

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Metody vnitřních bodů



**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**  
Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**  
Vypracoval: **Bc. Jana Radová**  
Studijní program: N1101 Matematika  
Studijní obor: Matematika a její aplikace  
Forma studia: prezenční  
Rok odevzdání: 2017

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Bc. Jana Radová

**Název práce:** Metody vnitřních bodů

**Typ práce:** Diplomová práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2017

**Abstrakt:** Cílem diplomové práce bylo nastudovat metody vnitřních bodů a ukázat využití těchto metod při řešení úloh kvadratického programování konkrétně kontaktní úlohy pro Euler-Bernoulliho nosník s podložím. Práce se zabývá metodou sledování cesty s dlouhým krokem, metodou s nepřipustným bodem a praktickou primárně-duální metodou. Práce je doplněna příklady a ilustrativními obrázky.

**Klíčová slova:** kvadratické programování, metody vnitřních bodů, lineární Euler-Bernoulliho nosník, kontaktní úloha.

**Počet stran:** 70

**Počet příloh:** 2

**Jazyk:** český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Bc. Jana Radová

**Title:** Interior point methods

**Type of thesis:** Master's thesis

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

**The year of presentation:** 2017

**Abstract:** The aim of the Master's thesis is to review of Interior point methods and their using for problem solving of quadratic programming and contact problem for Euler-Bernoulli beam with foundation. The work presents the long step path following algorithm, infeasible interior point algorithm and practical primal dual method. This work is completed with examples and pictures illustrations.

**Key words:** quadratic programming, interior point methods, linear Euler-Bernoulli beam, contact problem.

**Number of pages:** 70

**Number of appendices:** 2

**Language:** Czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením RNDr. Jitky Machalové, Ph.D., a že všechny zdroje použité při zpracování této práce jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne 20. dubna 2017

# Obsah

<b>Použité symboly</b>	<b>7</b>
<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>1 Úvodní kapitola</b>	<b>10</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	10
1.2 Newtonova metoda pro systémy nelineárních rovnic . . . . .	11
1.3 Základní pojmy nelineárního programování . . . . .	13
<b>2 Metody vnitřních bodů</b>	<b>17</b>
2.1 Primární a duální úloha . . . . .	17
2.2 Princip metody vnitřních bodů . . . . .	18
2.3 Centrální cesta . . . . .	20
2.3.1 Sledování cesty . . . . .	24
2.3.2 Sledování cesty s nepřipustným bodem . . . . .	27
2.4 Centrální cesta s doplňkovou proměnnou . . . . .	30
2.4.1 Praktická primárně-duální metoda . . . . .	33
<b>3 Euler-Bernoulliho nosník</b>	<b>40</b>
3.1 Rovnice Euler-Bernoulliho nosníku . . . . .	40
3.2 Kontaktní úloha pro nosník s podložím . . . . .	42
3.3 Metoda konečných prvků . . . . .	44
3.4 Řešení kontaktní úlohy . . . . .	49
3.4.1 Oboustranně vetknutý nosník . . . . .	50
3.4.2 Prostě podepřený nosník . . . . .	54
3.4.3 Vetknutý nosník s podepřením . . . . .	58
3.4.4 Vetknutý nosník s volným koncem . . . . .	62
<b>Závěr</b>	<b>67</b>
<b>Literatura</b>	<b>68</b>
<b>Příloha 1</b>	<b>69</b>
<b>Příloha 2</b>	<b>70</b>

## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí mé diplomové práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D za cenné rady a trpělivost, kterou mi věnovala při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za podporu během studia.

## Použité symboly

$\mathbb{N}_0$	.....	množina přirozených čísel s 0
$\mathbb{R}$	.....	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	.....	množina komplexních čísel
$\mathbb{R}^r$	.....	$r$ - rozměrný reálný vektorový prostor
$\mathbb{C}^r$	.....	$r$ - rozměrný komplexní vektorový prostor
$\nabla f(\mathbf{x})$	.....	gradient funkce $f(\mathbf{x})$
$O(\boldsymbol{\xi})$	.....	okolí bodu $\boldsymbol{\xi}$
$\ \mathbf{x}\ _\infty$	.....	maximální norma
$\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$	.....	Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{F}$ v bodě $(\mathbf{x})$
$H^k((0, L))$	..	Sobolevův prostor
$\text{supp } u$	.....	nosič funkce $u$
$D^\alpha v$	.....	zobecněná derivace funkce $v$
$\delta_{ki}$	.....	Kroneckerovo delta

# Úvod

Metody vnitřních bodů patří dnes k hlavním metodám řešícím obecné úlohy nelineárního programování. Hlavní výhodou těchto metod je nesporně to, že dokáží najít řešení v polynomiálním čase. Princip metod se poprvé objevil v roce 1984 v práci indického matematika Karmakera. Diplomová práce se zabývá několika modifikacemi metod vnitřních bodů a ty jsou ilustrovány na typových příkladech kvadratického programování na konvexní množině.

Úvodní kapitola se zabývá několika základními pojmy z matematické analýzy, numerické matematiky a optimalizace, především nutnými a postačujícími a Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínkami optimality prvního a druhého řádu.

Ve druhé kapitole se již zaměříme na metody vnitřních bodů. Nejprve se seznámíme s primární a duální úlohou a obecným principem metody vnitřních bodů. Poté se budeme věnovat jednotlivým modifikacím této metody, zejména sledování cesty s dlouhým krokem, sledování cesty s nepřipustným bodem a praktickou primárně-duální metodou vnitřních bodů. Kromě teoretického představení těchto metod se také budeme věnovat jejich praktickému použití pro úlohu kvadratického programování s rovnostními i nerovnostními omezeními.

Třetí kapitola se zabývá Euler-Bernoulliho modelem nosníku a kontaktní úlohou pro nosník s podložím. Abychom mohli aplikovat metodu vnitřních bodů na kontaktní úlohu pro Euler-Bernoulliho nosník, musíme nejprve najít vhodnou formulaci této úlohy a přesvědčit se, že existuje řešení, popřípadě zda je toto řešení jediné. Aplikací metody konečných prvků dostaneme úlohu kvadratického programování na konvexní množině a tu pak vyřešíme pomocí praktické primárně-duální metody vnitřních bodů.

V závěrečné části této práce prezentujeme dosažené výsledky kontaktní úlohy pro nosník s podložím pro čtyři typy nosníků z různých materiálů a s různým zatížením. Pro názornost a jednoduché srovnání jsme dosažené výsledky vykreslili do několika grafů.



Praktické úlohy jsou řešeny pomocí vlastních programových kódů sestavených v matematickém softwaru MATLAB a jsou čtenáři k dispozici na přiloženém CD.

# 1. Úvodní kapitola

V úvodní části této práce se nejprve budeme věnovat několika základním matematickým pojmům a značením, které jsou nezbytné k uvedení stěžejních metod a tvrzení této práce. Dále se budeme věnovat Newtonově metodě pro řešení soustav nelineárních rovnic. A nakonec si představíme několik základních vět a definic týkajících se zejména nutných a postačujících podmínek optimality pro úlohu nelineárního programování.

## 1.1. Základní pojmy

Věty a definice v této kapitole jsou převzaty z [3] a [10].

**Definice 1.1** (Vektorová norma)

**Vektorová norma** na  $\mathbb{C}^n$  je funkce  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s následujícími vlastnostmi

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T,$
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$

**Poznámka 1.1** Symbolem  $\|\mathbf{x}\|_\infty$ , budeme rozumět maximální (krychlovou) normu, tj.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

**Definice 1.2** (Diferencovatelné zobrazení)

Zobrazení  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se nazývá **diferencovatelné** v bodě  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , jestliže v tomto bodě existují příslušné parciální derivace  $\frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \forall i, j = 1, \dots, n$ .

**Definice 1.3** (Jacobiova matice)

Nechť  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je diferencovatelné zobrazení v bodě  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Pak matici

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

nazveme **Jacobiova matice** zobrazení  $\mathbf{F}$  v bodě  $\mathbf{x}$ .

## 1.2. Newtonova metoda pro systémy nelineárních rovnic

V této kapitole bylo čerpáno z [3], [5] a [6].

Mějme dáno  $n$  nelineárních rovnic o  $n$  neznámých, tj.

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Tento systém můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ . Soustavu obecně nelineárních rovnic  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  budeme řešit pomocí Newtonovy metody. Newtonova metoda je iterační metoda, jejíž idea spočívá v nalezení vhodné aproximační funkce  $\mathbf{q}^k$  funkce  $\mathbf{F}$  v daném bodě  $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ , kde  $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T$ , přičemž index  $k$  označuje  $k$ -tou iteraci. Funkci  $\mathbf{F}$  budeme aproximovat lineární částí Taylorova rozvoje. Nechť tedy  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitě diferencovatelná funkce v bodě  $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$  a funkce  $\mathbf{q}^k(\mathbf{x}^k)$  je lineární část Taylorova rozvoje, tj.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^k)\mathbf{h} = \mathbf{q}^k(\mathbf{x}^k),$$

kde  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$  a  $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$  je Jacobiova matice funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Místo soustavy rovnic  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  tedy řešíme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{0}.$$

Iterační metodu

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}_F(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{0} \quad (1)$$

nazýváme Newtonovou metodou. Pro další výpočet vztah (1) upravíme následujícím způsobem. Snadnou úpravou odřízne

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k). \quad (2)$$

Nyní položme

$$\Delta \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \quad \text{odtud} \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k.$$

Dosazením do systému (2) dostaneme

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}^k)\Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k). \quad (3)$$

Systém (3) je nyní již systémem lineárních rovnic pro neznámé  $\Delta \mathbf{x}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Najdeme řešení  $\Delta \mathbf{x}^k$  systému (3) a novou iteraci položíme rovnu

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k.$$

Standardní Newtonova metoda primárně počítá s délkou kroku  $\alpha_k = 1$ . V některých případech je ovšem zapotřebí délku kroku regulovat, přičemž krok  $\alpha_k \in (0, 1]$ . V takovém případě nově vypočtenou iteraci pokládáme rovnu

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \Delta \mathbf{x}^k.$$

Některým možným variantám výpočtu modifikovaných kroků se budeme věnovat později.

**Věta 1.1** (Konvergence Newtonovy metody)

Nechť  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$  je kořen rovnice  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , tedy uspořádaná  $n$ -tice reálných čísel vyhovující této rovnici. Nechť  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$  je regulární matice se spojitými prvky v okolí  $O(\mathbf{x}^*)$ , přičemž

$$\|J_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq K, \quad K \in \mathbb{R},$$

pro všechna  $\mathbf{x}$  z tohoto okolí. Nechť funkce  $F_1, \dots, F_n$  mají spojité druhé parciální derivace v  $O(\mathbf{x}^*)$ . Posloupnost  $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$  určená Newtonovou metodou konverguje ke kořenu  $\mathbf{x}^*$  za předpokladu, že počáteční aproximace  $\mathbf{x}^0$  leží dostatečně blízko kořenu  $\mathbf{x}^*$ . Řád metody je roven dvěma.

**Důkaz:** viz [11].

### 1.3. Základní pojmy nelineárního programování

Věty a definice v této kapitole jsou převzaty z [5] a [9].

**Definice 1.4** (Úloha (NLP))

Nechť  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

a  $h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , jsou dané funkce  $n$  proměnných. Nechť  $X$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Úloha

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in X \\ \text{za podmínek} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, & j \in J = \{1, \dots, r\}, \end{cases}$$

se nazývá **obecnou úlohou nelineárního programování (NLP)**.

Zápisy  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $i \in I$  a  $h_j(\mathbf{x}) = 0$ ,  $j \in J$ , představují omezení dané úlohy tvaru nerovností resp. rovností. Používají se rovněž názvy omezující podmínky, vazbové podmínky nebo krátce vazby.

V případě, že  $m = 0$ , hovoříme o úloze s omezením tvaru rovností. Je-li  $r = 0$ , mluvíme o úloze s omezením tvaru nerovností.

**Poznámka 1.2** Symbolem  $\nabla f(\mathbf{x})$  budeme značit gradient funkce  $f(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x}$ , tj.  $\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T$ . Dále funkcemi  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  budeme rozumět vektorové funkce

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T \text{ a } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_r(\mathbf{x}))^T.$$

**Definice 1.5** Přípustnou množinou úlohy (NLP), viz definice 1.4, budeme rozumět množinu

$$S = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

**Věta 1.2** (Karush - Kuhn - Tuckerovy nutné podmínky optimality (KKT))  
Nechť  $\mathbf{x}^* \in S$  je bod lokálního minima úlohy (NLP). Nechť

$$I(\mathbf{x}^*) = \{i \in I : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

a necht' gradienty  $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$ ,  $i \in I(\mathbf{x}^*)$ , a  $\nabla h_j(\mathbf{x}^*)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , jsou lineárně nezávislé. Potom existuje dvojice vektorů  $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$  taková, že platí

- $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ ,
- $\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ ,
- $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ .

**Důkaz:** viz [5], strana 24.

**Poznámka 1.3** KKT nutnými podmínkami optimality budeme rozumět tři podmínky na vektory  $\boldsymbol{\lambda}^*$ ,  $\boldsymbol{\mu}^*$  a bod  $\mathbf{x}^*$  z předchozí věty. K těmto podmínkám často připojujeme tzv. podmínky přípustnosti tj.

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ a } h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, r.$$

Podmínky přípustnosti často zjednoduší hledání řešení dané optimalizační úlohy.

**Poznámka 1.4** Podmínky  $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$  se nazývají podmínky komplementarity.

**Definice 1.6** (Lagrangeova funkce)

**Lagrangeovou funkcí nebo lagrangeiánem** příslušející obecné úloze nelineárního programování (*NLP*) nazveme funkci

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Čísla  $\lambda_i \geq 0$  jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušející omezením  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$  a čísla  $\mu_j \in \mathbb{R}$  jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušející omezením  $h_j(\mathbf{x}) = 0$ .

**Poznámka 1.5** Nyní uvedeme několik pojmů a označení, které jsou nezbytné k zavedení podmínek optimality 2. řádu.

- Symbolem  $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  budeme rozumět gradient funkce  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ , tj.

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \left( \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n} \right)^T.$$

- Symbolem  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  budeme rozumět matici

$$\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

- Množina  $LFD(\mathbf{x})$  označuje množinu linearizovaných přípustných směrů, tj.

$$LFD(\mathbf{x}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\mathbf{x})^T \mathbf{p} \leq 0 \ \forall i \in I(\mathbf{x}), \ \mathbf{p}^T \nabla h_j(\mathbf{x}) = 0, \ \forall j \in J\},$$

kde  $\mathbf{x} \in S$ , množina  $I(\mathbf{x})$  je indexová množina aktivních nerovnostních omezujících podmínek, tedy takových podmínek, které jsou v daném bodě  $\mathbf{x}$  rovny 0.

- $C_p(\mathbf{x}) = \{\mathbf{p} \in LFD(\mathbf{x}) : \mathbf{p}^T \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0 \ \forall i \in I(\mathbf{x}) : \lambda_i > 0\}$  označuje kritický kužel, kde  $\mathbf{x}$  je bodem lokálního minima dané úlohy (*NLP*). Vektory  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$  jsou vektory Lagrangeových multiplikátorů vyhovující KKT podmínkám.

**Poznámka 1.6** Pomocí Lagrangeovy funkce můžeme první KKT podmínku z věty 1.2 zapsat následujícím vztahem

$$\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Nyní již můžeme přistoupit k samotné formulaci postačujících podmínek optimality 2. řádu.

**Věta 1.3** (Postačující podmínky optimality 2. řádu)

*Nechť  $\mathbf{x}^* \in S$  a necht existují vektory Lagrangeových multiplikátorů  $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$  a  $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^r$  takové, že společně splňují KKT podmínky a podmínky přípustnosti*

- $\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}$ ,
- $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ ,
- $h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, r$ ,
- $\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ ,
- $\lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ .

*Nechť navíc platí  $\mathbf{p}^T \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{p} > 0 \quad \forall \mathbf{p} \in C_p(\mathbf{x}^*), \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ .*

*Potom  $\mathbf{x}^*$  je bodem ostrého lokálního minima úlohy (NLP).*

**Důkaz:** viz [5], strana 21.



## 2. Metody vnitřních bodů

Metody vnitřních bodů jsou dnes velmi účinnou metodou pro řešení obecných úloh nelineárního programování, které jsou velmi obtížně řešitelné, a jejich řešení lze nalézt v polynomiálním čase. Princip metody vnitřních bodů se poprvé objevil roku 1984. Existuje několik různých variací metod vnitřních bodů. V této práci se budeme zajímat o primárně-duální metody a jejich použití na praktických příkladech pro úlohu kvadratického programování, zejména při výpočtu kontaktní úlohy Euler-Bernoulliho nosníku s dokonale tuhým podložím.

### 2.1. Primární a duální úloha

Zde bylo čerpáno z [1], [3], [5] a [10].

V této práci se budeme zabývat úlohou kvadratického programování následujícího tvaru

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{d} \\ \text{za podmíněk} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4)$$

kde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Úlohu (4) nazveme **primární úlohou** kvadratického programování, přičemž proměnnou  $\mathbf{x}$  budeme nazývat **primární proměnnou**. K primární úloze můžeme formulovat **úlohu duální** následujícím vztahem

$$\begin{cases} \text{maximalizovat funkci} & + \mathbf{b}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \\ \text{za podmíněk} & - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} + \mathbf{C}\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{d}, \\ & \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (5)$$

a o proměnných  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\lambda}$  budeme mluvit jako o **duálních proměnných**. Je-li matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně semidefinitní, tj. pro libovolný vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  splňuje podmínku  $\mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} \geq 0$ , pak je funkce  $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{d}$  konvexní. Pokud je matice  $\mathbf{C}$  pozitivně definitní, pak je funkce  $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{d}$  ryze konvexní. Dále v celé práci budeme uvažovat pouze úlohy, v nichž je matice  $\mathbf{C}$  pozitivně definitní a matice

$\mathbf{A}$  je matice s plnou řádkovou hodnotí, tj. omezující rovnostní podmínky jsou lineárně nezávislé.

Uvažujme úlohu kvadratického programování (4), pro níž si předepíšeme KKT podmínky optimality dle věty 1.3 spolu s podmínkami přípustnosti, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \lambda_i x_i &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{6}$$

K ověření poslední podmínky věty 1.3 musíme nejprve najít matici  $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ . Pro úlohu kvadratického programování je

$$\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{C},$$

hledáme tedy takové  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$ , aby platilo

$$\mathbf{p}^T \mathbf{C} \mathbf{p} > 0 \quad \forall \mathbf{p} \in C_p(\mathbf{x}), \mathbf{p} \neq \mathbf{0}. \tag{7}$$

Ze začátku této kapitoly víme, že matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní, tedy nerovnost (7) je splněna pro  $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  a tudíž i pro  $\forall \mathbf{p} \in C_p$ . Podmínku (7) budeme považovat automaticky za splněnou. Úloha, kde funkce  $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d}$  je konvexní a přípustná množina  $S$  je konvexní podmnožinou v  $\mathbb{R}^n$  nazveme úlohou konvexního programování. Pro tuto úlohu jsou nutné KKT podmínky zároveň podmínkami postačujícími, podrobnější informace lze najít např. v [5], str. 37. Tedy bod  $\mathbf{x}$ , splňující tyto podmínky, je bodem ostrého lokálního minima dané úlohy. Pro tento typ úlohu můžeme ovšem říci, že bod  $\mathbf{x}$  splňující tyto podmínky, je bodem globálního minima, viz [5], str. 36.

## 2.2. Princip metody vnitřních bodů

V kapitole bylo čerpáno z [5], [12] a [13].

Uvažujme úlohu (6). Úkolem je tedy najít takové  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ , které tyto KKT pod-

mínky splňují. Dále si KKT podmínky přepíšeme pomocí dvou vektorových funkcí  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  a  $\mathbf{0}$ , které jsou dány následujícími vztahy

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \\ \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

kde  $\mathbf{X} = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  a  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ . Dostaneme soustavu nelineárních rovnic

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0},$$

kteřou lze například řešit Newtonovou metodou (kapitola 1.2).

Přípustnou množinou úlohy (4) resp. (5) rozumíme tzv. **primárně-duální přípustnou množinu** definovanou následujícím vztahem

$$S = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}.$$

Tato množina bude zaměněna za striktně přípustnou množinu, tedy množinu

$$S^0 = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) : \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}\},$$

neboť budeme požadovat, aby nově vypočtené iterace ležely uvnitř striktně přípustné množiny. Během výpočtu budeme modifikovat kroky tak, aby nerovnice z KKT podmínek byly splněny striktně, tedy  $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Právě tato podmínka zaručuje, že nově vypočtené iterace budou ležet uvnitř striktně přípustné množiny. Odtud nese metoda vnitřních bodů i svůj název.

Tato metoda generuje posloupnost iterací  $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$  ležících v  $S^0$ . Iterační posloupnost je vypočtena pro primární (4) i duální (5) úlohu současně, proto tedy hovoříme o primárně-duální metodě vnitřních bodů. V  $k$ -tém kroku Newtonovy metody řešíme soustavu rovnic

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^k \\ \Delta\boldsymbol{\mu}^k \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^k \end{pmatrix} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k), \quad (9)$$

kde  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  je Jacobiova matice funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ . Ta je dána následujícím vztahem

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{pmatrix}.$$

Pokud je  $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) \in S^0$ , pak pravá strana soustavy rovnic (9) přejde do následujícího tvaru

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{X}^k \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

tedy body z  $S^0$  částečně nulují pravou stranu systému.

V každé iteraci Newtonovy metody je třeba dávat pozor, zda právě vypočtená iterace spadá do množiny  $S^0$ . Zavedeme nový parametr, tzv. délku kroku  $\alpha_k \in (0, 1]$  tak, aby pro každou novou iteraci

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) + \alpha_k (\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \boldsymbol{\mu}^k, \Delta \boldsymbol{\lambda}^k)$$

platilo  $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) \in S^0$ . Pokud je hodnota parametru  $\alpha_k = 1$ , dostáváme standardní Newtonovu metodu, která v tomto případě není vhodná, neboť může dojít k porušení podmínek kladených na neznámý vektor  $\mathbf{x}^{k+1}$  a multiplikátor  $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ . Parametr  $\alpha_k$  volíme tak, aby bylo současně splněno

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) > \mathbf{0}. \quad (11)$$

Nevýhodou právě popsané metody je, že někdy můžeme udělat jen velmi malý krok, aby nebyla porušena podmínka (11), a tím pak metoda konverguje velmi pomalu. Z toho důvodu se zaměříme na modifikace této metody, které nám umožní rychlejší konvergenci a delší krok.

### 2.3. Centrální cesta

V této kapitole bylo čerpáno z [1], [5], [12] a [13].

Efektivnější proces výpočtu využívá ideje centrální cesty

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\lambda}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau)) : \tau > 0\}.$$

Centrální cestou tedy rozumíme křivku, která je parametrizována parametrem  $\tau > 0$ . Její klíčová vlastnost je porušení neboli perturbace podmínek komplementarity v KKT podmínkách

$$x_i \lambda_i = \tau, \quad i = 1, \dots, n.$$

Metoda centrální cesty omezuje nově vypočtené iterace na blízké okolí centrální cesty. V dalším pokračování textu budeme opět, jako tomu bylo v předchozí kapitole, požadovat, aby byla splněna podmínka  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} > 0$  striktně. Tuto podmínku implementujeme do KKT podmínek.

Dostaneme tedy systém s kladnými podmínkami, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X} \mathbf{e} &= \tau \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x} &> \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{X} = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  a  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ . Newtonovou metodou následně řešíme soustavu

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tau \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

kde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$  je definována vztahem (8).

V primárně-duální metodě se obvykle v  $k$ -té iteraci parametr  $\tau$  určuje pomocí dvou dalších parametrů. První parametr je tzv. **míra duality**, která je dána vztahem

$$\theta_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \lambda_i^k = \frac{(\mathbf{x}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k}{n}.$$

Druhý parametr, který zavedeme, je tzv. **centrující parametr**  $\sigma \in [0, 1]$ . Pokud je parametr  $\sigma = 1$ , pohybujeme se v každé iteraci po centrální cestě  $\mathcal{C}$ . Je-li  $\sigma \in [0, 1)$ , pohybujeme se v nějakém okolí centrální cesty.

Nyní definujme parametr

$$\tau_k = \theta_k \sigma.$$

K vyřešení nelineární soustavy rovnic (12) opět použijeme Newtonovu metodu, která má v  $k$ -té iteraci tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Lambda}^k & \mathbf{0} & \mathbf{X}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ -\mathbf{X}^k \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + \tau_k \mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Soustavu rovnic můžeme vyřešit např. pomocí postupné eliminace proměnných. Tento postup můžeme použít, pokud jsou všechny matice na hlavní diagonále dané soustavy regulární. Pro přehlednost si označme

$$\mathbf{r}_1^k = -\mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d}, \quad \mathbf{r}_2^k = -\mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b}.$$

Nyní již můžeme přistoupit k eliminaci soustavy (13). Z posledního řádku této soustavy je

$$\mathbf{X}^k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k = -\mathbf{X}^k \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + \tau_k \mathbf{e} - \boldsymbol{\Lambda}^k \Delta \mathbf{x}^k,$$

díky předpokladu  $\mathbf{x}^k > 0$  je matice  $\mathbf{X}^k$  regulární diagonální matice, ke které existuje inverzní matice. Odtud můžeme vyjádřit

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^k = -\boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + (\mathbf{X}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} - (\mathbf{X}^k)^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^k \Delta \mathbf{x}^k. \quad (14)$$

Poznamenejme, že výpočet inverzní matice  $(\mathbf{X}^k)^{-1}$  není v tomto případě obtížný. Matice  $\mathbf{X}^k = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  a tedy  $(\mathbf{X}^k)^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$ . Inverzní matice k diagonální matici je matice s převrácenou hodnotou diagonálních prvků. Dosazením vztahu (14) do prvního řádku soustavy (13) obdržíme systém

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^k & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^k - \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + (\mathbf{X}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} \\ \mathbf{r}_2^k \end{pmatrix} \quad (15)$$

se symetrickou maticí. Pokud bude i pozitivně definitní můžeme k vyřešení soustavy rovnic použít Choleského rozklad. Pokud ovšem není splněna podmínka pozitivní definitnosti, můžeme sice také použít Choleského rozklad, ovšem v průběhu výpočtu můžeme obdržet matici s komplexními prvky. Pokračujme tedy

v eliminaci.

Ověřme nyní, že matice  $\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k$  je pozitivně definitní, tj. že platí

$$\mathbf{y}^T[\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k]\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{y} > \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0}.$$

V úvodu této kapitoly 2.1 předpokládáme, že matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní, tedy  $\mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} > \mathbf{0}, \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . Dále také víme, že v diagonálních maticích  $\mathbf{X}^k$  a  $\mathbf{\Lambda}^k$  jsou kladné hodnoty a to i v případě inverzní matice  $(\mathbf{X}^k)^{-1}$ , tzn. na hlavní diagonále matice  $(\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k$  jsou čísla kladná. Podmínka pozitivní definitnosti  $\mathbf{y}^T(\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{y} > \mathbf{0}$  je splněna. Odtud plyne  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{y}^T[\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k]\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{y} > \mathbf{0}.$$

Ověřili jsme, že matice  $\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k$  je pozitivně definitní, tudíž regulární a existuje její inverzní matice, kterou označíme  $\mathbf{Q} = (\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k)^{-1}$ . Dále poznamenejme, že zápisy inverzních matic, které nejsou diagonální, jsou zde pouze formální. Místo obtížného výpočtu řešení soustavy pomocí inverzní matice použijeme Choleského metodu. Pokračujme nyní v eliminaci.

Máme dvě maticové rovnice, z nichž postupně vyjádříme  $\Delta\mathbf{x}^k$  a  $\Delta\boldsymbol{\mu}^k$  tj.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}^k &= \mathbf{Q}\mathbf{r}_1^k - \mathbf{Q}\mathbf{A}^T\Delta\boldsymbol{\mu}^k + \mathbf{Q}(-\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{e} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\boldsymbol{\tau}_k\mathbf{e}), \\ \Delta\boldsymbol{\mu}^k &= (-\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{r}_2^k - (\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{r}_1^k - \\ &\quad - (\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(-\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{e} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\boldsymbol{\tau}_k\mathbf{e})). \end{aligned}$$

Ověřme, zda je matice  $\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T$  regulární a existuje její inverze. Matice  $\mathbf{Q}$  je inverzní matice k regulární a pozitivně definitní matici  $\mathbf{C} + (\mathbf{X}^k)^{-1}\mathbf{\Lambda}^k$ , z lineární algebry víme, že i sama matice  $\mathbf{Q}$  je regulární a pozitivně definitní. Navíc  $\mathbf{A}$  je matice s plnou řádkovou hodnotí. Tedy dokažme, že vztah

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^T\mathbf{y} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

platí. Označme  $\mathbf{z} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$ . Odtud tedy vidíme, že

$$\mathbf{z}^T\mathbf{Q}\mathbf{z} > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

protože  $\mathbf{Q}$  je pozitivně definitní matice.

Soustavu (15) můžeme tedy vyřešit pomocí úplné eliminace nebo použitím Choleského rozkladu a následného dopočtení  $\Delta\boldsymbol{\lambda}^k$  ze vztahu (14). Novou iteraci položíme rovnou

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) + \alpha_k(\Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\mu}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k),$$

přičemž  $\alpha_k$  volíme tak, aby platilo  $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) > \mathbf{0}$ .

### 2.3.1. Sledování cesty

Metoda sledování cesty omezuje vypočtené iterace na určité okolí centrální cesty  $\mathcal{C}$ . Mezi dvě významná okolí centrální cesty  $\mathcal{C}$  patří

$$\mathcal{N}_2(\beta) = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in S^0 \mid \|\mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e} - \theta\mathbf{e}\| \leq \theta\beta\},$$

pro  $\beta \in [0, 1)$  a druhým významným okolím je

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in S^0 \mid x_i\lambda_i \geq \theta\gamma \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

kde  $\gamma \in (0, 1]$ . Obvykle volíme parametr  $\beta = \frac{1}{2}$  a  $\gamma = 10^{-3}$ . Pro každý bod ležící v okolí  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$  musí být každý ze součinů  $x_i\lambda_i$  malý, aby jejich průměr nepřekročil hodnotu parametru  $\theta$ . Tento požadavek není nikterak omezující, a z tohoto důvodu zahrnuje okolí  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$  většinu striktně přípustné množiny  $S^0$  s parametrem  $\gamma$  blížícím se nule. Okolí  $\mathcal{N}_2(\beta)$  je mnohem restriktivnější než okolí  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$ . Některé body ze striktně přípustné množiny  $S^0$  nepatří do  $\mathcal{N}_2(\beta)$  bez ohledu na výběr hodnoty parametru  $\beta$ .

Tato metoda nám díky širšímu okolí umožňuje udělat delší krok, a tedy rychlejší postup k hledanému řešení. Širší okolí cesty je závislé na dvou parametrech  $\sigma_{min}$  a  $\sigma_{max}$ , což je spodní a horní odhad centrujícího parametru  $\sigma$ . Poté, co zvolíme příslušné parametry a počáteční aproximace, vyřešíme soustavu (13), viz předchozí odstavec. Novou iteraci položíme rovnou

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) + \alpha_k(\Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\mu}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k),$$



přičemž  $\alpha_k \in (0, 1]$  je největší hodnota, pro kterou platí  $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^k) > \mathbf{0}$ .

Přímá volba  $\alpha_k$  může být v mnoha případech velmi obtížná. Při řešení našich praktických úloh se ukázalo, že pro výpočet délky kroků můžeme použít stejný způsob výpočtu jako pro úlohu lineárního programování, viz [12]. Postupujeme tedy tak, že nejprve určíme množinu všech kroků, které je možné udělat. Tyto kroky určíme pro primární i duální proměnnou, tj. položíme

$$\alpha_{k,max}^{pri} = \min_{i:\Delta x_i^k < 0} -\frac{x_i}{\Delta x_i^k}, \quad \alpha_{k,max}^{dual} = \min_{i:\Delta \lambda_i^k < 0} -\frac{\lambda_i}{\Delta \lambda_i^k}.$$

Při praktické implementaci metody vybíráme délku kroků z otevřených intervalů

$$\alpha_k^{pri} \in (0, \alpha_{k,max}^{pri}), \quad \alpha_k^{dual} \in (0, \alpha_{k,max}^{dual}).$$

Nenulovou hodnotu právě vypočteného kroku zaručíme zavedením speciálního parametru  $\eta \in [0.9, 1]$ . Délka kroků primární a duální proměnné je tedy dána vztahy

$$\alpha_k^{pri} = \min\{1, \eta_k \alpha_{k,max}^{pri}\}, \quad \alpha_k^{dual} = \min\{1, \eta_k \alpha_{k,max}^{dual}\}.$$

Nová iterace je definována

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k^{pri} \Delta \mathbf{x}^k, \quad (\boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}) = (\boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k) + \alpha_k^{dual} (\Delta \boldsymbol{\lambda}^k, \Delta \boldsymbol{\mu}^k).$$

Nyní aplikujeme metodu sledování cesty s okolím  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$  na praktický příklad. Tento příklad je převzatý z nevyřešených cvičení z [1], str. 140, příklad 7.13., kde je uveden jako příklad ilustrující metodu sledování cesty s dlouhým krokem. Úlohu vyřešíme pomocí vlastního programového kódu

*IPM\_sledovani\_cesty\_dlouhy\_krok.m* implementovaného v matematickém softwaru MATLAB.

**Příklad 2.1** Pomocí metody sledování cesty vyřešte následující příklad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizovat funkci} \\ \text{za podmíněk} \\ \text{pro} \end{array} \right. \quad \begin{cases} 0.005x_1^2 + 0.005x_2^2 + 0.02x_3^2 + 0.005x_1x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0.1 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in X = \mathbb{R}^4. \end{cases}$$

Danou úlohu přepíšeme do maticového tvaru, tj.

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{d} \\ \text{za podmínek} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0.005 & 0.010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

Počáteční aproximaci zvolíme tak, aby byla splněna podmínka

$$(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0) \in S^0 = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) : \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}\}.$$

Tuto podmínku splňují např. vektory

$$\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}\right)^T, \boldsymbol{\lambda}^0 = \left(\frac{1}{250}, \frac{3}{1000}, \frac{133}{1000}, \frac{1}{1000}\right)^T,$$

$$\boldsymbol{\mu}^0 = \left(\frac{1}{1000}, -\frac{1}{1000}\right)^T.$$

Před spuštěním programového kódu *IPM\_sledovani\_cesty\_dlouhy\_krok.m* musíme zadat vstupní data úlohy. V našem případě jsou zadávány matice a vektory dané soustavy, tj.  $\mathbf{C}, \mathbf{d}, \mathbf{A}, \mathbf{b}$ , sloupcové počáteční aproximace vektorů, tj. vektory  $\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0$ , maximální počet iterací, hodnota centrujícího parametru  $\sigma$  a přesnost výpočtu  $\varepsilon$ . Kód pro tuto metodu je vytvořený pro nerovnostní podmínky  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . V případě obecnějších podmínek využijeme jiné modifikace metody vnitřních bodů. V programovém kódu jsou pevně nastaveny hodnoty  $\sigma_{min} = 0.2$ ,  $\sigma_{max} = 0.8$  a  $\gamma = 0.25$ . Okolí centrální cesty je tedy

$$\mathcal{N}_{-\infty}(0.25) = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in S^0 \mid x_i \lambda_i \geq 0.25\theta \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Při výpočtu řešení této úlohy s takto zvolenou počáteční aproximací a parametrem  $\sigma = \frac{1}{2}$  se ukázalo, že nemusíme přepočítávat délku kroku  $\alpha_k$  v  $k$ -té iteraci,

neboť pro primární i duální proměnnou dostaneme v každé iteraci délku kroku  $\alpha_k = 1$ . Výpočet byl proveden s přesností  $\varepsilon = 10^{-5}$  a s nastavením maximálního počtu 1000 iterací. Pro ukončení výpočtu jsme zvolili následující kritéria

$$\| \mathbf{C}\mathbf{x}^k + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k - \boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{d} \| < \varepsilon, \quad \| \mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b} \| < \varepsilon.$$

Po spuštění programu dostaneme po 15 iteracích řešení s požadovanou přesností.  
Řešení:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0.4210 \\ 0.4211 \\ 0.1579 \\ 0.3632 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}^* = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.0506 \\ 0.0506 \\ 0.1349 \\ 0.0586 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}^* = \begin{pmatrix} -0.0063 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hodnota funkce v nalezeném bodě minima je  $f(\mathbf{x}^*) = 0.0032$ .

### 2.3.2. Sledování cesty s nepřipustným bodem

Určení striktně přípustného bodu, tedy bodu z množiny  $S^0$ , je v mnoha případech velmi obtížné a použití metody sledování cesty je možné jen ve velmi specifických případech. Metodu uvedou v odstavci 2.3.1 je ovšem možné modifikovat, a tím snížit i restriktivní nároky metody na vstupní a nově vypočtené body, které už nemusí náležet do množiny  $S^0$ . Body, které neleží v množině  $S^0$ , budeme nazývat nepřipustné body.

Princip metody s nepřipustným bodem pracuje na širším okolí než metoda se striktně přípustným bodem. Okolí, se kterým metoda pracuje, je definováno následujícím způsobem

$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \rho) = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \mid \|(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\| \leq \|(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0)\| \frac{\rho\theta}{\theta_0}, (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) > 0, x_i \lambda_i \geq \theta\gamma \quad \forall i\},$$

kde  $\gamma \in (0, 1)$  a  $\rho \geq 1$ . Vektory  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  jsou hodnoty reziduí pravé strany, tj.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

Míra duality  $\theta_0$  a rezidua počátečních aproximací  $\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0$  jsou dány volbou počáteční aproximace vektorů  $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ . Volba parametru  $\rho \geq 1$  nám zajistí, že

počáteční bod  $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \rho)$ .

Metoda sledování cesty s nepřipustným bodem řeší stejné soustavy rovnic jako metoda v odstavci 2.3.1. Po vyřešení soustavy (13) hledáme největší možnou délku kroku  $\alpha_k \in (0, 1]$  tak, aby

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) + \alpha_k(\Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\mu}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \rho)$$

a současně aby platilo  $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) > \mathbf{0}$ .

Zároveň musí být splněna tzv. **Armijova podmínka**, která je definována následujícím vztahem

$$\theta_{k+1} \leq (1 - 0.01\alpha_k)\theta_k.$$

Metodu sledování cesty s nepřipustným směrem budeme ilustrovat na vlastním příkladě. Úlohu budeme řešit pomocí vlastního programového kódu

*IPM\_Nepripustny\_bod.m.*

**Příklad 2.2** Pomocí metody sledování cesty s nepřipustným bodem vyřešte následující úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \text{za podmínek} & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ & x_1 - x_2 = 0, \\ \text{pro} & (x_1, x_2, x_3)^T \in X = \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Úlohu přepíšeme do maticového tvaru, tj.

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d}, \\ \text{za podmínek} & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = (1 \ -1 \ 0), \mathbf{b} = (0).$$

Zvolíme počáteční aproximaci tak, aby platilo

$$(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \rho),$$

kde parametr  $\gamma = 0.25$  je pevně zvolen a druhý parametr  $\rho$  zvolíme tak, aby platilo  $\rho > 1$ , tj. např.  $\rho = 1.5$ , parametr  $\sigma = 0.3$ . Počáteční aproximace můžeme zvolit např.

$$\mathbf{x}^0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \boldsymbol{\lambda}^0 = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)^T, \boldsymbol{\mu}^0 = (-8).$$

Před spuštěním programového kódu *IPM\_Nepripustny\_bod.m* musíme zadat vstupní data úlohy. V našem případě jsou zadávány matice a vektory dané soustavy, tj. matice  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$  a vektory  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{b}$ , počáteční aproximace  $\mathbf{x}^0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^0$ ,  $\boldsymbol{\mu}^0$ , maximální počet iterací, hodnota centrujícího parametru  $\sigma$  a výpočetní přesnost. Kód pro tuto metodu je vytvořený pro nerovnostní podmínky  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . V případě obecnějších podmínek využijeme jiné modifikace metody vnitřních bodů.

Výpočet byl proveden s přesností  $\varepsilon = 10^{-8}$  a s nastavením maximálního počtu 1000 iterací. Pro ukončení výpočtu jsme zvolili následující kritéria

$$\|\mathbf{C}\mathbf{x}^k + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}^k - \boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{d}\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}\| < \varepsilon.$$

Po spuštění programu dostaneme po 43 iteracích řešení s požadovanou přesností. Řešení:

$$\mathbf{x}^* = 10^{-8} \begin{pmatrix} 0.4090 \\ 0.4090 \\ 0.4090 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}^* = 10^{-8} \begin{pmatrix} 0.2454 \\ 0.2454 \\ 0.2454 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu}^* = (-3.4107 \cdot 10^{-12}),$$

hodnota funkce v nalezeném bodě minima je  $f(\mathbf{x}^*) = 5.0174 \cdot 10^{-17}$ .

Metody sledování cesty s dlouhým krokem nebo metody sledování cesty s nepřípustným bodem je vhodné použít na úlohy, jejichž omezující podmínky jsou tvaru

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pokud budeme mít úlohu s obecnějšími nerovnostními omezeními, tj.

$$\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{g} \geq \mathbf{0},$$

použijeme následující modifikaci metody vnitřních bodů.

## 2.4. Centrální cesta s doplňkovou proměnnou

V této části práce bylo čerpáno z [5] a [12].

Nyní si ukážeme jinou modifikaci metody centrální cesty, která kromě porušení podmínek komplementarity a zavedení centrujícího parametru pracuje ještě s doplňkovou proměnnou  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , která transformuje nerovnostní podmínky úlohy kvadratického programování na rovnostní. Metoda centrální cesty s doplňkovou proměnnou opět omezuje nově vypočtené iterace na určité okolí centrální cesty. Perturované KKT podmínky s novou pomocnou a kladnou proměnnou  $\mathbf{w}$  přepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \\ -\mathbf{x} + \mathbf{w} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{W} &= \tau\mathbf{e}, \\ \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w} &> \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

Nyní definujeme vektorovou funkci

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \\ -\mathbf{x} + \mathbf{w} \\ \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e} \end{pmatrix}$$

a vypočteme parametr  $\tau$ . Hodnotu parametru  $\tau$  opět určíme pomocí dvou dalších parametrů. První parametr je míra duality, kterou teď definuje vztah

$$\theta_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^k \lambda_i^k = \frac{(\mathbf{w}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k}{n}, \quad (16)$$

k výpočtu míry duality tedy použijeme doplňkovou proměnnou. Druhý parametr zůstává stejný jako v předchozím případě. Jedná se o centrující parametr

$$\sigma \in [0, 1].$$

Nyní definujeme parametr  $\tau$  pro  $k$ -tou iteraci následujícím vztahem

$$\tau_k = \theta_k \sigma.$$

Newtonovu metodu aplikujeme na soustavu

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tau_k \mathbf{e} \end{pmatrix},$$

v  $k$ -tém kroku Newtonovy metody řešíme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}^k & \boldsymbol{\Lambda}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \Delta \mathbf{w}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k \\ -\mathbf{W}^k \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + \tau_k \mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit např. pomocí eliminace proměnných. Pro jednoduchost si označme

$$\mathbf{r}_1^k = -\mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d}$$

$$\mathbf{r}_2^k = -\mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r}_3^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k.$$

Podle posledního řádku soustavy je

$$\boldsymbol{\Lambda}^k \Delta \mathbf{w}^k = -\mathbf{W}^k \boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{e} + \tau_k \mathbf{e} - \mathbf{W}^k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k.$$

Odtud můžeme vyjádřit  $\Delta \mathbf{w}^k$ , jelikož díky podmínce na multiplikátor  $\boldsymbol{\lambda}^k > 0$  je  $\boldsymbol{\Lambda}^k$  regulární diagonální matice a máme

$$\Delta \mathbf{w}^k = -\mathbf{W}^k \mathbf{e} + (\boldsymbol{\Lambda}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} - (\boldsymbol{\Lambda}^k)^{-1} \mathbf{W}^k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k.$$

Dosazením do třetího řádku soustavy (17) dostaneme systém rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & -(\mathbf{\Lambda}^k)^{-1}\mathbf{W}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^k \\ \mathbf{r}_2^k \\ \mathbf{r}_3^k + \mathbf{W}^k \mathbf{e} - (\mathbf{\Lambda}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Na levé straně systému (18) tedy dostaneme symetrickou matici. K vyřešení soustavy můžeme použít Choleského rozklad nebo pokračovat v eliminaci. Připomeňme, že i zde jsou zápisy inverzních matic pouze formální. Pokud budeme řešit praktické úlohy, vždy vyřešíme danou soustavu rovnic bez výpočtu inverzní matice. Inverzní matice diagonálních matic počítáme převrácením hodnot na diagonále.

Z posledního řádku soustavy máme

$$-(\mathbf{\Lambda}^k)^{-1}\mathbf{W}^k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{r}_3 + \mathbf{W}^k \mathbf{e} - (\mathbf{\Lambda}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} + \mathbf{I} \Delta \mathbf{x}^k.$$

Matice  $\mathbf{\Lambda}^k$  a  $\mathbf{W}^k$  jsou regulární, pak můžeme vyjádřit

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}^k = -\mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1} \mathbf{r}_3^k - \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{e} + (\mathbf{W}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e} - \mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1} \Delta \mathbf{x}^k.$$

Označme  $\mathbf{r}_4^k = -\mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1} \mathbf{r}_3^k - \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{e} + (\mathbf{W}^k)^{-1} \tau_k \mathbf{e}$  a dosaďme do soustavy, která je nyní tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_4^k \\ \mathbf{r}_2^k \end{pmatrix}.$$

Matice  $\mathbf{C}$  je pozitivně definitní, tudíž i matice  $\mathbf{C} + \mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1}$  je pozitivně definitní a regulární, viz předchozí kapitola 2.3. Tedy existuje inverzní matice

$$\mathbf{Q} = \left( \mathbf{C} + \mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1} \right)^{-1}.$$

Pak můžeme pokračovat v eliminaci maticové rovnice. Z rovnice postupně vyjádříme  $\Delta \mathbf{x}^k$  a  $\Delta \boldsymbol{\mu}^k$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} + \mathbf{\Lambda}^k (\mathbf{W}^k)^{-1}) \Delta \mathbf{x}^k &= \mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_4^k - \mathbf{A}^T \Delta \boldsymbol{\mu}^k, \\ \Delta \mathbf{x}^k &= \mathbf{Q} (\mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_4^k - \mathbf{A}^T \Delta \boldsymbol{\mu}^k), \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k &= -(\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{r}_2^k - \mathbf{A} \mathbf{Q} (\mathbf{r}_1^k + \mathbf{r}_4^k)). \end{aligned}$$



Analogicky jako tomu bylo v předchozí kapitole můžeme dokázat, že existuje inverze  $(\mathbf{AQA}^T)^{-1}$ . Postupně vypočítáme neznámé  $\Delta\boldsymbol{\mu}^k, \Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k$  a  $\Delta\mathbf{w}^k$  nebo použijeme Choleského rozklad a vypočteme  $\Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k, \Delta\boldsymbol{\mu}^k$  a na základě těchto výsledků dopočteme  $\Delta\mathbf{w}^k$ . Novou iteraci položíme rovnu

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \mathbf{w}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \mathbf{w}^k) + \alpha_k(\Delta\mathbf{x}^k, \Delta\boldsymbol{\mu}^k, \Delta\boldsymbol{\lambda}^k, \Delta\mathbf{w}^k)$$

tak, aby platilo  $(\mathbf{w}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) > \mathbf{0}$ .

Princip metody vnitřních bodů spočívá v zavedení centrujícího parametru a míry duality a vyřešení soustavy nelineárních rovnic Newtonovou metodou. Poté nalezneme vhodnou délku kroku a vypočteme novou iteraci tak, aby byly splněny podmínky, které metoda vnitřních bodů vyžaduje.

#### 2.4.1. Praktická primárně-duální metoda

Nejpopulárnější z metod vnitřních bodů pro úlohu konvexního kvadratického programování, tedy úlohy, v níž minimalizujeme konvexní kvadratickou funkci s lineárními omezujícími podmínkami, je metoda založená na Mehortově typu prediktor-korektor. Tato metoda koriguje volbu délky kroků primární a duální proměnné. Stejně tak, jako tomu bylo v metodě sledování cesty, i tato metoda omezuje vypočtené iterace na blízké okolí centrální cesty uvnitř množiny, na níž hledáme řešení, tj. musí platit  $\mathbf{w}^k, \boldsymbol{\lambda}^k > \mathbf{0}$ .

V prvním kroku metody položíme centrující parametr  $\sigma = 0$  a vypočteme nový směr  $(\Delta\mathbf{x}^{aff}, \Delta\boldsymbol{\mu}^{aff}, \Delta\boldsymbol{\lambda}^{aff}, \Delta\mathbf{w}^{aff})$ . Vyřešíme soustavu (17) v novém tvaru, tj.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}^k & \boldsymbol{\Lambda}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^{aff} \\ \Delta\boldsymbol{\mu}^{aff} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^{aff} \\ \Delta\mathbf{w}^{aff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d} \\ -\mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k \\ -\mathbf{W}^k\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Pokud použijeme plný krok  $\alpha = 1$ , pak z podmínek komplementarity plyne

$$(\lambda_i + \Delta\lambda_i^{aff})(w_i + \Delta w_i^{aff}) = \Delta\lambda_i^{aff} \Delta w_i^{aff}.$$

Zbylé členy  $\lambda_i \Delta w_i^{aff}$ ,  $\Delta \lambda_i^{aff} w_i$ ,  $\lambda_i w_i$  jsou nulové. Podmínky komplementarity  $\lambda_i w_i$  nahradíme výrazem  $\Delta \lambda_i^{aff} \Delta w_i^{aff}$ . V mnohých příkladech právě vypočtený krok nezmenšuje dostatečně míru duality  $\theta_k$ . Z tohoto důvodu můžeme vypočítat korekci  $(\Delta \mathbf{x}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\mu}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{cor}, \Delta \mathbf{w}^{cor})$ . Krok  $(\Delta \mathbf{x}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\mu}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{cor}, \Delta \mathbf{w}^{cor})$  vypočteme tak, že v soustavě (19) nahradíme výraz

$$-\Lambda^k \mathbf{W}^k \mathbf{e} \text{ výrazem } -\Delta \Lambda^{aff} \Delta \mathbf{W}^{aff} \mathbf{e},$$

kde  $\Delta \Lambda^{aff} = \text{diag}(\Delta \lambda_1^{aff}, \dots, \Delta \lambda_n^{aff})$  a  $\Delta \mathbf{W}^{aff} = \text{diag}(\Delta w_1^{aff}, \dots, \Delta w_n^{aff})$ .

Soustava má nyní tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}^k & \Lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^{cor} \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^{cor} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^{cor} \\ \Delta \mathbf{w}^{cor} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C} \mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d} \\ -\mathbf{A} \mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k \\ -\Delta \Lambda^{aff} \Delta \mathbf{W}^{aff} \mathbf{e} \end{pmatrix}.$$

V některých případech je vhodné zvolit kombinace těchto dvou kroků

$$(\Delta \mathbf{x}^{aff}, \Delta \boldsymbol{\mu}^{aff}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{aff}, \Delta \mathbf{w}^{aff}) + (\Delta \mathbf{x}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\mu}^{cor}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{cor}, \Delta \mathbf{w}^{cor}).$$

Dosáhneme tak efektivnějšího snížení míry duality, než kdybychom použili pouze  $(\Delta \mathbf{x}^{aff}, \Delta \boldsymbol{\mu}^{aff}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{aff}, \Delta \mathbf{w}^{aff})$ .

V praktické implementaci algoritmu musíme však použít centrující parametr a vhodně zvolit délku kroku. Jak již bylo řečeno na začátku této kapitoly, délky kroků pro primární a duální proměnnou se mohou lišit. Výpočet délky kroků provádíme analogickým způsobem jako v kapitole 2.3. Tedy pro délku kroku primární a duální proměnné platí

$$\alpha_{aff}^{pri} = \min \left\{ 1, \min_{i: \Delta w_i^{aff} < 0} -\frac{w_i}{\Delta w_i^{aff}} \right\}, \quad \alpha_{aff}^{dual} = \min \left\{ 1, \min_{i: \Delta \lambda_i^{aff} < 0} -\frac{\lambda_i}{\Delta \lambda_i^{aff}} \right\}.$$

Nyní si ještě zavedeme pomocnou proměnnou  $\theta_{aff}$ , díky které můžeme následně vypočítat hodnotu centrujícího parametru, tedy

$$\theta_{aff} = \frac{1}{n} \left( \mathbf{w} + \alpha_{aff}^{pri} \Delta \mathbf{w}^{aff} \right)^T \left( \boldsymbol{\lambda} + \alpha_{aff}^{dual} \Delta \boldsymbol{\lambda}^{aff} \right). \quad (20)$$

Pokud položíme

$$\hat{\alpha}^{aff} = \min\{\alpha_{aff}^{pri}, \alpha_{aff}^{dual}\},$$

dostaneme obdobný vztah pro parametr  $\theta_{aff}$ , tj.

$$\theta_{aff} = \frac{1}{n} \left( \mathbf{w} + \alpha_{aff} \Delta \mathbf{w}^{aff} \right)^T \left( \boldsymbol{\lambda} + \hat{\alpha}_{aff} \Delta \boldsymbol{\lambda}^{aff} \right). \quad (21)$$

Centrující parametr  $\sigma$  je definován

$$\sigma = \left( \frac{\theta_{aff}}{\theta_k} \right)^3,$$

kde parametr  $\theta_k$  je dán vztahem (16) a parametr  $\theta_{aff}$  je dán vztahem (20) nebo (21). Výsledný vektor získáme vyřešením následujícího systému rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}^k & \boldsymbol{\Lambda}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \boldsymbol{\mu}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \\ \Delta \mathbf{w}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{C} \mathbf{x}^k - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu}^k + \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{d} \\ -\mathbf{A} \mathbf{x}^k + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^k - \mathbf{w}^k \\ -\boldsymbol{\Lambda}^k \mathbf{W}^k \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\Lambda}^{aff} \Delta \mathbf{W}^{aff} \mathbf{e} + \tau_k \mathbf{e} \end{pmatrix}.$$

Soustavu můžeme vyřešit analogicky jako v úvodu této kapitoly. Při výpočtu délky kroků můžeme volit stejnou nebo rozdílnou délku kroku pro primární a duální proměnnou. Pokud zvolíme první možnost, tedy délka kroku bude pro primární a duální proměnné stejná, pak novou iteraci položíme rovnou

$$(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \mathbf{w}^{k+1}) = (\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \mathbf{w}^k) + \alpha (\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \boldsymbol{\mu}^k, \Delta \boldsymbol{\lambda}^k, \Delta \mathbf{w}^k),$$

kde  $\alpha = \min\{\alpha_{\tau}^{pri}, \alpha_{\tau}^{dual}\}$  a  $\alpha_{\tau}^{pri}, \alpha_{\tau}^{dual}$  jsou definovány následujícími rovnostmi

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau}^{pri} &= \max\{\alpha \in (0, 1] : \mathbf{w} + \alpha \Delta \mathbf{w} \geq (1 - \tau) \mathbf{w}\}, \\ \alpha_{\tau}^{dual} &= \max\{\alpha \in (0, 1] : \boldsymbol{\lambda} + \alpha \Delta \boldsymbol{\lambda} \geq (1 - \tau) \boldsymbol{\lambda}\}, \end{aligned}$$

přičemž  $\tau \in (0, 1)$ . Pokud se ovšem rozhodneme pro rozdílnou délku kroku, pak postupujeme jako v odstavci 2.3.1. Vypočteme všechny přípustné kroky a vybereme ten, který bude splňovat podmínku  $(\mathbf{w}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}) > \mathbf{0}$ . Rozdílná volba

délky kroků primární a duální proměnné může vést k rychlejší konvergenci metody vnitřních bodů. V této práci se věnujeme pouze metodě s rozdílnou volbou délky kroku pro primární a duální proměnnou.

V následujících dvou úlohách si předvedeme použití praktické primárně-duální metody vnitřních bodů. Metodu budeme aplikovat na obecnější úlohy, než pro které byla odvozena. I pro tyto obecnější typy úloh lze metodu použít, ovšem úloha se stává komplikovanější.

Následující úloha je částečně převzata z neřešeného cvičení [12], str. 494, cvičení 16.11. Tu vyřešíme pomocí našeho programového kódu *IPM\_Prakticka\_P\_D.m*. Kód je sestavený v matematickém softwaru MATLAB a řeší úlohu s nerovnostními omezeními a rozdílnou délkou kroku pro primární a duální proměnnou.

**Příklad 2.3** Pomocí praktické primárně-duální metody vnitřních bodů vyřešte následující úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \\ \text{za podmíněk} & -0.5x_1 - 0.5x_2 \geq -1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ \text{pro} & (x_1, x_2)^T \in X = \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Danou úlohu přepíšeme do maticového tvaru, tj.

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{d} \\ \text{za podmíněk} & \mathbf{G}\mathbf{x} \geq \mathbf{g}, \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Omezující podmínky u tohoto příkladu jsou v obecnějším tvaru, než pro který jsme praktickou primárně-duální metodu odvodili. Ukážeme si tedy, jak sestavíme soustavu rovnic, kterou budeme řešit metodou vnitřních bodů. Nejprve si

předepíšeme KKT podmínky pro tuto úlohu, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{g}) &= 0, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zavedeme doplňkovou proměnnou  $\mathbf{w} > \mathbf{0}$  a parametr  $\tau$  a s jejich pomocí předchozí KKT podmínky nahradíme preturbovanými podmínkami s doplňkovou proměnnou

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d} - \mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \\ -\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{g} + \mathbf{w} &= \mathbf{0}, \\ \Lambda\mathbf{W} &= \tau\mathbf{e}, \\ \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w} &> \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Na základě těchto podmínek definujeme vektorovou funkci

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu} - \mathbf{G}^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} \\ -\mathbf{G}^T\mathbf{x} + \mathbf{g} + \mathbf{w} \\ \mathbf{W}\Lambda\mathbf{e} \end{pmatrix},$$

kterou položíme rovnu  $\mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ . KKT podmínky vyjádříme pomocí dvou vektorových funkcí. Nyní již postupujeme analogickým způsobem jako v kapitole 2.4, vyřešíme tedy soustavu nelineárních rovnic.

Zvolíme počáteční aproximaci, tak aby byla splněna podmínka  $(\boldsymbol{\lambda}^0, \mathbf{w}^0) > \mathbf{0}$ . Tuto podmínku splňují například vektory

$$\boldsymbol{\lambda}^0 = (2, 2)^T \text{ a } \mathbf{w}^0 = (2000, 2000)^T.$$

Počáteční aproximaci vektoru  $\mathbf{x}^0$  můžeme zvolit např. vektor

$$\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T.$$

Před spuštěním kódu *IPM\_Prakticka\_P\_D.m* musíme zadat vstupní data úlohy. V tomto příkladě jsou zadávány matice  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}$  a vektory  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{b}$ , počáteční aproximace vektorů  $\mathbf{x}^0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^0$ ,  $\mathbf{w}^0$ , maximální počet iterací a výpočetní přesnost. Pro

ukončení výpočtu jsme zvolili následující kritéria, tj.

$$\| \mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{d} \| < \varepsilon \text{ a } \| -\mathbf{G}\mathbf{x}^k + \mathbf{w}^k \| < \varepsilon,$$

kde  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Hodnota centrujícího parametru  $\sigma$  je přepočítávána v každé nové iteraci na základě výsledků, které obdržíme pro první soustavu rovnic v praktické metodě, tedy soustavě, kterou řešíme pro  $\sigma = 0$ . Po spuštění programu s takto zvolenou počáteční aproximací obdržíme po 26-ti iteracích řešení s požadovanou přesností.

Řešení:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0.8000 \\ 1.2000 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}^* = \begin{pmatrix} 5.6000 \\ 7.3386 \cdot 10^{-27} \end{pmatrix}, \mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 4.6423 \cdot 10^{-30} \\ 0.4000 \end{pmatrix},$$

hodnota funkce v nalezeném bodě minima je  $f(\mathbf{x}^*) = -7.1999$ .

Pomocí praktické primárně-duální metody ještě vyřešíme následující úlohu s omezením tvaru rovností i nerovností. Úloha je částečně převzatá z [9], str. 63, příklad 3.7. Tuto úlohu vyřešíme pomocí vlastního programového kódu

*IPM\_Prakticka\_P\_D\_obecne\_podm.m.*

**Příklad 2.4** Pomocí praktické primárně-duální metody vnitřních bodů vyřešte následující úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizovat funkci} \quad x_1^2 + x_2^2 \\ \text{za podmínek} \quad \quad \quad x_1 \geq 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_1 - x_2 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ \text{pro} \quad \quad \quad \quad \quad \quad (x_1, x_2)^T \in X = \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$

Danou úlohu přepíšeme do maticového tvaru, tj.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimalizovat funkci} \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{d} \\ \text{za podmínek} \quad \quad \quad \mathbf{G}\mathbf{x} \geq \mathbf{g} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \text{pro} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^2, \end{array} \right.$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Předepíšeme si perturbované KKT podmínky podmínky. Ty jsou téměř analogické jako v předchozí úloze. Zde nám ovšem přibude jedna omezující nerovnostní podmínka. Počáteční aproximaci zvolíme tak, aby byla splněna podmínka  $(\boldsymbol{\lambda}^0, \mathbf{w}^0) > \mathbf{0}$ . Tu splňují např. vektory

$$\boldsymbol{\lambda}^0 = (0.001, 0.001)^T \quad \mathbf{w}^0 = (0.01, 0.01)^T.$$

Počáteční aproximaci vektoru  $\mathbf{x}^0$  a  $\boldsymbol{\mu}^0$  můžeme zvolit např.

$$\mathbf{x}^0 = (0.001, 0.001)^T \quad \boldsymbol{\mu}^0 = (3, 8)^T.$$

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému výpočtu úlohy. Před spuštěním samotného výpočtu musíme zadat vstupní data. V tomto případě musíme zadat matice  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{G}$  a vektory  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{b}$ , vektory počátečních aproximací  $\mathbf{x}^0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^0$ ,  $\boldsymbol{\mu}^0$ ,  $\mathbf{w}^0$ , maximální počet iterací a výpočetní přesnost. Pro ukončení výpočtu jsme zvolili následující kritéria, tj.

$$\| \mathbf{C}\mathbf{x}^k - \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{d} \| < \varepsilon \text{ a } \| \mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \| < \varepsilon,$$

kde  $\varepsilon = 10^{-6}$ . S takto zvolenými počátečními hodnotami jsme výsledku s požadovanou výpočetní přesností dosáhli již ve 2. iteraci.

Řešení:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1.4000 \\ 1.4000 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda}^* = \begin{pmatrix} 0.0044 \cdot 10^{-3} \\ 0.3043 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} 146.1319 \\ 2.2830 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mu}^* = \begin{pmatrix} -0.5600 \\ -1.1200 \end{pmatrix},$$

Hodnota funkce v nalezeném bodě minima je  $f(\mathbf{x}^*) = 3.9200$ .

### 3. Euler-Bernoulliho nosník

Euler-Bernoulliho nosník představuje matematický model dlouhého štíhlého nosníku, který je pro stavební a strojní konstrukce neodmyslitelnou součástí. Důležitou vlastností tohoto modelu je, že průřez zůstává i po deformaci rovinný a kolmý k deformované střednici. Nejprve se budeme zabývat samotným modelem Euler-Bernoulliho nosníku, nalezením vhodné formulace a diskretizací dané úlohy. Nakonec představíme kontaktní úlohu pro nosník s dokonale tuhým podložím, kterou převedeme pomocí variačních metod a metody konečných prvků na úlohu kvadratického programování a následně použijeme metodu vnitřních bodů k nalezení řešení.

#### 3.1. Rovnice Euler-Bernoulliho nosníku

V této kapitole bylo čerpáno z [4] a [7].

Euler-Bernoulliho model nosníku je dán jednodimenzionální rovnicí tvaru

$$(EIu''(x))'' = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (22)$$

s označením

- $E$  = Youngův modul pružnosti,
- $I$  = moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ohybové ose, obecně funkce proměnné  $x$ , v praktických příkladech bývá převážně konstantní nebo po částech konstantní funkce,
- $u$  = průhyb nosníku,
- $f$  = vertikální zatížení nosníku,
- $L$  = délka nosníku.

Uvažované okrajové podmínky pro rovnici (22) v bodě  $x = a$  dělíme na stabilní a nestabilní. Stabilní podmínky jsou

$$u(a), u'(a),$$



nestabilní podmínky jsou pak tvaru

$$M(a) = EIu''(a), \quad V(a) = (EIu''(a))',$$

kde  $M(a)$  je ohybový moment a  $V(a)$  je posouvající síla. Z fyzikálního hlediska má smysl uvažovat pouze tyto okrajové podmínky v bodě  $x = a$

- pevné vetknutí:  $u(a) = u'(a) = 0$ ,
- prostě podepření:  $u(a) = M(a) = 0$ ,
- volný konec:  $M(a) = V(a) = 0$ .

Kombinací těchto okrajových podmínek dostaneme čtyři základní typy nosníků tj. oboustranně vetknutý nosník, prostě podepřený nosník, nosník s vetknutím a podepřením a nosník s volným koncem.

V dalším pokračování práce se omezíme, pro lepší představu, na oboustranně vetknutý model nosníku. Funkcionál celkové potenciální energie nosníku je tvaru

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)(v''(x))^2 dx - \int_0^L f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V,$$

kde

$$V = \{v \in H^2((0, L)) : v(0) = v(L) = 0 = v'(0) = v'(L)\}. \quad (23)$$

Prostorem  $H^2((0, L))$  rozumíme Sobolevův prostor, který je definován

$$H^k((0, L)) = \{v \in L^2(0, L) : D^\alpha v \in L^2((0, L)) \quad \forall |\alpha| \leq k\} \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0,$$

kde

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = 1, \dots, N$  je multiindex.

**Poznámka 3.1** Symbolem  $J'(u, v)$  budeme značit Gateauxovu derivaci funkcionálu  $J$  v bodě  $u$  a směru  $v$ .

Dle [7] stacionární bod funkcionálu splňuje podmínku  $J'(u, v) = 0$ , tj.

$$\int_0^L EIu''(x)v''(x)dx - \int_0^L fvdx = 0.$$

Formálním užitím Greenovy věty pak dostaneme

$$\int_0^L (EI(x)u''(x))''vdx - \int_0^L f(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}, \quad (24)$$

kde  $\mathcal{D}((0, L)) = \{u \in C_0^\infty(\overline{(0, L)}) : \text{supp } u \subset (0, L)\}$  je prostor nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v  $(0, L)$ . Nosičem bázové funkce  $u$  pak rozumíme množinu

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in (0, L) : u(x) \neq 0\}}.$$

Z (24) máme

$$EI(x)u''(x)'' = f(x) \quad \text{sk. vš. } x \in (0, L).$$

**Definice 3.1** **Variačním řešením** úlohy s oboustranně vetknutým nosníkem nazveme funkci  $u \in V$  takovou, že

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Podrobnější informace o existenci a jednoznačnosti variačního řešení lze nalézt např. v [7].

### 3.2. Kontaktní úloha pro nosník s podložím

V této kapitole bylo čerpáno z [7] a [8].

Kontaktní úlohu pro Euler-Bernoulliho nosník s dokonale tuhým podložím si opět představíme pro oboustranně vetknutý nosník. Dokonale tuhé podloží představuje překážku, která je umístěna ve vzdálenosti  $g(x)$  pod nosníkem. **Kontaktní**

**úlohou** Euler-Bernoulliho nosníku rozumíme úlohu

$$(EIu''(x))'' = f(x) + T(u(x)), \quad (25)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad (26)$$

$$u(L) = u'(L) = 0, \quad (27)$$

kde  $x \in (0, L)$  a  $T(u(x))$  představuje kontaktní sílu.

Pro kontaktní úlohu předepisujeme speciální typ podmínek, tzv. **Signoriniho podmínky**, které přidáme k (25)-(27). Signoriniho podmínkami rozumíme podmínky tvaru

$$\begin{aligned} u(x) &\geq g(x), \\ T(u(x)) &\geq 0, \\ (u(x) - g(x))T(u(x)) &= 0 \end{aligned}$$

pro  $x \in (0, L)$ . Tyto podmínky popisují vztah mezi průhybem nosníku a kontaktní silou. V kontaktní zóně, je-li  $u(x) = g(x)$ , je kontaktní síla  $T(u(x)) > 0$ . V nekontaktní zóně je pak průhyb nosníku nad podložím, tj.  $u(x) > g(x)$  a kontaktní síla je  $T(u(x)) = 0$ . Funkce  $g(x)$  bude pro naši úlohu vždy konstantní.

Přípustná množina  $K$  je dána vztahem

$$K = \{v \in V : v \geq g \text{ v } (0, L)\},$$

tedy  $K$  je neprázdná a konvexní podmnožina prostoru  $V$ .

Nyní můžeme definovat tzv. **Signoriniho úlohu** tvaru

$$\begin{cases} \text{nalézt } u \in K \text{ tak, že} \\ J(u) = \min_{v \in K} J(v). \end{cases} \quad (28)$$

Ekvivalentně můžeme úlohu (28), viz [7], zformulovat takto

$$\begin{cases} \text{nalézt } u \in K \text{ tak, že} \\ \int_0^L EIu''(x)(v''(x) - u''(x))dx - \int_0^L f(x)(v(x) - u(x))dx \geq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (29)$$

**Definice 3.2** Funkci  $u \in K$ , která je řešením (28) resp. (29) nazýváme **variačním řešením Signoriniho úlohy**.

Existenci a jednoznačnost varičního řešení Signoriniho úlohy můžeme dokázat pomocí následujících dvou tvrzení. Navíc funkcionál celkové potenciální energie oboustranně vetknutého nosníku  $J(v)$  má specifické vlastnosti, které zaručí existenci a jednoznačnost řešení Signoriniho úlohy. Podrobnější informace viz [7], str. 58, příklad 5.3.

**Věta 3.1** *Nechť  $K$  je neprázdná konvexní podmnožina  $V$ ,  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  je daný funkcionál gateauxovsky diferencovatelný na prostoru  $V$ . Potom  $J$  nabývá v bodě  $u \in K$  svého minima na  $K$  právě tehdy, když*

$$J'(u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

**Důkaz:** viz [7], strana 52.

**Věta 3.2** *Nechť funkcionál  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  je konvexní a gateauxovsky diferencovatelný na  $V$ . Potom každé lokální minimum je zároveň globálním minimem funkcionálu  $J$  na  $V$  a následující dvě podmínky jsou vzájemně ekvivalentní*

- $J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V,$
- $J'(u, v) = 0 \quad \forall v \in V.$

**Důkaz:** viz [7], strana 17.

Pro ostatní typy nosníků postupujeme analogickým způsobem.

### 3.3. Metoda konečných prvků

V této kapitole bylo čerpáno z [4] a [7].

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda, jejíž princip spočívá v diskretizaci spojitého problému. Diskretizací dané úlohy obdržíme soustavu rovnic, jejímž vyřešením dostaneme přibližné řešení spojitého problému. Vraťme se nyní

k úloze (29) z kapitoly 3.2. Variační nerovnici (29), která je ekvivalentní s úlohou (28), lze přímo vyřešit jen v malém počtu jednoduchých případů. V těch zbývajících musíme přejít k metodám získání vhodného přibližného řešení. Jednou z takových metod je právě metoda konečných prvků.

Nechť

$$K_h \subset V_h \subset V,$$

kde  $V_h$  je konečnědimenzionální podprostor prostoru  $V$ , tj.  $\dim V_h < \infty$ . Úlohu (28) převedeme na diskrétní formulaci

$$\begin{cases} \text{najít funkci } u_h \in K_h \text{ takovou, že} \\ J(u_h) = \min_{v_h \in K_h} J(v_h), \end{cases} \quad (30)$$

kde  $h$  je diskretizační parametr. Funkci  $u_h$ , jež řeší úlohu (30), nazveme aproximací přesného řešení úlohy (28) na  $K_h$ . Konvexní množina  $K$  diskretizací přejde na konečnědimenzionální množinu  $K_h$ , což už je podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Provedeme triangulaci oblasti, tedy vytvoříme síť na oblasti  $\Omega = (0, L)$ . Nadefinujeme dělicí body neboli uzly, tj.

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_N = L.$$

Symbolem  $\mathcal{T}_h$  budeme rozumět  $\mathcal{T}_h = \{K_1, \dots, K_N\}$  dělení intervalu  $(0, L)$  na podintervaly  $K_i = [x_{i-1}, x_i]$  a diskretizační parametr  $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$ , kde

$h_i = x_i - x_{i-1}$ . Intervaly  $K_i$  nazýváme prvky. Na síti  $\mathcal{T}_h$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  nadefinujeme speciální systém bázových funkcí  $\varphi_k(x)$  s malým nosičem s vlastností  $\varphi_k(x_i) = \delta_{ki}$ , kde  $\delta_{ki}$  značí Kroneckerovo delta. Řešení dané úlohy budeme hledat ve tvaru

$$v_h(x) = \sum_{k=1}^{2N+1} c_k \varphi_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 0, \dots, 2N+1.$$

Z vlastností globálních funkcí nám plyne, že

$$v_h(x_i) = \sum_{k=1}^{2N+1} c_k \varphi_k(x_i) = \sum_{k=1}^{2N+1} c_k \delta_{ki} = c_i \quad \forall i = 0, \dots, 2N+1,$$

kde  $v_h \in V_h$ , prostor  $V_h$  je tvaru

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h(0) = v_h'(0) = 0 = v_h(L) = v_h'(L)\}, \quad (31)$$

$$X_h = \{v_h \in C^1((0, L)) : v_h|_{K_i} \in P_3(K_i) \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}, \quad (32)$$

podrobněji viz [4]. Mějme úlohu (30), kde  $J(v_h)$  je tvaru

$$J(v_h) = \frac{1}{2} \int_0^L EI v_h''(x) v_h''(x) dx - \int_0^L f(x) v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (33)$$

Místo globálních bázových funkcí budeme používat lokální bázové funkce, které jsou vhodnější pro praktické výpočty.

Přejdeme od intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  v globálních souřadnicích a od globálních bázových funkcí  $\varphi_k(x)$ , např. k referenčnímu intervalu  $[-1, +1]$  v lokálních souřadnicích a lokálním bázovým funkcím, kterým se také říká **tvarové funkce**. Z globálních do lokálních souřadnic a naopak přejdeme pomocí transformace pro  $\hat{x} \in [-1, 1]$  tedy

$$\hat{x} = \frac{2}{h_i} x - 1, \quad x = \frac{h_i}{2} (\hat{x} + 1),$$

kde  $h_i$  je délka uvažovaného intervalu. Čtyři tvarové funkce příslušející danému prvku můžeme zapsat

$$\begin{aligned} N_1(\hat{x}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})^2(2 + \hat{x}), & N_2(\hat{x}) &= \frac{1}{8}h_i(1 - \hat{x})^2(1 + \hat{x}), \\ N_3(\hat{x}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})^2(2 - \hat{x}), & N_4(\hat{x}) &= \frac{1}{8}h_i(1 + \hat{x})^2(1 - \hat{x}). \end{aligned}$$

Řešením ve smyslu metody konečných prvků pak bude funkce  $v_h(x)$ . Na prvku  $K_i$  bude průběh této funkce dán vztahem

$$v_h(x) = N_1(x)v_i(x) + N_2(x)v_i'(x) + N_3(x)v_{i+1}(x) + N_4(x)v_{i+1}'(x),$$

kde  $x \in K_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Symbolem  $N_i^{(e)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  označme globální bázovou funkci na jednom prvku.

Zvolme ekvidistantní dělení s konstantním krokem  $h$ . Vypočítáme elementární matici na jednom prvku, tj.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left( k_{ij}^{(e)} \right)_{i,j=1}^4,$$

kde obecný člen elementární matic  $\mathbf{K}^{(e)}$  je následujícího tvaru

$$k_{ij}^{(e)} = \frac{8EI}{h^3} \int_{-1}^{+1} \frac{d^2 N_i^{(e)}}{d\hat{x}^2} \frac{d^2 N_j^{(e)}}{d\hat{x}^2} d\hat{x}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Výsledný tvar matice  $\mathbf{K}^{(e)}$  je

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé elementární matice skládáme přes sebe až do sestavení matice celé soustavy  $\mathbf{K}$ . Skládání matice soustavy si předvedeme na dvou sousedních prvcích.

Mějme matice  $\mathbf{K}_1^{(e)}$  a  $\mathbf{K}_2^{(e)}$ , matici soustavy  $\mathbf{K}^{(e)}$  pak dostaneme

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h & 0 & 0 \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6h & 12 + 12 & -6h + 6h & -12 & 6h \\ 6h & 2h^2 & -6h + 6h & 4h^2 + 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6h & 12 & -6h \\ 0 & 0 & 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}.$$

Analogicky postupujeme i pro vyšší počet prvků. Stejný způsob použijeme i pro vektor zatížení  $\mathbf{f}$ . Výsledný vektor vytvoříme z příspěvků  $\mathbf{f}^{(e)}$ . Pro rovnoměrné zatížení o velikosti  $q$  vypočítáme podle vztahů

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \frac{1}{2}qh \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)}(\hat{x})d\hat{x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

a obdržíme

$$\mathbf{f}^{(e)} = qh \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{12}h, \frac{1}{2}, -\frac{1}{12}h \right)^T.$$

Tento postup vede k sestavení tzv. **matice tuhosti**  $\mathbf{K}$  nosníku a vektoru zatížení  $\mathbf{f}$ . V matici tuhosti  $\mathbf{K}$  musíme ještě implementovat stabilní okrajové podmínky. Po zavedení stabilních okrajových podmínek do matice tuhosti je  $\mathbf{K}$  symetrická a pozitivně definitní.

Z (33) jsme tedy obdrželi kvadratickou funkci, kterou zapíšeme pomocí matice tuhosti  $\mathbf{K}$  a vektoru  $\mathbf{f}$ , tj.

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f},$$

kde neznámý vektor  $\mathbf{v}$  má strukturu  $\mathbf{v} = (v_0, v'_0, v_1, v'_1, \dots, v_N, v'_N)^T$ ,

$$v_i = v(x_i), \quad v'_i = v'(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Nyní se ještě podrobněji zaměříme na diskrétní množinu  $K_h$ , na které hledáme řešení Signoriniho úlohy (28). Množina  $K_h$  je tvaru

$$K_h = \{v_h \in V_h : v_h(x_i) \geq g \text{ pro } i = 1, \dots, N\},$$

kde  $g$  je konstantní funkce. Nyní tedy máme úlohu kvadratického programování s jednou nerovnostní podmínkou

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} \\ \text{za podmínky} & \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{g} \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{N+1}, \end{cases}$$

kde  $\mathbf{v} = (v_0, v'_0, v_1, v'_1, \dots, v_N, v'_N)^T$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = (v_0, v_1, \dots, v_N)^T$  a  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}^T$ . Kontaktní úlohu jsme tedy převedli na úlohu kvadratického programování, kterou budeme nyní řešit pomocí metody vnitřních bodů, konkrétně tedy praktickou primárně-duální metodou vnitřních bodů. Matice tuhosti  $\mathbf{K}$  je po implementaci stabilních okrajových podmínek pozitivně definitní. Hledáme tedy minimum ryze konvexní kvadratické funkce na konvexní množině.

Analogicky postupujeme i pro ostatní typy nosníků.



### 3.4. Řešení kontaktní úlohy

V této kapitole se budeme zabývat praktickým výpočtem kontaktní úlohy s různými typy nosníků. Úlohy budeme řešit pomocí praktické primárně-duální metody vnitřních bodů a vlastních programových kódů sestavených v matematickém softwaru MATLAB.

Budeme tedy řešit úlohu kvadratického programování

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f} \\ \text{za podmínky} & \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{g} \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{N+1}, \end{cases}$$

kde  $\mathbf{v} = (v_0, v'_0, v_1, v'_1, \dots, v_N, v'_N)^T$ ,  $\bar{\mathbf{v}} = (v_0, v_1, \dots, v_N)^T$  a  $\mathbf{g} = \mathbf{g}e^T$ . Před samotným výpočtem přeskládáme vektor  $\mathbf{v}$ , dostaneme tak nový vektor

$$\mathbf{v} = (v_0, v'_0, v_1, v'_1, \dots, v_N, v'_N)^T \longrightarrow \tilde{\mathbf{v}} = (v_0, v_1, \dots, v_N, v'_0, v'_1, \dots, v'_N)^T.$$

Pro jednoduchost můžeme  $\tilde{\mathbf{v}}$  psát  $\tilde{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}})^T$ , kde

$$\bar{\mathbf{v}} = (v_0, v_1, \dots, v_N)^T \text{ a } \hat{\mathbf{v}} = (v'_0, v'_1, \dots, v'_N)^T.$$

Analogickým způsobem přeskládáme také matici tuhosti  $\mathbf{K}$  a vektor  $\mathbf{f}$ . Pro dva sousední prvky bude matice  $\mathbf{K}$  tvaru

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \frac{EI}{h^3} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 & 6h & 6h & 0 \\ -12 & 24 & -12 & -6h & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 12 & 0 & -6h & -6h \\ 6h & -6h & 0 & 4h^2 & 2h^2 & 0 \\ 6h & 0 & -6h & 2h^2 & 8h^2 & 2 \\ 0 & 6 & -6h & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Stabilní okrajové podmínky můžeme implementovat před nebo po přerovnaní matice tuhosti. Pro jednotlivé typy nosníku se tak rozměry výsledné přerovnané matice tuhosti  $\tilde{\mathbf{K}}$  budou lišit. Vektor zatížení přeskládáme a stabilní podmínky implementujeme analogickým způsobem. Po těchto úpravách dostaneme tvar úlohy

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{f}} \\ \text{za podmínky} & \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{g} \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{N+1}. \end{cases}$$

Pro praktické výpočty musíme ještě upravit úlohu. Úpravu si ilustrujeme pro oboustranně vetknutý nosník. Nerovnostní podmínky oboustranně vetknutého nosníka nahradíme ekvivalentní maticovou formulací

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{v}} \geq \tilde{\mathbf{g}},$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Máme tedy výsledný tvar úlohy

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{f}} \\ \text{za podmínky} & \mathbf{T}\tilde{\mathbf{v}} \geq \tilde{\mathbf{g}} \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{2N+2}. \end{cases}$$

Jedná se tedy o úlohu kvadratického programování pouze s nerovnostními omezeními. Máme tedy obecnější úlohu, než pro kterou jsme odvodili praktickou primárně-duální metodu vnitřních bodů. Ovšem i pro tuto úlohu platí stejné závěry uvedené před příklady ilustrující použití této metody, viz odstavce 2.4.1. Pro ostatní typy nosníků postupujeme obdobným způsobem a omezující podmínky nahrazujeme vhodnou maticovou formulací. Kontaktní úlohy pro ostatní typy nosníků se liší pouze v implementaci stabilních okrajových podmínek.

### 3.4.1. Oboustranně vetknutý nosník

Kontaktní úlohy pro oboustranně vetknutý nosník budeme řešit pomocí vlastního programového kódu *IPM\_kontakt\_vetknuti.m*. Vstupní data tohoto programu jsou hodnota  $EI$ , udávající materiálové vlastnosti a moment setrvačnosti průřezu nosníku, délka nosníku  $L$ , hodnoty počátečních aproximací, zatížení  $\mathbf{f}$ , které bude pro naše výpočty vždy konstantní, vzdálenost podloží od nosníku, maximální počet provedených iterací a výpočetní přesnost, se kterou chceme danou úlohu řešit. Počáteční aproximace vektorů  $\tilde{\mathbf{v}}^0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^0$  a  $\mathbf{w}^0$  jsou voleny jako vhodné násobky jednotkových vektorů. Těmto násobkům budeme říkat koeficienty počátečních aproximací a budeme je značit  $\tilde{v}^0$ ,  $\lambda^0$  a  $w^0$ , přičemž koeficientem vektoru

$\tilde{v}^0$  rozumíme dvojici  $\tilde{v}^0 = (\bar{v}^0, \hat{v}^0)^T$ , viz kapitola 3.4.

Uvažujme tedy oboustranně vetknutý nosník délky 1 m. Úlohu vyřešíme pro dvě různé hodnoty  $EI$ , počet prvků a dvě různá zatížení. Koeficienty počátečních aproximací jsme zvolili následujícím způsobem

$$\tilde{v}^0 = (\bar{v}^0, \hat{v}^0) = (-0.001, 0.001)^T, \lambda^0 = 0.2, w^0 = 0.009.$$

Vzdálenost nosníku od podloží je rovna 0.01 m.

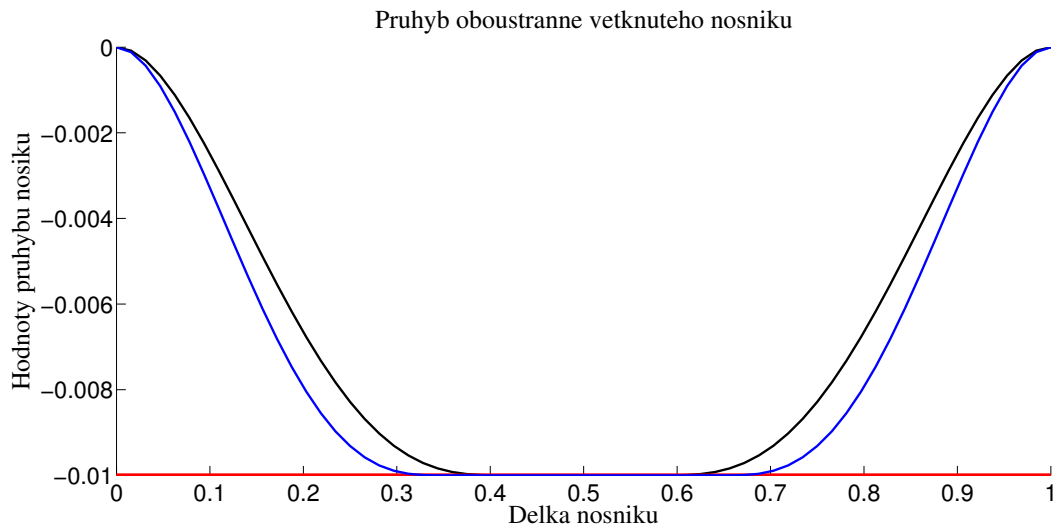
Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnota  $EI$  je udávána v Pascalech [Pa], velikost  $\mathbf{f}$  zatížení je v  $[\frac{N}{m}]$ , velikost kontaktní zóny je udávána v metrech [m] a hodnota funkcionálu je v Joulech [J]. Pojmem Počet p. v následující tabulce rozumíme počet prvků a hodnota It. udává počet iterací.

$EI$	Zatížení $\mathbf{f}$	Počet p.	Kontaktní zóna	It.	Hodnota funkcionálu
$2 \cdot 10^7$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.4063,0.5938]	25	-2802971.9482
		64	[0.4063,0.5938]	27	-2802935.3499
$2 \cdot 10^7$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.3750,0.6250]	27	-6304993.3110
		64	[0.3436,0.6563]	32	-6304975.8000
$3 \cdot 10^6$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.2500,0.7500]	56	-3632863.7390
		64	[0.2500,0.7500]	86	-3632741.0508
$3 \cdot 10^6$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.2186,0.7813]	62	-7700429.1256
		64	[0.2188,0.7813]	77	-7700526.2825

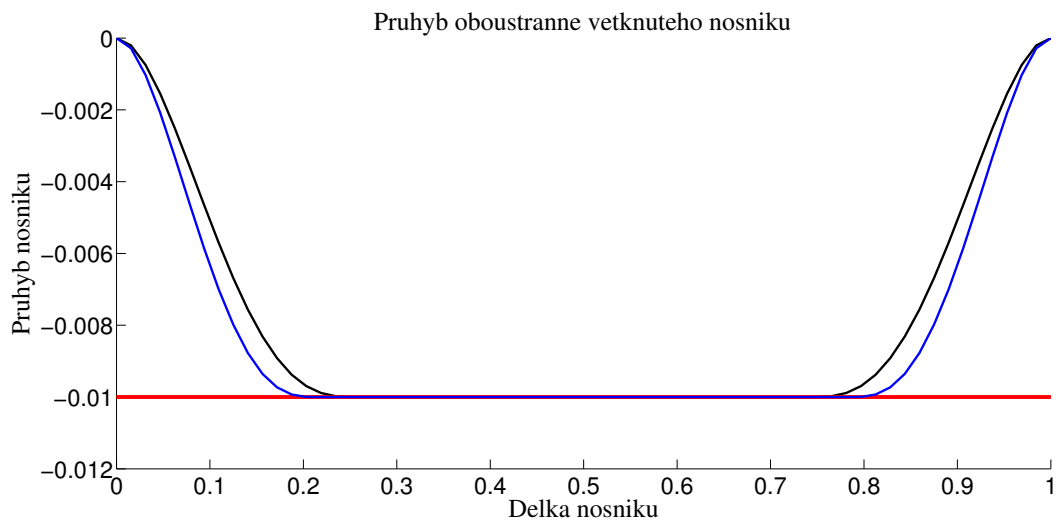
V grafu (Obrázek 1) je vykreslen průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro 64 prvků a pro hodnotu  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa. Průhyb je vykreslen pro dvě různá zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Z obrázku je zřejmé, že se vzrůstajícím zatížením, bráno v absolutní hodnotě, se kontaktní zóna nosníku s podložím zvětšuje.

V dalším grafu (Obrázek 2) je opět vykreslen průhyb vetknutého nosníku pro 64 prvků. Nyní jsme ovšem pracovali s nosníkem s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa. Průhyb jsme vykreslovali pro zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (modře) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (černě). Opět je z obrázku zřejmé, že s rostoucím zatížením, bráno v absolutní hodnotě, se zvětší i interval kontaktu nosníku s podložím.

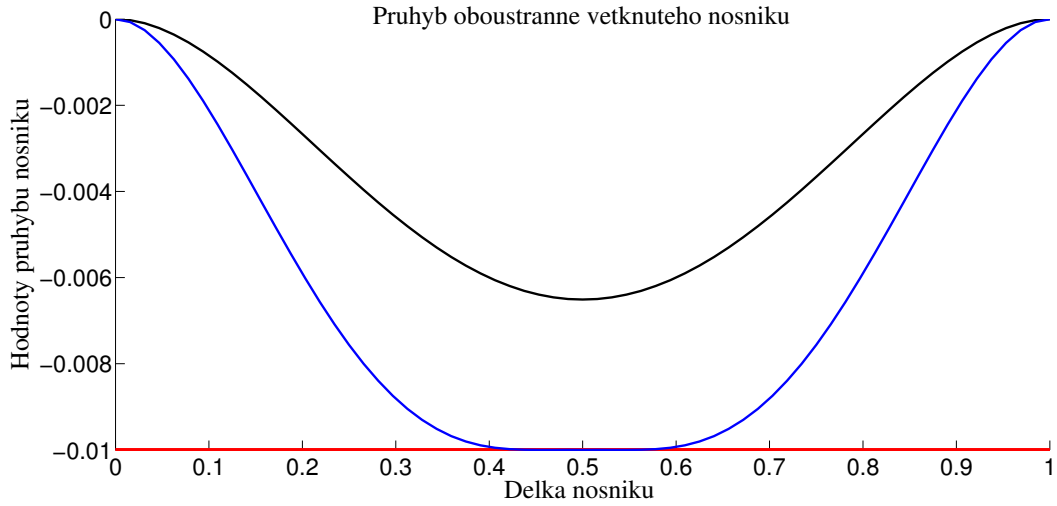
Nyní uvažujme zatížení nosníku  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$  a uvažujme nosník z různých materiálů (Obrázek 3), konkrétně tedy  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa. Dané



Obrázek 1: Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a zatížení  $f = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $f = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).



Obrázek 2: Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa zatížení  $f = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $f = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).



Obrázek 3: Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$  a hodnoty  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře).

zatížení ovšem není dostatečně velké a ke kontaktu tedy pro nosník s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa nedojde. Pro druhý typ nosníku, tj.  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa je již dané zatížení dostačující dojde ke kontaktu s podloží.

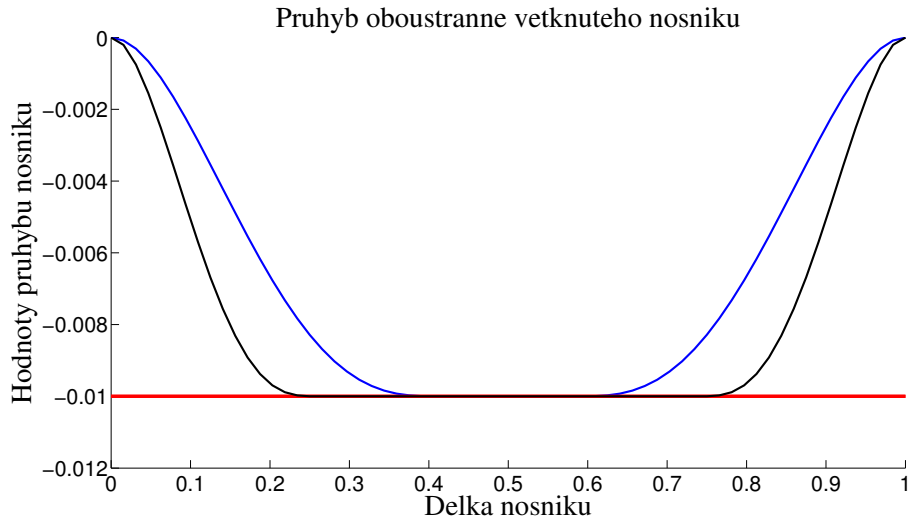
Z obrázku (Obrázek 4) je zřejmé, že pokud působíme stejně velkým zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  na nosník z různých materiálů, tj. pevnější materiál  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (modře) a měkčí materiál  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (černě), kontaktní zóna pro měkčí nosník je větší než pro nosník z tvrdšího materiálu.

Pro ukončení výpočtu jsme pro všechny varianty těchto příkladů zvolili následující kritéria

$$\| \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda} \| < tol\_r1 \quad \| \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T} - \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{w} \| < tol\_r2.$$

V našem případě se ukázalo jako optimální zvolit výpočetní následující přesnost  $tol\_r1 = 10^{-3}$  a  $tol\_r2 = 10^{-6}$ . Pokud se rozhodneme zvolit odlišnou nebo přesnější výpočetní přesnost, výpočet se značně zpomalí nebo i po provedení velkého počtu iterací, nedokáže najít řešení s požadovanou přesností.

Z dosažených výsledků je zřejmé, že pro nosníky z pevnějších materiálů, tj. v našem případě  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa, je kontaktní zóna menší než pro nosníky z měkčích materiálů, tj.  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa, pokud na oba typy nosníku působíme stejným



Obrázek 4: Průhyb oboustranně vetnutého nosníku pro zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  a hodnoty  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (modře) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (černě).

zatížením  $\mathbf{f}$ . Obecně tedy můžeme konstatovat, že pro nosník z pevnějších materiálů, pokud chceme, aby došlo tak ke kontaktu s podložím, musí zatížení na něj působící, být větší než pro nosníky z měkčích materiálů. Se vzrůstajícím počtem prvků můžeme přesněji určit kontaktní zónu nosníku s podložím.

### 3.4.2. Prostě podepřený nosník

Kontaktní úlohy pro prostě podepřený nosník budeme řešit pomocí vlastního programového kódu *IPM\_kontakt\_proste\_podepreni.m*. Vstupními daty tohoto programu jsou hodnota  $EI$ , délka nosníku  $L$ , koeficienty počátečních aproximací, hodnotu konstantního zatížení, vzdálenost nosníku od podloží, maximální počet iterací a výpočetní přesnost.

Mějme tedy prostě podepřený nosník délky 1 m. Úlohu jsme řešili pro dvě různé hodnoty  $EI$ , počet prvků a dvě různá zatížení. Koeficienty počátečních aproximací jsme zvolili následujícím způsobem

$$\tilde{v}^0 = (\bar{v}^0, \hat{v}^0) = (-0.001, 0.001)^T, \lambda^0 = 0.2, w^0 = 0.009.$$

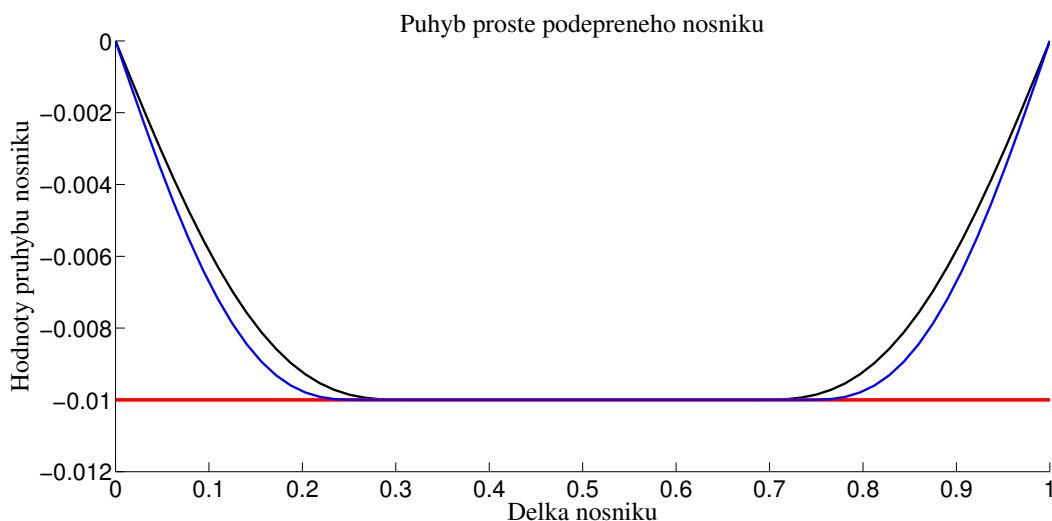
Vzdálenost nosníku od podloží je rovna 0.01 m.

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnota  $EI$  je udávána v Pascalech

[Pa], velikost  $\mathbf{f}$  zatížení je v  $[\frac{N}{m}]$ , velikost kontaktní zóny je udávána v metrech [m] a hodnota funkcionálu je v Joulech [J]. Pojmeme Počet p. rozumíme počet prvků a hodnota It. udává počet iterací.

EI	Zatížení f	Počet p.	Kontaktní zóna	It.	Hodnota funkcionálu
$2 \cdot 10^7$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.3125,0.6875]	42	-3747929.8831
		64	[0.3125,0.6875]	45	-3747932.5532
$2 \cdot 10^7$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.2500,0.7500]	41	-7894992.8550
		64	[0.2656,0.7344]	35	-7894306.4953
$3 \cdot 10^6$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.1250,0.8750]	39	-45618173.4250
		64	[0.1875,0.8125]	31	-42208173.4250
$3 \cdot 10^6$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.1563,0.8438]	40	-8690453.2481
		64	[0.1563,0.8438]	43	-8689797.5583

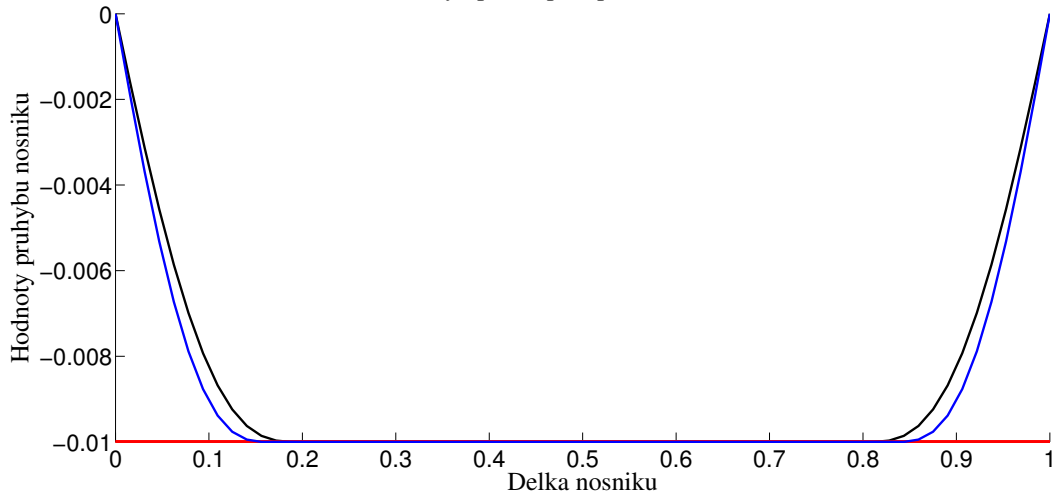
V grafu (Obrázek 5) je vykreslen průhyb prostě podepřeného nosníku pro 64 prvků s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa. Průhyb je vykreslen pro dvě různá zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Z obrázku je zřejmé, že se vzrůstajícím zatížením, bráno v absolutní hodnotě, se kontaktní zóna nosníku s podložím zvětšuje.



Obrázek 5: Průhyb prostě podepřeného nosníku pro zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře) a hodnotu  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa.

V dalším grafu (Obrázek 6) je vykreslen průhyb prostě podepřeného nosníku pro

Pružby prostě podepřeneho nosníku



Obrázek 6: Pružby prostě podepřeneho nosníku pro zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^{-8} \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^{-9} \frac{N}{m}$  (modře) a hodnotu  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa.

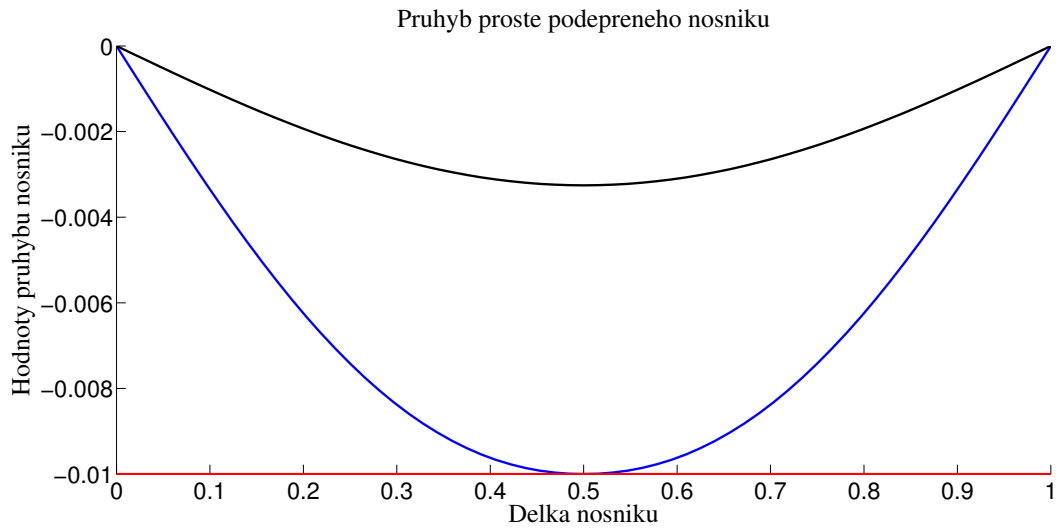
64 prvků s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa. Pružby je vykreslen pro dvě různé hodnoty zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (modře) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (černě). Z obrázku (Obrázek 6) je zřejmé, že můžeme dojít ke stejnému závěru jako v předchozím případě (Obrázek 5), tj. se vzrůstajícím zatížením, bráno v absolutní hodnotě, se kontaktní zóna nosníku s podložím zvětšuje.

Na obrázku (Obrázek 7) je vykreslen pružby nosníku s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$ . Pro dané zatížení, které působí na nosník nedojde ke kontaktu s podložím nedojde. Pružby nosníku tedy leží nad podložím. Pro nosník s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře) a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$  ke kontaktu dochází. Pružby nosníku leží těsně nad podložím.

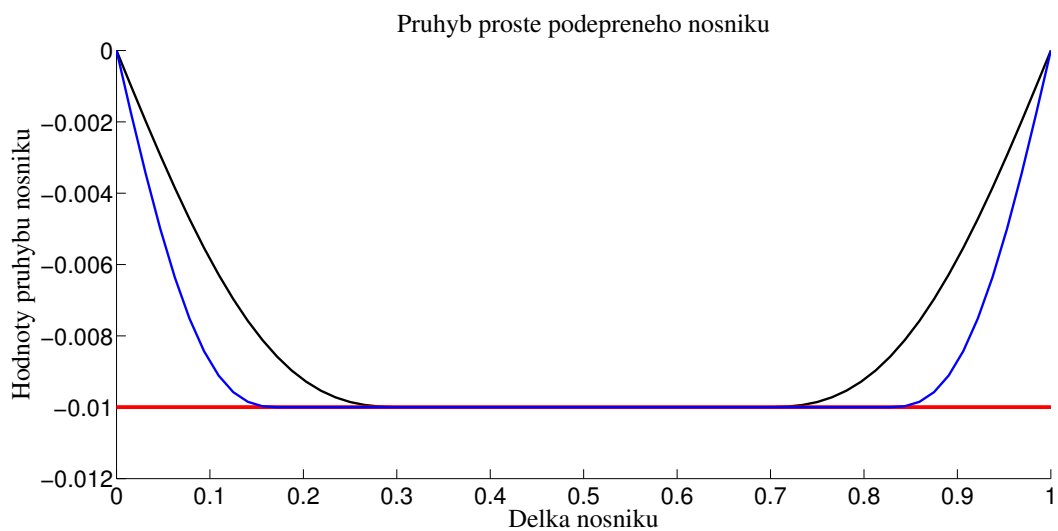
Na následujícím obrázku (Obrázek 8) je vykreslen pružby nosníku ze dvou různých materiálů s jednotným zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ . Z obrázku je vidět, že nosník z pevnějších materiálů, tj. v našem případě  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa, se prohne méně než nosník z měkčích materiálů, tj.  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa, pokud na oba typy nosníků působí stejné zatížení.

Pro ukončení výpočtu jsme opět pro všechny varianty těchto příkladů zvolili





Obrázek 7: Průhyb prostě podepřeného nosníku pro  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a zatížení  $f = -5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$ .



Obrázek 8: Průhyb prostě podepřeného nosníku pro zatížení  $f = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  a hodnotami  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře).

následující podmínky, tj.

$$\| \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{T}^T\boldsymbol{\lambda} \| < tol\_r1 \quad \| \tilde{\mathbf{v}}^T\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{w} \| < tol\_r2.$$

V našem případě se ukázalo jako optimální zvolit výpočetní následující přesnost  $tol\_r1 = 10^{-3}$  a  $tol\_r2 = 10^{-6}$ . Můžeme tedy konstatovat, že velikost kontaktní zóny se spolu s rostoucím zatížením zvětšuje. Ovšem hodnota zatížení musí být vhodně zvolena na základě materiálových vlastností nosníku.

### 3.4.3. Vetknutý nosník s podepřením

Kontaktní úlohy pro vetknutý nosník s podepřením budeme řešit pomocí vlastního programového kódu *IPM\_kontakt\_podepreni\_vetknuti.m*. Vstupními daty tohoto programu jsou hodnoty  $EI$ , délka nosníku  $L$ , koeficienty počátečních aproximací, hodnota konstantního zatížení, vzdálenost nosníku od podloží, maximální počet iterací a výpočetní přesnost.

Mějme tedy prostě podepřený nosník délky 1 m. Úloha byla opět řešena pro nosník z různých materiálů a dvě různá zatížení a odlišný počet prvků. Koeficienty počátečních aproximací jsme zvolili následujícím způsobem

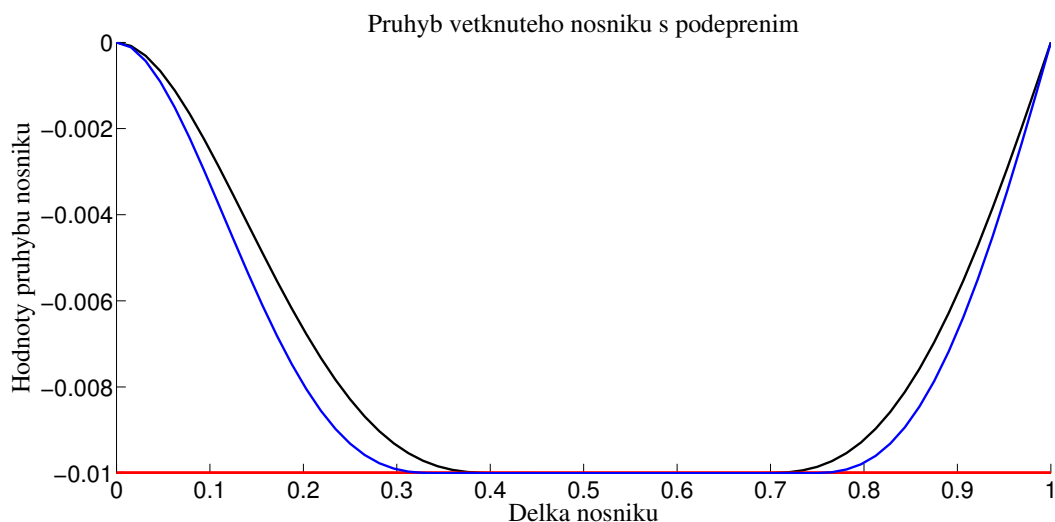
$$\tilde{\mathbf{v}}^0 = (\bar{v}^0, \hat{v}^0) = (-0.001, 0.001)^T, \lambda^0 = 0.2, w^0 = 0.009.$$

Vzdálenost nosníku od podloží je rovna 0.01 m.

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnoty  $EI$  jsou udávány v Pascalech [Pa], velikost  $\mathbf{f}$  zatížení je v  $[\frac{N}{m}]$ , velikost kontaktní zóny je udávána v metrech [m] a hodnota funkcionálu je v Joulech [J]. Pojmeme Počet p. v následující tabulce rozumíme počet prvků a hodnota It. udává počet iterací.

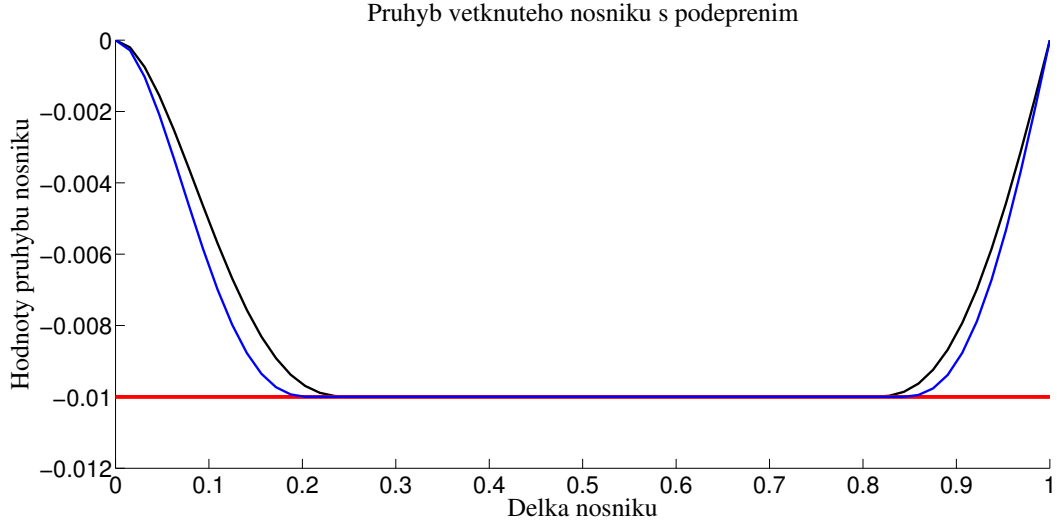
EI	Zatížení $\mathbf{f}$	Počet p.	Kontaktní zóna	It.	Hodnota funkcionálu
$2 \cdot 10^7$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.4363,0.6875]	32	-3275379.6908
		64	[0.4219,0.6875]	26	-3275429.2937
$2 \cdot 10^7$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.3438,0.7500]	61	-7099757.8387
		64	[0.3438,0.7344]	85	-7099625.6023
$3 \cdot 10^6$	$-5 \cdot 10^8$	32	[0.2500,0.8125]	66	-3926702.6759
		64	[0.2500,0.8215]	75	-3926794.4083
$3 \cdot 10^6$	$-1 \cdot 10^9$	32	[0.2188,0.8436]	65	-8194533.8365
		64	[0.2188,0.8438]	74	-8195099.5489

V obrázku (Obrázek 9) je vykreslen průhyb s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Průhyb je vykreslen pro 64 prvků. Z obrázku je vidět, že pokud na nosník působí větší zatížení, bráno v absolutní hodnotě, pak je kontaktní zóna větší.



Obrázek 9: Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).

Na obrázku (Obrázek 10) vidíme průhyb vetknutého nosníku s podepřením nosníku s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa a se stejným zatížením jako v předchozím případě, tj.  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Můžeme opět konstatovat, že kontaktní zóna nosníku s podloží se zvětšuje se vzrůstajícím zatížením, bráno v absolutní hodnotě.



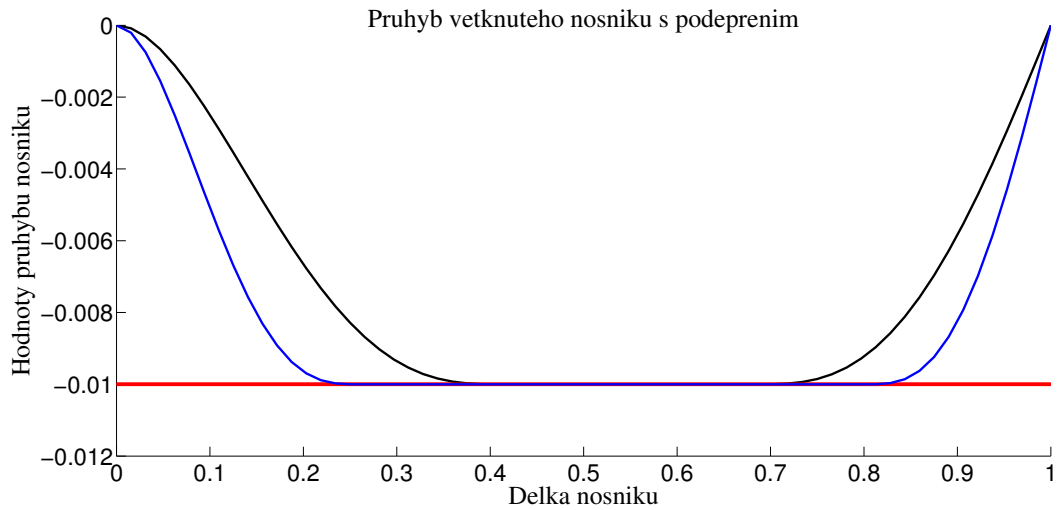
Obrázek 10: Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).

Na následujícím grafu (Obrázek 11) můžeme vidět průhyb vetknutého nosníku s podepřením pro  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  a dvě různé hodnoty  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře). Je zřejmé, že pro měkčí nosník, tj.  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře), je kontaktní zóna větší než pro nosník s  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě). Pro názornost zde uvádíme také příklad (Obrázek 12), kdy zatížení  $\mathbf{f} = -3 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$  a hodnota  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa. Při daném zatížení  $\mathbf{f}$  a materiálových vlastnostech toho typu nosníku ke kontaktu s podložím nedojde. Pokud ovšem zvolíme  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa a ponecháme zatížení  $\mathbf{f} = -3 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$ , pak již ke kontaktu dochází. Je tedy zřejmé, že na nosíky z pevnějších materiálů, tj. např.  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa, musíme působit větším zatížením, aby došlo ke kontaktu. Naopak zatížení, v tomto případě  $\mathbf{f} = -3 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$ , už je dostatečně velké, aby nosník z měkčích materiálů, např.  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa, byl v kontaktu s podložím.

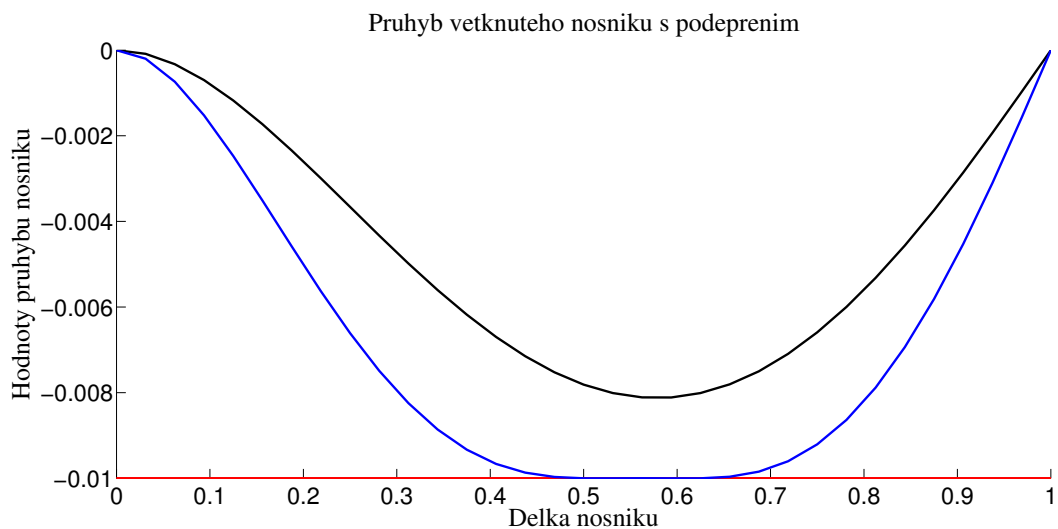
Pro ukončení výpočtu jsme opět pro všechny varianty těchto příkladů zvolili následující kritéria

$$\| \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda} \| < tol\_r1 \quad \| \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T} - \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{w} \| < tol\_r2.$$

V našem případě se ukázalo jako optimální zvolit výpočetní přesnost  $tol\_r1 = 10^{-4}$  a  $tol\_r2 = 10^{-6}$ . Pokud se rozhodneme zvolit stejnou výpočetní



Obrázek 11: Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře) zatížením  $f = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ .



Obrázek 12: Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře) zatížením  $f = -3 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$ .

přesnost např.  $tol_r1 = tol_r2 = 10^6$  pro obě rezidua stejná, pak i po provedení velkého počtu iterací nemusíme nalézt řešení dané úlohy.

I v případě vetknutého nosníku s podepřením můžeme závěrem říci, že velikost kontaktní zóny se s rostoucím zatížením zvětšuje. A také můžeme říci, že na nosníky z pevnějších materiálů musíme vyvinout větší zatížení, bráno v absolutní hodnotě, pokud chceme, aby došlo ke kontaktu nosníku s podložím. Naopak pro nosník na měkčích materiálů obecně můžeme působit menším zatížením. Se vzrůstajícím počtem prvků můžeme přesněji určit kontaktní zónu. Ovšem pro velký počet prvků se výpočet značně zpomalí.

#### 3.4.4. Vetknutý nosník s volným koncem

Kontaktní úlohy pro nosník s volným koncem budeme řešit pomocí vlastního programového kódu *IPM\_kontakt\_volny\_konec.m*. Vstupními daty toho programu jsou hodnota  $EI$ , délka nosníku  $L$ , koeficienty počátečních aproximací, hodnota konstantního zatížení, vzdálenost podloží od nosníku, maximální počet provedených iterací a výpočetní přesnost.

Mějme tedy pevně vetknutý nosník s volným koncem. Úlohu jsme řešili pro dva nosníky z různých materiálů délky 1 m. Pro rozdílné počty prvků a měnící se zatížení můžeme pozorovat měnící se bod, kdy dojde ke kontaktu nosníku s podložím. Pro ukončení výpočtu jsme zvolili stejné podmínky jako v případě oboustranně vetknutého nosníku. Koeficienty počátečních aproximací jsme zvolili následujícím způsobem

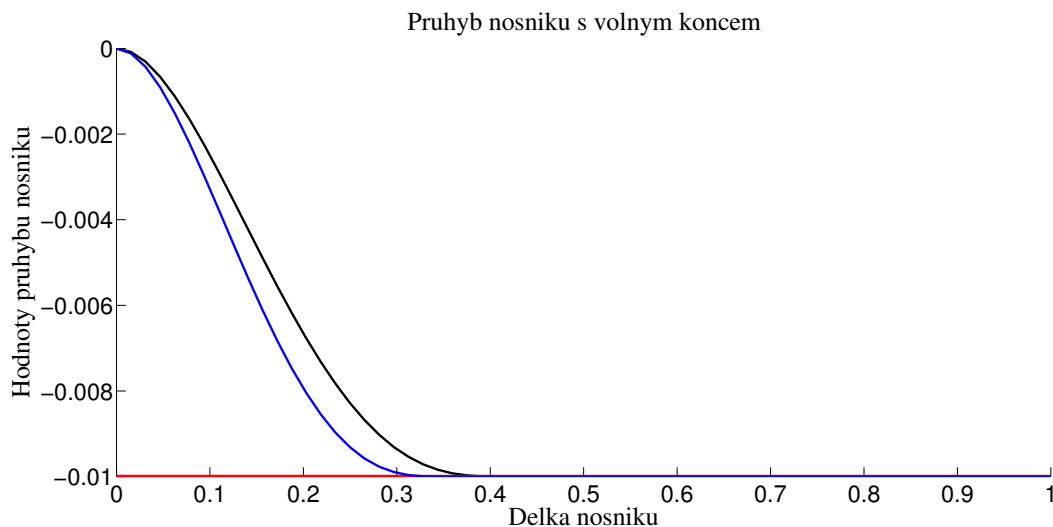
$$\tilde{v}^0 = (\bar{v}^0, \hat{v}^0) = (-0.001, 0.001)^T, \lambda^0 = 0.2, w^0 = 0.009.$$

Vzdálenost nosníku od podloží je rovna 0.01 m.

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce. Hodnota  $EI$  je udávána v Pascálech [Pa], velikost  $f$  zatížení je v  $\left[\frac{N}{m}\right]$  a hodnota funkcionálu je v Joulech [J]. Pojmem Počet p. v následující tabulce rozumíme počet prvků a hodnota It. udává počet iterací.

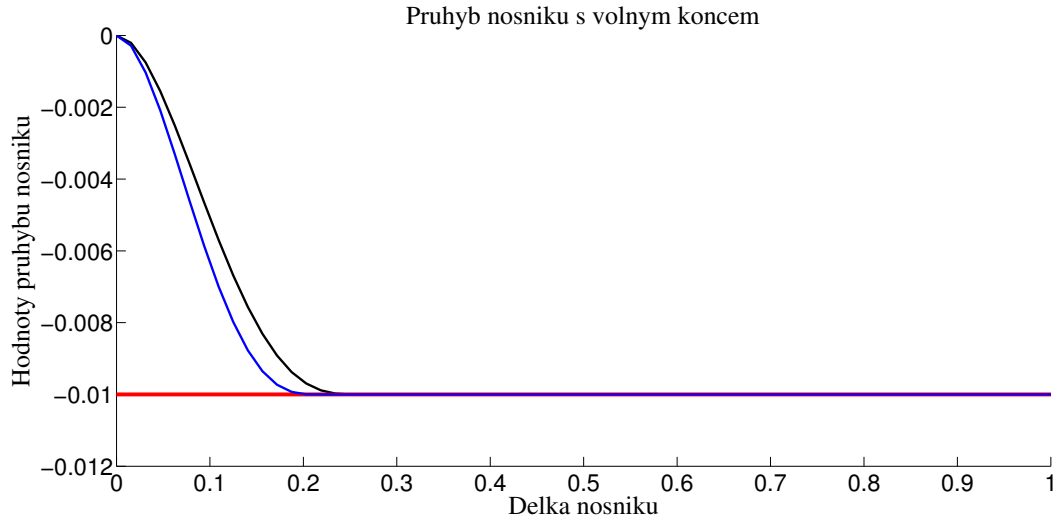
$EI$	Zatížení $\mathbf{f}$	Počet p.	Bod kontaktu	It.	Hodnota funkcionálu
$2 \cdot 10^7$	$-5 \cdot 10^8$	32	0.4062	67	-3901486.3742
		64	0.4063	59	-3901467.6850
$2 \cdot 10^7$	$-1 \cdot 10^9$	32	0.3438	75	-8152498.1492
		64	0.3438	98	-8152487.9467
$3 \cdot 10^6$	$-5 \cdot 10^8$	32	0.2500	55	-4316434.3588
		64	0.2500	65	-4316370.6032
$3 \cdot 10^6$	$-1 \cdot 10^9$	32	0.2188	44	-8850224.5202
		64	0.2188	44	-8850263.4524

Následující graf (Obrázek 13) je vykreslen pro vetknutý nosník s volným koncem s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a 64 prvků. Průhyb je vykreslen pro dvě různé hodnoty zatížení  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Z obrázku je tedy zřejmé, že při větším zatížení, bráno v absolutní hodnotě, se kontaktní zóna zvětší.



Obrázek 13: Průhyb nosníku s volným koncem s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).

Průhyb (Obrázek 14) jsme také vykreslili pro nosník s  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa a pro 64 prvků. Zatížení jsme zvolili jako v předchozím případě  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře). Z posledních dvou obrázků (Obrázek 13) a (Obrázek 14) je zřejmé, že kontaktní zóna nosníku s volným koncem je větší, pokud



Obrázek 14: Průhyb nosníku s volným koncem s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa a zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  (černě) a  $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$  (modře).

na nosník působíme větší silou, bráno v absolutní hodnotě. Velikost zatížení, pak musí být přizpůsobena materiálovým vlastnostem nosníku. Na nosník z pevnějších materiálů musíme působit větší silou, aby došlo ke kontaktu s podložím.

V následujícím obrázku (Obrázek 15) je vykreslen průhyb nosníků s hodnotami  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře) a s zatížením  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ . Analogicky jako u předchozích typů nosníků i zde si uvedeme příklad (Obrázek 16), kdy na nosník s volným koncem a s hodnotou  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa nebude působit dostatečně velké zatížení, aby došlo ke kontaktu s podložím. Naopak pro nosník s hodnotou  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa bude toto zatížení dostatečně velké dojde k dotyku v jednom bodě. Zvolme tedy  $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$ .

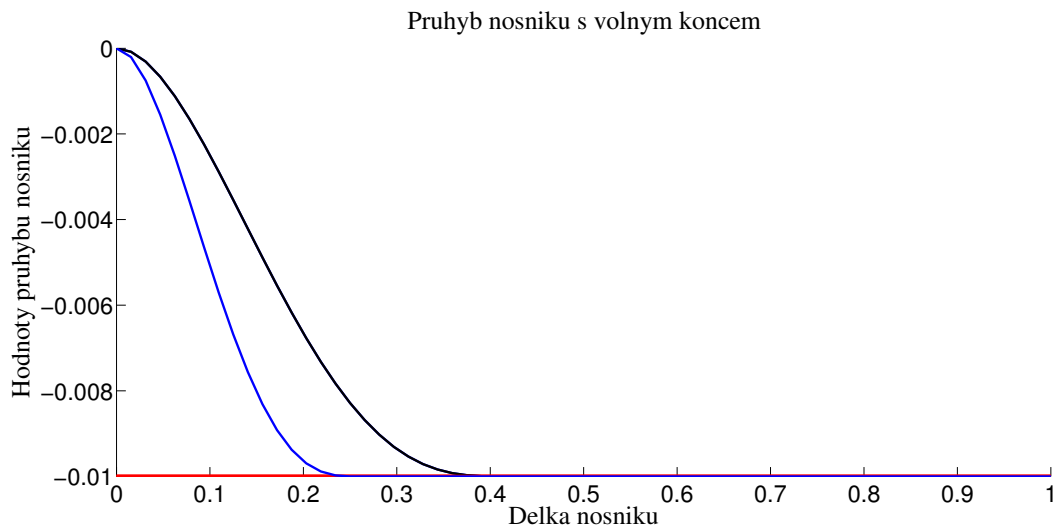
Pro ukončení výpočtu jsme opět pro všechny varianty těchto příkladů zvolili následující kritéria

$$\| \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{T}^T \boldsymbol{\lambda} \| < tol\_r1 \quad \| \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T} - \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{w} \| < tol\_r2.$$

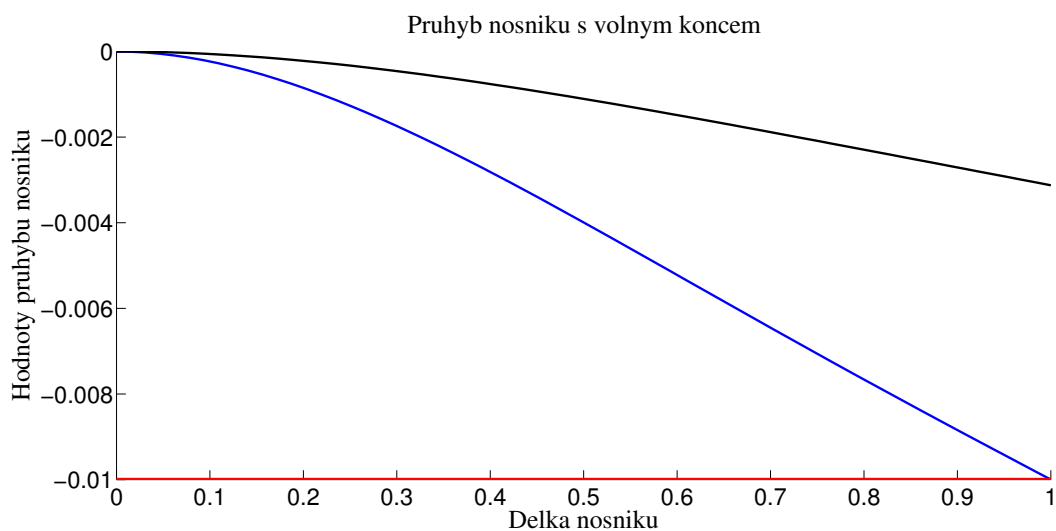
V našem případě se ukázalo jako optimální zvolit výpočetní následující přesnost, tj.  $tol\_r1 = 10^{-3}$  a  $tol\_r2 = 10^{-6}$ .

Analogicky jako v předchozích příkladech můžeme konstatovat, že se vzrůstajícím zatížením, bráno v absolutní hodnotě, se kontaktní zóna zvětšuje. Ovšem





Obrázek 15: Průhyb nosníku s volným koncem  $f_1 = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$  a s hodnotami  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře).



Obrázek 16: Průhyb nosníku s volným koncem  $f = -5 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$  a hodnotami  $EI = 2 \cdot 10^7$  Pa (černě) a  $EI = 3 \cdot 10^6$  Pa (modře).

velikost zatížení musí být zvolena úměrně materiálovým vlastnostem a typu nosníku, pokud má dojít ke kontaktu s podložím. Výpočty, které jsou prováděny pro velké počty prvků, nám umožní přesněji určit kontaktní zónu nosníku s podložím. S rostoucím počtem prvků narůstá i doba samotného výpočtu.

## Závěr

Cílem diplomové práce bylo nastudovat základní princip metody vnitřních bodů a teoretickou část doplnit vlastními příklady a kódy vytvořenými v matematickém softwaru MATLAB. V práci jsme se zabývali různými modifikacemi metod vnitřních bodů a principy fungování jednotlivých modifikací jsme přiblížili na vlastních příkladech nebo příkladech převzatých z neřešených cvičení z použité literatury. Stěžejní částí této práce pak tvoří aplikace praktické primárně-duální metody na kontaktní úlohu pro nosník s podložím.

Jednoznačným přínosem při tvorbě této diplomové práce bylo seznámení se s metodou vnitřních bodů a různými modifikacemi této metody. Při řešení praktických příkladů jsme se potýkali s problémy týkajícími se především řešení soustav rovnic. Tyto soustavy jsme řešili pomocí úplné nebo částečné eliminace a aplikace Choleského metody, pokud jsme obdrželi symetrickou soustavu. Při aplikaci metody na praktické úlohy, tedy na kontaktní úlohy pro Euler-Bernoulliho nosník s dokonale tuhým podložím, jsme museli překonat různé problémy se zadáním úlohy. Tyto komplikace jsme ovšem vyřešili pomocí vhodného přepisu podmínek do maticového tvaru a poté jsme dané úlohy vyřešili pomocí vlastních programových kódů v matematickém softwaru MATLAB. Vyzkoušeli jsme si také, že podstatnou částí výpočetní metody je volba vhodného kritéria pro ukončení výpočtu. Nemalým přínosem této práce bylo také skloubení znalostí z několika absolvovaných předmětů během studia, a to zejména z variačních metod, metod konečných prvků, nelineárního programování a mnohé dalších, a také seznámení se s kontaktní úlohou pro nosník s dokonale tuhým podložím.

Diplomová práce je vysázena v typografickém programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Všechny výpočty v této práci byly provedeny a obrázky (grafy) vykresleny v matematickém softwaru MATLAB. Při tvorbě této práce byla použita česká a anglická literatura uvedená v seznamu použité literatury.

## Literatura

- [1] Cornuejols, G., Tütüncü, R.: Optimization Methods in Finance. Carnegie Mellon Univerzity, Pittsburgh, USA, 2006.
- [2] Dennis, J.E., Schnabel, R.B.: Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Wiley, 1996.
- [3] Horová, I., Zelinka, J.: Numerické metody. Skriptum MU Brno, 2008.
- [4] Machalová, J., Netuka, H.: Metoda konečných prvků. Skriptum UP Olomouc, 2015.
- [5] Machalová, J., Netuka, H.: Nelineární programování: Teorie a metody. Skriptum UP Olomouc, 2013.
- [6] Machalová, J., Netuka, H.: Numerické metody nepodmíněné optimalizace. Skriptum UP Olomouc, 2013.
- [7] Machalová, J., Netuka, H.: Variační metody. Skriptum UP Olomouc, 2015.
- [8] Machalová, J., Netuka, H.: Solution of Contact Problems for Nonlinear Gao Beam and Obstacle. Hindawi, 2015.
- [9] Radová, J.: Lagrangeovské dualita. Bakalářská práce, 2015.
- [10] Rachůnková, I., Rachůnek, L.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Skriptum UP Olomouc, 2004.
- [11] Stoer, J., Bulirsch, R.: Introduction to Numerical Analysis. Springer, 2002.
- [12] Wright, S. J.: Numerical Optimization. Springer, 2006.
- [13] Wright, S. J.: Primal-Dual Interior Point Methods. SIAM, 1997.

# Příloha 1

## Seznam obrázků

1	Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa a zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	52
2	Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	52
3	Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$ a hodnoty $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře). . . . .	53
4	Průhyb oboustranně vetknutého nosníku pro zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ a hodnoty $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (modře) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (černě). . . . .	54
5	Průhyb prostě podepřeného nosníku pro zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^{-8} \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^{-9} \frac{N}{m}$ (modře) a hodnotu $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa. . . . .	55
6	Průhyb prostě podepřeného nosníku pro zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^{-8} \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^{-9} \frac{N}{m}$ (modře) a hodnotu $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa. . . . .	56
7	Průhyb prostě podepřeného nosníku pro $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$ . . . . .	57
8	Průhyb prostě podepřeného nosníku pro zatížení $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ a hodnotami $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře). . . . .	57
9	Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa a zatížením $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	59
10	Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa a zatížením $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	60
11	Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře) zatížením $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ . . . . .	61
12	Průhyb vetknutého nosníku s podepřením s $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře) zatížením $\mathbf{f} = -3 \cdot 10^7 \frac{N}{m}$ . . . . .	61
13	Průhyb nosníku s volným koncem s hodnotou $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa a zatížením $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	63
14	Průhyb nosníku s volným koncem s hodnotou $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa a zatížením $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ (černě) a $\mathbf{f} = -1 \cdot 10^9 \frac{N}{m}$ (modře). . . . .	64
15	Průhyb nosníku s volným koncem $\mathbf{f}_1 = -5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$ a s hodnotami $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře). . . . .	65
16	Průhyb nosníku s volným koncem $\mathbf{f} = -5 \cdot 10^5 \frac{N}{m}$ a hodnotami $EI = 2 \cdot 10^7$ Pa (černě) a $EI = 3 \cdot 10^6$ Pa (modře). . . . .	65

## Příloha 2

Součástí práce je přiložené CD s kódy sestavenými v matematickém softwaru MATLAB.

### Seznam kódů:

- choleskeho\_met.m
- IPM\_sledovani\_cesty\_dlouhy\_krok.m
- IPM\_Nepripustny\_bod.m
- IPM\_Prakticka\_P\_D.m
- IPM\_Prakticka\_P\_D\_obecne\_podm.m
- preklad\_K\_a\_f\_vetknuti.m
- preklad\_K\_f\_podepreni.m
- preklad\_K\_f\_volny\_konec.m
- preklad\_K\_podepreni\_vetknuti.m
- IPM\_kontakt\_vetknuti.m
- IPM\_kontakt\_proste\_podepreni.m
- IPM\_kontakt\_volny\_konec.m
- IPM\_kontakt\_podepreni\_vetknuti.m