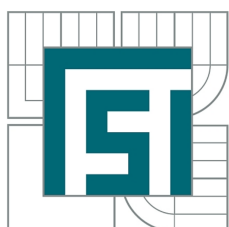


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA OHÝBANÝCH PRUTŮ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF BEAM ELEMENTS USING FINITE ELEMENT METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

TEREZA DUŠKOVÁ

VEDOUČÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ NÁVRAT, Ph.D.



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2014/15

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Tereza Dušková

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Deformačně-napěťová analýza ohýbaných prutů metodou konečných prvků**

v anglickém jazyce:

### **Stress-strain analysis of beam elements using finite element method**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je naprogramovat algoritmus metody konečných prvků pro řešení různě uložených prutových těles. Pro řešení primárně využít volně dostupné prostředky (Python, knihovny NumPy, SciPy, překladač Fortranu, apod.). Ověření funkčnosti realizovat výpočtem v komerčním programu ANSYS.

Cíle bakalářské práce:

1. Přehled používaných MKP programů se stručným popisem jejich možností.
2. Možnost využití volně dostupných prostředků pro vědecké výpočty.
3. Naprogramovat algoritmus MKP pro prutové těleso.
4. Verifikovat vypočtené výsledky s výsledky získanými v programu ANSYS.

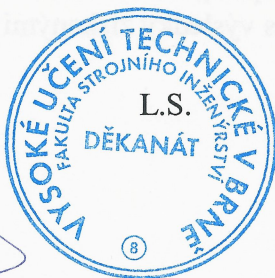
Seznam odborné literatury:

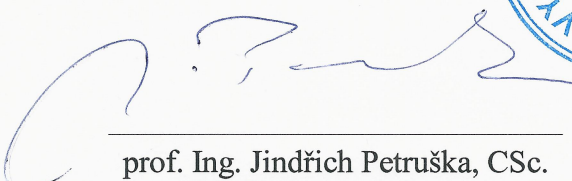
1. Zienkiewicz, O., C., Taylor, R. L.: The finite element method, 5th ed., Arnold Publishers, London, 2000
2. Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíšek, A.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL Praha, 1979
3. Ferreira, A.J.M.: MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures, 2009

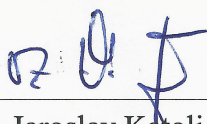
Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně, dne 17.11.2014



  
prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

  
doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan

### **Abstrakt**

Práce se zabývá řešením deformačně-napěťové analýzy ohýbaných prutů pomocí metody konečných prvků. Algoritmy metody konečných prvků pro různá uložení prutů jsou napsány pomocí softwaru Matlab. Poté jsou výsledky srovnány a ověřeny pomocí analytického řešení a softwaru ANSYS.

### **Klíčová slova**

MKP, metoda konečných prvků, ohýbaný prut, Matlab, ANSYS

### **Abstract**

This thesis is about solving stress-strain analysis of beam elements using finite element method. Algorithms of the finite element method for variously mounted beams are implemented using Matlab. Results are then compared and validated with analytic solution and ANSYS software solution.

### **Keywords**

FEM, finite element method, beam element, Matlab, ANSYS

### **Bibliografická citace**

DUŠKOVÁ, T. *Deformačně-napěťová analýza ohýbaných prutů metodou konečných prvků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 65 s. Školitel Ing. Tomáš Návrat, Ph.D.



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Deformačně-napěťová analýza ohýbaných prutů metodou konečných prvků* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Tomáše Návrata, Ph.D. s použitím odborné literatury a zdrojů uvedených v seznamu v této práci.

Tereza Dušková





## Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému školiteli Ing. Tomáši Návratovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce a za rady a čas, který mi při konzultacích věnoval.

Dále bych chtěla poděkovat Ing. Lubomíru Klimešovi, Ph.D. za pomoc při formátování práce v sázecím programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

V poslední řadě bych ráda poděkovala svým rodičům za podporu během mého dosavadního studia a svému příteli Jakubovi za trpělivost a podporu při psaní této bakalářské práce.

Tereza Dušková



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>1 O metodě konečných prvků</b>	<b>15</b>
1.1 Historie MKP . . . . .	15
1.2 Matematický základ . . . . .	15
1.2.1 Geometrické vztahy . . . . .	16
1.2.2 Rovnice rovnováhy . . . . .	16
1.2.3 Konstitutivní vztahy . . . . .	16
1.2.4 Okrajové podmínky . . . . .	16
1.3 Princip MKP . . . . .	16
1.3.1 Základní myšlenka . . . . .	17
1.3.2 Postup řešení . . . . .	17
<b>2 Přehled MKP programů</b>	<b>21</b>
2.1 Abaqus . . . . .	22
2.2 ANSYS . . . . .	23
2.3 CalculiX . . . . .	23
2.4 Elmer . . . . .	23
<b>3 Volně dostupné prostředky pro vědecké účely</b>	<b>25</b>
3.1 Octave . . . . .	25
3.2 Python . . . . .	25
3.3 Fortran . . . . .	26
3.4 Scilab . . . . .	26
3.5 Sage . . . . .	26
<b>4 Algoritmus MKP pro prutové těleso</b>	<b>27</b>
4.1 Myšlenkový postup . . . . .	27
4.2 Popis zdrojového kódu . . . . .	30
4.2.1 Vstupní hodnoty . . . . .	31
4.2.2 Matice tuhosti K . . . . .	31
4.2.3 Matice zatížení F . . . . .	31
4.2.4 Okrajové podmínky . . . . .	31
4.2.5 Matice neznámých parametrů U1 . . . . .	32
4.2.6 Hodnoty průhybu a natočení . . . . .	32
4.2.7 Vykreslení průhybu a natočení . . . . .	32
4.2.8 Výpočet křivosti . . . . .	33
4.2.9 Vykreslení posouvající síly a ohybového momentu . . . . .	33
4.2.10 Nominální napětí . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Porovnání získaných výsledků</b>	<b>37</b>
5.1	Vetknutý prut na volném konci zatížený silou . . . . .	37
5.1.1	Analytické řešení . . . . .	37
5.1.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	40
5.1.3	Řešení získané pomocí ANSYSu . . . . .	42
5.1.4	Porovnání výsledků . . . . .	45
5.2	Vetknutý prut na volném konci zatížený momentem . . . . .	45
5.2.1	Analytické řešení . . . . .	45
5.2.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	46
5.2.3	Porovnání výsledků . . . . .	46
5.3	Vetknutý prut zatížený líniovým zatížením . . . . .	46
5.3.1	Analytické řešení . . . . .	46
5.3.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	47
5.3.3	Porovnání výsledků . . . . .	47
5.4	Prut oběma konci vetknutý uprostřed zatížený silou . . . . .	48
5.4.1	Analytické řešení . . . . .	48
5.4.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	49
5.4.3	Porovnání výsledků . . . . .	49
5.5	Prostě uložený prut, uprostřed zatížený silou . . . . .	50
5.5.1	Analytické řešení . . . . .	50
5.5.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	51
5.5.3	Porovnání výsledků . . . . .	52
5.6	Prut na jednom konci vetknutý, na druhém s obecnou vazbou a uprostřed zatížený silou . . . . .	52
5.6.1	Analytické řešení . . . . .	52
5.6.2	Řešení získané pomocí Matlabu . . . . .	54
5.6.3	Porovnání výsledků . . . . .	54
	<b>Závěr</b>	<b>55</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>57</b>
	<b>Seznam použitých symbolů a zkratk</b>	<b>60</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>61</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>63</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>65</b>

# Úvod

Práce se zabývá deformačně-napětovou analýzou ohýbaného prutu pomocí metody konečných prvků. Hlavním výstupem práce je šest zdrojových kódů numerického řešení pro různá uložení a zatížení prutu.

První kapitola se věnuje základní charakteristice metody konečných prvků a jejímu vývoji během minulého století. Jsou zde popsány základní rovnice pružnosti a pevnosti, které souvisí s tématem ohýbaných prutů, a teoretický základ metody konečných prvků.

V další kapitole lze najít přehled programů využívajících metodu konečných prvků, jež byly postupně vyvíjeny. Jsou zde charakteristiky dvou komerčních programů a dvou programů na bázi otevřeného kódu.

Třetí kapitola se věnuje popisu několika volně dostupných výpočetních systémů a programovacích jazyků, které by se daly využít pro implementaci algoritmů, jež jsou výstupem této práce.

Čtvrtá kapitola je věnována myšlenkovému postupu při tvorbě zdrojových kódů řešení jednotlivých příkladů. Nejjednodušší zdrojový kód je zde rozebrán a popsán jednotlivě po částech.

V poslední kapitole jsou porovnány získané výsledky ze všech postupů. Podrobný analytický výpočet je rozebrán a poté porovnán s výstupy numerického řešení jak z Matlabu, tak z ANSYSU.



# 1

## O metodě konečných prvků

Metoda konečných prvků je přibližná a variační numerická metoda, která se používá pro úlohy, jež jsou popsány diferenciálními a integrálními rovnicemi. Hlavní princip spočívá v rozdělení řešené oblasti na konečné prvky. Metoda se používá k řešení složitých geometrických tvarů a staticky neurčitě uložených úloh [10].

### 1.1 Historie MKP

Metoda konečných prvků vznikla kvůli potřebě řešit složitější úlohy pružnosti. Počátky této metody jsou datovány ve 40. letech 20. století, kdy se jí začal věnovat německý matematik Richard Courant. Většího rozvoje se dočkala v období kolem roku 1956 v Ohio, kde výzkum vedl R. W. Clough, který v roce 1960 dal metodě jméno.

První knihu o MKP napsal O. C. Zienkiewicz v roce 1967. Jeho dílo je dodnes uznávanou literaturou týkající se metody konečných prvků. Profesor Zienkiewicz patřil mezi zakladatele a přední odborníky v metodě konečných prvků.

Nejvýznamnější českou publikací je kniha brněnských autorů z roku 1972, která díky profesorům Zlámala a Ženíška z VUT dosáhla mezinárodního věhlasu. Tato publikace je dodnes využívanou a ceněnou literaturou o metodě konečných prvků.

V práci je citováno z druhého vydání této knihy [8, 10, 20, 25].

### 1.2 Matematický základ

Pomocí matematických rovnic lze zformulovat základní vlastnosti zatěžovaného a spojitě deformovaného tělesa. Mezi tyto vlastnosti patří: přiřazení deformačních posuvů všem bodům tělesa, spojitá deformovatelnost tělesa, statická rovnováha každého uvolněného prvku tělesa, vazby tělesa s okolím, deformační vlastnosti materiálu tělesa.

Vyjádřením těchto vlastností v matematických rovnicích se získá soustava vztahů, která vede k určení deformace a napjatosti tělesa. Tento způsob řešení se nazývá napěťová analýza a používá se k následnému hodnocení mezních stavů konstrukce.

Napjatost a deformaci v obecné prostorové úloze představuje následujících 15 neznámých funkcí:

- tři posuvy:  $u, v, w$
- šest přetvoření:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- šest napětí:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

Předcházející funkce jsou propojeny se systémem vztahů obecné pružnosti, který je základem řešení úloh obecné pružnosti. Do tohoto systému rovnic se řadí geometrické vztahy, podmínky statické rovnováhy, konstitutivní vztahy, okrajové podmínky.

### 1.2.1 Geometrické vztahy

Tyto vztahy vyjadřují závislost mezi složkami posuvů a přetvoření (podmínkou jsou malá přetvoření řádu  $10^{-2}$  a menší).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.1}$$

### 1.2.2 Rovnice rovnováhy

Jedná se o rovnice podmínek rovnováhy elementárního vnitřního prvku, na který působí i vnější objemová síla o složkách  $o_x, o_y, o_z$  [N/m<sup>3</sup>]. Vyjadřují závislost mezi složkami napětí, která musí být vždy splněna.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

### 1.2.3 Konstitutivní vztahy

Vyjadřují závislost mezi složkami tenzorů přetvoření a napětí. Následující vztahy platí pro lineárně pružný, izotropní Hookovský materiál.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}\end{aligned}\tag{1.3}$$

kde:

- $E$  [MPa] je Youngův modul pružnosti v tahu,
- $\mu$  [1] je Poissonův poměr,
- $G$  [MPa] je modul pružnosti ve smyku.

Modul pružnosti ve smyku je závislá materiálová charakteristika, která je dána vztahem

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}\tag{1.4}$$

### 1.2.4 Okrajové podmínky

Doplňují uvedený systém rovnic a dělí se na dva typy: geometrické a silové. Na povrchu v daném místě a směru lze předepsat jenom jednu z uvedených podmínek. Geometrické podmínky se vztahují k posuvům na vnější části tělesa a podmínky silové vyjadřují rovnováhu mezi vnitřními a vnějšími silami [11, 13].

## 1.3 Princip MKP

Metoda konečných prvků vznikla kvůli potřebě řešit dvojrozměrné a trojrozměrné úlohy, bývá ale využívána i pro řešení jednorozměrných prvků (prutů), kdy řešení přechází ve známou mate-



matickou analýzu, kdy se soustava algebraických lineárních rovnic odvodí z podmínky minima celkové potenciální energie  $\Pi$ .

$$\Pi = W - P, \quad (1.5)$$

kde  $W$  je energie napjatosti tělesa

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad (1.6)$$

a  $P$  je potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS. \quad (1.7)$$

### 1.3.1 Základní myšlenka

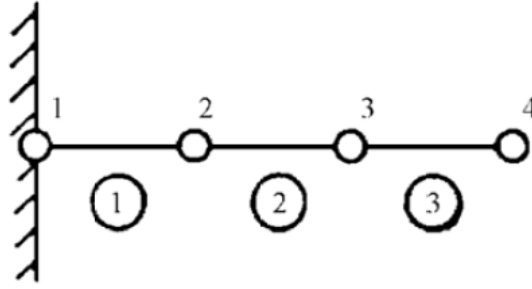
Celková potenciální energie  $\Pi$  je obecně závislá na spojitých funkcích  $u, v, w$  proměnných  $x, y, z$ . Aproximační funkce posuvů se v metodě konečných prvků vyjadřují jako součet tzv. *bázových funkcí*, což jsou předem dané, známé funkce  $N_i(x, y, z)$ ,  $N_j(x, y, z)$ ,  $N_k(x, y, z)$ , které se násobí koeficienty  $u_i, v_j, w_k$ , jež představují složky posuvů v uzlových bodech.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot u_i \\ v(x, y, z) &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot v_j \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot w_k \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (1.5) se získá závislost potenciální energie na složkách posuvů v jednotlivých uzlech. Z podmínky stacionární hodnoty  $\Pi$  vznikne soustava rovnic pro určení neznámých parametrů  $u_1, u_2, u_3, \dots, w_n$ , což jsou aproximace hledaných funkcí posuvů.

### 1.3.2 Postup řešení

V metodě konečných prvků se rozděljuje spojitá úloha na uzly a prvky. Prvek je podoblast řešeného tělesa, nad kterým jsou hledané posuvy popsány jednoduchou funkcí. V uzlu jsou definovány neznámé deformační parametry. Vytvořením prvků a uzlů na dané oblasti vznikne síť metody konečných prvků, jejíž hustota ovlivňuje výsledek řešení.



Obrázek 1.1: Rozdělení prutu na uzly a prvky [13]

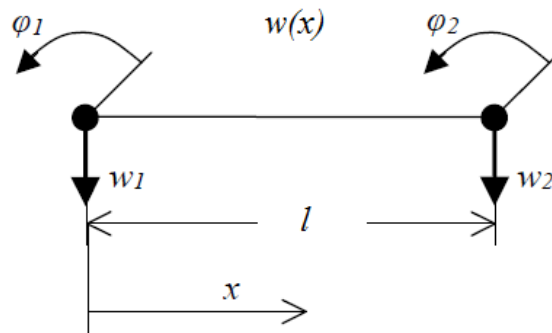
Nad každým prvkem je definována funkce, která popisuje chování prvku. Pro prvek jedna

$$w(x) = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (1.9)$$

kde

$\mathbf{N}$  je matice bázových funkcí průhybu,

$\boldsymbol{\delta}$  je deformační matice prvku.



Obrázek 1.2: Prutový prvek [13]

Deformační matice prvku: 
$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Matice bázových funkcí průhybu:  $\mathbf{N} = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4)$ ,

$$N_1 = \frac{1-3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3},$$

$$N_2 = \frac{x-2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2},$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3},$$

$$N_4 = \frac{-x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

kde

Posuvy libovolných bodů prutu jsou jednoznačně určeny posuvy v daných uzlech. Průběh posuvu na celé oblasti je aproximován po částech lineárně, vždy mezi dvěma uzly. Společný uzel dvou prvků je sdílen se stejnými deformačními parametry a tím je zajištěna meziprvková spojitost.

Energie napjatosti ohýbaného prutu je vyjádřena pomocí vztahu

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} E \cdot J \cdot w''^2 \cdot dx, \quad (1.10)$$

kde

$E$  [MPa] je Youngův modul pružnosti v tahu,  
 $J$  [mm<sup>4</sup>] je kvadratický moment průřezu,  
 $w''$  [mm<sup>-1</sup>] je křivost prutu.

Křivost prutu vypočítáme podle vzorce

$$w'' = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (1.11)$$

kde

$\mathbf{B}$  je matice bázových funkcí křivosti,  
 $\boldsymbol{\delta}$  je deformační matice prvku.

Matice bázových funkcí křivosti se získá druhou derivací bázových funkcí průhybu. Jednotlivé bázové funkce jsou

$$B_1 = -\frac{6 \cdot (l-2x)}{l^3},$$

$$B_2 = \frac{6x-4l}{l^2},$$

$$B_3 = \frac{6 \cdot (l-2x)}{l^3},$$

$$B_4 = -\frac{2 \cdot (l-3x)}{l^2}.$$

Po dosazení křivosti do energie napjatosti (1.10) se získá explicitní tvar matice tuhosti nosníkového prvku

$$\mathbf{k} = \frac{EJ}{l^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

kde

$E$  [MPa] je Youngův modul pružnosti v tahu,  
 $J$  [mm<sup>4</sup>] je kvadratický moment průřezu,  
 $l$  [mm] je délka prvku.

### Základní rovnice MKP

Celkovou potenciální energii lze získat součtem prvkových potenciálních energií, protože celková potenciální energie je integrální veličina. Celkovou potenciální energii závislou na konečném počtu deformačních parametrů lze zapsat ve tvaru

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (1.13)$$

Po parciálních derivacích stacionární podmínky

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0, \quad (1.14)$$

vznikne soustava lineárních rovnic

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (1.15)$$

Kvůli singularitě matice  $\mathbf{K}$  musí být vždy předeepsány okrajové podmínky, jinak by došlo k numerickému zhroucení výpočtu (dělení nulou).

V příkladě na obrázku 1.1 je prut vetknutý, což odpovídá okrajovým podmínkám  $w_1 = 0$  a  $\varphi_1 = 0$ . Tyto známé parametry musí být ze soustavy rovnic vypuštěny, čímž je získána *základní rovnice MKP*  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$ , ve které jsou všechny matice nesingulární [10, 13].

## 2

# Přehled MKP programů

Vývoj metody konečných prvků během minulého století vedl ke vzniku velkého množství programů založených na MKP. Koncem 60. letech začaly vznikat první výzkumné a univerzitní programy, ze kterých vycházely pozdější komerční řešení. Mezi nejúspěšnější komerční programy určitě patří systémy Abaqus, ADINA, ANSYS a NASTRAN. Tyto programy bývají obvykle lépe ovladatelné, protože obsahují všechny nástroje potřebné k analýze, než Open Source systémy neboli programy na bázi otevřeného kódu. Mezi další výhody komerčních programů patří technická podpora a různá školení.

Programy na bázi otevřeného kódu jsou volně šiřitelné a jejich kód lze libovolně upravovat. Ne všechny volně dostupné programy umožňují provádět komplexní analýzu, jako tomu je u programů komerčních. Mezi programy na bázi otevřeného kódu patří např. CalculiX, Elmer, Impact, Ofeli [13, 19].

**Tabulka 2.1:** Programové systémy MKP [13]

Rok	Název programu	Vývojář	URL adresa
1965	ASKA STRUDL	IKOSS GmbH,(INTES), Germany MCAUTO, USA	<a href="http://www.intes.de">www.intes.de</a> <a href="http://www.intergraph.com/products/ppm/gt_strudl/default.aspx">www.intergraph.com/products/ppm/gt_strudl/default.aspx</a>
1966	NASTRAN	MacNeal-Schwendler Corp., USA	<a href="http://www.macsch.com">www.macsch.com</a>
1967	BERSAFE SAMCEF	CEGB, UK (přepracován 1990) Univer. of Liege, Belgium	<a href="http://www.samcef.com">www.samcef.com</a>
1969	ASAS MARC PAFEC SESAM	Atkins Res. & Devel., UK MARC Anal. Corp., USA PAFEC Ltd, UK now SER Systems DNV, Norway	<a href="http://www.wsasoft.com">www.wsasoft.com</a> <a href="http://www.marc.com">www.marc.com</a> <a href="http://www.dnv.no">www.dnv.no</a>
1970	ANSYS SAP	Swanson Anal. Syst., USA NISEE, Univ. of California, Berkeley, USA	<a href="http://www.ansys.com">www.ansys.com</a> <a href="http://www.eerc.berkeley.edu/">www.eerc.berkeley.edu/</a>
1971	STARDYNE TITUS (SYSTUS)	Mech. Res. Inc., USA CITRA, France; ESI Group	<a href="http://www.reiusa.com">www.reiusa.com</a> <a href="http://www.systus.com">www.systus.com</a>
1972	DIANA WECAN	TNO, The Netherlands Westinghouse R&D, USA	<a href="http://www.diana.nl">www.diana.nl</a>
1973	GIFTS	CASA/GIFTS Inc., USA	
1975	ADINA	ADINA R&D, Inc., USA	<a href="http://www.adina.com">www.adina.com</a>

	CASTEM	CEA, France	www-cast3m.cea.fr
	FEAP	NISEE, Univ. of California	www.eerc.berkeley.edu
1976	NISA	Eng. Mech. Res. Corp., USA	www.emrc.com
1978	DYNA2D, DYNA3D	Livermore Softw. Tech. Corp., USA	www.lstc.com
1979	ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA	www.abaqus.com
1980	LUSAS	FEA Ltd., UK	www.lusas.com
1982	COSMOS/M	Structural Res. & Anal. Corp., USA	www.cosmosm.com
1984	ALGOR	Algor Inc., USA	www.algor.com

## 2.1 Abaqus

První verze softwaru byla vydána v roce 1979 a jeho název i logo je odvozeno od abaku, středověkého počítačového programu. Od roku 2005 se používá ve virtuální laboratoři DSS SIMULIA.

Jedná se o sadu produktů, které slouží pro realistické simulace napříč různými odvětvími. Hojně se využívá pro simulaci velkých deformací, nelinearit, rozpojování prvků (crash testy) a dobře se v ní pracuje s nelineárními materiály, jako jsou polymery, pěny, elastomery, což se využívá např. v biomechanice.

Simulace je důležitý proces při uvádění produktů na trh. Užití softwaru umožní odhadnout a zlepšovat vlastnosti nového výrobku. Simulací se značně snižují náklady na vývoj a poté výrobu a tím i výslednou cenu výrobku [9].

### Abaqus/CAE

Pomocí toho modulu lze rychle vytvářet, upravovat, monitorovat a vizualizovat Abaqus analýzy. Modul integruje modelování, analýzu a výsledky do jednoho prostředí. Díky podpoře CAD systémů může uživatel vytvářet geometrii mimo a poté si ji synchronizovat s CAE. Lze vytvořit komplexní vizualizaci, která uživatelům umožní interpretovat výsledky jakékoli analýzy z Abaqusu [5].

### Abaqus/Standard

Využívá se pro statické a nízkorychlostní dynamické úlohy, kde je zapotřebí přesně vyřešit nepřetřívající analýzu. Typickými příklady jsou výpočty těsníci mechaniky, rovnoměrné zatížení pneumatik nebo šíření trhlin v trupu letadel. Během jedné simulace je možné získat výsledky jak v časové, tak ve frekvenční oblasti. Výsledky mohou být využívány jako výchozí podmínky pro Abaqus/Explicit, ale pořadí lze i zaměnit. Abaqus/Standard bude tedy aplikován na statické, nízkorychlostní dynamické a ustálené analýzy, naopak Abaqus/Explicit na vysokorychlostní a nelineární problémy (obrábění, průrazy, průstřely) [7].

### Abaqus/CFD

Jedná se o pokročilý výpočetní systém pro dynamiku kapalin se schopností simulovat širokou škálu nelineárních problémů termomechaniky. Umožňuje řešit proudění nestlačitelné kapaliny, jak laminární, tak turbulentní, a tepelnou konvekci [6].

## 2.2 ANSYS

Software vznikl v roce 1970 a jeho hlavním cílem bylo vyvinout software využívající metodu konečných prvků pro strukturální fyziky, kteří by program využívali na analyzování statických, dynamických a teplotních úloh [22]. Pomocí ANSYSu jsou ověřovány výsledky v této práci.

### ANSYS Structural

Řeší strukturální lineární i nelineární úlohy bez nutnosti vnějších nástrojů. Výsledkem jsou simulace strukturální analýzy [3].

### ANSYS Mechanical

Program pro komplexní analýzu pomocí metody konečných prvků lineárních, nelineárních a dynamických úloh. Lze pomocí něj vytvářet komplexní simulace chování prvků, materiálové modely a řešení rovnic pro návrh mechanických problémů. Může se využívat i pro analýzu termomechanických úloh a umí zpracovávat i fyzikální problémy – akustické, piezoelektrické, termoelektrické analýzy [2].

### ANSYS Fluent

Fluent software obsahuje široké možnosti simulace proudění, turbulence, přenosů tepla, proudění vzduchu kolem křída letadla nebo i proudění krve v lidském těle. Software nabízí propojení s CAD systémy, což značně ulehčí vytváření geometrie a dále umožňuje přesouvání výsledků mezi aplikacemi, např. využití proudění tekutiny při simulaci mechanického problému. V dnešní době tento software využívá pro modelování mnoho firem po celém světě [1].

## 2.3 CalculiX

Program, který byl v roce 1998 vyvinut v Německu. Obsahuje všechny nástroje pro provedení celé analýzy – vytvoření modelu, výpočet a zobrazení výsledků. Aplikace se ovládá přes příkazový řádek a podporuje možnost zpracovávat formáty některých komerčních programů jako je Abaqus, ANSYS, NASTRAN.

CalculiX umožňuje řešit úlohy hned z několika oblastí. Úlohy statické a dynamické jak lineární, tak nelineární, tepelné úlohy, sdružené úlohy (termomechanika, aerodynamika).

Pro analýzu ve 2D/3D je v programu k dispozici 24 různých typů elementů. Elementy pro rovinnou napjatost, deformaci, pro skořepiny, fluidní elementy a mnoho dalších.

Program je vhodný například na řešení úloh v dřevařském průmyslu, protože jako jeden z mála programů na bázi otevřeného kódu podporuje orto/anizotropní<sup>1</sup> materiálové modely [16, 19].

## 2.4 Elmer

Elmer byl vyvinut v roce 1995 ve Finsku. Původně byl navržen pro dynamické úlohy tekutin, dnes už umožňuje řešit multifyzikální úlohy. Zahrnuje modely dynamiky stlačitelných i nestlačitelných kapalin, mechaniky pevných látek, přestupu tepla, elektromagnetismu, vibrací a jiné.

Program obsahuje 3 typy prvků, které se využívají pro všechny typy úloh. Všechny prvky nabízejí možnost lineární nebo kvadratické bázové funkce. Dále má 5 různých algoritmů pro vytvoření konečné prvkové sítě.

---

<sup>1</sup>ortotropní je materiál, jehož mechanické vlastnosti jsou jedinečné a nezávislé na směrech tří vzájemných kolmých os, a anizotropní materiál má stavební prvky orientované určitým směrem, jeho vlastnosti jsou závislé na směru měření a používání

Do programu je možné importovat geometrie z CADu nebo již vysítované geometrie z Abaqusu.

Elmer je tvořen z několika modulů. ElmerGUI umožňuje generování sítě konečných prvků a zadávání okrajových podmínek, ElmerSolver zpracovává vstupní data a vygenerovanou síť, ElmerPost je nástroj na vizualizaci pro zpracování vypočtených číselných výsledků nebo vykreslení výsledků z jiných MKP programů [16, 19].



## 3

# Volně dostupné prostředky pro vědecké účely

Programy vzniklé v rámci této práce byly napsány v software Matlab, ke kterému ale existují zdarma dostupné alternativy. Implementace algoritmů v této práci je možná v každém z následujících programů či jazyků.

Některé programy, jako třeba Octave nebo SciLab, se snaží co nejvíce napodobit funkcionalitu systému Matlab. Pokouší se nabídnout co nejpřívětivější pracovní prostředí a všechny nástroje a funkce zahrnují do jednoho velkého balíku. Naproti tomu Python je naprosto univerzální jazyk, jenž činí použitelným pro vědecké výpočty a simulace zejména množství knihoven a doplňků.

### 3.1 Octave

GNU Octave je jazyk primárně určený pro numerické výpočty. Umožňuje numerické řešení lineárních a nelineárních problémů, navíc nabízí rozsáhlé možnosti vizualizace dat. Octave se nejčastěji ovládá přes interaktivní příkazovou řádku, ale může být využit pro psaní neinteraktivních aplikací. Jazyk Octave se v mnohém neliší od jazyka Matlab, většina programů je tudíž snadno přenositelná.

Octave vznikl kolem roku 1988 jako doprovodný software k učebnici návrhu jaderných reaktorů. Vývoj „na plný úvazek“ začal až na jaře roku 1992. Octave je svobodný software dostupný zdarma pod licencí GNU GPL<sup>2</sup> [17, 18].

### 3.2 Python

Python je univerzální skriptovací jazyk používaný napříč odvětvími. Pro vědecké výpočty jej dělají vhodným zejména početná uživatelská základna a množství knihoven určených pro tyto účely. SciPy je sada nástrojů rozšiřujících možnosti jazyka Python pro použití v matematických výpočtech. Obsahuje např. knihovnu NumPy, která mj. umožňuje jednoduché použití vícerozměrných polí, knihovnu matplotlib pro vykreslování různých grafů a vizualizací, a v neposlední řadě IPython, nástroj obsahující interaktivní příkazovou řádku a možnosti prezentace výpočtů ve formátu tzv. IPython sešitů na webu. Python je volně dostupný pod open source licencí a použitelný i pro komerční účely.

Práce na návrhu jazyka Python začaly koncem 80. let minulého století a v roce 1989 začala jeho implementace. Autorem je Guido von Rossum. Důležitým cílem, který se Python snaží plnit, je aby používání tohoto jazyka bylo zábavné, čemuž se podířil i výběr názvu, který se inspiřuje britským seriálem Monty Python's Flying Circus z 70. let 20. století [12, 15].

---

<sup>2</sup>GPL, General Public License, je licence pro svobodný software, která mimo jiné vyžaduje, aby všechny odvozené programy byly dále šířeny právě pod touto licencí

### 3.3 Fortran

Jazyk Fortran navrhla už v 50. letech 20. století firma IBM pro vědecké výpočty a numerické aplikace. Na rozdíl od Pythonu byl tedy navržen přímo pro vědecké účely, základní funkcionalitou se vyrovná Pythonu i systému Matlab, ale má oproti těmto jazykům daleko vyšší výpočetní rychlost. V návrhu a implementaci Fortranu byl kladen větší důraz na optimalizaci, což je dáno i schopnostmi hardware v době vzniku. I dnes se používá pro ty nejnáročnější výpočetní úkony na nejvýkonnějších světových superpočítačích, např. pro výpočty drah raket, Fourierův rozvoj a transformaci, simulace vývoje počasí, fyzikální chemii aj.

Existuje více open source kompilátorů jazyka Fortran, jedním ze známějších je GNU Fortran.

Například pro účely této práce není Fortran příliš vhodný, jelikož na výkon zde není kladen takový důraz, aby bylo jeho použití opodstatněné. Daní za výkon je horší uživatelská přívětivost, pohodlí práce a v neposlední řadě menší míra interaktivity prostředí a chybějící možnosti vizualizace dat [21, 23].

### 3.4 Scilab

Scilab je open source software vyvíjený pod licencí kompatibilní s GPL. Software je podobný systému Matlab, je využíván ke zpracování signálů, statickou analýzu, simulace fluidní dynamiky, modelování aj. Nabízí interaktivní příkazový řádek, funkce pro vizualizaci dat, ale také nástroj pro převod zdrojových textů programu Matlab do Scilab. Spolu s Octave tvoří dvojici nejvýznamnějších open source alternativ k systému Matlab [24].

### 3.5 Sage

Sage je open source matematický software licencovaný GPL a postavený na již existujících open source balíčcích, jako jsou SciPy, NumPy, matplotlib, SymPy aj. Nabízí tedy jednoduché používání funkcionality všech těchto balíčků pomocí jazyka podobného jazyku Python. Sage navíc nabízí i ovládání přes webové rozhraní [14].

# 4

## Algoritmus MKP pro prutové těleso

Pro psaní algoritmu byl zvolen program Matlab, mj. z důvodů, které jsou popsány v kapitole 3. Ve zkratce lze říci, že software Matlab nabízí kompletní balík funkcionalit, které lze jednoduše využít pro implementaci algoritmů v této práci. Prostředí je poměrně intuitivní a je zjevná snaha o uživatelskou přívětivost. V neposlední řadě mezi klady Matlabu patří početná uživatelská základna a kvalitní dokumentace dostupná online.

Deformačně-napěťová analýza ohýbaného prutu je provedena ve všech příkladech na prutu o délce  $L = 1000$  mm kruhového průřezu o průměru  $d = 10$  mm. Všechny pruty jsou z konstrukční oceli, tedy Youngův modul pružnosti v tahu je  $E = 210000$  MPa a Poissonův poměr je  $\mu = 0,3$ .

### 4.1 Myšlenkový postup

Základní informace byly získány z 6. kapitoly knihy MATLAB Codes for Finite Element Analysis (A. Ferreira) [4].

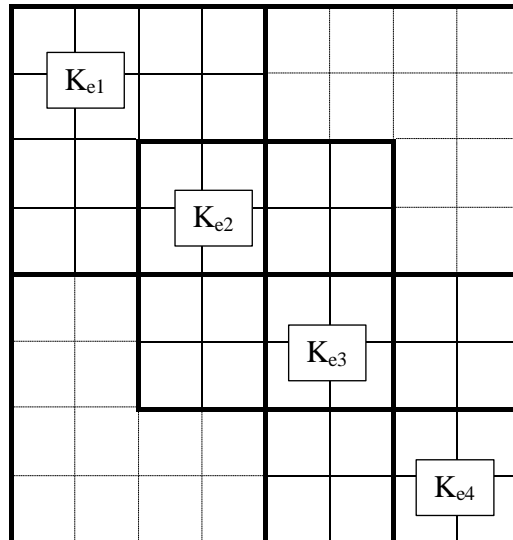
Hlavní součástí zdrojového kódu je prvková matice tuhosti  $\mathbf{K}_e$ , která je shodná s maticí (1.12), pouze se v ní uvažuje místo délky prvku  $l$  polovina délky prvku  $a$ :

$$\mathbf{K}_e = \frac{EJ}{2a^3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

kde:

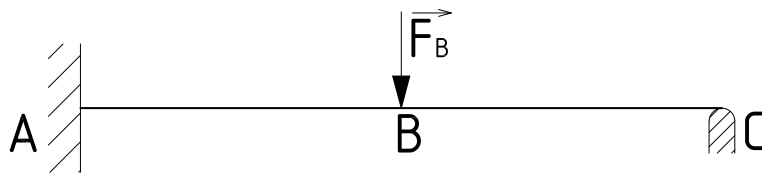
- $E$  [MPa] je Youngův modul pružnosti v tahu,
- $J$  [mm<sup>4</sup>] je kvadratický moment průřezu,
- $a$  [mm] je polovina délky prvku [4].

Pomocí prvkové matice tuhosti se sestrojí celková matice tuhosti  $\mathbf{K}$ , jak je vidět na následujícím obrázku. V místech, kde se prvkové matice překrývají, se prvky sečtou. Okolo diagonály prvkových matic zůstanou prvky s nulovou hodnotou, což značně ulehčí výpočet.



Obrázek 4.1: Schéma vytvoření celkové matice tuhosti  $K$

Další schéma, které lze vidět na obrázku 4.3, bylo využíváno pro znázornění okrajových podmínek. Na tomto konkrétním schématu jsou zobrazeny okrajové podmínky prutu na jednom konci vetknutého a s obecnou vazbou na druhém konci, uprostřed je prut zatížen silou. Jeho řešení je rozebrané v kapitole 5.6.



Obrázek 4.2: Prut na jednom konci vetknutý, na druhé s obecnou vazbou a uprostřed zatížený silou

Při tomto uložení je průhyb roven nule v prvním a posledním uzlu a natočení je nulové pouze v prvním uzlu, což je vidět na následujícím schématu.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K} \\
 \begin{array}{c}
 w_1 \\
 \varphi_1 \\
 w_2 \\
 \varphi_2 \\
 w_3 \\
 \varphi_3 \\
 w_4 \\
 \varphi_4 \\
 w_5 \\
 \varphi_5
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \end{array}
 \text{FB}$$

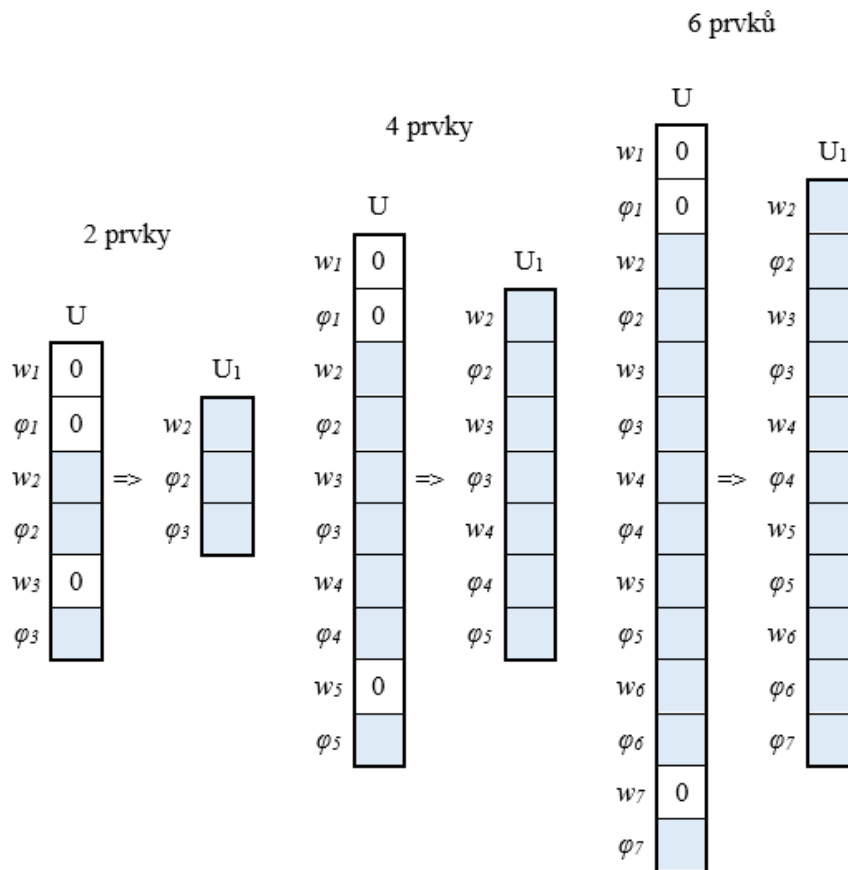
**Obrázek 4.3:** Schéma zobrazení okrajových podmínek

Po vymazání nulových řádků a sloupců vzniká soustava s indexem 1, která je již řešitelná.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{K}_1 \\
 \begin{array}{c}
 w_2 \\
 \varphi_2 \\
 w_3 \\
 \varphi_3 \\
 w_4 \\
 \varphi_4 \\
 \varphi_5
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \text{FB} \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \\
 \hline
 \end{array}$$

**Obrázek 4.4:** Schéma zohlednění okrajových podmínek

Ze vzniklé soustavy na předchozím obrázku je po vyřešení získán vektor neznámých parametrů  $\mathbf{U}_1$ . Tento vektor obsahuje hodnoty průhybu a natočení v jednotlivých uzlech. Rozložení průhybu a natočení v závislosti na počtu prvků a okrajových podmínkách je zobrazeno na následujícím obrázku. Díky této názorné grafice je snazší vytvořit cyklus pro získání vektorů průhybu a natočení pro vykreslení.



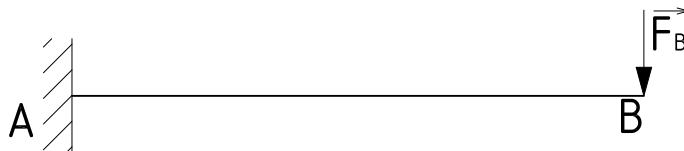
**Obrázek 4.5:** Schéma závislosti počtu prvků na okrajových podmínkách

Na základě předchozích grafik je jednodušší představit si vytvoření celkové matice tuhosti, ze které jsou odstraněny řádky a sloupce podle konkrétních okrajových podmínek. Zohledněním těchto podmínek v matici tuhosti a vektoru zatížení je získán vektor neznámých parametrů. Z vektoru neznámých parametrů se získají hodnoty průhybu a natočení.

Schématický postup v této podkapitole je aplikován při psaní zdrojového kódu v Matlabu. Rozebrání jednotlivých částí zdrojového kódu je popsán v další podkapitole.

## 4.2 Popis zdrojového kódu

Implementace výše popsaného myšlenkového postupu je demonstrována na nejjednodušším příkladu ohýbaného prutu – vetknutý prut na volném konci zatěžovaný silou, jehož analytické řešení je provedeno v kapitole 5.



**Obrázek 4.6:** Vetknutý prut na volném konci zatěžovaný silou

### 4.2.1 Vstupní hodnoty

Na začátku každého kódu jsou uvedeny vstupní hodnoty, které jsou zmíněny již v úvodu této kapitoly. Z těchto hodnot se počítá kvadratický moment  $J$ , který je potřebný pro další výpočet. Dále jsou ve vstupních hodnotách uvedeny hodnoty dílčích zatížení, v tomto případě síla  $FB$ .

Další důležitou hodnotou je počet prvků, který je sudý – 20. Sudá hodnota byla zvolena pro jednoduchost výpočtu u prutů zatěžovaných uprostřed, tedy v prostředním uzlu.

Poslední vstupní hodnotou je prvková matice tuhosti  $K_e$ , ve které parametr  $a$  odpovídá polovině délky jednoho prvku tzn. délka jednoho prvku je  $2a$ .

```
L = 1000; % delka prutu 1000 mm
d = 10; % prumer prutu 10 mm
E = 210000; % modul pružnosti v tahu 210 000 MPa
J = (pi*d^4)/64; % kvadraticky moment
FB = 100; % zatezujici sila 100 N
pocet_prvku = 20; % pocet prvku na prutu
a = (L/pocet_prvku)/2; % delka jednoho prvku je 2a
Ke = ((E*J)/(2*a^3))*[3 3*a -3 3*a; 3*a 4*a^2 -3*a 2*a^2; -3 -3*a 3 -3*a;
3*a 2*a^2 -3*a 4*a^2]; % matice prvku
```

### 4.2.2 Matice tuhosti K

V dalším kroku je vytvořena celková matice tuhosti  $K$ , která je složena z jednotlivých prvkových matic  $K_e$ . Nejprve je pomocí funkce `zeros` vytvořena nulová matice, do které jsou podél diagonály vysázeny prvkové matice v cyklu `for`.

```
K = zeros(2 + 2*pocet_prvku, 2 + 2*pocet_prvku);

for i = 0:1:(pocet_prvku - 1)
    for m = 1:1:4
        for n = 1:1:4
            K(m + 2*i, n + 2*i) = Ke(m, n) + K(m + 2*i, n + 2*i);
        end
    end
end
```

### 4.2.3 Matice zatížení F

Po matici tuhosti je na řadě matice zatížení, v tomto případě svislý vektor o stejném počtu prvků, jako je velikost celkové matice tuhosti. Zatěžující síla působí pouze v posledním uzlu, proto je síla  $FB$  umístěna do posledního prvku vektoru  $F$ .

```
F = zeros(2 + 2*pocet_prvku, 1);
F(1 + 2*pocet_prvku) = FB;
```

### 4.2.4 Okrajové podmínky

Dalším krokem je zohlednění okrajových podmínek. U vetknutého prutu je to nulové posunutí i natočení v prvním uzlu, tzn. první dva řádky a sloupce matice  $K$  jsou nulové a první dva prvky vektoru  $F$  také. Nulové prvky jsou z matic odstraněny, protože nejsou k dalšímu výpočtu potřebné.

```
K1 = K(3:(2 + 2*pocet_prvku), 3:(2 + 2*pocet_prvku));
F1 = F(3:(2 + 2*pocet_prvku), 1);
```

### 4.2.5 Matice neznámých parametrů U1

Dělením matic  $K1$  a  $F1$  se získá vektor  $U1$ , kam jsou uloženy vypočtené neznámé parametry, tedy hodnoty posunutí a natočení v jednotlivých uzlech prutu, které jsou zpracovány do následujících výstupů.

```
U1 = K1\F1;
```

### 4.2.6 Hodnoty průhybu a natočení

Prvním výstupem je vypsaní hodnot průhybu a natočení v požadovaných uzlech pomocí funkce `fprintf`. V tomto případě v posledním uzlu, který je zatěžován silou  $F_B$ .

```
wB = U1(2*pocet_prvku - 1);
fiB = U1(2*pocet_prvku);
fprintf('Pruhyb v miste B je %6.3f mm.\n',wB);
fprintf('Natoceni v miste B je %6.4f rad.\n',fiB);
```

### 4.2.7 Vykreslení průhybu a natočení

Jedním z grafických výstupů je vykreslení průhybu a natočení prutu. Z vektoru neznámých  $U1$  jsou vytvořeny vektory s hodnotami průhybů a natočení v jednotlivých uzlech. Tyto vektory jsou pak pomocí funkce `plot` vykresleny v závislosti na délce prutu.

```
vektor_uzlu = zeros(((2*pocet_prvku)/2) + 1, 1);
for i = 1:1:pocet_prvku
    vektor_uzlu(i+1) = i*(L/pocet_prvku);
end

vektor_prubybu = zeros(pocet_prvku + 1, 1);
z = 2;
for i = 1:2:(2*pocet_prvku)
    vektor_prubybu(z) = U1(i);
    z = z + 1;
end
vektor_prubybu = vektor_prubybu * -1;

vektor_natoceni = zeros(pocet_prvku + 1, 1);
z = 2;
for i = 2:2:(2*pocet_prvku)
    vektor_natoceni(z) = U1(i);
    z = z + 1;
end
vektor_natoceni = vektor_natoceni * -1;

figure(1)
subplot(2,1,1);
plot(vektor_uzlu,vektor_prubybu,'k');
title('PRUHYB PRUTU')
xlabel('Delka prutu [mm]')
ylabel('Pruhyb [mm]')
xlim([0 1000])
grid on

subplot(2,1,2)
plot(vektor_uzlu,vektor_natoceni,'k');
title('NATOCENI PRUTU')
```



```
xlabel('Delka prutu [mm]')
ylabel('Natoceni [rad]')
xlim([0 1000])
grid on
```

### 4.2.8 Výpočet křivosti

Pro vykreslení výsledných vnitřních účinků je potřeba získat křivost. Křivost je druhou derivací průhybu a první derivací natočení. Lze ji tedy získat pomocí druhé derivace bazových funkcí z 1. kapitoly. Druhé derivace vytvoří vodorovný vektor  $B$ , který je násoben deformační maticí  $\delta$ . Tímto se získá vektor hodnot křivosti v každém uzlu, který je dále využit pro výpočet ohybového momentu a nominálního napětí.

```
l = L/pocet_prvku;

B = {@B1, @B2, @B3, @B4}; % zderivovane bazove funkce

B0 = zeros(1, 4);
B1 = zeros(1, 4);

for i = 1:4
    f = B{i};
    B0(i) = f(0, l); % dosazeni do funkcii
    B1(i) = f(1, l);
end;

U = zeros(2 + 2*pocet_prvku, 1);

for i = 3:1:2 + 2*pocet_prvku
    U(i) = U1(i-2);
end

vektor_krivosti = zeros(pocet_prvku + 1, 1);

for i = 1:2:(length(U) - 3)
    delta = U([i:i+3]);
    i_k = (i+1)/2;
    vektor_krivosti(i_k) = vektor_krivosti(i_k) + B0*delta;
    vektor_krivosti(i_k + 1) = vektor_krivosti(i_k+1) + B1*delta;
end

for i = 2:1:(length(vektor_krivosti)-1)
    vektor_krivosti(i) = vektor_krivosti(i)/2;
end
```

### 4.2.9 Vykreslení posouvající síly a ohybového momentu

Druhým grafickým výstupem je posouvající síla a ohybový moment. Posouvající síla není ve výpočtu zahrnuta, proto musí být k vykreslení vyjádřena pomocí analytického výpočtu VVÚ s dosazením z rovnic statické rovnováhy.

K vykreslení ohybového momentu jsou vypočteny hodnoty křivosti, ze kterých lze dopočítat přetvoření podle vzorce

$$\varepsilon = z \cdot w'' \quad (4.2)$$

kde:

$z$  [mm] je rozměr průřezu,  
 $w''$  [mm<sup>-1</sup>] je křivost.

Z Hookova zákona se pak dopočítá napětí

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon, \quad (4.3)$$

ze kterého lze pomocí integrace získat ohybový moment

$$M_{oy} = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA. \quad (4.4)$$

Po úpravách těchto rovnic se získá vztah mezi ohybovým momentem a křivostí

$$w'' = \frac{M_{oy}}{E \cdot J}. \quad (4.5)$$

```
x = linspace(0,L,1000);
T = zeros(1000,1);
for i = 1:1:1000
    T(i) = FB;
end
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(x,T,'k');
title('POSOUVAJICI SILA')
xlabel('Delka prutu [mm]')
ylabel('T [N]')
Mo = zeros(pocet_prvku + 1,1);
for i = 1:(pocet_prvku+1)
    Mo(i) = vektor_krivosti(i) * E * J;
end
subplot(2,1,2)
plot(vektor_uzlu, Mo, 'k');
title('OHYBOVY MOMENT')
xlabel('Delka prutu [mm]')
ylabel('M_o [Nmm]')
ylim([-10000 0])
```

#### 4.2.10 Nominální napětí

Poslední část zdrojového kódu je věnována vykreslení nominálního napětí v místě maximálního ohybového momentu. K výpočtu hodnoty nominálního napětí je využito Hookova zákona, kam je dosazena rovnice (4.2).

```
z = linspace(-d/2,d/2,pocet_prvku+1);
zz = linspace(-d/2,d/2,1000);
sigma = zeros(pocet_prvku+1, 1);
for i = 1:(pocet_prvku+1)
    sigma(i) = -z(i) * vektor_krivosti(1) * E;
end
figure(3)
plot(sigma,z,'k');
```

```
hold on
plot(0, zz)
title('NOMINALNI NAPETI V MISTE MAXIMALNIHO OHYBOVEHO MOMENTU')
xlabel('\sigma_n [MPa]')
ylabel('d [mm]')
```

Všechny zdrojové kódy jsou vloženy v elektronické příloze.



# 5

## Porovnání získaných výsledků

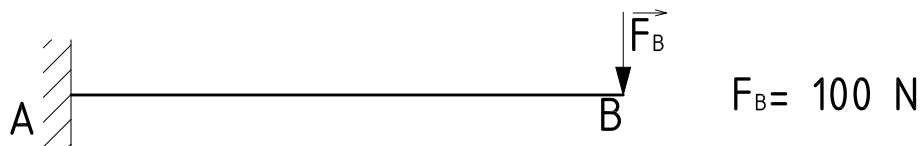
Poslední kapitola této práce je věnována zpracování a porovnání výsledků z jednotlivých řešení. Je zde rozebráno šest variant různého uložení a zatížení prutu, pro které byl vytvořen zdrojový kód v Matlabu pomocí MKP. Pro každé zadání jsou prezentovány výsledky pomocí analytického řešení, pak řešení z Matlabu a nakonec jsou ověřeny v softwaru ANSYS.

Jak bylo zmíněno na začátku 4. kapitoly, u všech příkladů jsou zvoleny tyto rozměry a materiálové charakteristiky:

$$\begin{aligned}L &= 1000 \text{ mm} \\d &= 10 \text{ mm} \\E &= 210000 \text{ MPa} \\ \mu &= 0,3\end{aligned}$$

### 5.1 Vetknutý prut na volném konci zatížený silou

Nejjednodušším příkladem je vetknutý prut, který je na volném konci zatížený silou.



Obrázek 5.1: Vetknutý prut na volném konci zatížený silou

#### 5.1.1 Analytické řešení

Pro výpočet výsledných vnitřních účinků (VVÚ) je potřeba úplné uvolnění prutu, které je na následujícím obrázku.



Obrázek 5.2: Úplné uvolnění prutu

Výpočet VVÚ je proveden zprava, aby do něj reakční síly ve vetknutí nemusely být zahrnuty.

$$x \in \langle 0; L \rangle$$

$$N = 0 \text{ N} \quad (5.1)$$

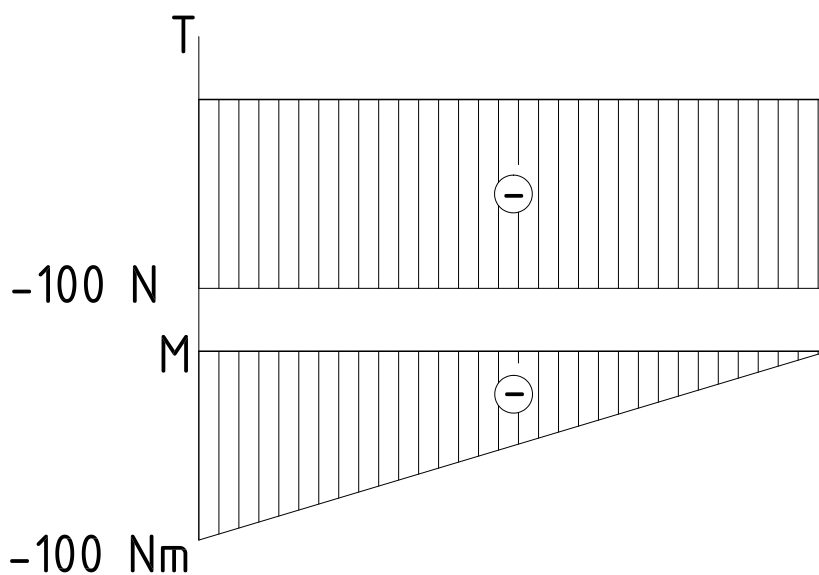
$$T = -F_B = -100 \text{ N} \quad (5.2)$$

$$M_o = -F_B \cdot x \quad (5.3)$$

$$x = 0 \quad M_o = -100 \cdot 0 = 0 \text{ Nmm}$$

$$x = L \quad M_o = -100 \cdot 1000 = 100000 \text{ Nmm}$$

Po získání výše uvedených rovnic je možné VVÚ vykreslit, což je znázorněno na následujícím obrázku.



**Obrázek 5.3:** Výsledné vnitřní účinky

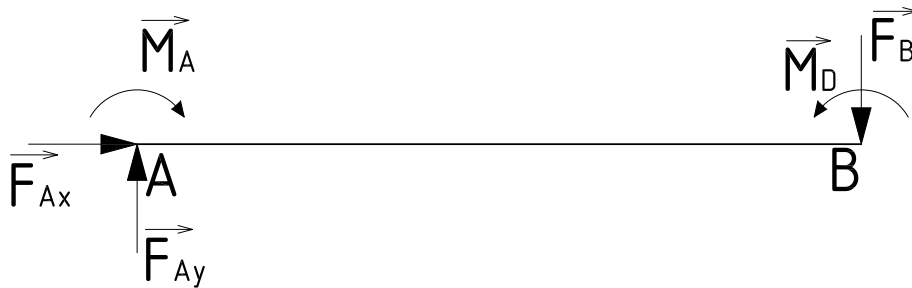
Pro výpočet průhybu a natočení je potřeba znát hodnotu kvadratického momentu průřezu, která je stejná pro všechny řešené příklady.

$$J = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 10^4}{64} = 490,9 \text{ mm}^4 \quad (5.4)$$

Průhyb a natočení se vypočítá dosazením ohybového momentu do Castigliánovy věty.

$$\begin{aligned}
 w_B &= \frac{1}{EJ} \int_L M_o(x) \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F_B} \cdot dx = \frac{1}{EJ} \int_0^L -F_B \cdot x \cdot \frac{\partial(-F_B \cdot x)}{\partial F_B} \cdot dx = \\
 &= \frac{1}{EJ} \int_0^L -F_B \cdot x \cdot (-x) \cdot dx = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F_B \cdot x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{F_B \cdot L^3}{3} = \\
 &= \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{100 \cdot 1000^3}{3} = 323,345 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Aby bylo možné spočítat natočení v bodě B, je potřeba zavést doplňkový moment  $M_D = 0 \text{ Nm}$ .



**Obrázek 5.4:** Úplně uvolněný prut s doplňkovým momentem

V rovnici ohybového momentu přibude tedy moment  $M_D$ , pak

$$M_o = -F_B \cdot x + M_D. \tag{5.6}$$

Nyní lze spočítat natočení prutu v místě B.

$$\begin{aligned}
 \varphi_B &= \frac{1}{EJ} \int_L M_o(x) \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial M_D} \cdot dx = \frac{1}{EJ} \int_0^L -F_B \cdot x + M_D \cdot \frac{\partial(-F_B \cdot x + M_D)}{\partial M_D} \cdot dx = \\
 &= \frac{1}{EJ} \int_0^L -F_B \cdot x + M_D \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{F_B \cdot x^2}{2} + M_D \cdot x \right]_0^L = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{F_B \cdot L^2}{2} = \\
 &= \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{100 \cdot 1000^2}{2} = -0,4850 \text{ rad}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Poslední hodnota pro porovnání je nominální napětí v místě maximálního ohybového momentu ( $x = L$ ).

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{100000}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 1018,5 \text{ MPa} \tag{5.8}$$

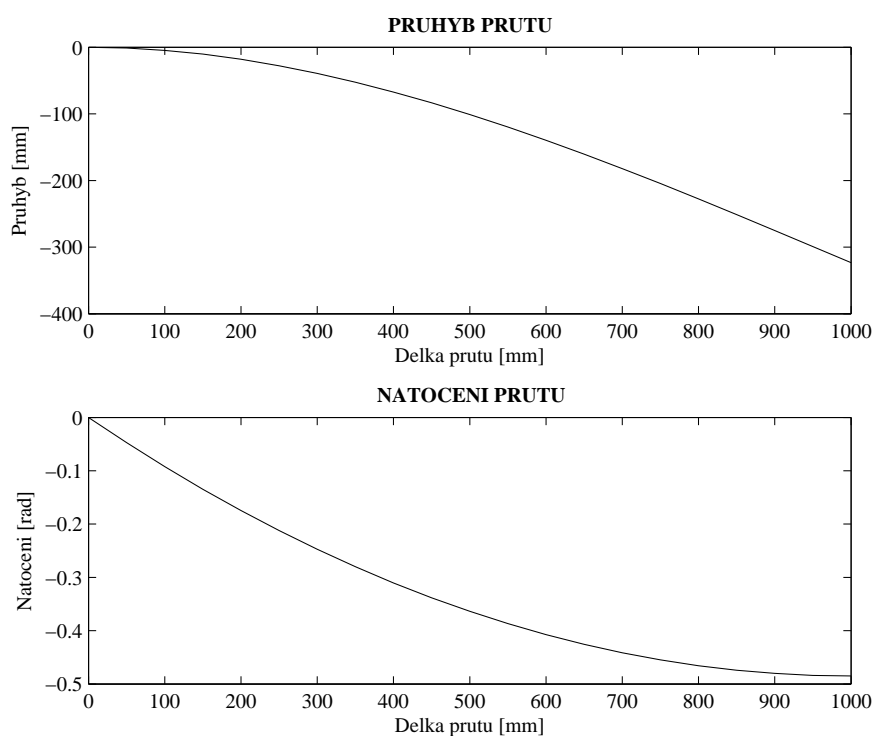
### 5.1.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Zdrojový kód tohoto příkladu je popsán v kapitole 4. Zde jsou prezentovány výsledky, které jsou z něj získány.

Průhyb a natočení v posledním uzlu prutu, který je zatěžován silou  $F_B$ :

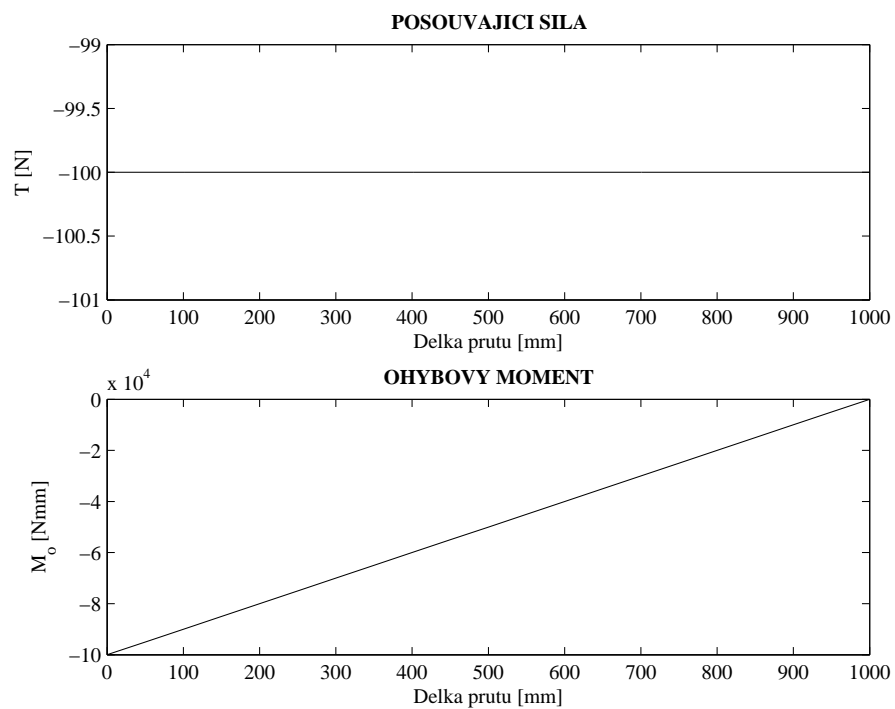
Pruhyb v miste B je 323.362 mm.  
Natočení v miste B je 0.4850 rad.

Dalším výstupem z Matlabu je vykreslení průhybové čáry a natočení podél délky prutu na obr. 5.5. Druhým grafickým výstupem je vykreslení výsledných vnitřních účinků viz obr. 5.6. Posledním výstupem je vykreslení nominálního napětí v místě maximálního ohybového momentu viz obr. 5.7.

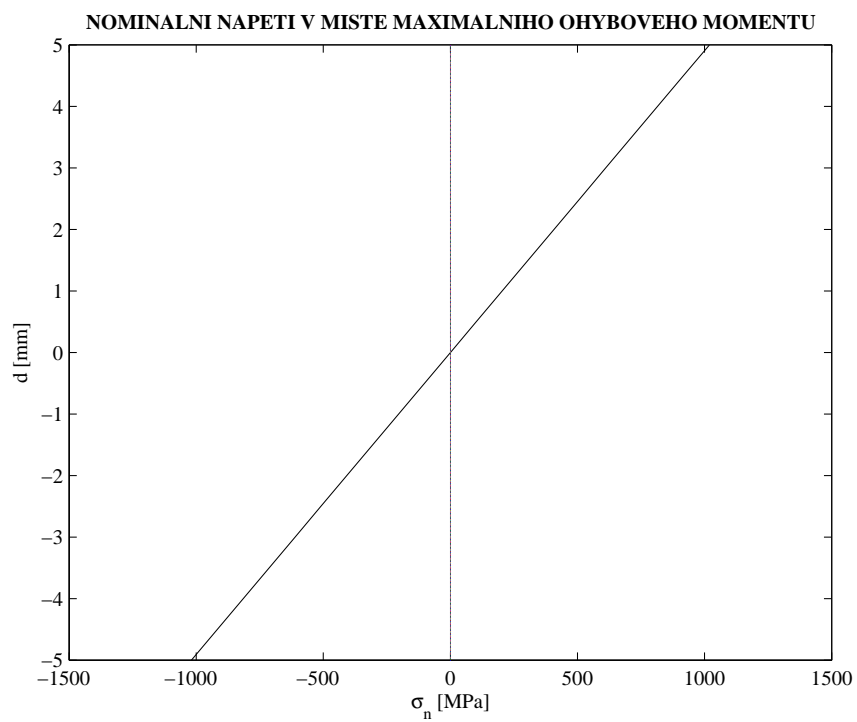


Obrázek 5.5: Průhyb a natočení vetknutého prutu





Obrázek 5.6: Výsledné vnitřní účinky vetknutého prutu



Obrázek 5.7: Nominální napětí v místě maximálního ohybového momentu

### 5.1.3 Řešení získané pomocí ANSYSu

V softwaru ANSYS byly ověřovány výsledky získané z Matlabu. Pro výpočet byl využit ANSYS Mechanical APDL. Před vytvořením geometrie byla zvolena strukturální úloha a vybrán prutový prvek BEAM188. Dále byl zvolen lineárně izotropní materiál a vloženy hodnoty Youngova modulu pružnosti v tahu a Poissonova poměru. Nakonec byl zadán kruhový průřez prutu o daném poloměru.

Geometrie byla tvořena pomocí tzv. keypoints, což jsou „uzly“ geometrie, v tomto případě dva. Tyto keypoints byly propojeny pomocí čar (lines). Tímto byla vytvořena geometrie a mohla se vytvořit síť konečných prvků. Délka jednoho prvku byla zadána tak, aby vznikla síť o 20 prvcích, jako je zvolena v Matlabu.

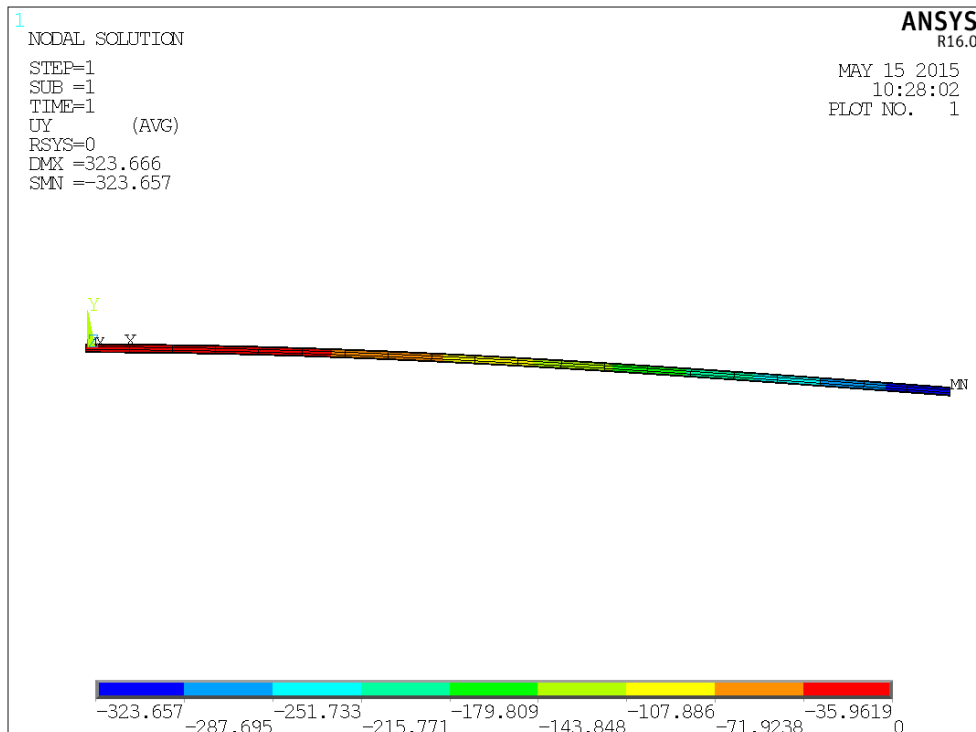
Po vytvoření sítě bylo možné zadat okrajové podmínky a zatížení. Pro tento příklad se musely odebrat všechny stupně volnosti v prvním keypoint a sílu zadat do druhého keypoint. Úlohu bylo možné po tomto kroku vyřešit.

Získáním řešení je možné v ANSYSu vykreslit či vypsat všechny různé výsledky, pro tuto práci je to deformovaný tvar – průhyb a natočení, dále výsledné vnitřní účinky a rozložení napětí v ose  $x$ .

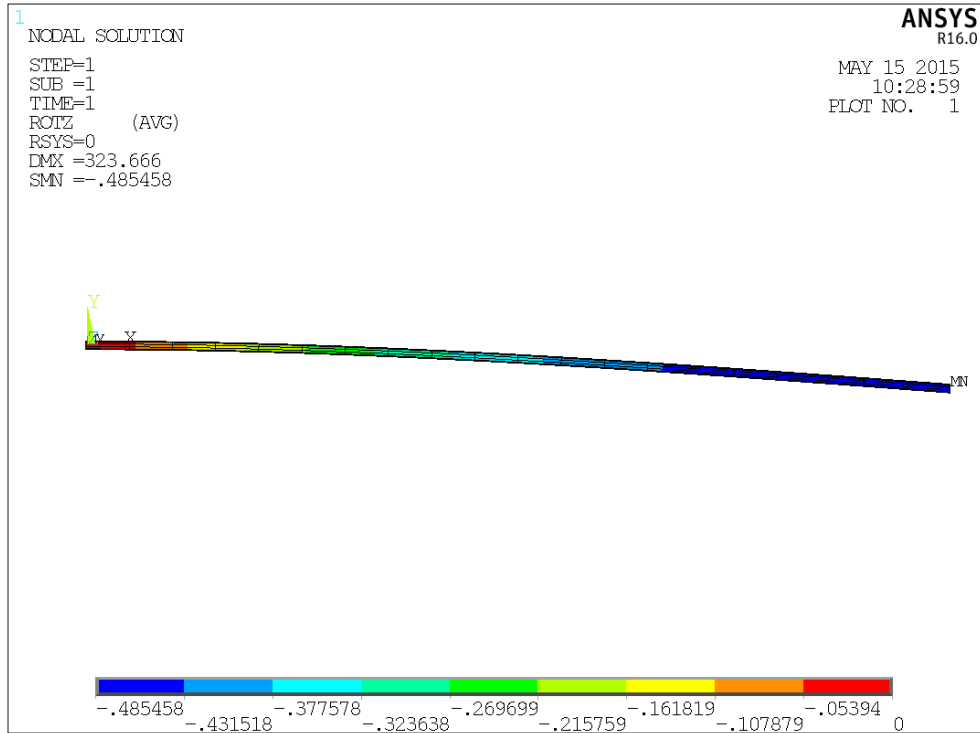
Stejný postup byl využit pro všechny následující příklady pouze s jinou geometrií, okrajovými podmínkami a zatížením.

#### Získané výstupy

Na prvním obrázku 5.8 lze vidět průhyb zatíženého prutu a jeho hodnotu v posledním uzlu, která se shoduje s předchozími hodnotami. Další obrázek 5.9 znázorňuje hodnoty natočení v průběhu deformovaného prutu. Obrázky 5.10 a 5.11 zobrazují výsledné vnitřní účinky a poslední obrázek 5.12 znázorňuje nominální napětí v místě maximálního ohybového momentu.



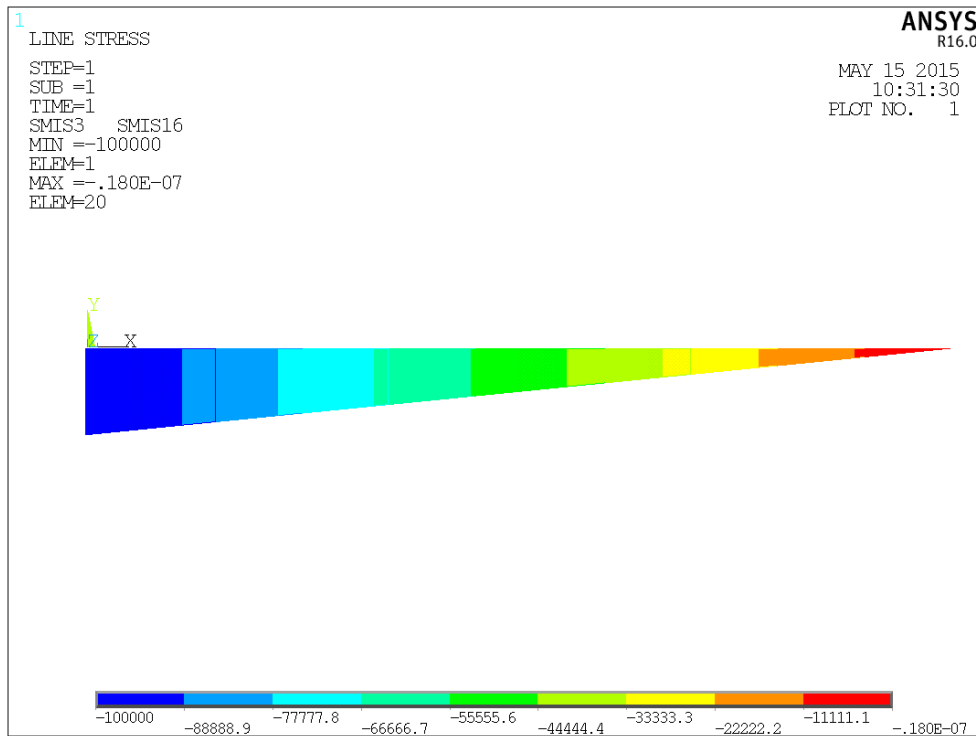
Obrázek 5.8: Průhyb vetknutého prutu



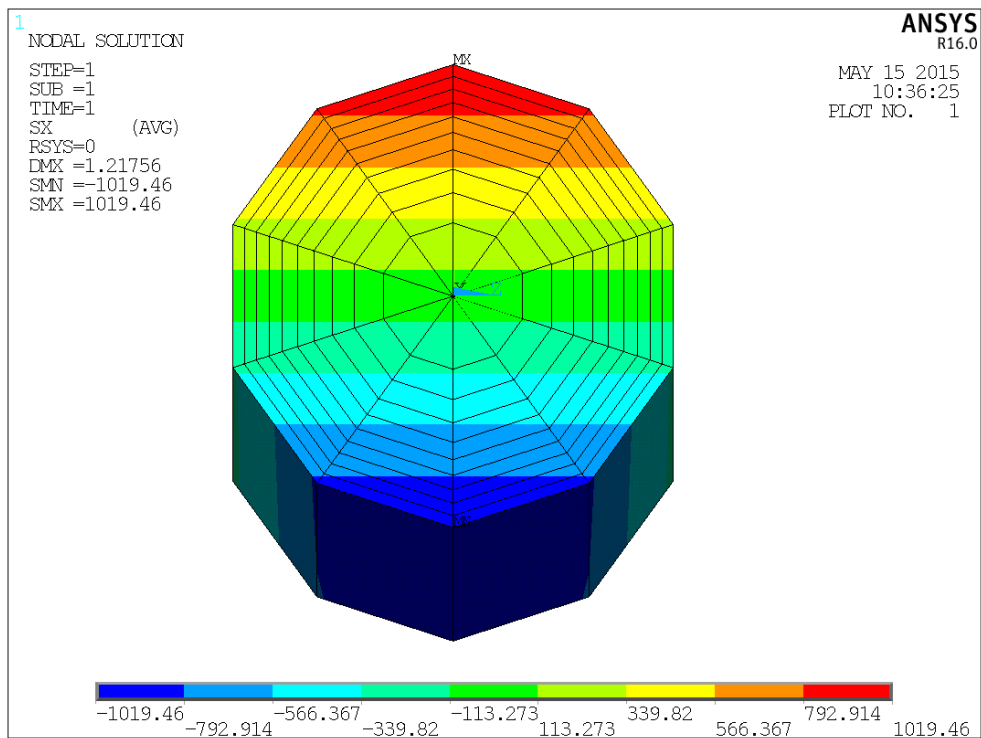
Obrázek 5.9: Natočení vetknutého prutu



Obrázek 5.10: Posouvající síla vetknutého prutu



Obrázek 5.11: Ohybový moment vetknutého prutu



Obrázek 5.12: Nominální napětí vetknutého prutu

### 5.1.4 Porovnání výsledků

V tabulce jsou zapsány výsledky z předchozích výpočtů. Jsou brány pouze absolutní hodnoty výsledků.

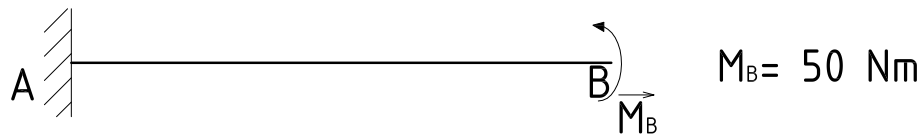
**Tabulka 5.1:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 1

	Analyticky	Matlab	ANSYS
průhyb $w_B$	323,345 mm	323,362 mm	323,657 mm
natočení $\varphi_B$	0,4850 rad	0,4850 rad	0,4855 rad
posouvající síla $T$	100 N	100 N	100 N
ohybový moment $M_{o_{min}}$	0 Nmm	0 Nmm	0 Nmm
ohybový moment $M_{o_{max}}$	100000 Nmm	100000 Nmm	100000 Nmm
napětí $\sigma_n$	1018,5 MPa	1018,6 MPa	1019,46 MPa

V předcházející tabulce je vidět přesnost získaných výsledků. Rozdílné hodnoty se u průhybu vyskytují až za desetinnou čárkou.

## 5.2 Vetknutý prut na volném konci zatížený momentem

Obměnou předchozího příkladu je vetknutý prut zatížený na volném konci momentem.



**Obrázek 5.13:** Vetknutý prut na volném konci zatížený momentem

### 5.2.1 Analytické řešení

Výsledné vnitřní účinky počítané zprava:

$$x \in \langle 0; L \rangle$$

$$N = 0 \text{ N} \quad (5.9)$$

$$T = 0 \text{ N} \quad (5.10)$$

$$M_o = M_B = 50000 \text{ Nmm} \quad (5.11)$$

Pro výpočet průhybu v místě B je potřeba zavést doplňkovou sílu  $F_D = 0 \text{ N}$  obdobně jako v předešlém příkladě moment při výpočtu natočení.

$$M_o = -F_D \cdot x + M_B \quad (5.12)$$

Po dosazení do Castigliánovy věty a integraci:

$$w_B = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{M_B \cdot L^2}{2} = \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{50000 \cdot 1000^2}{2} = 242,509 \text{ mm} \quad (5.13)$$

Výpočet natočení v místě B:

$$\varphi_B = \frac{1}{EJ} \cdot M_B \cdot L = \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot 50000 \cdot 1000 = 0,4850 \text{ rad} \quad (5.14)$$

Nominální napětí:

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{50000}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 509,3 \text{ MPa} \quad (5.15)$$

### 5.2.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Hodnoty průhybu a natočení v místě B:

Pruhyb v miste B je 242.522 mm.  
Natočení v miste B je 0.4850 rad.

### 5.2.3 Porovnání výsledků

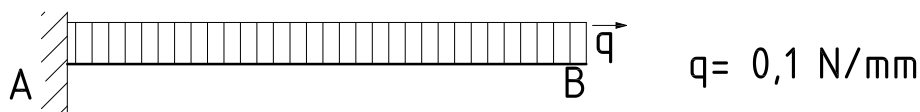
Všechny grafické výstupy jsou v elektronické příloze, v následující tabulce jsou hodnoty z jednotlivých výpočtů pro porovnání.

**Tabulka 5.2:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 2

	Analyticky	Matlab	ANSYS
průhyb $w_B$	242,509 mm	242,522 mm	242,729 mm
natočení $\varphi_B$	0,4850 rad	0,4850 rad	0,4855 rad
posouvající síla $T$	0 N	0 N	0 N
ohybový moment $M_o$	50000 Nmm	50000 Nmm	50000 Nmm
napětí $\sigma_n$	509,3 MPa	509,3 MPa	509,7 MPa

## 5.3 Vetknutý prut zatížený liniovým zatížením

Druhou obměnou vetknutého prutu je prut zatížený liniovým zatížením.



**Obrázek 5.14:** Vetknutý prut zatížený liniovým zatížením

### 5.3.1 Analytické řešení

Výsledné vnitřní účinky počítané zprava:

$$x \in \langle 0; L \rangle$$

$$N = 0 \text{ N} \quad (5.16)$$

$$T = q \cdot x \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad T = 0,1 \cdot 0 = 0 \text{ N} \\ x = L & \quad T = 0,1 \cdot 1000 = 100 \text{ N} \end{aligned}$$

$$M_o = -\frac{q \cdot x^2}{2} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad M_o = -\frac{0,1 \cdot 0}{2} = 0 \text{ Nmm} \\ x = L & \quad M_o = -\frac{0,1 \cdot 1000^2}{2} = -50000 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Průhyb a natočení v místě B je počítán pomocí doplňkové síly a doplňkového momentu jako v předchozích případech. Po dosazení do Castigliánovy věty a její integraci:

$$w_B = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{q \cdot L^4}{8} = \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{0,1 \cdot 1000^4}{8} = 121,254 \text{ mm} \quad (5.19)$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{q \cdot L^3}{6} = -\frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{0,1 \cdot 1000^3}{6} = -0,1617 \text{ rad} \quad (5.20)$$

Nominální napětí v místě A:

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{50000}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 509,3 \text{ MPa} \quad (5.21)$$

### 5.3.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Hodnoty průhybu a natočení v místě B:

Průhyb v místě B je 123.282 mm.  
Natočení v místě B je 0.1657 rad.

### 5.3.3 Porovnání výsledků

V tabulce jsou opět shrnuty všechny získané výsledky, lze vidět přesnost jednotlivých výpočtů.

**Tabulka 5.3:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 3

	Analytický	Matlab	ANSYS
průhyb $w_B$	121,254 mm	123,282 mm	121,374 mm
natočení $\varphi_B$	0,1617 rad	0,1657 rad	0,1618 rad
posouvající síla $T_{min}$	0 N	0 N	0 N
posouvající síla $T_{max}$	100 N	100 N	100 N
ohybový moment $M_{o_{min}}$	0 Nmm	0 Nmm	0 Nmm
ohybový moment $M_{o_{max}}$	50000 Nmm	50000 Nmm	50000 Nmm
napětí $\sigma_n$	509,3 MPa	509,3 MPa	509,6 MPa

## 5.4 Prut oběma konci větknutý uprostřed zatížený silou

Čtvrtým příkladem je prut větknutý na obou koncích a v prostředku zatížený silou.



Obrázek 5.15: Prut oběma konci větknutý uprostřed zatížený silou

### 5.4.1 Analytické řešení

Z rovnic statické rovnováhy se získají síly a momenty ve vazbách. Úloha je symetrická, takže reakční síly a momenty v jednotlivých vazbách jsou si rovny.

$$\sum x : F_{Ax} + F_{Cx} = 0 \quad (5.22)$$

$$F_{Ax} = F_{Cx} = 0 \text{ N} \quad (5.23)$$

$$\sum y : F_{Ay} + F_{Cy} - F_B = 0 \quad (5.24)$$

$$F_A = F_C = \frac{F_B}{2} = \frac{5000}{2} = 2500 \text{ N} \quad (5.25)$$

$$\sum M(A) : M_A - F_B \cdot L/2 + M_C + F_{By} \cdot L = 0 \quad (5.26)$$

$$M_A = -M_C \quad (5.27)$$

Výsledné vnitřní účinky počítané zleva:

$$x_1 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_I = 0 \text{ N} \quad (5.28)$$

$$T_I = F_{Ay} = \frac{F_B}{2} = \frac{5000}{2} = 2500 \text{ N} \quad (5.29)$$

$$M_{oI} = F_{Ay} \cdot x_1 - M_A = \frac{F_B}{2} \cdot x_1 - M_A \quad (5.30)$$

$$x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_{II} = 0 \text{ N} \quad (5.31)$$

$$T_{II} = F_{Ay} - F_B = -\frac{F_B}{2} = -\frac{5000}{2} = -2500 \text{ N} \quad (5.32)$$



$$M_{oII} = F_{Ay} \cdot (L/2 + x_2) - M_A - F_B \cdot x_2 = \frac{F_B}{2} \cdot (L/2 + x_1) - M_A - F_B \cdot x_2 \quad (5.33)$$

Pro vyčíslení ohybového momentu je potřeba dopočítat moment ve vazbě A a to pomocí Castigliánovy věty a podmínky  $\varphi_A = 0$ . Pak se moment rovná

$$M_A = \frac{F_B \cdot L}{8} = \frac{5000 \cdot 1000}{8} = 625000 \text{ Nmm}. \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad M_{oI} = \frac{5000}{2} \cdot 0 - 625000 = -625000 \text{ Nmm} \\ x_1 = L/2 & \quad M_{oI} = \frac{5000}{2} \cdot 500 - 625000 = 625000 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & \quad M_{oII} = \frac{5000}{2} \cdot 500 - 625000 = 625000 \text{ Nmm} \\ x_2 = L/2 & \quad M_{oII} = \frac{5000}{2} \cdot (500 + 500) - 625000 - 5000 \cdot 500 = -625000 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Průhyb v místě B se rovná:

$$w_B = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{F \cdot L^3}{192} = \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{5000 \cdot 1000^3}{192} = 252,613 \text{ mm} \quad (5.35)$$

Nominální napětí v místě B:

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{625000}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 6365,9 \text{ MPa} \quad (5.36)$$

### 5.4.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Hodnota průhybu v místě B:

Prubyb v miste B je 252.627 mm.

### 5.4.3 Porovnání výsledků

**Tabulka 5.4:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 4

	Analytický	Matlab	ANSYS
průhyb $w_B$	252,613 mm	252,627 mm	253,073 mm
posouvající síla $T_{min}$	-2500 N	-2500 N	-2500 N
posouvající síla $T_{max}$	2500 N	2500 N	2500 N
ohybový moment $M_{o_{min}}$	-625000 Nmm	-625000 Nmm	-625000 Nmm
ohybový moment $M_{o_{max}}$	625000 Nmm	625000 Nmm	625000 Nmm
napětí $\sigma_n$	6365,9 MPa	6366,2 MPa	6371,6 MPa

## 5.5 Prostě uložený prut, uprostřed zatížený silou

Prut s podporou na obou koncích je uprostřed zatížený silou.



Obrázek 5.16: Prostě uložený prut a uprostřed zatížený silou

### 5.5.1 Analytické řešení

Z rovnic statické rovnováhy se získají síly ve vazbách:

$$\sum y : F_A + F_C - F_B = 0 \quad (5.37)$$

Úloha je symetrická, takže reakční síly mají stejnou velikost.

$$F_A = F_C = \frac{F_B}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ N} \quad (5.38)$$

Výsledné vnitřní účinky počítané zleva:

$$x_1 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_I = 0 \text{ N} \quad (5.39)$$

$$T_I = F_A = \frac{F_B}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ N} \quad (5.40)$$

$$M_{oI} = F_A \cdot x_1 = \frac{F_B}{2} \cdot x_1 \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad M_{oI} = \frac{1000}{2} \cdot 0 = 0 \text{ Nmm} \\ x_1 = L/2 & \quad M_{oI} = \frac{1000}{2} \cdot 500 = 250000 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

$$x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_{II} = 0 \text{ N} \quad (5.42)$$

$$T_{II} = F_A - F_B = -\frac{F_B}{2} = -\frac{1000}{2} = -500 \text{ N} \quad (5.43)$$

$$M_{oII} = F_A \cdot (L/2 + x_2) - F_B \cdot x_2 = \frac{F_B}{2} \cdot (L/2 + x_2) - F_B \cdot x_2 \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & \quad M_{oII} = \frac{1000}{2} \cdot 500 - 0 = 125000 \text{ Nmm} \\ x_2 = L/2 & \quad M_{oII} = \frac{1000}{2} \cdot (500 + 500) - 1000 \cdot 500 = 0 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Průhyb v místě B je počítán obdobně jako v předchozích příkladech:

$$w_B = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{F_B \cdot L^3}{48} = \frac{1}{210000 \cdot 490,9} \cdot \frac{1000 \cdot 1000^3}{48} = 202,091 \text{ mm} \quad (5.45)$$

Natočení v místě podpory se vypočítá pomocí průhybové čáry, křivosti a doplňkového momentu.

$$w'' = \frac{M_{oI}}{E \cdot J} = \frac{\frac{F_B}{2} \cdot x_1 + M_D}{E \cdot J} \quad (5.46)$$

$$w' = \int \frac{\frac{F_B}{2} \cdot x_1 + M_D}{E \cdot J} dx_1 = \frac{\frac{F_B}{4} \cdot x_1^2 + M_D \cdot x_1}{E \cdot J} + C_1 \quad (5.47)$$

Protože doplňkový moment  $M_D$  je roven nule a natočení  $w'$  v místě  $x_1 = L/2$  je také rovno nule, je možné dopočítat integrační konstantu

$$C_1 = -\frac{F_B}{4} \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1}{E \cdot J}, \quad (5.48)$$

která se dosadí zpět do rovnice (5.47), kde se  $M_D = 0$ . Protože je potřeba spočítat natočení v místě A, dosadí se  $x_1 = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{\frac{F_B}{4} \cdot x_1^2}{E \cdot J} - \frac{F_B}{4} \cdot \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1}{E \cdot J} = \\ &= \frac{\frac{1000}{4} \cdot 0}{210000 \cdot 490,9} - \frac{1000}{4} \cdot \frac{1000^2}{4} \cdot \frac{1}{210000 \cdot 490,9} = -0,6063 \text{ rad} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Nominální napětí v místě B:

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{250000}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 2546,3 \text{ MPa} \quad (5.50)$$

### 5.5.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Hodnota průhybu v místě B a natočení v krajních uzlech:

Průhyb v místě B je 202.102 mm.  
Natočení v místě A je 0.6063 rad.  
Natočení v místě C je -0.6063 rad.

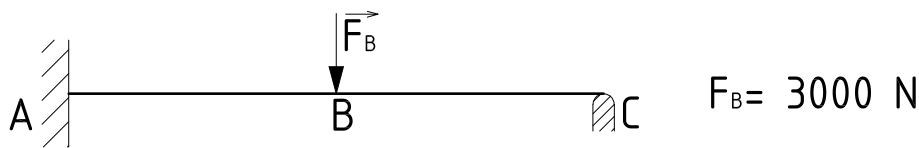
### 5.5.3 Porovnání výsledků

**Tabulka 5.5:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 5

	Analyticky	Matlab	ANSYS
průhyb $w_B$	202,091 mm	202,102 mm	201,91 mm
natočení v místě podpor	0,6063 rad	0,6063 rad	0,6068 rad
posouvající síla $T_{min}$	-500 N	-500 N	-500 N
posouvající síla $T_{max}$	500 N	500 N	500 N
ohybový moment $M_{o_{min}}$	0 Nmm	0 Nmm	0 Nmm
ohybový moment $M_{o_{max}}$	250000 Nmm	250000 Nmm	250000 Nmm
napětí $\sigma_n$	2546,3 MPa	2546,5 MPa	2548,7 MPa

## 5.6 Prut na jednom konci vetknutý, na druhém s obecnou vazbou a uprostřed zatížený silou

Posledním příkladem je vetknutý prut, který je na druhém konci podepřený a uprostřed zatížený silou.



**Obrázek 5.17:** Vetknutý prut, na druhém konci obecná vazba a uprostřed zatížen silou

### 5.6.1 Analytické řešení

Z rovnic statické rovnováhy se získají síly a momenty ve vazbách. Úloha je staticky neurčitá, takže se před vyčíslením reakčních sil, momentů a VVÚ musí dopočítat síla  $F_C$  pomocí Castigliánovy věty.

$$\sum x : F_{Ax} = 0 \quad (5.51)$$

$$\sum y : F_{Ay} + F_C - F_B = 0 \quad (5.52)$$

$$F_{Ay} = F_B - F_C \quad (5.53)$$

$$\sum M(A) : -M_A - F_B \cdot L/2 + F_C \cdot L = 0 \quad (5.54)$$

$$M_A = F_C \cdot L - F_B \cdot L/2 \quad (5.55)$$

Výsledné vnitřní účinky počítané zprava:

$$x_1 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_I = 0 \text{ N} \quad (5.56)$$

$$T_I = -F_C \quad (5.57)$$

$$M_{o_I} = F_C \cdot x_1 \quad (5.58)$$

$$x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$$

$$N_{II} = 0 \text{ N} \quad (5.59)$$

$$T_{II} = F_B - F_C \quad (5.60)$$

$$M_{o_{II}} = F_C \cdot (L/2 + x_2) - F_B \cdot x_2 \quad (5.61)$$

Pro vyčíslení výsledných vnitřních účinků je potřeba dopočítat sílu  $F_C$  z podmínky  $w_C = 0$ . Síla

$$F_C = \frac{5F_B}{16} = \frac{5 \cdot 3000}{16} = 937,5 \text{ N}. \quad (5.62)$$

Nyní lze dosadit do VVÚ

$$T_I = -F_C = -937,5 \text{ N} \quad (5.63)$$

$$T_{II} = F_B - F_C = 3000 - 937,5 = 2062,5 \text{ N} \quad (5.64)$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & M_{o_I} = F_C \cdot x_1 = 937,5 \cdot 0 = 0 \text{ Nmm} \\ x_1 = L/2 & M_{o_I} = F_C \cdot x_1 = 937,5 \cdot 500 = 468750 \text{ Nmm} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2 = 0 & M_{o_{II}} = F_C \cdot (L/2 + x_2) - F_B \cdot x_2 = \\ & = 937,5 \cdot 500 = 468750 \text{ Nmm} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_2 = L/2 & M_{o_{II}} = F_C \cdot (L/2 + x_2) - F_B \cdot x_2 = \\ & = 937,5 \cdot (500 + 500) - 3000 \cdot 500 = -562500 \text{ Nmm} \end{array}$$

Maximální průhyb a natočení v místě obecné vazby se dopočítá pomocí průhybové čáry. Po získání průhybové čáry a dosazení okrajových podmínek lze dopočítat hodnotu  $x$ , kde je natočení nulové a tím pádem průhyb maximální. Hodnota maximálního průhybu je tedy 552,78 mm od místa vetknutí.

$$\begin{aligned} w_{max} &= \frac{F_B \cdot (L - x)}{96 \cdot EJ} \cdot (5 \cdot x^2 + 2 \cdot L^2 - 10 \cdot L \cdot x) = \\ &= \frac{3000 \cdot (1000 - 552,78)}{96 \cdot 210000 \cdot 490,9} \cdot (5 \cdot 552,78^2 + 2 \cdot 1000^2 - 10 \cdot 1000 \cdot 552,78) = \quad (5.65) \\ &= -271,133 \text{ mm} \end{aligned}$$

Natočení v místě C se získá derivací rovnice průhybové čáry a dosazením za  $x = 1000$  mm.

$$\begin{aligned} \varphi_C &= -\frac{F_B}{32 \cdot EJ} \cdot (4 \cdot L^2 - 10 \cdot L \cdot x + 5 \cdot x^2) = \\ &= -\frac{3000}{32 \cdot 210000 \cdot 490,9} \cdot (4 \cdot 1000^2 - 10 \cdot 1000 \cdot 1000 + 5 \cdot 1000^2) = \quad (5.66) \\ &= 0,9094 \text{ rad} \end{aligned}$$

Nominální napětí v místě maximálního ohybového momentu:

$$\sigma_n = \frac{M_o}{J} \cdot \frac{d}{2} = \frac{562500}{490,9} \cdot \frac{10}{2} = 5729,3 \text{ MPa} \quad (5.67)$$

### 5.6.2 Řešení získané pomocí Matlabu

Hodnota maximálního průhybu a natočení v místě podpory:

Maximalni pruhyb je -271.132 mm.  
Natočení v místě C je -0.9095 rad.

### 5.6.3 Porovnání výsledků

**Tabulka 5.6:** Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 6

	Analyticky	Matlab	ANSYS
průhyb $w_{max}$	271,133 mm	271,132 mm	271,506 mm
natočení $\varphi_C$	0,9094 rad	0,9095 rad	0,9104 rad
posouvající síla $T_{min}$	-937,5 N	-937,5 N	-937,5 N
posouvající síla $T_{max}$	2062,5 N	2062,5 N	2062,5 N
ohybový moment $M_{o_{min}}$	-562500 Nmm	-562500 Nmm	-562458 Nmm
ohybový moment $M_{o_{max}}$	468750 Nmm	468750 Nmm	468766 Nmm
napětí $\sigma_n$	5729,3 MPa	5729,6 MPa	5734,1 MPa

## Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo naprogramovat algoritmus MKP pro prutové těleso, který čtenáři umožní získat hlavní informace o deformaci prutu, a poté získané údaje porovnat s analytickým řešením a ověřit v programu ANSYS. Tento text by měl také čtenáři přinést základní teorii pružnosti pevnosti a její aplikaci při metodě konečných prvků. Dále zde čtenář najde přehled nepoužívanějších MKP programů a programů pro vědecké účely, které by bylo možné využít pro napsání zdrojových kódů uvedených v této práci.

Ve své bakalářské práci si autorka zvolila šest různých uložení prutu a pro každé napsala algoritmus numerického výpočtu metody konečných prvků. Výsledky získané z této činnosti jsou rozebrány v poslední kapitole této práce. Čtenář zde najde analytické řešení každého prutu a porovnání výsledků s dalšími metodami uvedené v tabulce. Z tabulek u jednotlivých příkladů je zjevná přesnost jednotlivých výpočtů. Hodnoty průhybu z jednotlivých metod řešení se liší v desetinách milimetru, pouze u prutu zatíženého liniovým zatížením je rozdíl v řádu jednotek. Výpočet natočení se jeví jako dost přesný, protože hodnoty se liší až v řádu desetitisícin radiánu. Nejpřesnějších hodnot se u výpočtu dosáhlo při počítání výsledných vnitřních účinků, kde se jediný rozdíl objevil až u ohybového momentu v šestém příkladě z řešení z ANSYSU. Lehce rozdílné hodnoty se vyskytly i u výpočtu nominálního napětí, ale rozdíl představoval jednotky či desítky megapascalů.

Závěrem lze tedy říci, že přesnost výsledků získaných z algoritmů popsanych v této práci je velice vysoká.





## Seznam použitých zdrojů

- [1] ANSYS – Simulation Driven Product Development. *ANSYS Fluent* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Fluid+Dynamics/Fluid+Dynamics+Products/ANSYS+Fluent>
- [2] ANSYS – Simulation Driven Product Development. *Mechanical Design Software – ANSYS Mechanical* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Structural+Analysis/ANSYS+Mechanical>
- [3] ANSYS – Simulation Driven Product Development. *Structural Analysis Software – ANSYS Structural* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Structural+Analysis/ANSYS+Structural>
- [4] FERREIRA, A. *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2009. Solid mechanics and its applications, 157. ISBN 1402092008-.
- [5] Home – Dassault Systèmes. *Abaqus/CAE – Dassault Systèmes* [online]. © 2002–2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaquscae/>
- [6] Home – Dassault Systèmes. *Abaqus/CFD – Dassault Systèmes* [online]. © 2002–2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaquscfid/>
- [7] Home – Dassault Systèmes. *Abaqus/Standard – Dassault Systèmes* [online]. © 2002–2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/abaqusstandard/>
- [8] HORYL, Petr. *Inženýrské základy MKP* [online]. Učební text VŠB – TU Ostrava, 2002, 34 s. Dostupné z: [http://www.337.vsb.cz/materialy/Inz\\_zakl\\_MKP\\_2002.pdf](http://www.337.vsb.cz/materialy/Inz_zakl_MKP_2002.pdf)
- [9] iDnes.cz – Komerční sdělení. *ABAQUS: software na prověřování funkčnosti konstrukčních řešení – iDNES.cz* [online]. © 1999–2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: [http://sdeleni.idnes.cz/abaqus-software-na-proverovani-funkcnosti-konstrukcnich-reseni-ph6-/tec\\_sdeleni.aspx?c=A130419\\_164804\\_tec\\_sdeleni\\_ahr](http://sdeleni.idnes.cz/abaqus-software-na-proverovani-funkcnosti-konstrukcnich-reseni-ph6-/tec_sdeleni.aspx?c=A130419_164804_tec_sdeleni_ahr)
- [10] KOLÁŘ, Vladimír, Jiří KRATOCHVÍL, František LEITNER a Alexander ŽENÍŠEK *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. 2. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1979, 542 s. Řada teoretické literatury.
- [11] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. 4. vyd. Brno: Akademické vydavatelství CERM, 2006, 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [12] Overview – Python 3.4.3 documentation. *General Python FAQ – Python 2.7.10rc1 documentation* [online]. © 1990–2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <https://docs.python.org/2/faq/general.html#why-is-it-called-python>

- 
- [13] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Učební text FSI VUT Brno, 2011, 112 s. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [14] SageMath – Open-Source Mathematical Software System. *SageMath – Open-Source Mathematical Software System* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://www.sagemath.org/>
- [15] SciPy.org – SciPy.org. *Scientific Computing Tools for Python – SciPy.org* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://www.scipy.org/about.html>
- [16] SEBERA, Václav. *O Open-Source řešičích na bázi MKP* [online]. 7. mezinárodní konference APLIMAT, 2008, 17 s. Dostupné z: <http://people.tuke.sk/ladislav.sevcovic/aplimat08/prispevky/sebera-08.pdf>
- [17] The GNU Operating System and the Free Software Movement. *About GNU Octave* [online]. © 1996–2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://www.gnu.org/software/octave/about.html>
- [18] The GNU Operating System and the Free Software Movement. *GNU Octave* [online]. © 1996–2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://www.gnu.org/software/octave/>
- [19] TOMÁNEK, Jiří. *Zpracování přehledu MKP aplikací na bázi open source* [online]. [Bakalářská práce.] Brno: FSI VUT, 2010. 57 s. Vedoucí Ing. Tomáš Návrat, Ph.D. Dostupné z: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=27266](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=27266)
- [20] Va Tech – Lab for Scientific Visual Analysis. *Introduction to Finite Element Analysis* [online]. © 2004 [cit. 2015-04-20]. Dostupné z: [http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094\\_NoteBook/97ClassProj/num/widas/history.html](http://www.sv.vt.edu/classes/MSE2094_NoteBook/97ClassProj/num/widas/history.html)
- [21] Wikipedie, otevřená encyklopedie. *Fortran – Wikipedie* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Fortran>
- [22] Wikipedia, the free encyclopedia. *Ansys – Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-10]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Ansys>
- [23] Wikipedia, the free encyclopedia. *Fortran - Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fortran>
- [24] Wikipedia, the free encyclopedia. *Scilab - Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. © 2015 [cit. 2015-05-11]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Scilab>
- [25] ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method*. 3. vyd. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977, 787 s. ISBN 0-07-084072-5.

# Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Rozměr	Veličina
$a, a$	[mm]	polovina délky prvku
$d, d$	[mm]	průměr
$C_1$	[1]	integrační konstanta
$E$	[MPa]	Youngův modul pružnosti v tahu
$\varepsilon$	[1]	délkové přetvoření
$F, FB$	[N]	síla
$F_D$	[N]	doplňková síla
$\varphi$	[rad]	natočení
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	gravitační zrychlení
$G$	[MPa]	modul pružnosti ve smyku
$\gamma$	[1]	úhlové přetvoření
$J, J$	[mm <sup>4</sup> ]	kvadratický moment průřezu
$l$	[mm]	délka prvku
$L$	[mm]	délka prutu
$M$	[Nmm]	moment
$M_D$	[Nmm]	doplňkový moment
$M_{oy}, M_o$	[Nmm]	ohybový moment
$\mu$	[1]	Poissonův poměr
$N$	[mm]	bázová funkce průhybu
$N$	[N]	normálová síla
$o$	[N/m <sup>3</sup> ]	objemová síla
$P$	[J]	potenciál vnějšího zatížení
$\Pi$	[J]	potenciální energie
$q$	[N/mm]	liniové zatížení
$S$	[mm <sup>2</sup> ]	průřez prutu
$\sigma$	[MPa]	normálové napětí
$T$	[N]	posuvající síla
$\tau$	[MPa]	smykové napětí
$u$	[mm]	posuv
$v$	[mm]	posuv
$V$	[mm <sup>3</sup> ]	objem
$w$	[mm]	posuv
$w''$	[mm <sup>-1</sup> ]	křivost
$W$	[J]	energie napjatosti
$(x, y, z)$	[m, m, m]	souřadnice kartézského souřadného systému
$z$	[mm]	charakteristický rozměr průřezu

<b>Matice</b>	<b>Název</b>
$B, B$	matice bazových funkcí křivosti
$\delta, \text{delta}$	deformační matice prvku
$\varepsilon$	matice přetvoření
$f$	prvková matice vnějšího zatížení
$F, F$	globální matice vnějšího zatížení
$F1, F1$	matice vnějšího zatížení s okrajovými podmínkami
$k, K_e, K_e$	prvková matice tuhosti
$K, K$	globální matice tuhosti
$K1, K1$	globální matice tuhosti s okrajovými podmínkami
$N$	matice bazových funkcí průhybu
$o$	matice objemového zatížení
$p$	matice plošného zatížení
$\sigma$	matice napětí
$u$	matice posuvů
$U$	globální matice neznámých parametrů
$U1, U1$	globální matice neznámých parametrů s okrajovými podmínkami

<b>Zkratka</b>	<b>Význam</b>
----------------	---------------

---

CAD	Computer Aided Design
CAE	Complete Abaqus Environment
CFD	Computer Fluid Dynamics
GPL	General Public License
GNU	GNU is Not UNIX
MKP	metoda konečných prvků
VUT	Vysoké učení technické
VVÚ	výsledné vnitřní účinky

# Seznam obrázků

1.1	Rozdělení prutu na uzly a prvky [13] . . . . .	18
1.2	Prutový prvek [13] . . . . .	18
4.1	Schéma vytvoření celkové matice tuhosti $\mathbf{K}$ . . . . .	28
4.2	Prut na jednom konci vetknutý, na druhé s obecnou vazbou a uprostřed zatížený silou . . . . .	28
4.3	Schéma zobrazení okrajových podmínek . . . . .	29
4.4	Schéma zohlednění okrajových podmínek . . . . .	29
4.5	Schéma závislosti počtu prvků na okrajových podmínkách . . . . .	30
4.6	Vetknutý prut na volném konci zatížený silou . . . . .	30
5.1	Vetknutý prut na volném konci zatížený silou . . . . .	37
5.2	Úplné uvolnění prutu . . . . .	37
5.3	Výsledné vnitřní účinky . . . . .	38
5.4	Úplně uvolněný prut s doplňkovým momentem . . . . .	39
5.5	Průhyb a natočení vetknutého prutu . . . . .	40
5.6	Výsledné vnitřní účinky vetknutého prutu . . . . .	41
5.7	Nominální napětí v místě maximálního ohybového momentu . . . . .	41
5.8	Průhyb vetknutého prutu . . . . .	42
5.9	Natočení vetknutého prutu . . . . .	43
5.10	Posouvající síla vetknutého prutu . . . . .	43
5.11	Ohybový moment vetknutého prutu . . . . .	44
5.12	Nominální napětí vetknutého prutu . . . . .	44
5.13	Vetknutý prut na volném konci zatížený momentem . . . . .	45
5.14	Vetknutý prut zatížený liniovým zatížením . . . . .	46
5.15	Prut oběma konci větknutý uprostřed zatížený silou . . . . .	48
5.16	Prostě uložený prut a uprostřed zatížený silou . . . . .	50
5.17	Vetknutý prut, na druhém konci obecná vazba a uprostřed zatížen silou . . . . .	52



# Seznam tabulek

2.1	Programové systémy MKP [13] . . . . .	21
5.1	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 1 . . . . .	45
5.2	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 2 . . . . .	46
5.3	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 3 . . . . .	47
5.4	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 4 . . . . .	49
5.5	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 5 . . . . .	52
5.6	Hodnoty získané z výpočtů k příkladu 6 . . . . .	54





# Přílohy

K práci je přiloženo CD, které obsahuje elektronickou verzi práce, zdrojové kódy a grafické výstupy Matlabu a databáze a grafické výstupy ANSYSu pro každý z uvedených příkladů.