



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

PROUDĚNÍ NENEWTONSKÝCH KAPALIN

NON-NEWTONIAN LIQUIDS FLOW

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Roman Mašán

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Bc. Daniel Himr, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Roman Mašán**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojírenství
Vedoucí práce: **Ing. Bc. Daniel Himr, Ph.D.**
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Proudění neneutonských kapalin

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Voda a její vlastnosti jsou poměrně dobře popsány, takže lze snadno predikovat chování vody za různých podmínek. Bude v klidu nebo bude proudit? Bude proudit laminárně nebo turbulentně? Jakou musíme dodat energii, abychom docílili požadovaného průtoku? Bude proudění ustálené nebo neustálené? Bude docházet k tlakovým pulzacím? O jaké velikosti?

To jsou jen některé otázky, které je třeba řešit v každodenní praxi a odpovědi se změní ve chvíli, kdy je do vody přidán třeba kukuřičný škrob. Z původní newtonské kapaliny vznikne neneutonská se zcela odlišným chováním.

Bakalářská práce bude zaměřena na popis chování neneutonských kapalin v režimu laminárního proudění, turbulentního proudění a šíření tlakového pulzu v neneutonských kapalinách.

Cíle bakalářské práce:

Popsat používané modely neneutonských kapalin vč. praktických aplikací.

Popsat stacionární a nestacionární chování.

Ukázat praktické problémy při přechodových dějích v potrubních systémech dopravujících neneutonské médium.

Seznam doporučené literatury:

Bird, R. B.; Armstrong, R. C.; Hassager, O.: Dynamics of polymeric fluids. Volume 1: Fluid mechanics. John Wiley & Sons, New York, 1987, ISBN 0-471-80245-X.

Chhabra, R. P.; Richardson, J. F.: Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999, ISBN 0-7506-3770-6.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalárska práca približuje tematiku Neneutronových kvapalín, ktoré sa v porovnaní s tými Newtonovskými správajú nezvyčajne, charakterizuje ich reológiu, objasňuje dôvody a mechanizmy spôsobujúce ich neštandardné vlastnosti. Súčasťou práce je aj matematický popis modelovania týchto tekutín, ktorý je následne aplikovaný pre objasnenie povahy prúdenia a javov vznikajúcich pri prúdení v laminárnom a turbulentnom režime.

Kľúčové slová

Neneutronová kvapalina, viskozita, reológia, prúdenie tekutín, turbulentný režim, laminárny režim

ABSTRACT

The bachelor's thesis explores the topic of Non-Newtonian fluids, which behave unusually compared to Newtonian fluids. It characterizes their rheology, clarifies the reasons and mechanisms responsible for their non-standard properties. The thesis also includes a mathematical description of modeling these fluids, which is subsequently applied to elucidate the nature of flow and phenomena occurring in laminar and turbulent regimes.

Key words

Non-Newtonian fluid, viscosity, rheology, fluid flow, turbulent regime, laminar regime

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

MAŠÁN, Roman. *Proudění neneutonských kapalin*. Brno, 2023. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/149335>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Daniel Himr.

PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že bakalársku prácu na téma **Proudění neneutonských kapalin** som vypracoval samostatne s použitím prameňov a odbornej literatúry uvedenej zozname použitej literatúry.

Dátum

Roman Mašán

POĎAKOVANIE

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu práce Ing. Bc. Danielovi Himrovi, Ph.D. za všetok čas, ktorý venoval poradenstvu pri tvorbe tohto dokumentu, mojej rodine za podporu a možnosť študovať vysokú školu a všetkým vyučujúcim za predanie cenných poznatkov.

OBSAH

ÚVOD	11
1 Tekutiny	12
2 Newtonovská tekutina	13
3 Neneutronovská kvapalina.....	15
4 Časovo nezávislé Neneutronovské kvapaliny.....	16
4.1 Čisto viskózne kvapaliny	17
4.1.1 Pseudoplastické kvapaliny	18
4.1.2 Dilatantné kvapaliny	19
4.2 Viskoplastické kvapaliny	20
5 Reológia časovo nezávislých Neneutronovských kvapalín	22
5.1 Reologické modely používané pre čisto viskózne kvapaliny	22
5.1.1 Mocninový model – Ostwald de Waele	22
5.1.2 Carreau-Yasuda model.....	23
5.1.3 Ellis model	23
5.2 Reologické modely používané pre viskoplastické kvapaliny	24
5.2.1 Binghamský model	24
5.2.2 Herschel-Bulkeyho model.....	24
5.2.3 Cassonov model	24
6 Časovo závislé Neneutronovské kvapaliny	25
6.1 Tixotropné správanie	25
6.2 Reopektické správanie.....	26
7 Modelovanie časovo závislého správania	27
7.1 Houskov model.....	27
8 Viskoelastické kvapaliny	28
9 Matematické modely popisujúce viskoelastické chovanie.....	29
9.1 Maxwelllov model.....	29
9.2 Kelvin-Voightov model.....	29
10 Prúdenie kvapalín.....	30
10.1 Medzná vrstva rýchlostného profilu PL kvapalín v turbulentnom režime	31
10.1.1 Laminárna podvrstva.....	31
10.1.2 Prechodová zóna	31
10.1.3 Turbulentné jadro	31
10.2 Podobnostné čísla charakterizujúce prúdenie.....	31
10.2.1 Reynoldsovo číslo	32
10.2.2 Binghamské číslo	32
10.2.3 Hedströmovo číslo	32
10.3 Trecí faktor	32
10.4 Energetické straty v potrubných systémoch	34
11 Javy vznikajúce pri toku Neneutronovských kvapalín	35
11.1 Pseudoplastický efekt pri výtoku z trubky	35

11.2	Weissenbergov efekt – vzliánanie kvapaliny po točiacej sa tyči	36
11.3	Rozšírenie toku na východe z dýzy	36
11.4	Sekundárny tok v systéme kruhová nádoba-kruhová doska.....	37
11.5	Tok kvapaliny cez zúženie	38
11.6	Násoska.....	39
11.7	Reštitúcia – elastic recoil	39
11.8	Hydraulický ráz	40
12	Laminárne prúdenie.....	44
12.1	Napätie pôsobiace v kvapaline	44
12.2	Všeobecný prístup pre časovo nezávislé kvapaliny	44
12.3	PL kvapaliny.....	46
12.4	Binghamské a bingham-plastické kvapaliny	50
12.5	Priemerná kinetická energia kvapaliny.....	54
13	Odvedenie Všeobecného Metzner a Reedovho Reynoldsovho čísla pre časovo nezávislé kvapaliny	55
14	Turbulentné prúdenie	58
14.1	Kritéria prechodu z laminárneho do turbulentného režimu.....	58
14.1.1	Ryan a Johnsonov parameter stability.....	58
14.1.2	Mishra a Tripathino kritérium	58
14.1.3	Hanksovo kritérium.....	58
14.1.4	Slatterovo kritérium	59
14.2	Trecie faktory pre prechodné a turbulentné podmienky prúdenia.....	59
14.2.1	PL kvapaliny	60
14.2.2	Newtonovský prípad	61
14.2.3	Ultimátne pseudoplastický prípad.....	61
14.3	Viskoplastické kvapaliny.....	62
14.4	Bowenova metóda	63
	ZÁVER.....	65
	ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY	66
	ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK	68
	ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV	69

ÚVOD

Neneutronské tekutiny tvoria důležitú a zaujímavú oblasť výskumu v oblasti reológie a mechaniky tekutín. Tieto tekutiny sa odlišujú od newtonovských, ako napríklad: voda, olej alebo alkohol v tom, že ich viskozita, a teda aj reologické vlastnosti závisia od viacerých faktorov, ako napríklad aplikované napätie, rýchlostný gradient, štruktúra alebo čas.

Matematický popis chovania neneutronovských tekutín umožňujú zavedené reologické modely, ktorých cieľom je predpovedať správanie pri rôznych podmienkach. Práca sa bude venovať najpoužívanejším modelom pre rôzne druhy neneutronovských tekutín, ako napríklad Mocninovému, Binghamskému a Houskovmu modelu, vysvetleniu výhod, nevýhod a obmedzení ich použitia. Následne budú skúmané rozdiely v prúdeňí a javy vznikajúce pri prúdeňí, ktoré budú analyzované na základe ich prejavu v laminárnom aj turbulentnom režime.

Dôvodom je potreba lepšie porozumieť a kvantifikovať reologické vlastnosti týchto tekutín, keďže charakterizácia prúdeňia je důležitá pre mnohé odvetvia vedy a techniky ako napríklad chemické inžinierstvo, potravinársky priemysel, farmácia, medicína či ďalšie. Napríklad pri návrhu efektívnych systémov pre prepravu, miešanie či aplikáciu neneutronovských kvapalín je kľúčové vedieť predpovedať ako sa dané tekutiny budú správať pri rôznych nastávajúcich podmienkach.

1 Tekutiny

Jedná sa o skupinu látok, ktoré nie sú schopné udržať stály tvar. Typickou vlastnosťou tekutín je, že v pokoji sú schopné prenášať tlak iba v smere kolmom na povrch ohraničujúci tieto tekutiny. Sily v dotyčnom smere sa na takýchto povrchoch objavujú až keď dochádza k relatívnemu pohybu medzi tekutinou a povrchom a prejavujú sa ako trecie sily [2].

Tekutiny z makromolekulárneho hľadiska delíme na [5]:

- Plyny – častice takejto tekutiny nie sú viazané pohromade žiadnymi silami, skladujeme ich v uzatvorených nádobách, pretože zaujímajú celý objem nádoby, sú pomerne ľahko stlačiteľné
- Kvapaliny – v takejto tekutine sú častice látky držané pohromade pôsobením slabých medzi časticových síl

Pokiaľ je objem elementu tekutiny nezávislý na teplote a tlaku, tak sa tekutina nazýva nestlačiteľnou a v opačnom prípade, kedy je závislý na teplote a tlaku a objem elementu sa mení, tak sa takáto tekutina sa nazýva stlačiteľnou. Žiadna reálna tekutina nie je úplne nestlačiteľná, ale všeobecne sa pri prúde kvapalín zväčša uvažuje ich nestlačiteľnosť. Plyny sú na rozdiel od kvapalín omnoho ľahšie stlačiteľné, ale v prípade, že je percentuálna zmena absolútnej teploty alebo tlaku malá, tak ich možno v určitých prípadoch považovať taktiež za nestlačiteľné [5].

Z dôvodu podobného správania kvapalín a plynov na makroskopickej úrovni možno obe tieto skupiny popísať rovnakou formou rovníc pre pohyb a energetickú rovnováhu [2].

Odpor tekutín proti tečeniu sa nazýva viskozita a prejavuje sa iba keď je tekutina v pohybe. Viskozita plynu je nízka aj pri vysokých hodnotách rýchlostného gradientu a z toho dôvodu je napätie vznikajúce viskóznou reakciou materiálu tiež veľmi malé. Za týchto podmienok sa plyn chová ako neviskózna tekutina. Pri prúde tekutín je často napätie vznikajúce ako dôsledok viskózne reakcie hlavným parametrom ovplyvňujúcim parametre prúdenia ako napríklad: zmeny rýchlostného gradientu alebo množstvo stratovej energie [5].

2 Newtonovská tekutina

Každá tekutina, ktorá sa nachádza vo vrstve medzi dvoma doskami, pričom na jednu z dosiek pôsobí sila F , ako je tomu na obrázku 1, bude túto silu vyrovnávať vnútorným trením opačného smeru. Pre nestlačiteľnú newtonovskú tekutinu v laminárnom režime bude platí, že výsledné šmykové napätie je rovné súčinu rýchlostného gradientu a viskozity danej kvapaliny [1]. Tento vzťah sa nazýva Newtonov vzťah. Pre veľa tekutín vyskytujúcich sa v prírode a inžinierskych odvetviach je charakter ich vnútorného trenia popísaný touto lineárnou závislosťou dostatočne presný.

$$\frac{F}{S} = \tau_{yx} = \mu \left(-\frac{dv_x}{dy} \right) = \mu \gamma_{yx} \quad (4.1.1)$$

F – Pôsobiacia sila [N]

S – Plocha povrchu [m^2]

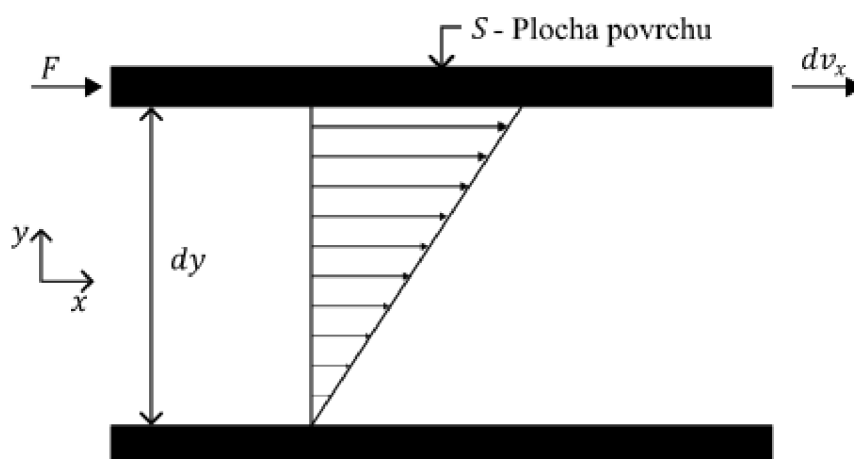
μ – viskozita [$Pa \cdot s$]

τ_{yx} – šmykové napätie [Pa]

γ_{yx} – rýchlostný gradient [s^{-1}]

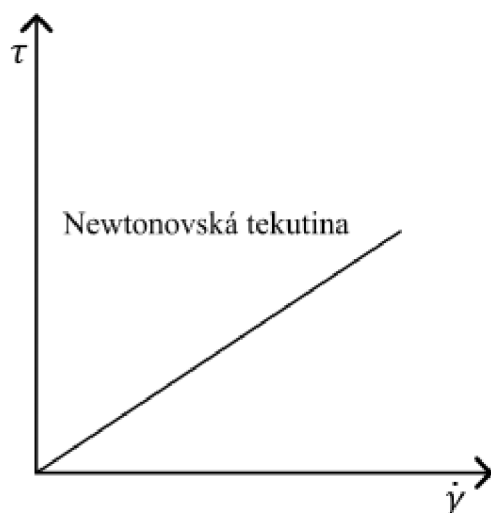
v_x – rýchlosť v smere osi x [$m \cdot s^{-1}$]

y – súradnica [m]

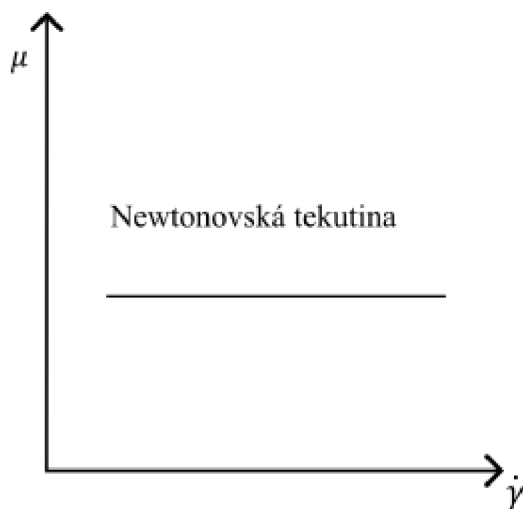


Obrázok 1: Tekutina medzi doskami, upravené podľa [1]

Na obrázku 2 je znázornený graf závislosti šmykového napätia a rýchlostného gradientu, ktorý sa nazýva reogram alebo taktiež aj toková krivka. Pre newtonovskú tekutinu sa jedná o priamku s konštantným sklonom (viskozita týchto kvapalín je v závislosti na šmykovom napätí alebo rýchlostnom gradiente konštantná a mení sa iba v súvislosti so zmenou teploty, respektíve tlaku [1], čo možno pozorovať aj na obrázku 3), prechádzajúcu počiatkom (kvapalina je čisto viskózna) [2].



Obrázok 2 Reogram Newtonovskej tekutiny, upravené podľa [2]



Obrázok 3: Grafické znázornenie viskozity Newtonovskej kvapaliny, upravené podľa [1]

Do skupiny newtonovských tekutín sa zaraďujú napríklad: vzduch, väčšina plynov, voda, jednoduché organické kvapaliny, zmesi anorganických solí s nízkou molekulárnou hmotnosťou, niektoré roztavené kovy a podobné látky [1]. V experimentoch porovnávajúcich newtonovské a neneutronské správanie sa často používa zmes glycerínu a vody [2].

Tabuľka 1: Látky a ich hodnoty viskozity pri izbovej teplote [6]

Látka	μ [mPa · s]
Vzduch	10^{-2}
Voda	1
Etyl alkohol	1.20
Olivový olej	100
100% Glycerín	1500
Med	10^4
Kukuričný sirup	10^5

3 Neneutronská kvapalina

Hlavným znakom odlišujúcim neneutronské kvapaliny od newtonovských je závislosť šmykového napätia na rýchlostnom gradiente. V prípade neneutronských kvapalín nie je závislosť týchto veličín lineárna (ich viskozita sa mení a reogramom je krivka) alebo pred tým než začnú tečť vykazujú počiatočný odpor, ktorý treba prekonať aby sa kvapalina dala do pohybu (v tom prípade reogram neprechádza počiatkom) [1].

Z dôvodu zmeny viskozity pri zaťažovaní sa zaviedla reologická veličina nazvaná zdanlivá viskozita značená nasledujúco:

$$\eta \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$$

Táto veličina je závislá na okamžitej hodnote rýchlostného gradientu [2].

$$\eta = f(\dot{\gamma}) \quad (4.1.1)$$

Neneutronské kvapaliny možno na základe ich typických vlastností, ktoré budú približené v nasledujúcich kapitolách rozdeliť na tri základné skupiny [1]:

- Časovo nezávislé kvapaliny
- Časovo závislé kvapaliny
- Viskoelastické kvapaliny

Reálne látky však často vykazujú kombinácie týchto typov správania a v tom prípade sa pre výpočty uvažuje s tým typom, ktorého vlastnosti sú dominantné.

4 Časovo nezávislé Neneutronovské kvapaliny

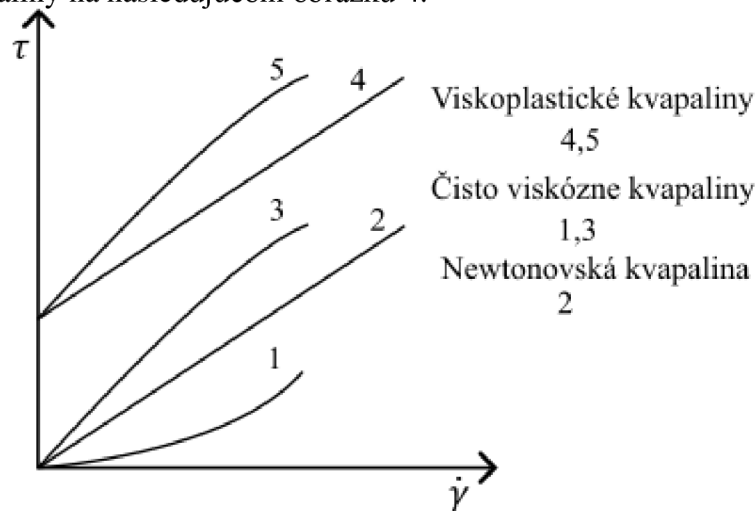
Pre časovo nezávislé kvapaliny všeobecne platí, že hodnota šmykového napätia je závislá iba na hodnote rýchlostného gradientu a nie je závislá na čase, v ktorom túto látku pozorujeme, ako bude rozoberané ďalej v kapitole 6. Preto je správanie tejto skupiny popísané rovnicou:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (4.1.1)$$

Časovo nezávislé kvapaliny môžeme ďalej rozdeliť na [2]:

- Čisto viskózne kvapaliny
- Viskoplastické kvapaliny

Reogramy časovo nezávislých kvapalín sú vyobrazené spolu aj s reogramom Newtonovskej kvapaliny na nasledujúcom obrázku 4.

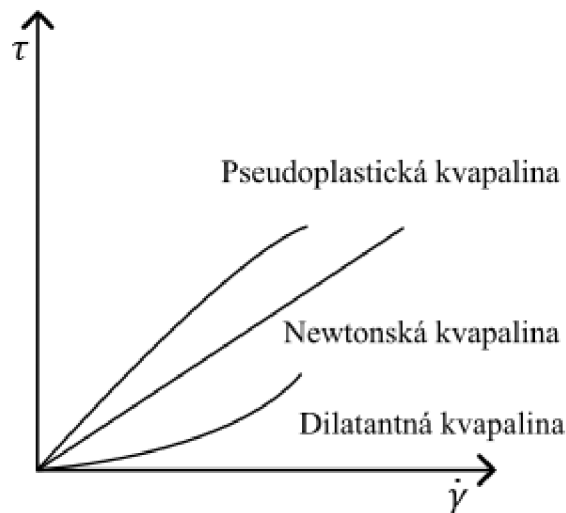


Obrázok 4: Druhy časovo nezávislých kvapalín, upravené podľa [1]

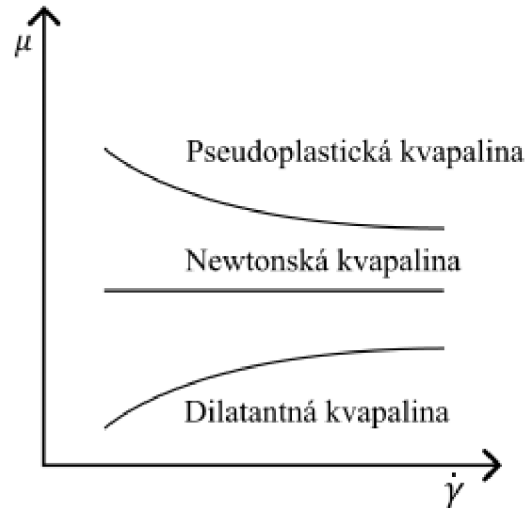
4.1 Čisto viskózne kvapaliny

Pre uvedenie týchto kvapalín do pohybu nie je potrebné prekonať žiadnu hranicu počiatočného napätia, krivka prechádza počiatkom, čo je možné vidieť na obrázku 5. Správajú sa neustále ako kvapaliny a na základe zmien charakteru zdanlivej viskozity ich môžeme ďalej rozdeliť na dve základné podkategórie [2]:

- Pseudoplastické kvapaliny
- Dilatantné kvapaliny



Obrázok 5: Reogramy čisto viskózných kvapalín, upravené podľa [1]

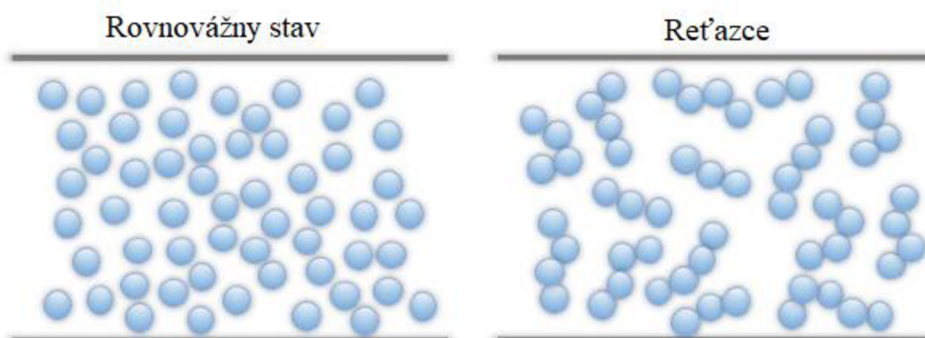


Obrázok 6: Zmena viskozity čisto viskózných kvapalín, upravené podľa [1]

4.1.1 Pseudoplastické kvapaliny

Ich charakteristickou vlastnosťou je, že hodnota viskozity sa s rastúcou hodnotou rýchlostného gradientu výrazne znižuje. Táto vlastnosť je pozorovateľná na obrázku 5 a obrázku 6. Znamená to, že látka pri vystavení napätiu lepšie tečie. Tento efekt je viditeľný a rázne ovplyvňuje tok tejto kvapaliny, keďže táto zmena môže byť v radoch 10^3 až 10^4 [4].

Tieto látky sú tvorené reťazcami, ktoré keď je kvapalina v pokoji sú rôzne zamotané, zvrstvené či zahnuté. Po vystavení kvapaliny napätiu sa tieto reťazce začnú rozpletať v smere prúdenia a následne sa po vrstvách pohybujú. Práve rozpletenie a uvedenie reťazcov do správnej orientácie má za následok pokles viskozity, čoho priamy dôsledok je zníženie energetickej náročnosti na pohyb. [12]



Obrázok 7: Tvorba reťazcov spôsobujúcich pokles viskozity, upravené podľa [13]

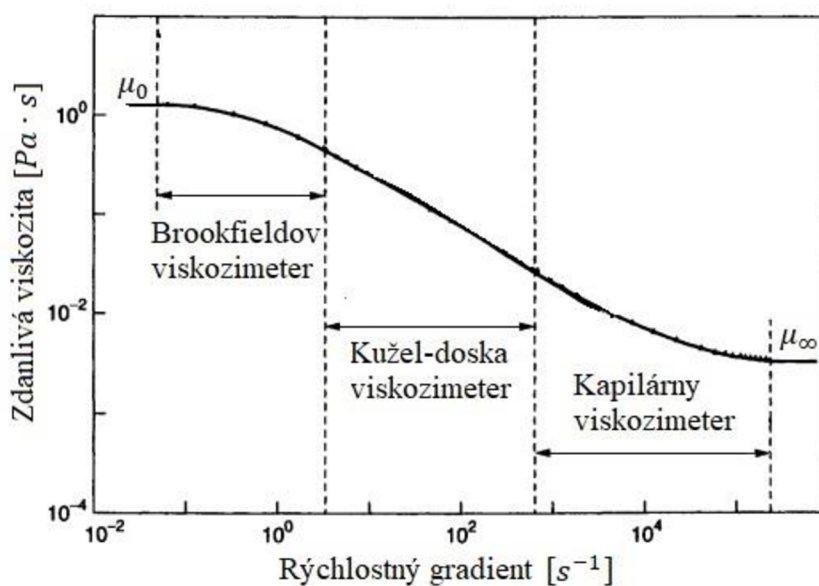
Pri veľkej časti pseudoplastických polymérnych roztokov a tavenín možno sledovať, že v oblastiach vysokých a nízkych hodnôt rýchlostného gradientu vykazujú Newtonovské chovanie. Ich viskozita prestane byť závislá na hodnote napätia a približuje sa ku konštantným hodnotám. Tieto hodnoty označujeme ako nekonečná respektíve nulová viskozita a sú závislé na koncentrácii polyméru, rozložení jeho molekulovej hmotnosti, druhu rozpúšťadla... [1]

$$\mu_{\infty} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (4.1.1)$$

$$\mu_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (4.1.2)$$

Šírka týchto oblastí, kde je viskozita prakticky konštantná sa zväčšuje: s klesajúcou molekulovou hmotnosťou látky, zužujúcim sa rozložením molekulovej hmotnosti a klesajúcou koncentraciou polyméru [1]. Treba podotknúť taktiež fakt, že pre rovnakú látku bude tvar krivky aj pri rozdielnych teplotách identický [3].

Na nasledujúcom obrázku 8 je znázornená závislosť zdanlivej viskozity a rýchlostného gradientu vodného polyakrylamidového roztoku pri teplote 20°C . Hodnota zdanlivej viskozity sa zmenila z pôvodných $1400 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ na $4,2 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, a to je jednoznačným dôkazom, že priradiť takejto kvapaline konštantu hodnotu viskozity by bolo absolútne nesprávne [1].



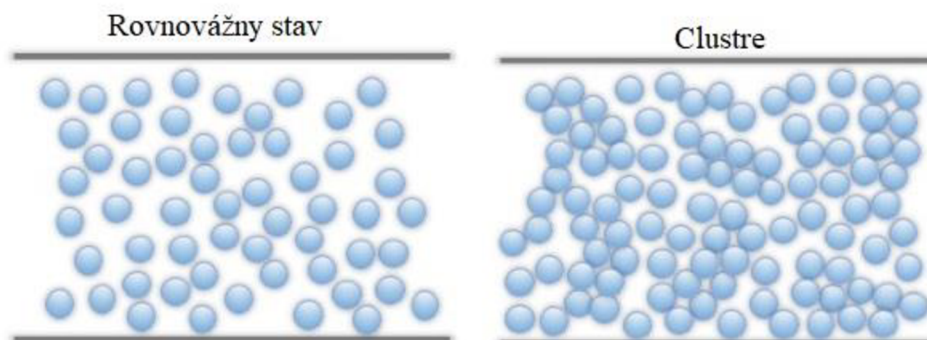
Obrázok 8: Zobrazenie zmeny viskozity v závislosti na rýchlostnom gradiente, upravené podľa [1]

Získanie hodnôt pre vytvorenie tohto grafu znázorňujúceho pseudoplastické chovanie je veľmi náročné, nakoľko žiadny z viskozimetrov nie je schopný dosiahnuť potrebnú presnosť pri nízkom rýchlostnom gradiente a veľkosti zvládnuť aj veľký rýchlostný gradient. Preto je potrebné pre nadobudnutie údajov pre príslušne oblasti rýchlostného gradientu použiť rôzne, vhodne zvolené nástroje. [1]

4.1.2 Dilatantné kvapaliny

Zaraďujú sa sem všetky látky, ktorých charakteristickou vlastnosťou je, že hodnota viskozity sa s rastúcou hodnotou rýchlostného gradientu zvyšuje (táto vlastnosť je pozorovateľná na obrázku 5 a obrázku 6). V porovnaní s pseudoplastickými kvapalinami sa jedná o značne menej preskúmanú a početnú skupinu. [1]

Mechanizmus uplatňujúci sa pri zmene viskozity dilatantných látok je znázornený na obrázku 9 a nazýva sa hydroclusterová teória. Pri externom napätí pôsobiacom na suspenziu začnú v kvapaline dominovať hydrodynamické sily nad odpudivými silami pôsobiacimi medzi časticami, čo vedie k vytvoreniu nestabilných zhlukov častíc nazývaných hydroclustre. Tieto clustre spôsobujú nárast viskozity, keďže blokujú priestor ktorým kvapalina dokáže tiecť. Po odstránení externého napätia sa tieto clustre okamžite rozpadajú a viskozita klesá [11].



Obrázok 9: Tvorba clusterov v dilatantných kvapalinách, upravené podľa [12]

Takéto chovanie vykazujú najmä vysoko koncentrované suspenzie obsahujúce veľmi malé pevné čiastočky, napríklad kukuričný škrob v zmesi etylén-glykol-voda [4], suspenzie porcelánového ílu, polyvinylchlorid v dioctyl pthaláte a pod... [1]

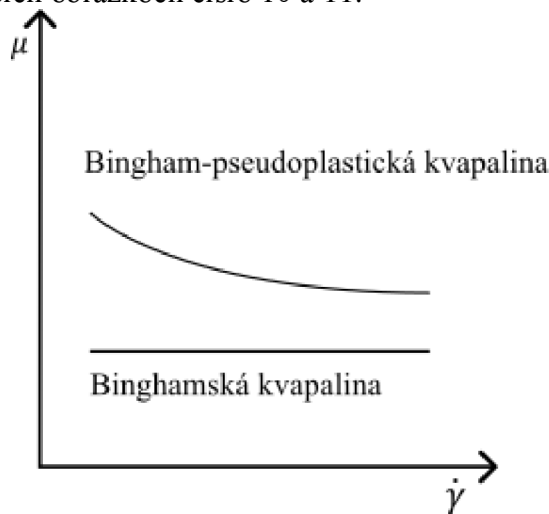
4.2 Viskoplastické kvapaliny

Charakteristickou vlastnosťou tejto skupiny je, že pred tým než kvapalina začne tiecť je potrebné prekonať počiatočnú hodnotu napätia - τ_0^B . Pokiaľ táto hodnota nebude prekonaná materiál sa elasticky deformuje alebo v prípade, že pôsobenie sily prekoná trecí odpor, tak sa kvapalina pohybuje jednotne ako tuhé teleso. [1]

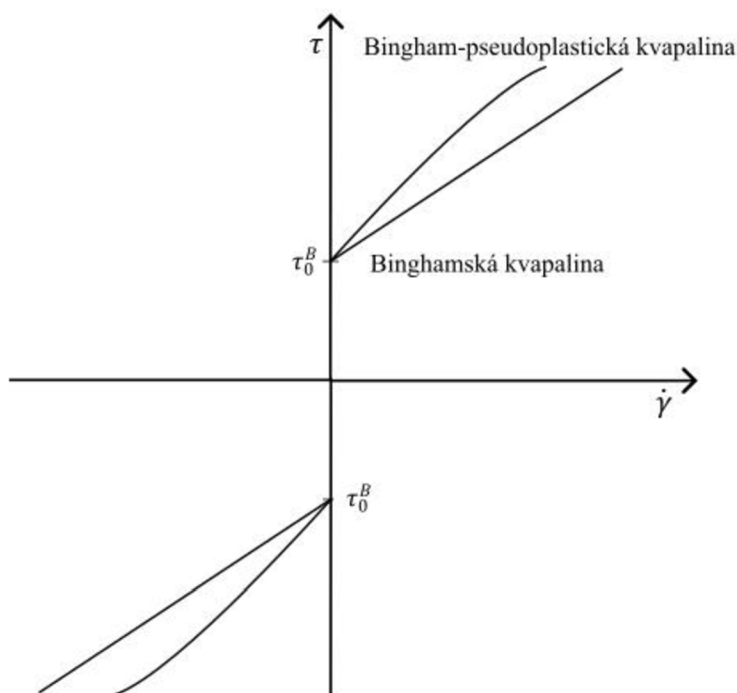
Viskoplastické kvapaliny možno ďalej na základe ich správania po prekročení hranice počiatočného odporu rozdeliť na [1]:

- Binghamské kvapaliny - po prekonaní tohto počiatočného odporu chovajú ako obyčajné newtonovské látky, ich viskozita je po celý rozsah rýchlostného gradientu konštantná.
- Bingham-pseudoplastické kvapaliny - skupina, ktorá podobne ako binghamské kvapaliny vykazujú počiatočný odpor voči tečeniu, avšak po prekonaní tohto odporu sa neriadia Newtonovým vzťahom, ale chovajú sa pseudoplastickým spôsobom.

Spomínané rozdiely medzi Binghamskou a Bingham-pseudoplastickou kvapalinou sú znázornené na nasledujúcich obrázkoch číslo 10 a 11.



Obrázok 10: Zobrazenie zmeny viskozity viskoplastických kvapalín, upravené podľa [1]



Obrázok 11: Reogram viskoplastických kvapalín, upravené podľa [1]

V reograme takýchto kvapalín sa nachádza nespojitosť. Vysvetlením je, že pri pôsobení napätia opačného smeru látka stále vykazuje počiatkový odpor a rýchlostný gradient je záporný.

Ďalšou zaujímavou vlastnosťou viskoplastických kvapalín je absencia povrchového napätia, čo znamená, že po skončení pôsobenia vonkajších síl povrch takejto kvapaliny nebude pôsobením gravitácie vyrovnaný ale zachová si pôvodný tvar. Vysvetlením je schopnosť takéhoto materiálu odolať vonkajšiemu napätiu menšiemu ako kritická hodnota τ_0^B vo všetkých troch smeroch [1].

Do tejto skupiny patria látky ako napríklad vrtacie kvapaliny, zmesi vody a piesku, margarín, zubná pasta, farby, čerstvý betón [2], kvapaliny z potravinárskeho priemyslu, krv a podobné fyziologické látky [1].

5 Reológia časovo nezávislých Neneutronských kvapalín

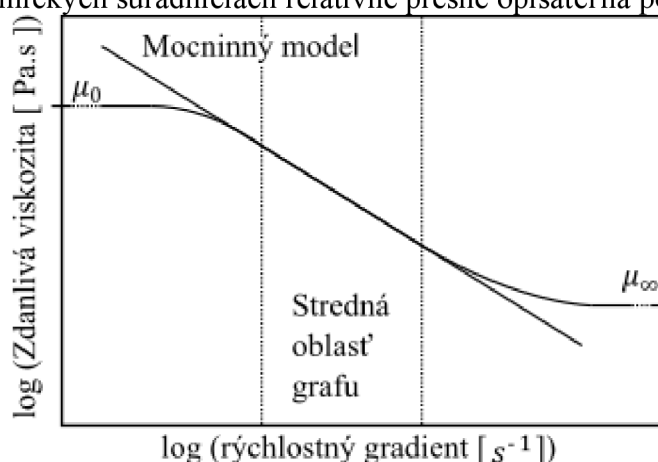
Pojem Reológia bol zavedený začiatkom 20. storočia profesorom Eugenom Binghamom, tento názov vznikol z Gréckeho slova Rheo, ktoré znamená tok. Názov Reológia teda pomenúva vedný odbor zaoberajúci sa teóriou deformácie a toku hmoty. [2]

5.1 Reologické modely používané pre čisto viskózne kvapaliny

Pre látky nevykazujúce počiatkový odpor boli pri snahe matematicky popísať ich správanie vyvinuté nasledujúce modely.

5.1.1 Mocninový model – Ostwald de Waele

Ide o jeden z najčastejšie používaných modelov pre čisto viskózne kvapaliny [1]. Základom tohto modelu je fakt, že v strednej časti (oblasť znázornená na Obrázok 12 12), ktorá je v praxi často najdôležitejšia a najzaujímavejšia [2], je závislosť viskozity a rýchlostného gradientu vykreslená v logaritmických súradniciach relatívne presne opísateľná pomocou priamky [1].



Obrázok 12: Aproximácia viskozity pomocou mocninového modelu, upravené podľa [1]

Tento model ponúka rýchle analytické riešenie, s dostatočným odhadom vplyvu zmeny viskozity. Nevýhodou je obmedzenie použitia iba na určité rozmedzie rýchlostného gradientu. Nedokáže popisovať správanie pri jeho veľmi nízkych a vysokých hodnotách, kde je pozorovateľné značné odchylenie priamky znázorňujúcej tento model od experimentálne nameraných dát. Taktiež nedokáže predpovedať hodnoty nulovej a nekonečnej viskozity (jedná sa o limitné hodnoty, medzi ktorými sa viskozita pohybuje, spomenuté v kapitole 4.1.1). [1]

$$\tau_{yx} = m(\dot{\gamma}_{yx})^n \quad (5.1.1)$$

$$\eta = \frac{\tau_{yx}}{\dot{\gamma}_{yx}} = m(\dot{\gamma}_{yx})^{n-1} \quad (5.1.2)$$

m – koeficient konzistencie kvapaliny [$Pa \cdot s^n$]

n – index správania toku [-]

Na základe hodnoty n možno predpokladať:

$n = 1$ – kvapalina vykazuje newtonovské chovanie.

$0 < n < 1$ – kvapalina vykazuje pseudoplastické chovanie a obecné platí, že čím je hodnota n nižšia, tým sú jej pseudoplastické (viskozita kvapaliny klesá) vlastnosti znateľnejšie.

$n > 1$ – kvapalina vykazuje dilatantné chovanie a platí, že čím vyššia hodnota n tým sú jej dilatantné (viskozita kvapaliny rastie) vlastnosti znateľnejšie.

Hodnota parametrov m a n sa mení v závislosti na teplote. S rastúcou teplotou parameter m výrazne klesá a parameter n rastie. Ich závislosť na teplote je popísaná rovnicami [4]:

$$m = m_0 \exp\left(-A \frac{t - t_0}{t_0}\right) \quad (5.1.3)$$

$$n = n_0 + B \frac{t - t_0}{t_0} \quad (5.1.4)$$

n_0, m_0, A, B sú parametre pri referenčnej hodnote teploty t_0 a parameter B je často natoľko malý, že hodnota indexu správania toku je prakticky konštantná aj pri rôznych teplotách [4].

Hodnotu parametru m je možné vnímať ako hodnotu zdanlivej viskozity na jednotku času, jej hodnota je tiež závislá na parametri n , a preto nemožno porovnávať parameter m kvapalín pri rozdielnych hodnotách parametru n [1].

5.1.2 Carreau-Yasuda model

V kapitole 5.1.1 boli spomenuté oblasti, kedy odchýlka mocninového modelu od reality je naozaj značná. Pre tieto oblasti je vhodnejšie použiť Carreau-Yasuda model. Ten na rozdiel od mocninového modelu pracuje s limitnými hodnotami nulovej a nekonečnej viskozity a výstupné dáta budú realite odpovedať omnoho viac [1]. Tento model je schopný popísať veľké množstvo experimentálnych kriviek látok vykazujúcich pseudoplastické chovanie a je často používaný v numerických simuláciách, pri ktorých je požadované analytické vyjadrenie pre krivku Neneutronovskej viskozity [4].

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \cdot \left[1 + (m\dot{\gamma}_{yx})^{a_Y}\right]^{\frac{(n-1)}{a_Y}} \quad (5.1.5)$$

a_Y – Yasudov parameter [-]

μ_∞ – hodnota nekonečnej viskozity [$Pa \cdot s$]

μ_0 – hodnota nulovej viskozity [$Pa \cdot s$]

$n < 1$ – predpoklad pseudoplastického chovania

V prípade, že $a_Y = 2$, $\mu_0 = \mu$ a $n = 1$ alebo $m = 0$ alebo aj súčasne, tak tento model predpovedá Newtonovské správanie [1].

Pre veľkú časť koncentrovaných polymérnych zmesí je priamka vhodne prispôsobená práve keď $a_Y = 2$ a $\mu_\infty = 0$. V prípade keď je parameter $a_Y = 2$, tak sa tento model nazýva Carreauova rovnica, keďže tento parameter zaviedol až neskôr Yasuda [4].

5.1.3 Ellis model

Model zodpovedajúci pseudoplastickému chovaniu, jeho použitie je najvýhodnejšie práve v prípade veľkej odchýlky mocninového modelu v oblastiach nízkeho rýchlostného gradientu [1].

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{\tau_{yx}}{\tau_{1/2}}\right)^{\alpha_E - 1}} \quad (5.1.6)$$

$\alpha_E > 1$ - parameter charakterizujúci mieru pseudoplastického chovania (viskozita kvapaliny klesá), so zvyšujúcou sa hodnotou sú známky pseudoplastického chovania znateľnejšie.

$\tau_{1/2}$ – hodnota šmykového napätia, pri ktorej hodnota zdanlivej viskozity klesne na polovicu hodnoty nulovej viskozity .

Newtonovské správanie je predpovedané keď sa hodnota $\tau_{1/2}$ limitne blíži k ∞ [1] [1]. Táto rovnica umožňuje jednoduché výpočty rýchlostného profilu pri známom rozložení napätia, no opačný postup je náročný a zdĺhavý.

Parametre Ellisovho a mocninového modelu sú prepojené nasledujúco [4]:

$$m = \mu_0^{\frac{1}{\alpha}} \tau_{1/2}^{1-\frac{1}{\alpha}} \quad (5.1.7)$$

$$n = \frac{1}{\alpha} \quad (5.1.8)$$

5.2 Reologické modely používané pre viskoplastické kvapaliny

Pre zložitejšie sa chovajúce látky, ktoré vykazujú počiatočný odpor pred tečením boli vyvinuté nasledujúce modely, pomocou ktorých je možné charakterizovať ich správanie.

Z charakteru viskoplastických kvapalín plynie, že pri aplikovaní menšieho napätia ako je počiatočný odpor tejto kvapaliny k toku nedôjde. To sa dá vyjadriť aj ako:

$$|\tau_{yx}| < |\tau_0^B| \quad (5.2.1)$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = 0 \quad (5.2.2)$$

Preto pri popise nasledujúcich modelov budeme uvažovať podmienku že aplikované napätie je väčšie ako hodnota počiatočného odporu τ_0^B .

5.2.1 Binghamský model

Najjednoduchší model používaný pre viskoplastické kvapaliny, ktoré sa po prekonaní počiatočného odporu riadia Newtonovým zákonom (ich viskozita je konštantná) [1].

$$|\tau_{yx}| > |\tau_0^B| \quad (5.2.3)$$

$$\tau_{yx} = \tau_0^B + \mu_B(\dot{\gamma}_{yx}) \quad (5.2.4)$$

5.2.2 Herschel-Bulkeyho model

Tento model je kombináciou binghamského a mocninového modelu, hlavným rozdielom oproti binghamskému modelu je, že ho používame pre látky ktorých viskozita sa po prekonaní počiatočného odporu mení nelineárne [1].

$$|\tau_{yx}| > |\tau_0^B| \quad (5.2.5)$$

$$\tau_{yx} = \tau_0^B + m(\dot{\gamma}_{yx})^n \quad (5.2.6)$$

$\tau_0^B = 0$ a $n = 1$ – Newtonovské správanie-

$\tau_0^B > 0$ a $n = 1$ – Binghamské správanie.

$n < 1$ – podmienka pre pseudoplastické správanie.

5.2.3 Cassonov model

Tento model je najčastejšie používaný pri popisovaní chovania biologických materiálov ako napríklad krv, rajčinové pyré, kvapalín z potravinárskeho priemyslu, zmesí olejov, pigmentov a podobných látok [1].

$$|\tau_{yx}| > |\tau_0^B| \quad (5.2.7)$$

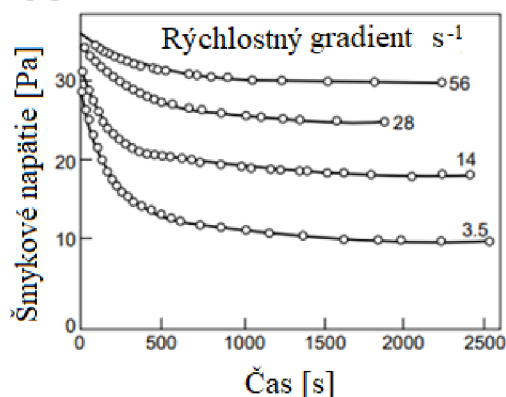
$$(|\tau_{yx}|)^{\frac{1}{2}} = |\tau_0^B|^{\frac{1}{2}} + (\mu_B |\dot{\gamma}_{yx}|)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2.8)$$

6 Časovo závislé Neneutronské kvapaliny

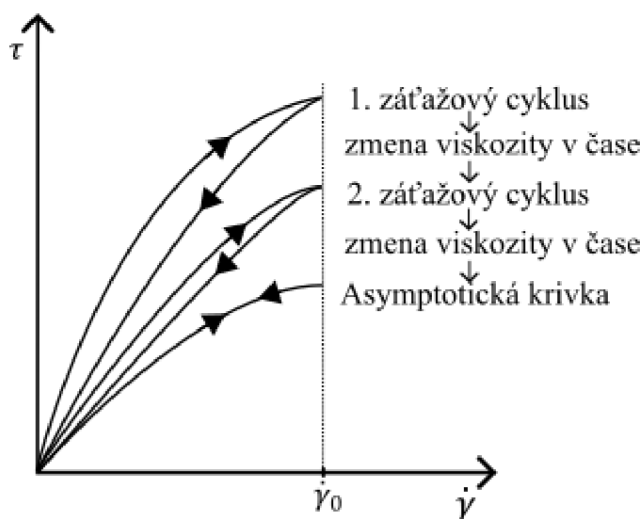
Pomenovanie tejto skupiny vzniklo na základe toho, že pre konštantnú hodnotu rýchlostného gradientu sa hodnota napätia mení v závislosti na čase [1]. Zmenu hodnoty napätia keď vystavíme takúto kvapalinu záťaži a následnému odľahčeniu znázorňuje hysteréza slučka a pri opakovaní takýchto cyklov táto hysteréza slučka mení sklon (zmena viskozity), šírku (rozdiely v zmene šmykového napätia pri danom rýchlostnom gradiente) a následne sa bude chcieť zredukovať na asymptotickú krivku. Zaujímavosťou je taktiež, že pokiaľ takúto kvapalinu necháme dostatočný čas v klude nadobudne pôvodné vlastnosti, aké mala pred zaťažovaním. Modelovanie takéhoto komplexného chovania je veľmi náročné, no veľa látok používaných v priemysle vykazujú práve toto chovanie a je potreba sa ním zaoberať. [2]

6.1 Tixotropné správanie

Pri zaťažovaní látok patriacich do tejto skupiny ich zdanlivá viskozita (alebo príslušné šmykové napätie) v čase klesajú [2]. Dôvodom poklesu viskozity pri zaťažovaní týchto látok je opakované porušovanie vnútornej štruktúry počas vystavenia napätiu. Pri takomto procese sa bude daná látka snažiť svoju štruktúru čoraz rýchlejšie obnovovať až do momentu pokiaľ sa rýchlosť vnútornej obnovy vyrovná rýchlosti ničenia tejto štruktúry, vtedy nastane rovnovážny stav, viskozita a napätie sa prestane meniť v čase [1]. Tento mechanizmus je znázornený na obrázku 14. Patria sem napríklad ropné oleje, zmesi bentonitu a vody, červené kaly, víťacie mazivá a tlačiarenský atrament [2].



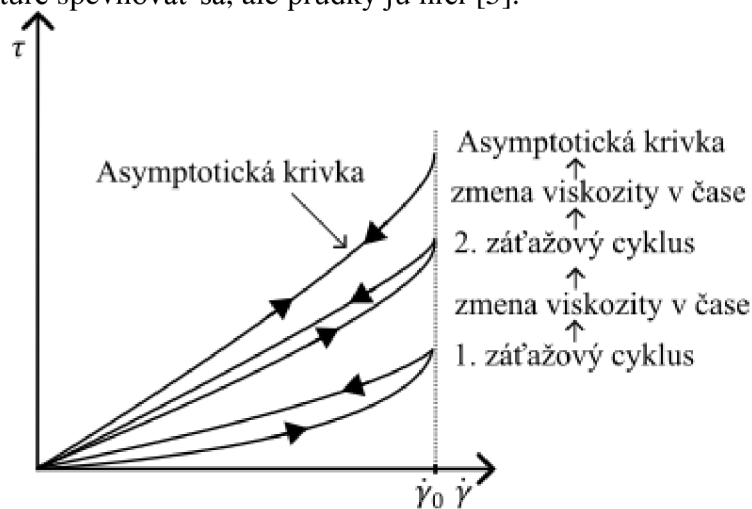
Obrázok 13: Tixotropne vlastnosti suspenzie červeného kalu, upravené podľa [1]



Obrázok 14: Hysterézne slučky tixotropných látok, upravené podľa [2]

6.2 Reopektické správanie

Jedná sa o značne menej početnú skupinu ako pri tixotropnom správani, nazývajú sa taktiež aj negatívne-tixotropné [1] a ich typickou vlastnosťou je nárast viskozity (alebo príslušného šmykového napätia pre daný rýchlostný gradient) pri zaťažovaní [2]. Dôvod tohto mechanizmu je pri reopektických kvapalinách presne opačný ako u tixotropných. Vnútoraná štruktúra sa pri zaťažovaní spevňuje a pri uvedení do pokoju rozpadá. Spevňovanie tejto štruktúry je znázornené na obrázku 15. Príkladom takéhoto chovania je experiment prevedený pánmi Freundlichom a Julisbergerom, ktorý zistili, že 42% roztok vody a sadry umiestnený v nádobe dokáže po zahrkaní a následnom ponechaní v pokoji stuhnúť za 40 minút, avšak v prípade, že roztok budeme iba jemne prevaľovať medzi rukami stuhne už behom 20 sekúnd [1]. Jemný pohyb pomáha štruktúre spevňovať sa, ale prudký ju ničí [5].



Obrázok 15: Histerézne slučky reopektických látok, upravené podľa [2]

7 Modelovanie časovo závislého správania

Modely používané pre časovo nezávislé chovanie sú založené na troch odlišných prístupoch, ktorými sú: kontinuum, mikroštruktúrne zmeny, štruktúrna kinematika. [5]

V prípade kontinuálneho prístupu sa používajú už známe konštitutívne rovnice akými sú napríklad Binghamský alebo Herschel-Bulkeyho model, ktoré sú upravené tak, že viskozita, napätie a ostatné veličiny sú funkciou času. Prepojenie fyzikálnych procesov zodpovedných za zmeny v štruktúre však nie je úplne jednoduché.

Modely založené na mikroštruktúrnych zmenách vyžadujú veľmi podrobné znalosti o silách pôsobiacich medzi časticami a tieto informácie sú pre reálne systémy v inžinierskych aplikáciách málokedy dostupné, čím je použitie tohto prístupu značne limitované.

Prístup založený na štruktúrnej kinetike pracuje so skalárnym parametrom ξ , $\xi \in (0,1)$ Hodnota tohto parametru je 0 pri úplne zničenej štruktúre, a 1 pri úplnom obnovení. Takýto model pracuje s dvomi rovnicami. Jedna prepája šmykové napätie s rýchlostným gradientom pre konštantnú hodnotu ξ a druhá popisuje zmenu tohto parametru v závislosti na čase. [5]

7.1 Houskov model

$$\tau_{yx} = (\tau_{yP} + \tau_{y1}) + (m_P + \xi m_1) \dot{\gamma}_{yx}^n \quad (7.1.1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = a(1 - \xi) - b\xi \dot{\gamma}_{yx}^e \quad (7.1.2)$$

τ_{yP} – permanentný počiatkový odpor

m_0 – permanentný koeficient konzistencie

τ_{y1}, m_1 – príspevky od časovo závislého chovania, ktoré sú lineárne závislé na aktuálnom stave štruktúry

a, b, n – kinetické parametre pre danú kvapalinu

Rovnica (7.1.1) je platná pre konštantnú hodnotu parametru ξ a druhá rovnica vyjadrujúca zmenu tohto parametru v závislosti na čase je akýmsi vyjadrením dynamickej rovnováhy medzi tempom akým sa štruktúra rozpadá a obnovuje. Prvý člen na pravej strane znázorňuje obnovu (závisí iba na počte štruktúrnych jednotiek ktoré sú dostupné v daný čas) a druhý člen rozpad (závisí ako na ξ tak aj na $\dot{\gamma}_{yx}$). [5]

V prípade, že chceme nadobudnúť kinetické koeficienty, tak treba vykonať merania cez celý rozsah podmienok, ktoré nás zaujímajú. Pri meraní závislosti šmykového napätia a rýchlostného gradientu je potrebné použiť kvapalinu s rovnakou kinematickou históriou, akú bude mať kvapalina na ktorú model chceme následne aplikovať. [5]

8 Viskoelastické kvapaliny

Kvapalina vystavená šmykovému napětíu teče a akonáhle je napätie odstránené, dôjde k postupnému zastaveniu tohto toku. Chovanie takejto kvapaliny s konštantou viskozitou reprezentuje Newtonov zákon popísaný rovnicou (4.1.1) [5].

Ideálne elastické teleso vystavené napätíu sa elasticky zdeformuje a po odľahčení napätia nadobudne svoj pôvodný tvar. Správanie takéhoto telesa popisuje Hookov zákon. [5]:

$$\tau = G \left(-\frac{dx}{dy} \right)$$

G – Youngov modul v šmyku

Keď je nedeformovaný materiál vystavený napätíu tak na základe veľkosti napätia bude deformácia buď elastická alebo elasticko-plastická. Elastická zložka deformácie zmizne po odľahčení napätia, ale plastická zložka je trvalá [2].

Keď je materiál zaťažovaný konštantným napätím, jeho deformácia môže pokračovať, nekonečne - pokiaľ je to kvapalina alebo asymptoticky k určitej konfigurácii - pokiaľ je to tuhé teleso. Tento fenomén je nazývaný Creep. Keď je materiál zdeformovaný a v tomto stave zafixovaný, napätie je konštantné v prípade, že sa materiál chová elasticky, alebo napätie klesá postupne s časom, smerom k izotropickému stavu – v prípade ak je materiál kvapalnej povahy alebo k anizotropickému stavu ak je materiál tuhej povahy. Tento proces sa nazýva relaxácia napätia. Creep a relaxácia napätia sú spolu kombináciou elastickej a viskózne reakcie materiálu na napätie a tento dej je možné označiť jednotným názvom viskoelastický fenomén. Materiál vykazujúci toto chovanie sa nazýva viskoelastický a v prípade, že je dynamicky zaťažovaný sú tieto vlastnosti zodpovedné za uchovávanie a disipáciu energie [2].

Mnoho materiálov akými sú polyméry, taveniny, látky z potravinárskeho priemyslu a biologických odvetví vykazuje viskoelastické chovanie [5].

Elastickou reakciou je aj šírenie zvuku vo vzduchu či v kvapalinách. To je príkladom toho, že kvapaliny a plyny sú všeobecne viskózne aj elastické, a že ich odozva je viskoelastická [2].

Väčšina tuhých materiálov je pri normálnych teplotách považovaná za elastické, ale pri použití za vyšších teplôt, po prekročení kritickej teploty dochádza k zmene charakteru týchto materiálov a reagujú viskoelasticky. Pre najčastejšie používané konštrukčné oceli je kritická hodnota tejto teploty približne $t_c = 400^\circ\text{C}$ [2].

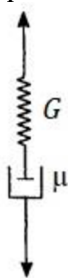
$$t_{\text{Materiálu}} > t_c \rightarrow \text{viskoelastická odozva}$$

9 Matematické modely popisující viskoelastické chování

Pri deformácii viskoelastického materiálu je možné pozorovať jeho tekuté a pevné vlastnosti. Pre simuláciu elastického charakteru je používaná pružina o tuhosti G a pre viskózný charakter tlmič naplnený kvapalinou s viskozitou μ . Z dôvodu snahy popísať rôzne sa chovajúce viskoelastické materiály vznikli mnohé modely kombinujúce tieto prvky [2].

9.1 Maxwellov model

Tento model popisuje kvapalinu pomocou sériovej kombinácie pružiny a tlmiča. Schematické znázornenie sériového radenia týchto prvkov je znázornené na obrázku 16. Takáto sústava sa používa na modelovanie relaxácie napätia a je popísaná rovnicami [2]:



Obrázok 16: Grafické zobrazenie Maxwellovho modelu [1]

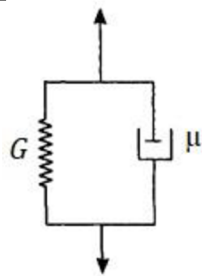
$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} \quad (9.1.1)$$

Celková deformácia bude súčtom deformácie tlmiča a pružiny.

$$\tau_{yx} + \frac{\mu}{G} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} = \mu \dot{\gamma}_{yx} \quad (9.1.2)$$

9.2 Kelvin-Voightov model

Ide o paralelnú kombináciu pružiny a tlmiča, takúto sústavu reprezentuje obrázok 17. Používa sa na modelovanie creepu a je popísaná rovnicami [2]:



Obrázok 17: Grafické zobrazenie Kelvin-Voightovho modelu [1]

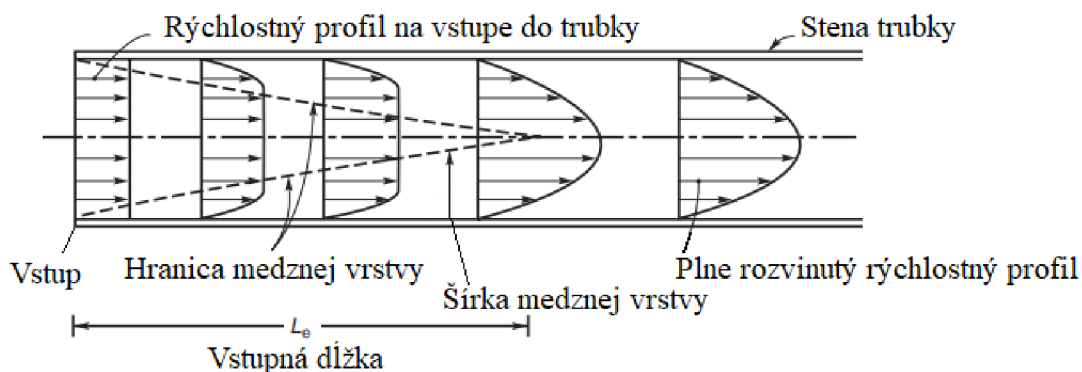
$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 \quad (9.2.1)$$

Tlmič aj pružina sa zdeformujú rovnako.

$$\tau_{yx} = G\gamma_{yx} + \mu\dot{\gamma}_{yx} \quad (9.2.2)$$

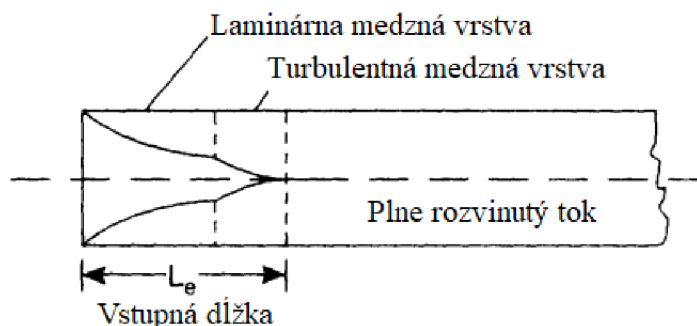
10 Prúdenie kvapalín

Kvapalina vytekajúca z veľkej nádrže, prúdiaca jednotnou rýchlosťou je pri vstupe do trubky, ako je znázornené na obrázku 18, vo vrstve nachádzajúcej sa bezprostredne pri stene trubky spomaľovaná a z dôvodu, že sa objemový tok nemení je kvapalina nachádzajúca sa pri osi trubky zrýchľovaná. Vzniká medzná vrstva, ktorej veľkosť sa spoločne so vzdialenosťou od počiatku trubky zväčšuje až do momentu kedy jej hrúbka je rovná polomeru trubky, pri dosiahnutí tohto štádia hovoríme o plne rozvinutom toku kvapaliny, keďže rýchlostný profil kvapaliny sa následne už nemení. [5]



Obrázok 18: Vznik medznej vrstvy pri vstupe do trubky [6]

Po nadobudnutí kritickej rýchlosti v priereze začne kvapalina víriť, nastane prechod do turbulentného režimu a priebeh akým sa medzná vrstva tvorí zmení tvar.



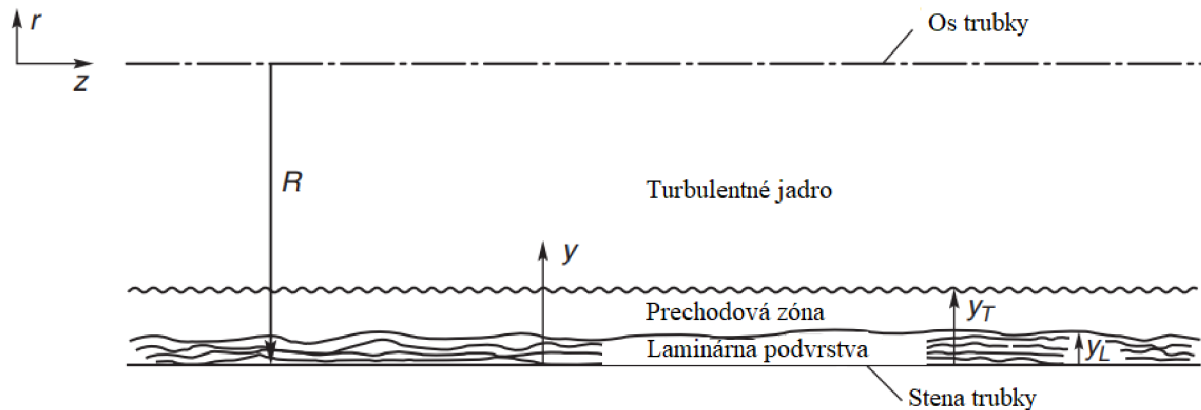
Obrázok 19: Prechod z laminárnej do turbulentnej medznej vrstvy [5]

Prúdenie kvapalín je teda možné na základe jeho charakteru rozdeliť na dva režimy:

- Laminárne prúdenie – menej stabilné, prúdnice sú rovnobežné s osu trubky, tok je plynulý a usporiadaný, kvapalina sa nepremiešava
- Turbulentné prúdenie – orientácia prúdnic je náhodná, dochádza k víreniu a premiešavaniu kvapaliny v rôznych smeroch a fluktuáciám rýchlosti

10.1 Medzná vrstva rychlostního profilu PL kvapalín v turbulentním režime

Šmykové napětí v kvapaline je zodpovědné za vznik trecej síly na stene trubky, čo následne ovplyvňuje tvar rychlostního profilu tejto kvapaliny. Podobne ako u newtonovských kvapalín je oblasť ich toku rozdelená do troch základných vrstiev znázornených na obrázku 20 [1].



Obrázok 20: Znázornenie vrstiev pri turbulentnom prúdení [6]

10.1.1 Laminárna podvrstva

Ide o vrstvu nachádzajúcu sa najbližšie k stene trubky, v ktorej sú turbulentné efekty natoľko malé, že sa považujú za zanedbateľné. V prípade uvažovania sklzu je kvapalina ktorá sa nachádza priamo v kontakte s trubkou v pokoji. Táto podvrstva je pre neneutronské kvapaliny väčšinou hrubšia ako je tomu u newtonovských. [1]

Rýchlosť vrstvy neďaleko od povrchu je veľmi malá, takže aj zmeny hybnosti sú veľmi malé a dôsledkom je, že šmyková sila pôsobiaca na element kvapaliny v tejto vrstve je natoľko malá, až je možné ju zanedbať. Sila pôsobiaca na povrchu trubky (proti smeru toku) je vyrovnávaná zrýchľujúcou silou opačného smeru na vrchnej hranici, takže hodnota šmykového napätia v tejto vrstve je konštantná, a teda aj rýchlostný gradient je konštantný (zmena rýchlosti v laminárnej podvrstve je lineárna). [1]

10.1.2 Prechodová zóna

Dochádza tu k postupnej zmene charakteru prúdenia z usporiadaného laminárneho na chaotické turbulentné

10.1.3 Turbulentné jadro

Turbulentným jadrom je nazývaná oblasť nachádzajúca sa v okolí osi trubky a jedná sa o najväčšiu zo spomínaných oblastí. Charakteristickou vlastnosťou je, že k odovzdávaniu hybnosti dochádza iba pomocou náhodne vznikajúcich vírov a viskózne efekty sú tu zanedbané. [1]

10.2 Podobnostné čísla charakterizujúce prúdenie

V mechanike tekutín sa pre účel charakterizovania sústav tekutín zaviedlo mnoho, často bezrozmerných čísel, ktoré vypovedajú o určitých kvalitách či vlastnostiach. V nasledujúcich podkapitolách budú rozobrané práve, tie najdôležitejšie a najčastejšie používané z nich.

10.2.1 Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo možno chápať ako bezrozmernú hodnotu, vyjadrujúcu pomernú závislosť zotrvačných a viskózných síl v danej sústave. Na základe hodnoty tohto čísla možno taktiež porovnávať rozdielne konfigurácie prúdenia (rozdielne priemery potrubia, prietoky aj kvapaliny). Pokiaľ dva takéto systémy zdieľajú spoločnú hodnotu Reynoldsovho čísla, budú sa chovať dynamicky totožne. [1]

Pre newtonovské kvapaliny je výpočet hodnoty Reynoldsovho čísla vďaka ich konštantnej viskozite pomerne jednoduchý a definuje ho nasledujúca rovnica [1]:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (10.2.1)$$

Dôležitá je najmä jeho hraničná hodnota, na základe ktorej posudzujeme či ustálené prúdenie patrí do laminárnej alebo turbulentnej oblasti. Prechod z laminárnej do turbulentnej oblasti zmení charakter prúdenia z plynulého a usporiadaného na chaotické a to má za následok zmenu závislosti medzi energetickými stratami a strednou rýchlosťou. Pre newtonovské kvapaliny je za hraničnú hodnotu prechodu z laminárneho do turbulentného režimu považovaná hodnota $\text{Re}_{\text{Kritická}} = 2100$. Pre neneutronovské kvapaliny je táto hodnota závislá na viacerých faktoroch a táto téma bude viac rozobratá v nasledujúcich kapitolách. [5]

10.2.2 Binghamské číslo

V literatúre sa taktiež používa aj bezrozmerné Binghamské číslo vyjadrujúce pomer počiatočného napätia k viskóznemu napätiu, definované ako [5]:

$$\text{Bi} = \frac{\tau_0^B D}{\mu_B v} \quad (10.2.2)$$

10.2.3 Hedströmovo číslo

Ide o bezrozmerné číslo, ktoré vyjadruje pomer zotrvačných a viskózných síl definované nasledovným spôsobom [5]:

$$\text{He} = \frac{\rho D^2 \tau_0^B}{\mu_B^2} \quad (10.2.3)$$

A všeobecne platí, že [5]:

$$\text{He} = \text{Re}_B \text{Bi} = \frac{\rho v D}{\mu_B} \cdot \frac{\tau_0^B D}{\mu_B v} = \frac{\rho D^2 \tau_0^B}{\mu_B^2} \quad (10.2.4)$$

10.3 Trecí faktor

Trecí faktor je používaný na predikciu poklesu tlaku v kvapaline spôsobeného trením. Výhodou jeho použitia je, že jedna krivka, pre určitú relatívnu drsnosť potrubia odpovedá všetkým newtonovským kvapalinám prúdiacim v trubkách rôznych rozmerov a rôznymi rýchlosťami. Je definovaný ako pomer šmykového napätia pri stene trubky a dynamického tlaku v kvapaline. [5]

V súčasnosti sa v praxi a literatúre používajú rôzne zavedené trecie faktory ako napríklad Darcyho (Moodyho) trecí faktor:

$$f' = \frac{8\tau_s}{\rho v^2} \quad (10.3.1)$$

Alebo Fanningov trecí faktor:

$$f = \frac{2\tau_s}{\rho v^2} \quad (10.3.2)$$

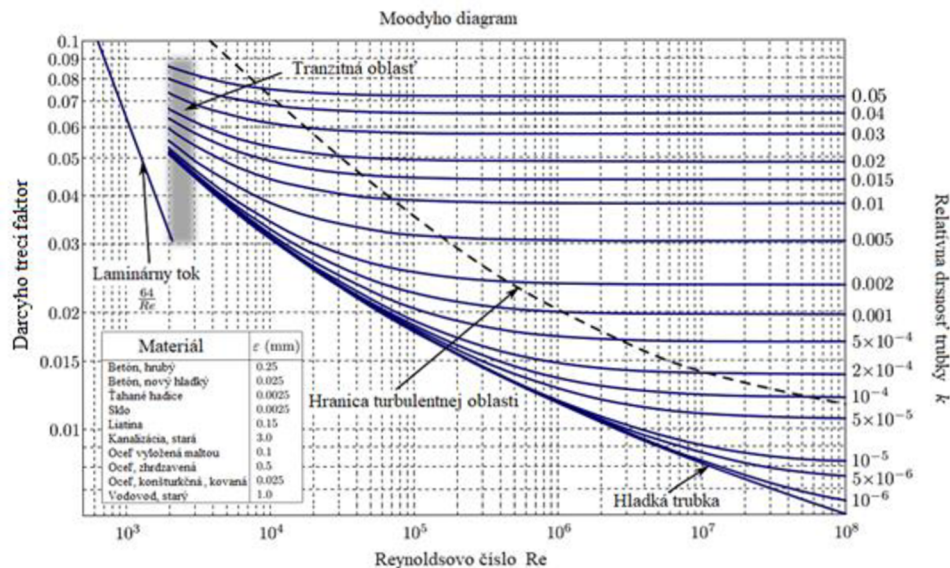
V nasledujúcom diagrame je trecí faktor vykreslený ako funkcia Reynoldsovo čísla a relatívnej drsnosti trubky, ktorá je definovaná ako [15]:

$$k = \frac{\varepsilon}{d} \quad (10.3.3)$$

k – Relatívna drsnosť [-]

ε – Absolútna drsnosť vnútra trubky [m]

d – Priemer trubky [m]



Obrázok 21: Moodyho diagram [16]

Na vyššie uvedenom Moodyho diagrame možno pozorovať tri hlavné oblasti:

- Oblasť Laminárneho prúdenia: ($Re < 2000$), v tejto oblasti je trecí faktor nezávislý na relatívnej drsnosti vnútra trubky a závisí iba na hodnote Reynoldsovo čísla, jeho hodnotu určuje laminárna toková krivka, ktorej predpis závisí na zvolenom druhu trecieho faktoru.

V závislosti na zvolenom druhu trecieho faktoru je táto krivka popísaná v prípade použitia Fanningovho trecieho faktoru ako:

$$f = \frac{16}{Re} \quad 10.3.4$$

Alebo v prípade použitia Darcyho (Moodyho) trecieho faktoru ako:

$$f' = \frac{64}{Re} \quad 10.3.5$$

- Tranzitná oblasť medzi laminárnym a turbulentným prúdením: ($2000 < Re < 3000$), trecí faktor je závislý ako na hodnote Reynoldsovo čísla, tak aj na relatívnej drsnosti vnútra trubky
- Turbulentná oblasť prúdenia: ($3000 < Re$), trecí faktor je závislý ako na hodnote Reynoldsovo čísla, tak aj na relatívnej drsnosti vnútra trubky. Avšak pri veľmi vysokých hodnotách Reynoldsovo čísla a vysokej drsnosti trubiek sa trecí faktor stáva nezávislým na jeho hodnote Reynoldsovo čísla a závisí iba na relatívnej drsnosti povrchu

Třetí faktor Neneutronových kvapalín v turbulentnom režime bude podrobnejšie popísaný v kapitole 14.2.

10.4 Energetické straty v potrubných systémoch

V každom systéme obsahujúcom prúdiacu kvapalinu dochádza k energetickým stratám a tie sa na základe dôvodu ich vzniku delia na:

- Dĺžkové straty - sú spôsobené vplyvom trenia v potrubí a sú definované ako:

$$Y_{ZD} = \zeta_D \frac{v_i^2}{2} = f' \frac{L}{D} \frac{v_i^2}{2} = \frac{64 L}{Re D} \frac{v_i^2}{2} \quad 10.4.1$$

Kde ζ_D je stratový súčiniteľ dĺžkových strát, ktorého výpočet je nasledovný:

$$\zeta_D = f' \frac{L}{D} \quad 10.4.2$$

- Miestne straty - sú dôsledkom vírenia kvapaliny v prvkoch, ktoré spojujú rovné úseky potrubia. Spravidla sa jedná o komponenty ako: difúzor, konfúzor, kolená, rozvetvenia (T spojky), ventily. Definícia miestnych strát je nasledovná:

$$Y_{ZM} = \zeta_M \frac{v_i^2}{2} \quad 10.4.3$$

Kde ζ_M je stratový súčiniteľ miestnych strát, určený experimentálnym spôsobom pre danú komponentu.

Celkové straty v potrubnom systéme sú určené ako súčet jednotlivých miestnych a dĺžkových strát.

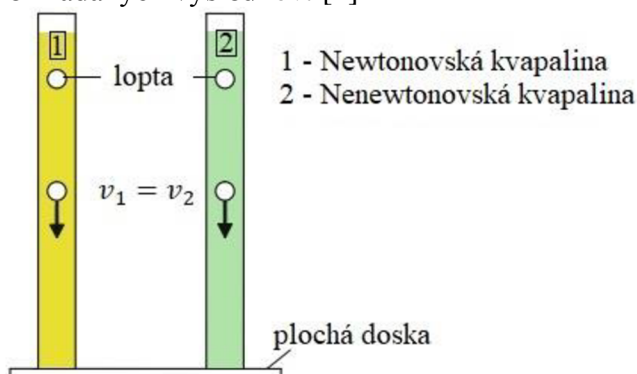
$$Y_Z = \sum \zeta_i \frac{v_i^2}{2} \quad 10.4.4$$

11 Javy vznikajúce pri toku Neneutronových kvapalín

11.1 Pseudoplastický efekt pri výtoku z trubky

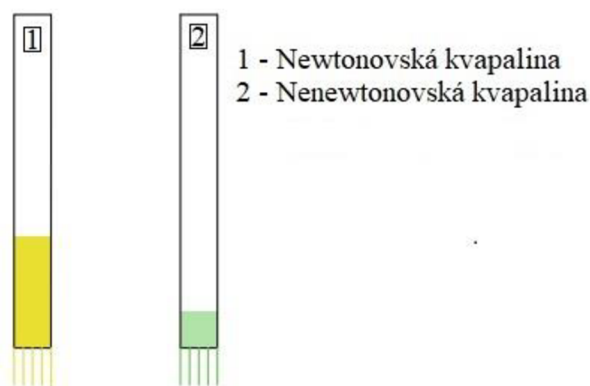
Pre znázornenie tohto javu budeme potrebovať dve identické rúry, ktoré vertikálne postavíme na plochú dosku umiestenú v rovine, ich vrchnú časť neprekrývame. Jednu naplníme newtonovskou kvapalinou a druhú neneutronovou (pseudoplastickou).

Keďže porovnávanie dvoch úplne odlišne viskózných kvapalín by nepreukázalo nami hľadaný rozdiel vo výtoku, je dôležité aby mali kvapaliny podobnú hustotu a viskozitu pri nízkych hodnotách rýchlostného gradientu. Pre tento experiment je možné použiť roztok glycerínu a vody, oboje pre newtonovskú a neneutronovskú kvapalinu. Hlavným rozdielom je, že do neneutronovskej pridáme iné množstvo glycerínu. Toto množstvo je postupne upravované tak, aby pri jednoduchom teste, keď do kvapalín cez vrchný otvor vhodíme loptu [2], ktorej hustota je značne väčšia ako hustoty kvapalín (to nám umožní zanedbať malé rozdiely v hustotách kvapalín [4]) bola rýchlosť akou budú loptičky padať na dno v oboch rúrach rovnaká. Takýto test zaručuje rovnakú viskozitu oboch kvapalín, potrebnú pre vykonanie experimentu a dosiahnutie hľadaných výsledkov. [2]



Obrázok 22: Test s loptou pre porovnanie viskozít kvapalín, upravené podľa [2]

Pre vykonanie experimentu stačí už len odstrániť dosku zo spodnej časti a kvapaliny začnú súčasne vytekať.



Obrázok 23: Prevedenie experimentu, upravené podľa [2]

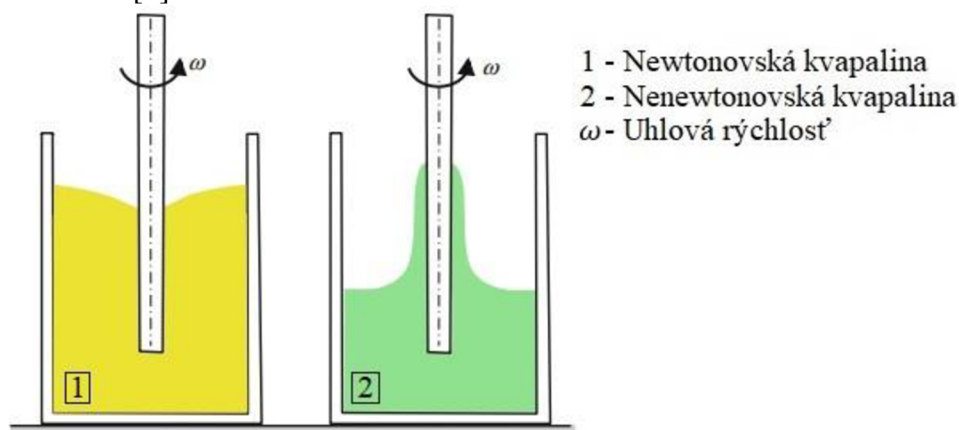
Neneutronovská kvapalina bude vďaka svojim pseudoplastickým vlastnostiam (zdanlivá viskozita klesá) vytekať rýchlejšie. V oblastiach vysokých hodnôt rýchlostného gradientu, ktoré sa po odstránení spodnej dosky rozvinú pri stenách rúry, sa zdanlivá viskozita neneutronovskej kvapaliny na rozdiel od konštantnej hodnoty, ktorú má newtonovská kvapalina, znateľne zmenší a šmykové napätie od steny, ktoré pôsobí proti smeru gravitačnej sily, je taktiež menšie, čo umožňuje vytekajúcej kvapaline dosiahnuť vyšších výtokových rýchlostí. [2]

11.2 Weissenbergov efekt – vztlínanie kvapaliny po točiacej sa tyči

Tento jav možno pozorovať pri otáčaní vertikálne umiestnenej tyče, ponorenej v kvapaline, ktorá sa točí konštantnou uhlovou rýchlosťou. Vľavo, na obrázku 24 je kruhová nádoba naplnená newtonovskou kvapalinou. Kvapalina v takejto nádobe je v kontakte ako s povrchom tyče tak s povrchom nádoby a po roztočení tyče začne kvapalina tento pohyb nasledovať. V dôsledku odstredivej sily je kvapalina hnaná viac ku krajom nádoby a hladina v okolí tyče poklesne. [2]

Napravo je nádoba naplnená Neneutronovskou kvapalinou, ktorá po roztočení tyče začne pomaly po jej povrchu šplhať smerom nahor, až kým nebude dosiahnutý rovnovážny stav [2]. Čím sa bude tyč rýchlejšie otáčať tým vyššie kvapalina dosiahne [4]. Vysvetlením tohto javu je vznik ťahového napätia v obvodovom smere (natiehnutie molekulových reťazcov), ktoré je dôsledkom šmykového napätia pôsobiaceho v kvapaline. Tieto ťahové napätia pôsobia proti smeru odstredivej sily a tlačia kvapalinu smerom k stredu otáčania, teda k tyči a smerom hore po jej povrchu. [2]

Podobný experiment je možné vykonať aj bez tyče, avšak museli by sme otáčať celou podstavou nádoby [4]. V praxi sa tento jav vyskytuje často napríklad pri miešaní potravinárskeho cesta [2].



Obrázok 24: Weissenbergov efekt, upravené podľa [2]

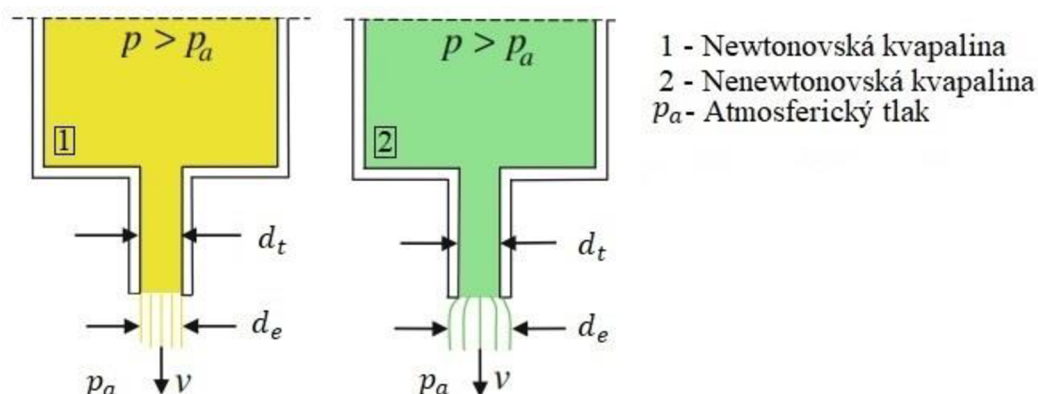
11.3 Rozšírenie toku na východe z dýzy

Pri výtoku úzkou dýzou konštantného priemeru z veľkej nádrže do atmosféry možno pozorovať ďalšiu odlišnosť.

Pokiaľ z nádrže vyteká neneutronovská kvapalina, ktorou je polymérna kvapalina tak sa prúd vytekajúcej kvapaliny po opustení trysky viditeľne rozšíri. Obecne platí, že čím je dĺžka trubice väčšia, tým je pomer d_t/d_e menší. V prípade vytekania newtonovskej kvapaliny je zväčša šírka prúdu konštantná, no sú známe aj prípady keď pri vysokých hodnotách Reynoldsovho čísla sa prúd dokonca zúži [2].

Príčin tohto javu je viac a za hlavné dôvody sú považované: doplnkové napätie vznikajúce v smere prúdnice, spôsobené natáňovaním molekúl kvapaliny a nasledovne vysvetlený mechanizmus.

Neneutronovská kvapalina bola v nádrži elasticky stlačená v radiálnom smere a keď začala tiecť užšou trubicou tak toto stlačenie sa premenilo na rozťahnutie objemu v smere toku (axiálny smer). Následne po opustení trubky sa kvapalina naspať stiahla v axiálnom smere a rozťahla do radiálneho smeru [4]. Inými slovami možno povedať, že elementárny prvok tejto kvapaliny si pamätá svoju deformačnú históriu a s časom, ktorý od daného stavu ubehol táto pamäť slabne (preto pomer rozšírenia po opustení trubky s jej dĺžkou klesá). Túto vlastnosť nazývame miznúca pamäť [2].



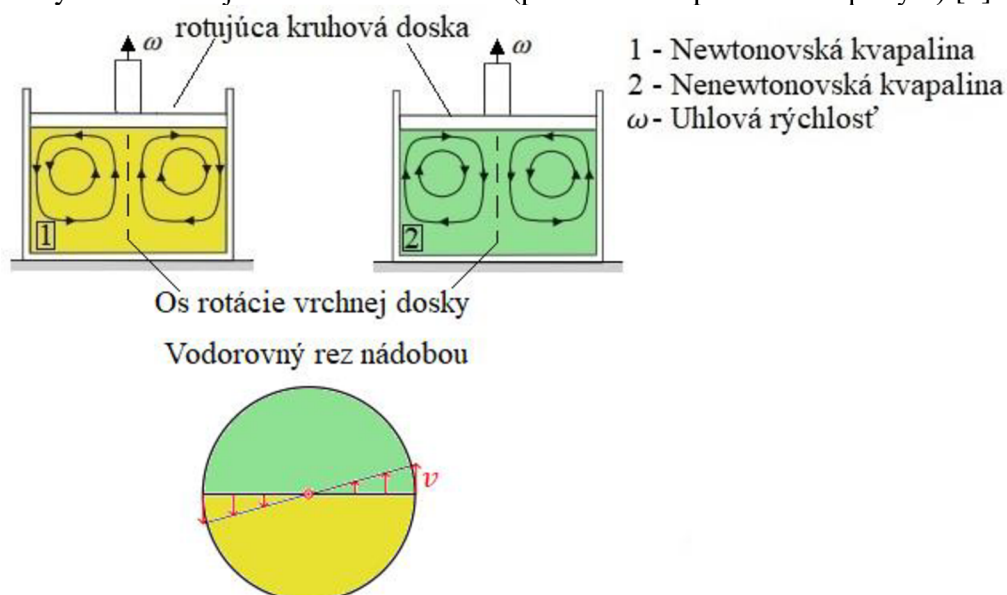
Obrázok 25: Výtok tryskou z nádrže do atmosféry, upravené podľa [2]

11.4 Sekundárny tok v systéme kruhová nádoba-kruhová doska

V prípade kruhovej nádoby naplnenej kvapalinou, ktorej vrch je uzavretý kruhovou doskou, otáčajúcou sa konštantnou uhlovou rýchlosťou možno okrem primárneho toku (kvapalina sa točí okolo osi otáčania vrchnej dosky) pozorovať aj vznik sekundárneho toku (kvapalina sa premiešava do hĺbky) [2]. Rýchlosť sekundárneho toku dosahuje zhruba iba 10% rýchlosti toho primárneho. Vrstvy kvapaliny bližšie ku vrchnej doske sa pohybujú vyššou uhlovou rýchlosťou ako tie na spodku [4] a vplyv odstredivej sily postupne so zvyšujúcou sa vzdialenosťou od povrchu klesá [2].

Pokiaľ je nádoba plná Newtonovskej kvapaliny tieto odstredivé sily budú smerovať ku stenám nádoby.

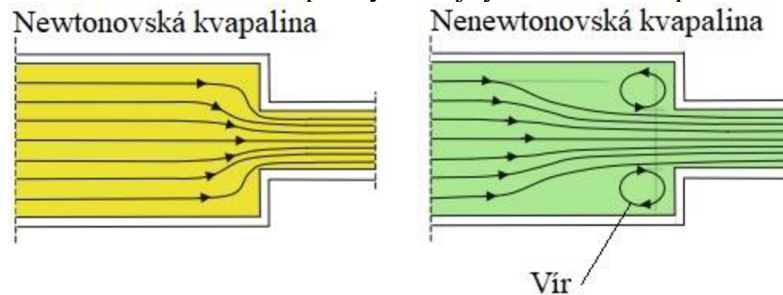
V opačnom prípade, keď je kvapalina neneutronovská (polymérna kvapalina ako napríklad polyakrylamid rozpustený v glycerole a vode [4]) bude tangenciálne ťahové napätie, ktoré vzniklo ako dôsledok primárneho toku pôsobiť proti smeru odstredivej sily a vťahovať kvapalinu k osi okolo ktorej sa vrchná doska točí (podobne ako pri vzlínaní po tyči) [2].



Obrázok 26: Zobrazenie sekundárneho toku, upravené podľa [2]

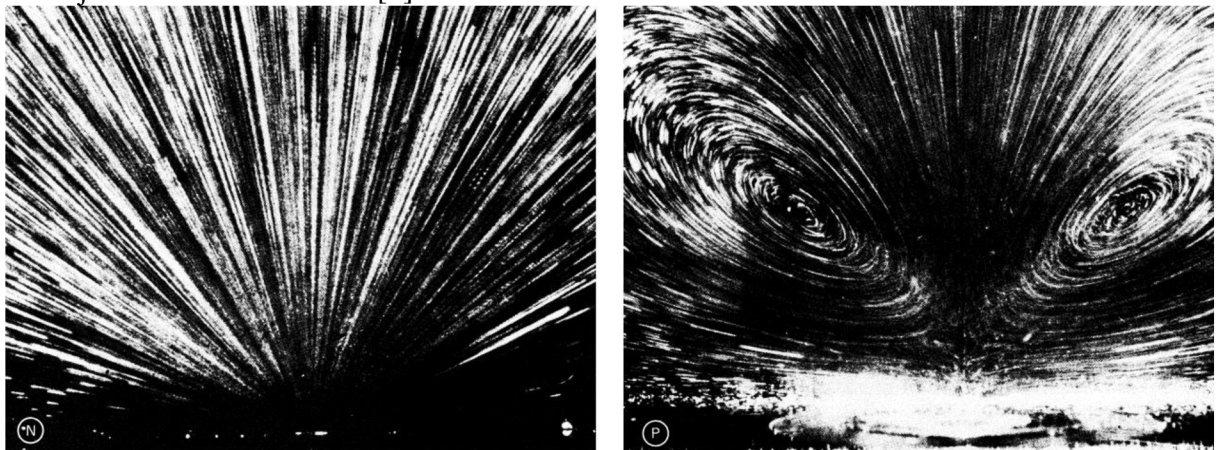
11.5 Tok kvapaliny cez zúženie

Keď prúdi neneutronská (viskoplastická) kvapalina v trubke, tak pri veľmi nízkych hodnotách Reynoldsovo čísla vznikajú pri prechode do zúženej časti nežiadúce víry, ktoré majú za následok otočenie smeru toku kvapaliny v krajných oblastiach pred zúžením [2].



Obrázok 27: Tok kvapaliny cez zúženie, upravené podľa [2]

Nasledujúci experiment s glycerínom a polymérnou látkou ukazuje, že glycerín do takéhoto zúženia smeruje aj z oblasti pod uhlom 90° , zatiaľ čo polymérna látka je schopná do zúženia smerovať iba z malej kónickej oblasti okolo osi prúdenia a veľké množstvo je uväznené v re-cirkulujúcich víroch v rohoch [2].



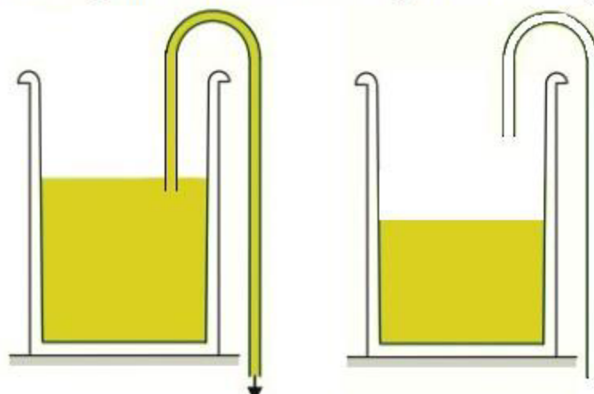
Obrázok 28: Prúdenie cez náhle zúženie [3]

Zóny, kde kvapalina re-cirkuluje sú v zariadeniach na spracovávanie polymérov nežiadúce, a preto je dôležité vznik týchto miest predpokladať a snažiť sa zamedziť vzniku podobných vírov [4].

11.6 Násoska

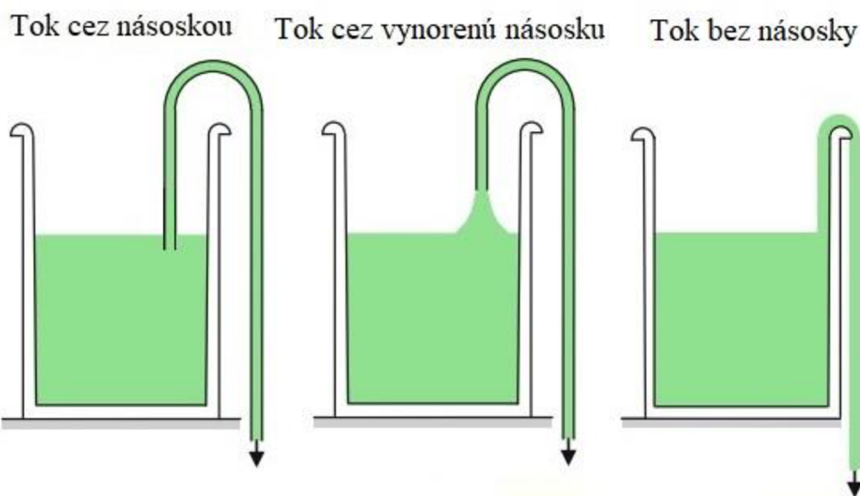
Pri prečerpávaní newtonovskej kvapaliny z nádoby cez násosku kvapalina vyteká, pokiaľ bude vstupný otvor násosky ponorený v nádobe [2].

Tok cez ponorenú násosku Po vynorení násosky



Obrázok 29: Prečerpávanie Newtonovskej kvapaliny pomocou násosky, upravené podľa [2]

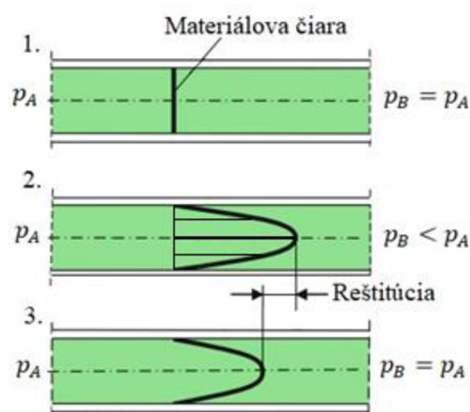
Pri prečerpávaní viskoelastickej neneutronovskej kvapaliny bude tok pokračovať aj po vynorení násosky a je taktiež možné takýto tok vyvolať aj jednoduchým preliatím malého množstva kvapaliny cez okraj nádoby [2]. Vysvetlením je, že orientácia a predĺženie molekúl polymérov pozdĺž prúdnicových čiar je zodpovedná za vznik veľkých axiálnych napätí ktoré umožňujú tento mechanizmus [4].



Obrázok 30: Prečerpávanie Neneutronovskej kvapaliny, upravené podľa [2]

11.7 Reštitúcia – elastic recoil

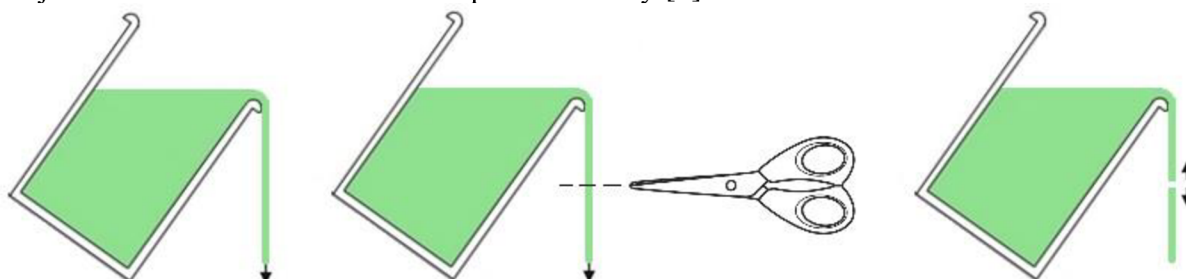
Reštitúciu možno pozorovať pri jednoduchom experimente znázornenom na obrázku 31. Potrebná je trubica naplnená viskoelastickou kvapalinou, ktorá sa nachádza v pokoji s vyznačenou materiálovou čiarou (krok 1.). Keď zvýšime tlak na začiatku trubice tak kvapalina začne tiecť a materiálová čiara sa v dôsledku toku zdeformuje a nadobudne tvar rýchlostného profilu kvapaliny (krok 2.). Nasleduje opätovné vyrovnanie tlakov na začiatku a konci trubice (krok 3.). Vtedy chce kvapalina nadobudnúť pokojový stav a pred nadobudnutím tohto stavu nastane zmena smeru toku, ktorú možno pozorovať pomocou zmeny tvaru materiálovej čiary [2].



Obrázok 31: Reštitúcia vo viskoelastickej kvapaline, upravené podľa [2]

Dôvodom je pôsobenie napätia v axiálnom smere, ktoré vzniká ako dôsledok natáčania a ťahovania polymérových reťazcov molekúl (podobne ako u násosky). Po skončení pôsobenia vonkajších síl majú tieto reťazce tendenciu vrátiť sa do pôvodného stavu, čo spôsobí ich stiahnutie v axiálnom smere. Toto stiahnutie je pozorovateľne na materiálovej čiare v krokoch 2. a 3. [4].

Ďalším zaujímavým experimentom, kde možno pozorovať dôsledok reštitúcie je pri samovoľnom výtoku viskoelastickej kvapaliny z nádoby bez použitia násosky. Keď kvapalina samovoľne vyteká a vodný tok prerušíme, tak vďaka stiahnutiu reťazcov sa kvapalina nachádzajúca sa nad rovinou rezu vráti naspäť do nádoby [4].



Obrázok 32: Reštitúcia pri samovoľnom výtoku, upravené podľa [2]

11.8 Hydraulický ráz

Hydraulický ráz je jav vyskytujúci sa v potrubných systémoch spôsobený náhlou zmenou toku. Vzniká pri náhlom uzatvorení výtokového ventilu alebo zapnutí a vypnutí púmp. Keď prúdiaca kvapalina narazí na uzatvorený ventil, tak hybnosť, ktorú táto kvapalina mala spôsobí enormný nárast tlaku v danej oblasti. Tento tlak sa následne šíri vo forme tlakovej pulzácie rýchlosťou zvuku naprieč kvapalinou nachádzajúcou sa v trubke. [13]

Tento jav je z dôvodu, že tlakový nárast spôsobuje v potrubí vibrácie, zvuky a v niektorých prípadoch je schopný aj poškodiť potrubie a spôsobiť poruchu nežiadúci. Výnimkou nežiadúceho použitia sú vodné trkače, ktoré sú schopné vďaka tomuto mechanizmu fungovať ako pumpy bez externého prísunu energie. Predísť mu môžeme buď pomalým uzatváraním ventilu alebo tým, že potrubný systém osadíme vzdušníkmi, tlak vyrovnávajúcimi nádržami, ktoré budú schopné takúto tlakovú vlnu pohltiť. [13]

Čas, za ktorý urazí tlaková vlna vzdialenosť od ventilu k nádrži s vodou naspäť sa nazýva doba reflexie a je definovaná ako:

$$t_{REFLEXIE} = \frac{2L}{a} \quad (11.8.1)$$

L – dĺžka potrubia od ventilu k nádrži [m]

a – rýchlosť zvuku [$m \cdot s^{-1}$]

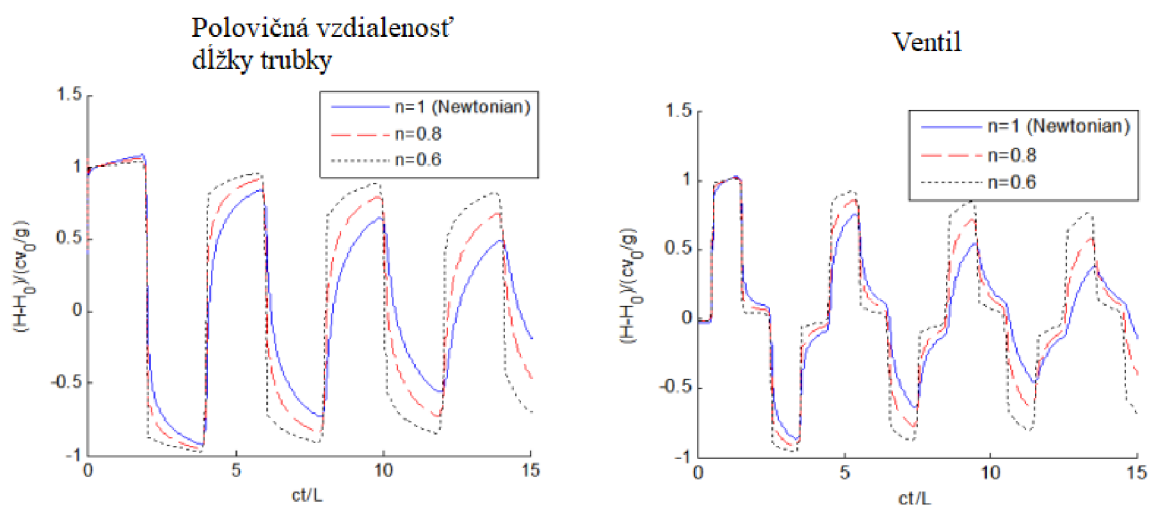
Hydraulický ráz je následne možno rozdeliť na 2 druhy:

- Totálny hydraulický ráz – doba uzatvárania ventilu je menšia alebo rovná dobe reflexie $t_{REFLEXIE} \leq t_{UZATVÁRANIA VENTILU}$
- Čiastočný hydraulický ráz – doba uzatvárania ventilu je väčšia alebo rovná dobe reflexie $t_{REFLEXIE} > t_{UZATVÁRANIA VENTILU}$

Keďže pri totálnom hydraulickom ráze nastane k návratu tlakovej vlny, k plne uzavretému ventilu je tento prípad jednoznačne kritickejší a pre newtonovské kvapaliny určuje tlakový prírastok spôsobený vodným rázom Žukovského vzťah definovaný nasledovným spôsobom:

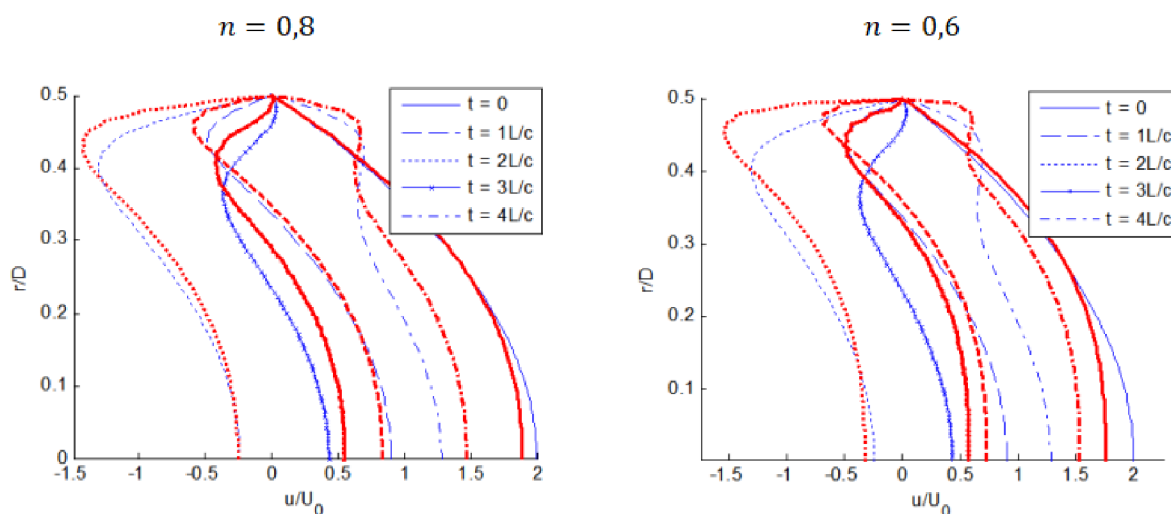
$$\Delta p = \rho a \Delta v \quad (11.8.2)$$

Popis šírenia takejto tlakovej pulzácie je na základe numerických a nameraných dát popísaný pre pseudoplastické kvapaliny v laminárnom režime (pri nízkom Reynoldsovom čísle) nasledujúcim spôsobom. Pseudoplastické chovanie má za následok posun oblasti vysokého rýchlostného gradientu ku stenám trubky.



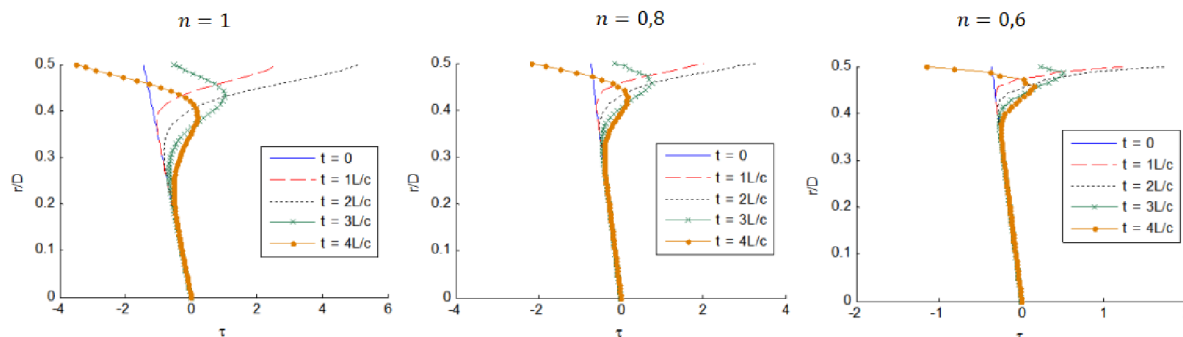
Obrázok 33: Pomer tlaku a času pri hydraulickom ráze [15]

Pre pseudoplastické kvapaliny bol oproti newtonovskej kvapaline nameraný na ventile aj v trubke v ten istý čas nižší tlak. Znižovanie hodnoty n má za následok viac klesajúcu hodnotu viskozity. Pre kvapalinu s menšou hodnotou n je pokles tlaku väčší. [14]



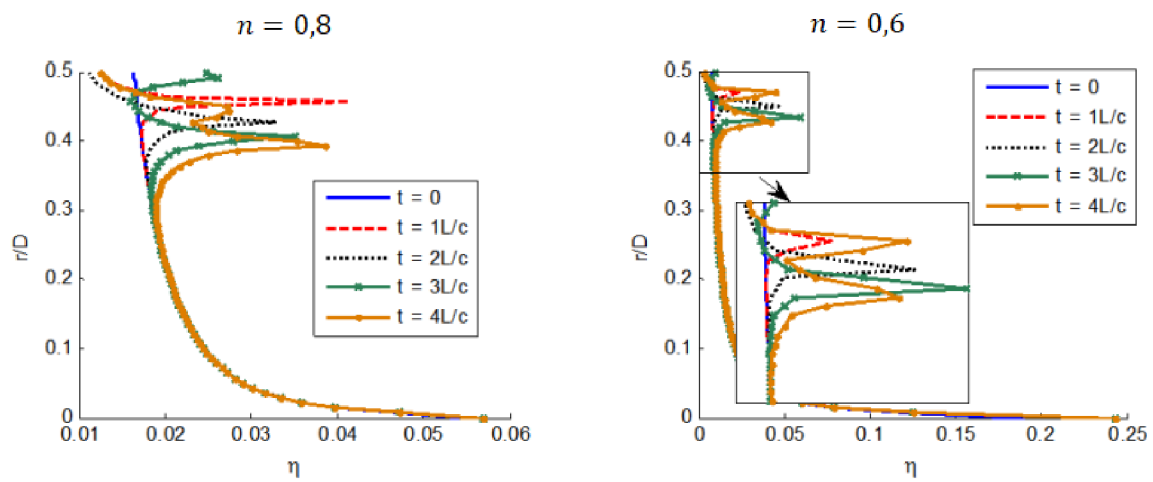
Obrázok 34: Rýchlostný profil PL kvapaliny pri hydraulickom ráze [15]

Ako je vidno na obrázku 34, tak pseudoplastické chovanie má za následok posun oblasti vysokého rýchlostného gradientu ku stenám trubky. Amplitúda rýchlosti v profile je väčšia a nachádza sa v oblasti bližšie ku stene trubky. Nárast rýchlostného gradientu v blízkosti steny trubky spôsobuje pokles viskozity, ktorý ovplyvňuje veľkosť rýchlosti a šmykového napätia v týchto oblastiach. Z rýchlostného profilu taktiež vidno, že stredná časť sa pohybuje jednotne. Hodnoty viskozity a šmykového napätia sú v nej takmer nezmenené. [14]



Obrázok 35: Rozloženie šmykového napätia v priereze pri hydraulickom ráze [15]

Z obrázku 35 znázorňujúceho šmykové napätie v priereze trubky je pozorovateľné, že čím viac sú pseudoplastické vlastnosti dominantné (menšia hodnota n), tým menej zasahuje šmykové napätie spôsobené od steny do strednej oblasti. Z toho dôvodu je región, v ktorom je disipovaná energia menší, čo ma za následok menšie energetické a tlakové straty.



Obrázok 36: Rozloženie viskozity v priereze pri hydraulickom ráze [15]

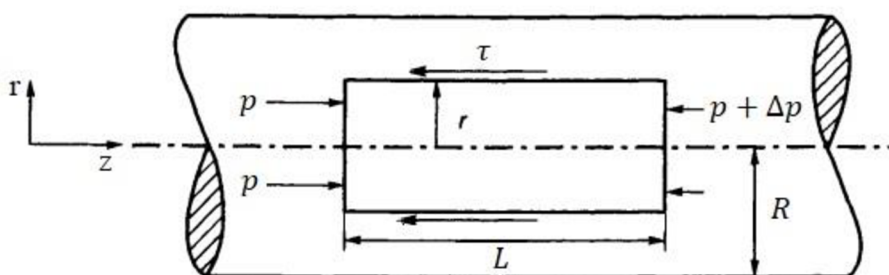
Na obrázku 36 je pozorovateľných viac lokálnych maxím viskozity, ktoré odpovedajú vrcholovým hodnotám v rýchlostnom rozložení profilu na obrázku 34.

12 Laminárne prúdenie

Je to oblasť prúdenia, do ktorej spravidla patria systémy popísané nižšou hodnotou Reynoldsovho čísla ako je jeho kritická hodnota pre danú sústavu a kvapalinu. V prípade, že uvažujeme ustálený laminárny tok časovo nezávislej a nestlačiteľnej kvapaliny v potrubí kruhového prierezu môžeme napísať rovnicu silovej rovnováhy pôsobiacej na elementárny prvok v kvapaline.

12.1 Napätie pôsobiace v kvapaline

Pre elementárny prvok znázornený na obrázku 37, ktorý sa nachádza v kvapaline možno napísať jednoduchú rovnicu silovej rovnováhy v tvare:



Obrázok 37: Elementárny prvok kvapaliny pri prúdení, upravené podľa [1]

$$\sum F = 0 \quad (12.1.1)$$

$$p \cdot S - (p + \Delta p) \cdot S - \tau \cdot S = 0 \quad (12.1.2)$$

$$p \cdot (\pi r^2) - (p + \Delta p) \cdot (\pi r^2) = \tau \cdot 2\pi r L \quad (12.1.3)$$

Z rovnice (12.1.3) je možné vyjadriť šmykové napätie v tvare:

$$\tau = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \cdot \frac{r}{2} \quad (12.1.4)$$

Výsledná rovnica preukazuje lineárnu závislosť rozloženia napätia na vzdialenosti od osi trubky. Tento vzťah je platný pre laminárne aj turbulentné prúdenie [1] a závislosť je znázornená pre PL kvapaliny na obrázku.

12.2 Všeobecný prístup pre časovo nezávislé kvapaliny

Šmykové napätie nie je funkciou reológie kvapalín, ale vzdialenosti od strednice a z rovnice (12.1.4) vyplýva, že pomer šmykového napätia dvoch miest v kvapaline je rovný pomeru ich vzdialenosti od osi trubky:

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_s} = \frac{r}{R} \quad (12.2.1)$$

τ_{rz} – Šmykové napätie v ľubovoľnej vzdialenosti r od strednice

τ_s – Šmykové napätie vo vzdialenosti R od strednice, napätie pri stene trubky

Objemový tok cez kruhové potrubie je všeobecne definovaný ako integrál plochy kruhovej oblasti a rýchlosti kvapaliny:

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_z \cdot dr \quad (12.2.2)$$

Integráciou pomocou metódy per partes nadobudneme:

$$Q = [\pi r^2 v_z]_0^R + \int_0^R \pi r^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \cdot dr \quad (12.2.3)$$

Väzobnou podmienkou je, že kvapalina v oblasti pri stene, vo vzdialenosti $r = R$ má nulovú rýchlosť, a teda okamžitá rýchlosť $v_z = 0$. Preto je prvý člen za znamienkom rovnosti nula.

$$Q = \int_0^R \pi r^2 \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \cdot dr \quad (12.2.4)$$

Nasleduje zámena integračnej premennej a okrajových podmienok, z rovnice (12.2.1) vyplýva:

$$r = R \frac{\tau_{rz}}{\tau_s} \quad (12.2.5)$$

$$dr = R \frac{d\tau_{rz}}{\tau_s} \quad (12.2.6)$$

$$r = 0 \rightarrow \tau_{rz} = 0 \quad (12.2.7)$$

$$r = R \rightarrow \tau_{rz} = \tau_s \quad (12.2.8)$$

Rýchlostný gradient zameníme za reologickú funkciu kvapaliny:

$$f(\tau_{rz}) = \left(-\frac{dv_z}{dr} \right) \quad (12.2.9)$$

A spätným dosadením do rovnice (12.2.4) nadobudneme:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_s^3} \int_0^{\tau_s} \tau_{rz}^2 f(\tau_{rz}) \cdot d\tau_{rz} \quad (12.2.10)$$

Do tejto rovnice dosádzame za $f(\tau_{rz})$ ľubovoľný reologický model, ktorý najlepšie popisuje chovanie kvapaliny a následnou integráciou obdržíme závislosť objemového toku na tlakovom spáde pre zvolenú kvapaliny v potrubí kruhového prierezu.

V prípade, že reológia kvapaliny odpovedá mocninovému modelu, tak rýchlostný gradient ako funkciu šmykového napätia vyjadríme z rovnice (5.1.1) ako:

$$-\frac{dv_z}{dr} = f(\tau_{rz}) = \left(\frac{\tau_{rz}}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (12.2.11)$$

A následným dosadením tohto výrazu do rovnice (12.2.10) obdržíme:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_s^3} \left(\frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^{\tau_s} \tau_{rz}^{\frac{1}{n}+2} \cdot d\tau_{rz} \quad (12.2.12)$$

Integráciou tejto rovnice nadobudneme objemový tok v tvare:

$$Q = \pi R^3 \left(\frac{\tau_s}{m} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{3n+1} \right) \quad (12.2.13)$$

Za použitia rovnice kontinuity nadobudneme podielom objemového toku a plochy prierezu trubky strednú rýchlosť kvapaliny.

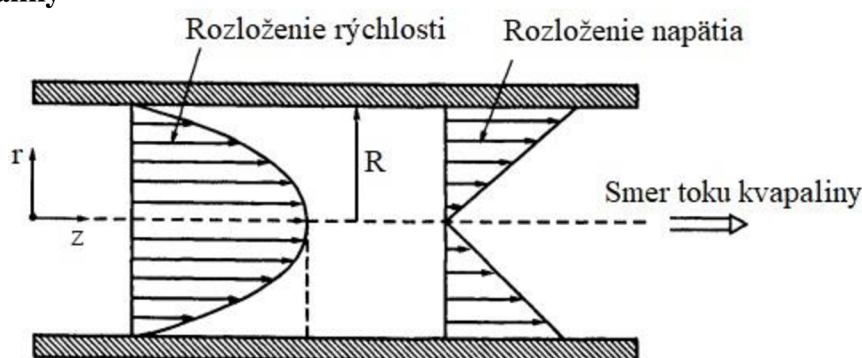
$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left(\frac{\tau_s}{m}\right)^{\frac{1}{n}} R \quad (12.2.14)$$

Pre vyjadrenie rýchlosti v závislosti na tlakovom spáde treba za podmienky, že tlakový spád je rovnaký na ľubovoľnom polomere použiť za τ_s substitúciu z rovnice (12.1.4).

$$v = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left(\frac{(-\Delta p)R}{2Lm}\right)^{\frac{1}{n}} R \quad (12.2.15)$$

Tento výsledok je identický s odvodením rovnice (12.3.9), v podkapitole číslo 12.3. Výhodou tohto postupu je menšia náročnosť, ale nevýhodou je nemožnosť odvodiť rýchlostný profil, keďže nepoznáme okamžité rýchlosti v ľubovoľných vzdialenostiach od strednice.

12.3 PL kvapaliny



Obrázok 38: Rýchlostný a napätový profil pri laminárnom prúdení kvapalín chovajúcich sa podľa mocninového modelu, upravené podľa [1]

Pre PL kvapaliny platí rovnica (5.1.1) a napätie v kvapaline je všeobecne popísané rovnicou (12.1.4). Následnou ekvivalenciou týchto rovníc dostaneme:

$$\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{r}{2} = m \left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n \quad (12.3.1)$$

A následnými úpravami dostaneme výraz vhodný pre integráciu

$$\left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{1}{2m}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \int r^{\frac{1}{n}} \cdot dr = - \int dv_z \quad (12.3.2)$$

$$v_z = - \left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{1}{2m}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot r^{\frac{n+1}{n}} + C \quad (12.3.3)$$

Z rozloženia rýchlostného profilu vyplýva, že kvapalina nachádzajúca sa pri stene, vo vzdialenosti $r = R$ má nulovú rýchlosť ($v_z = 0$). Tieto hodnoty substituujeme do predošlej rovnice a vyjadríme integračnú konštantu C .

$$C = \left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{1}{2m}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot R^{\frac{n+1}{n}} \quad (12.3.4)$$

Spätým dosadením integračnej konštanty do rovnice (12.3.3) a úpravou dostaneme rovnicu pre rýchlosť kvapaliny v určitej vzdialenosti od strednice v tvare:

$$v_z = \left[\frac{(-\Delta p)}{L} \cdot \frac{R}{2m} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot R \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (12.3.5)$$

Strednú rýchlosť vyjadríme z objemového toku kvapaliny pomocou rovnice kontinuity. Pričom objemový tok je definovaný rovnako ako v rovnici (12.2.2) nasledovným spôsobom:

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_z \cdot dr \quad (12.3.6)$$

Vyjadrením strednej rýchlosti z rovnice kontinuity je:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \cdot \int_0^R 2\pi r v_z \cdot dr = \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R 2r v_z \cdot dr \quad (12.3.7)$$

A následne z rovnice (12.3.5) substituujeme za v_z a ďalšími úpravami nadobudneme:

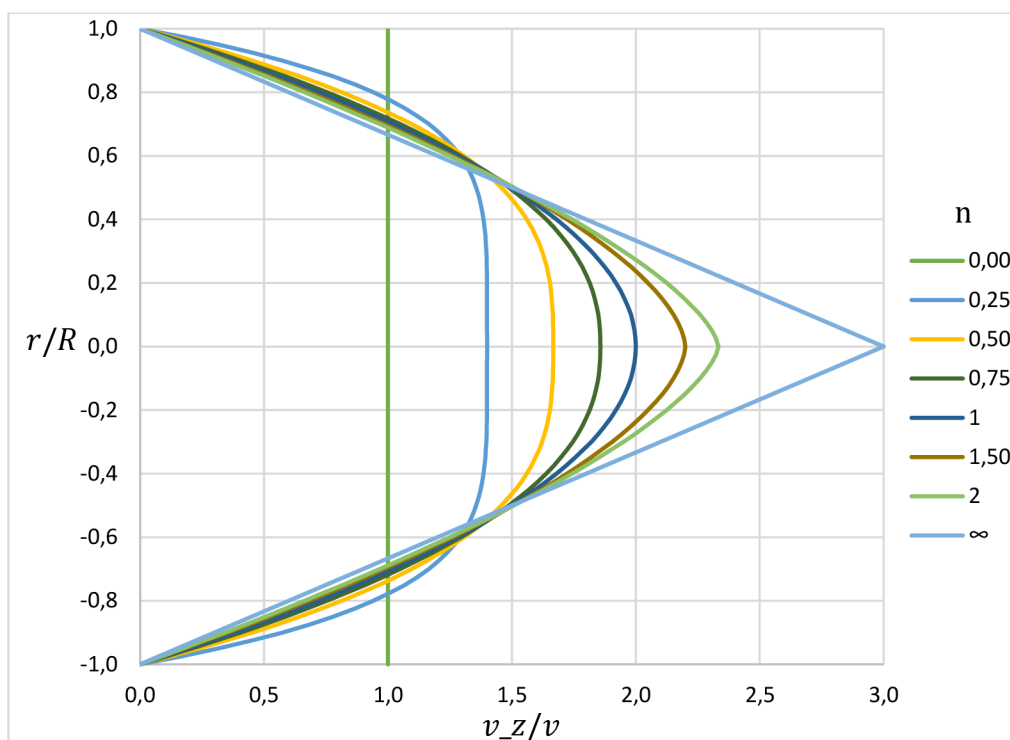
$$v = 2 \cdot \left[\frac{(-\Delta p)}{L} \cdot \frac{R}{2m} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot R \int_0^R \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2n+1}{n}} \right] \cdot d \left(\frac{r}{R} \right) \quad (12.3.8)$$

Ďalším krokom je integrácia výrazu na pravej strane a po úpravách vyjadríme konečný vzťah pre strednú rýchlosť kvapaliny ako:

$$v = \left[\frac{(-\Delta p)}{L} \cdot \frac{R}{2m} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot R \cdot \left(\frac{n}{3n+1} \right) \quad (12.3.9)$$

Pre účel vykreslenia rýchlostného profilu pre PL kvapaliny s rôznymi hodnotami n je vhodné dať rovnice (12.3.5) a (12.3.9) do pomeru.

$$\frac{v_z}{v} = \frac{\left[\frac{(-\Delta p)}{L} \cdot \frac{R}{2m} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot R \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}{\left[\frac{(-\Delta p)}{L} \cdot \frac{R}{2m} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot R \cdot \left(\frac{n}{3n+1} \right)} = \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (12.3.10)$$



Obrázok 39: Znáznornenie laminárneho rýchlostného profilu pre PL kvapaliny s rôznou hodnotou indexu správania toku (n), upravené podľa [1]

V grafe znázorňujúcom rýchlostné profily PL kvapalín podľa rovnice (12.3.10) možno pozorovať, že pre Newtonovskú kvapalinu ($n = 1$) je rozloženie parabolické, pre pseudoplastické kvapaliny ($n < 1$) sa splošťuje a pre dilatantné ($n > 1$) je profil ostrejší. Maximálna rýchlosť sa nachádza na prúdnici ktorá je totožná s osou trubky a nadobudneme ju substitúciou $r = 1$ do rovnice (12.3.10).

Vzťah maximálnej a strednej rýchlosti potom je:

$$v_{zMAX} = \left(\frac{3n + 1}{n + 1} \right) \cdot v \quad (12.3.11)$$

Podľa závislosti (12.3.11) boli vyčíslené pomery maximálnej a strednej rýchlosti kvapalín s rôznymi hodnotami indexu správania toku n . A na obrázku 39 aj v Tabuľka 2 je pozorovateľné, že pre dilatantné látky bude maximálny rozdiel v rýchlostnom profile väčší ako pre pseudoplastické, čo vysvetľuje špicatejší tvar rýchlostného profilu.

Tabuľka 2: Závislosť maximálnej a strednej rýchlosti pre kvapaliny s rôznou hodnotou indexu správania toku

n	v_{zMAX}
0,1	1,18 v
0,2	1,33 v
0,5	1,67 v
0,8	1,89 v
1	2,00 v
2	2,33 v
3	2,50 v

Objemový tok PL kvapaliny jednoducho vyjadríme dosadením za v z rovnice (12.3.9) do rovnice kontinuity.

$$Q = vS = \pi R^2 v = \pi \left(\frac{n}{3n+1} \right) \cdot \left(-\frac{\Delta p}{2mL} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot R^{\frac{3n+1}{n}} \quad (12.3.12)$$

Často je užitočné rovnicu prepísať do bezrozmernej formy pomocou trecieho faktoru definovaného rovnicou (10.3.2), do ktorej za τ_s dosadíme pomocou rovnice (12.1.4) a dostaneme nasledovný výraz:

$$f = \frac{(-\Delta p)R}{L\rho v^2} \quad (12.3.13)$$

Trecí faktor prepojíme s Reynoldsovým číslom rovnakým spôsobom, ako pre newtonovské kvapaliny, dosadením za f pomocou rovnice (10.3.4), čím obdržíme nasledovnú rovnosť:

$$\frac{(-\Delta p)}{L} = \frac{16\rho v^2}{R\text{Re}} \quad (12.3.14)$$

Ktorú substituujeme do rovnice (12.3.12) pre objemový tok.

$$R^2 v = \left(\frac{n}{3n+1} \right) \cdot \left(\frac{16\rho v^2}{2mR\text{Re}} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot R^{\frac{3n+1}{n}} \quad (12.3.15)$$

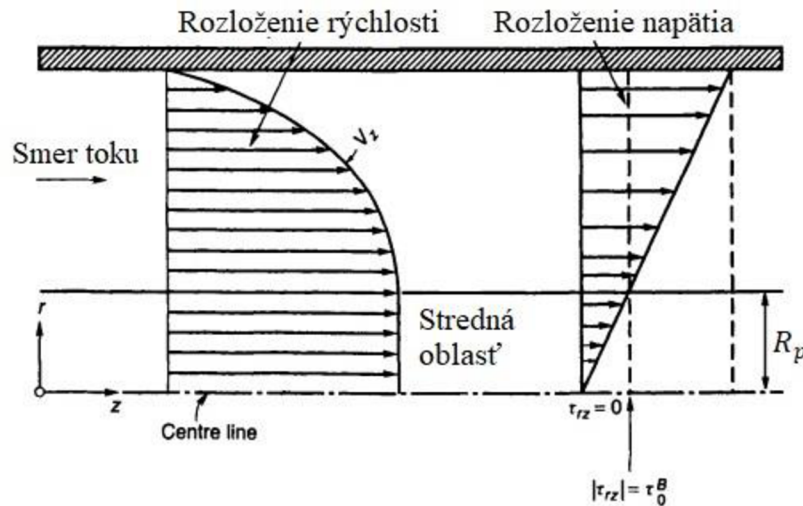
Po ďalších úpravách je Reynoldsovo číslo pre PL kvapaliny definované ako:

$$\text{Re} = \left(\frac{4n}{3n+1} \right)^n \cdot \frac{\rho v^{2-n} D^n}{8^{n-1} m} \quad (12.3.16)$$

12.4 Binghamské a bingham-plastické kvapaliny

Binghamské kvapaliny sa vyznačujú tým, že aby začali tečť je potrebné prekonať počiatočnú hodnotu odporu. Keď binghamská kvapalina tečie tak sa tento tok dá rozdeliť do 2 oblastí [5]:

- Stredná oblasť, kde hodnota šmykového napätia neprekročila hraničnú hodnotu ($\tau_{rz} < \tau_0^B$), kvapalina v tejto oblasti sa pohybuje ako pevná zátka.
- $0 \leq r \leq R_p$ Okolie strednej oblasti, kde pôsobí šmykové napätie väčšie ako hraničná hodnota ($\tau_{rz} > \tau_0^B$), kvapalina je tekutá.



Obrázok 40: Rýchlostný a napätový profil pri laminárnom prúdení binghamských kvapalín, upravené podľa [1]

Pre oblasť kde kvapalina tečie ($R_p < r < R$) možno rýchlosť vyjadriť nasledovným spôsobom, pomocou ekvivalencie rovnice (5.2.4) určenej pre binghamský model a rovnice (12.1.4) pre napätie v kvapaline nasledovne:

$$\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{r}{2} = \tau_0^B + \mu_B \left(-\frac{dv_z}{dr}\right) \quad (12.4.1)$$

Úpravou tejto rovnice dostaneme výraz vhodný pre integráciu:

$$\int \left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{r}{2} - \tau_0^B \right] dr = \int -\mu_B dv_z \quad (12.4.2)$$

A po integrácii a vyjadrení je rýchlosť:

$$v_z = -\frac{1}{\mu_B} \left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{r^2}{4} - \tau_0^B r \right] + C \quad (12.4.3)$$

Okrajovou podmienkou je, že kvapalina pri stene, vo vzdialenosti $r = R$ má nulovú rýchlosť $v_z = 0$. Tieto hodnoty substituujeme do rovnice (12.4.3) a vyjadríme integračnú konštantu v tvare:

$$C = \frac{1}{\mu_B} \left[\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{R^2}{4} - \tau_0^B R \right] \quad (12.4.4)$$

Spätným dosadením integračnej konštanty do rovnice (12.4.3) a úpravou nadobudneme vyjadrenie pre rýchlosť v binghamskej kvapaline v určitej vzdialenosti od strednice ako:

$$v_z = \left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{R^2}{4\mu_B} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{\tau_0^B R}{\mu_B} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (12.4.5)$$

Táto rovnica je použiteľná iba v prípade, keď prekročíme počiatočnú hodnotu odporu, $|\tau_{yx}| > |\tau_0^B|$ a keď $R_p < r < R$. Rýchlosť v_{zp} , ktorou sa pohybuje stredná oblasť kvapaliny chovájúca sa ako pevná zátka získame substitúciou $r = R_p$ do rovnice (12.4.5).

$$v_{zp} = \left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \frac{R^2}{4\mu_B} \left(1 - \frac{R_p^2}{R^2}\right) \quad (12.4.6)$$

Objemový tok budú tvoriť 2 oblasti: oblasť zátky (pevná oblasť) a tekutá oblasť, pričom každá sa bude pohybovať inou rýchlosťou.

$$Q = \int_0^R 2\pi r v \cdot dr \quad (12.4.7)$$

$$Q = \int_0^{R_p} 2\pi r v_{zp} \cdot dr + \int_{R_p}^R 2\pi r v_z \cdot dr \quad (12.4.8)$$

Pre zjednodušenie riešenia rozdelíme integrál na dve tokové oblasti:

$$Q_{PEVNÝ STRED} = \int_0^{R_p} 2\pi r v_{zp} \cdot dr \quad (12.4.9)$$

$$Q_{TOK} = \int_{R_p}^R 2\pi r v_z \cdot dr \quad (12.4.10)$$

Riešenie oblasti pevného stredu začneme dosadením rovnice (12.4.6), ktorá reprezentuje rýchlosť zátky do rovnice (12.4.9).

$$Q_{PEVNÝ STRED} = \int_0^{R_p} 2\pi r \left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \frac{R^2}{4\mu_B} \left(1 - \frac{R_p}{R}\right)^2 \cdot dr \quad (12.4.11)$$

Po integrácií a úpravách nadobudneme výraz v tvare:

$$\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \frac{\pi R^4}{4\mu_B} \left(\frac{R_p^2}{R^2} - \frac{2R_p^3}{R^3} + \frac{R_p^4}{R^4}\right) \cdot \frac{2}{2} \quad (12.4.12)$$

Do ktorého z rovnice (12.1.4) odvodíme relatívny polomer ϕ ako pomer τ_0^B a τ_w .

$$\frac{R_p}{R} = \frac{\tau_0^B}{\tau_s} = \phi \quad (12.4.13)$$

A následne zameníme ϕ za figurujúce zlomky, čím dostávame riešenie pre pevnú oblasť toku binghamskej kvapaliny v tvare:

$$Q_{PEVNÝ STRED} = \left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \frac{\pi R^4}{8\mu_B} (2\phi^2 - 4\phi^3 + 2\phi^4) \quad (12.4.14)$$

Ďalej je potrebné vyriešiť objemový tok tekutej oblasti, a to dosadením rovnice (12.4.5), ktorá reprezentuje rýchlosť do rovnice (12.4.10).

$$Q_{\text{TOK}} = \int_{R_p}^R \left[2\pi r \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{R^2}{4\mu_B} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - 2\pi r \frac{\tau_0^B}{\mu_B} R \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right] dr \quad (12.4.15)$$

Integráciou a úpravami dostaneme výraz:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi R^2}{2\mu_B} \cdot \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R_p^2}{2} \right) - \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi}{2\mu_B} \cdot \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R_p^4}{4} \right) - 2\pi \frac{\tau_0^B}{\mu_B} R \cdot \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R_p^2}{2} \right) \\ & + 2\pi \frac{\tau_0^B}{\mu_B} \cdot \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R_p^3}{3} \right) \end{aligned} \quad (12.4.16)$$

Dosadením za τ_0^B z rovnice (12.1.4) v tvare:

$$\tau_0^B = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \cdot \frac{R_p}{2} \quad (12.4.17)$$

Bude výraz rovný:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi R^4}{4\mu_B} \cdot \left(\frac{R^2}{R^2} - \frac{R_p^2}{R^2} \right) - \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu_B} \cdot \left(\frac{R^4}{R^4} - \frac{R_p^4}{R^4} \right) - \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \cdot \frac{\pi R^4}{2\mu_B} \\ & \cdot \left(\frac{R_p}{R} - \frac{R_p^3}{R^3} \right) + \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \cdot \frac{\pi R^4}{3\mu_B} \cdot \left(\frac{R_p}{R} - \frac{R_p^4}{R^4} \right) \end{aligned} \quad (12.4.18)$$

A následne substituujeme pomocou rovnice (12.4.13) a po úpravách nadobudneme riešenie pre objemový tok tekutej oblasti v binghamskej kvapaline v tvare:

$$Q_{\text{TOK}} = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu_B} \cdot \left(-\frac{5}{3}\phi^4 + 4\phi^3 - 2\phi^2 - \frac{4}{3}\phi + 1 \right) \quad (12.4.19)$$

A spätným dosadením riešení častí toku z rovníc (12.4.14) a (12.4.19) do rovnice (12.4.8) získame výsledný celkový objemový tok binghamskej kvapaliny.

$$Q = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu_B} \cdot \left(\frac{1}{3}\phi^4 - \frac{4}{3}\phi + 1 \right) \quad (12.4.20)$$

Rovnicu (12.4.20) prevedieme do bezrozmernej formy pomocou trecieho faktoru definovaného rovnicou (10.3.2), z ktorej vyjadríme τ_s a dosadením do rovnice (12.4.13) nadobudneme rovnosť:

$$\phi = \frac{\tau_0^B}{\frac{1}{2}f\rho v^2} \quad (12.4.21)$$

Ktorú substituujeme za ϕ v rovnici (12.4.20), zameníme Q pomocou rovnice kontinuity a ďalšími úpravami dostaneme:

$$\frac{\mu_B}{\rho v D} = \left(\frac{-\Delta p}{L} \right) \frac{D}{32\rho v^2} \cdot \left(+\frac{16}{3} \left(\frac{\tau_0^B}{f\rho v^2} \right)^4 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau_0^B}{f\rho v^2} \right) + 1 \right) \quad (12.4.22)$$

V tejto rovnosti zameníme ľavú stranu za prevrátenú hodnotu Reynoldsovo čísla, definovaného podľa rovnice (10.2.1) a dosadením do rovnice trecieho faktoru podľa (10.3.2) za τ_s z rovnice (12.1.4) vyplýva:

$$f = \frac{(-\Delta p)D}{2L\rho v^2} \quad (12.4.23)$$

Dosadením tohto výrazu do rovnice (12.4.22) dostaneme:

$$\frac{1}{\text{Re}_B} = \frac{f}{16} \cdot \left(+ \frac{16}{3} \left(\frac{\tau_0^B}{f\rho v^2} \right)^4 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau_0^B}{f\rho v^2} \right) + 1 \right) \quad (12.4.24)$$

Následne je treba rovnicu rozšíriť potrebnými veličinami pre nadobudnutie tvaru:

$$\frac{16}{\text{Re}_B} - \frac{16}{3f^3} \frac{1}{\text{Re}_B} \frac{\rho^4 D^8 \tau_0^{B^4}}{\mu_B^8} \frac{\mu_B^7}{\rho^7 v^7 D^7} + \frac{8}{3} \frac{1}{\text{Re}_B} \frac{\rho D^2 \tau_0^B}{\mu_B^2} \frac{\mu_B}{\rho v D} = f \quad (12.4.25)$$

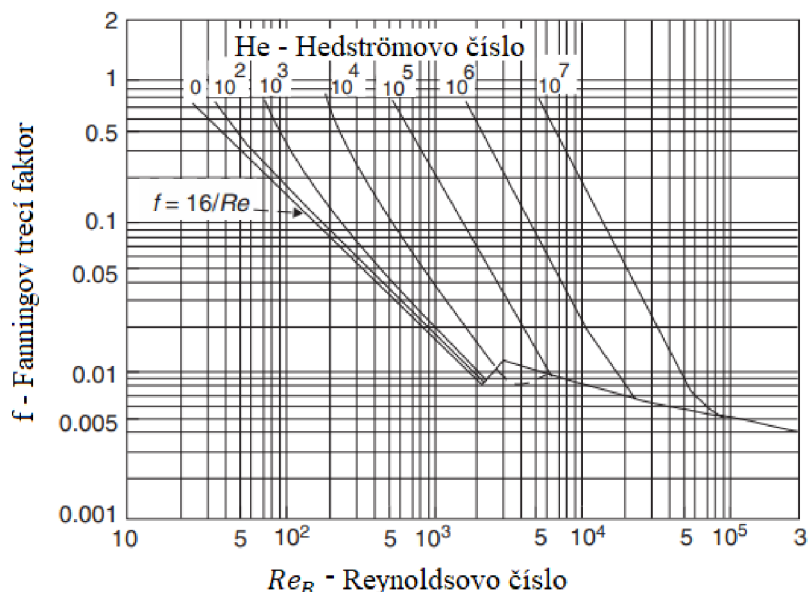
Z ktorého možno podľa rovníc (10.2.1) a (10.2.3) vyňať Reynoldsovo a Hedströmovo číslo.

$$\frac{16}{\text{Re}_B} - \frac{16}{3f^3} \cdot \frac{1}{\text{Re}_B} \cdot \frac{\text{He}^4}{\text{Re}_B^7} + \frac{2}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\text{Re}_B} \frac{\text{He}}{\text{Re}_B} = f \quad (12.4.26)$$

A po jednoduchých úpravách vyjadríme trecí faktor ako funkciu Reynoldsovo a Hedströmovo čísla.

$$f = \frac{16}{\text{Re}_B} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\text{He}}{\text{Re}_B} - \frac{1}{3} \frac{\text{He}^4}{f^3 \text{Re}_B^7} \right) \quad (12.4.27)$$

Rovnica (12.4.27) je implicitným výrazom vzhľadom ku tlakovému spádu, pretože τ_s a následne aj ϕ je funkciou tlakového spádu, a teda pre určený prietok je potrebné pre zistenie tlakového spádu použiť iteratívnu metódu [5].



Obrázok 41: Trecí faktor v závislosti na Reynoldsovom a Hedströmovom čísle podľa rovnice (10.4.27), upravené podľa [6]

Je pozorovateľné, že čím je hodnota Hedströmovo čísla nižšia, tým je odchýlka od pomeru platiaceho pre newtonovské kvapaliny menšia [5].

V prípade prepísania rovnice (12.4.27) pomocou binghamského čísla definovaného rovnicou (10.2.2) bude výsledný vzťah rovný [5]:

$$f = \frac{16}{\text{Re}_B} \left(1 + \frac{\text{Bi}}{6} - \frac{1}{3} \frac{\text{Bi}^4}{(f \text{Re}_B)^3} \right) \quad (12.4.28)$$

12.5 Priemerná kinetická energia kvapaliny

V rovniciach energetickej rovnováhy sa používa Coriolisovo číslo, ktorého úlohou je kompenzácia za nejednotnú rýchlosť kvapaliny v jej profile. Pre jeho nadobudnutie treba vyčísliť hodnotu priemernej kinetickej energie na jednotku hmotnosti ako funkciu strednej rýchlosti [1].

$$E_k = \frac{\int \frac{1}{2} v_z^2 dm}{\int dm} = \frac{\int_0^R \frac{1}{2} v_z^2 2\pi r v_z \rho dr}{\int_0^R 2\pi r v_z \rho dr} = \frac{\int_0^R r v_z^3 dr}{2 \int_0^R r v_z dr} = \frac{v^2}{2\alpha} \quad (12.5.1)$$

α – Coriolisovo číslo [-]

Aby sme odvodili Coriolisovo číslo pre PL kvapaliny tak je potrebné do rovnice (12.5.1) dosadiť za okamžitú rýchlosť v_z z rovnice (12.3.10).

Menovateľ je riešený nasledovne:

$$2 \int_0^R r v \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] dr \quad (12.5.2)$$

Integráciou a úpravami nadobudneme riešenie v tvare:

$$vR^2 \quad (12.5.3)$$

Čitateľ je riešený nasledovne:

$$\int_0^R r \left\{ v \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]^3 \right\} dr \quad (12.5.4)$$

Po integrácií a úpravách je výsledný výraz:

$$v^3 \left(\frac{3n+1}{n+1} \right)^3 \left\{ \frac{R^2}{2} - 3 \frac{nR^2}{3n+1} + 3 \frac{nR^2}{4n+2} - \frac{nR^2}{5n+3} \right\} \quad (12.5.5)$$

Dosadením výrazov rovných menovateľu a čitateľu z rovníc (12.5.3) a (12.5.5) naspäť do rovnice (12.5.1) nadobudneme výslednú rovnosť:

$$\frac{v^3 \left(\frac{3n+1}{n+1} \right)^3 \left\{ \frac{R^2}{2} - 3 \frac{nR^2}{3n+1} + 3 \frac{nR^2}{4n+2} - \frac{nR^2}{5n+3} \right\}}{vR^2} = \frac{v^2}{2\alpha} \quad (12.5.6)$$

Z ktorej po úpravách vyplýva, že Coriolisovo číslo pre PL kvapaliny je definované ako:

$$\alpha = \frac{(2n+1)(5n+3)}{3(3n+1)^2} \quad (12.5.7)$$

Pre Newtonovskú kvapalinu ($n = 1$) je hodnota Coriolisovho čísla $\alpha = 0,5$, pre pseudoplastickú látku $\alpha > 0,5$ a dilatantnú $\alpha < 0,5$.

13 Odvození Všeobecného Metzner a Reedovho Reynoldsovo čísla pro časovo nezávislé kvapaliny

$$Q = \frac{\pi \cdot R^3}{\tau_s^3} \cdot \int_0^{\tau_s} \tau_k^2 \cdot f(\tau_k) \cdot d\tau_k \quad (12.5.1)$$

Hodnoty tohto integrálu závisia iba na krajných hodnotách funkcie a nie na priebehu spojitej funkcie ktorá je integrovaná.

τ_k – Šmykové napätie v kvapaline

τ_s – Šmykové napätie v kvapaline pri stene

$$\frac{d}{d\tau_s} \cdot \left[\tau_s^3 \cdot \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right) \right] = \frac{d}{d\tau_s} \cdot \int_0^{\tau_s} \tau_k^2 \cdot f(\tau_k) \cdot d\tau_k \quad (12.5.2)$$

Aplikovaním Leibnitzovho kritéria na rovnicu (12.5.1)

$$\frac{d}{d\tau_s} \cdot \left[\tau_s^3 \cdot \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right) \right] = \tau_s^2 \cdot f(\tau_s) \quad (12.5.3)$$

A deriváciou výrazu na ľavej strane:

$$3 \cdot \tau_s^2 \cdot \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right) + \frac{\tau_s^3 \cdot d \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right)}{d\tau_s} = \tau_s^2 \cdot f(\tau_s) \quad (12.5.4)$$

V rovnici sa pokrátia premenné τ_s a dosadením za $f(\tau_s)$ nadobudneme:

$$f(\tau_s) = \left(\frac{-dv}{dr} \right) = 3 \cdot \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right) + \frac{\tau_s d \left(\frac{Q}{\pi R^3} \right)}{d\tau_s} \quad (12.5.5)$$

Vyjmeme celý člen v zátvorke obsahujúci objemový tok a rozšírime potrebnými konštantami. Vo všetkých členoch obsahujúcich objemový tok dosadíme z rovnice kontinuity a polomer nahradíme priemerom.

$$\left(\frac{-dv}{dr} \right) = \frac{8v}{D} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau_s d \left(\frac{8v}{D} \right)}{\left(\frac{8v}{D} \right) d\tau_s} \right) \quad (12.5.6)$$

$$\left(\frac{-dv}{dr} \right) = \frac{8v}{D} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{d \log \left(\frac{8v}{D} \right)}{d \log \tau_s} \right) \quad (12.5.7)$$

n' znázorňuje smernicu priamky v strednej oblasti rýchlostného gradientu v logaritmických súradniciach. Jeho hodnota nemusí byť konštantná cez rozsah gradientu.

$$\frac{d \log \left(\frac{8v}{D} \right)}{d \log \tau_s} = \frac{1}{n'} \quad (12.5.8)$$

Dosadením za tento zlomok do rovnice (12.5.7) nadobudneme:

$$\left(\frac{-dv}{dr} \right) = \frac{8v}{D} \cdot \frac{3n' + 1}{4n'} \quad (12.5.9)$$

Pre oblasť rýchlostného gradientu, kde je hodnota n' približne konštantná je možné napísať pomocou rovnice (12.1.4):

$$\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{D}{4} = \tau_s = m' \cdot \left(\frac{8 \cdot v}{D}\right)^{n'} \quad (12.5.10)$$

Pokračujeme substitúciou za τ_s do rovnice trecieho faktoru, ktorým pomocou (10.3.4) prepojíme laminárny režim rovnakým spôsobom ako je tomu u newtonovských kvapalín.

$$\frac{16}{Re_{MR}} = f = \frac{2m'8^{n'}}{\rho v^{2-n'} D^{n'}} \quad (12.5.11)$$

Odkiaľ nadobudneme finálny vzťah pre Metzner a Reedovo Reynoldsovo číslo pre časovo nezávisle kvapaliny v tvare:

$$Re_{MR} = \frac{\rho v^{2-n'} D^{n'}}{m' 8^{n'-1}} \quad (12.5.12)$$

n' – zdanlivý mocninový koeficient indexu toku [-]

m' – zdanlivý mocninový koeficient konzistencie [-]

Tieto koeficienty je potrebné prepojiť s tými skutočnými, a pre PL kvapaliny to dosiahneme diferencovaním rovnice (12.3.10) vzhľadom k r .

$$\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right) v dr - \left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} v dr \quad (12.5.13)$$

Prvý člen napravo je rovný nule a deriváciou druhého člena obdržíme:

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{3n+1}{n}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{v}{R} \quad (12.5.14)$$

Pre vyjadrenie rýchlostného gradientu pri stene je potrebné substituovať $r = R$, čím člen v zátvorke bude rovný jednej a pre ďalšie zjednodušenie zameníme polomer za priemer.

$$-\frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{3n+1}{4n}\right) \frac{8v}{D} \quad (12.5.15)$$

A dosadením za rýchlostný gradient do rovnice (5.1.1) nadobudneme:

$$\tau_s = m \cdot \left(\left(\frac{3n+1}{4n}\right) \frac{8v}{D}\right)^n \quad (12.5.16)$$

Porovnaním tejto rovnice s rovnicou (12.5.3) zistíme akým spôsobom sú prepojené koeficienty mocninového modelu s koeficientami v Metzner Reedovom Reynoldsovom čísle.

$$n' = n \quad (12.5.17)$$

$$m' = m \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \quad (12.5.18)$$

Z toho vyplýva, že konštanty n' a m' sú nezávislé na rýchlostnom gradiente.

Pre binghamský model možno obdobným spôsobom nadobudnúť:

$$n' = \frac{1 - \frac{4}{3}\phi + \frac{1}{3}\phi^4}{1 - \phi^4} \quad (12.5.19)$$

$$m' = \tau_s \left[\frac{\mu_B}{\tau_s \left(1 - \frac{4}{3}\phi + \frac{1}{3}\phi^4\right)} \right]^n \quad (12.5.20)$$

V tomto prípade však nie sú konštantné a závisia na hodnote šmykového napätia pri stene.

14 Turbulentné prúdenie

Pre kalkuláciu tlakového spádu pre turbulentný tok neneutronovskej kvapaliny bolo vyvinutých mnoho modelov založených na rozdielnych myšlienkach, ktoré sa líšia presnosťou a ich použitím. Je dokázané, že kvapaliny vykazujúce podobné vlastnosti pri laminárnom prúdení, sa pri turbulentnom prúdení môžu chovať odlišne, preto je takýto popis veľmi náročný.

14.1 Kritéria prechodu z laminárneho do turbulentného režimu

Charakter toku sa mení v závislosti na pomere viskózných a zotrvačných síl a hodnota Reynoldsovoho čísla pre časovo nezávislé kvapaliny je ovplyvnená konkrétnym druhom kvapaliny a chovaním aké kvapalina vykazuje.

14.1.1 Ryan a Johnsonov parameter stability

Ryan Johnson parameter bol utvorený z poznatkov o laminárnom profile, ktoré je možné odvodiť na základe reológie danej kvapaliny [8]. Tento parameter reprezentuje pomer vstupnej energie ku stratovej energii pre element kvapaliny. Prechod nastáva v hraničnej vrstve medzi stabilným laminárnym a stabilným turbulentným tokom, kde časová derivácia Strednej rýchlosti je nulová. Pri tejto podmienke dosiahne svoju kritickú hodnotu, $Z_{RJCRIT} = 808$, ktorej prekročenie predikuje prechod z laminárneho do turbulentného režimu. Správnosť tohto kritéria bola overená analyticky pre newtonovské kvapaliny a experimentálne pre pseudoplastické kvapaliny, ktorých reológia odpovedá mocninovému modelu [10].

$$Z_{RJ} = \frac{R\rho v_z}{\tau_s} \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (14.1.1)$$

$$\frac{\partial Z_{RJ}}{\partial r} = 0 \quad (14.1.2)$$

14.1.2 Mishra a Tripathino kritérium

Táto dvojica dala do pozornosti, že prechod z laminárneho režimu do turbulentného je proces prebiehajúci postupne po určitých krokoch. Tými krokmi sú: šírenie dvojdimenzionálnych vln, trojdimenzionálnych vln, vznik turbulentného miesta a jeho rozširovanie. Turbulentné miesto vzniká tam, kde je zmena strednej rýchlosti najväčšia. Navrhli teda, že priemerná kinetická energia a šmykové napätie pri stene sú dôležitými faktormi ovplyvňujúcimi tento prechod [8].

Parameter stability odvodili ako pomer priemernej kinetickej energie na jednotku objemu a šmykového napätia pri stene a proponovali, že pre všetky časovo nezávislé kvapaliny je tento pomer pri prechode konštantný [5].

$$Re_{MR} = \frac{2100(4n + 2)(5n + 3)}{3(3n + 1)^2} \quad (14.1.3)$$

14.1.3 Hanksovo kritérium

V odvetviach akým je napríklad čistenie odpadových vôd sa často stretávame s pumpovaním viskoplastických kvapalín. Hanks preto navrhol Reynoldsovo číslo pre Binghamské kvapaliny ako:

$$(Re_B)_c = \frac{1 - \frac{4}{3}\phi_c + \frac{\phi_c^4}{3}}{8\phi_c} He \quad (14.1.4)$$

Kde relatívny polomer tekutej oblasti je vyjadrený ako pomer je daný ako [5]:

$$\phi_c = \frac{\tau_0^B}{\tau_s} \quad (14.1.5)$$

A vo vzťahu k Hedströmovu číslu je:

$$\frac{\phi_c}{(1 - \phi_c)^3} = \frac{He}{16800} \quad (14.1.6)$$

Toto kritérium je pre hodnoty $He < 10^5$ dostatočne presné a odchýlky, ktoré následne nastávajú sú spôsobené tým, že Binghamský model nie je schopný dostatočne popisovať tok kvapaliny, v prípade, že priemer strednej časti pohybujúcej sa ako tuhé teleso je takmer rovný alebo väčší ako polomer trubky ktorou kvapalina prúdi. [10]

14.1.4 Slatterovo kritérium

Slatter predložil spôsob, akým predikovať kritickú hodnotu Reynoldsovho čísla pre kvapaliny riadiace sa Herschel-Bulkeyho modelom. Tento spôsob je založený na myšlienke, že viskózne a zotrvačné sily v takejto kvapaline sú určené iba tou kvapalinou, ktorá je vystavená deformácií [5] a stredná oblasť je poňatá ako pohybujúce sa pevné teleso, ovplyvňujúce stabilitu toku [7], je odčítaná z celkového toku v trubke [8]. Táto metóda sa preukázala byť najpresnejším spôsobom ako predikovať kritickú hodnotu Reynoldsovho čísla pre viskoplastické kvapaliny [7].

$$Re_{mod} = \frac{8\rho v_{oblast}^2}{\tau_0^H + m \left(\frac{8v_{oblast}}{D_{šmyk}} \right)^n} \quad (14.1.7)$$

Kde efektívna rýchlosť v medzikruhovej oblasti je daná ako:

$$v_{oblast} = \frac{Q - Q_{stred}}{\pi(R^2 - R_p^2)} \quad (14.1.8)$$

$$D_{šmyk} = 2(R - R_p) \quad (14.1.9)$$

14.2 Trecie faktory pre prechodné a turbulentné podmienky prúdenia

Vzťah medzi šmykovým napätím a rýchlostným gradientom je pre veľkú časť Neneutronových kvapalín, takmer pre celý rozsah rýchlostného gradientu, možné opísať iba s malou odchýlkou pomocou mocninového modelu. Napriek tomu, že ide o empirickú rovnicu, tak reprezentuje reologické vlastnosti širokej škály týchto kvapalín lepšie, než väčšina predložených modelov, a jednoznačne lepšie než akýkoľvek iný model pozostávajúci z dvoch parametrov. Práve pre jeho presnosť a jednoduchosť je zvolený v nasledujúcej štúdií Dodge a Metznera, keďže riešenie podobných problémov by v prípade ostatných komplexnejších modelov bolo pre všeobecné použitie v inžinierstve zbytočne zložitá, a prácne. [7]

Dodge a Metznerovi sa podarilo uskutočniť rozsiahlu štúdiu, v ktorej je hlbšie rozobratá téma turbulentného toku neneutronových kvapalín. Ich teoretická analýza bola vôbec prvá takéhoto typu a predložila spôsob, akým prepojiť tlakové straty so stredným prietokom neneutronových kvapalín.

Pre overenie správnosti tejto analýzy vykonali aj radu experimentov, kedy skúmali tok kvapalín s rôznymi reologickými vlastnosťami v hladkých mosadzných trubkách rôznych kruhových prierezov. Pre experiment použili ako PL kvapaliny (polymerické gély), tak aj odlišne sa chovajúce látky ako napríklad suspenzie ílu. Pri následnom porovnávaní nameraných a teoreticky očakávaných dát zistili, že dáta nadobudnuté pre PL aj NPL sa tými teoretickými zhodujú, pričom maximálna odchýlka experimentálneho trecieho faktora bola 8,5% a stredná odchýlka 1,9%. [7]

Tým sa potvrdila platnosť rovnice (14.2.4) medzi trecím faktorom a Reynoldsovým číslom pre polymerické zmesi, suspenzie obsahujúce pevné častice, PL aj NPL kvapaliny.

Dôležitým základom tejto analýzy bol mocninový model, avšak pre NPL kvapaliny nie sú parametre n, k konštantné, ale sú funkciami šmykového napätia. Aj napriek tomu je ich použitie možné, ale treba pracovať s ich hodnotami náležiacimi konkrétnemu šmykovému napätiu, ktoré sa nachádza pri stene trubky. [7]

Zdôrazniť treba pri NPL kvapalinách aj to, že pri skúmaní správania kvapaliny sa zaujímate o vlastnosti iba v rozsahu šmykového napätia, ktoré sa pri danom toku vyskytuje v priereze. Takže v konkrétnom prípade je úplne nepodstatné, že pri vysokom napätí je odchýlka kvapaliny od mocninového modelu vysoká.

Pozor treba dať aj pri vysoko dilatantných kvapalinách, kedy jeden z predpokladov, že laminárna podvrstva je veľmi malá nemusí platiť a vzťah môže byť nepresný alebo pri extrémne pseudoplastických kvapalinách,; kedy funkcia C_1 bude mať veľkú vplyv na výsledok, keďže ostatné členy budú veľmi malé, a aj malá nepresnosť funkcie C_1 môže viesť k veľkej chybe. [7]

14.2.1 PL kvapaliny

Prepojením Metzner a Reedovho Reynoldsovo čísla s trecím faktorom nasledujúcim spôsobom dosiahneme skupinu kriviek, ktorým bude n' parametrom.

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = A_1 \log \left(Re_{MR} f^{\frac{1-n'}{2}} \right) + C_1 \quad (14.2.1)$$

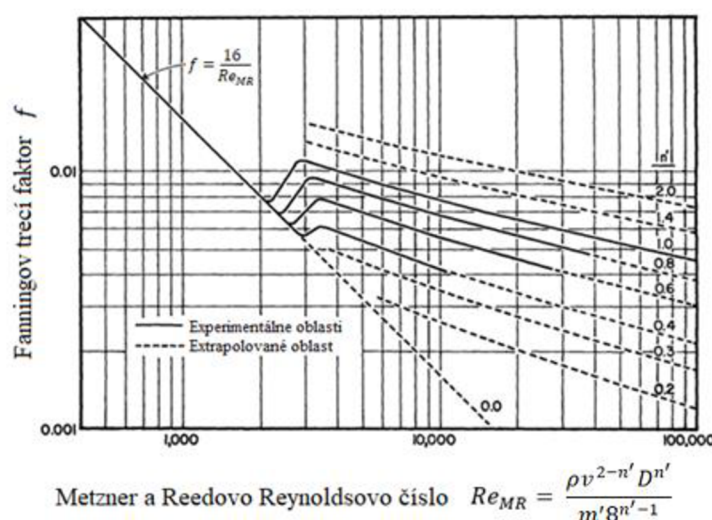
Následným porovnávaním funkcie s experimentálnymi dátami, ktoré odpovedali mocninovému modelu alebo jeho blízkej aproximácii boli optimalizované obe funkcie [7].

$$A_1(n') = \frac{4,0}{(n')^{0,75}} \quad (14.2.2)$$

$$C_1(n') = \frac{-0,40}{(n')^{1,2}} \quad (14.2.3)$$

Dosadením funkcií dostaneme finálnu závislosť:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = \frac{4,0}{(n')^{0,75}} \log \left(Re_{MR} f^{\frac{1-n'}{2}} \right) - \frac{-0,40}{(n')^{1,2}} \quad (14.2.4)$$



Obrázok 42: Znáznornenie závislosti trecieho faktoru na reynoldsovom čísle pre rôzne kvapaliny, upravené podľa [6]

Je pozorovateľné že trecí faktor pre pevnú hodnotu Re klesá spolu so zvyšovaním miery pseudoplastických vlastností (n' klesá). Do pozornosti treba dať taktiež fakt, že experimentálne a extrapolované dáta slúžia pre rôzne použitia. Extrapolované dáta by nemali byť vôbec použité pre neneutronské kvapaliny a už vôbec nie pre dilatantné kvapaliny, keďže o takýchto experimentoch nie sú žiadne záznamy a presnosť týchto dát tým pádom nie je možné overiť [1].

14.2.2 Newtonovský prípad

V prípade uvažovania newtonovskej kvapaliny ($n' = 1$) sa rovnica zredukuje na Von Karmanovu rovnicu [6].

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = A_2 \log\left(\frac{\rho D v}{\mu} \sqrt{f}\right) + C_2 \quad (14.2.5)$$

Newtonovské dáta, ktoré nadobudol Nikuradze s týmto predpisom veľmi dobre odpovedali a vďaka nim bolo možné optimalizovať hodnoty konštant A, C ako [6]:

$$A_2 = 4,0 \quad (14.2.6)$$

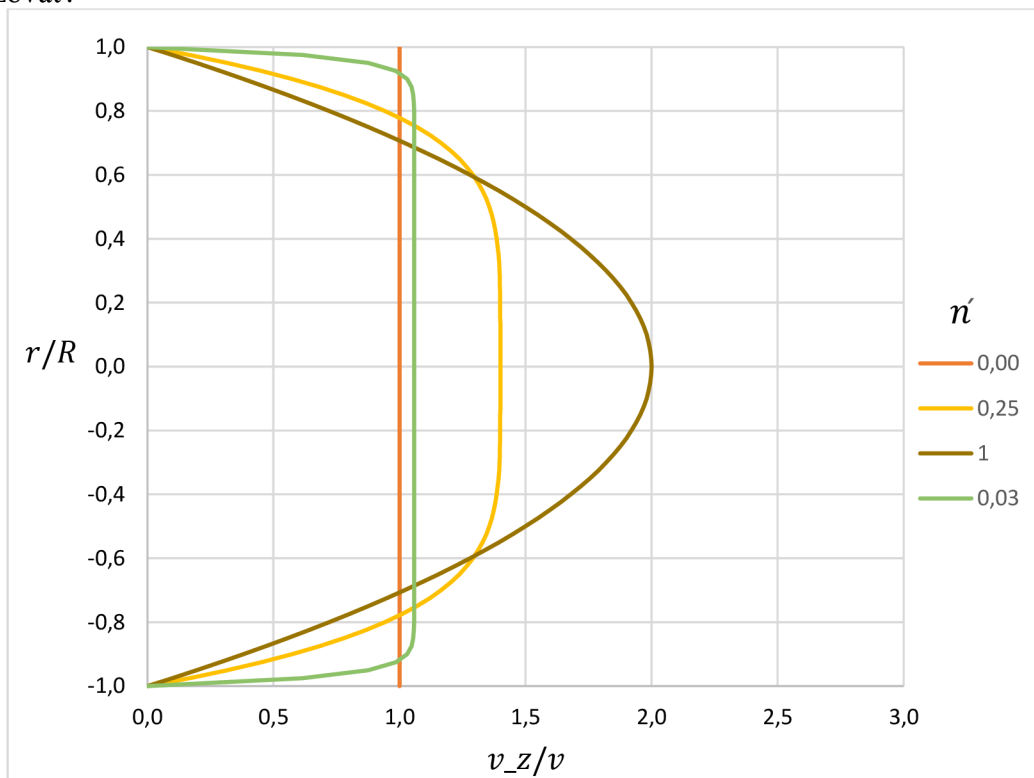
$$C_2 = -0,40 \quad (14.2.7)$$

A následným dosadením funkcií dostaneme finálnu závislosť v tvare:

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = 4,0 \log\left(\frac{\rho D v}{\mu} \sqrt{f}\right) - 0,40 \quad (14.2.8)$$

14.2.3 Ultimátne pseudoplastický prípad

Rýchlostné profily pre laminárne prúdenie PL kvapaliny sú známe a možno ich matematicky analyzovať.



Obrázok 43: Rýchlostné profily kvapaliny s rôznou hodnotou indexu správania toku (n)

Rýchlostný profil newtonovskej kvapaliny počas laminárneho toku má parabolický tvar (Obrázok 43 krivka platná pre $n' = 1$) a pre PL kvapaliny je tento tvar so znižujúcou sa hodnotou n' je čoraz viac plochý. Pri prechode z laminárneho do turbulentného režimu je rýchlostný profil splošňovaný celkovou hybnosťou z oblastí vysokých do oblastí nízkych rýchlostí. To znamená, že turbulencie majú na rýchlostný profil rovnaký vplyv, ako znižovanie hodnoty n . V prípade, že hodnota n je veľmi blízko nule, je laminárny rýchlostný profil takmer úplne plochý (Obrázok 43, krivka znázorňujúca rýchlostný profil pre $n' = 0,03$) a zmena pri prechode z laminárneho do turbulentného režimu veľmi malá. V limitnom prípade, kedy $n' = 0$ je profil dokonale plochý (kvapalina má v celom priereze rovnakú rýchlosť, Obrázok 43, krivka platná pre $n' = 0,00$) a rozdiel medzi laminárnym a turbulentným rýchlostným profilom je nepozorovateľný. [7]

Prepojenie trecieho faktoru newtonovských kvapalín s turbulentnou a laminárnou oblasťou vychádza zo zmeny vo vzťahu medzi šmykovým napätím pri stene a strednou rýchlosťou. Práve to je dôvodom zmien v rýchlostnom profile, ktoré sa vyskytnú pri prechode z laminárných do turbulentných podmienok. Tak ako sa vytráca rozdiel medzi laminárnym a turbulentným profilom, sa vytráca aj rozdiel medzi vzťahom laminárneho a turbulentného režimu s trecím faktorom. V dôsledku toho je pre limitný prípad ($n' = 0$) vzťah trecieho faktoru pre laminárny a turbulentný režim s Reynoldsovým totožný. [7]

Podobný záver možno dosiahnuť povedaním, že zdanlivá viskozita kvapaliny v nekonečne malej vzdialenosti od steny je nekonečná, čím v nekonečnej vzdialenosti od steny úplne potláča turbulencie. Z toho vyplýva, že krivka pre limitný prípad ($n = 0$) je len predĺžením laminárnej tokovej krivky. [7]

Ďalší pokus o prepojenie trecieho faktoru a Reynoldsovho čísla uskutočnil YOO, ktorý navrhol nasledovnú modifikáciu Blasiusovej rovnice, ktorej odchýlka sa pohybuje niekde v rozmedzí 10 % [5].

$$\frac{f}{2} = \phi = \frac{R}{\rho u^2} = 0,0396^{0,675} Re_{MR}^{-0,25} \quad (14.2.9)$$

Neskôr IRVINE prišiel s ďalšou modifikáciou Blasiusovej rovnice, ktorá je schopná predikovať trecí faktor ešte efektívnejšie, a to s priemernou odchýlkou $\pm 8\%$ v rozsahu podmienok: $0,35 < n < 0,89$ a $2000 < Re_{MR} < 50000$ [5]. Tvar modifikácie je nasledovný:

$$f = \left[\frac{D_1(n)}{Re_{MR}} \right]^{\frac{1}{3n+1}} \quad (14.2.10)$$

$$D_1(n) = \frac{2^{n+4}}{77n} \left(\frac{4n}{3n+1} \right)^{3n^2} \quad (14.2.11)$$

14.3 Viskoplastické kvapaliny

Aj napriek tomu že rovnica (14.2.4) je aplikovateľná na všetky druhy časovo nezávislých kvapalín, boli naďalej vyvíjané aj ďalšie spôsoby, akým nadobudnúť túto závislosť pre konkrétne modely kvapalín. Darby navrhol polo empirický model použiteľný pre viskoplastické kvapaliny, definovaný ako [6]:

$$f_D = (f_L^{b_0} + f_T^{b_0})^{\frac{1}{b_0}} \quad (14.3.1)$$

Kde f_L je riešením rovnice (12.4.27) alebo (12.4.28) a

$$f_T = 10^{a_0} Re_B^{-0,193} \quad (14.3.2)$$

A koeficienty a_0, b_0 sa vypočítajú nasledovne:

$$a_0 = -1,47[1 + 0,146\exp(-2,9 \cdot 10^{-5}\text{He})] \quad (14.3.3)$$

$$b_0 = 1,7 + \frac{40000}{\text{Re}_B} \quad (14.3.4)$$

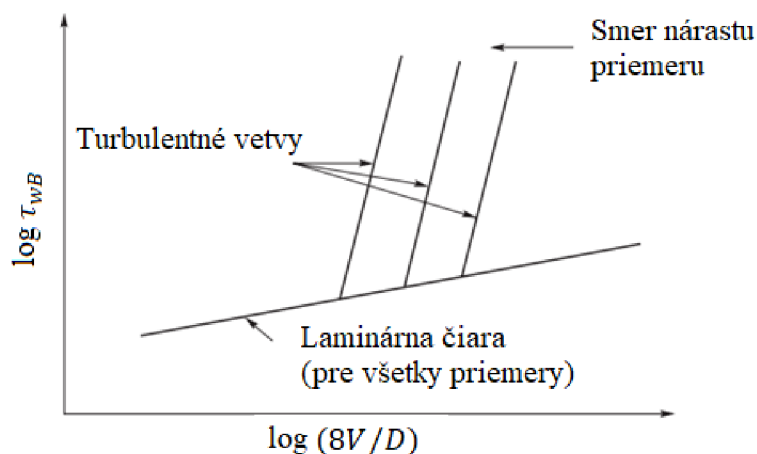
Táto metóda poskytuje uspokojivo presnú kalkuláciu tlakových strát v turbulentnom režime pri podmienkach $D < 335 \text{ mm}$, $\text{Re}_B \leq 3,4 \cdot 10^5$ a $1000 \leq \text{He} \leq 6,6 \cdot 10^7$ [6].

14.4 Bowenova metóda

Bowen navrhol, že pre turbulentný tok kvapaliny možno šmykové napätie v kvapaline pri stene vyjadriť ako:

$$\tau_{wB} = A_B \frac{v^{(b_B)}}{D^{(c_B)}} \quad (14.4.1)$$

A_B, b_B, c_B sú konštanty pre konkrétnu kvapalinu, ktoré je potrebné nadobudnúť experimentálnymi meraniami. Pre laminárny tok sa dáta τ_w ako funkcie hydraulického priemeru ($8V/D$) pre rôzne priemery trubiek zhodujú, avšak pri turbulentnom prúdení je priemer ďalším parametrom. Kvôli explicitnému zahrnutiu vplyvu priemeru je táto metóda používaná najmä pre prenášanie výsledkov experimentov vykonaných na malých trubkách v mierke na veľké trubky. [1]



Obrázok 44: Znáznornenie Bowenovej metódy [1]

Pre zostavenie takéhoto grafu je potrebné namerať dáta v laminárnom aj turbulentnom režime, pre aspoň 2 trubky rôznych priemerov. Tieto dáta by pre laminárne prúdenie vykreslené v dvojito logaritmických súradniciach mali byť reprezentované laminárnou priamkou, z ktorej budú vychádzať ďalšie turbulentné priamky určené pre rozdielne priemery nameraných turbulentných dát. Parameter b_B je smernicou týchto turbulentných priamok. V ideálnom prípade je ich sklon rovnaký, pokiaľ sa sklon líši mala by byť hodnota b_B vyčíslená pre každý priemer a následne použitá stredná hodnota. [1]

$$\left(\frac{-\Delta p}{L}\right) \cdot \frac{D}{4} = \tau_{wB} = A_B \frac{v^{(b_B)}}{D^{(c_B)}} \quad (14.4.2)$$

$$\frac{Lv^{(b_B)}}{(-\Delta p)} = \frac{D^{(1+c_B)}}{4} \quad (14.4.3)$$

Vykreslením tejto závislosti v dvojito logaritmickej súradniciach pre všetky turbulentné dáta nadobudneme priamku, ktorej smernica je $(1 + c_B)$, a to umožňuje vyčísliť parameter c_B . Poslednú konštantu A_B vypočítame pre každú turbulentnú skupinu dát ako [1]:

$$A_B = \frac{\tau_{wB} D^{(c_B)}}{\nu^{(b_B)}} \quad (14.4.4)$$

Podobne ako pri parametri b_B , by mala byť pri ďalších výpočtoch použitá stredná hodnota. Túto rovnicu možno priamo použiť pre vyčíslenie tlakového spádu v turbulentných podmienkach pre rôznych priemer trubky. Použitie tejto metódy je obzvlášť výhodné v prípade, že reologické merania pre laminárny tok sú nedostupné alebo tieto dáta nie je možné dostatočne opísať použitím reologického modelu [5].

ZÁVER

Skupina Neneutronových kvapalín je špeciálnou podkategóriou tekutín, keďže z fyzikálneho hľadiska ide o nie úplne štandardne sa chovajúce látky. Hlavným rozdielom oproti Newtonovským látkam, s ktorými je väčšina ľudí v každodennom kontakte a vyskytujú sa všade okolo nás, je ich reakcia na aplikované napätie. Tieto látky na základe veľkosti napätia menia svoju viskozitu, čím ovplyvňujú predpovedané charakteristiky a kvality prúdenia. Rozdelenie týchto látok prebehlo podľa povahy dôvodu ovplyvňujúceho ich viskozitu na: časovo nezávislé, časovo závislé a viskoelastické kvapaliny. Ďalej boli rozdelené do podskupín na základe ich reologických vlastností. V tejto práci bol vykonaný podrobný popis týchto vlastností a mechanizmov uplatňujúcich sa v spomínaných látkach, ktorý preukázal dôležité rozdiely v reológii, spôsobujúce približované odlišnosti.

V sekcii modelovania správania neneutronových kvapalín boli uvedené najviac používané a najlepšie aplikovateľné modely, pri ktorých boli vysvetlené aj výhody, nevýhody a obmedzenia použitia. Následne, na základe uplatnenia modelov popisujúcich ich správanie v základných vzťahoch používaných v mechanike tekutín boli podrobne ukázané a zdôraznené kvalitatívne aj kvantitatívne rozdiely a kuriozity vznikajúce pri prúdení v laminárnom aj turbulentnom režime.

Pri prúdení Viskoplastických kvapalín vzniká v toku sekundárna oblasť nachádzajúca sa v strede, okolo osi trubky, ktorá sa pohybuje ako pevné teleso. Ide o jedinečnú vlastnosť viskoplastických kvapalín a príčinou jej existencie je schopnosť kvapaliny odolať počiatkovej hodnote napätia, ktorá keď nebude presiahnutá, tak kvapalina netečie.

Porovnaním objemového toku pseudoplastickej kvapaliny pri rovnakom tlakovom spáde vytečie za rovnaký čas väčší objem ako newtonovskej kvapaliny. Pre dilatantnú bude v porovnaní s newtonovskou vytečený objem menší. Tento rozdiel je spôsobený tým, že pri vytekaní neneutronovské látky zásadne zmenia viskozitu.

V potrubných systémoch sú tlakové straty spôsobené prúdením v pseudoplastických kvapalinách väčšie ako v newtonovských, a s dominantnosťou ich charakteru sa veľkosť týchto strát zväčšuje.

Dilatantné látky nadobúdajú pri prúdení v laminárnom režime v porovnaní s pseudoplastickými kvapalinami väčších maximálnych rýchlostí a rozloženie ich rýchlostného profilu je menej rovnomerné. To ma za následok veľké rozdiely menovitých rýchlostí v priereze, ktoré spôsobujú nestabilitu prúdenia.

Z Coriolisovho čísla vyplýva, že energetické straty v pseudoplastickej kvapaline, ktorej Coriolisovo číslo má vyššiu hodnotu, sú väčšie než tie v dilatantnej kvapaline.

Toto sú niektoré z hlavných odlišností, ktoré možno pozorovať u Neneutronových kvapalín. Charakter týchto kvapalín má silný vplyv na všetky ich charakteristiky, ktoré sa výrazne líšia voči tým ktoré by sme predpovedali pre newtonovské kvapaliny. Preto je dôležité tieto kvapaliny rozlišovať a venovať ich vlastnostiam náležitú pozornosť.

Hlavným výsledkom tejto práce je poskytnutie uceleného prehľadu o Neneutronových kvapalinách, keďže tematika Neneutronových kvapalín je pomerne novodobé a nepreskúmané téma, ktoré v tejto dobe nachádza stále novo vznikajúce praktické aplikácie a jeho uplatnenie je permanentne dôležité vo veľa odvetviach priemyslu, prírode a aj vo výukových procesoch.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATURY

- [1] CHHABRA, R.P. a J.F. RICHARDSON. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*. Butterworth-Heinemann, 1999. ISBN 978-0-7506-3770-1. Dostupné také z: <https://www.sciencedirect.com/book/9780750637701/non-newtonian-flow-in-the-process-industries>
- [2] IRGENS, Fridtjov. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Springer Cham, 2013, IX, 190. První vydání. ISBN 978-3-319-01053-3. Dostupné také z: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-01053-3>
- [3] BOHME, G. *NON-NEWTONIAN FLUID MECHANICS* [online]. ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V, 1987 [cit. 2023-01-13]. ISBN 0-444-70186-9. Dostupné z: <https://vdoc.pub/documents/non-newtonian-fluid-mechanics-4l42lb6dv5t0>
- [4] BIRD, R.B., R.C. ARMSTRONG a O. HASSAGER. *Dynamics of polymeric fluids: Volume 1: Fluid mechanics* [online]. Druhé vydanie. New York: John Wiley, 1987 [cit. 2023-01-13]. ISBN 0-471-80245-X. Dostupné z: [https://www.eng.uc.edu/~beaucag/Classes/Properties/Books/Dynamics%20of%20Polymer%20Liquids%20Vol.%201\)%20Bird%20Armstrong%20Curtis%20Hassager.pdf](https://www.eng.uc.edu/~beaucag/Classes/Properties/Books/Dynamics%20of%20Polymer%20Liquids%20Vol.%201)%20Bird%20Armstrong%20Curtis%20Hassager.pdf)
- [5] BACKHURST, J R, J H HARKER, J.F. RICHARDSON a J.M. COULSON. *Coulson & Richardson's Chemical Engineering Vol.1 Edition: 6* [online]. Butterworth-Heinemann, 1999 [cit. 2023-01-26]. ISBN 0750644443. Dostupné z: <https://libgen.li/edition.php?id=137008821>
- [6] CHHABRA, R. P. a J.F. RICHARDSON. *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications Edition: 2* [online]. Butterworth-Heinemann, 2008 [cit. 2023-01-26]. ISBN 9780750685320. Dostupné z: <https://libgen.li/edition.php?id=136036108>
- [7] DODGE, D. W. a A. B METZNER. Turbulent flow of non-newtonian systems. *AIChE Journal* [online]. American Institute of Chemical Engineers; Wiley; Wiley (John Wiley & Sons); Wiley-Blackwell, 1959 June, 189-204 [cit. 2023-01-26]. ISSN 0001-1541. Dostupné z: doi:10.1002/aic.690050214
- [8] ESHTIAGHI, Nicky, Flora MARKIS a Paul SLATTER. The laminar/turbulent transition in a sludge pipeline. *Water Science and Technology*. 2012, **65**(4), 697-702. ISSN 0273-1223. Dostupné z: doi:10.2166/wst.2012.893
- [9] KRISHNAN THOTA RADHAKRISHNAN, Adithya, Christian POELMA, Jules VAN LIER a Francois CLEMENS. Laminar-turbulent transition of a non-Newtonian fluid flow. *Journal of Hydraulic Research*. 2021, **59**(2), 235-249. ISSN 0022-1686. Dostupné z: doi:10.1080/00221686.2020.1770876
- [10] RYAN, N. W. a M. M. JOHNSON. Transition from laminar to turbulent flow in pipes. *AIChE Journal*. 1959, **5**(4), 433-435. ISSN 0001-1541. Dostupné z: doi:10.1002/aic.690050407

- [11] HANKS, Richard W. The laminar-turbulent transition for fluids with a yield stress. *AIChE Journal*. 1963, **9**(3), 306-309. ISSN 0001-1541. Dostupné z: doi:10.1002/aic.690090307
- [12] GÜRGEN, Selim, Melih Cemal KUŞHAN a Weihua LI. Shear thickening fluids in protective applications: A review. *Progress in Polymer Science*. 2017, **75**, 48-72. ISSN 00796700. Dostupné z: doi:10.1016/j.progpolymsci.2017.07.003
- [13] TIAN, Chengjin, Jinguo HAN, Yebing TIAN, Bing LIU, Zhiqiang GU a Xintao HU. Simulation Analysis of Cluster Effect of High-Shear Low-Pressure Grinding with Flexible Abrasive Tools. *Micromachines*. 2021, **12**(7). ISSN 2072-666X. Dostupné z: doi:10.3390/mi12070827
- [14] SHARP, Bruce a David SHARP. *Water Hammer: Practical Solutions* [online]. 2nd Edition. Burlington: Butterworth-Heinemann, 1995 [cit. 2023-05-23]. ISBN 0 340 64597 0. Dostupné z: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=4df844763cd95faea42d4a7a8832a70f>
- [15] MAJD, Ali, Ahmad AHMADI a Alireza KERAMAT. Investigation of Non-Newtonian Fluid Effects during Transient Flows in a Pipeline. *Strojníški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*. 2016, 105-115. ISSN 00392480. Dostupné z: doi:10.5545/sv-jme.2015.2787
- [16] Moody chart. In: *Wikipedia* [online]. last edited on 13 March 2023 [cit. 2023-05-23]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Moody_chart#/media/File:Moody_EN.svg

ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK

PL	Kvapaliny riadiace sa mocninovým modelom (Powerlaw kvapaliny)
NPL	Kvapaline neriadiace sa mocninovým modelom

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

a	Kinetický parameter pre modelovanie časovo závislého správania [-]
a_Y	Yasudov parameter [-]
a_0	Parameter Darbyho modelu [-]
A	Parameter mocninného modelu pri referenčnej hodnote teploty [-]
A_1	Funkcia indexu správania toku [-]
A_2	Konštanta rovnice trecieho faktoru newtonovského prípadu [-]
A_B	Konštanta Bowenovho modelu [$Pa \cdot s$]
α	Coriolisovo číslo [-]
α_E	Parameter Ellisovho modelu [-]
b	Kinetický parameter pre modelovanie časovo závislého správania [-]
b_B	Konštanta Bowenovho modelu [-]
b_0	Parameter Darbyho modelu [-]
B	Parameter mocninného modelu pri referenčnej hodnote teploty [-]
Bi	Binghamské číslo [-]
c_B	Konštanta Bowenovho modelu [-]
C	Integračná konštanta [-]
C_1	Funkcia indexu správania toku [-]
C_2	Konštanta rovnice trecieho faktoru newtonovského prípadu [-]
D	Priemer [m]
D_1	Funkcia indexu správania toku v Irvinovej rovnici [-]
$D_{šmyk}$	Priemer redukovanej oblasti používanej v Slatterovom kritériu [m]
d	Priemer trubky [m]
d	Priemer trysky [m]
d_e	Priemer toku po opustení trysky [m]
ε	Absolútna drsnosť vnútra trubky [m]
η	Zdanlivá viskozita [$Pa \cdot s$]
f	Darcy-Weisbachov trecí faktor [-]
f'	Fanningov trecí faktor [-]
f_D	Darbyho model trecieho faktoru [-]
f_L	Trecí faktor prúdenia používaný v Darbyho modely [-]

f_T	Trecí faktor průdenia používaný v Darbyho modely [-]
F	Pôsobiaci sila [N]
ϕ	Relatívny polomer jadra [-]
ϕ_c	Relatívny polomer tekutej oblasti [-]
G	Youngov modul v šmyku [Pa]
He	Hedströmovo číslo [-]
$\dot{\gamma}$	Rýchlostný gradient [s^{-1}]
$\dot{\gamma}_1$	Deformácia Maxwell a Voightovom modely [s^{-1}]
$\dot{\gamma}_2$	Deformácia Maxwell a Voight modely [s^{-1}]
$\dot{\gamma}_{yx}$	Rýchlostný gradient [s^{-1}]
k	Relatívna drsnosť [-]
L	Dĺžka [m]
L_e	Vstupná dĺžka [m]
λ	Moodyho trecí factor [-]
μ	Viskozita [Pa · s]
μ_B	Viskozita Binghamskej kvapaliny [Pa · s]
μ_∞	Hodnota nekonečnej viskozity [Pa · s]
μ_0	Hodnota nulovej viskozity [Pa · s]
m	Koeficient konzistencie kvapaliny [Pa · s ⁿ]
\dot{m}	Hmotnosť [kg]
m'	Koeficient konzistencie kvapaliny MR Reynoldsovho čísla [-]
m_0	Parameter mocninového modelu pri referenčnej hodnote teploty [-]
m_1	Príspevok koeficientu konzistencie od časovo závislého chovania [-]
m_p	Permanentný koeficient konzistencie kvapaliny [-]
n	Index správania toku [-]
n'	Index správania toku v MR Reynoldsovom čísle [-]
n_0	Parameter mocninového modelu pri referenčnej hodnote teploty [-]
ω	Uhlová rýchlosť [$rad \cdot s^{-1}$]
p	Tlak [Pa]
Δp	Zmena hodnoty tlaku [Pa]

p_a	Atmosférický tlak [Pa]
p_A	Tlak v mieste B [Pa]
p_B	Tlak v mieste A [Pa]
Q	Objemový tok [$m^3 \cdot s^{-1}$]
$Q_{PEVNÝ STRED}$	Objemový tok pevného stredu Binghamskej kvapaliny [$m^3 \cdot s^{-1}$]
Q_{TOK}	Objemový tok tekutej oblasti Binghamskej kvapaliny [$m^3 \cdot s^{-1}$]
r	Súradnica [m]
R	Polomer [m]
R_p	Polomer oblasti chovajúcej sa ako tuhé teleso [m]
Re	Reynoldsovo číslo [-]
Re_B	Reynoldsovo číslo Binghamskej kvapaliny [-]
$(Re_B)_c$	Reynoldsovo číslo používané v Hanksovom kritériu [-]
Re_{mod}	Modifikované Reynoldsovo číslo používané v Slatterovom kritériu [-]
ρ	Hustota [$kg \cdot m^{-3}$]
S	Plocha [m^2]
t	Príslušná hodnota teploty pre modifikáciu koeficientov mocninového modelu [$^{\circ}C$]
t_0	Základná hodnota teploty pre modifikáciu koeficientov mocninového modelu [$^{\circ}C$]
t_c	Kritická hodnota teploty viskoelastických vlastností [$^{\circ}C$]
τ	Šmykové napätie [Pa]
$\tau_{1/2}$	Šmykové napätie používané v Ellisovom modeli [Pa]
τ_k	Šmykové napätie v kvapaline [Pa]
τ_{rz}	Šmykové napätie v kvapaline vo vzdialenosti r [Pa]
τ_s	Šmykové napätie pri stene [Pa]
τ_{yx}	Šmykové napätie v rovine xy [Pa]
τ_0^B	Počiatkový odpor Binghamskej kvapaliny [Pa]
τ_{yP}	Permanentný počiatkový odpor [Pa]
τ_{y1}	Príspevok napätia od časovo závislého chovania [Pa]
τ_{WB}	Šmykové napätie Bowenovho modelu [Pa]
v	Rýchlosť prúdenia kvapaliny [$m \cdot s^{-1}$]

v_1	Rýchlost lopty v nádobě s kvapalinou číslo 1 [$m \cdot s^{-1}$]
v_2	Rýchlost lopty v nádobě s kvapalinou číslo 2 [$m \cdot s^{-1}$]
v_{oblast}	Rýchlost kvapaliny v kruhovej oblasti používaná pri Slatterovom kritériu [$m \cdot s^{-1}$]
v_x	Rýchlost kvapaliny v smere osi x [$m \cdot s^{-1}$]
v_z	Rýchlost kvapaliny v smere osi z [$m \cdot s^{-1}$]
v_{zMAX}	Maximálna rýchlosť [$m \cdot s^{-1}$]
v_{zp}	Rýchlosť pevného stredu Binghamskej kvapaliny [$m \cdot s^{-1}$]
y	Súradnica [m]
y_L	Hrúbka laminárnej podvrstvy [m]
y_T	Hrúbka laminárnej podvrstvy [m]
Y_{ZD}	Dĺžkové straty [$J \cdot kg^{-1}$]
Y_{ZM}	Miestne straty [$J \cdot kg^{-1}$]
ζ_D	Stratový súčiniteľ dĺžkových strát [-]
ζ_M	Stratový súčiniteľ miestnych strát [-]
Z_{RJ}	Parameter Ryan Johnosn [-]
ξ	Skalárny parameter používaný pre modelovanie časovo závislého správania [-]