ztráta objemu pracovního pístu, díky procházejícímu dřívku přemístovacího pístu tímto prostorem.





#### 4.6 POROVNÁNÍ MODIFIKACÍ PŘI ZACHOVÁNÍ MNOŽSTVÍ DODANÉHO TEPLA

Jako další velice zajímavé srovnání se nabízí takové, v němž je zachováno množství dodaného tepla do cyklu. Objemový parametr  $V_{ZC}$  byl vhodně volen, zbývající parametry zůstaly zachovány z předchozího srovnání. Parametry, které jsou pro jednotlivé modifikace totožné, jsou v tabulce 5 zvýrazněny.

Tabulka 5: Výsledné hodnoty při zachování velikosti dodaného tepla

Parametr:	Označení [Jednotka]:	Hodnota:			
		Modifikace:			
		Ideální	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Zdvihový objem horké strany motoru	$V_{ZH}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	<b>177</b>	<b>177</b>	<b>177</b>
Zdvihový objem chladné strany motoru	$V_{ZC}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	177	205	266
Objem překrytí pístů	$V_{\Delta}$ [cm <sup>3</sup> ]	-	0	55	0
Objem mrtvého prostoru	$V_{dead}$ [cm <sup>3</sup> ]	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>	<b>250</b>
Plynová konstanta použitého média (He)	$r$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>	<b>2077</b>
Fázový úhel	$\alpha$ [°]	-	<b>90</b>	<b>90</b>	<b>90</b>
Minimální teplota	$T_C$ [K]	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>	<b>353,15</b>
Maximální teplota	$T_H$ [K]	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>	<b>923,15</b>
Minimální tlak	$p_{min}$ [MPa]	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
Maximální tlak	$p_{max}$ [MPa]	21	8,56	8,85	8,61
Střední tlak cyklu	$p_{st}$ [MPa]	9	5,85	5,95	5,87
Otáčky motoru	$n$ [s <sup>-1</sup> ]	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>
Přivedené teplo do cyklu	$Q_H$ [J]	3623,84	570,82	570,82	570,82
Odvedené teplo z cyklu	$Q_C$ [J]	-1386,29	-218,37	-218,37	-218,37
Získaná práce cyklu	$Q_i$ [J]	2237,54	352,45	352,45	352,45
Výkon	$P$ [kW]	55,94	8,81	8,81	8,81
Účinnost	$\eta$ [%]	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>	<b>61,75</b>

#### Závěr výpočtu:

Výsledné hodnoty z tabulky 5 udávají, že nejvyššího tlaku při požadavku stejného minimálního tlaku dosahuje beta modifikace, alfa nejméně. Tento údaj může být pro volený materiál limitujícím. Porovnání p-V diagramů všech modifikací s požadavkem zachování velikosti dodaného tepla  $Q_H$  je v příloze 5.



## ZÁVĚR

Při studiu Stirlingova motoru mě zaujala skutečnost, že motor lze pro jeho nesporné výhody aplikovat ve velice širokém spektru oblasti užití. Díky nezávislosti na zdroji tepla je tento pohon oproti běžnému motoru s vnitřním spalováním velice univerzální. Výhody Stirlingova cyklu vyniknou při konstrukci velkých stacionárních motorů, či naopak u malých motorů s volnými písty. Překvapující bylo zjištění, že studiem a vývojem Stirlingova motoru se zabývá mnoho světových společností. Studie nasazení Stirlingova motoru ve velice specifických oblastech, jako je nasazení ve vesmíru, medicíně v podobě umělého srdce či armádě pro pohon ponorek či chlazení nočního vidění potvrzují, že Stirlingův motor nepatří pouze do muzejních sbírek, a jak by se na první pohled mohlo zdát, o zastaralý a překonaný technický patent, ale o vskutku zajímavé technické řešení, které patří do současného světa a především do budoucnosti. Na druhou stranu jsem se při studiu Stirlingova motoru smířil s tím, že nasazení Stirlingova motoru v oblasti automobilů není nemožné, avšak není vhodné pro své složité konstrukční řešení a motor by měl být využit tam, kde jeho výhody převládají.

Hlavním cílem této práce bylo provedení podrobného popisu jednotlivých kroků Schmidtovy analýzy tak, aby byl budoucí zájemce schopen samostatně řešit tuto analýzu. Dále aby mohl ověřit správnost použitých vzorců a porozuměl užitým matematickým krokům ve Schmidtově analýze. Druhá část práce se zabývá aplikací této analýzy na konkrétní výchozí parametry motoru pro modifikace alfa, beta a gama a následné porovnání výsledků jednotlivých modifikací s ideálním Stirlingovým cyklem. Přestože došlo při výpočtu k dalšímu zjednodušení v podobě zanedbání objemu dříku přemísťovacího pístu u beta modifikace a zanedbání mrtvých prostor jednotlivých pístů u všech modifikací, pokles dosažené hodnoty výkonu oproti ideálnímu cyklu je značný. Schmidtova metoda sama o sobě předpokládá další zjednodušující předpoklady, tak jako další zpřesňující metody, a proto jediný přesný výsledek přinese až samotné měření konkrétního motoru na zkušebně. Motor dosahuje vysokého stupně účinnosti, výsledky dosaženého výkonu však potvrzují, že samotný výpočet ideálního Stirlingova cyklu ze známých vstupních parametrů je v praxi nepoužitelný. Schmidtova metoda slouží pro hrubou volbu konstrukčních parametrů motoru, avšak pro detailnější návrh motoru je nutné použít dalších zpřesňujících metod.

Tématem Stirlingova motoru bych se rád zabýval i nadále. V případné navazující práci by bylo vhodné soustředit se na studium závislosti jednotlivých parametrů na výkonu motoru a optimalizaci všech parametrů tak, aby bylo dosaženo výkonu co možná nejvyššího. Dále by bylo přínosné užít jedné ze zpřesňujících metod, řešit konkrétní mechanismus a srovnat dosažené výsledky mezi Schmidtovou analýzou a touto zpřesňující metodou. Mým velkým přáním by bylo zkonstruování reálného Stirlingova motoru o podobných vstupních parametrech, na kterém lze provést měření. Následně by bylo možné porovnat naměřené hodnoty reálného motoru s hodnotami Schmidtovy či další zpřesňující analýzy.



## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] KAPOUN, Jan. Sadi Carnot: Úvahy o hnací síle ohně (1824). In: *Science World* [online]. 2004 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://www.scienceworld.cz/neziva-priroda/sadi-carnot-uvahy-o-hnaci-sile-ohne-1824-2063/>
- [2] NIGHTINGALE, Noel P. *Automotive Stirling engine: Mod II Design Report* [online]. New York, 1986 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://www.keywordresearch.org/wp-content/uploads/2015/05/automotive-stirling-engine.pdf>
- [3] SLABY, Jack G. *Overview of free-piston Stirling engine technology for space power application: Final report* [online]. Ohio, 1987, , 1-22 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://www.keywordresearch.org/wp-content/uploads/2015/05/Free-Piston-Stirling-Engine-Technology-for-Space.pdf>
- [4] TEDOM vyvíjí vlastní Stirlingův motor. In: *EnviWeb* [online]. 2007 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://www.enviweb.cz/clanek/obecne/62085/tedom-vyvi-ji-vlastni-stirlinguv-motor>
- [5] WERDICH, Martin. *Stirling-Maschinen: Grundlagen, Technik, Anwendung*. 1. Aufl. Staufen bei Freiburg: Ökobuch, 1991. ISBN 3922964354.
- [6] SENFT, J. *Ringbonm stirling engines*. New York: Oxford University Press, 1993. ISBN 0195077989.
- [7] ROGOWAY, Tyler. Sweden Has A Sub That's So Deadly The US Navy Hired It To Play Bad Guy. In: *Foxtrot Alpha* [online]. 2014 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://foxtrotalpha.jalopnik.com/sweden-has-a-sub-thats-so-deadly-the-us-navy-hired-it-t-1649695984>
- [8] WALKER, G. *The Stirling alternative: power systems, refrigerants, and heat pumps*. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1994. ISBN 2881246001.
- [9] MÍKA, Jiří. *Motory s vnějším spalováním*. Ostrava, 2004. Habilitační přednáška. Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní.
- [10] ŠKORPÍK, Jiří a Jaroslav KADRNOŽKA. *Porovnání jednotlivých modifikací Stirlingova motoru podle Schmidovy idealizace*. Technická zpráva grantového projektu GA ČR 101/03/0299. Brno: VUT-FSI, 2003
- [11] KADRNOŽKA, Jaroslav a Jiří ŠKORPÍK. *Výzkum transportních procesů na teplosměnných plochách a v regenerátoru Stirlingova motoru*. Technická zpráva grantového projektu GA ČR 101/03/0299. Brno: VUT-FSI, 2003
- [12] STOJAN, Petr. *Termodynamika s konečným časem: přeměna sluneční energie na mechanickou: Finite time thermodynamics: solar to mechanical energy conversion : zkrácená verze Ph.D. Thesis*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav fyzikálního inženýrství, c2005. ISBN 80-214-2874-0.



- [13] Schmidt theory for Stirling engines. *Bekkoame* [online]. 1997 [cit. 2016-05-16]. Dostupné z: <http://www.bekkoame.ne.jp/~khirata/academic/schmidt/schmidt.htm>
- [14] ÇENGEL, Yunus A. a Michael A. BOLES. *Thermodynamics: an engineering approach*. 5th ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, c2006. ISBN 0072884959.
- [15] ŠKORPÍK, Jiří. *Příspěvek k návrhu Stirlingova motoru: A contribution to design of the Stirling engine : zkrácená verze Ph.D. Thesis*. [V Brně: Vysoké učení technické], c2008. ISBN 978-80-214-3763-0.
- [16] CHEN, N.C.J. a F.P. GRIFFIN. *A Review of Stirling Engine Mathematical Models* [online]. Tennessee: OAK Ridge National Laboratory, 1983 [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: <http://web.ornl.gov/info/reports/1983/3445602862052.pdf>
- [17] HERZOG, Siegfried. Integrals in Support of the Schmidt Analysis. In: *Zigherzog* [online]. c2014 [cit. 2016-05-18]. Dostupné z: [http://zigherzog.net/stirling/simulations/isothermal/schmidt\\_integrals.html](http://zigherzog.net/stirling/simulations/isothermal/schmidt_integrals.html)
- [18] URIELI, Israel. Stirling Cycle Machine Analysis. In: *Ohio* [online]. Athens: Ohio University, c2010 [cit. 2016-05-24]. Dostupné z: <https://www.ohio.edu/mechanical/stirling/>



## SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

a	[°]	součinitel, úhel pravouhlého trojúhelníka
B	[-]	součinitel, přepona pravouhlého trojúhelníka
c	[-]	součinitel, poměr součinitelů B a S
$c_v$	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	měrná tepelná kapacita za stálého objemu
m	[kg]	hmotnost
$m_C$	[kg]	hmotnost pracovního média v chladné části motoru
$m_H$	[kg]	hmotnost pracovního média v horké části motoru
$m_R$	[kg]	hmotnost pracovního média v regenerátoru
n	[s <sup>-1</sup> ]	pracovní otáčky motoru
p	[Pa]	tlak
P	[W]	výkon
$p_1$	[Pa]	tlak v pracovním bodě 1
$p_2$	[Pa]	tlak v pracovním bodě 2
$p_3$	[Pa]	tlak v pracovním bodě 3
$p_4$	[Pa]	tlak v pracovním bodě 4
$p_{max}$	[Pa]	maximální tlak
$p_{min}$	[Pa]	minimální tlak
$p_{st}$	[Pa]	střední tlak cyklu
$P_t$	[W]	termodynamický výkon
Q	[J]	teplo
$Q_{12}$	[J]	odvedené teplo mezi pracovními body 1 a 2
$Q_{23}$	[J]	dodané teplo mezi pracovními body 2 a 3
$Q_{34}$	[J]	dodané teplo mezi pracovními body 3 a 4
$Q_{41}$	[J]	odvedené teplo mezi pracovními body 4 a 1
$Q_C$	[J]	teplo z cyklu odvedené
$Q_H$	[J]	teplo do cyklu dodané
$Q_I$	[J]	indikované teplo
r	[J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	měrná plynová konstanta
S	[-]	součinitel, redukovaný mrtvý objem
T	[K]	teplota
$T_1$	[K]	teplota v pracovním bodě 1
$T_2$	[K]	teplota v pracovním bodě 2



$T_3$	[K]	teplota v pracovním bodě 3
$T_4$	[K]	teplota v pracovním bodě 4
$T_C$	[K]	teplota chladné části motoru
$T_H$	[K]	teplota horké části motoru
$T_{\max}$	[K]	maximální teplota
$T_{\min}$	[K]	minimální teplota
$T_R$	[K]	teplota regenerátoru
$V$	[m <sup>3</sup> ]	objem
$V_1$	[m <sup>3</sup> ]	objem v pracovním bodě 1
$V_2$	[m <sup>3</sup> ]	objem v pracovním bodě 2
$V_3$	[m <sup>3</sup> ]	objem v pracovním bodě 3
$V_4$	[m <sup>3</sup> ]	objem v pracovním bodě 4
$V_C$	[m <sup>3</sup> ]	okamžitý objem studené strany motoru
$V_D$	[m <sup>3</sup> ]	celkový objem mrtvého prostoru
$V_{DC}$	[m <sup>3</sup> ]	mrtvý objem chladné části
$V_{\text{dead}}$	[m <sup>3</sup> ]	Celkový mrtvý objem
$V_{DH}$	[m <sup>3</sup> ]	mrtvý objem horké části
$V_{DP}$	[m <sup>3</sup> ]	objem mrtvého prostoru pístů
$V_H$	[m <sup>3</sup> ]	okamžitý objem horké strany motoru
$V_{\max}$	[m <sup>3</sup> ]	maximální objem
$V_{\min}$	[m <sup>3</sup> ]	minimální objem
$V_R$	[m <sup>3</sup> ]	objem regenerátoru
$V_Z$	[m <sup>3</sup> ]	zdvihový objem
$V_{ZC}$	[m <sup>3</sup> ]	zdvihový objem chladné části
$V_{ZH}$	[m <sup>3</sup> ]	zdvihový objem horké části
$V_{\Delta}$	[m <sup>3</sup> ]	objem překrytí zdvihu pracovního a přemístovacího pístu
$W_I$	[J]	indikovaná práce
$x$	[-]	označení odvěsny pravoúhlého trojúhelníka
$X_B$	[-]	objemový poměr objemu překrytí pracovního a přemístovacího pístu
$X_{DC}$	[-]	objemový poměr mrtvého objemu chladné části
$X_{DH}$	[-]	objemový poměr mrtvého objemu horké části
$X_R$	[-]	objemový poměr regenerátoru
$z$	[-]	označení odvěsny pravoúhlého trojúhelníka



$\alpha$	[°]	fázový úhel pístů
$\varepsilon_k$	[-]	kompresní poměr
$\eta$	[-]	účinnost
$\eta_c$	[-]	účinnost Carnotova cyklu
$\eta_R$	[-]	účinnost regenerátoru
$\eta^\alpha$	[-]	účinnost alfa modifikace
$\eta^\beta$	[-]	účinnost beta modifikace
$\eta^\gamma$	[-]	účinnost gama modifikace
$\kappa$	[-]	Poissonova konstanta plynu
$\nu$	[-]	zdvihový poměr
$\tau$	[-]	teplotní poměr
$\varphi$	[°]	úhel natočení klikového hřídele
$\varphi_{\max}$	[°]	úhel natočení klikového hřídele, při němž nastává maximum objemu
$\varphi_{\min}$	[°]	úhel natočení klikového hřídele, při němž nastává minimum objemu
$\psi$	[-]	teplotní poměr



## SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1: Změna průběhu tlaku a objemu v závislosti na úhlu natočení klikového hřídele  $\varphi$

Příloha 2: Srovnání p-V diagramů Schmidtovy metody a Stirlingova ideálního cyklu

Příloha 3: p-V diagramy horkých a studených stran modifikací Schmidtova modelu

Příloha 4: Porovnání p-V diagramů beta modifikace

Příloha 5: Porovnání p-V diagramů modifikací při požadavku zachování dodaného tepla  $Q_H$

Příloha 6: Výpočet ideálního Stirlingova cyklu pomocí Softwaru MathCad

Příloha 7: Vykreslení p-V diagramu ideálního Stirlingova cyklu pomocí softwaru MathCad

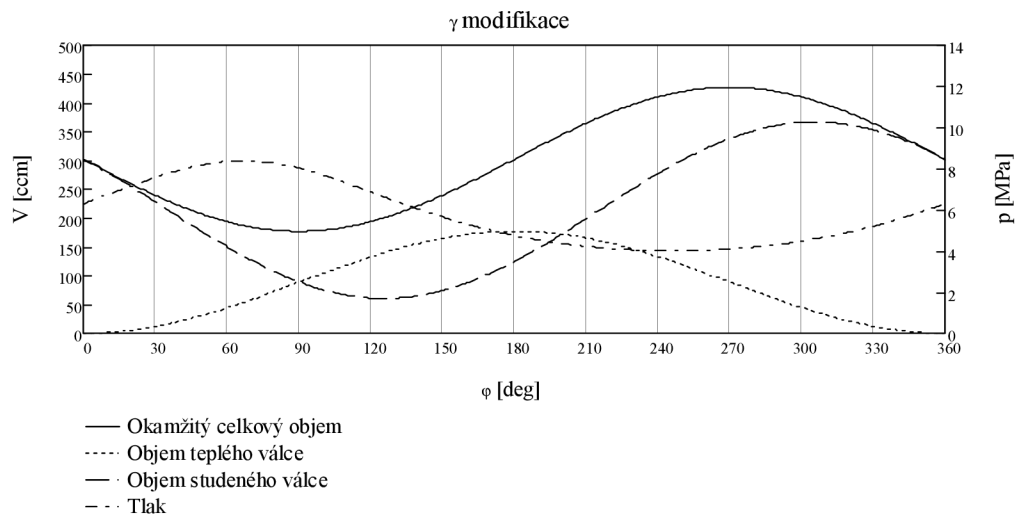
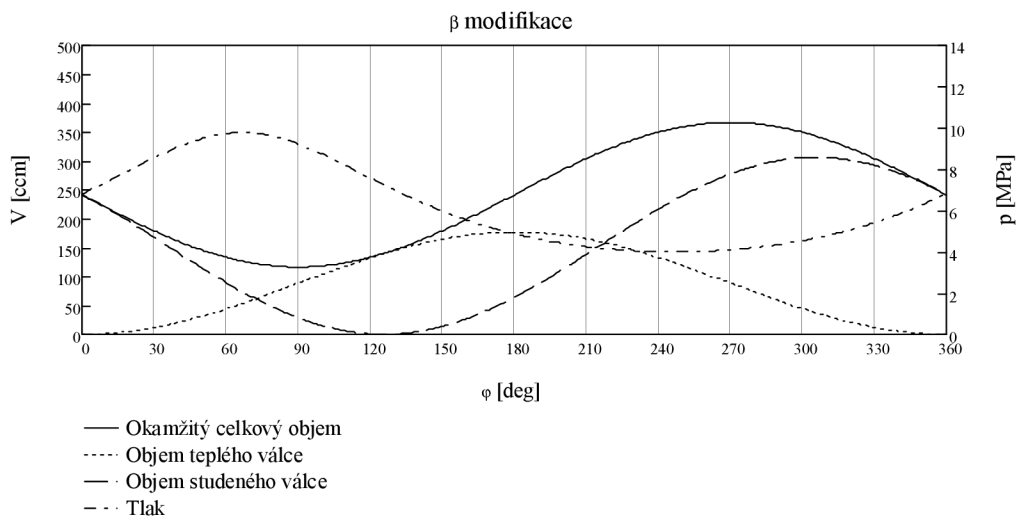
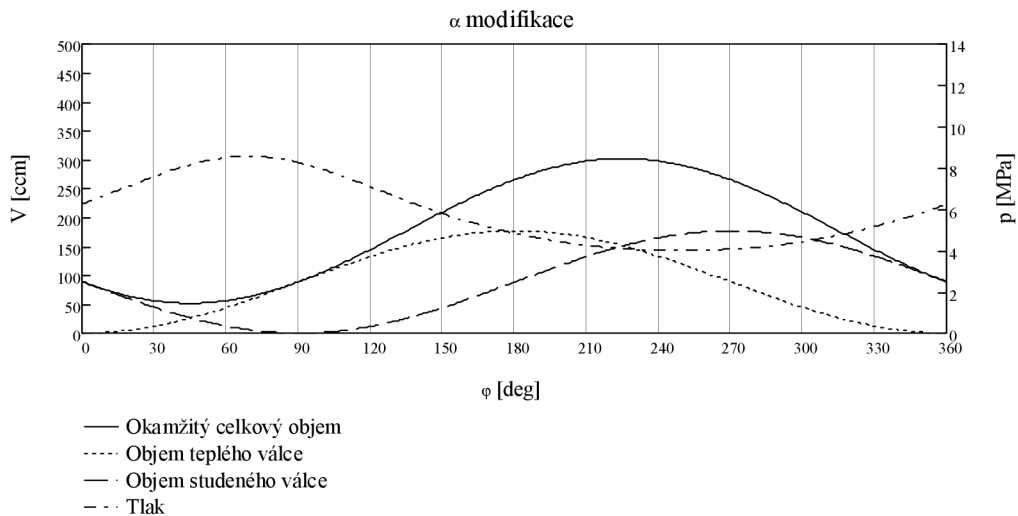
Příloha 8: Výpočet alfa modifikace pomocí Schmidtovy teorie v programu MathCad

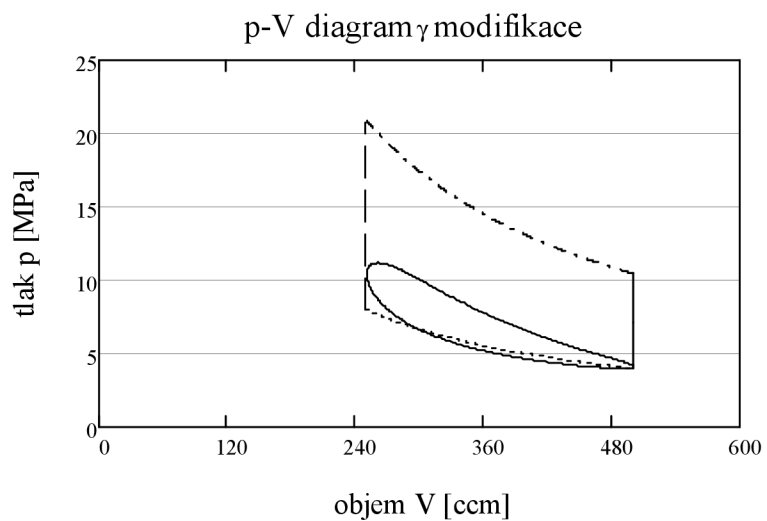
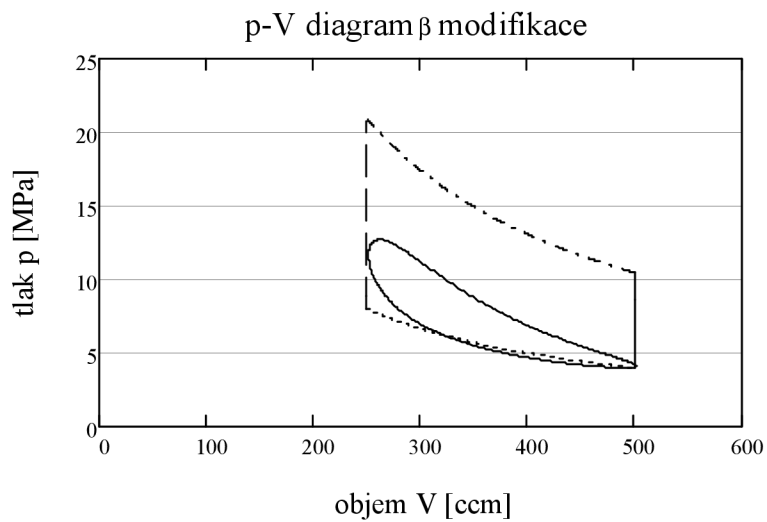
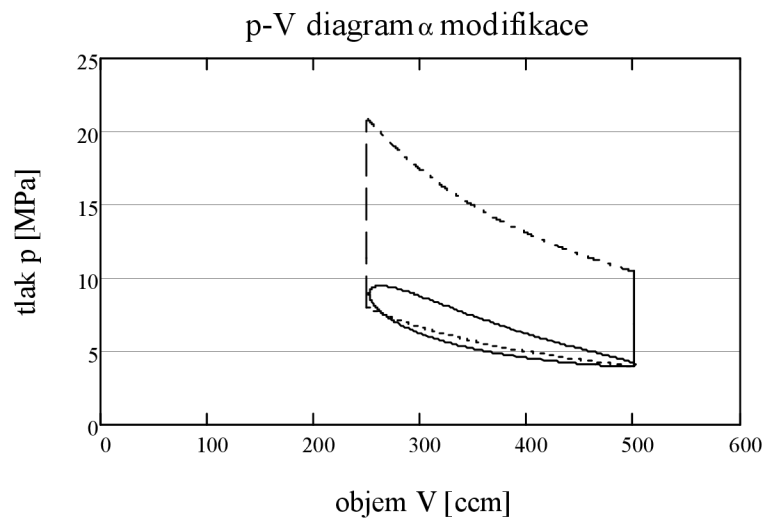
Příloha 9: Výsledné hodnoty výpočtu a grafický výstup z programu MathCad



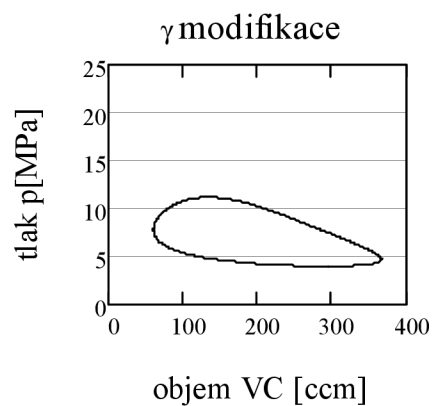
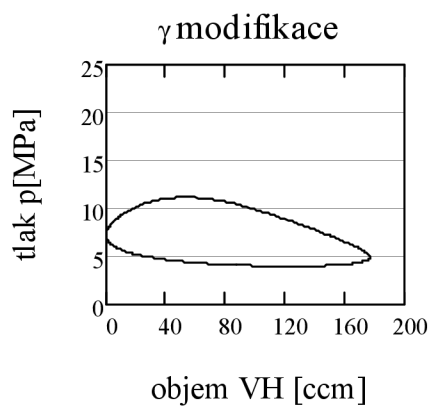
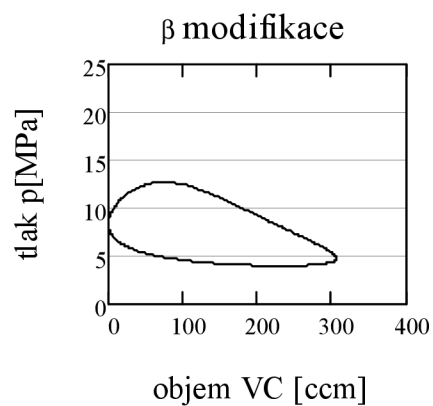
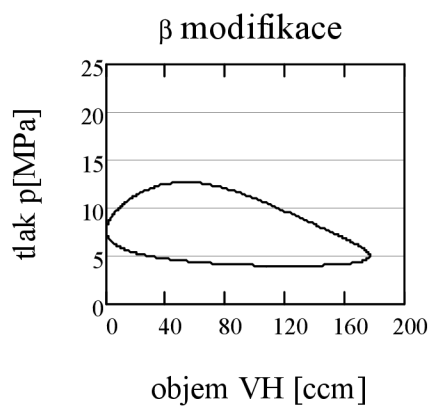
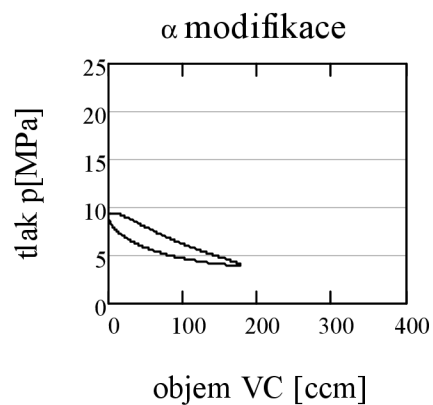
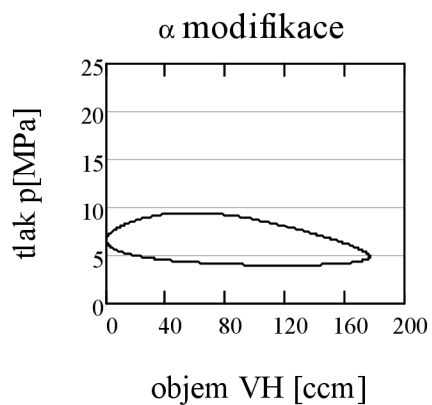


## PŘÍLOHY PRÁCE

Příloha 1: Změna průběhu tlaku a objemu v závislosti na úhlu natočení klikového hřídele  $\phi$



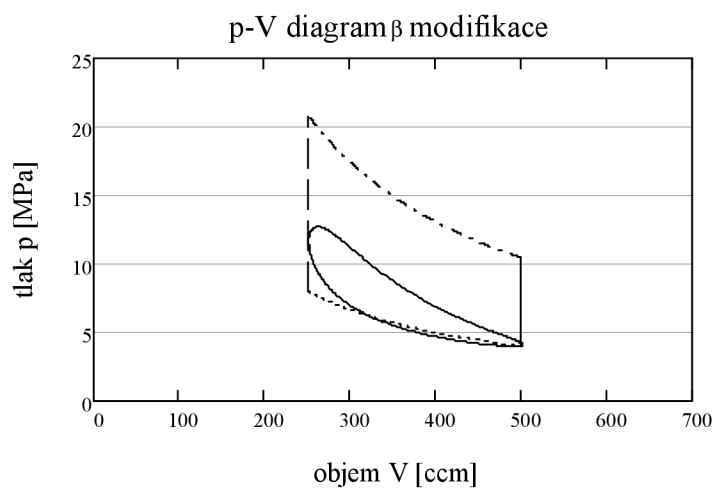
Příloha 2: Srovnání p-V diagramů Schmidtovy metody a Stirlingova ideálního cyklu



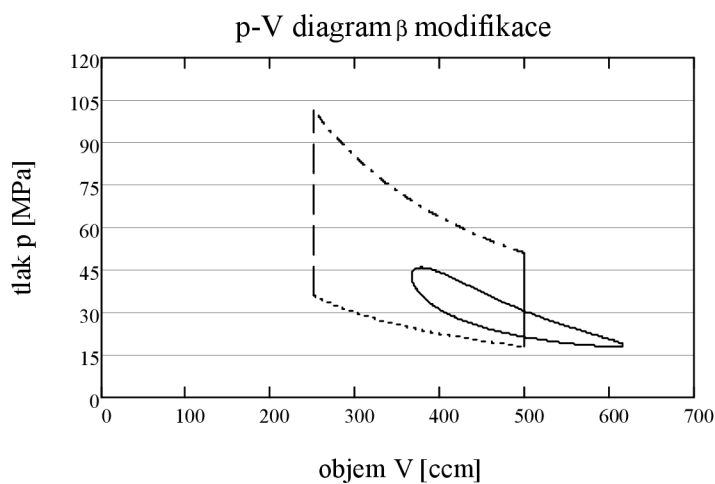
Příloha 3: p-V diagramy horkých a studených stran modifikací Schmidtova modelu



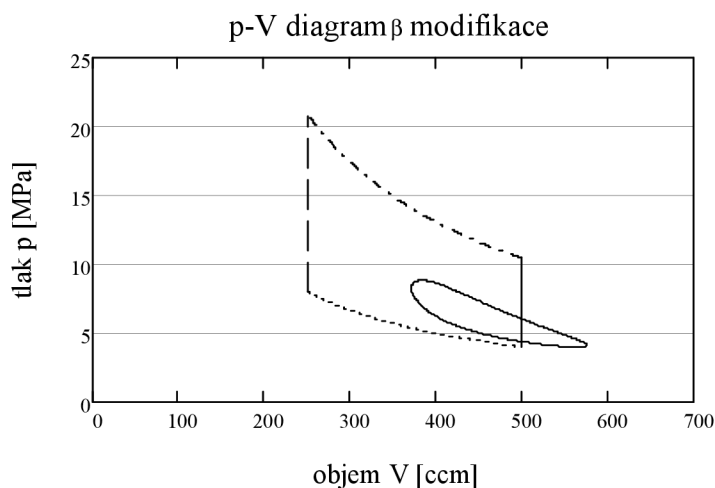
a)



b)

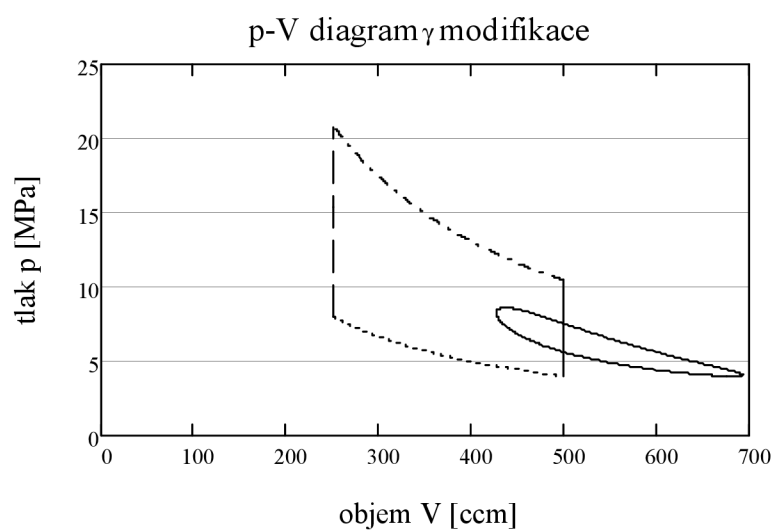
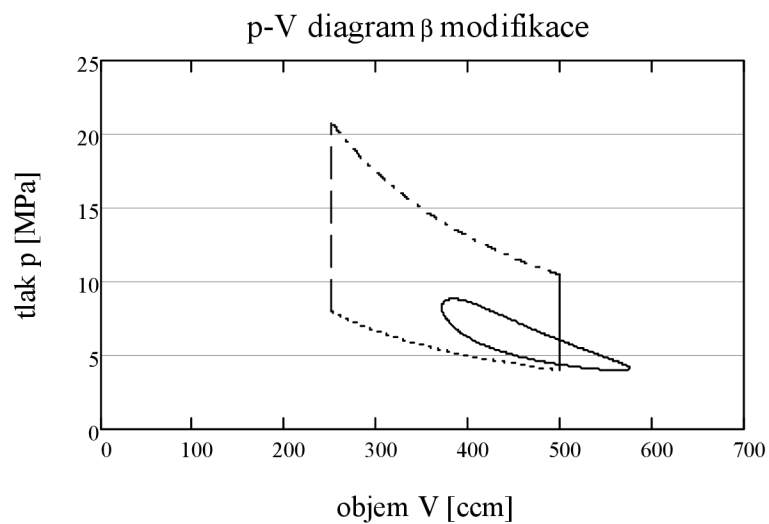
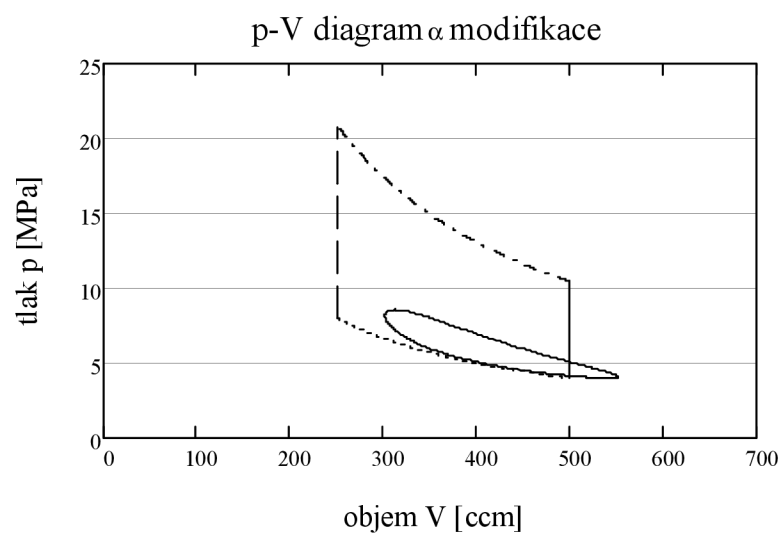


c)



#### Příloha 4: Porovnání p-V diagramů beta modifikace

- a) požadavek zachování hranic p-V diagramu ideálního cyklu
- b) požadavek zachování objemu mrtvého prostoru  $V_{dead}$
- c) požadavek zachování velikosti dodaného tepla  $Q_H$

Příloha 5: Porovnání p-V diagramů modifikací při požadavku zachování dodaného tepla  $Q_H$



Výpočet ideálního Stirlingova cyklu:

Vstupní hodnoty:

Tlaky:

$$p_{\min} := 5 \text{ MPa}$$

Teploty:

$$T_{\max} := 923.15 \text{ K}$$

$$T_{\min} := 353.15 \text{ K}$$

Objemy:

$$V_z := 250 \text{ cm}^3$$

$$V_{\min} := \frac{V_z}{\epsilon_k - 1} = 250 \text{ cm}^3$$

$$V_{\max} := 500 \text{ cm}^3$$

Kompresní poměr:

$$\epsilon_k = 2$$

Pracovní otáčky motoru:

$$n := 1500 \text{ min}^{-1}$$

Použitý plyn: Helium

$$A_{\text{He}} := 4.0026 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$$

$$M_{\text{He}} := A_{\text{He}}$$

$$\kappa = 1.67$$

Definice pracovních bodů:

$$T_1 := T_{\min} \quad V_1 := V_{\max}$$

$$T_2 := T_{\min} \quad V_2 := V_{\min}$$

$$T_3 := T_{\max} \quad V_3 := V_{\min}$$

$$T_4 := T_{\max} \quad V_4 := V_{\max}$$

$$p_1 := p_{\min}$$

Molární plynová konstanta R:

$$R_m := 8314.4598 \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kmol}^{-1}$$

$$r := \frac{R_m}{M_{\text{He}}} = 2077.265 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$c_{v\text{He}} := \frac{1}{\kappa - 1} \cdot r = 3100.395 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Hmotnost pracovního média:

$$m_m := \frac{p_{\min} \cdot V_1}{r \cdot T_1} = 3.408 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

Rovnice jednotlivých dějů:

1) Izotermická komprese (1-2)

$$p_2 := p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 10 \text{ MPa}$$

$$Q_{12} := m_m \cdot r \cdot T_{\min} \cdot \ln\left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right) = -1732.86795 \text{ J}$$

2) Izochorický ohřev (2-3)

$$p_3 := \frac{p_2 \cdot T_{\max}}{T_{\min}} = 26.14 \text{ MPa}$$

$$Q_{23} := m_m \cdot c_{v\text{He}} \cdot (T_{\max} - T_{\min}) = 6022.55606 \text{ J}$$

3) izotermická expanze (3-4)

$$p_4 := \frac{p_3 \cdot V_3}{V_4} = 13.07 \text{ MPa}$$

$$Q_{34} := m_m \cdot r \cdot T_{\max} \cdot \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}}\right) = 4529.795 \text{ J}$$

4) Izochorické chlazení (4-1)

$$Q_{41} := m_m \cdot c_{v\text{He}} \cdot (T_{\min} - T_{\max}) = -6022.5561 \text{ J}$$

Celkové teplo:

$$Q := Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = 2796.927 \text{ J}$$

Celkový výkon motoru:

$$P := n \cdot Q = 69.923 \text{ kW}$$

Celková účinnost motoru:

$$\eta := 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 61.745\%$$

Příloha 6: Výpočet ideálního Stirlingova cyklu pomocí Softwaru MathCad

**Grafické znázornění:****krok 1-2:**

$$\text{objem12} := V_{\min} \cdot V_{\min} + 0.1 \text{cm}^3 \cdot V_{\max}$$

$$\text{tlak12}(\text{objem12}) := p_1 \cdot \frac{V_1}{\text{objem12}}$$

**krok 2-3:**

$$\text{objem23} := V_{\min}$$

$$\text{tlak23} := p_2 \cdot p_2 + 0.1 \text{MPa} \cdot p_3$$

**krok 3-4:**

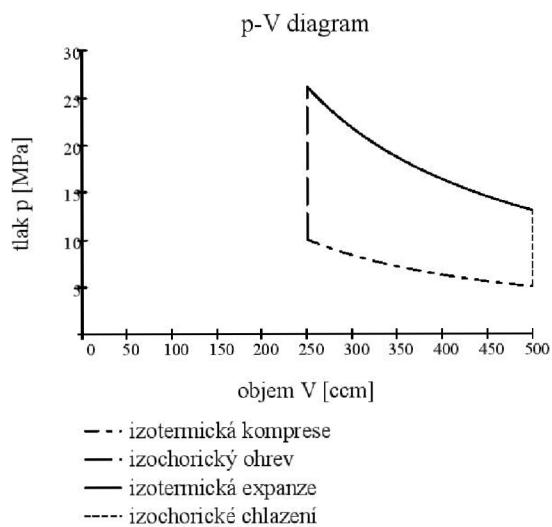
$$\text{objem34} := V_{\max} \cdot V_{\max} - 0.1 \text{cm}^3 \cdot V_{\min}$$

$$\text{tlak34}(\text{objem34}) := p_3 \cdot \frac{V_3}{\text{objem34}}$$

**krok 4-1:**

$$\text{objem41} := V_{\max}$$

$$\text{tlak41} := p_4 \cdot p_4 - 0.1 \text{MPa} \cdot p_1$$



Příloha 7: Vykreslení p-V diagramu ideálního Stirlingova cyklu pomocí softwaru MathCad

**Schmidtova teorie pro  $\alpha$  modifikaci:****Vstupní hodnoty:****Tlaky:**

$$P_{\min} = 5 \text{ MPa}$$

**Teploty:**

$$T_C := 353.15 \text{ K}$$

$$T_H := 923.15 \text{ K}$$

**Objemy:**

$$V_{ZH} := 176.78 \text{ cm}^3$$

$$V_{ZC} := 176.78 \text{ cm}^3$$

$$V_R := 200 \text{ cm}^3$$

$$V_{DE} := 0 \text{ cm}^3$$

$$V_{DC} := 0 \text{ cm}^3$$

**Úhly:**

$$\varphi := 0 \text{ deg}, 1 \text{ deg} \dots 360 \text{ deg}$$

$$\alpha := 90 \text{ deg}$$

**Pracovní otáčky motoru:**

$$n := 1500 \text{ min}^{-1}$$

**Pracovní médium:**

$$r := 2077 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

**Výpočtové rovnice:**

$$V_H(\varphi) := \frac{V_{ZH}}{2} \cdot (1 - \cos(\varphi)) + V_{DE}$$

$$V_C(\varphi) := \frac{V_{ZC}}{2} \cdot (1 - \cos(\varphi - \alpha)) + V_{DC}$$

$$V_\beta(\varphi) := V_H(\varphi) + V_C(\varphi) + V_R$$

**Definice jednotlivých poměrů:**

$$t := \frac{T_C}{T_H} = 0.383 \quad v := \frac{V_{ZC}}{V_{ZH}} = 1 \quad X_{DE} := \frac{V_{DE}}{V_{ZH}} \quad X_{DC} := \frac{V_{DC}}{V_{ZH}} \quad X_R := \frac{V_R}{V_{ZH}} \quad T_{\text{Raverage}} := \frac{T_H + T_C}{2} = 638.15 \text{ K}$$

**Výpočet součinitelů:**

$$a_\alpha := \text{atan}\left(\frac{v \cdot \sin(\alpha)}{t + v \cdot \cos(\alpha)}\right) = 69.066 \text{ deg}$$

$$S_\alpha := t + 2 \cdot t \cdot X_{DE} + \frac{4 \cdot t \cdot X_R}{1 + t} + v + 2 \cdot X_{DC} = 2.635$$

$$B_\alpha := \sqrt{t^2 + 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos(\alpha) + v^2} = 1.071$$

$$c_\alpha := \frac{B_\alpha}{S_\alpha} = 0.406$$

**Výpočet tlaků cyklu:**

$$P_{\text{st}\alpha} := \frac{P_{\min}}{\sqrt{\frac{1 - c_\alpha}{1 + c_\alpha}}} = 7.696 \text{ MPa}$$

$$P_\alpha(\varphi) := \frac{P_{\text{st}\alpha} \sqrt{1 - c_\alpha^2}}{1 - c_\alpha \cdot \cos(\varphi - a_\alpha)}$$

$$P_{\text{max}\beta} := P_{\text{st}\alpha} \sqrt{\frac{1 + c_\alpha}{1 - c_\alpha}} = 11.846 \text{ MPa}$$

Příloha 8: Výpočet alfa modifikace pomocí Schmidtovy teorie v programu MathCad





**Výpočet tepla:**

Dodané teplo:

$$Q_H := \frac{P_{st\alpha} \cdot V_{ZH} \cdot \pi \cdot c_{\alpha} \cdot \sin(a_{\alpha})}{1 + \sqrt{1 - c_{\alpha}^2}} = 847.68725 \text{ J}$$

Odebrané teplo:

$$Q_C := \frac{-P_{st\alpha} \cdot V_{ZH} \cdot \pi \cdot c_{\alpha} \cdot \sin(a_{\alpha})}{1 + \sqrt{1 - c_{\alpha}^2}} = -324.282 \text{ J}$$

Celková indikovaná energie cyklu:

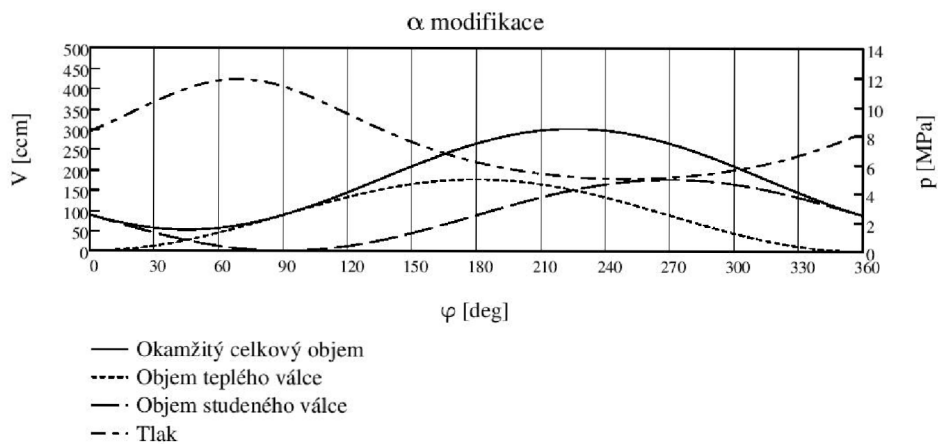
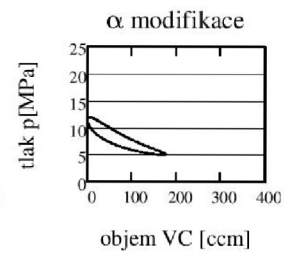
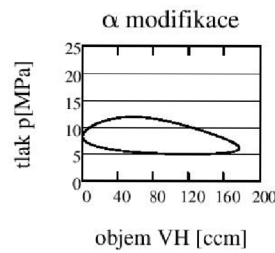
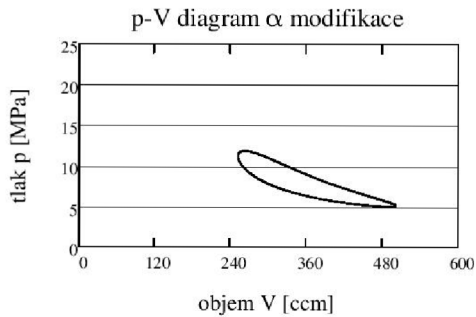
$$Q_i := \frac{P_{st\alpha} \cdot V_{ZH} \cdot \pi \cdot c_{\alpha} \cdot (1 - \nu) \cdot \sin(a_{\alpha})}{1 + \sqrt{1 - c_{\alpha}^2}} = 523.40544 \text{ J}$$

Účinnost cyklu:

$$\eta_{\beta} := \frac{Q_i}{Q_H} = 61.74511 \cdot \%$$

Výkon cyklu:

$$P_{\alpha} := Q_i \cdot n = 13.085 \text{ kW}$$



Příloha 9: Výsledné hodnoty výpočtu a grafický výstup z programu MathCad