



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**POSOUZENÍ PEVNOSTI ŠROUBU FIXÁTORU
BEDERNÍ PÁTEŘE S VYUŽITÍM STOCHASTICKY
ZADANÝCH VSTUPNÍCH VELIČIN**

ASSESSMENT OF THE STRENGTH OF THE LUMBAR SPINE FIXATOR SCREW USING
STOCHASTICALLY ENTERED INPUT VARIABLES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ZUZANA RAPANTOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR VOSYNEK, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	Zuzana Rapantová
Studijní program:	Matematické inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	Ing. Petr Vosynek, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Posouzení pevnosti šroubu fixátoru bederní páteře s využitím stochasticky zadaných vstupních veličin

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Předkládané téma bakalářské práce vychází z praxe, kdy u ojedinělých případů dochází k poruše fixačních šroubů bederního fixátoru, který je použit při korekci spondylolistézy. V úvodní části bude provedena rešeršní studie dané problematiky z hlediska biomechanické studie a následující matematické analýzy. V další části bude upraven stávající výpočtový model bederní páteře na stochasticky zadané vstupy. Model bude přepočítán a získané výstupy (na úrovni vnitřních sil a momentů, případně posuvy pro tvorbu "submodelu") budou použity pro posouzení pevnosti šroubu fixátoru na úrovni testování nulových hypotéz shodnosti středních hodnot při různých typech šroubů (např. délka, průměr).

Cíle bakalářské práce:

- rešeršní studie (biomechanika bederní páteře, spondylolistéza, podklady pro pevnostní analýzu fixačního šroubu; stochastické metody v programu Ansys)
- zhodnocení výsledků a extrakce potřebných veličin z dodaného výpočtového modelu
- tvorba dílčích výpočtových modelů (případně submodelů) pro řešení pevnosti šroubů
- pevnostní analýza
- diskuze/zhodnocení dosažených výsledků

Seznam doporučené literatury:

KREJBYCHOVÁ, A. Srovnávací analýza fyziologické, degenerativní a pooperační bederní páteře pomocí výpočtového modelování. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, ÚMTMB. Vedoucí práce Petr Vosynek.

LEE, Y., BARKEY, M. E., KANG, H. Metal Fatigue Analysis Handbook: Practical Problem-Solving Techniques for Computer-Aided Engineering. USA: Elsevier, 2012. ISBN 978-0-012-385204-5.

DOWLING, N. E. Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. 4th ed. Boston: Pearson, c2013. ISBN 01-313-9506-8.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D. děkan
fakulty

Abstrakt

Bakalárska práca pojednáva o miere pevnosti a únavy fixátora driekovej chrbtice. Téma je riešená vytvorením výpočtového modelu s dvoma dĺžkami fixačnej skrutky. Simulácie sú počítané v programe Ansys za použitia Six Sigma analýzy. Pevnostná analýza je vyčíslená z priemerných hodnôt zataženia a deformačno-napätový rozbor využíva stochastické zadanie veličín. Výsledky ukazujú, že modul pružnosti špongiózy má zreteľný vplyv na veľkosť deformácie fixátora. V závere sú výstupné dáta medzi dvoma dĺžkami podrobené rozborom pomocou štatistických testov. Na základe prijatia hypotéz o zhodnosti strednej hodnoty je vyhodnotené, že vhodnejšia je skrutka neprechádzajúca celým prierezom špongióznej kosti v stavci.

Abstract

The bachelor's thesis deals with the strength and fatigue of the spinal rod fixator. The topic is addressed by creating a computational model with two lengths of fixation screws. Simulations are performed using the Ansys software with the application of Six Sigma analysis. The strength analysis is quantified from the average load values, and the stress-strain analysis employs stochastic input variables. The results demonstrate that the modulus of elasticity of the cancellous bone significantly affects the deformation of the fixator. In the conclusion, the output data between the two lengths undergo statistical tests. Based on the acceptance of hypotheses regarding the equality of mean values, it is evaluated that a screw not passing through the entire cross-section of the cancellous bone in the vertebra is more suitable.

Klíčové slová

drieková chrbtica, špongiózna kosť, fixátor, pevnosť skrutky, Six Sigma Analysis v Ansys, stochastická veličina

Keywords

lumbar spine, cancellous bone, fixator, strength of the screw, Six Sigma Analysis in Ansys, stochastic variable

Citácia

RAPANTOVÁ, Zuzana. *Posouzení pevnosti šroubu fixátoru bederní páteře s využitím stochasticky zadaných vstupních veličin*. Brno, 2023. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Petr Vosynek, Ph.D.

Posouzení pevnosti šroubu fixátoru bederní páteře s využitím stochasticky zadaných vstupních veličin

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne pod vedením pána Ing. Petra Vosynka, Ph.D. Uviedla som všetky literárne pramene, publikácie a ďalšie zdroje, z ktorých som čerpala.

.....
Zuzana Rapantová
26. mája 2023

Podakovanie

V tejto časti chcem predovšetkým poďakovať vedúcemu bakalárskej práce pánovi Ing. Petrovi Vosynkovi, Ph.D., za odborné postrehy a cenné pripomienky, ktorými prispel k vypracovaniu tejto bakalárskej práce. Zároveň veľká vďaka patrí mojej rodine, ktorá pri mne stála počas celého štúdia a vždy ma podporovala.

Obsah

Úvod	1
1 Rešerš	2
1.1 Anatómia	2
1.1.1 Chrbtica	2
1.1.2 Driekový stavec	3
1.1.3 Typy kostného tkaniva	4
1.2 Spondylolistéza	5
1.3 Biomechanika kostí	6
1.3.1 Materiál kostí	6
1.4 Pravdepodobnosť a štatistika	7
1.4.1 Spojitá náhodná premenná a spojité rozdelenie	8
1.4.2 Normálne rozdelenie	9
1.4.3 Useknuté normálne rozdelenie	9
1.4.4 Testovanie štatistických hypotéz a rozdelení	10
1.5 Stochastické metódy v programe Ansys	13
1.5.1 Design of Experiments	13
1.5.2 Response Surfaces	15
1.5.3 Six Sigma Analysis	20
1.6 Pevnostná analýza a únava	21
1.6.1 S-N krivka	21
1.6.2 Súčiniteľ bezpečnosti	22
1.6.3 Nelineárny kontakt	22
1.6.4 Jednoosová napätosť	23
2 Výpočtový model	24
2.1 Vytvorenie výpočtového modelu	24
2.2 Materiálové charakteristiky	25
2.2.1 Nastavenie pre normálové napätie	25
2.2.2 Nastavenie pre únavovú analýzu	26
2.3 Geometria	26
2.3.1 Submodel	26
2.3.2 Krátka a dlhá skrutka	27
2.4 Okrajové podmienky	28
3 Pevnostná analýza fixačnej skrutky	29
3.1 Analýza normálového napätia	29
3.2 Analýza súčiniteľa bezpečnosti	30

3.3	Six Sigma analýza	31
4	Zhodnotenie výsledkov	35
4.1	Krubicový graf	35
4.2	Test normality	36
4.3	Test zhodnosti rozptylov	39
4.4	Test zhodnosti stredných hodnôt	39
	Záver	40
	Literatúra	41

Úvod

Chrbtica hýbe naším životom. Jej tvar je významnou evolučnou charakteristikou, ktorá človeka odlišuje od ostatných primátov. Chrbtica udáva vzpriamenosť postavy, chráni vnútorné orgány a vďaka nej možno otáčať vrchnú časť tela. Jedným z efektov vzpriameného postoja bola značná redukcia veľkosti svalov vzpriamujúcich chrbticu, ktoré takmer neustále používajú ostatné primáty pri predklone. Cenou za to však bolo umiestnenie driekových stavcov do menej stabilnej pozície náchylnej k degeneračným ochoreniam, ako sú spondylolistéza a skolióza. Zo začiatku vývoja nešlo o nákladnú adaptáciu, pretože lovci a zberači nežili dostatočne dlho, aby sa u nich tieto degeneratívne problémy chrbtice rozvinuli tak často, ako sa to deje dnes. [9]

Dnes sa ochorenia chrbtice stabilizujú pomocou operácie s fixátorom aplikovaným v postihnutej oblasti. V ojedinelých prípadoch môže dôjsť k opotrebeniu fixátora. Následkom toho je pacient nutný podstúpiť ďalší chirurgický zákrok. Výsledky tejto práce by mohli prispieť k zlepšeniu návrhu fixátora a zvýšeniu jeho spoľahlivosti a bezpečnosti pre pacientov trpiacich spondylolistézou.

Prvá kapitola obsahuje rešeršnú štúdiu biomechaniky bedrovej chrbtice, spondylolistézy a teóriu pevnostnej a únavovej analýzy fixátora. Súčasťou tejto kapitoly je tiež dokumentácia stochastického prístupu, ktorý je implementovaný v simulačnom prostredí Ansys. Nadobudnuté teoretické poznatky poskytujú dôkladné porozumenie problematiky a stanovujú základ pre ďalšie kroky práce.

Druhou časťou práce je modifikácia existujúceho výpočtového modelu driekovej chrbtice a jeho rozšírenie o stochasticky zadané vstupné veličiny. Zahŕnutý je popis materiálov, úprava geometrie a napokon definícia okrajových podmienok. Uvedené kroky zabezpečia detailnejšiu analýzu.

V tretej kapitole je uvedený rozbor parametrov z výpočtových analýz. Posúdenie pevnosti je zamerané na špičkové napätie a súčiniteľ bezpečnosti na fixátore. Nadväzujúc na stochasticky zvolené vstupné parametre je sledovaná deformačno-napäťová analýza.

Štvrtá kapitola pozostáva z rozboru dát nadobudnutých v predošlej kapitole. Využitie sú štatistické testy, ktoré preverujú podobnosť týchto súborov.

Posledná časť tvorí záver zhrňajúci celú prácu. Uvedené sú tiež myšlienky popisujúce najvhodnejší model fixátora pre spevnenie driekovej chrbtice.

Kapitola 1

Rešerš

Táto časť práce sprostredkúva základné informácie potrebné na porozumenie nasledujúcich kapitol. Obsahuje anatomické názvoslovie, aplikáciu mechanických princípov na ľudské telo, predpoklady k štatistickej analýze a v závere náhľad na algoritmus v programe Ansys.

1.1 Anatómia

Popis stavby opornej sústavy ako aj rozdelenie tkanív sú prevzaté z literatúry [8], [11].

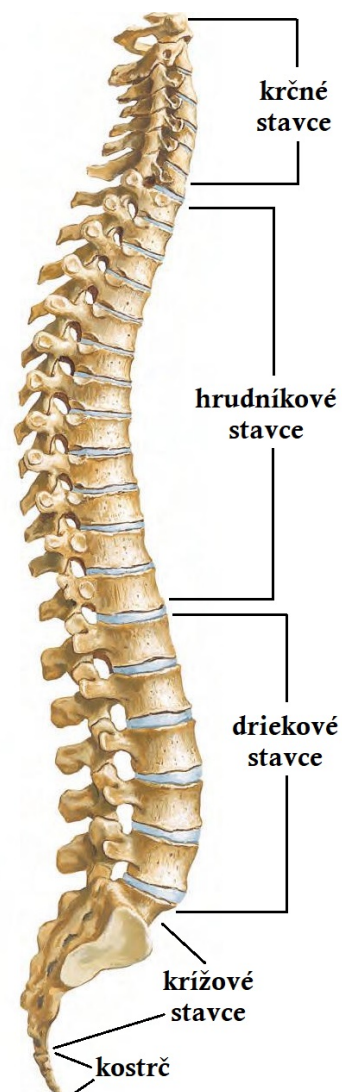
1.1.1 Chrbtica

Ľudská chrbtica sa skladá z 33 až 34 stavcov, 23 medzistavcových platničiek a 24 pohybových segmentov, Obr. 1.1. Táto definícia platí pre cca 95% chrbtíc dospelých osôb, pričom každý má chrbticu zloženú zo:

- a) 7 krčných (C),
- b) 12 hrudníkových (T),
- c) 5 driekových (L),
- d) 5 krížových (S),
- e) 4-5 kostrčových stavcov (Co).

Problematika tejto práce je zameraná na driek, a preto sú ďalej bližšie popísané nosné komponenty tejto oblasti a to bez akýchkoľvek anomálií.

Drieková chrbtica je veľmi ohybná a prepojená so svalmi, vďaka čomu umožňuje predklon, úklon, záklon a jemnú rotáciu. Takéto usporiadanie drží ľudské telo v adekvátnej vzpriamenej polohe.



Obr. 1.1: Ľudská chrbtica z pravého bočného pohľadu. [17]

1.1.2 Driekový stavce

Driekové stavce sú najväčšie a najpevnejšie spomedzi chrbtice, nakoľko nesú váhu celej vrchnej časti tela. Stabilizáciu chrbtice zabezpečuje tkanivo späté so stavcami.

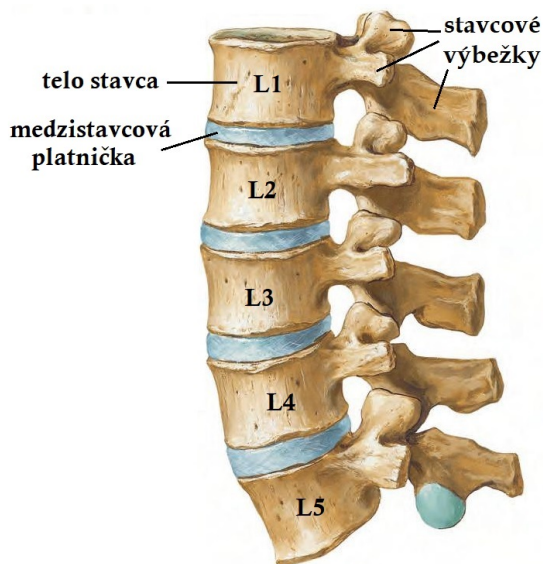
Driekový stavce tvoria tri základné časti (Obr. 1.2 a 1.3):

- a) telo stavca,
- b) stavcový oblúk,
- c) stavcové (kĺbové) výbežky.

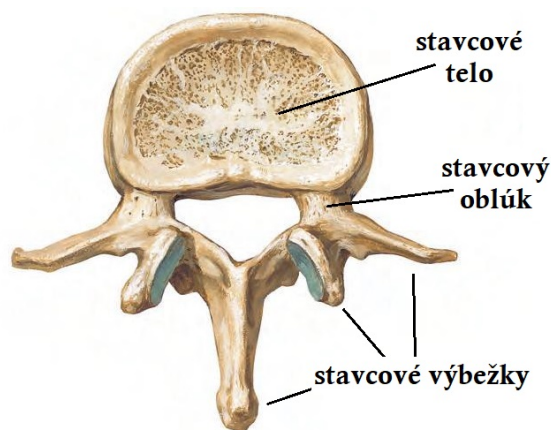
Telo stavca je krátka cylindrická kosť s tenkou kortikou na bočných stenách a silnejšou doskovitou kortikou na styčných plochách. Má nosnú funkciu. Telá driekových stavcov sú najvyššie spomedzi ostatných stavcov – dosahujú asi 30 mm. Piaty driekový stavce L5 je vpredu vyšší pre zalomenú návaznosť na krížovú kosť S1. Na tomto mieste sa nachádza hlavné zaťaženie. Horná a spodná plocha tela má drsný povrch na pripevnenie medzistavcovej platničky.

Telo stavca ohraničuje so stavcovým otvorom ďalšiu časť stavca – stavcový oblúk. Oblúk stavca má predovšetkým ochrannú funkciu a spolu so stavcovým otvorom utvára chrbticový kanál skrývajúci miechu. Zárezy v mieste odstupe horného a dolného okraja oblúku ohraničujú medzistavcové otvory, z ktorých vystupujú miechové nervy. Sú to práve miechové nervy, ktoré zabezpečujú prívod motorických a senzorických signálov a pri poruchách chrbtice sa môžu poškodiť.

Stavcové výbežky odstupujú z oblúku stavca. Prepájajú chrbticu s rebrami a umožňujú sklbenie susedných stavcov. Opierajú sa o kĺbové plochy, čím obmedzujú rotačné pohyby v driekovej chrbtici.



Obr. 1.2: Drieková chrbtica z ľavého bočného pohľadu. [17]

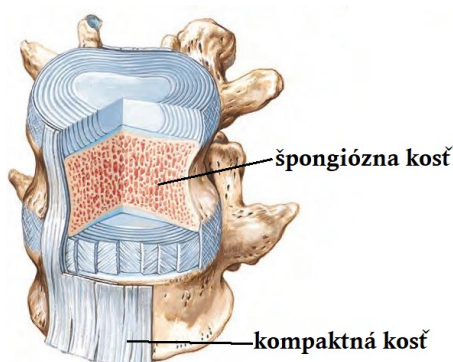


Obr. 1.3: Driekový stavce. [17]

1.1.3 Typy kostného tkaniva

Kostné tkanivo sa podľa stavby a štruktúry delí na dva hlavné typy:

- a) primárna plstovitá (väzivová) kosť – nevyvinutá, počas vývojového obdobia preformovaná na lamelárne tkanivo. V dospelosti ju možno nájsť len ojedinele v miestach šliach a hojacích sa rán. Má nižšiu mechanickú odolnosť než kosť lamelárna.
- b) sekundárna lamelárna kosť – tvorí prevažnú časť skeletu v dospelosti. Jej usporiadanie je lamelové a pravidelné, Obr. 1.4. Ďalej sa rozlišuje na:
 - kortikálna (kompaktná, hutná) kosť – tvorí asi 80% kostry,
 - špongiózna (trámčitá, trabekulárna, hubovitá) kosť – tvorí asi 20% kostry.



Obr. 1.4: Kostné tkanivo. [17]

Kortikálna kosť (skrátene kortika) je nositeľkou mechanických vlastností skeletu reprezentujúcich pevnosť. Vďaka mineralizovaným kolagénym vláknam sa kortika vyznačuje vysokou pevnosťou v ťahu, tlaku aj v ohybe. Tvoria ju lamely orientované rovnobežne s dlhou osou kosti. Kortika vo svojej štruktúre skrýva kanáliky s cievami a nervami. Obalená je tuhú väzivovou blanou, tzv. okosticou, ktorá okrem ochrany kompakty podporuje jej hojenie defektov. Pevnostné vlastnosti kortike nie sú trvalé, ale modelované rôznymi faktormi ako vek človeka, zranenia či životný štýl.

Špongiózne tkanivo (skrátene špongióza) predstavuje najmä výplňovú funkciu, nie nosnú. V reze pripomína štruktúru morskej huby. Človek sa s ideálnym usporiadaním trámecov v špongióznej kosti nenarodí. Počas života vytvárajú trámce trajektórie odpovedajúce tlakovému zaťaženiu kosti. Pri inom dlhodobejšom tlakovom zaťažení dochádza k prestavbe trámecov. Nezaťažovaním kosti sa trámce oslabujú, čo vedie k strate pevnosti a pružnosti. Následkom môže byť až zlomenina kosti. Tento jav je častý najmä pri staršej populácii.

Kosti možno rozdeliť taktiež podľa dĺžky. Skupina krátkych kostí tvorí funkčnú skupinu drobnejších kostí (zápästie), ale aj kostí nepravidelného tvaru (dolná čeľusť, stavce). Povrch kostí obaluje tuhá vrstvička kortiky vytvorená z plochých lamiel; vnútri sa rozprestiera špongióza. Pod kortikou je špongióza hustejšia a prenáša zaťaženie na systém trámecov.

Telo stavca je typickou krátkou kosťou so špongiózou vnútri, zvonka krytou laminou kortiky. Trámčiny a laminy špongiózy majú funkčnú úpravu v závislosti na smeroch zaťaženia pôsobiacich na telo stavca.

1.2 Spondylolistéza

V predošlých odsekoch boli načrtnuté niektoré ochorenia opornej sústavy. V tejto podkapitole je bližšie uvedená jedna z najčastejších degenerácií driekovej chrbtice. [15]

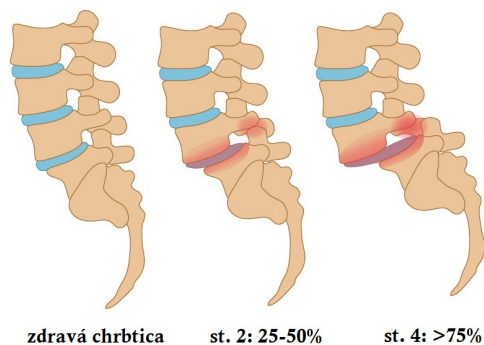
Komplex degeneratívnych a tkanivových zmien chrbtice označujeme termínom spondylolistéza. Spondylolistéza vznikne, keď sa pôsobením gravitačných síl posunie vrchný stavec od spodného stavca dopredu. Stavec sa tak dostáva do neprirodzenej polohy a jeho stavcový výbežok môže trieť o výbežok iného stavca, zapierať do nervových koreňov alebo narúšať miechové korene. Všetky možnosti kulminujú k nepríjemnej bolesti driekovej chrbtice. [12]

Existuje niekoľko druhov spondylolistézy, ktoré rozlišujeme podľa príčiny vzniku tohto ochorenia. [13]

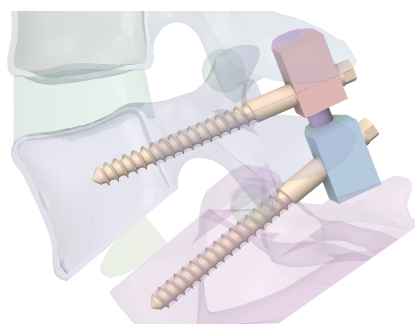
- *Typ I: Vrodená (dysplastická) spondylolistéza.* Ide o vadu medzistavcových kĺbov. Prejavuje sa najčastejšie a to typicky posunutím stavca L5 voči krížovej kosti S1 vpred.
- *Typ II: Istmická spondylolistéza.* Príčinou jej vzniku je interakcia horného a dolného stavcového výbežku. Ďalej sa delí:
 - *Typ II A.* Je charakteristický pre profesionálnych športovcov. Preťažením sa vytvoria mikrotrhliny vedúce ku kompletnej zlomenine.
 - *Typ II B.* Postihuje starších ľudí. Vzniknuté mikrotrhliny zarastajú novou kosťou, čím stavec posúvajú.
 - *Typ II C.* Spôsobí ho trauma, napríklad autohavária. Vyznačuje sa zlomeninou, rovnako ako *Typ II A.*
- *Typ III.* Následkom starnutia sa zužujú medzistavcové platničky, čo vyvoláva nestabilitu a posun stavca. Táto degenerácia je najčastejšia medzi stavcami L4 a L5.
- *Typ IV.* Tento typ je rovnaký ako *Typ II C*, pričom trhline segmentu vzniká na ostatných miestach stavca než pri *Typ II C*.
- *Typ V.* Spadajú sem spondylolistézy spôsobené nádorom, ktorý oslabuje štruktúru kostí a podporuje jej zlomenie.
- *Typ VI: Iatrogénna spondylolistéza.* Vzniká v dôsledku operácie (napr. laminektómia), kedy sa oslabia stavcové výbežky.

V závislosti na veľkosti posunutia stavcov sa spondylolistéza delí do štyroch kategórií závažnosti: I., II., III. a IV. stupeň, Obr. 1.5.

Liečenie spondylolistézy spočíva v zavedení fixátora do postihnutej oblasti. Používajú sa viaceré druhy operácií, no ich princíp je podobný a rešerš je uvedená v práci [16]. Fixátor sa skladá z fixačných skrutiek, ktoré sú prepojené blokovacími prvkami a tyčinkou, Obr. 1.6. Každá fixačná skrutka je umiestnená do stavcového tela, ktoré bolo vopred upravené odobratím špongiózneho tkaniva. Driekový stavec, do ktorého je fixačná skrutka zavádzaná, je najskôr upravený odobratím špongiózneho tkaniva z oblasti stavcového tela. Pre skrutku sa vytvorí vstupný priestor so správnou orientáciou. Následne je pár skrutiek umiestnený symetricky do stavca tak, aby mal fixátor prístupný čo najväčší rozsah priestoru. Fixácia prispeje k udržaniu správnej roviny medzi segmentami, zabráni sa progresii deformácie ochorenia a spolu s trením stavcových výbežkov sa zníži aj bolesť pacienta. [20]



Obr. 1.5: Zľava: zdravá chrbtica, 2. stupeň a 4. stupeň spondylolistézy. [25]



Obr. 1.6: Fixátor aplikovaný na L5 a S1, vymodelované v Ansys.

1.3 Biomechanika kostí

V biomechanike kostí sa všeobecne používa modifikovaný Rouxov zákon [8]: *Maximálna pevnosť kosti je dosiahnutá s minimálnou spotrebou materiálu*. Tento princíp možno pozorovať v oboch typoch kostných tkanív.

Biomechanické vlastnosti kostnej kortiky sú priamym dôsledkom usporiadania lamiel. Vhodné mechanické vlastnosti dosahuje kortika aj zásluhou oblastí menej mineralizovanej kosti, ktoré z mechanického hľadiska plnia funkciu absorpcie kinetickej energie pôsobiacej na kortiku.

Špongióza nie je z biomechanického hľadiska len súborom trámecov kostného tkaniva. V dutinách špongiózy možno nájsť aj tukové bunky, ktoré dokážu absorbovať značnú časť zaťaženia. O zvyšnú časť namáhania sa postará práve špongióza vo forme zvýšenia hydrostatického tlaku.

Kosť je vo všeobecnosti vystavovaná rôznemu namáhaniu na ťah, tlak, ohyb, krútenie či šmyk. Zataženie zväčša nepôsobí samostatne, ale ako kombinácia prostých namáhaní. Odolanie týmto zataženiam popisujeme mechanickými vlastnosťami materiálu. Sú to napríklad pevnosť, pružnosť, húževnatosť alebo tvrdosť.

Biomechanická charakteristika kosti je špecifikovaná materiálovými vlastnosťami, ktoré sú vysvetlené v nasledujúcej podkapitole.

1.3.1 Materiál kostí

Podobne ako akýkoľvek umelo vyrobený materiál, aj mechanické vlastnosti kostí možno popísať Youngovým modulom pružnosti v ťahu E .

Ako bolo uvedené v časti 1.1.3 o typoch kostného tkaniva, štruktúra kosti sa počas života človeka neustále vyvíja. Kortiku ani špongiózu nemožno popísať jednou hodnotou E . Zároveň platí, že merania vykonané na izolovaných vzorkách kosti v umelom prostredí nedokážu napodobniť biologické vlastnosti kostí v systéme celého skeletu, ani chovanie kostí v priebehu pôsobenia dynamických síl počas pohybu, raste či úrazoch. Za účelom vytvorenia dôveryhodného modelu chrbtice, by mal byť modul pružnosti E uvažovaný ako materiálový parameter s rozličnými veľkosťami. Usudzovanie jednej hodnoty E pre celý stavec je mylné a spôsobuje skresľujúce výstupy. V rámci simplifikácie driekovej chrbtice je nevyhnutné uvažovať oba typy kostného tkaniva stavcov s vhodným rozsahom modulu pružnosti. Stavce L1-L5 driekovej chrbtice majú nasledovné vlastnosti [18]:

- kortikálna kosť: $E = 10 - 12$ GPa,
- špongiózna kosť: $E = 25 - 75$ MPa.

Mechanické vlastnosti kostných tkanív sa menia v závislosti od veku, hmotnosti, či fyzickej aktivity človeka. Pri analýze takého materiálu je riešením popis jednotlivých hodnôt v intervaloch. K tomu využívame špeciálne odvetvie aplikovanej matematiky.

1.4 Pravdepodobnosť a štatistika

Táto podkapitola vychádza z literatúry [2], [14], [21], [29].

Popisná štatistika

Popisná štatistika sa využíva na popis dát. Jej cieľom je stručne charakterizovať štruktúru dátového súboru na určenie ďalšieho priebehu. Pre korektný popis situácie sú definované základné pojmy.

Náhodná premenná

Experiment (pokus) je súbor pozorovaní, ktorého účelom je overiť alebo vyvrátiť hypotézy či poznatky tvrdiace o príčinných vzťahoch určitých fenoménov. Rôzne možné výsledky sa považujú za elementárne javy. Cieľom je však analýza množín týchto elementárnych javov. Nech je v priestore Ω daná nejaká σ -algebra \mathcal{A} jeho podmnožín. Tieto podmnožiny nazývame náhodné javy a ich charakteristiku náhodnými veličinami.

Náhodné veličiny slúžia k popisu výsledku pokusu. Pred uskutočnením pokusu jeho výsledok a teda ani sledovanú hodnotu nepoznáme. Aj napriek tomu by sme tento pokus chceli popísať. Na to slúži náhodná premenná.

Definícia 1.4.1 (náhodná premenná). Nech Ω je základný priestor a Σ príslušné javové pole a (\mathbb{R}, B^1) je merateľný priestor. Zobrazenie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva náhodná premenná vzhľadom k Σ , ak

$$\forall B : X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in \Sigma.$$

Ak sa obmedzíme na množiny $B = (-\infty, x)$, potom zobrazenie $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva náhodná premenná, ak pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} \equiv \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in (-\infty, x)\} \in \Sigma$$

Pretože $\{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} \in \Sigma$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, možno spočítať pravdepodobnosť tohto náhodného javu a tým možno definovať funkciu F .

Definícia 1.4.2 (distribučná funkcia). Funkciu F nazývame distribučná funkcia náhodnej veličiny X , ak

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\})$$

a symbolicky zapisujeme $F(x) = P(X < x)$.

Definícia 1.4.3 (základný súbor). Obor hodnôt náhodnej premennej X nazývame základný súbor a značíme Z

$$Z = \{x \in \mathbb{R}; x = X(\omega), \omega \in \Omega\}.$$

¹Borelovská σ -algebra, t.j. minimálna algebra obsahujúca všetky otvorené množiny

Ak je množina Z konečná (spočítateľná), náhodná premenná sa nazýva diskretná. Ak je množina Z nespočítateľná, náhodná premenná sa nazýva spojitá. Všetky vstupné aj výstupné hodnoty v tejto bakalárskej práci budú uvažované vo forme spojitaj náhodnej premennej, preto bude ďalej rozvinutý len tento typ.

1.4.1 Spojitá náhodná premenná a spojité rozdelenie

Definícia 1.4.4 (spojitá náhodná premenná, hustota pravdepodobnosti). Nech súbor (Ω, Σ, P) je pravdepodobnostný priestor. Povieme, že náhodná veličina X je spojitá vzhľadom k P , práve vtedy, keď k distribučnej funkcii $F(x)$ existuje nezáporná po častiach spojitá funkcia $f(x) : \forall x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Funkciu $f(x)$ nazývame hustotou pravdepodobnosti náhodnej veličiny X a platí pre ňu

$$f : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty), \text{ pričom } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Distribučná funkcia $F(x)$ spojitaj náhodnej premennej je hornou medzou integrálu a teda aj spojitou funkciou. Základný súbor Z spojitaj náhodnej premennej je nespočítateľná množina.

Číselné charakteristiky náhodnej premennej

Dáta sa spracúvajú rôznymi nástrojmi, zväčša v dvoch kategóriách: charakteristika polohy a charakteristika variability. Charakteristika polohy predstavuje oblasť výskytu dát. Najčastejšie sa k nej radí stredná hodnota, modus a medián. Charakteristika variability charakterizuje vzdialenosť jednotlivých prvkov súborov, napr. rozptyl a smerodajná odchýlka. Používajú sa aj ďalšie charakteristiky ako šikmosť alebo špicatosť.

Definícia 1.4.5 (stredná hodnota). Stredná hodnota náhodnej veličiny X je reálne číslo $E(X)$:

$$E(X) = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

Ak poznáme distribučnú funkciu, tak pre spojitú náhodnú premennú platí

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

pokiaľ príslušný integrál absolútne konverguje. Ak príslušný integrál diverguje alebo neexistuje, hovoríme, že stredná hodnota neexistuje.

Definícia 1.4.6 (p -kvantil). Nech náhodná veličina X má distribučnú funkciu $F(x)$. Potom jej p -kvantil x_p je taká hodnota náhodnej veličiny X , pre ktorú platí, že výskyt hodnôt menších než x_p nastane iba s pravdepodobnosťou p , teda pre ktoré je distribučná funkcia $F(x)$ rovná pravdepodobnosti

$$P(X < x_p) = F(x_p) = p.$$

Teda platí $p \in (0, 1)$ pre reálne číslo $x_p = \inf \{x \in Z, F(x) \geq p\}$.

Definícia 1.4.7 (medián). Ak $p = 0,5$, tak p -kvantil sa nazýva medián a značí sa $x_{0,5} = \tilde{x}$.

Existujú aj ďalšie p -kvantily. Napríklad pre $p = 0,25$ ($p = 0,75$) sa p -kvantil nazýva dolný (horný) kvartil. Ak $p = 0,1, \dots, 0,9$ sa p -kvantily nazývajú decily. Ak $p = 0,01, \dots, 0,09$ sa p -kvantily nazývajú percentily. Rozdiel $x_{0,75} - x_{0,25}$ sa nazýva kvartilová odchýlka.

Definícia 1.4.8 (rozptyl). Reálne číslo $D(X)$ je rozptyl náhodnej veličiny X , ak platí

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

a okrem $D(X)$ sa používa symbolika $\sigma^2(X)$, σ_X^2 , $\text{var}(X)$.

Definícia 1.4.9 (smerodajná odchýlka). Smerodajná odchýlka náhodnej veličiny X je reálne číslo $S(X)$

$$S(X) = \sqrt{D(X)}$$

a má aj iné značenie: $\sigma(X)$, σ_X .

Definícia 1.4.10 (modus). Nech X je spojitá náhodná premenná. Modus je hodnota, kde hustota pravdepodobnosti nadobúda svoje maximum, teda pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\hat{x}) \geq f(x).$$

1.4.2 Normálne rozdelenie

Na popis súborov spojitých dát sa využívajú preddefinované rozdelenia pravdepodobnosti. Jedným z nich je normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ s nasledovnými vlastnosťami.

Definícia 1.4.11. Predpokladajme náhodnú veličinu X s normálnym rozdelením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, základný súbor $Z = \mathbb{R}$. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je normálnym rozdelením, pre ktoré platí:

Hustota pravdepodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Distribučná funkcia: $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

Číselné charakteristiky:

Stredná hodnota: $E(X) = \mu$

Rozptyl: $D(X) = \sigma^2$

Medián: $\tilde{x} = \mu$

Modus: $\hat{x} = \mu$

1.4.3 Useknuté normálne rozdelenie

Z dôvodu efektívnosti pri veľkom počte vstupných či sledovaných dát môže byť požadované zníženie rozsahu týchto dát. Takéto vymedzenie sa realizuje rovnomerným useknutím dát s najmenšou pravdepodobnostnou hustotou $f(x)$. Ďalej je tak skúmaný len zostávajúci interval $[a, b]$ bez dát spadajúcich do doplnku predchádzajúceho intervalu, teda do množiny $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, pričom a predstavuje minimum hodnoty x a b je maximum hodnoty x .

Definícia 1.4.12. Nech $N(0,1)$ je normované normálne rozdelenie, s hustotou pravdepodobnosti φ distribučnou funkciou Φ . Predpokladajme náhodnú veličinu X s normálnym rozdelením $X \sim N(\mu, \sigma^2, a, b)$ ležiacu v intervale $[a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \leq 0$, základný súbor $Z = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$. $X \sim N(\mu, \sigma^2, a, b)$ je useknutým normálnym rozdelením, pre ktoré platí:

$$\text{Hustota pravdepodobnosti: } f(x) = \frac{\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}{\sigma Z}$$

$$\text{Distribučná funkcia: } F(x) = \frac{\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}{Z}$$

Číselné charakteristiky:

$$\text{Stredná hodnota: } E(X) = \mu + \frac{\varphi(\frac{a-\mu}{\sigma}) - \varphi(\frac{b-\mu}{\sigma})}{Z} \sigma$$

$$\text{Rozptyl: } D(X) = \sigma^2 \left(1 + \frac{\frac{a-\mu}{\sigma} \varphi(\frac{a-\mu}{\sigma}) - \frac{b-\mu}{\sigma} \varphi(\frac{b-\mu}{\sigma})}{Z} \right) - \sigma^2 \left(\frac{\varphi(\frac{a-\mu}{\sigma}) - \varphi(\frac{b-\mu}{\sigma})}{Z} \right)^2$$

$$\text{Medián: } \tilde{x} = \mu + \Phi^{-1} \left(\frac{\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) + \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})}{2} \right) \sigma$$

$$\text{Modus: } \hat{x} = \begin{cases} a & \mu < a \\ \mu & a \leq \mu \leq b \\ b & b < \mu \end{cases}$$

Centrálna limitná veta

Pravdepodobnostný priebeh výberu veľkej vzorky dát popisuje centrálna limitná veta. Podstatou centrálnej limitnej vety je tvrdenie, že náhodná veličina X , ktorá vznikla ako súčet veľkého počtu vzájomne nezávislých náhodných veličín X_1, X_2, \dots, X_n , má za veľmi všeobecných podmienok tzv. asymptoticky normálne rozdelenie. Existuje niekoľko limitných viet. Odlišujú sa iba počiatočnými podmienkami, no ich podstata je rovnaká.

1.4.4 Testovanie štatistických hypotéz a rozdelení

Výstupné súbory dát sa obvykle porovnávajú zhodou číselných charakteristík alebo rozdelení pravdepodobnosti. K lepšej interpretácii výsledkov slúžia štatistické testy.

V prípade dvoch súborov dát možno sledovať podobnosť ich strednej hodnoty, ktorá sa vyhodnotí pomocou t-testu (Studentov t-test). Podľa typu dát má t-test rôzne druhy a na základe toho aj iné predpoklady.

Uvažujme hypotézu dvoch výberov z normálnych rozdelení

$$\begin{aligned} X &\sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \\ Y &\sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2), \end{aligned}$$

s cieľom porovnať μ_X a μ_Y . Spravíme n meraní pre náhodnú premennú X . Výsledky týchto pokusov sú popísané náhodným výberom (X_1, X_2, \dots, X_n) a jeho realizáciou (x_1, x_2, \dots, x_n) . Spočítame \bar{x} a $s(x)$. Spravíme m meraní pre náhodnú premennú Y . Výsledky týchto pokusov sú popísané náhodným výberom (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) a jeho realizáciou (y_1, y_2, \dots, y_n) . Spočítame \bar{y} a $s(y)$.

Studentov dvojvýberový t-test

a) Test hypotézy $H_0: \mu_X - \mu_Y = \mu_0$ za podmienky $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$:

$$\text{testovacie kritérium: } t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{(n-1)s^2(x) + (m-1)s^2(y)}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

$$\text{doplnok kritického oboru: } \bar{W}_a = \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}, t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \text{ pre } H_A: \mu_X - \mu_Y \neq \mu_0 \quad (1.1)$$

kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$, $s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $s^2(y) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$
a $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil Studentovho rozdelenia s $k = n + m - 2$ stupňami voľnosti.

b) Test hypotézy $H_0: \mu_X - \mu_Y = \mu_0$ za podmienky $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ (Cochran-Coxova úprava):

$$\text{testovacie kritérium: } t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2(x)}{n} + \frac{s^2(y)}{m}}}$$

$$\text{doplnok kritického oboru: } \bar{W}_a = \left[-\hat{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}, \hat{t}_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \text{ pre } H_A: \mu_X - \mu_Y \neq \mu_0$$

kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$, $s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $s^2(y) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$,
 $\hat{t}_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{s^2(x)}{n} t(X) + \frac{s^2(y)}{m} t(Y)}{\frac{s^2(x)}{n} + \frac{s^2(y)}{m}}$ a $t(X)$, $t(Y)$ sú kvantily Studentovho rozdelenia
s $k_X = n - 1$, $k_Y = m - 1$ stupňami voľnosti.

Podmienku $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, resp. $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ je nutné overiť. Rovnosť rozptylov testujeme pomocou dvojvýberového F-testu. F-test má rôzne modifikácie, v tejto práci je uvedená najpoužívanejšia z nich.

Dvojvýberový F-test

Test hypotézy $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ za podmienky $s^2(x) \geq s^2(y)$:

$$\text{testovacie kritérium: } t = \frac{s^2(x)}{s^2(y)}$$

$$\text{doplnok kritického oboru: } \bar{W}_a = \left[F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1), F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) \right]$$

$$\text{pre } H_A: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$, $s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $s^2(y) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$ a $F_{\frac{\alpha}{2}}(k_1, k_2)$, $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(k_1, k_2)$ sú kvantily Fischer-Snedecorovho rozdelenia s $k_1 = n - 1$, $k_2 = m - 1$ stupňami voľnosti.

Dvojvýberový F-test je založený na dvoch predpokladoch: súbory dát sú medzi sebou nezávislé a oba majú normálne rozdelenie. Normálnosť rozdelenia náhodného vektoru je overiteľná viacerými druhmi testov. Ďalej sú uvedené definície dvoch z testov, ktoré boli posúdené ako najrelevantnejšie vzhľadom k typu dát.

Shapiro–Wilk test

Test je vhodný pre dáta s menším počtom vzoriek ($3 \leq n \lesssim 5000$) a zameriava sa na oblasť strednej hodnoty normálneho rozdelenia. Jeho veľkou nevýhodou je nutnosť počítačovej techniky pre výpočtovú náročnosť. Podstata algoritmu Shapiro–Wilk testu je popísaná v nasledujúcom odseku.

Myšlienkou Shapiro-Wilk testu je určiť rozptyl dát v dvoch krokoch. Regresná krivka v Q-Q grafeⁱⁱ umožňuje odhadnúť rozptyl. Rozptyl výberu môže byť taktiež považovaný za rozptyl celého súboru. Pokiaľ je súbor dát popisateľný normálnym rozdelením, tak oba prístupy vykazujú približne rovnaké hodnoty a ich pomer je blízky k 1,0.

Test hypotézy H_0 : náhodný výber je normálnym rozdelením:

$$\text{testovacie kritérium: } W = \frac{\left(\sum_{j=2}^n a_j \bar{x}_j \right)^2}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2}$$

kde realizácia náhodného vektoru (x_1, x_2, \dots, x_n) je vzostupne usporiadaná hodnotami $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ako $(\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_n)$ a a_j sú tabuľkové koeficienty ako normované funkcie stredných hodnôt a kovariačnej matice.

Anderson-Darling test

Test dobre zachytí výraznú odchýlku od normálneho rozdelenia a zároveň je presnejší v okrajových častiach rozdelenia.

Test hypotézy H_0 : náhodný výber je normálnym rozdelením:

$$\text{testovacie kritérium: } A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \left(\ln [F(\bar{x}_i)] + \ln [1 - F(\bar{x}_{n+1-i})] \right)$$

kde realizácia náhodného vektoru (x_1, x_2, \dots, x_n) je vzostupne usporiadaná hodnotami $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ako $(\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_n)$ a $F(\bar{x})$ je teoretická distribučná funkcia (normálneho rozdelenia).

Okrem výpočtových testov na normalnosť rozdelenia sa využívajú aj grafické znázornenia dát, a to napríklad v podobe Q-Q a P-Pⁱⁱⁱ grafu. Pre tieto grafy platí, že súlad medzi empirickým (diskrétne body grafu) a teoretickým (priamka grafu) je tým lepší, čím menej sa body od tejto priamky odchyľujú.

Vybrané matematické metódy poskytujú teoretický základ pre použitie štatistických testov, ktoré sú následne aplikované pri analýze stochastických vstupov v rôznych softvéroch. Tieto testy umožňujú overiť významnosť a spoľahlivosť výsledkov získaných z experimentov s náhodnými premennými. Práve program Ansys založený na metóde konečných prvkov je užitočným nástrojom na riešenie takýchto simulácií.

ⁱⁱgrafická metóda testovania rozdelenia, pomocou ktorej možno odhadnúť normalitu na okrajoch rozdelenia, tiež nazývaná graf kvantil-kvantil

ⁱⁱⁱgrafická metóda testovania rozdelenia, pomocou ktorej možno odhadnúť normalitu rozdelenia v blízkosti strednej hodnoty, tiež nazývaná graf pravdepodobnosť-pravdepodobnosť

1.5 Stochastické metódy v programe Ansys

Počas vytvárania modelov sledovaných javov možno zvoliť jeden z dvoch princípov: deterministický alebo stochastický. Sice sa v programe Ansys typicky využíva deterministický prístup, program ponúka aj možnosť stochastického nástroja. Tento princíp je riešený v balíčku *Six Sigma Analysis*, ktoré je súčasťou *Design Exploration*. Dokumentácia tohto prostredia prevzatá z [3], [4], [5] je uvedená na nasledujúcich stranách.

Pri analýze rôznych modelov je možné definovať kľúčové simulácie parametrami. Parameter je numerická alebo iná hodnota reprezentujúca vlastnosti modelu. Vstupný parameter môže byť v rámci projektu modifikovaný a mení sa súbežne s údajmi modelu. Po spustení program vyhodnotí výstupné parametre v závislosti na výsledkoch a aktuálnom stave.

Súbor parametrických hodnôt reprezentuje špecifický návrh nazývaný *design point* – bod návrhu. Bod návrhu predstavuje jedno z možných nastavení modelu podľa konkrétneho výberu vstupných parametrov a z nich vyčíslených výstupných parametrov. Užívateľ si tak môže podľa preferencií zvoliť ideálny súbor vstupných aj výstupných dát.

Výpočet nových bodov návrhu je spravidla zdĺhavý. Tento výpočet sa zrýchli rozumným usporiadaním bodov návrhu, napríklad zoskupením množín s rovnakou hodnotou jedného vstupného parametra.

Six Sigma analýza sa skladá z troch krokov:

1. *Design of Experiments (DOEs)* – dizajn experimentov,
2. *Response Surface* – reakčná plocha,
3. *Six Sigma Analysis (SSA)*.

1.5.1 Design of Experiments

V prvej časti Six Sigma analýzy sa skrýva *Design of Experiments*. Z oblasti náhodných vstupných parametrov sú lokalizované vzorkovacie body pomocou rôznych algoritmov:

- *Central Composite Design (CCD)*: predvolená deterministická metóda kombinuje jeden stredový bod, body pozdĺž osí vstupných parametrov a body určené frakčným faktorovým návrhom (*fractional factorial design*),
- *Optimal Space-Filling Design (OSF)*: cyklické vzorkovanie nazývané *Latin Hypercube Sampling* upravené optimalizáciou, rozdelenie bodov je rovnomernejšie pre predpoklad externého šumu,
- *Box-Behnken Design*: kvadratický level s tromi úrovňami sa využíva pre modely s extrémami v hranách materiálu, body vzorkovania sú tvorené bez rohov a extrémov parametrov,
- *Custom*: povoľuje manuálne vloženie bodov návrhu, vyžaduje si dostatočný počet bodov na vytvorenie reakčnej plochy,
- *Custom + Sampling*: povoľuje manuálne vložiť body návrhu a pridať body získané z predošlých algoritmov, ak je počet vzoriek väčší než počet existujúcich bodov – metóda chýbajúce body dopočíta,

- *Sparse Grid Initialization*: adaptívny model je riadený presnosťou danou užívateľom; užívateľ zadá presnosť, ktorá riadi adaptívny model podľa veľkosti relatívnych chýb,
- *Latin Hypercube Sampling Design*: pokročilá metóda Monte Carlo predchádza zhľukovaniu bodov tak, aby žiaden z nich nezdiedal rovnakú hodnotu v stĺpci ani v riadku vytvorenej mriežky,
- *External Design of Experiments*: rozšírenie externou vzorkovacou metódou.

Políčko *Outline* obsahuje vstupné parametre, ktoré sú predvolené parametrami stochastickými. Pred výpočtom dizajnu experimentov sa v tomto okne definujú vlastnosti vstupných parametrov. V okne *Properties of Outline* si možno vybrať typ rozdelenia:

- rovnomerné: používa sa, keď je v rámci určitého intervalu akákoľvek hodnota náhodnej premennej rovnako pravdepodobná,
- trojuholníkové: užitočný nástroj, ak nie sú dostupné reálne dáta a je potrebná generácia náhodných hodnôt,
- normálne: všeobecne používané a univerzálne, každá náhodná premenná sleduje normálne rozdelenie, ak je generovaná lineárnou kombináciou veľmi veľkého počtu iných náhodných vplyvov bez ohľadu na to, aké rozdelenie tieto náhodné vplyvy pôvodne nasledujú,
- useknuté normálne: dopĺňa normálne rozdelenie o limity, vhodné pre materiálové vlastnosti alebo geometrické tolerancie,
- longnormálne: vhodné pre javy, ktoré vznikajú násobením veľkého množstva chýb,
- exponenciálne: časovo závislé procesy sú charakteristické striktne klesajúcou pravdepodobnostnou funkciou pri rastúcej náhodnosti parametra,
- beta: ak sú na náhodné premenné ohraničené na oboch stranách aplikované lineárne operácie, ktoré sú často vyjadrené rovnomerným rozdelením, výsledky často nasledujú beta rozdelenie,
- Weibull: používané pre pevnostné analýzy parametrov životnosti, najčastejšie krehkých materiálov.

Useknuté normálne rozdelenie, ktoré bolo využité v tejto práci, vyžaduje zadanie štyroch hodnôt: dolná hranica distribúcie, horná hranica distribúcie, stredná hodnota normálneho rozdelenia (neuseknutého) a smerodajná odchýlka normálneho rozdelenia (neuseknutého).

Výberom políčka vstupného parametra z *Outline* sa na základe zadaných hodnôt rozdelenia vykreslí graf získaný z vypočítaných hodnôt hustoty pravdepodobnosti a distribučnej funkcie.

Výstupom prvej časti *Six Sigma* analýzy je súbor vzorkovacích bodov pre reakčnú plochu. Pri vytváraní reakčnej plochy treba vziať do úvahy viaceré faktory: vyšší počet vstupných parametrov predĺži výpočetnú dobu, ako aj viac výstupných parametrov implikuje viac reakčných plôch. Ďalej diskretizácia vstupného parametra navýši objemnosť kombinácií, a napokon nelineárne alebo nepolynomialné vzťahy medzi vstupnými a výstupnými parametrami zapríčiňujú vytváranie viacerých bodov návrhu.

1.5.2 Response Surfaces

Druhým krokom stochastickej analýzy je rozbor reakčných plôch alebo *Response Surfaces*. Sú to funkcie rôzneho charakteru vytvorené na základe *Design of Experiments*. Bez nutnosti vytvárania kompletného riešenia poskytujú približné hodnoty výstupných parametrov.

Užívateľ má možnosť výberu algoritmu, s akým sa reakčná plocha vytvorí:

- *Genetic Aggregation*: predvolená metóda, ktorá je zautomatizovaná, trvá dlhšie než ostatné a vo všeobecnosti je najspoľahlivejšia,
- *Full 2nd-Order Polynomials*: analýza vhodná pre regresné modely na zistenie vzťahu medzi premennými,
- *Kriging*: algoritmus, ktorý vyhovuje početným variáciám nelineárnych reakcií,
- *Non-Parametric Regression*: vhodná pre silno nelineárne správanie výstupných parametrov vzhľadom na vstupy,
- *Neural Network*: matematická procedúra založená na *natural neural network*, respektíve prirodzenej nervovej sieti ľudského mozgu. Sieť sa skladá zo vstupov, skrytých funkcií a výstupov,
- *Sparse Grid*: poskytuje spresnenie nespojitých parametrov.

Genetic Aggregation

Vo výpočtovom modeli bola zvolená *Genetic Aggregation*. Metóda používa genetický algoritmus, ktorý generuje súbory rôznych reakčných plôch riešených paralelne. Základom genetického algoritmu je tzv. Fitness funkcia, ktorej cieľom je hodnotu funkcie maximalizovať alebo minimalizovať.

Fitness funkcia je účelová funkcia vyjadrujúca ako blízko je dané riešenie k dosiahnutiu stanovených predpokladov. Pre každú reakčnú plochu udáva, ktorá z plôch poskytuje najlepší prístup. Zohľadňuje tak presnosť reakčnej plochy v bodoch návrhu, ako aj stabilitu reakčnej plochy, a to za pomoci krížovej validácie. [10]

Genetic Aggregation disponuje tabuľkou tolerancií pre výstupné parametre, ktorá obsahuje: vyčíslené maximum a minimum, maximálnu očakávanú chybu a možnosť vylepšenia pomocou tolerancie.

Reakčnú plochu z *Genetic Aggregation* možno zapísať ako súbor pomocou váženého priemeru rôznych metamodelov^{iv}:

$$\hat{y}_{ens}(x) = \sum_{i=1}^{N_M} w_i \cdot \hat{y}_i(x),$$

kde:

- \hat{y}_{ens} = predikcia súboru,
- \hat{y}_i = predikcia i -tej reakčnej plochy,
- N_M = počet použitých metamodelov, $N_M \geq 1$,
- w_i = váhový faktor i -tej reakčnej plochy.

^{iv}metamodel zahŕňa iné modely ako svoje podmnožiny

Váhový faktor spĺňa:

$$\sum_{i=1}^{N_M} w_i = 1, w_i \geq 0, 1 \leq i \leq N_M.$$

Pre určenie najlepších váhových faktorov, *DesignXplorer* minimalizuje *Root Mean Square Error (RMSE)* z bodov návrhu na \hat{y}_{ens} a rovnako aj *RMSE* rovnakých bodov návrhu založených na krížovej validácii z \hat{y}_{ens} (*PRESS_{RMSE}*). Ich výpočty sú vyjadrené ako:

$$RMSE(\hat{y}_{ens}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_M} (y(x_j) - \hat{y}_{ens}(x_j))^2},$$

$$PRESS_{RMSE}(\hat{y}_{ens}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_M} (y(x_j) - \hat{y}_{ens,-j}(x_j))^2},$$

pričom:

$$\hat{y}_{ens,-j}(x) = \sum_{i=1}^{N_M} w_i \cdot \hat{y}_{i,-j}(x),$$

kde:

- x_j = j -ty bod návrhu,
- $y(x_j)$ = hodnota výstupného parametra v x_j ,
- $\hat{y}_{i,-j}$ = predikcia i -tej reakčnej plochy vytvorenej bez j -tého bodu návrhu,
- N = počet bodov návrhu.

Krížová validácia

DesignXplorer využíva pri krížovej validácii dve metódy: *Leave-One-Out* a *K-Fold*.

Leave-One-Out metóda rieši práve toľko submetamodelov, koľko je bodov návrhu. Pre danú i -tu reakčnú plochu je počítaných N submetamodelov, kde každá subreakčná plocha odpovedá i -tej reakčnej ploche vytvorenej na základe $N - 1$ bodov návrhu. Chyba krížovej validácie j -tého bodu návrhu je chybou na tomto bode subreakčnej plochy vytvorenej bez j -tého bodu návrhu.

K-Fold metóda vytvorí k submetamodelov z i -tej reakčnej plochy, kde každá subreakčná plocha odpovedá i -tej reakčnej ploche vytvorenej na základe $N - N/k$ bodov návrhu. Chyba krížovej validácie v j -tom bode návrhu je chybou v tomto bode na subreakčnej ploche vytvorenej bez podmnožiny z N/k bodov návrhu obsahujúcej j -ty bod návrhu. Pomocou maximálnej a minimálnej vzdialenosti je vybraných N/k bodov návrhu, pričom pre každý *fold* je bod návrhu zvolený ako bod validačný.

Pre výpočtovú náročnosť *Leave-One-Out* metódy je najskôr predvolene použitá *10-fold* krížová validácia. Ak je počet bodov návrhu príliš nízky, program prepne na metódu *Leave-One-Out* a nadobudne tak vhodnú *10-fold* krížovú validáciu.

Nech $e_{i,-j}$ je označenie pre chybu krížovej validácie z i -tej reakčnej plochy vytvorenej bez j -tého bodu návrhu, potom:

$$\tilde{e}_{ens,-j}(x) = \sum_{i=1}^{N_M} w_i \cdot \tilde{e}_{i,-j}(x).$$

Hodnoty váhových faktorov w_i sú vyčíslené analyticky podľa podobného postupu uvedeného v [26]:

$$w = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}},$$

kde $\mathbf{1}$ je jednotková matica a \mathbf{C} je matica strednej kvadratickej chyby:

$$C_{ij} = \frac{1}{N}E_iE_j.$$

E_i a E_j sú chyby i -tych a j -tych metamodelov (ako kombinácie $RMSE$, $PRESS_{RMSE}$ a penalizácie preučenia^v). Pre získanie pozitívnych váh, *DesignXplorer* používa iba hodnoty diagonály matice \mathbf{C} .

Genetický algoritmus

Existuje viacero typov metamodelov, vrátane *Polynomial Regression*, *Kriging*, *Support Vector Regression* a *Moving Least Squares*. O získanie najužitočnejšej reakčnej plochy sa postará *DesignXplorer* generovaním súboru z metamodelov rôznych typov či nastavení. Tento súbor odpovedá prvému súboru genetického algoritmu. Ďalšie súbory vznikajú krížením a mutáciou predošlého súboru.

Operácia kríženia má dva typy. Prvým typom je kríženie medzi dvoma reakčnými plochami rovnakého druhu a časť nastavení od prvého rodiča je vymenená za nastavenia druhého rodiča. Druhým typom je kríženie medzi dvoma plochami rôzneho druhu a novovytvorená reakčná plocha je vytvorená kombináciou oboch rodičov.

Operácia mutácie spôsobí obmenu niekoľkých nastavení reakčnej plochy (alebo reakčných plôch, v prípade kombinácie viacerých reakčných plôch). Pre zachovanie rôznorodosti reakčných plôch, genetický algoritmus odstráni časť prevažujúceho typu reakčnej plochy v súbore a zároveň zachová menej prítomné reakčné plochy. V optimálnom prípade súbor obsahuje podobné metamodely v zmysle presnosti predpovede ($RMSE$) kedy sú predpovedané hodnoty rozdielne ($\hat{y}(x)$); to zvýši šancu eliminácie chyby v súbore.

Genetic aggregation môže obsahovať niekoľko náhradných modelov, ktoré neumožňujú lokálne predpokladané rozloženie. Pre náhradné modely bola vytvorená predikcia *universal prediction (UP)*. Táto distribúcia spočíva v krížovej validácii z predikcií submodelu. Jej nadstavbovu je *adaptive sampling technique for global refinement (UP-SMART)* [6]. Predpokladaná chyba je kritérium Y . Práve *Genetic aggregation* je hybridným variantom *UP-SMART* založeným na pridávaní bodu v kroku n :

$$x_{n+1} \in \arg \max_{x \in \mathbb{X}} (y_n(x)),$$

kde:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \hat{\sigma}_n^2(x) + \delta \underline{d}_{X_n}(x), \\ \hat{\sigma}_n^2(x) &= \text{variant lokálneho rozptylu } UP \text{ v bode } x \text{ v kroku } n, \\ \underline{d}_{X_n}(x) &= \inf\{d(x, x_0) : x_0 \in X_n\} \text{ a } d(.,.) \text{ označuje danú vzdialenosť v } \mathbb{R}^p, \\ X_n &= \text{množina vzoriek použitých na vytvorenie reakčnej plochy,} \\ \mathbb{X} &= \text{priestor parametrov definovaný používateľom,} \\ \delta &= \text{penalizácia vzdialenosti.} \end{aligned}$$

Predpokladaná chyba v *DesignXplorer* zodpovedá $3\hat{\sigma}_n^2(x)$.

^v dokumentácia *DesignXplorer* pojem *overfitting penalization* hlbšie nerozvádza, no vo všeobecnosti metóda zamedzí „preučeniu“ dát príliš komplexných modelov v prípade, ak sa počas výpočtu model začne prispôbovať šumu a náhodným variáciám na úkor podstatných parametrov [10]

Goodness of Fit

Vhodnosť modelu vyjadruje *Goodness of Fit*. Úspešné vytvorenie reakčnej plochy závisí od dostatočného počtu bodov návrhu. Odporúča sa použiť aspoň dvakrát viac bodov návrhu než je počet vstupných parametrov.

Kvalitu reakčnej plochy možno zistiť koeficientom determinácie (*Coefficient of Determination*) v políčku *Quality* pod oknom *Outline*. Čím je hodnota koeficientu bližšia k 1, tým spoľahlivejšia je reakčná plocha. Pri malej zhode je nutná zmena reakčnej plochy a opätovná kontrola výsledkov.

Na vytvorenie konštrukčných bodov pre reakčnú plochu sa využívajú rôzne kritériá. Matematická reprezentácia týchto kritérií používa nasledovnú notáciu:

- y_i = hodnota výsledného parametra v i -tom vzorkovacom bode,
- \hat{y}_i = hodnota regresného modelu v i -tom vzorkovacom bode,
- \bar{y}_i = aritmetický priemer hodnôt y_i ,
- σ_y = smerodajná odchýlka hodnôt y_i ,
- N = počet vzorkových bodov,
- P = počet polynomických členov kvadratickej reakčnej plochy (bez absolútneho člena).

Definícia 1.5.1 (Koeficient determinácie R^2). Percento variácie výstupného parametra, ktoré možno popísať reakčnou plochou s rovnicou regresie nazývame koeficientom determinácie. Je to pomer vysvetlenej variácie k celkovej variácii. Najideálnejšia hodnota je 1. Nadobúda hodnotu:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}.$$

Definícia 1.5.2 (Maximálne relatívne rezíduum). Maximálna vzdialenosť generovaných bodov z vypočítanej reakčnej plochy od každého generovaného bodu sa nazýva maximálne relatívne rezíduum. Najvyhovujúcejšia hodnota je 0% (neplatí pre dáta ktorých priemer výsledných parametrov \bar{y}_i je blízky nule). Matematicky vyjadrené ako:

$$\max_i \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|, i = 1, 2, \dots, N.$$

Definícia 1.5.3 (RMSE). *Root Mean Square Error (RMSE)* je odmocnina z priemeru štvorcov rezíduí sledovaných bodov. Najideálnejšia hodnota je 0. Matematický zápis *RMSE* znie:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

Definícia 1.5.4 (RRMSE). *Relative Root Mean Square Error (RRMSE)* je odmocnina z priemeru štvorcov rezíduí váhovaná výstupnými hodnotami sledovaných bodov. Najvyhovujúcejšia hodnota je 0% (neplatí pre dáta ktorých priemer výsledných parametrov \bar{y}_i je blízky nule). Vyčíslená rovnicou má tvar:

$$RRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right)^2}.$$

Definícia 1.5.5 (RMAE). *Relative Maximum Absolute Error (RMAE)* je absolútne maximálne rezíduum váhované smerodajnou odchýlkou výstupných dát upravené o počet vzoriek. Najideálnejšia hodnota je 0%. Vyjadrené je rovnicou:

$$RMAE = \frac{1}{\sigma_y} \max_i |y_i - \hat{y}_i|, i = 1, 2, \dots, N.$$

Definícia 1.5.6 (RAAE). *Relative Average Absolute Error (RAAE)* je priemer rezíduí váhovaných smerodajnou odchýlkou výstupných hodnôt. Táto hodnota je užitočná, ak je počet vzoriek nízky (<30). Najvyhovujúcejšia hodnota je 0%. Ak sú obe hodnoty *RMAE* a *RAAE* malé, veľkosť *RRMSE* sa stáva zanedbateľnou. Matematický zápis je:

$$RAAE = \frac{1}{\sigma_y} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|.$$

Hodnoty parametrov sú uložené v tabuľke spolu s hodnotením kritérií. Hodnotenie je veľmi intuitívne – tri zlaté hviezdy značia najvyššiu presnosť a tri červené krížiky najnižšiu presnosť parametra. Odchýlka RMSE nie je ohraničená charakteristika a tak nemá žiadne hodnotenie. Cvičné body sú vytvorené z *Design of Experiments* a predstavujú kvalitu interpolácie reakčnej plochy. Pre každý cvičný bod sa vyčíslí odchýlka medzi predikovanými a získanými hodnotami. Verifikačné body sa nepodielajú na generácii reakčnej plochy, no udávajú kvalitu jej predpovede. Na začiatku je každý verifikačný bod umiestnený na pozíciu s maximálnou vzdialenosťou cvičného bodu. Následne sa vyčíslí rozdiel medzi verifikačným a predikovaným bodom. Krížová validácia cvičného bodu vyjadruje stabilitu a spoľahlivosť reakčnej plochy. Pri použití *Genetic Aggregation* možno výpočet verifikačných bodov úplne zanedbať vďaka vysokej stabilite krížovej validácie tohto algoritmu.

Ďalej bude použitá nasledovná matematická notácia:

(X_i, Y_i) = i -ty cvičný bod kde X a Y sú nadobudnuté vstupné a výstupné hodnoty parametrov,

S = reakčná plocha vytvorená zo všetkých cvičných bodov,

\hat{Y}_i = predikovaná hodnota reakčnej plochy S v X_i : $\hat{Y}_i = S(X_i)$,

S_{-i} = reakčná plocha vytvorená zo všetkých cvičných bodov okrem i -teho cvičného bodu,

\hat{Y}_{-i} = predikovaná hodnota reakčnej plochy S_{-i} v X_i : $\hat{Y}_{-i} = S_{-i}(X_i)$.

Klasické *Goodness of Fit* cvičných bodov porovnáva Y_i ku \hat{Y}_i . *Goodness of Fit* založené na krížovej validácii porovnáva Y_i ku \hat{Y}_{-i} .

Graf predikovaných a získaných hodnôt zobrazuje správnosť nasadenia reakčnej plochy na *Design of Experiments* body z tabuľky. Potrebným aspektom je o minimalizácia vzdialeností týchto bodov od diagonály grafu.

Grafy reakčných plôch

Grafy reakčných plôch uľahčujú skúmanie modelu pomocou grafického znázornenia vplyvu parametrov medzi sebou. Možno tak sledovať účinok každého vstupného parametra na zvolený výstupný parameter. Dostupné sú nasledujúce typy grafov:

- *Response chart* zobrazuje priebeh vzťahov vstupných a výstupných parametrov s 2D alebo 3D grafmi, prípadne s 2D rezmi,

- *Local Sensitivity chart* vykresľuje váhu zmeny výstupných parametrov na základe zmeny vstupných parametrov nezávisle v aktuálnej hodnote každého vstupného parametra. Má podobu stĺpcového grafu pre každý zo vstupov, kde extrémny na osi y sú vyčíslené ako rozdiel maxima a minima výsledného parametra vlastné k jeho maximu,
- *Local Sensitivity Curves chart* rozširuje predošlý graf o jednotlivé lokálne citlivosti so samostatnou krivkou, ktorá reprezentuje vplyv každého vstupu na jeden alebo dva výstupy,
- *Spider chart* popisuje vplyv zmeny vstupov na všetky výstupné parametre súčasne.

Každý z typov vykresľuje vzájomné vzťahy a voľba typu závisí od prehľadnosti výsledného grafu.

1.5.3 Six Sigma Analysis

Posledná časť sprostredkúva výsledky celej štatistickej analýzy. *Six Sigma Analysis* analyzuje variabilitu vstupných parametrov a predpoklady v modeli. Jej cieľom je nájdenie najlepšieho dizajnu. Analýza ponúka odpoveď na otázku do akej miery neistoty je model ovplyvnený výsledkami. Neistota (náhodná veličina) je parameter, ktorého hodnotu nie je možné určiť v danom čase (ak je časovo závislý) alebo na danom mieste (ak závisí od polohy). Príkladom je teplota okolia – nemožno určiť presnú teplotu v danom meste o týždeň.

Definícia 1.5.7 (kvalita). Model spĺňa kritériá kvality Six Sigma, ak je z jedného milióna vyrobených modelov chybných práve 3,4.

Táto definícia kvality je založená na predpoklade, že náhodné veličiny sú popísané štatistickými distribučnými funkciami a každý výstupný parameter musí spadať do ohraničenej oblasti tohto rozdelenia. Príklad modulu pružnosti predstavuje spodná hranica distribúcie nezápornosť tejto materiálnej vlastnosti a horná hranica napríklad modul pevnosti. Model spĺňa kritérium kvality Six Sigma, ak sú obe hranice vzdialené najmenej šesť smerodajných odchýlok od strednej hodnoty.

Na základe predošlých výpočtov dizajnu experimentov a reakčnej plochy sú vytvorené:

- tabuľky hodnôt parametrov,
- grafy štatistických rozdelení,
- citlivostné grafy výstupov.

Tabuľka každého výstupného parametra nesie informácie o veľkosti hodnoty tohto parametra; ďalej o pravdepodobnosti, že parameter je menší alebo rovný konkrétnej hodnote (krivka hustoty pravdepodobnosti); a napokon sigma level, čo je aproximované číslo smerodajných odchýlok od priemeru vzorkovej hodnoty.

Z tabuľky je vytvorený histogram spolu s distribučnou funkciou. Graf sprevádzajú jeho vlastnosti uložené v ďalšej tabuľke a obsahujú dáta o štatistickom rozdelení, extrémoch a pomere signálu k šumu. Túto tabuľku možno exportovať a následne aplikovať v inej analýze.

Citlivostný graf zobrazuje globálne citlivosti zo vzoriek vygenerovaných pre analýzu. Vďaka tomu podáva dobrú predstavu o citlivosti vstupných parametrov na výstupné.

Takáto informácia smeruje ku kvalitnejšiemu návrhu modelu so zachovaním jeho kvality a spoľahlivosti. Tieto grafy sú odlišné od *Local Sensitivity (Curves) chart* z predošlej podkapitoly. Globálne štatistické citlivosti sú založené na korelačnej analýze. Lokálne citlivosti parametrov vychádzajú z rozdielu maxima a minima variovaním jedného vstupného parametra, kým ostatné vstupné parametre sú konštantné. Globálne štatistické citlivosti nezávisia na hodnotách vstupných parametrov pretože všetky možné hodnoty vstupov už sú zohľadnené.

Generovanie vzoriek vychádza z *Latin Hypercube Sampling (LHS)* alebo *Weighted Latin Hypercube Sampling (WLHS)*. *LHS* je pokročilejším tvarom analytickej metódy Monte Carlo. Body sú tu náhodne generované v štvorcovej mriežke naprieč celým priestorom, no žiadne dva body nezdieľajú vstupný parameter rovnakej hodnoty (každý bod má oddelený riadok aj stĺpec mriežky od bodu druhého). Spravidla *LHS* potrebuje o 20-40% menej simulačných cyklov než Monte Carlo. Ak je vyžadovaná veľmi malá pravdepodobnosť poruchy (napríklad rád 10^6), *WLHS* zaručí rýchlejšiu konvergenciu k výsledkom.

Tieto nástroje programu Ansys slúžia k popisu dát získaných s rozboru zataženia danej súčiastky. Nasledujúce odseky pojednávajú o teoretických základoch napäťovej analýzy a únavovej životnosti.

1.6 Pevnostná analýza a únava

Súčiastky sú pri plnení ich úlohy zatažované rôznymi silami či momentami. Počas týchto procesov však môže dôjsť k stavu, kedy je zataženie priveľké a štruktúra súčiastky sa mení. Tieto javy popisuje pevnostná analýza. Teória v tejto podkapitole je čerpaná z literatúry [7], [22] a [27].

Materiál je často vystavený cyklickému zatažovaniu. Ak je výsledné cyklické napätie menšie než medza pevnosti materiálu, s cyklením sa poškodenie kumuluje až po vznik trhliny, prípadne vznikne iné poškodenie vedúce k lomu súčiastky. Tento proces poškodenia sa nazýva únava.

Aby sa predošlo únavovému poškodeniu, bol vytvorený rozbor námahy a stanovená bezpečnosť súčiastky. Jedným z prístupov je založený na sledovaní nominálnych (stredných) napätí a jeho výsledkom je vytvorenie krivky únavového života.

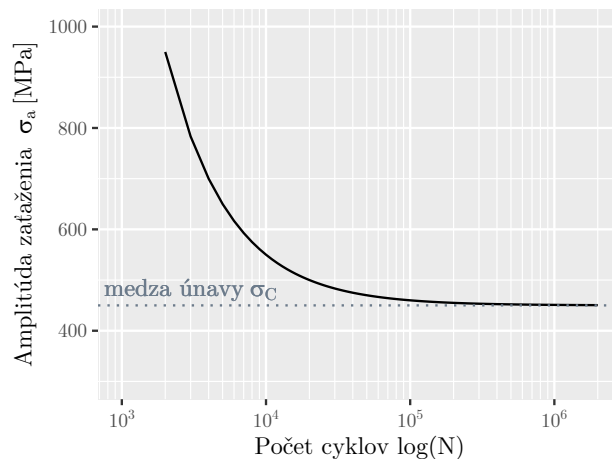
1.6.1 S-N krivka

Ak je súčiastka opakovane vystavená dostatočne veľkému cyklicky sa meniacemu napätiu, za určitú dobu dôjde k vzniku únavovej trhliny, ktorá vedie k lomu súčiastky. Opakovanie takejto skúšky pri vyššej úrovni napätia do porušenia súčiastky vedie k vytvoreniu napäťovo-únavovej krivky, tiež nazývanej Wöhlerova krivka alebo S-N krivka. Výsledkom takýchto experimentov je graf, kde na osi x je znázornený počet cyklov v logaritmickú škále a na osi y amplitúda napätia.

Táto krivka má zväčša exponenciálny priebeh (Obr. 1.7), no dostatočne dobrou aproximáciou je rozdelenie krivky na dve časti: lineárnu a konštantnú, pričom bodom zlomu je medza únavy. S-N krivka je vtedy matematicky popísaná vzťahom:

$$\sigma_C^m \cdot N_C = \sigma_a^m \cdot N, \quad (1.2)$$

kde exponent m je materiálová konštanta (štatisticky určená z experimentu), σ_C je medza únavy, N_C počet cyklov závislých na veľkosti σ_C , ďalej σ_a vyjadruje amplitúdu zataženia a k nej prislúchajúci počet cyklov N .



Obr. 1.7: S-N krivka.

Medza únavy σ_C je zvyčajne známa z únavovej skúšky ohybom počas rotácie. Vysokocyklická únavová skúška je väčšinou stanovená na hladkej vzorke s nulovým stredným napätím. Podľa potreby je medza únavy korigovaná Marinovou rovnicou s koeficientami, ktoré charakterizujú ovplyvňujúce faktory.

1.6.2 Súčiniteľ bezpečnosti

Súčiniteľ bezpečnosti je definovaný ako pomer parametra vyjadrujúceho stratu funkcie k parametru najnepriaznivejšej prevádzkovej podmienky. Je spojený s konkrétnym medzným stavom^{vi} a vyhodnocuje sa podľa kritéria zlyhania. Napríklad bezpečnosť vzhľadom k medznému stavu pružnosti pri jednoduchom namáhaní ťahom vyjadruje kedy sa súčiastka začne nenávratne (plasticky) deformovať.

Súčiniteľ bezpečnosti k nadobúda rôzne veľkosti, na základe ktorých je materiál bezpečnostne posúdený. V sfére medzného stavu pružnosti ocele je spodná hranica bezpečného materiálu prijateľná pre $k \geq 1,5$, prípadne $k \geq 3$. Súčiniteľ bezpečnosti sa vo všeobecnosti zaokrúhľuje na jedno desatinné miesto, pretože stanoveniu k zväčša predchádza veľké množstvo vedľajších výpočtov a vyššia presnosť bezpečnosti by bola irelevantná.

1.6.3 Nelineárny kontakt

V okamihu stretnutia jedného telesa s druhým dochádza ku kontaktu ich povrchov. Telesá na seba navzájom pôsobia a v závislosti na type kontaktu si predávajú silové zaťaženie. Lineárny kontakt predpokladá dokonalo hladký povrch telies. Tuhosť kontaktného rozhrania je konštantná nezávisle od deformácie. Jedná sa o idealizovaný typ kontaktu, ktorý možno uvažovať len za špecifických podmienok. Síce ho v reálnom svete nenájde, stále je užitočným nástrojom na riešenie väčšiny úloh.

Nelineárny kontakt zahŕňa komplexnejšie zaťaženie (trenie, priľnavosť, drsnosť povrchu). Posunutie medzi telesami vo všeobecnosti nie je priamo úmerné silám. Kontaktná plocha závisí na deformácii a so zaťažením sa zväčšuje nelineárne.

^{vi} popisuje veličinu, ktorá sa mení z funkčne prístupnej na funkčne neprípustnú

Analýzu stavu, kedy sledujeme interakciu medzi telesami z hľadiska vzájomného silového pôsobenia nazývame kontaktná úloha. Kontaktná úloha sa často rieši pomocou výpočtovej techniky, ktorá predpokladá dodržanie podmienok kompatibility a nepriepustnosti materiálu. Napríklad program Ansys analyzuje kontakt medzi dvoma telesami za použitia tzv. penalizačnej metódy. Kontaktný povrch jedného telesa je pokrytý prvkami *contact* a kontaktná plocha druhého telesa prvkami *target*. Počas výpočtu program kontroluje, či nedochádza k preniknutiu uzlov z povrchu *contact* do povrchu *target*. Kontaktnú úlohu riešia aj iné algoritmy než penalizačná metóda, avšak tá je najpoužívanejšia.

1.6.4 Jednoosová napätosť

Pri posúdení životnosti sa na určitých telesách často predpokladá jednoosová napätosť, ktorá zabezpečí zjednodušenie výpočtového modelu. Táto hypotéza sa najčastejšie využíva pre dlhé a valcovité telesá s jedným hlavným smerom. Na to, aby mohla byť aplikovaná, musí byť v posudzovanej oblasti jednoosový stav napätosti verifikovaný, a to napríklad parametrom s názvom indikátor biaxiality (*biaxiality indicator*).

Indikátor biaxiality R môže pre sledovanú oblasť nadobudnúť rôzne hodnoty a na základe ich veľkosti je posúdená korektnosť predpokladu o jednoosovom zaťažení:

- a) $R = -1$: šmyková napätosť,
- b) $R = 0$: jednoosová (priamková) napätosť,
- c) $R = 1$: dvojosová (rovinná) napätosť.

Kapitola 2

Výpočtový model

Správnu diagnostiku a liečbu ochorení chrbtice je založená na porozumení správania sa chrbtice pri zaťažení. Pre posúdenie závažnosti vplyvu rôznych zaťažení chrbtice sa používajú záťažové testy. Počas záťažových testov sa aplikuje rôzne zaťaženie na chrbticu, napríklad tlak, ťah, krútenie a podobne. Následne sa sledujú mechanické zmeny chrbtice, prípadne aj implantátu.

Reálne pokusy na chrbtici sú často limitované rôznymi faktormi: nutná návšteva lekára, obmedzený počet meraní a komplikovanosť testov. Okrem toho sú reálne pokusy často nebezpečné a môžu mať negatívny vplyv na pacienta [28].

Problematiku fyzického skúmania čoraz častejšie rieši počítačová analýza. Výpočtová analýza umožňuje opakované testovanie a predpoveď vplyvu rôznych faktorov na zaťaženie chrbtice bez fyzického poškodenia pacienta. Využíva sa na sledovanie vplyvu rôznych typov pohybu a polôh tela. Taktiež je často nákladovo efektívnejšia a rýchlejšia ako reálny pokus.

Prihliadajúc na spomenuté aspekty, predstavuje výpočtová analýza zaťaženia ľudskej chrbtice v počítači lepšiu voľbu ako reálne pokusy. Treba však podotknúť, že reálne pokusy sú často potrebné na overenie výsledkov a potvrdenie presnosti tých digitálnych.

Táto kapitola obsahuje popis vytvorenia výpočtového modelu. Vysvetlené sú pojmy prepojenia globálneho modelu so submodelom a dôvod zmeny sledovanej geometrie.

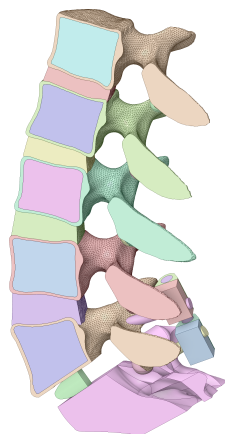
2.1 Vytvorenie výpočtového modelu

Mechanické výpočty modelu chrbtice s fixátorom boli vytvorené v prostredí Ansys 2022 R1. Pre komplikovanosť problému je úloha zameraná na státie dospelého zdravého človeka v pokoji.

Na vyhodnotenie výsledných deformácií postačuje sledovať problematickú oblasť v okolí kontaktu stavca so skrútkou. Zároveň je pre zjednodušenie výpočtov efektívne zredukovať objemnosť globálneho modelu vytvorením tzv. submodelu, pri zachovaní ekvivalentného zaťaženia. Prístup k riešeniu úlohy teda pozostával z dvoch typov: globálneho modelu a submodelu.

Ako globálny model bol použitý model diplomovej práce [16] s názvom *Model geometrie fixovanej bederní páteře*, Obr. 2.1. Skladá sa z driekovej chrbtice doplnenej o fixátor a stavec S1. Fixátor má podobu dvoch valčekov, ktoré sú zasunuté v L5 a S1 a zopnuté blokovacím prvkom a tyčinkou. Medzistavcová platnička postihnutá spondylolistézou bola nahradená kliečkou a prislúchajúce povrchy stavcov L5 a S1 boli zrezané.

Tento globálny model chrbtice s fixátorom bol následne upravený nahradením prototypu skrutky v podobe valčeka za reálnu skrutku so závitmi. Táto reálna skrutka bola vytvorená na základe skutočnej skrutky používanej pri lekárskejších zákrokoch. Jednotlivé namerané dĺžky a priemery boli prenesené do programu Inventor Professional 2022, kde sa daná súčiastka zdigitalizovala, Obr. 2.2.



Obr. 2.1: Globálny model driekovej chrbtice v programe Ansys.



Obr. 2.2: Skrutka vymodelovaná v programe Inventor.

2.2 Materiálové charakteristiky

2.2.1 Nastavenie pre normálové napätie

Pevnostnej analýze fixačnej skrutky predchádzalo definovanie mechanických vlastností celého modelu. Pre každé z telies v programe Ansys bolo potrebné vložiť modul pružnosti a Poissonovu konštantu. Ich veľkosti boli prevzaté z dodaného výpočtového modelu z už spomínanej práce [16]. Hodnoty, ktoré sú predmetom záujmu tejto práce, boli upravené.

Materiálové vlastnosti kostí boli upravené podľa rešeršnej štúdie z článku [18].

Okrem charakteristiky kostného tkaniva bol zmenený aj materiál fixátora. Trh ponúka širokú škálu rôznych materiálov použitých na fixáciu driekovej chrbtice. Medzi všetkými možnosťami v súčasnosti dominuje zliatina titánu. *Ti-6Al-4V (STA)* je zliatina zložená z 90% titánu, 6% hliníka a 4% vanádia. Vyznačuje sa svojou pevnosťou, nízkou hustotou a vynikajúcou odolnosťou voči korózii. Z názvu *STA (Stabilized Thermal Annealed)* vyplýva, že materiál bol stabilizovaný tepelným spracovaním, aby sa minimalizovala jeho citlivosť na únavu a zlepšila jeho pevnosť. [23]

Vstupné hodnoty k pevnostnej analýze sú uvedené v tabuľke 2.1.

Tabuľka 2.1: Vstupné materiálové vlastnosti pre skúmaný model.

	modul pružnosti E [MPa]	Poissonova konštantka [-]
fixátor	114 000	0,33
kortikálna kosť	12 000	0,3
špongiózna kosť	50	0,2

2.2.2 Nastavenie pre únavovú analýzu

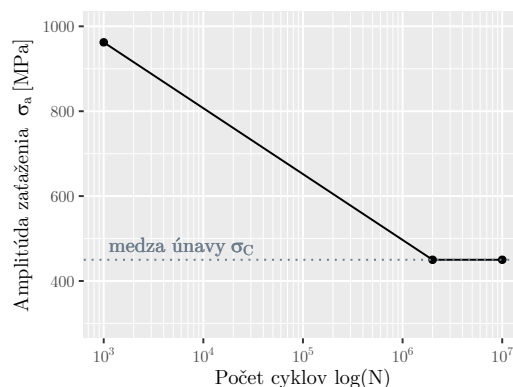
Aby mohol byť určený výsledný súčiniteľ bezpečnosti skrutky, bola k materiálovým vlastnostiam Ti-6AL-4V pridaná S-N krivka. Vytvorená bola z troch bodov:

- medza únavy $\sigma_C = 450$ MPa, [19],
- materiálová konštanta $m = 10$,
- počet cyklov $N = 1000$, $N_C = 2 \cdot 10^6$.

Dosadením do rovnice 1.2 bolo vyčíslené amplitúdové napätie σ_a pre $N = 1000$:

$$\begin{aligned}\sigma_C^m \cdot N_C &= \sigma_a^m \cdot N \\ 450^{10} \cdot 2 \cdot 10^6 &= \sigma_a^{10} \cdot 1000 \\ \implies \sigma_a &= 962 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Definíciou troch bodov pre $N = 1000$, $N_C = 2 \cdot 10^6$ a $N = 2 \cdot 10^7$, sa v prostredí Ansys vytvorí S-N krivka, Obr. 2.3, vďaka ktorej je súčiastku možné únavovo analyzovať.

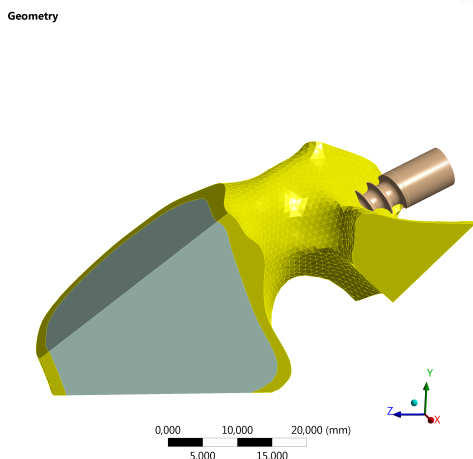


Obr. 2.3: S-N krivka fixátora.

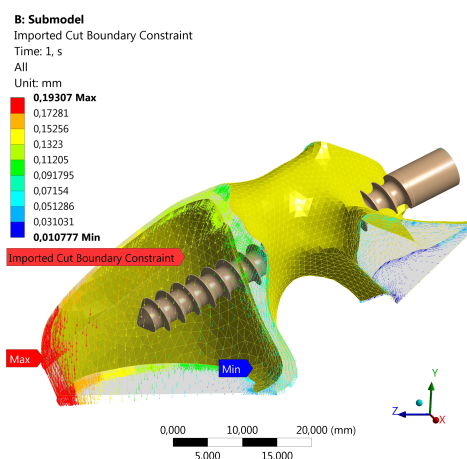
2.3 Geometria

2.3.1 Submodel

Submodel bol vytvorený v mieste predpokladaného najväčšieho zaťaženia skrutky. Zvolené boli tri telesá v oblasti L5 – kortikálna kosť, špongiózna kosť a samotná skrutka. Tieto telesá bolo nutné zrezať v miestach komplikovanej geometrie pre rýchlejší výpočet a prehľadnosť, Obr. 2.4. Na zrezané miesta bolo aplikované ekvivalentné zaťaženie globálneho modelu (*Submodeling – Imported Cut Boundary Constraint*), Obr. 2.5.



Obr. 2.4: Submodel upravený o reálnu skrutku a zrezanie komplikovanej geometrie L5.



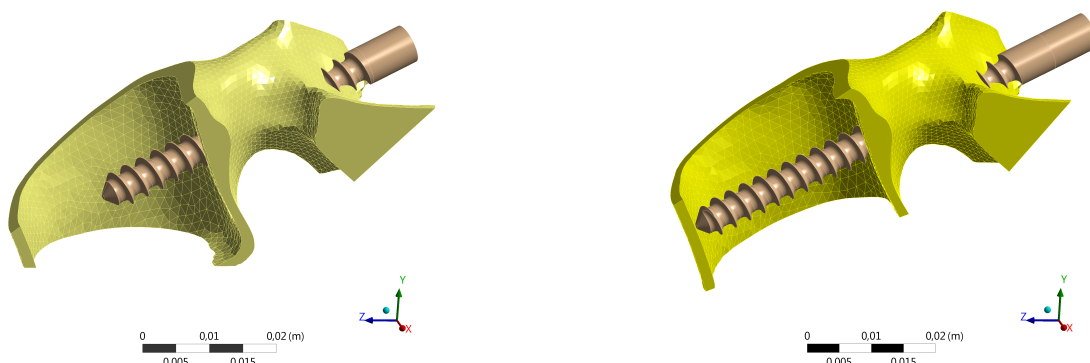
Obr. 2.5: Import ekvivalentného zaťaženia z globálneho modelu.

Ďalším krokom bola úprava kontaktov medzi telesami. Globálny model má všetky miesta vzájomných interakcií nastavené na typ pevnej väzby (*Bonded Contact*). Tento kontakt neumožňuje trenie. Avšak v rámci kontaktnej plochy skrutky so stavcom je typické malé relatívne posunutie. Následkom toho bola kontaktná plocha stavca (časť kortikálnej aj špongiózneho kosti) v mieste stretnutia so skrutkou upravená o trecí kontakt (*Frictional Contact*). K definícii trecieho kontaktu je v programe Ansys nutné zadať hodnotu súčiniteľa trenia f . V štúdiu [1] bol pri kontakte fixátor – medzistavcová platnička použitý $f = 0,2$ za predpokladu, že aj kontakty medzi ostatnými časťami driekovej chrbtice podliehajú trecím silám. V tejto bakalárskej práci je kontakt medzi ostatnými časťami driekovej chrbtice pevný. Aby sa predišlo veľkým odlišnostiam, bol súčiniteľ trenia v submodeli zredukovaný na $f = 0,1$.

2.3.2 Krátka a dlhá skrutka

Jedným z cieľov tejto bakalárskej práce je porovnanie vplyvu dĺžky skrutky fixátora na výsledné zaťaženie. Pre rozšírenie analýzy bol vytvorený identický projekt v programe Ansys, tentokrát s inou dĺžkou skrutky (valčeka).

V predošlom odseku bolo popísané, ako globálny model nadväzuje na vytvorenie a následnú úpravu submodelu. Uvažovaná bola len skrutka (valček) danej dĺžky, nazývaná ako *skrutka krátka*. Modifikáciou tohto projektu je opäť globálny model so submodelom, ktorý dopĺňa *skrutka dlhá*. Ich porovnanie je na Obr. 2.6.



Obr. 2.6: Vľavo skrutka krátka a vpravo skrutka dlhá.

Dĺžka skrutky krátkej, bola definovaná podľa dĺžky valčeka v globálnom modeli, a to $l_k = 0,0533$ m.

Skrutka dlhá bola vytvorená predĺžením skrutky krátkej a to upravením funkcie *Extrude* v prostredí Inventor. Závit skrutky bol predĺžený až po hranicu medzi špongióznou a kortikálnou kosťou. Výsledkom je skrutka s dĺžkou $l_d = 0,0714$ m.

2.4 Okrajové podmienky

Poslednou časťou pri vytváraní výpočtového modelu je určenie okrajových podmienok. V globálnom modeli boli použité štyri okrajové podmienky:

- sila: reprezentuje hmotnosť človeka a je aplikovaná na ploche vrchnej časti L1 vo veľkosti 200 N; okrem nej nie sú uvažované žiadne externé vplyvy ako napríklad pôsobenie gravitácie na zvyšok tela, tlak od vonkajšieho telesa a podobne,
- votknutie: predstavuje prepojenie stavca S1 so stavcom S2 a zamedzuje tak všetky posuny a rotácie na týchto spodných plochách S1,
- podpora všeobecná: je aplikovaná na všetky predné plochy modelu, ktoré sú v oblasti rezu pozdĺž chrbtice, ktorý charakterizuje symetriu (na Obr. 2.1 sú to plochy „najbližšie“ k čitateľovi); zamedzuje posun v osi x ,
- podpora všeobecná upravená: pôsobí na rovnakú plochu ako zatažovacia sila a na Obr. 2.1 zamedzuje rotáciu pozdĺž osi x a posun v osi z .

V tomto stave je model pripravený na výpočet pevnostných výsledkov. Sledované bude maximálne normálové napätie fixačnej skrutky a súčiniteľ bezpečnosti fixačnej skrutky.

Kapitola 3

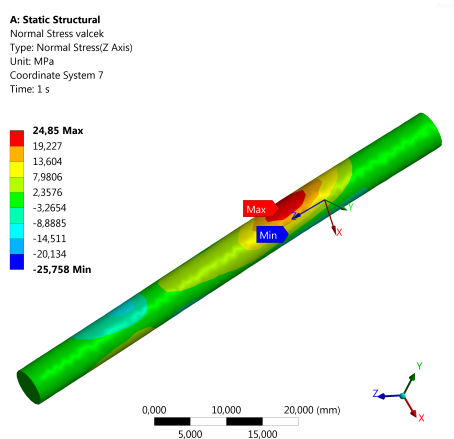
Pevnostná analýza fixačnej skrutky

Táto kapitola nadväzuje na vytvorený výpočtový model, ktorý ďalej pevnostne analyzuje. Na posúdenie pevnosti boli vybrané priemerné hodnoty napätí. Na druhú stranu, deformačno-napätová analýza využíva stochasticky zadané veličiny.

Pevnostná analýza prebiehala len na submodeli a bola zameraná výhradne na fixačnú skrutku. Tento proces zaručil rýchlejší, no najmä presnejší výpočet zaťaženia. Sledovalo sa maximálne normálové napätie v mieste výstupu skrutky z kortikálnej kosti. Táto hodnota bola označená za výstupný parameter, ktorý bude predmetom rozboru v kapitole 4.

3.1 Analýza normálového napätia

Pevnostná analýza valčeka v globálnom modeli ukázala, že oblasť najväčšieho normálového napätia bola v mieste výstupu valčeka zo stavca, Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Oblasť maximálneho zaťaženia v globálnom modeli.

V submodeli bola oblasť najväčšieho zaťaženia v približne rovnakom mieste. Na základe toho, bola pre pevnostnú analýzu v submodeli vzatá len táto časť skrutky. Zároveň sa tak znížila výpočtová náročnosť a zamedzilo skresleným hodnotám spôsobených plochami, na ktoré boli aplikované ekvivalentné zaťaženia z globálneho modelu (*Cut Boundary*).

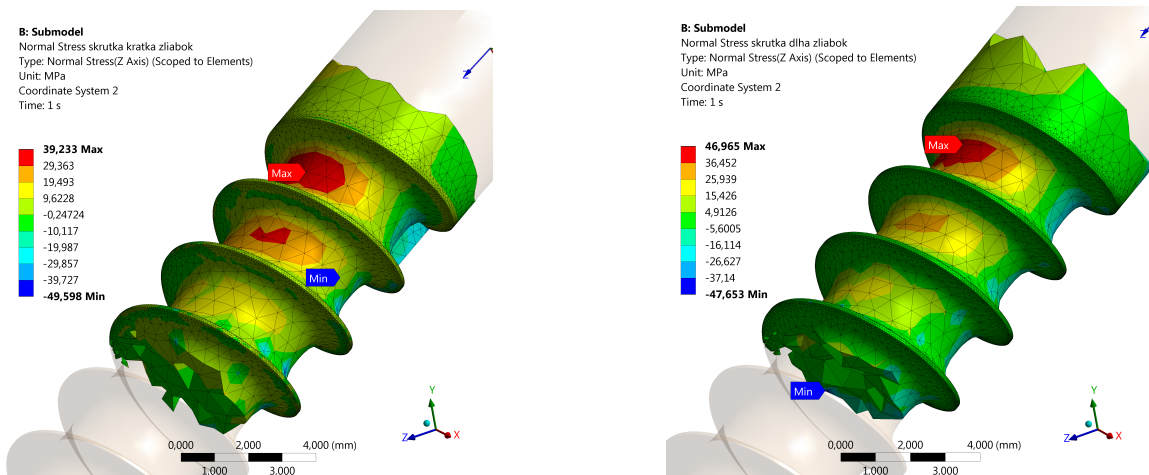
Najväčšie normálové napätie sa prejavilo na dne závitú, a to pre obe dĺžky skrutky, Obr. 3.2. Dno závitú sa správa ako koncentrátor napätia pre menšiu plochu prierezu, ktorá vedie k zvýšenému napätiu (podobne ako pri prítomnosti vrubu).

Výsledné maximálne normálové napätie na kratšej skrutke, $N_k = 39,2$ MPa, je menšie, ako maximálne normálové napätie na dlhšej skrutke, $N_d = 47,0$ MPa. Dlhšia skrutka sa vyznačuje väčšou kontaktnou plochou s materiálom, čo zapríčiňuje možnosť prenosu väčšieho zaťaženia N_d ako pri skrutke krátkej. Nakoľko platí $E_{Ti-6AL-4V} \gg E_{spongy}$, dlhšia fixačná skrutka má možnosť sa zaboriť do mäkkého prostredia špongiózy.

Počas nastavenia analýzy pre maximálne normálové napätie bola predpokladaná jednoosová napätosť na povrchu fixačnej skrutky. Táto hypotéza bola overená použitím únavového nástroja *Biaxiality Indication*. Výsledky indikátora biaxiality sú v tabuľke 3.1 takmer nulové, dominantné je jedno z hlavných napätí, čo je v súlade s predpokladom zaťaženia skrutky na jednoosovú napätosť.

Tabuľka 3.1: Výsledné parametre analýzy zaťaženia v mieste dna závitú fixačnej skrutky.

	maximálne normálové napätie [MPa]	indikátor biaxiality [-]
skrutka krátka	39,2	0,145
skrutka dlhá	47,0	0,208



Obr. 3.2: Maximálne normálové napätie na dne závitú kratšej (vľavo) a dlhšej (vpravo) skrutky.

3.2 Analýza súčiniteľa bezpečnosti

V predošlom odseku bola definovaná najproblematickejšia oblasť fixačnej skrutky submodela. Identické miesto bolo sledované na určenie únavy.

Na určenie životnosti súčiastky bolo v programe zvolené pulzujúce zaťaženie v ťahu (*Zero-Based*) pre miznúci cyklus $\sigma \in [0; \sigma_{max}]$, s korekciou lineárnej Goodman krivky, Obr. 3.3. Analyzovaná bola napätová životnosť (*Stress Life*) podľa maximálnych hlavných napätí (*Max Principal*).

Na Obr. 3.4 je vidieť, že pre majoritnú časť oboch dĺžok skrutky vyšiel súčiniteľ bezpečnosti k rovný, respektíve väčší ako 15 (interval v Ansys je ohraničený na $0 \leq k \leq 15$).

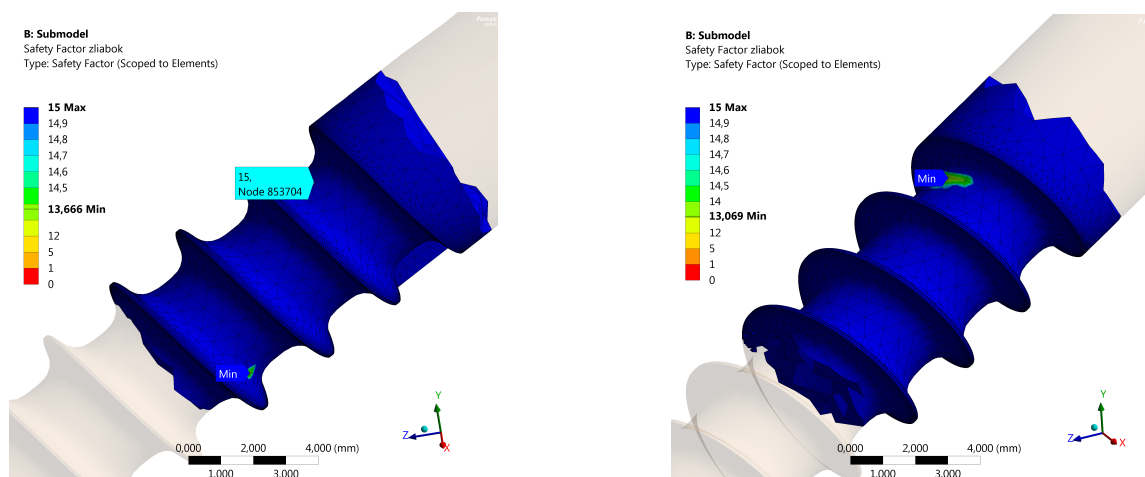
Pre skrutku krátku je zaujímavá minimálna hodnota súčiniteľa bezpečnosti $k_{min} = 13,7$. Skrutka krátka má k_{min} na inom dne závitú ako je dno závitú maximálneho zataženia. Tento artefakt mohla spôsobiť nepravidelnosť geometrie, nerovnomerné rozloženie zataženia pozdĺž závitového spoja, voľba sietovania alebo výber okrajových podmienok. V uzle najväčšej napätosti je bezpečnosť znázornená tyrkysovým štítkom a nadobúda hodnotu $k \geq 15$.

Skrutka dlhá má, podľa očakávania, najnižší súčiniteľ bezpečnosti, $k_{min} = 13,1$, v oblasti maximálneho zataženia. Spomenuté miesto sa nachádza v uzle siete a je označené štítkom *Min*.

Súčiniteľ bezpečnosti je pre obe dĺžky fixačnej skrutky oveľa väčší ako 1 a možno skonštatovať, že pre vytvorený model driekovej chrbtice, spĺňajú obe fixačné skrutky únavovú bezpečnosť.

Details of "Fatigue Tool"	
Domain	
Domain Type	Time
Materials	
Fatigue Strength Factor (Kf)	1,
Loading	
Type	Zero-Based
<input type="checkbox"/> Scale Factor	1,
Definition	
<input type="checkbox"/> Display Time	End Time
Options	
Analysis Type	Stress Life
Mean Stress Theory	Goodman
Stress Component	Max Principal
Results Input (Beta)	Stress
Life Units	
Units Name	cycles
1 cycle is equal to	1, cycles

Obr. 3.3: Výber nastavenia pre únavovú analýzu.



Obr. 3.4: Súčiniteľ bezpečnosti na dne závitú kratšej (vľavo) a dlhšej (vpravo) skrutky.

3.3 Six Sigma analýza

Poslednou časťou práce s modelom v prostredí Ansys bola analýza v *Six Sigma Analysis*. Jej cieľom je rozbor štatistických rozdelení medzi dátami vstupnými (materiálové charakteristiky) a parametrami výstupnými (zataženie skrutky).

Vstupné dáta

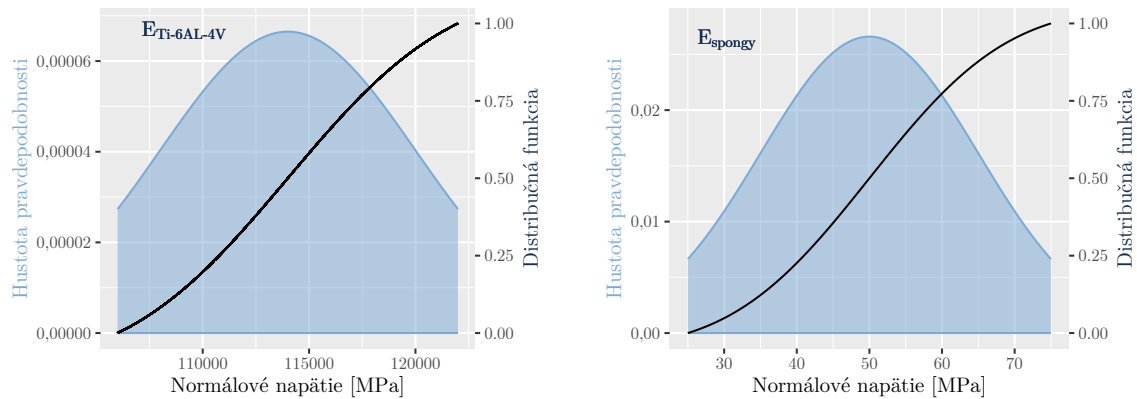
Vychádzajúc z rešeršnej časti, je u každého človeka materiálová charakteristika kostí iná. Pre pokrytie čo najväčšej vzorky ľudstva, je vhodné zvážiť rôzne kosti. K tomu poslúžilo stochastické zadanie modulu pružnosti. Nakoľko najväčšiu kontaktnú plochu so skrutkou vytvára špongiózna kosť, prvým stochastickým vstupným parametrom je modul pružnosti špongiózneho kosti E_{spongy} .

Podobne je to aj s voľbou materiálu fixátora. Druhým stochastickým vstupným parametrom je modul pružnosti skrutky $E_{Ti-6AL-4V}$.

Definícia vstupných parametrov prebehla podľa odseku 1.5.1, kde sa v oboch prípadoch zvolila možnosť orezaného normálneho rozdelenia. Rozdelenie modulu pružnosti fixátora $E_{Ti-6AL-4V}$ a modulu pružnosti špongióznej kosti E_{spongy} bolo nastavené podľa článkov [18], [23] a je uvedené v tabuľke 3.2. Priebeh ich grafov je na Obr. 3.5.

Tabuľka 3.2: Vstupné materiálové vlastnosti pre Six Sigma.

	dolná hranica distribúcie [MPa]	horná hranica distribúcie [MPa]	stredná hodnota normálneho rozdelenia (neuseknutého) [MPa]	smerodajná odchýlka normálneho rozdelenia (neuseknutého) [MPa]
fixátor	106 000	122 000	114 000	6 000
špongiózna kosť	25	75	50	15



Obr. 3.5: Vľavo rozdelenie fixátora a vpravo rozdelenie špongióznej kosti.

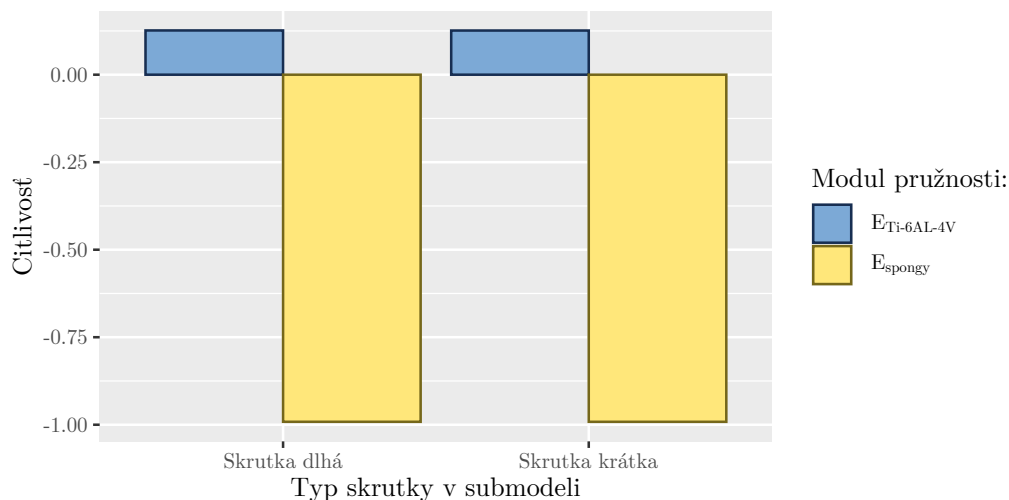
V rámci prvej časti, *Design of Experiments*, bol zvolený algoritmus *Central Composite Design*, ktorý vygeneroval súbor vzorkovacích bodov. Druhá časť, *Response Surfaces*, použila vzorkovacie body na vytvorenie reakčnej plochy za pomoci metódy *Genetic Aggregation*. Spomínané nastavenie determinovalo podobu výstupných dát.

Výstupné dáta

Po vyčíslení výstupných parametrov v bodoch reakčnej plochy, je výsledkom Six Sigma analýzy tabuľka pre oba modely. Táto tabuľka obsahuje informácie o veľkosti maximálneho normálového napätia a o jeho ekvivalentnej hodnote na krivke distribučnej funkcie.

Na základe týchto dát, je možné vytvoriť graf so štatistickým priebehom pre krátku aj dlhú skrutku. Grafy na Obr. 3.7 a Obr. 3.8 obsahujú histogram hustoty pravdepodobnosti a distribučnú funkciu rozdelení.

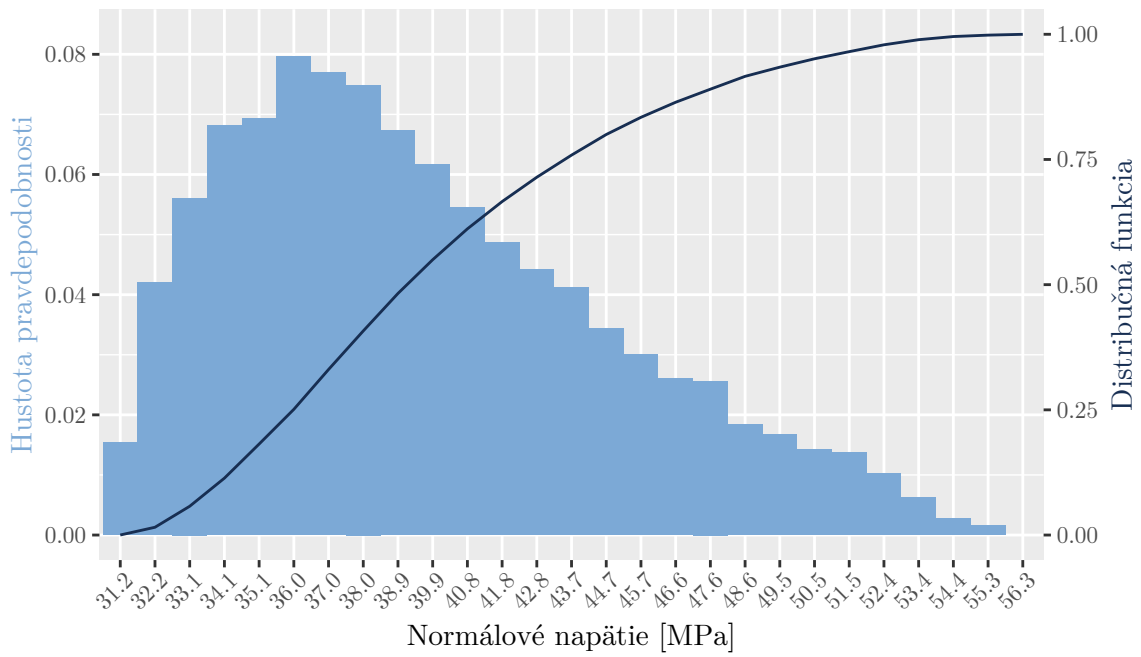
Okrem priebehu rozdelenia výstupného parametra, dokáže Six Sigma analýza zobrazit citlivosť jednotlivých vstupných parametrov. Citlivostné grafy na Obr. 3.6 ukazujú, že na maximálne normálové napätie má veľkosť E_{spongy} väčší vplyv ako veľkosť $E_{Ti-6AL-4V}$.



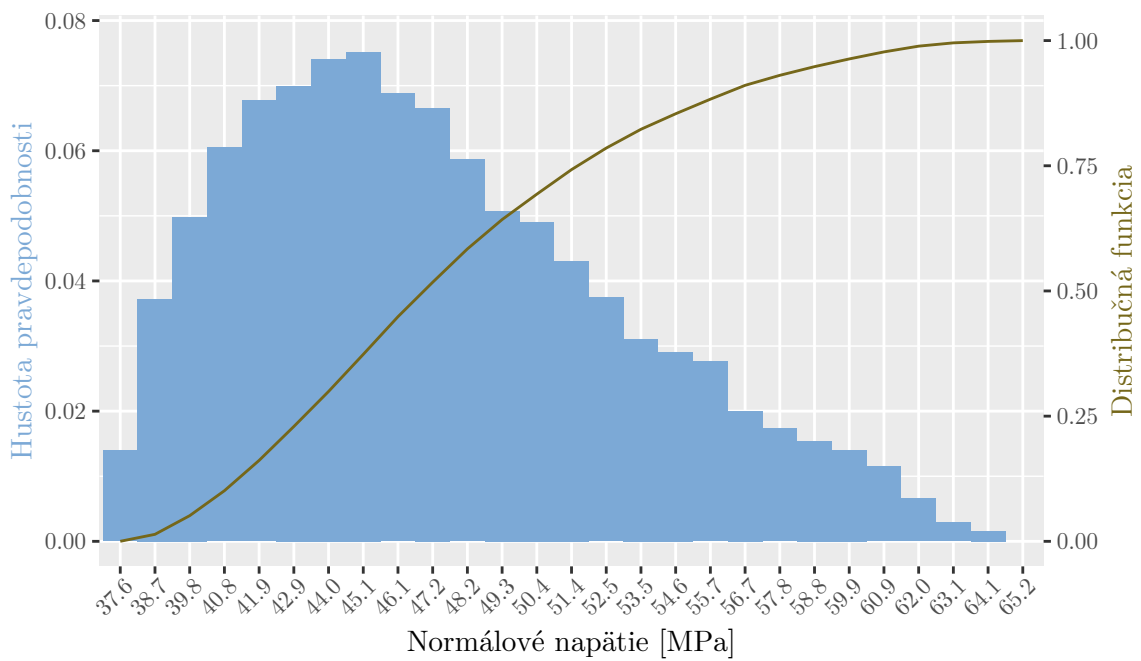
Obr. 3.6: Citlivosť vstupných parametrov na výstupné parametre.

Na záver tejto kapitoly treba dodať poznámku o výpočtovej náročnosti Six Sigma analýzy. Už počas vytvárania modelu boli zvažované relevantné zjednodušenia (státie v pokoji, zrezanie komplikovanej geometrie submodelu, úprava poradia výpočtov, ...). Avšak aj napriek tomu vyčíslenie jednej Six Sigma analýzy zabralo približne 72 hodín a ladenie všetkých simulácií trvalo pol roka.

Týmto odsekom končí analýza fixačných skrutiek v prostredí Ansys a v ďalšej kapitole číslo 4 budú využité dáta z Obr. 3.7 a 3.8 na štatistický rozbor stredných hodnôt rozdelení.



Obr. 3.7: Rozdelenie maximálneho normálového napätia na skrutke krátkej.



Obr. 3.8: Rozdelenie maximálneho normálového napätia na skrutke dlhej.

Kapitola 4

Zhodnotenie výsledkov

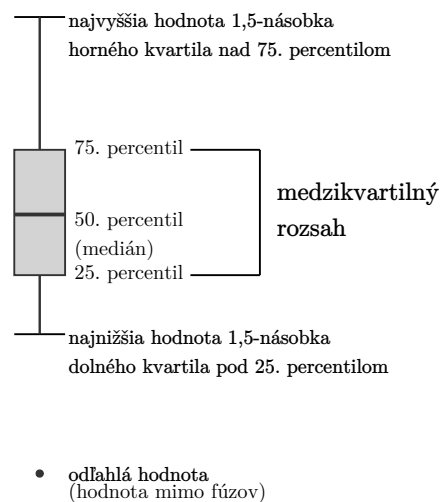
Záverečnou úlohou tejto bakalárskej práce je štatistický rozbor výsledkov z deformačno-napätovej analýzy. Dáta zo Six Sigma analýzy v podobe rozdelení maximálneho normálového napätia pre skratku krátku aj dlhú boli exportované z prostredia Ansys vo formáte CSV súborov. Následne boli tieto dva súbory dát vložené do štatistického programu RStudio 2023.03.1.

4.1 Krabicový graf

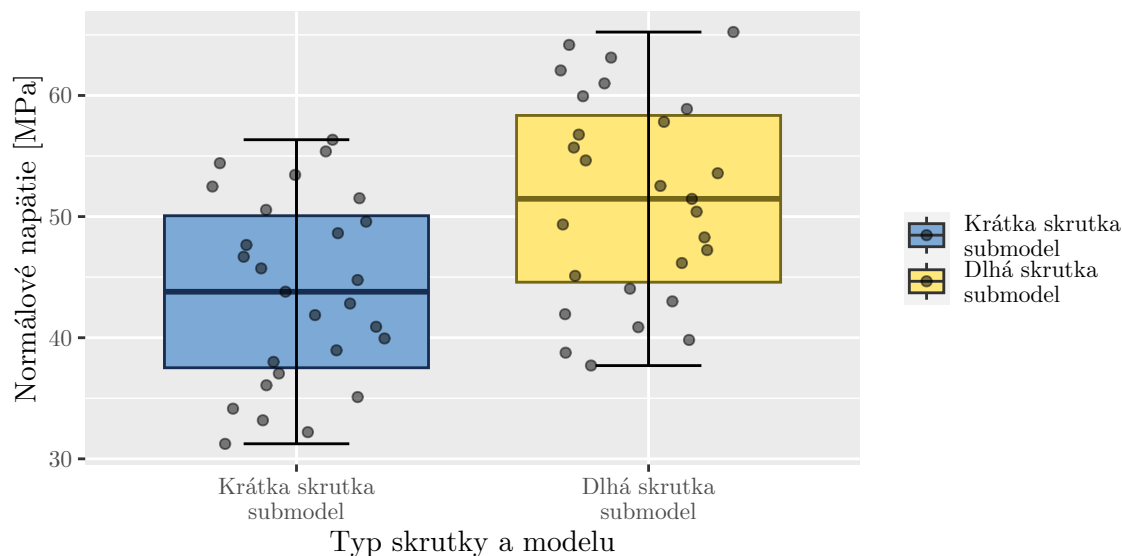
Hlavným cieľom tejto kapitoly je posúdenie zhodnosti stredných hodnôt maximálneho normálového napätia medzi skrutkou krátkou a skrutkou dlhou.

Vhodným začiatkom je využitie grafickej vizualizácie každého zo súborov, kedy sú typicky používané stĺpcové grafy alebo histogramy. Avšak tieto princípy zobrazujú každý súbor dát zvlášť, čo môže dôjsť k nesprávnym interpretáciám. Načrtnutie možných závislostí medzi dátami využívajú krabicové grafy (*boxplots*), ktoré zahŕňajú výslednú štatistiku aj distribúciu základných dát. Skladajú sa z obdĺžnika („krabica“, *box*) a k nemu napojených úsečiek („fúzy“, *whiskers*). Podľa autora Spear [24], krabicový graf rozdelí dáta v zmysle kvartilov. Obdĺžnik predstavuje priestor medzi prvým a tretím kvartilom a nachádza sa v ňom medián dát v podobe úsečky. Fúzy rozširujú krabicu o variabilitu súboru pod prvým a nad tretím kvartilom. Ak niektoré dáta nepatria do tejto oblasti, v krabicovom grafe sú zobrazené ako odľahlé (*outliers*). Vysvetlenie možno nájsť na Obr. 4.1.

Na aplikáciu krabicového grafu pre sledované dva súbory dát existuje v programe RStudio balíček *ggplot2* s funkciou *geom_boxplot*, ktorá vložené dáta zobrazí podľa Obr. 4.1. Výsledok tejto funkcie je zobrazený na Obr. 4.2.



Obr. 4.1: Vysvetlenie krabicového grafu. [24]



Obr. 4.2: Krabicový graf výstupných parametrov.

Z Obr. 4.2 možno spozorovať, že distribúcia normálových napätí medzi skrutkou krátkou a dlhou je podobná. V štatistických testoch možno teda predpokladať, že určité hypotézy o podobnosti štatistických parametrov by nemali byť zamietnuté.

4.2 Test normality

Podkapitola 1.4.4 pojednávala o potrebe overenia určitých predpokladov k využitiu t -testu na dvoch súboroch dát. Prvým predpokladom bola normálnosť rozdelenia oboch súborov dát.

Grafické testy

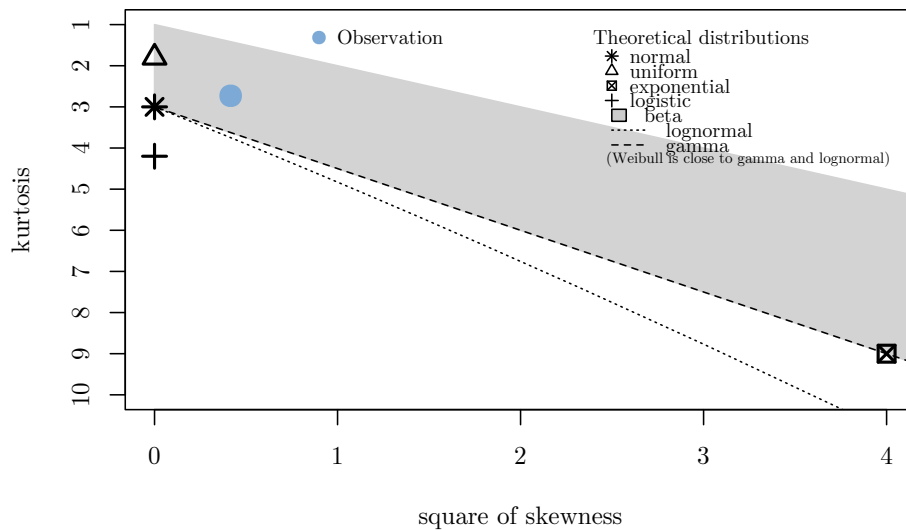
Program RStudio ponúka balíček *fitdistrplus* s funkciou *descdist*. Dokáže vyhodnotiť vstupné dáta v podobe obrázku, ktorý výstižne zobrazuje typ rozdelenia blízky pre vstupné dáta. Tento nástroj, nazývaný ako Cullen-Frey graf, tak predstavuje užitočný spôsob pre urýchlenie štatistickej analýzy. Funkcia bola aplikovaná na súbor dát skrutky krátkej aj dlhej a jej výsledky sú zobrazené na Obr. 4.3. Poloha dát je tu reprezentovaná modrým okrúhlym znakom. Možno vidieť, že oba súbory sú najviac podobné k beta rozdeleniu, prípadne normálnemu, či gamma rozdeleniu.

Ďalšou alternatívou grafických testov je zobrazenie Q-Q a P-P grafov. Ich tvar pre fixačné skrutky sa nachádza na Obr. 4.4 a 4.5.

Odchýlka empirických dát od teoretickej priamky je malá pri všetkých štyroch grafoch. Vzhľad grafov nasvedčuje tomu, že obe dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia.

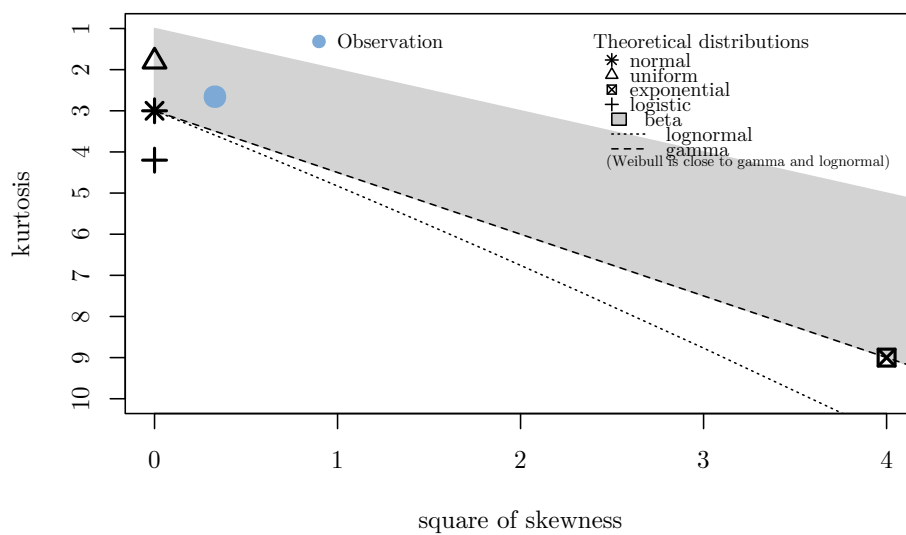
Všetky grafické metódy na testovanie normality rozdelenia vstupných dát ukazujú, že hypotéza normálnosti je naozaj odôvodnená. Túto myšlienku ďalej podpora kvantitatívne testy.

Cullen and Frey graph



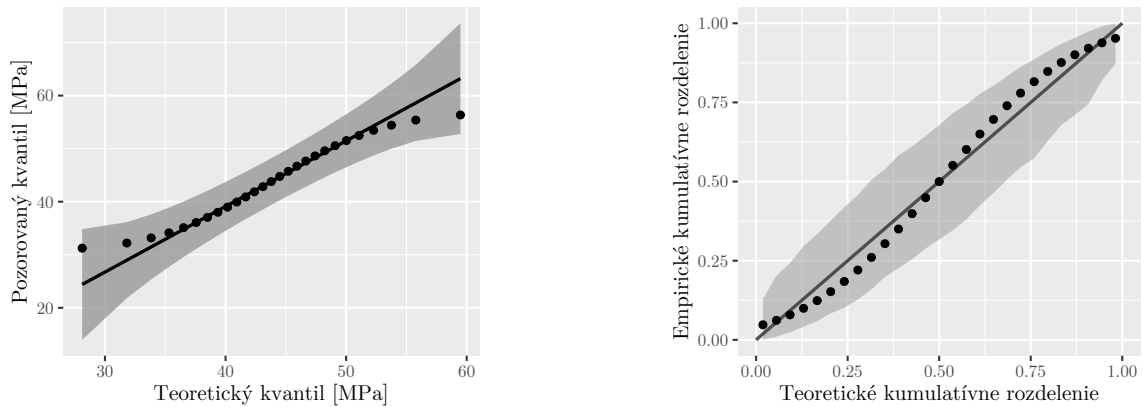
(a) Fixačná skrutka krátka.

Cullen and Frey graph

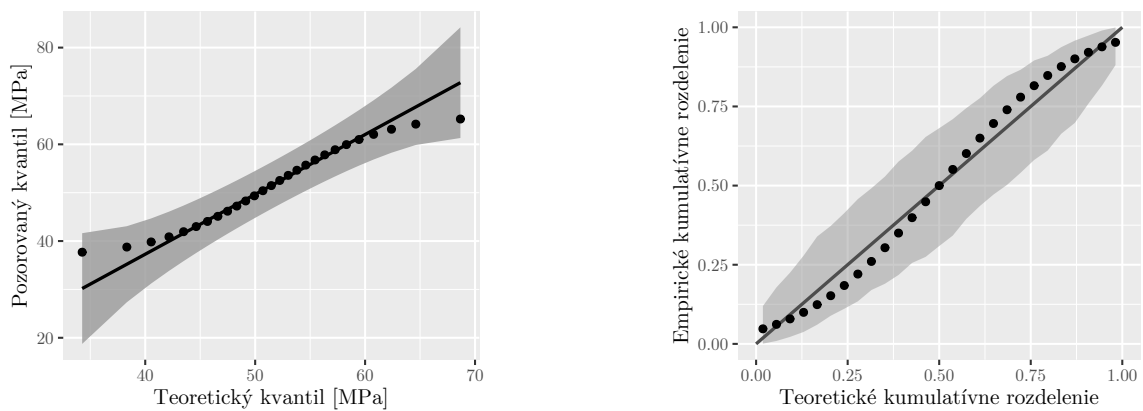


(b) Fixačná skrutka dlhá.

Obr. 4.3: Grafické znázornenie najlepšieho rozdelenia.



Obr. 4.4: Graf Q-Q a P-P fixačnej skrutky krátkej.



Obr. 4.5: Graf Q-Q a P-P fixačnej skrutky dlhej.

Numerické testy

Na testovanie normality pomocou Shapiro-Wilk testu bola v programe *RStudio* využitá knižnica *stats* s funkciou *shapiro.test*. Pri Anderson-Darling test sa prevzala funkcia *ad.test* z knižnice *nortest*.

Oba testy boli vykonané pre nulovú hypotézu H_0 : náhodný výber je normálnym rozdelením na hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Výsledné hodnoty testov oboch fixačných skrutiek sú uvedené v tabuľke 4.1.

Tabuľka 4.1: Výsledky testov na hypotézu normalnosti rozdelenia.

p -hodnota [-]	Shapiro-Wilk	Anderson-Darling
skrutka krátka	0,3335	0,5853
skrutka dlhá	0,3335	0,5853

p -hodnoty sú vo všetkých prípadoch väčšie ako 0,05, t.j. ani v jednom prípade nulovú hypotézu H_0 na hladine významnosti α nemožno zamietnuť.

4.3 Test zhodnosti rozptylov

Po overení predpokladu normálneho rozdelenia dát nasleduje verifikácia rovnosti rozptylov maximálneho normálového napätia oboch dĺžok skrutiek. Zvolený je Fisherov dvojjvýberový F -test. V programe RStudio ho možno nájsť v knižnici *stats* s funkciou *var.test*.

F -test bol vyčíslený pre nulovú hypotézu $H_0: \sigma_{kratka}^2 = \sigma_{dlha}^2$ ⁱ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$.

Výsledkom testu je p -hodnota s veľkosťou 0,6406. Nakoľko platí $0,6406 > 0,05 = \alpha$, hypotéza H_0 o rovnosti rozptylov dvoch súborov dát na hladine významnosti α sa nezamieta.

4.4 Test zhodnosti stredných hodnôt

Akonáhle sú overené všetky predpoklady pre aplikáciu testu rovnosti stredných hodnôt, možno prikróčiť k poslednému štatistickému testu. Studentov dvojjvýberový t -test je v knižnici *stats* definovaný funkciou *t.test*.

Testovaná je nulová hypotéza $H_0: \mu_{kratka} - \mu_{dlha} = 0$ za podmienky $\sigma_{kratka}^2 = \sigma_{dlha}^2$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$.

Studentov dvojjvýberový t -test pre maximálne normálové napätie medzi fixačnou skrutkou krátkou a dlhou má výsledky uvedené v tabuľke 4.2.

Tabuľka 4.2: Výsledky t -testu na rovnosť stredných hodnôt.

typ parametra	t štatistika	p -hodnota	konfidenčný interval
veľkosť hodnoty [-]	-3,5044	0,0009557	[-12,066091; -3,278155]

V tomto prípade je $0,0009557 < 0,05 = \alpha$ z čoho vyplýva, že hypotéza H_0 o rovnosti stredných hodnôt medzi dvoma súbormi sa na hladine významnosti α zamieta. Nakoľko sa t štatistika nenachádza v konfidenčnom intervale, podľa rovnice 1.1 sa prijíma alternatívna hypotéza $H_A: \mu_{kratka} - \mu_{dlha} \neq 0$.

ⁱv rešeršnej časti 1.4.4 je pre dvojjvýberový F -test uvedená podmienka $s^2(kratka) \geq s^2(dlha)$, ktorá je v tomto prípade automaticky splnená usporiadaním dát v programe RStudio

Záver

Hlavnou motiváciou tejto bakalárskej práce boli deformácie fixačných skrutiek aplikovaných v ľudskom tele. Stanovenú problematiku rieši rozbor vplyvu krátkej a dlhjej skrutky. Bola zistená štatisticky významná odchýlka zaťaženia skrutky pri použití rôznej dĺžky. Analýza bola podporená výpočtom životnosti súčiastky.

Úvodná časť je venovaná rešerši o problematike spondylolistézy, mechanickej analýze materiálov a o štatistických testoch s algoritmi zdokumentovanými v programe Ansys. Na základe týchto dôležitých poznatkov sú určené požiadavky návrhu výpočtového modelu a k nim prispôbené reprezentovanie výstupných dát.

Následne je upravený existujúci globálny model na podobu dvoch submodelov. Oba pozostávajú zo stavca L5 a fixačnej skrutky krátkej, respektíve dlhjej. Z pevnostnej analýzy vyplýva, že maximálne normálové napätie v oblasti dna závitú je väčšie na povrchu fixačnej skrutky dlhšej. Voľba fixátora so skrutkou zasahujúcou približne do polovice špongióznej kosti, môže pacientovi zaručiť menej pravdepodobnú opakovanú operáciu.

Ako dve stochasticky zadané veličiny sú vybrané moduly pružnosti materiálu fixačnej skrutky a špongióznej kosti. Citlivostné grafy vstupných parametrov na výstupné zobrazujú výraznejší vplyv materiálu špongióznej kosti v porovnaní so zliatinou fixátora. Príčinou je menší modul pružnosti kosti oproti fixátora, následkom čoho sa okolie skrutky stáva poddajnejším a vytvára priestor na deformáciu. Napokon únavové testy problematickej oblasti preukázali spoľahlivú bezpečnosť oboch modelov.

Nemožno opomenúť dôvody pre zjednodušovanie výpočtového modelu. Výpočtová náročnosť modelu bola výrazná, pričom každý výpočet Six Sigma analýzy zabral približne 72 hodín a odladovanie simulácie trvalo pol roka.

Finálna časť práce pojednáva o spracovaní dvoch súborov dát v podobe maximálnych normálových napätí na fixačnej skrutke krátkej a dlhjej. Pre použitý dataset je vykonaný štatistický test s cieľom porovnať mieru odchýlky medzi ich rozdeleniami. Záverom tohto rozboru je skutočnosť, že pre zvažované predpoklady testu, tieto dva súbory majú štatisticky významne rozdielne stredné hodnoty. Nakoľko pevnostná analýza preukázala nižšie zaťaženie na skrutke kratšej, životnosť fixátora vzhľadom na stochasticky zadané vstupné veličiny je sľubnejšia práve pre prípad, kedy je fixátor v kontakte s menšou plochou kosti.

Táto bakalárska práca ponúka prínosné výsledky s ihneď aplikovateľnými poznatkami. Avšak stále existuje priestor pre podrobnejšie zanalyzovanie problematiky na zlepšenie pevnosti fixátora. Ďalšie štúdie by mohli zahrnúť rozmanitejšiu geometriu skrutiek a rôzne, zatiaľ neriešené faktory. Zaujímavý môže byť výskum významnosti degradácie zapríčinenjej bežným ľudským pohybom.

Literatúra

- [1] AMBATI, M., WRIGHT, P., LEHMAN, M., KANG, M., WAGNER, M. et al. Bilateral pedicle screw fixation provides superior biomechanical stability in transforaminal lumbar interbody fusion: a finite element study. *The spine journal*. NEW YORK: Elsevier Inc. 2015, zv. 15, č. 8, s. 1812–1822. ISSN 1529-9430.
- [2] ANDEL, J. *Mathematics of Chance*. 1. vyd. Charles University: Hoboken: John Wiley & Sons, Incorporated, 2001. ISBN 0-471-41089-6.
- [3] ANSYS®. *DesignXplorer User's Guide*. 22.1. Canonsburg, Pennsylvania: ANSYS, Inc., 2022.
- [4] ANSYS®. *Mechanical User's Guide*. 22.1. Canonsburg, Pennsylvania: ANSYS, Inc., 2022.
- [5] ANSYS®. *Workbench User's Guide*. 22.1. Canonsburg, Pennsylvania: ANSYS, Inc., 2022.
- [6] BEN SALEM, M. a TOMASO, L. Automatic selection for general surrogate models. *Structural and multidisciplinary optimization*. Berlin/Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 2018, zv. 58, č. 2, s. 719–734. ISSN 1615-147X.
- [7] DOWLING, N. E. *Mechanical behavior of materials : engineering methods for deformation, fracture, and fatigue*. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007. ISBN 0-13-186312-6.
- [8] DYLEVSKÝ, I. *Funkční anatomie*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2009. 72-75, 78 s. ISBN 978-80-247-3240-4.
- [9] EARLS, J. *ZROZENÍ K CHŮZI*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, 2021. ISBN 978-80-271-4272-9. Preložené z originálu BORN TO WALK, Second Edition: Myofascial Efficiency and the Body in Movement by James Earls vydaného v roku 2020 nakladatelstvom Lotus Publishing.
- [10] EIBEN, A. E. *Introduction to evolutionary computing*. Second edition. Heidelberg: Springer, 2015. Natural computing series. ISBN 978-3-662-44873-1.
- [11] GRIM, M., DRUGA, R. et al. *Základy anatomie: 1. Obecná anatomie a pohybový systém*. 1. vyd. Praha: Galén, Karolinum, 2001. 17-19 s. ISBN 80-7262-112-2.
- [12] GUNZBURG, R. a SZPALSKI, M. *Spondylolysis, Spondylolisthesis, and Degenerative Spondylolisthesis*. 1. vyd. Philadelphia: Lippincott Williams & Wilkins, 2008. ISBN 978-0-7817-7633-2.

- [13] HIGHSMITH, J. M. *Causes of Spondylolisthesis*. 2019. [Online; cit. 2022-12-12]. Dostupné z: <https://www.healthcentral.com/condition/spondylolisthesis/causes-spondylolisthesis>.
- [14] HÜBNEROVÁ, Z. *Prednášky z predmetu SP2 - Pravděpodobnost a statistika II*. VUT FSI, letný semester 2022.
- [15] KALICHMAN, L., KIM, D. H., LI, L., GUERMAZI, A., BERKIN, V. et al. Spondylolysis and Spondylolisthesis: prevalence and association with low back pain in the adult community-based population. *Spine*. 1. vyd. Boston: Lippincott Williams & Wilkins, Inc. Január 2009, zv. 34, č. 2, s. 199–205. ISSN PMC3793342. Dostupné z: <https://doi.org/10.1097/BRS.0b013e31818edcfd>.
- [16] KREJBYCHOVÁ, A. *Srovnávací analýza fyziologické, degenerativní a pooperační bederní páteře pomocí výpočtového modelování*. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/193647>.
- [17] NETTER, F. H. *Atlas of human anatomy*. 6. vyd. Praha: Elsevier, 2014. ISBN 978-1-4557-0418-7.
- [18] OGURKOWSKA, M. B. a BŁASZCZYK, A. Distribution of Young's modulus at various sampling points in a human lumbar spine vertebral body. *The spine journal*. United States: Elsevier Inc. 2020, zv. 20, č. 11, s. 1861–1875. ISSN 1529-9430.
- [19] QIAN, M., XU, W., BRANDT, M. a TANG, H. Additive manufacturing and postprocessing of Ti-6Al-4V for superior mechanical properties. *MRS bulletin*. New York, USA: Cambridge University Press. 2016, zv. 41, č. 10, s. 775–784. ISSN 0883-7694.
- [20] SALEH, I. a LIBRIANTO, D. Surgical treatment of spondylolisthesis using long arm screw: A literature review. *Annals of medicine and surgery*. England: Elsevier Ltd. 2022, zv. 73, s. 103200–103200. ISSN 2049-0801.
- [21] SHAPIRO, S. S. a WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*. JSTOR. 1965, zv. 52, 3/4, s. 591–611.
- [22] SHIGLEY, J. E. *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. V Brně: VUTIUM, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [23] SOMLO, K., POULIOS, K., FUNCH, C. a NIORDSON, C. Anisotropic tensile behaviour of additively manufactured Ti-6Al-4V simulated with crystal plasticity. *Mechanics of materials*. Elsevier Ltd. 2021, zv. 162, s. 104034. ISSN 0167-6636.
- [24] SPITZER, M., WILDENHAIN, J., RAPPILBER, J. a TYERS, M. BoxPlotR: A web tool for generation of box plots. *Nature methods*. LONDON: Springer Nature. 2014, zv. 11, č. 2, s. 121–122. ISSN 1548-7091.
- [25] SPORTINJURYCLINIC. *Spondylolisthesis*. 2022. [Online; cit. 2022-12-12]. Dostupné z: <https://www.sportsinjuryclinic.net/sport-injuries/back/low-back-pain/spondylolisthesis>.

- [26] VIANA, F. A. C., HAFTKA, R. T. a STEFFEN, V. Multiple surrogates: how cross-validation errors can help us to obtain the best predictor. *Structural and multidisciplinary optimization*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. 2009, zv. 39, č. 4, s. 439–457. ISSN 1615-147X.
- [27] VÍT, J. *Prednášky z predmetu BUM - Úvod do materiálových vied a inžénýrství*. VUT FSI, letný semester 2020.
- [28] WILDER, D. G., VINING, R. D., POHLMAN, K. A., MEEKER, W. C., XIA, T. et al. Effect of spinal manipulation on sensorimotor functions in back pain patients: Study protocol for a randomised controlled trial. *Current controlled trials in cardiovascular medicine*. LONDON: Springer Nature. 2011, zv. 12, č. 1, s. 161–161. ISSN 1745-6215.
- [29] ŽÁK, L. *Prednášky z predmetu S1P - Pravděpodobnost a statistika I*. VUT FSI, zimný semester 2021.